UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE
UFR SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

THESE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

Hadj Selem Fouad

Titre :

Etude théorique et numérique d'états stationnaires localisés pour l'équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel quadratique

Soutenue le 13 Décembre 2010 devant le jury composé de :

Fabrice Bethuel	Université de Pierre et Marie Curie – Paris 6	examinateur
Isabelle Catto	Université de Paris – Dauphine	examinateur
Laurent Di Menza	Université de Reims	directeur de thèse
Olivier Goubet	Université de Picardie Jules Verne	examinateur
Louis Jeanjean	Université de Franche–Comté	rapporteur
Jean–Claude Saut	Université Paris-Sud 11	rapporteur

Etude théorique et numérique d'états stationnaires localisés pour l'équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel quadratique

par

Hadjselem Fouad

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

9 décembre 2010

Table des matières

I Etude théorique **19**

1 Etude du cas $\sigma < \sigma^*$ **21**
1.1 Position du problème 21
1.2 Résultat principal 24
1.3 L'analyse de la bifurcation 25
1.3.1 Le problème linéarisé 25
1.3.2 Le comportement local de bifurcation 27
1.3.3 Le comportement global de bifurcation 28
1.4 Conservation de la structure nodale et séparation des branches 29
1.5 Caractérisation variationnelle des solutions bifurquées 35

2 Etude du cas $\sigma = \sigma^*$ **39**
2.1 Position du problème 39
2.2 Existence de solution positive 43
2.3 Non-existence de solutions radiales 48
2.4 Non-existence de minimiseurs 53

3 Etude du cas $\sigma > \sigma^*$ **63**
3.1 Position du problème 63
3.2 Le comportement local de bifurcation 69
3.3 Le comportement global de bifurcation 72

II Etude numérique **77**

4 Etude de la méthode de tir **79**
4.1 Introduction et résultat principal 79
4.2 Structure des solutions radiales 81
4.2.1 Démonstration du résultat principal 81
4.3 Résultats supplémentaires 90
4.3.1 Le cas critique et surcritique 90

4.3.2 Généralisations au cas d'un ouvert borné et de potentiel polynomiale . . . 91

5 Calcul numérique des solutions radiales et diagrammes de bifurcation 93
5.1 Introduction . . . 93
5.2 Le cas sous−critique . . . 94
5.3 Le cas critique . . . 99
5.4 Le cas surcritique . . . 103

6 Asymptotiques 107
6.1 Les asymptotiques pour les grandes valeurs de k . . . 107
6.2 Les asymptotiques pour des grands exposants non linéaires : le cas $\sigma^* = \infty$ 112
6.3 Les asymptotiques pour des grands exposants non linéaires : le cas $\sigma^* < \infty$ 117
6.4 Récapitulatif des principaux résultats . . . 129

7 Les solutions vortex dans le cas bidimensionnel 133
7.1 Structure des solutions vortex . . . 133
7.2 Asymptotiques pour les solutions vortex . . . 135

8 Stabilité de l'état fondamental 141
8.1 Introduction . . . 141
8.2 Instabilité de l'état fondamental dans le cas critique $\sigma = 2/(d-2)$ . . . 144
8.2.1 Caractérisation Variationnelle de l'état fondamental . . . 144
8.2.2 Condition suffisante d'instabilité . . . 146
8.3 Etude numérique de la stabilité de l'état fondamental . . . 148
8.3.1 Critère de stabilité . . . 148
8.3.2 Dynamiques de stabilité . . . 151

9 Résultats numériques dans le cas sans potentiel 157
9.1 Introduction et rappels . . . 157
9.2 Stabilité de l'état fondamental . . . 160
9.2.1 Critère de stabilité . . . 160
9.2.2 La force de stabilité . . . 161
9.2.3 La stabilité sous perturbations non radiales . . . 163
9.3 Stabilité du second état excité $Q_{2,\omega}$ . . . 165
9.3.1 Stabilité dans $H^1_{0,impair}(-1,1)$ . . . 165
9.3.2 Stabilité sous perturbations non radiales . . . 168
9.3.3 Le cas de très grandes fréquences . . . 173
9.4 Le troisième état excité . . . 173
9.4.1 Le cas $p \geq 5$ . . . 173
9.4.2 Le cas $1 < p < 5$ . . . 176

9.5 Récapitulatif des principales observations 178

Introduction

Dès 1925, Bose et Einstein prédisent que pour un gaz de particules sans interaction en dessous d'une certaine température critique, une partie macroscopique du gaz en question doit s'accumuler dans l'état quantique d'énergie minimale. Dans un tel état, toutes les particules perdent leur individualité et les atomes occupent un même état quantique. En particulier, l'aspect ondulatoire de la matière devient visible à grande échelle. A cette époque, aucune expérience ne peut confirmer un tel résultat car aux températures requises, quasiment tous les matériaux sont solides. Ce n'est qu'en 1995 que le premier condensat est réalisé expérimentalement par une équipe du laboratoire NIST/JILA (Boulder, Colorado, États-Unis), dirigée par Eric Cornell et Carl Wieman. Il sont parvenus à obtenir pendant quelques secondes un condensat de Bose-Einstein constitué de quelques milliers d'atomes de rubidium prérefroidis par laser, puis refroidis davantage par évaporation dans un piège magnétique. Ces chercheurs recevront en 2001 le prix Nobel de Physique pour la découverte de la condensation de Bose-Einstein dans les gaz et pour des avancées dans l'étude des propriétés de ces condensats. Depuis cette première découverte, les propriétés des condensats de Bose-Einstein sont un sujet d'étude important chez les physiciens et les mathématiciens.

Considéré comme un seul objet quantique macroscopique, un condensat peut être modélisé par une fonction d'onde collective ψ. En présence d'un potentiel harmonique de confinement modélisant un piège magnétique $V(x) := \|x\|^2$, l'évolution du système en fonction du temps, peut être décrite par l'équation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel harmonique (appelé aussi l'équation de Bose-Einstein)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - \|x\|^2\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0,\ \psi = \psi(t,x) \in \mathbb{C},$$

où $x \in \mathbb{R}^d$ est la variable transverse d'espace, $t \in \mathbb{R}^+$ et $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne l'opérateur de Laplace. Notons finalement que le terme non linéaire caractérisé par un exposant $\sigma > 0$ correspond aux interactions inter-atomiques répulsives.

Le problème de Cauchy relatif à cette équation a fait l'objet d'études intensives (Kato, Ginibre-Velo, Tsutsumi, Oh, Cazenave, etc). En particulier, il a été prouvé que ce problème est localement bien posé dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$ si $0 < \sigma < 2/(d-2)$ et que toutes les solutions sont globales en temps dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ si $0 < \sigma < 2/d$ (voir [1] par exemple).

Parmi les solutions de cette équation, on peut chercher des solutions stationnaires localisées en espace c'est-à-dire ψ sous la forme $\psi(t,x) = u(\|x\|)e^{i\omega t}$, où $\omega > 0$ est un paramètre qui dépend seulement de la matière utilisée pour réaliser le condensat (souvent appelé fréquence d'onde) et u tendant vers zéro lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini. Dans ce contexte, l'équation de Bose-Einstein se transforme en le problème elliptique non linéaire :

$$-\omega u + \Delta u - \|x\|^2 u + |u|^{2\sigma} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

Dans le cas $0 \leq \sigma < \sigma^* = 2/(d-2)$, Kavian et Weissler ont prouvé dans [6] l'existence d'une infinité de solutions de (1.2) par des méthodes variationnelles. Mais cette caractérisation variationnelle ne donne pas des informations détaillées sur la forme de la solution et en particulier des questions concernant l'existence des états radiaux localisés avec un nombre prescrit de nœuds demeurent ouvertes, contrairement à l'équation canonique (NLS)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0$$

pour laquelle de nombreux résultats sont connus. En fait, (1.3) admet plusieurs solutions radiales localisées pour $d \geq 2$ et les mêmes valeurs de σ (à savoir, $\sigma > 0$ si $d \geq 2$ et $\sigma < \sigma^*$ si $d \geq 3$) qui peuvent être paramétrées par le nombre k des nœuds et souvent appelées états liés ou états excités par correspondance avec le formalisme de la mécanique quantique. Il est à noter que dans ce cas sans potentiel, il est toujours possible de supposer que $\omega = 1$. En effet, en cherchant les états stationnaires pour l'équation (NLS), le problème elliptique correspondant s'écrit

$$-\Delta u + \omega u - |u|^{2\sigma} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Par suite, si u est solution de (2) pour une valeur quelconque de $\omega > 0$, alors la fonction $\tilde{u}(x) := \omega^{-\frac{1}{2\sigma}} u\left(x/\sqrt{\omega}\right)$ est solution de la même équation avec $\omega = 1$. Ainsi, la structure des états stationnaires ne dépend pas de la fréquence ω dans ce cas. D'autre part, on peut établir des conditions nécessaires d'existence de solutions dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ en utilisant l'identité de Pohozaev (voir [17]). Cette méthode générale consiste à multiplier l'équation considérée par des fonctions particulières (souvent appelés les multiplicateurs de Pohozaev) : $x_i \partial_i u$. Ensuite, en effectuant des intégrations par parties, on obtient une identité générale qui doit être satisfaite par les solutions éventuelles du problème elliptique conidéré. Dans le cas sans potentiel (2), on obtient l'identité suivante

$$\frac{d\omega\sigma}{\sigma+1}\|\nabla u\|_2 = \frac{2-(d-2)\sigma}{\sigma+1}\|u\|_2, \quad \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^d) \text{ solution de (2).}$$

Par suite, (2) n'admet pas de solutions non triviales dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ quand $\omega \geq 0$ et $\sigma \geq \sigma^*$, ou $\omega \leq 0$ et $\sigma \leq \sigma^*$ De plus, en utilisant le "lemme de Kato" (voir [6]), on peut aussi vérifier que cette équation n'a pas non plus de solutions quand $\omega \leq 0$ et $\sigma \geq \sigma^*$. En effet, ce lemme s'applique dans le cas des problèmes elliptiques dont la partie linéaire s'écrit comme $-\Delta u + V(x)\, u$ avec $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $V(x) = o(1/x)$ quand $x \to \infty$. Il permet de conclure l'absence de valeur propre plongée dans le spectre essentiel de tels opérateurs (voir [17]). En particulier, quitte à supposer que la solution cherchée u est bornée et tend rapidement vers zéro à l'infini, on peut conclure que

$u = 0$. Ainsi, l'étude du cas sans potentiel se réduit au cas $\omega = 1$ et $0 < \sigma < \sigma^*$ qui a été complètement résolu par Weinstein, Mc Leod, Troy et Weissler (voir par exemple [4]).

Le cas incluant le potentiel quadratique $\|x\|^2$ est plus difficile. Tout d'abord, on peut vérifier qu'il n'est plus possible de procéder à un changement d'échelle en espace et en amplitude afin d'éliminer le paramètre ω comme dans le cas précédent. De plus, l'identité de Pohozaev correspondante s'écrit

$$[(d-2)\sigma - 2]\|\nabla u\|_2^2 + [(d+2)\sigma + 2]\|xu\|_2^2 = -\omega\sigma d\|u\|_2^2.$$

On ne peut donc exclure aucun cas si $\omega < 0$, cette identité fait intervenir 3 termes dont l'un est toujours positif contrairement au cas sans potentiel. Comme en outre le lemme de Kato ne s'applique pas dans ce cas car $V(x) = \|x\|^2 \to +\infty$ quand $\|x\| \to \infty$, on voit que le cas $\omega < 0$ doit être étudié.

Dans un premier temps, on considère le cas $\sigma < \sigma^*$. Notons que dans ce nouveau contexte, contrairement au cas sans potentiel, l'opérateur $-\Delta + \|x\|^2$ admet une suite infinie de valeurs propres ω_k. Ceci permet d'utiliser la théorie des bifurcations en outre des méthodes variationnelles. En effet, les problèmes elliptiques (1.2) et (2) peuvent être transformés en une équation à un paramètre ω (ou λ) : $F(\omega, u) = 0$ où

$$F \ : \ \mathbb{R} \times X \to Y$$

avec X et Y deux espaces de Banach dont le choix dépendra du problème elliptique et du type de la non-linéarité et doit être fait de telle sorte qu'on puisse donner un sens utile au terme non linéaire. Lorsque F est assez régulière (de classe C^1 par exemple), on peut utiliser des méthodes différentielles pour décrire les solutions de ces équations au voisinage d'une solution particulière (ω^*, u^*). En effet, on peut facilement vérifier que dans les deux cas (les équations (2) et (1.2)), le problème $F(\omega, u) = 0$ admet une "branche" de solutions triviales formée de l'ensemble des points $(\omega, 0)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Dans le cas où la différentielle $\partial_u F(\omega^*, 0)$ est un isomorphisme de X vers Y, le théorème des fonctions implicites permet de décrire l'ensemble des solutions de $F(\omega, u) = 0$ au voisinage de $(\omega^*, 0)$, en particulier, seulement la courbe de solutions triviales peut exister. Par contre, dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée ($\partial_u F(\omega^*, 0)$ n'est pas un isomorphisme, en particulier si ω^* est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + V(x)$), de nombreux cas de figures peuvent apparaître notamment l'apparition d'une nouvelle "branche" non triviale de solutions : on parle alors de bifurcation à partir d'une branche de solutions connue (voir la figure 1 pour l'illustration d'un tel phénomène).
Afin de pouvoir démontrer l'existence de branches bifurquées dans notre cas, on utilise le théorème de bifurcation locale de Crandall-Rabinowitz [19]. Ceci nous permettra en particulier de calculer le nombre de zéros de chaque solution au voisinage de chaque valeur propre en utilisant les propriétés des vecteurs propres correspondants et qui seront

étudiés ultérieurement. Ensuite, on s'intéresse au comportement de chaque branche quand on s'éloigne des points de bifurcations (on parle alors du comportement *global* de bifurcation). Pour ce faire, on utilise des méthodes variationnelles qui s'appliquent facilement dans ce cas sous-critique à cause des injections compactes de Sobolev. Ainsi, on obtient un résultat général décrivant la structure des solutions nodales (c'est à dire les solutions avec nombre prescrit de zéros) pour l'équation de Bose-Einstein.

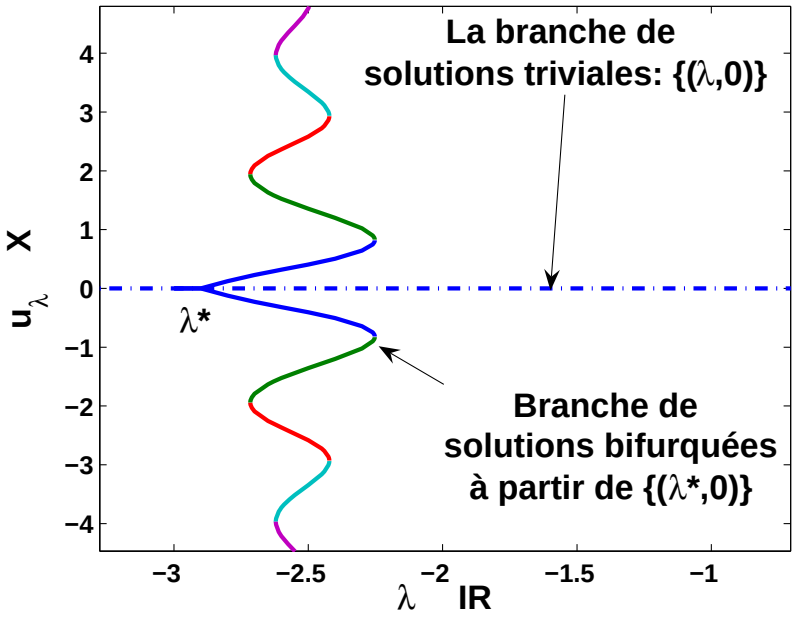


FIGURE 1 – Phénomène de bifurcation

Dans le cas critique, on peut établir l'existence d'une branche locale de solutions bifurquées au voisinage de chaque valeur propre. Cependant, les méthodes variationnelles utilisées pour $\sigma < \sigma^*$ dans le but d'étudier le comprtement global des branches bifurquées ne sont plus valides puisque la condition standard de Palais-Smale (voir [17]) échoue si $\sigma = \sigma^*$. En effet, la méthode variationnelle consiste à transformer les problèmes elliptiques sous la forme $G'(u) = 0$ avec $G : H \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle suffisamment régulière et H un espace de Banach choisi convenablement pour que G soit bien défini. On cherche alors les valeurs critiques pour la fonction G. L'outil principal pour détecter les valeurs critiques est le lemme de déformation (et plusieurs autres résultats qui en découlent comme le Lemme de col et le principe de minmax (voir [17] et [18] par exemple)). Ces outils topologiques ne fournissent malheureusement pas l'existence de valeurs critiques mais plutôt de "valeurs critiques généralisées" ; c'est-à-dire

des valeurs $c \in \mathbb{R}$ telles qu'il existe une suite u_n dans H vérifiant

$$G(u_n) \to c \text{ et } G'(u_n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty. \tag{3}$$

Par suite, afin d'établir l'existence des points critiques pour G, il faut vérifier que toutes les suites vérifiant (3) sont relativement compactes dans H. Dans ce cas, on dit que G vérifie la condition de Palais−Smale. Dans le cas $\sigma < \sigma^*$, on peut vérifier cette propriété en utilisant le fait que les injections de Sobolev sont compactes. Quand $\sigma = \sigma^*$, ces injections sont continues mais non compactes, le problème devient alors plus difficile. Un progrès remarquable dans l'étude du cas critique a été accompli dans le célèbre article de Brézis et Nirenberg [33] pour l'étude de problème semi-linéaire de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u, \text{ sur } \Omega, \ p = \dfrac{d+2}{d-2} \\ \\ u > 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné, étoilé de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$ et où $d \geq 3$. On sait alors que cette équation admet au moins une solution positive pour n'importe quel $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$ lorsque $d \geq 4$ et pour n'importe quel $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)/4$ lorsque $d = 3$, où λ_1 désigne la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. De plus, en utilisant des identités de Pohozaev générales (en utilisant des multiplicateurs de la forme $\psi(x)x_i\partial_i(u)$, avec ψ fonction choisie en fonction du problème elliptique considéré), il a été montré que ces conditions sont aussi nécessaires. Par la suite, cette équation a été largement étudiée depuis les années 1980 et plusieurs résultats concernant l'existence et les propriétés des solutions ont été obtenus. En particulier, dans le cas où l'ouvert considéré est une boule de $\mathbb{R}^d$, plusieurs résultats concernant l'existence des états radiaux localisés avec des nombres prescrits de zéros ont été obtenus. Le deuxième objectif de ce travail sera donc d'étudier des phénomènes déjà observés pour le problème de Brézis et Nirenberg [33] dans notre cas, en utilisant des outils théoriques et numériques.

Dans le cas surcritique, puisque les injections de Sobolev n'ont pas lieu si $\sigma > \sigma^*$, on ne peut pas utiliser la méthode variationnelle directement. Par conséquent, les résultats concernant ce type de non−linéarité, ont été souvent obtenus à l'aide de méthodes fonctionnelles, notamment la théorie des bifurcations. Néanmoins, à cause du caractère non borné de l'espace considéré, l'application de ces méthodes dans notre cas pose beaucoup de problèmes. En effet, bien qu'on ait déjà prouvé dans [18] l'existence de branches de bifurcation globales solutions d'une équation elliptique semi-linéaire sur un domaine borné, on utilise essentiellement le fait que l'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est inclus dans $L^2(\Omega)$ pour chaque $\alpha \in (0, 1]$ si Ω est borné (par la suite, le caractère non borné du domaine est crucial pour leur preuve puisque cette injection n'est pas satisfaite dans le cas général). Ainsi, il semble que la méthode ne soit pas utilisable

pour l'équation de (CBE). Le troisième objectif de ce travail sera donc l'étude du phénomène de bifurcation des branches de solutions radiales localisées pour l'équation de Bose-Einstein dans le cas $\sigma > \sigma^*$.

Ce travail comporte deux parties. La première sera consacrée à l'étude théorique des solutions stationnaires et du phénomène de bifurcation pour les trois types de non−linéarités et sera composée de trois chapitres . La deuxième partie sera consacrée à l'étude numérique des états excités et sera constituée de cinq chapitres. Ces calculs numériques fournissent une illustration des résultats théoriques obtenus et permettent aussi d'aborder des problèmes pour lesquels peu de résultats théoriques sont connus comme la stabilité et l'unicité des états excités.

Dans le premier chapitre, nous étudions le phénomène de bifurcation de l'équation (1.2) dans le cas sous-critique. On commence par étudier les comportements global et local des branches bifurquées et on étudie les propriétés nodales de ces branches de solutions afin d'exclure la seconde hypothèse dans le théorème de bifurcation globale de Rabinowitz. Ensuite, on utilise la caractérisation variationnelle des solutions bifurquées pour montrer que ces branches ne sont pas bornées dans la direction ω. Les résultats obtenus indiquent l'existence d'une infinité d'états localisés radiaux pour chaque valeur de $\omega \in \mathbb{R}$. De plus, cette étude permet d'obtenir une condition suffisante pour l'existence d'une solution avec un nombre de zéros prescrit en fonction de la fréquence de l'onde ω.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions la solution positive dans la cas critique $\sigma = \sigma^*$ en utilisant des méthodes développées par Brézis et Niremberg dans [33]. Nous commençons par établir une condition suffisante en fonction de la fréquence ω et de la dimension d. Ensuite, nous considérons le problème de non-existence et qui, comme prévu, sera plus difficile en dimension 3. En outre, nous verrons que la présence du potentiel, rend ce problème plus compliqué. On établit alors deux résultats de non-existence dans le cas $d = 3$: le premier concerne les solutions radiales alors que le deuxième illustre la non−existence de minimiseurs pour le problème variationnel correspondant à l'équation (1.2).

Dans le troisième chapitre, nous conidérons le cas surcritique $\sigma > \sigma^*$. Afin de surmonter les difficultés dues au caractère non borné du domaine, on considère une équation modifiée en remplaçant le terme non linéaire $N(u) = |u|^{2\sigma}u$ par $N'(u) := \chi_k(|u|^2)|u|^{2\sigma}u$ avec χ_k une fonction plateau convenablement choisie. Cette forme spéciale de modification permet d'avoir une non−linéarité de type sous−critique. Par conséquent, on peut utiliser les mêmes méthodes employées dans le chapitre 1 pour l'étude du cas sous-critique. Alors, en appliquant le théorème de bifurcation locale de Crandall et Rabinowitz à la nouvelle équation, on voit qu'à chaque valeur propre de l'oscillateur harmonique, il correspond une branche de bifurcation locale. Ensuite, en

utilisant des arguments de régularités elliptiques, on vérifie qu'il s'agit en fait de branche de bifurcation locale pour l'équation originale (1.2). Finalement, on prouve l'existence de branches globales de solutions avec un nombre prescrit de zéros par l'absurde en utilisant un argument de continuation. On notera que cette méthode s'applique aussi dans le cas $\sigma = \sigma^*$ permettant de décrire les branches bifurquées de solutions nodales et généralisant les résultats du chapitre 2 qui concerne seulement la branche des solutions positives.

Dans le quatrième chapitre, nous étudions la convergence de l'algorithme de tir vers des états stationnaires localisés avec un nombre prescrit de zéros pour l'équation (1.2). Cette étude nous permettra d'appliquer la méthode de tir pour le calcul numérique des solutions bifurquées. Bien que le résultat principal de ce paragraphe ne concerne que le cas sous-critique $\sigma < \sigma^*$, on obtiendra aussi des résultats partiels de convergence que l'on peut utilise numériquement dans les cas critique et surcritique. Ainsi, nous serons en mesure de dégager le diagramme de bifurcation dans les trois cas de non−linéarités.

Dans le cinquième chapitre, on expose quelques calculs numériques qui illustrent les résultats obtenus dans la partie théorique et donnent un comportement qualitatif précis sur la forme de ces solutions. En outre, les diagrammes de bifurcation seront tracés afin de fournir des informations sur les solutions (surtout la multiplicité) essayant de répondre à des questions qui restent ouvertes. En effet, la forme des diagrammes obtenus aide à mieux comprendre le phénomène de bifurcation pour cette équation. Ainsi, plusieurs résultats d'existence et de non−existence de solutions nodales seront conjecturés numériquement. En particulier, on notera que dans le cas surcritique, l'équation de (CBE) admet plusieurs solutions positives pour certaines fréquence ω contrairement au cas $\sigma \leq \sigma^*$. De même, pour des valeurs particulières de ω, plusieurs solutions à un seul nombre de noeuds peuvent exister.

Dans le sixième chapitre, on étudie le comportement asymptotique des états excités à grand nombre de nœuds . En effet, dans le cas sans potentiel, il a été trouvé dans [15] que les normes L^2 et H^1 de u_k se comportent asymptotiquement comme $k^{d/2}$ sous des hypothèses convenables basées sur la non-linéarité. Dans [4], il a été numériquement observé que la norme L^∞ de k se comporte comme $k^{\gamma(d,\sigma)}$ pour des grandes valeurs de k, avec $\gamma(d,\sigma) = \frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma}$. Nous essayons alors de détecter des lois similaires dans le cas de l'équation (1.2). Ceci permet d'étudier l'influence de d, σ et ω sur les états stationnaires excités pour un grand nombre de nœuds. Ainsi, nous obtenons plusieurs asymptotiques concernant des quantités telles que $\|u_k\|_{L^\infty}$, $\|u_k\|_{L^2}$ et $\|\nabla u_k\|_{L^2}$.

Dans le septième chapitre, on étudie numériquement les solutions de type vortex en dimension 2. En effet dans ce cas particulier, il est aussi possible de chercher des états stationnaires qui s'expriment en $\psi(t,x) = e^{i\omega t}e^{im\theta}u(\|x\|)$, où m est un entier (parfois

connu sous le nom de la charge du vortex) et (r, θ) désigne les coordonnées polaires de x (c'est-à-dire $(x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$). Cela veut dire que la solution spatiale n'est plus radiale, même si la fonction u dépend encore de r. En utilisant la méthode de tir, nous vérifions numériquement qu'il est possible de calculer une suite infinie de solutions vortex localisées : $u_{k,m}$, $k \geq k_0$ pour n'importe quelle valeur de $\omega \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{N}$. De plus, nous obtenons des lois asymptotiques similaires à celles obtenues pour les états excités et qui s'expriment aussi en fonction de la charge vortex m.

Dans le huitième chapitre, on considère la stabilité de l'état fondamental dans les cas sous-critique et critique. Dans un premier temps, nous démontrons un résultat d'instabilité *orbitale* (c'est-à-dire la stabilité modulo les translations et les multiplications par $e^{i\theta}$) dans le cas $\sigma = \sigma^*$ généralisant ainsi les résultats de Fukuizumi et Otha dans [3] et qui concerne seulement le cas sous-critique. Ensuite, on cherche à vérifier numériquement la condition énergétique de stabilité de Grillakis, Shatah et Strauss (s'exprime en terme de la dérivée de la norme L^2 : $\partial_\omega \|u_\omega\|_2^2$) afin de donner un résultat optimal sans se limiter au cas des petites ou grandes fréquences. Précisément, on essaye d'observer numériquement le comportement détaillé de la norme $\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2$ le long de la branche de bifurcation C_0. En particulier, on notera que tous nos calculs suggèrent bien que pour $\sigma > 2/d$, le cette quantité admet toujours le même comportement en fonction de la fréquence indépendamment de la non−linéarité et de la dimension. Ceci se traduit par l'existence d'une unique fréquence ω_c telle que u_0 soit orbitalement stable pour tout $(\omega < \omega_c)$ et orbitalement instable si $(\omega > \omega_c)$. Enfin, étant en mesure de calculer cette fréquence numériquement, on s'intéressera au comportement de cette valeur seuil en fonction de l'exposant non linéaire σ et de la dimension d.

Finalement, le dernier chapitre est consacré à l'étude numérique de la stabilité des états excités de l'équation de Schrödinger non linéaire sur la boule unité de $\mathbb{R}^d$. Nous avons fait ce choix pour pouvoir étudier le cas des états excités $u_k, k \geq 1$ en évitant les effets des conditions de bord qui sont imposées par la discrétisation numérique dans le cas de l'équation de Bose-Einstein. En fait, dans le cas d'un ouvert borné, les valeurs de la solution sur le bord sont réelles contrairement au cas de l'espace entier $\mathbb{R}^d$. On Commence par fournir une illustration numérique des résultats théoriques sur la stabilité et l'instabilité de l'état fondamental qui ont été obtenus récemment dans [50]. Puis, on va essayer d'étudier le cas des états excités d'ordre supérieur pour lesquels très peu de résultats sont connus, à la fois du point de vue théorique que numérique (voir [52]).

Les chapitres 1 et 5 correspondent à une version plus détaillée de la prépublication [28]. Les chapitres 2 et 3 sont le fruit d'un travail en collaboration avec Hiroaki Kikuchi et correspondent à la prépublication [30]. Les chapitres 4, 6 et 7 correspondent à une version plus détaillée d'un article co−signée avec Laurent Di Menza [29]. Le capitre 9

correspond à la prépublication [31] dans laquelle les questions analytiques sont dues à Reika Fukuizumi et Hiroaki Kikuchi.

Première partie

Etude théorique

Chapitre 1

Etude du cas $\sigma < \sigma^*$

1.1 Position du problème

Dans ce premier chapitre, nous étudions la structure et les propriétés des ondes solitaires radiales pour l'équation de Schrödinger non-linéaire à terme potentiel harmonique $\|x\|^2$ suivante :

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - \|x\|^2\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0,\ \psi = \psi(t,x) \in \mathbb{C},\quad x \in \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

dans le cas $\sigma < \sigma^*$. Cette equation sera appelée ci-après l'équation de (CBE) pour simplifier.
Cherchant des solutions de la forme $\psi(t,x) = u(\|x\|)e^{i\omega t}$, où ω est un paramètre réel qui désigne le potentiel chimique et où u est une fonction à valeur complexe et supposée être spatialement localisée (disons une solution qui décroit rapidement vers zéro lorsque $r := \|x\|$ tend vers l'infini, ce type de solutions peut être désigné par *bright* soliton), l'équation (1.1) se transforme en le problème non linéaire elliptique

$$-\Delta u + \|x\|^2 u + \omega u - |u|^{2\sigma}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Comme (1.1) possède deux quantités conservées désignées respectivement par

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \|\nabla u(t,x)\|^2 + \|x\|^2|u(t,x)|^2 - \frac{1}{\sigma+1}|u(t,x)|^{2(\sigma+1)} \right\} dx \ \text{ et}$$

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2\, dx$$

il est tout à fait naturel d'étudier les solutions de (1.1) et (1.2) dans l'espace d'énergie

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d),\ \|x\|u \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

En utilisant des arguments de compacité, Kavian et Weissler ont prouvé dans [6] l'existence d'une infinité de solutions de (1.2) dans le cas sous−critique par des méthodes variationnelles. De la même manière, on peut prouver (comme on va le voir ultérieurement) l'existence d'une suite infinie d'ondes stationnaires radiales pour (1.1). Mais cette caractérisation variationnelle ne donne pas des informations détaillées sur la forme de la solution et en particulier des questions concernant l'existence des états radiaux localisés avec un nombre prescrit de noeuds demeurent ouvertes, contrairement à l'équation canonique (NLS)

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0. \tag{1.3}$$

En fait, (1.3) admet plusieurs solutions radiales localisées pour $d \geq 2$ et les mêmes valeurs de σ (à savoir, $\sigma > 0$ si $d \geq 2$ et $\sigma < \sigma^*$ si $d \geq 3$) qui peuvent être paramétrées par le nombre k des nœuds et souvent appelées états liés ou états excités (voir [4] et [5]). Par conséquent, le but principal de ce chapitre est d'étudier l'existence de ces solutions stationnaires nodales pour la même équation (NLS) avec le terme potentiel supplémentaire par une caractérisation alternative des solutions variationnelles en utilisant la théorie de bifurcation. Notons que pour l'équation (CBE), il n'est pas possible d'utiliser n'importe quel argument de changement d'échelle afin d'éliminer la fréquence de l'onde ω contrairement à l'équation canonique (NLS), (1.3) (voir [4], Chapitre 2.1). En effet, dans ce cas sans potentiel, si u est une solution de (NLS) pour une valeur quelconque de $\omega > 0$, alors la fonction $\tilde{u}(x) := \omega^{-\frac{1}{2\sigma}} u(\frac{x}{\sqrt{(\omega)}})$ est solution de la même équation avec $\omega = 1$, Ainsi, à l'aide de ce simple argument, il est toujours possible de supposer que $\omega = 1$. Alors que, du à la présence de ce nouveau terme potentiel, ceci n'est plus possible. Pour cette raison , ω devrait être considérée comme un véritable paramètre dans l'équation.

La présence du potentiel quadratique nous aide à surmonter les problèmes dûs au caractère non borné du domaine spatial sous-jacent tout comme la non compacité du problème original. Néanmoins, nous nous limiterons au cas radial afin de réduire la grande multiplicité des vecteurs propres. En fait, en utilisant la propriété potentielle de (1.2), on voit que chaque valeur propre de l'oscillateur harmonique donne naissance à un point de bifurcation pour (1.2) (voir [18], Théorème 11.4). Mais dans ce cas général, nous ne pouvons pas décrire exactement la structure de ces solutions bifurquées, principalement le diagramme de bifurcation n'est pas constitué nécessairement d'une seule courbe non triviale. Par conséquent, nous ne pouvons pas les identifier avec les solutions obtenues à l'aide des méthodes variationnelles contrairement au cas d'une valeur propre simple (avec hypothèses supplémentaires). En effet, dans ce cas, l'ensemble des solutions est entièrement décrit sur un voisinage du point de bifurcation par le théorème de Crandall-Rabinowitz ([19]) en utilisant le théorème des fonctions implicites. En outre, afin d'utiliser le théorème de bifurcation globale de Rabinowitz, la

multiplicité des valeurs propres de l'opérateur linéarisé doit être impaire, ce qui n'est pas satisfait dans (1.2). En effet, si on définit sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ un opérateur auto-adjoint non borné L en posant

$$Lu = -\Delta u + \|x\|^2 u \text{ et } D(L) = \left\{u \in X; Lu \in L^2(\mathbb{R}^d)\right\}$$

alors $D(L)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et X, et L est un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ à résolvante compacte. De plus, les valeurs propres de L sont les nombres $\lambda_k = n + 2k$ $k \geq 0$ avec les fonctions propres

$$\tilde{\phi}_{k,\beta} = \quad e^{\|x\|^2/2} \ \ \partial^\beta e^{-\|x\|^2}, \text{ avec } |\beta| = k. \tag{1.4}$$

Chaque valeur propre $\tilde{\lambda}_k$ étant de multiplicité C_{n-1}^{n+k-1} qui peut être un entier pair (voir par exemple [6], paragraphe 6). Par conséquent, on va considérer dans la suite un sous-espace fermé de X

$$X_{rad} := \{u \in X, \ u(x) = U(r), \ r = \|x\|\}$$

qui est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $\langle u, v\rangle_{X_{rad}} = \langle u, v\rangle_X = (\nabla u, \nabla v) + (xu, xv)$ $((.,.)$ désignant le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathbb{R}^n))$ et la norme d'énergie correspondante

$$\|u\|^2_{X_{rad}} = \|u\|^2_X := \|\nabla u\|^2_2 + \|xu\|^2_2.$$

Ceci nous permettra de résoudre ce problème de multiplicité en se ramenant au cas le plus favorable pour utiliser des résultat de la théorie de bifurcation, à savoir le cas des valeurs propres simples.

D'autre part, nous rappelons que dans le cas uni-dimensionnel , Kurth [21] a prouvé l'existence d'une infinité de solutions de (1.2) par une caractérisation alternative des solutions variationnelles à l'aide de la théorie de bifurcation. Bien que ces arguments s'appliquent pour des non linéarités $f(u)$ locales ou non locales très générales, les hypothèses sur f ne couvrent pas les cas $f(u) := |u|^{2\sigma}u$ si $\sigma > 2/d$. De plus, ce résultat est limité à l'existence des branches bifurquées non bornées de solutions et n'aborde pas la question qui concerne la description des propriété nodales de ces états excités. Dans ce contexte, Le caractère non borné en espace pose ici un nouveau problème qui n'est lié ni aux méthodes variationnelles, ni à la théorie des bifurcations. En effet il faut s'assurer que les zéros d'une fonctions u solution de (1.2), ne peuvent pas s'échapper vers l'infini le long d'une branche bifurquée non bornée de solution. Ainsi, l'objectif principal de ce premier chapitre est de généraliser le résultat kurth [21] au cas sous-critique $\sigma < 2/((d-2))$ tout en étudiant les propriétés des solutions nodales bifurquées. Ce chapitre est organisé comme suit : dans le paragraphe 2, nous récapitulons les principaux résultats obtenus dans ce chapitre. Dans le paragraphe 3, nous étudions le phénomène de bifurcation de (1.2). Le paragraphe 4 est consacré à l'étude des propriétés nodales des branches bifurquées (c'est-à-dire le nombre de zéros des solutions) afin

d'exclure la seconde hypothèse dans le théorème de bifurcation globale de Rabinowitz. La caractérisation variationnelle de ces solutions est prouvée dans le paragraphe 5 montrant que ces branches ne sont pas bornées dans la direction ω.

1.2 Résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant

Théorème 1.2.1 *Pour chaque valeur propre de l'oscillateur harmonique radial, une branche non bornée d'états liés non linéaires bifurque dans le sens du théorème de bifurcation global de Rabinowitz. En outre, le nombre de zéros d'une solution est conservé le long de chaque courbe non triviale. D'autre part, pour les petites fréquences ω (quand (ω, u_ω) est proche du point de bifurcation $(\omega_k, 0)$), les solutions bifurquées peuvent être caractérisées comme minimisantes (respectivement points selles) d'une fonctionnelle appropriée.*

La charactérisation variationnelle des solutions bifurquées suggère que toutes ces branches sont non bornées dans la direction ω. En effet, si on admet que l'enemble des solutions variationnelles forment une partie connexe de $(\mathbb{R} \times X_{rad})$, l'ennsemble de ces solutions serait alors inclus dans les courbes de solutions bifurquées. Ces dernières, seront par conséquence non bornées dans la direction ω. Cette condition a été vérifiée dans le cas de la solution positive par Shatah [[56], (Théorème 18)] dans le cas sans potentiel NLS. Cette méthode s'applique facilement dans notre cas en utilisant l'unicité de la solution positive établie par Hirose et Ohta [7]. Dans le cas des autres états excités, il n'était pas possible de vérifier cette propriété. Cependant, les calculs numériques qu'on a effectués (voir partie 2), suggèrent que toutes les branches bifurqués sont non bornées en ω. En particulier, considérant le problème aux valeurs initiales

$$\begin{cases} u''(r) + \dfrac{d-1}{r}u'(r) - \omega u(r) - r^2 u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0 \\ u(0) = \beta > 0, \quad u'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

Nos simulations suggèrent que pour tout entier $k \geq 0$, si

$$4k > -(\omega + d) \tag{1.6}$$

il existe une solution $u_k = u(r, \beta_k)$ pour (3.1) ayant exactement k zéros dans $[0, +\infty[$ et $u(r, \beta_k) \to 0$ exponentiellement quand $r \to +\infty$. Par ailleurs, pour chaque valeur fixée de ω, il existe une suite infinie de solutions $(u_k)_{k \geq k_0}$ de (3.1) paramétrée par le nombre de nœuds k où $k_0 := k_0(\omega)$ est défini par (1.6) ($k_0(\omega)$ est égal à la partie entière de $-\frac{\omega+d}{4}$).

Dans le chapitre 4, on démontrera une version plus faible de ce résultat en utilisant la méthode de tir. Cette approche permet d'éviter les problèmes de continutés des solutions variationnelles par rapport à la fréquence ω.

Comme nous le verrons plus tard, si $d = 1$, la structure du spectre de l'opérateur linéarisé est légèrement modifiée. En effet, en raison du terme singulier $u'(r)/r$ qui apparaît comme conséquence de l'hypothèse de géométrie radiale lorsque $d > 1$, c'est le seul cas dans lequel il est possible de trouver des fonctions propres impaires. Par conséquent, c'est le seul cas où il y a des branches bifurquées des solutions impaires. Plus précisément, les solutions bifurquées à partir de ces valeurs propres sont des solutions du système ordinaire

$$\begin{cases} u''(r) - \omega u(r) - r^2 u(r) + |u(r)|^{2\sigma} u(r) = 0 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \beta > 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

D'après le théorème 4.1.1, (1.7) admet des solutions ayant exactement k zéros dans $[0, +\infty[$ et $u(r, \beta_k) \to 0$ exponentiellement quand $r \to +\infty$ pour les fréquences proches des valeurs propres correspondantes. De plus, la caractérisation variationnelle suggère que ce résultat reste valable pour tout $\omega > \omega_k$.

1.3 L'analyse de la bifurcation

1.3.1 Le problème linéarisé

On commence par analyser le problème des valeurs propres relatif à (1.2) dans le cas radial, i.e.

$$\Delta u - \|x\|^2 u = \omega u, \quad u \in X_{rad}. \tag{1.8}$$

des bifurcations locales peuvent seulement être prévues aux valeurs propres de l'opérateur linéarisé. Nous commençons donc par l'étude des propriétés spectrales de (1.8), en particulier nous avons le

Lemme 1.3.1 *Soit*

$$\begin{cases} \omega_n = -(2n + d) & si\ d = 1 \\ \omega_n = -(4n + d) & si\ d \geq 2. \end{cases} \tag{1.9}$$

Alors, les ω_n sont exactement les valeurs propres de (1.8)*. Elles sont simples et si on désigne par $\phi_n = \phi_n(r)$ les fonctions propres correspondantes, alors tout ϕ_n admet exactement n zéros dans $]0, +\infty[$ et ces zéros sont simples.*

Preuve du Lemme 4.2.1 Comme il est bien connu que les solutions de (1.8) sont régulières, le problème se transforme en l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \phi''(r) + \dfrac{d-1}{r}\phi'(r) - r^2\phi(r) = \omega\phi(r) \\ \phi(r) \in X_{rad}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Posant $\phi(r) = h(r)e^{-r^2/2}$, (1.10) se réduit à

$$h''(r) + \frac{d-1}{r}h'(r) - 2rh'(r) - (d+\omega)h(r) = 0. \tag{1.11}$$

En utilisant (1.4), on remarque facilement que $h(r)$ est une fonction polynomiale (car ϕ appartient à l'espace engendré par les vecteurs propres). On va donc essayer de résoudre l'équation à l'aide des séries entières en r, ce qui s'écrit

$$h(r) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n.$$

En injectant ceci dans (1.11) et en exigeant que les coefficients de chaque puissance s'annulent, on obtient la formule de récurrence suivante pour les cœfficients a_n :

$$a_{n+2} = \frac{2n+d-\omega}{(n+1)(n+2)}\ a_n, \quad n \geq 0.$$

Evidemment, la série des puissances impaires et celle des puissances paires constituent des solutions indépendantes de l'équation de Schrödinger. Pour n assez grand, la relation de récurrence se réduit à $a_{n+2} \approx \frac{2}{n}\ a_n$, $n \gg \omega$. Ainsi la série tend formellement vers

$$\sum \frac{2^n r^{2n}}{(2n-2)(2n-4)..2} = 2r^2 \sum \frac{r^{2(n-1)}}{(n-1)!} = e^{r^2}.$$

En multipliant cette expression par $e^{-r^2/2}$, pour récupérer la fonction d'onde complète, on voit que ϕ diverge pour r assez grand, tout comme $e^{r^2/2}$. Ainsi, pour trouver les solutions non divergentes, il est clair que la série entière doit être tronquée. L'idée clé réside dans la relation de récurrence : en effet, si la fréquence satisfait $\omega = -(2n+d)$ alors a_{n+2} et tous les cœfficients supérieurs disparaissent. Par conséquent, seule une des deux solutions indépendantes peut être acceptée, celle ayant la même parité que n ; par la suite les valeurs propres possibles sont toutes géométriquement simples. Notons que si $d > 1$, la régularité des fonctions propres à $r = 0$ exige de poser $u'(0) = a_1 = 0$, afin d'éviter un point anguleux à l'origine. Ainsi, seules les solutions paires sont convenables. Par conséquent, les valeurs $2n+d$ ne sont pas des valeurs propres lorsque n est impair, contrairement au cas unidimensionnel auquel il est possible de trouver des fonctions propres impaires. Ceci achève la preuve de (1.9).

Signalons que le polynôme d'ordre n est souvent appelé polynôme d'Hermite noté H_n. Par ailleurs, on peut montrer que

$$H_n'(r) = 2nH_{n-1}(r).$$

A l'aide de cette expression, en commençant par l'état fondamental, on peut facilement montrer que chacun des états propres successifs de l'énergie admet un nœud supplémentaire : le $n-$ième état admet n nœuds simples (la simplicité est donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz)(voir [23], Ch.5, paragraphe 15.1). □

1.3.2 Le comportement local de bifurcation

On commence par rappeler la propriété fondamentale suivante de l'espace X_{rad} qui sera nécessaire pour l'étude du comportement de bifurcation de (1.2) ainsi que pour le calcul variationnel dans le paragraphe suivant (voir [6] pour la preuve).

Lemme 1.3.2 *L'injection X_{rad} (respectivement X) $\hookrightarrow L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d)$ est compacte pour $0 < \sigma < \sigma^*$.*

Afin de déterminer le comportement local au voisinage de $(\omega_n, 0)$, on définit les opérateurs suivants :

$$A: \quad X_{rad} \longrightarrow X_{rad}^*, \quad \langle Au, v\rangle := (u,v)_X = (\nabla u, \nabla v)_2 + (xu, xv)_2$$

$$B: \quad X_{rad} \longrightarrow X_{rad}^*, \quad \langle Bu, v\rangle := (u,v)_2$$

$$G: \quad X_{rad} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(u) := \tfrac{1}{2\sigma+2}\|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit dual entre X_{rad} et X_{rad}^*. Ainsi, en utilisant ces opérateurs on tire les relations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} -\Delta u + \|x\|^2 u + \omega u - |u|^{2\sigma}u = 0 &\iff (A+\omega B)u - G'(u) = 0 \\ &\iff (I + \omega A^{-1}B)u - A^{-1}G'(u) = 0 \\ &\iff (I+\omega K)u - N(u) = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

où

$$N(u) := A^{-1}G'(u), \quad K := A^{-1}B.$$

Remarquons qu'à l'aide du lemme 1.3.2 et de quelques arguments standards , on peut montrer que G est bien défini et Fréchet différentiable sur X_{rad} (on peut utiliser les résultats de régularités pour les opérateurs de Nemitskii (voir [17])). D'autre part, d'après le théorème de Lax-Milgram, on peut vérifier facilement que A est bijectif et donc A^{-1} est un opérateur linéaire borné . De plus, l'injection compacte de X_{rad} sur L^2 (par le lemme 1.3.2) implique que B est un opérateur compact. Par conséquent, K : $X_{rad} \longrightarrow X_{rad}$ est un opérateur auto$-$adjoint compact puisqu'on a aussi $(Ku, v)_X = (u,v)_2$.

Remarque 1.3.1 *L' hypothèse $\sigma < \sigma^*$ sur la non−linéarié n'est nécessaire que pour l'étude du comportement global de bifurcation. En fait, la compacité de l'opérateur linéarisé K est suffisante pour appliquer le théorème de bifurcation locale de Crandall-Rabinowitz. Ainsi, nous obtenons l'existence d'une solution faible pour* (1.2) *au voisinage de chaque valeur propre. En utilisant le lemme de Brézis-Kato (voir [17]), on peut montrer que ces solutions appartiennent à $C_0^2(\mathbb{R})$ (ici on désigne par C_0^2 l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $\partial^\beta \varphi(x)$ tend vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, pour tous les multi-indices β avec $|\beta| \leq 2$)) et décroissent exponentiellement à l'infini) (cf Proposition* 6.9 *dans [6]). Des détails supplémentaires sur ce cas critique seront donnés dans les capitres* 2 *et* 5.

Ainsi, le comportement local de bifurcation peut être déterminé comme suit :

Théorème 1.3.1 *Soient $d \geq 1$ et $0 < \sigma \leq \sigma^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\omega_n, 0)$ est un point de bifurcation. En fait,* (1.12) *possède une courbe non triviale de solutions continûment différentiable $(\omega_n(\epsilon), u_n(\epsilon))$ avec bifurcation à partir du point $(\omega_n, 0)$ pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et ϵ_0 suffisamment petit avec*

$$\omega_n(\epsilon) = \omega_n + \gamma_n(\epsilon), \quad u_n(\epsilon) = \epsilon\phi_n + \epsilon v_n(\epsilon) \tag{1.13}$$

et toutes les solutions de (1.12) *sur un voisinage de $(\omega_n, 0)$ sont sur la branche de solution triviale ou sur la courbe non triviale* (1.13).

Preuve du Théorème 1.3.1 Les assertions de déduisent à partir de la théorie standard de Lyapunov-Schmidt. En effet, en utilisant le théorème 2.4 dans [19] (voir aussi la remarque 2.6, p. 331), on peut facilement vérifier que toutes les conditions suffisantes sont clairement satisfaites, sauf la simplicité algébrique de la valeur caractéristique de l'opérateur linéarisé de (1.12). En outre, d'après le lemme 4.2.1, les valeurs propres ω_n sont géométriquement simples. Alors, en utilisant l'opérateur bijectif A, le même résultat a lieu pour l'opérateur K, mais puisque c'est un opérateur auto−adjoint, la multiplicité géométrique est égale à la multiplicité algébrique, ainsi le théorème 1.3.1 s'ensuit. □

1.3.3 Le comportement global de bifurcation

Dans cette partie, on applique le théorème global de bifurcation de Rabinowitz [25] à (1.12). Soit

$$\mathbb{S}_0 := \{(\omega, u) \in \mathbb{R}\times X_{rad} : u \neq 0 \text{ est une solution faible de } -\Delta u + \|x\|^2 u + \omega u - |u|^{2\sigma} u = 0\}$$

l'ensemble de toutes les solutions non triviales de (1.12) et $\mathbb{S} = \overline{\mathbb{S}_0}^{\mathbb{R}\times X_{rad}}$ son adhérence. En utilisant les injections de Sobolev et un argument de bootstrap, il a été démontré

dans [6] (Proposition 6.9) (voir aussi la Proposition 2.2 dans [26]), que les solutions faibles de (1.2) sont des solutions classiques. Précisément, si $u \in X_{rad}$ est solution de (1.12) (et donc (1.2)), alors $u \in C_0^2$. Maintenant, si $(\omega, u) \in \mathbb{S}$, un argument simple d'approximation montre que u satisfait (1.12). Ainsi, des résultats de régularité ramènent à $\mathbb{S}$ et u est une solution classique de (1.2). Notre résultat de bifurcation globale se lit alors comme suit

Théorème 1.3.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit C_n la composante de $\mathbb{S}$ avec $(\omega_n, 0) \in C_n$. Alors l'une des affirmations suivantes est vérifiée :*
(i) C_n n'est pas borné dans $\mathbb{R} \times X_{rad}$.
(ii) C_n est compact, et il existe un $m \neq n$ tel que $(\omega_m, 0) \in C_n$.

Preuve du Théorème 1.3.2 Pour appliquer le théorème de bifurcation globale de Rabinowitz, la non-linéarité $N(u)$ dans (1.12) doit être compacte et d'ordre au moins 1. Heuristiquement, cela est garanti par l'injection compacte de X_{rad} (ou de X) dans $L^{2\sigma+2}$. En effet, si u_j est une suite bornée dans X_{rad}, on peut supposer (après l'extraction d'une sous-suite) que $u_j \rightharpoonup u$ faiblement dans X, et par le lemme 1.3.2, que $u_j \to u$ fortement dans $L^{(2\sigma+2)}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\sigma > 0$ tel que $\sigma < \sigma^*$. En particulier, $u_j^{2\sigma+1} \to u^{2\sigma+1}$ fortement dans $L^{((2\sigma+2)/(2\sigma+1))}$, puisque cette dernière s'injecte continûment dans X_{rad}^*, on voit que $u_j^{2\sigma+1} \to u^{2\sigma+1}$ fortement dans X_{rad}^*. Comme A induit un isomorphisme entre X_{rad} et X_{rad}^*, on conclut que $N(u_j) \to N(u)$ fortement dans X_{rad}. Cela prouve que N est un opérateur compact non linéaire. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection des $L^{((2\sigma+2)/(2\sigma+1))}$ dans X_{rad}^* on peut facilement vérifier que $\|G'(u)\|_{X_{rad}^*} \leq \|u\|_{X_{rad}}^{2\sigma+1}$ qui nous conduit à

$$\|N(u)\|_{X_{rad}} \leq \|A^{-1}\| \|G'(u)\|_{X_{rad}^*} \leq C\|u\|_{X_{rad}}^{2\sigma+1}. \tag{1.14}$$

Comme $\sigma > 0$, on conclut que $N(u) = o(\|u\|)$ pour u voisin de 0.

□

1.4 Conservation de la structure nodale et séparation des branches

Dans cette partie, on voit comment on peut exclure la possibilité (ii) du théorème 1.3.2, par la suite on peut tirer plus d'informations sur l'ensemble des solutions globales de (1.2). L'étape cruciale est la séparation des branches globales par le biais des propriétés nodales de leurs solutions. Cette idée a été utilisé pour les problèmes des valeurs propres de Sturm-Liouville non linéaires, (voir [20]) : le nombre des nœuds d'une solution est conservé le long de chaque branche non triviale. Ce nombre sert à énumérer chacune d'elles, de sorte que les branches sont séparées et non bornées. Mais,

comme l'intervalle considéré $\mathbb{R}$ n'est pas borné, un point clé est de s'assurer que les zéros des fonctions u avec (ω, u) dans une partie bornée de $\mathbb{R} \times X_{rad}$ ne peuvent pas diverger vers l'infini. Ceci peut être garanti par des estimations basées sur la présence du potentiel $V(x) = \|x\|^2$. Grâce à quelques lemmes techniques, ceci nous permettra pour obtenir le résultat principal de cette partie.

Théorème 1.4.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la composante C_n de $\mathbb{S}$ avec $(\omega_n, 0) \in C_n$ n'est pas bornée dans $\mathbb{R} \times X_{rad}$. De plus, le long de chaque branche non triviale C_n, les solutions bifurquées correspondantes ont exactement n zéros dans $]0, +\infty[$.*

On commence par le lemme suivant qui constitue l'outil principal requis pour la preuve du théorème 1.4.1.

Lemme 1.4.1 *Pour tout $R > 0$, il existe $M_R > 0$ tel que $(\omega, u) \in \mathbb{S}$, $u \neq 0$, et $|\omega| + \|u\|_{X_{rad}} \leq R$ impliquent $u(x) = 0 \Rightarrow |x| \leq M_R$.*

Avant de prouver le lemme 4.2.3, on rappelle le résultat auxilliaire suivant qui sera utile pour la preuve.

Lemme 1.4.2 *Pour tout $u \in X_{rad} \cap C^1(\mathbb{R})$, on a*

$$|u(r)| \leq \sqrt{d} r^{-d/2} \|u\|_{X_{rad}}, \text{ pour tout } r \geq 0. \tag{1.15}$$

Preuve du Lemme 1.4.2

D'après

$$(r^d u^2)' = d r^{d-1} u^2 + 2 r^d u u',$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} r^d u(r)^2 &= d \int_0^r s^{d-1} u^2 ds + \int_0^r 2 s^d u u' ds \\ &\leq d \int_0^r s^{d-1} u^2 ds + \int_0^r (u')^2 s^{d-1} ds + \int_0^r (su)^2 s^{d-1} ds \\ &\leq d \int_0^{+\infty} (|u|^2 + |u'|^2 + |su|^2) s^{d-1} ds \\ &= d \|u\|^2_{X_{rad}} \end{aligned}$$

Ainsi, on tire (1.15). □

Nous somme maintenant en mesure de prouver le Lemme 4.2.3. ***Preuve du Lemme 4.2.3***

On rappelle d'abord que si $(\omega, u) \in \mathbb{S}$, alors u satisfait l'une des valeurs initiales des problèmes (3.1) ou (1.7). Par conséquent, on introduit la fonction

$$E_u(r) = \frac{1}{2}|u'(r)|^2 + \frac{1}{2\sigma+2}|u(r)|^{2\sigma+2} - \frac{\omega}{2}|u(r)|^2 - \frac{1}{2}|ru(r)|^2$$

qui sera appelée l'énergie de la solution et désignée simplement par $E_u(r)$ au lieu de $E_u(r,\beta)$ puisqu'elle dépend de la valeur initiale β. A l'aide de (3.1) et (1.7), on voit que $E(r)$ satisfait

$$E'(r) = -\frac{d-1}{r}|u'(r)|^2 - r|u(r)|^2 \leq 0.$$

Par la suite, E est une fonction strictement décroissante. En fait, par le théorème d'unicité des solutions du problème des valeurs initiales, une solution de (3.1) ne peut pas admettre un point critique où $u = 0$, à moins qu'elle soit constante.
Donc, comme u et $u' \to 0$ exponentiellement quand $|x| \to \infty$, on en déduit que

$$(\omega, u) \in \mathbb{S} \Rightarrow \quad E_u(r) > 0, \quad \text{pour tout} \quad x > 0. \tag{1.16}$$

Maintenant, soit $(\omega, u) \in \mathbb{S}$ tel que $|\omega| + \|u\|_{X_{rad}} \leq R$, $u \neq 0$, et $u(r_0) = 0$ pour un certain $r_0 \in]0, +\infty[$. Puisque $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$, il doit y avoir un certain $r_1 > r_0$ avec $u'(r_1) = 0$. Alors, par l'unicité de la solution de (3.1) et (1.7) on doit avoir $u(r_1) \neq 0$. En outre, on peut supposer sans perte de généralité que $u(r_1) > 0$, puisque dans le cas où $u(r_1) < 0$ le même argument s'applique à $\overline{u} = -u$. Puis, en utilisant (1.16), on aura

$$E_u(r_1) = |u(r_1)|^2 \left\{ \frac{1}{2\sigma+2}|u(r)|^{2\sigma} - \frac{1}{2}(\omega + r_1^2) \right\} > 0.$$

Donc

$$|u(r)|^{2\sigma} > \frac{2\sigma+2}{2}\left\{\omega + r_1^2\right\}$$

ce qui implique

$$u''(r_1) \leq u(r_1)\left\{\omega + r_1^2\right\}\left\{1 - \frac{2\sigma+2}{2}\right\} < 0.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} r_0^2 u(r_1) \quad \leq r_1^2 u(r_1) \quad &= -\omega u(r_1) + u''(r_1) + |u(r_1)|^{2\sigma} u(r_1) \\ &\leq \; u(r_1)[|u(r_1)|^{2\sigma} + |\omega|] \end{aligned}$$

et donc par le lemme 1.4.2

$$r_0^2 \ \leq |\omega| + C\|u\|_{X_{rad}}^{\sigma d} r_1^{-d/2} \ \leq M_1(R) \ + \ M_2(R) r_0^{-d/2}$$

ce qui est suffisant pour montrer que $|r_0|$ est borné par une constante qui dépend uniquement de R.

□

Remarque 1.4.1 *On note qu'on n'a pas utilisé l'hyppothèse $\sigma < \sigma^*$ pour établir ce résultat. Par conséquent, cette propriété reste valable pour toute solution $u \in X_{rad}$ de l'équation de (CBE) indépendamment de la valeur de $\sigma > 0$. Ceci nous sera utile dans le cas critique et surcritique.*

On prouve ensuite le résultat technique suivant concernant les propriétés nodales des solutions non triviales de (1.12) (resp. (1.2), (3.1) et (1.7)).

Lemme 1.4.3 *Soit $(\omega, u) \in \mathbb{S}$. Si $u \neq 0$, alors u peut avoir un nombre de zéros dans $]0, +\infty[$ et chaque zéro est simple. De plus, si on désigne le nombre fini des nœuds de $u \neq 0$ par $z(\omega, u)$, alors z est localement constante sur $\mathbb{S}$ (en utilisant la topologie de $\mathbb{S}$).*

Preuve du Lemme 1.4.3 Le premier point découle de l'unicité de la solution du problème de la valeur initiale (3.1) (ou (1.7)). En fait, s'il y avait une infinité de solutions différentes r_n dans $]0, +\infty[$, alors par le lemme 4.2.3, on trouverait que $|r_n| \leq M$, $\forall\, n \geq 0$. Donc sans perte de généralité, $r_n \to r_0$ pour un certain $r_0 \in]0, M[$ avec $u(r_0) = 0$. Si par exemple $r_n > r_0$, alors $u'(y_n) = 0$ pour un certain $y_n \in [r_0, r_n]$, et par conséquent $u'(r_0) = 0$, ce qui est en contradiction avec $u \neq 0$. Concernant le deuxième point, soit $(\omega, u) \in \mathbb{S}$ tel que $u \neq 0$, et $|\omega| + \|u\|_{X_{rad}} < C$, $C > 0$, ainsi on affirme qu'il existe une constante $\delta = \delta(C) > 0$ telle que $\forall\, (\tilde{\omega}, \tilde{u}) \in \mathbb{S}$

$$\text{si } |\tilde{\omega}| + \|\tilde{u}\|_{X_{rad}} < C \text{ et } |\omega - \tilde{\omega}| + \|u - \tilde{u}\|_{X_{rad}} < \delta, \text{ alors } z(\omega, u) = z(\tilde{\omega}, \tilde{u}). \quad (1.17)$$

Signalons ici qu'à partir du lemme 1.4.2 on a

$$|r^{n/2} u(r) - r^{n/2} \tilde{u}(r)| \leq \|u - \tilde{u}\|_{X_{rad}}, \text{ pour tout } r \geq 0. \quad (1.18)$$

Puis, en utilisant (3.1) ou (1.7) on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}u')' = \omega u(r) + r^2 u(r) - |u(r)|^{2\sigma} u(r) \\ \frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}\tilde{u}')' = \tilde{\omega}\tilde{u}(r) + r^2 \tilde{u}(r) - |\tilde{u}(r)|^{2\sigma} \tilde{u}(r). \end{cases}$$

Il découle par l'inégalité de Hölder et de la formule de la moyenne que

$$\begin{aligned}
r^{d-1}|u'(r)-\tilde{u}'(r)| &= |\int_0^r [(\omega u-\tilde{\omega}\tilde{u})+s^2(u-\tilde{u})+|u|^{2\sigma}u-|\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}\ ]\ s^{d-1}ds| \\
&\leq \int_0^r |\omega(u-\tilde{u})+(\omega-\tilde{\omega})\tilde{u}+s^2(u-\tilde{u})+|u|^{2\sigma}u-|\tilde{u}|^{2\sigma}\tilde{u}|s^{d-1}ds \\
&\leq r^{d/2}|\tilde{\omega}|(\int_0^r |u-\tilde{u}|^2 s^{d-1}ds)^{1/2} + r^{d/2}|\omega-\tilde{\omega}|(\int_0^r |\tilde{u}|^2 s^{d-1}ds)^{1/2} \\
&+ r^{1+d/2}(\int_0^r |s(u-\tilde{u})|^2 s^{d-1}ds)^{1/2} \\
&+ (2\sigma)\int_0^r (|\tilde{u}|^{2\sigma}+|u|^{2\sigma})(|\tilde{u}-u|)s^{d-1}ds \\
&\leq |\tilde{\omega}|r^{d/2}\|u-\tilde{u}\|_{X_{rad}} + \|\tilde{u}\|_{X_{rad}} r^{d/2}|\omega-\tilde{\omega}| \\
&+ r^{1+d/2}\|u-\tilde{u}\|_{X_{rad}} + r^{d\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}}(2\sigma)(\|u\|^{2\sigma}_{2\sigma+2}+\|\tilde{u}\|^{2\sigma}_{2\sigma+2})\|u-\tilde{u}\|_{2\sigma+2}
\end{aligned}$$

et par le lemme 1.3.2 on obtient finalement

$$r^{d-1}|u'(r)-\tilde{u}'(r)| \leq C(r^{d/2}+r^{1+d/2}+r^{d\frac{2\sigma+1}{2\sigma+2}})(\|u-\tilde{u}\|_{X_{rad}}+|\omega-\tilde{\omega}|). \tag{1.19}$$

Maintenant si l'assertion (1.17) était fausse, alors il existerait $(\omega_j,u_j)\in\mathbb{S}$ avec $\omega_j\to\omega$ dans $\mathbb{R}$ et $0\neq u_j\to u$ dans X_{rad} quand $j\to\infty$ tel que $z(\omega_j,u_j)\neq z(\omega,u)=n$ pour tout $j\geq j_0$. Comme $|\omega_j|+\|u\|_{X_{rad}}<C$ pour j assez grand, il découle du lemme 4.2.3 que tous les nœuds de u et u_j sont inclus dans le même compact $[0,R]$ où R dépend uniquement de C. Alors, d'après (1.18), on déduit que $u_j\to u$ uniformément sur $[0,R]$ (même sur $\mathbb{R}$) et donc u_j admet au moins $n=z(\omega,u)$ zéros dans $[0,+\infty]$ lorsque j est suffisamment grand. De plus, il découle de (1.4) que

$$|r^{d-1}u_j'(r)-r^{d-1}u'(r)|\leq M(R)(\|u_j-u\|_{X_{rad}}+|\omega_j-\omega|)\ ,\ r\in[0,R].$$

Ainsi $r^{d-1}u_j'(r)\to r^{d-1}u'(r)$ uniformément sur $[0,R]$. Par conséquent, u_j possède au plus $z(\omega,u)=n$ zéros dans $[0,+\infty]$ lorsque j est assez grand. Finalement, $z(\omega_j,u_j)=z(\omega,u)$ pour j assez grand, ce qui fournit une contradiction. □

Maintenant, on est capable de prouver le Théorème 1.4.1.

Preuve du Théorème 1.4.1 Pour tout $n\in\mathbb{N}_0$, soit C_n la composante de $\mathbb{S}$ vérifiant $(\omega_n,0)\in C_n$, alors on doit montrer que :
(i) Le long de C_n, les solutions bifurquées correspondantes ont exactement n zéros dans $]0,+\infty[$.

(ii) C_n est non bornée dans $\mathbb{R} \times X_{rad}$.
Pour prouver le premier point, il suffit de calculer $z(w,u)$ dans le voisinage de $(\omega_n, 0)$ et le résultat découle du lemme 1.4.3. Par contre, ceci ne démontre pas le second point. En fait, on doit aussi calculer $z(w,u)$; $(\omega,u) \in C_n$ au voisinage de $(\omega_k, 0)$ même si $k \neq n$. En particulier, si on arrive à montrer que $z(w_k,u) = k$ quand (ω,u) est proche de $(\omega_k,0)$ pour tout $k \geq 0$, on peut exclure la deuxième alternative du théorème 1.3.2 en utilisant le fait que C_n est connexe. Par conséquent, les points (i) et (ii) sont démontrés dans ce cas. En fait, soit ω_n une valeur propre de (1.8) et $\phi_n = \phi_n(r)$ la fonction propre correspondante donnée par le lemme 4.2.1. Alors, on affirme qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(\omega,u) \in \mathbb{S}, u \neq 0$ et $|\omega - \omega_n| + \|u\|_{X_{rad}} < \delta$ implique $z(w,u) = n$. En fait, si l'assertion était fausse, alors il existerait $(\omega^j, u^j) \in \mathbb{S} = \overline{\mathbb{S}_0}^{\mathbb{R}\times X_{rad}}$ avec $\omega^j \to \omega_n$ dans $\mathbb{R}$ et $0 \neq u^j \to 0$ dans X_{rad} quand $j \to \infty$ tel que $z(\omega^j, u^j) \neq n$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Un argument simple d'approximation montre que u satisfait (1.12). Soit $v^j = u^j/\|u^j\|_{X_{rad}}$. D'après (1.14), on a

$$(I + \omega^j K)v^j = N(u^j)/\|u^j\|_{X_{rad}} \leq C\|u^j\|^{2\sigma}_{X_{rad}} \to 0 \text{ quand } j \to \infty \tag{1.20}$$

puisque $\|v^j\|_{X_{rad}} = 1$ et $K : X_{rad} \to X_{rad}$ est compact, alors on peut affirmer que $v^j \to v$ dans X_{rad} quand $j \to \infty$ et par (1.20), on déduit que

$$(I + \omega_n K)v = 0.$$

Par la suite $u = \alpha\phi_n$ pour un certain $\alpha > 0$ par le lemme 4.2.1. En particulier, $u \in C^2(\mathbb{R})$ et admet exactement n zéros simples dans $]0, +\infty[$. On affirme que $z(\omega^j, v^j) = n$ pour j assez grand. Ceci peut être prouvé par une méthode similaire à (1.17). D'abord, on définit

$$R_1 = \{\max \|x\| : x \in \mathbb{R} \text{ est un zéro de } u_n\}$$

et

$$R_2 = \{\max \|x\| : x \in \mathbb{R} \text{ est un zéro de } u^j, \text{ pour } j \geq j_0\}.$$

Remarquons qu'à l'aide du lemme 4.2.3, on peut voir que $R_2 < \infty$ pour j_0 assez grand puisque $u^j \to 0$ dans X_{rad} et $\omega^j \to \omega_n$ dans $\mathbb{R}$. Maintenant, on voit qu'il est suffisant d'examiner les propriétés nodales de v et v^j dans $[0,R]$, avec $R = R_1 + R_2$. Ensuite, il découle de

$$\begin{cases} \frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}v^{j\prime})' = \omega^j v^j(r) + r^2 v^j(r) - |u^j(r)|^{2\sigma} v^j(r) \\ \frac{1}{r^{d-1}}(r^{d-1}v')' = \omega_n v(r) + r^2 v(r) \end{cases}$$

que

$$r^{d-1}|v^{j\prime}(r) - v'(r)| \leq C(R^{d/2} + R^{1+d/2} + R^{\frac{d}{2\sigma+2}})(\|u^j\|^{(2\sigma)}_{X_{rad}} + |\omega - \omega_n|),\ r \in [0,R]. \tag{1.21}$$

Ainsi $r^{d-1}v^{j\prime} \to r^{d-1}v'$ uniformément sur $[0,R]$ quand $j \to \infty$. Comme on sait aussi à partir du lemme 1.4.2 que $r^{n/2}v^j \to r^{n/2}v$ de la même manière, on déduit que $z(\omega^j, u^j) = n$ pour j assez grand, ce qui est manifestement contradictoire. □

1.5 Caractérisation variationnelle des solutions bifurquées

Dans cette partie, on caractérise les solutions bifurquées par des arguments variationnels et on les identifie comme minimisantes ou points selles d'une fonctionnelle choisie sous une contrainte adéquate. L'objectif principal de cette caractérisation alternative est de donner une indication sur l'intervalle maximal d'existence des branches bifurquées. Précisément, elle suggère que chaque branche C_n de solutions avec n nœuds simples existe pour tout $\omega > \omega_n$. Ceci complète la preuve du théorème 4.1.1.
Cette idée a été introduite par Kurth [21] et consiste à trouver la relation entre les solutions bifurquées de (1.2) et les solutions variationnelles dans le cas unidimensionnel. Mais, bien qu'il ait étudié le cas d'une éventuelle non−linéarité non locale, son hypothèse majeure est que le terme non linéaire doit être d'une croissance d'ordre au pus égale à 3. Ainsi, son résultat est limité au cas des petites fréquences à savoir $\sigma < 2/d$. Pour cette raison, sa contrainte dans le problème variationnel qu'il utilise pour extraire les états excités de (1.2) est différente de la nôtre.
Il est à signaler que l'existence des ondes variationnelles radiales pour l'équation (CBE) dans ce cas sous-critique est déjà connue. Par exemple, Kavian et Weissler ont largement étudié dans [6] l'existence et la régularité des solutions de (1.2). Par souci d'exhaustivité, on expose plusieurs résultats dont on aura besoin pour la suite.
D'abord, on définit pour tout $0 < \sigma < \sigma^* = 2/(d-2)$ et $\omega \in \mathbb{R}$, les deux fonctionnelles suivantes sur X_{rad} :

$$J(u) := \|\nabla u\|_2^2 + \|xu\|_2^2 + \omega\|u\|_2^2 = \|u\|_{X_{rad}}^2 + \omega\|u\|_2^2, \qquad F(u) := \|u\|_{2\sigma+2}^{2\sigma+2}.$$

Par le lemme 1.3.2, on vérifie aisément que F est bien définie et que J et F appartiennent à $C^2(X_{rad}, \mathbb{R})$.

Lemme 1.5.1 *(i) Soit $d \geq 1$ et $0 < \sigma < \sigma^*$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C_\epsilon > 0$ tel que pour tout $u \in X_{rad}$,*

$$\|u\|_2^2 \leq C_\epsilon \|u\|_{2\sigma+2}^2 + \epsilon\|u\|_{X_{rad}}^2. \tag{1.22}$$

(ii) J satisfait la condition de Palais-Smale sur la variété

$$M := \{u \in X_{rad};\ F(u) = 1\}.$$

En particulier, J possède une suite infinie de valeurs critiques $(c_k)_{k\geq 1}$ avec $c_k \uparrow +\infty$ quand $k \uparrow +\infty$ définie par

$$c_k := \inf_{A\in\mathcal{B}_k} \max_{v\in A} J(v)$$

avec

$$\mathcal{B}_k := \{A \in s(X_{rad}) : A \subset M,\ \text{compact avec } \gamma(A) \geq k\};$$

et $s(X_{rad})$ désigne l'ensemble de toutes les parties fermées non vides E de X_{rad} symétriques par rapport à l'origine et vérifiant $0 \notin E$. De plus, $\gamma(E)$ désigne le genre topologique de E, i.e.,

$$\gamma(E) := \ inf\ \{n \geq 1 \ : \exists\ h : \ E \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \ continue\ et\ impaire\}.$$

Pour la preuve du Lemme 1.5.1, voir Kavian [6].

On montre maintenant le théorème suivant qui permet, à l'aide des théorèmes 1.4.1 et 1.3.2, d'établir le théorème 4.1.1.

Théorème 1.5.1 *Soit $d \geq 1$ et $0 < \sigma < \sigma^*$, alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, l'équation (1.2) (respectivement (1.12)) possède une suite infinie de solutions $(u_k)_{k \geq k_0(\omega)}$ dans X_{rad} définie pour tout $k \geq 0$ telle que $\omega > \omega_k$, vérifiant : $\|u_k\|_{X_{rad}} \to \infty$ quand $k \to \infty$. De plus,*

$$(\omega, u_k) \in C_k \ pour\ tout\ k \geq k_0(\omega). \tag{1.23}$$

Pour montrer le théorème 1.5.1, on rappelle d'abord le résultat suivant (voir [18], Chap. 7) :

Lemme 1.5.2 *Soit F un sous-espace de codimension k d'un espace de Banach X, si $A \in s(X)$ et $\gamma(A) > k$. Alors $A \bigcap E \neq \emptyset$.*

Preuve du Théorème 1.5.1 : Soit v_k un point critique de J sur M tel que $J(v_k) = c_k > 0$; il existe un certain $\mu_k \in \mathbb{R}$,

$$-\Delta v_k + \|x\|^2 v_k + \omega v_k - \mu_k |v_k|^{2\sigma} v_k = 0.$$

En effectuant un produit de dualité avec v_k, on obtient $c_k = J(v_k) = \mu_k > 0$; donc, posant $u_k := c_k^{1/2\sigma} v_k$, on vérifie que

$$-\Delta u_k + \|x\|^2 u_k + \omega u_k - |u_k|^{2\sigma} u_k = 0.$$

Puisque $c_k \leq c_{k+1}$ et que la suite (c_k) est non borné, il existe $k_0 \geq 1$ tel que $c_{k_0} > 0$, et par suite, il existe une infinité de solutions de (1.2). Puis, on affirme que

$$c_k > 0 \text{ si et seulement si } \omega > \omega_k. \tag{1.24}$$

En fait, par le lemme 1.5.2 on a :

$$\text{pour tout } A \in s(X) \text{ tel que } \gamma(A) > k \ : A \cap < \phi_1, \phi_2, .., \phi_{k-1} >^{\perp} \neq \emptyset.$$

Alors

$$\max_{v \in A} J(v) \geq \inf_{v \in <\phi_1, .., \phi_{k-1}>^{\perp}} J(v)$$

d'où

$$c_k \geq \inf_{v\in<\phi_1,..,\phi_{k-1}>^\perp} J(v) \geq \inf_{v\in<\phi_1,..,\phi_{k-1}>^\perp} (\omega-\omega_k)\|v\|^2 \geq 0$$

donc $c_k := J(v_k) > 0$ si $\omega > \omega_k$. Signalons que la dernière assertion s'ensuit de la caractérisation min−max des valeurs propres :

$$\lambda_k := -\omega_k = \min_{X_k\subset X_{rad}} \max_{u\in X_k} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2} = \max_{X_{k-1}\subset X_{rad}} \min_{u\in X_{k-1}^\perp} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_2^2}, \tag{1.25}$$

où X_k désigne un sous-espace de X_{rad} de dimension k. Par la suite, cette équation est satisfaite grâce à l'équivalence entre le principe de Courant-Fischer et la caractérisation de la n−ème valeur propre due à Poincaré (voir [27]).
D'autre part, en calculant J sur $M\cap <\phi_1,..,\phi_j>$, on peut montrer aisément que si $\omega < \omega_k$ alors $c_j < 0$ pour tout $1 \leq j \leq k$. Par ailleurs, on montre que

$$\|u_k\|_{X_{rad}} = c_k^{1/2\sigma}\|v_k\|_{X_{rad}} \to 0 \text{ quand } \omega \to \omega_k. \tag{1.26}$$

En fait, si on désigne par $A_k :=<\phi_1,..,\phi_k> \cap M$ on vérifie facilement que $A_k \in \mathcal{B}_k$, $\forall\, k \geq 1$. Ainsi, d'après la définition de c_k et (1.25) on a :

$$0 \leq c_k \leq \max_{v\in A_k} J(v) \leq \max_{v\in A_k}(\omega-\omega_k)\|v\|_2^2 \leq \max_{v\in A_k} C(\omega-\omega_k)\|v\|_{2\sigma+2}^2 \leq C(\omega-\omega_k)$$

de sorte que $c_k \to 0$ quand $\omega \to \omega_k$.
En outre, comme $\|v_k\|_X^2 = c_k - \omega\|v_k\|_2^2$, le lemme 1.5.1 et l'identité $\|v_k\|_{p+1} = 1$ montrent que

$$\|v_k\|_X^2 \leq c_k + |\omega|(\varepsilon\|v_k\|_X^2 + C_\varepsilon), \quad \text{pour chaque } \varepsilon > 0$$

et en choisissant ε suffisamment petit, on conclut que $\|v_k\|_X^2$ est encore bornée quand $\omega \to \omega_k$ et par conséquent (1.26) a lieu. Ceci implique que les u_k bifurquent à partir de la k−ième valeur propre et par la suite $u_k \in C_k$ sur un voisinage de ω_k, puisqu'on a l'unicité de la solution de (1.12) par le théorème des fonctions implicites. De plus, grâce à $\omega \geq \omega_k$, la direction de la bifurcation est déterminée. Finalement, d'après l'unicité des solutions de bifurcation à partir du théorème global de bifurcation (à une translation de phase $e^{i\theta}$ près) on conclut que toutes les branches sont non bornées en ω et chaque branche existe pour $\omega > \omega_k$ arbitraire. □

Chapitre 2

Etude du cas $\sigma = \sigma^*$

2.1 Position du problème

Lorsque $d \geq 3$ et $\sigma = 2/(d-2) := \sigma^*$, on peut prouver par une identité du type Pohozaev que les états localisés existent seulement pour $\omega > 0$. En fait, si $u \in X$ et vérifie (1.2) alors on peut montrer en multipliant (1.2) par $\rho_n(x)x.\nabla u$, où ρ_n est une fonction plateau (voir [6]), et suite à une intégration par parties que la solution u satisfait l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^n} (2\|x\|^2 + \omega)u^2 dx = 0.$$

Ainsi, (1.2) n'admet aucune solution non triviale pour $\omega \geq 0$. Mais, d'après la remarque 1.3.1, (1.2) admet une branche bifurquée de solutions radiales non triviales au voisinage de chaque valeur propre, ce qui découle de la simplicité algébrique de ces valeurs propres (radiales). Mais, à cause de la perte de la compacité dans ce cas critique, il n'est plus possible d'appliquer le théorème de bifurcation global à cette équation dans l'espace d'énergie X afin de décrire le comportement asymptotique de ces courbes. Il faudra pour cela des techniques plus sophistiquées que nous développerons dans le prochain chapitre lorsque nous aborderons la question de la bifurcation globale dans les deux cas : critique et surcritique. Pour la même raison, les arguments utilisés au paragraphe précédent ne sont plus valides puisque la condition standard de Palais-Smale échoue si $\sigma = \sigma^*$.

Le premier progrès dans l'étude du cas critique a été fait par Brézis et Nirenberg dans leur célèbre article [33]. Ils ont étudié le problème semi-linéaire de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u, \text{ sur } \Omega, \ p = \dfrac{d+2}{d-2} \\ \\ u > 0 \text{ sur } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné, étoilé de classe C^∞ de $\mathbb{R}^d$ et où $d \geq 3$. Ils ont prouvé que (2.1) admet au moins une solution pour n'importe quel $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$ lorsque $d \geq 4$ et pour n'importe quel $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)/4$ lorsque $d = 3$, où λ_1 désigne la première valeur propre de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$. Par la suite, cette équation a été largement étudiée depuis les années 1980 mais il reste encore des problèmes ouverts. Le lecteur intéressé pourra consulter [35] et ses références qui contiennent beaucoup de résultats récents sur (2.1). De plus, les résultats d'existence et de non−existence valables pour (2.1) suggèrent que les problèmes de compacité pour les fonctionnelles correspondantes sont plus difficiles en petites dimensions, à savoir les cas $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ (voir [37], [38] et [34]). Ainsi, notre discussion sera limitée aux solutions radiales dans ce cas particulier sauf pour l'étude des solutions positives. En fait, il est bien connu que dans ce contexte, il n'est pas nécessaire de restreindre la dimension d aux petites valeurs.

Revenons à l'étude de l'équation (CBE) dans le cas critique :

$$\begin{cases} -\Delta u + \|x\|^2 u = u^{2\sigma+1} - \omega u, \text{ sur } \mathbb{R}^d, \ \sigma = \dfrac{2}{d-2} \\ \\ u \in X. \end{cases} \tag{2.2}$$

Il est connu que les deux problèmes (2.2) et (2.1) ont les mêmes propriétés variationnelles, du fait que le potentiel harmonique $\|x\|^2 \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$. Par conséquent, on peut obtenir la même injection que celle du cas d'un domaine borné et la méthode variationnelle utilisée pour le problème (2.1) peut s'appliquer au cas du potentiel harmonique comme on le verra après dans l'étude de l'existence des solutions positives. Or, il semble que l'étude des solutions nodales de l'équation (2.2) est beaucoup plus compliquée. En effet, les deux équations n'ont pas la même échelle d'invariance et ceci complique l'étude. En fait, afin d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'existence des solutions à nombre de zéros prescrit, quelques techniques d'équations différentielles ordinaires s'imposent. L'étape principale est d'éliminer la variable ω dans l'équation (2.1) et de la faire apparaître dans les conditions au bord via un argument de changement d'échelle. Puis, en examinant les variations des zéros de l'équation obtenue en fonction des données initiales, on peut tirer des conditions suffisantes d'existence (voir [37], [38], [34], [35] et [36]). Cependant, à cause du terme potentiel supplémentaire, il n'est plus possible d'éliminer le paramètre ω dans (2.2). On va alors procéder en deux étapes. Dans un premier temps, on démontrera l'existence de branches bifurquées non bornées de solutions nodales en utilisant une méthode générale qui s'applique aussi pour des valeurs de σ plus grandes, à savoir $\sigma \geq \sigma^*$. Cette

démonstration sera développée dans le chapitre suivant, puisqu' elle concerne aussi le cas surcritique. Dans un second temps, on va étudier la structure de ces branches de solutions nodales u_k, $k \geq 1$ pour le problème (2.2) par des méthodes numériques en calculant les branches bifurquées par le biais d'une méthode de tir. Cela permet de tracer le diagramme de bifurcation répondant à quelques questions qui restent ouvertes même pour la simple équation de Brézis-Nirenberg (2.1). Ceci sera illustré en deuxième partie de ce document, qui sera consacrée à la présentation des résultats numériques.

Nous allons alors consacrer ce chapitre à l'étude de la solution positive en utilisant des méthodes développées par Brézis et Nirenberg dans [33]. Nous commençons par établir une condition suffiante en fonction de la fréquence ω et la dimension d. Ceci sera possible en suivant la même approche de Brézis et Nirenberg. Ensuite, nous considérons le problème de non-existence plus compliqué en dimension 3. En outre, nous verrons que la présence du nouveau terme potentiel, rend ce problème plus compliqué que dans le cas de l'équation de Brézis et Nirenberg. Il sera donc difficile d'obtenir un résultat optimal contrairement au cas de l'équation (2.1).
D'abord, on rappelle plusieurs notations. On désigne par $\lambda_1 = -\omega_1$ la première fonction propre de l'opérateur $-\Delta + |x|^2$ et par ϕ_1 la fonction propre correspondant à λ_1 où $\|\phi_1\|_{L^2} = 1$.

On peut alors aisément vérifier que l'équation (2.2) ne possède pas de solutions positives non triviales dans X pour $\omega \leq -\lambda_1$. En fait, si on multiplie l'équation (2.2) par ϕ_1 et on intègre l'équation obtenue, on aura

$$(\lambda_1 + \omega) \int u\phi_1 dx = \int (-\Delta u + |x|^2 u + \omega u)\phi_1 dx = \int |u|^{2\sigma} u\phi_1.$$

Comme les deux fonctions u et ϕ_1 sont positives, il découle de l'équation ci-dessus que ω doit être plus grande que $-\lambda_1$ pour que (2.2) admette une solution non triviale.

D'autre part, en utilisant l'identité de Pohozaev, la solution $u \in X \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ de l'équation (2.2) satisfait

$$2 \int |x|^2 |u|^2 dx + \omega \int |u|^2 dx + \left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{2\sigma+2} \right) \int |u|^{2\sigma+2} dx = 0.$$

A partir de cette identité, on voit que si $\sigma = \sigma^*$, l'équation (2.2) n'admet pas de solutions non triviales pour $\omega \geq 0$. Par la suite, il suffit de considérer le cas $\omega \in]-\lambda_1, 0[$.

En premier lieu, on montre l'existence de solution positive de l'équation (2.2) pour $\omega \in]-\lambda_1, 0[$ où $N \geq 4$ et pour $\omega \in]-\lambda_1, -1[$ lorsque $N = 3$. Comme ce résultat est optimale pour les dimensions $d \geq 4$, notre objectif sera donc d'étudier le cas $d = 3$ en considérant les valeurs de ω appartenant à $]-\lambda_1, -1[$. Or, les résultats obtenus par Brézis et Nirenberg [33] pour l'équation elliptique semi-linéaire (2.1) sur la boule avec

la condition au bord de Dirichlet et par Kabeya, Yanagida et Yotsutani [40] pour la même équation avec la condition au bord de Robin, suggèrent que la valeur de $\omega = -1$ obtenue par cette méthode est optimale en dimension 3. Par suite, nous essayerons alors de démontrer le même résultat dans notre cas. Avant de rentrer dans les détails de la démonstration, nous expliquons brièvement les raisons pour lesquelles la présence du terme potentiel rend la tâche plus délicate. En effet, l'idée est d'établir une identité de type Pohozaev en utilisant une fonction−test générale à la place des multiplicateurs standards de Pohozaev. Toute la difficulté réside alors dans le choix de cette fonction qui permet l'exploitation optimale de l'identité. Ceci revient à résoudre une équation différentielle ordinaire et donner ces solution explicites en fonction du paramètre ω. Ensuite, il suffit de choisir parmi ces solutions laquelle permet d'obtenir une absurdité. Dans le cas de l'équation (2.1), le problème différentiel obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} \lambda\psi' + \dfrac{1}{4}\psi''' = 0 \\ \psi(0) = 0, \quad \psi(1) \geq 0, \quad r\psi - r^2\psi' > 0 \quad \forall\, r \in (0,1). \end{cases} \tag{2.3}$$

Il s'agit d'une équation autonome dont la solution peut être explicitement calculée en fonction du paramètre λ. En particulier, il suffit de choisir $\psi(r) = \sin(\sqrt{4\lambda}r)$, $\forall$ $0 < \lambda \leq \lambda_1/4 := \pi^2/4$. Toutefois, Dans notre cas, en raison de la présence du terme potentiel, l'équation à résoudre n'est pas autonome, à savoir :

$$\begin{cases} r\psi + r^2\psi' - \dfrac{\psi'''}{4} + \omega\psi' = 0 \\ \psi(0) \leq 0, \quad \psi(r) \to 0 \text{ quand } r \to \infty, \quad r\psi' - \psi < 0 \ \forall\, r \in]0, \infty[. \end{cases} \tag{2.4}$$

Il n'est alors plus possible de donner une solution explicite du (2.4) en termes de ω. L'idée est alors de montrer un résultat plus faible qui concerne la non−existence de minimiseurs pour le problème variationnel correspondant à l'équation (2.2). Comme le problème d'unicité de solution positive de (2.2) n'est pas encore résolu dans le cas critique (voir [7] et [10]), ce résultat ne permet pas de conclure la non−existence de solution positive pour $\omega \in [-1, 0]$. Néanmoins, nous présentons un résultat optimal pour les valeurs de $\omega \in [-1/\sqrt{2}, 0]$ ainsi que la valeur significative $\omega = -1$.

La suite du chapitre est organisé comme suit : au paragraphe 2, on établit une condition suffisante d'existence de solution positive pour (2.2). Au paragraphe 3, on établit une condition nécessaire (qui n'est pas optimale) d'existence de solutions pour cette équation. Au paragraphe 4, on considère le problème de non−existence de minimiseurs pour le problème variationnel correspondant à (2.2).

2.2 Existence de solution positive

On va ici utiliser la même méthode de Brézis et Niremberg pour étudier la première branche bifurquée C_0. cC'est le cas le plus simple puisqu'il peut être traité par des méthodes purement variationnelles basées sur le fait que $S_\lambda := \inf\{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2, \|u\|_{p+1} = 1\}$ est atteinte lorsque $0 < S_\lambda < S_0 =: S$. On peut alors montrer que pour ces valeurs de λ on a $S_\lambda \in]0, S[$ en construisant une suite de fonctions $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda\|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2} < S$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. On peut pour cela utiliser les fonctions

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{(d-2)/2}}$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi(x) \equiv 1$ pour ε assez proche de 0 car la meilleure constante de Sobolev $S := S_0$ est approchée en quelque sorte par les fonctions tests $(\varepsilon+|x|^2)^{-(d-2)/2}$. Maintenant en regardant l'équation (CBE), dans ce cas on ne connaît aucune fonction test approchant

$$I := \inf_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_{2^*}^2}$$

(où $2^* = 2\sigma + 2 = 2d/(d-2)$). L'idée est alors de comparer I_ω et S, S et I_0 avec

$$I_\omega := \inf_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_X^2 + \omega\|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \tag{2.5}$$

En fait, en suivant la preuve du Lemme 2.1 dans [33], nous verrons que si $0 < I_\omega < I_0$ alors la borne inférieure I_ω est atteinte pour un certain $u \neq 0 \in X$ et par conséquent $I_\omega^{\frac{1}{2\sigma}} u$ est une solution strictement positive de (2.2) qui bifurque à la première valeur propre ω_1 ce qui est garanti par le Lemme 1.3.2. D'autre part, puisque

$$S = \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^d)\\ u\neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \leq \inf_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \leq \inf_{\substack{u\in X\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|_X^2}{\|u\|_{2^*}^2} = I_0, \tag{2.6}$$

on doit chercher les valeurs de ω qui satisfont $0 < I_\omega < S$, et il parait actuellement que cette condition est vérifiée lorsque $\omega_1 < \omega < 0$ si $d \geq 4$ et pour tout $\omega \in (\omega_1, \omega_1/3)$ si $d = 3$. Nous somme à présent en mesure d'énoncer le résultat d'éxistence.

Théorème 2.2.1 *Supposons que $d \geq 4$. Alors, pour tout $\omega \in]\omega_1, 0[$ il existe une solution positive $u \in X$ de (2.2).*
Si $d = 3$, il existe une solution positive de (2.2) si $\omega \in]-3, -1[$. Par ailleurs, $\|u_\omega\|_X \to 0$ quand $\omega \to \omega_1$.

Pour montrer ce théorème, on montre d'abord le résultat suivant

Lemme 2.2.1 *Soit $N \geq 3, \sigma = \sigma^*$ et $\omega > \omega_1$. Si $I(\omega) < S_0$, alors il existe un minimisant $v_\omega \in X$ de $I(\omega)$.*

Preuve du Lemme 2.2.1. Elle s'inspire des travaux de rézis et Nirenberg [33] (voir aussi le livre de Struwe [41, Théorème 1.42]). En effet, Soit $\{u_n\} \subset X$ une suite minimisante de I_ω. Comme $\omega \in]-\lambda_1, 0[$, on a

$$2S_0 \geq \|u_n\|_X^2 + \omega\|u_n\|_{L^2}^2 \geq \left(1 + \frac{\omega}{\lambda_1}\right)\|u_n\|_X^2$$

pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Ainsi, la suite $\{u_n\} \subset X$ est bornée. Alors, il existe une sous-suite encore notée $\{u_n\}$ et $u_0 \in X$ tels que $u_n \rightharpoonup u_0$ faiblement dans X quand $n \to \infty$. Il découle du résultat de Brézis et Lieb [55] que

$$\|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \|u_n - u_0\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \|u_0\|_{L^{2^*}}^{2^*} \to 0 \tag{2.7}$$

quand $n \to \infty$. Il découle de la convergence faible que

$$\|u_n\|_X^2 - \|u_n - u_0\|_X^2 - \|u_0\|_X^2 \to 0$$

quand $n \to \infty$. De plus, comme l'injection $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ est compacte, on a $u_n \to u_0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. Ce qui montre que

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \|u_n\|_X^2 + \omega\|u_n\|_{L^2}^2 + o(1) \\ &= \|u_n - u_0\|_X^2 + \|u_0\|_X^2 + \omega\|u_0\|_{L^2}^2 + o(1) \\ &\geq S_0\|u_n - u_0\|_{L^{2^*}}^2 + I(\omega)\|u_0\|_{L^{2^*}}^2 + o(1) \\ &= (S_0 - I(\omega))\|u_n - u_0\|_{L^{2^*}}^2 + I(\omega) + o(1), \end{aligned}$$

ayant utilisé (2.7) et le fait que $\|u_n\|_{L^{2^*}} = 1$. Puisque $S_0 > I(\omega)$, alors $u_n \to u_0$ fortement dans $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to \infty$. Ainsi, on obtient $\|u_0\|_{L^{2^*}} = 1$.

A partir de la semi-continuité faible de la norme $\|\|_X$, on a

$$\|u_0\|_X^2 + \omega\|u_0\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \left\{\|u_n\|_X^2 + \omega\|u_n\|_{L^2}^2\right\} = I(\omega).$$

En combinant l'inégalité ci-dessus avec la définition de $I(\omega)$, on voit que $u_0 \in X$ est un minimiseur pour $I(\omega)$.

On pose alors $v_0 := I_\omega^{\frac{1}{2\sigma}} u_0$ qui est une solution de (2.2), et on affirme que

$$\|v_0\|_X = I_\omega^{\frac{1}{2\sigma}}\|u_0\|_X \to 0 \text{ quand } \omega \to \omega_1. \tag{2.8}$$

En fait, d'après la définition de I_ω on a

$$I_\omega \leq (\frac{1}{\|e_1\|^2_{2\sigma+2}})\|e_1\|^2_X + \omega\|e_1\|^2_2 = (\frac{1}{\|e_1\|^2_{2\sigma+2}})(\omega - \omega_1) \to 0 \text{ quand } \omega \to \omega_1.$$

De plus

$$\|u_\omega\|^2_X \leq= I_\omega - \omega\|u_0\|^2_2,$$

car $\|u_0\|_{p+1} = 1$. Enfin, le Lemme 1.5.1 assure que

$$\|u_0\|^2_X \leq I_\omega + |\omega|(\varepsilon\|u_0\|^2_X + C_\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

En choisissant ε suffisamment petit, on conclut que $\|u_\omega\|^2_X$ reste bornée quand $\omega \to \omega_1$. Par conséquent, on obtient (2.8).

□

L'étape suivante consiste à prouver que, pour certaines valeurs de ω qui dépendent de la dimension d, on a $I_\omega \in]0, S_0[$. Pour cela, on cherchera à estimer le rapport

$$Q_\omega(u_\varepsilon) = \frac{\|u_\varepsilon\|^2_X + \omega\|u_\varepsilon\|^2_2}{\|u_\varepsilon\|^2_{2^*}}$$

avec

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{(d-2)/2}},$$

où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, et $\varphi(x) \equiv 1$ si $|x| \leq 1$, $\varphi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$.
En faisant les calculs similaires à ceux menés dan le Lemme 1.1 dans [33], on obtient le résultat suivant

Lemme 2.2.2 *Soit $d \geq 3$, alors, lorsque $\varepsilon \to 0$ et pour différentes constantes $B > 0$ et $C > 0$ on a :*

$$Q_\omega(u_\varepsilon) = \begin{cases} S + \omega B\varepsilon + C\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{(d-2/2)}) & si\ d \geq 7 \\ S + \omega B\varepsilon + C\log(\varepsilon)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) & si\ d = 6 \\ S + \omega B\varepsilon + O(\varepsilon^{(3/2)}) & si\ d = 5 \\ S + \omega B\varepsilon\log(\varepsilon) + O(\varepsilon) & si\ d = 4 \\ S + (1+\omega)B\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) & si\ d = 3. \end{cases} \tag{2.9}$$

On en déduit que si $d \geq 4$ et $\omega \in (\omega_1, 0)$, ou bien $d = 3$ et $\omega \in (\omega_1, -1)$, alors $Q_\omega(u_\varepsilon) < S_0$ pourvu que $\varepsilon > 0$ soit assez petit. Ainsi, quitte à démontrer le Lemme 2.2.2, on prouve le Théorème (2.2.1).

Preuve du Lemme 2.2.2. On commence par estimer les différentes quantités qui apparaissent dans l'expression de Q_ω. Ensuite, nous essayerons d'établir les estimations souhaitées. On a Aors :

- $$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi^{2^*}}{(\varepsilon + |x|^2)^d} = \varepsilon^{-d/2}(A_0 + O(\varepsilon^{(d)/2})) \quad (\text{pour } d \geq 3)$$

  où

  $$A_0 := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{(1+|x^2|)^d}, \quad d \geq 3.$$

- $$\nabla u_\varepsilon = \frac{\nabla \varphi}{(\varepsilon + |x|^2)^{(d-2)/2}} - \frac{(d-2)\varphi(x).x}{(\varepsilon + |x|^2)^{d/2}}$$

  et alors

  $$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \varepsilon^{1-d/2}(A_1 + O(\varepsilon^{(d-2)/2})) + O(1), \quad (\text{pour } d \geq 3)$$

  où

  $$A_1 := (d - 2^2) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{(1+|x^2|)^d}, \quad d \geq 3.$$

- $$\|xu_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x^2\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{d-2}} = \varepsilon^{3-d/2}(A_3 + O(\varepsilon^{(d-6)/2})) \quad (\text{pour } d \geq 7)$$

  où

  $$A_3 := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2}{(1+|x^2|)^{(d-2)}}, \quad d \geq 7.$$

- $$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{d-2}} = \varepsilon^{2-d/2}(A_4 + O(\varepsilon^{(d-4)/2})) \quad (\text{pour } d \geq 5)$$

  où

  $$A_4 := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x^2|)^{(d-2)}}, \quad d \geq 5.$$

En tenant compte de ces calculs, on obtien

$$Q_\omega(u_\varepsilon) = A_0^{\frac{2}{d}-1}(A_1 + \omega A_4 \varepsilon + A_3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{(d-2)/2})), \qquad \text{pour } d \geq 7. \tag{2.10}$$

Comme il est bien connu que $S = A_0^{\frac{2}{d}-1} A_1$ (voir [33]), (2.9) découle pour les dimensions $d \geq 7$.

Le cas $d = 6$: Dans ce cas, le seul terme qui change est $\|xu_\varepsilon\|_2^2$, mais puisque on a que

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^4} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|x|^2\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^4} \leq \int_{|x|\leq 2} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^4} \tag{2.11}$$

et que

$$\int_{|x|\leq R} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^4} = \frac{1}{2} w_5 |\log \varepsilon| + O(1),$$

où w_5 est l'aire de la sphère S^4 de $\mathbb{R}^5$. Ainsi, (2.9) découle dans le cas $d = 6$.

Le cas $d = 5$: Dans ce cas

$$\int_{|x|\leq R} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^3} = O(1).$$

En utilisant à nouveau (2.11), on en déduit le résultat pour $d = 5$.

Le cas $d = 4$: De même que pour (2.11), on peut montrer que

$$\|xu_\varepsilon\|_2^2 = O(1), \text{ et } \|u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{1}{2} w_3 |\log \varepsilon| + O(1)$$

par conséquent, on obtient (2.9) dans ce cas.

Le cas $d = 3$: Utilisant la même fonction test, la meilleure approximation que l'on peut obtenir est

$$Q_\omega(u_\varepsilon) = S + \omega O(\varepsilon^{1/2}) + O(\varepsilon^{1/2})$$

qui n'est pas suffisante pour comparer S et I_ω. En suivant [33], on pose

$$u_\varepsilon(r) := \frac{\varphi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{1/2}}, \quad r = |x|, \ \varepsilon > 0$$

où φ est une fonction radiale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Ainsi, on peut montrer aisément que

$$Q_\omega(u_\varepsilon) = S + C\left[\int_0^\infty \varphi'(r)^2 dr + \int_0^\infty \varphi(r)^2 r^2 dr + \omega \int_0^\infty \varphi(r)^2 dr\right] \varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

Choisissant $\varphi(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}$, on obtient

$$\int_0^\infty \varphi'(r)^2 dr + \int_0^\infty \varphi(r)^2 r^2 dr = \int_0^\infty \varphi(r)^2 dr$$

et donc

$$Q_\omega(u_\varepsilon) = S + (1+\omega)C\varepsilon^{\frac{1}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0 \tag{2.12}$$

pour une constante positive C. On trouve $0 < I_\omega < S \leq I_0$ si $\frac{\omega_1}{3} = -1 < \omega < 0$ et le résultat d'existence désiré est obtenu. □

Comme on va voir dans la partie numérique, nos calculs suggèrent que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Néanmoins, on commencera par l'étude théorique de ce problème : c'est l'objet du paragraphe suivant.

2.3 Non-existence de solutions radiales

Dans le paragraphe précédent, on a montré l'existence de solutions pour l'équation (2.1) pour $\omega \in]-\lambda_1, 0[$ où $d \geq 4$ et pour $\omega \in]-\lambda_1, -1[$ lorsque $d = 3$. De plus, on a effectué des calculs numériques qui suggèrent la non-existence des solutions pour $\omega \in [-1, +\infty[$ (ces résultats numériques seront présentés dans la deuxième partie de la thèse). Notre objectif dans ce paragraphe est d'en donner une preuve rigoureuse. Comme nous l'avons déjà fait remarqué, le phénomène similaire est déjà prouvé analytiquement par Brézis et Nirenberg [33] pour une équation elliptique semi-linéaire sur la boule avec la condition au bord de Dirichlet et par Kabeya, Yanagida et Yotsutani [40] pour la même équation avec la condition au bord de Robin.

On énonce tout d'abord notre résultat principal de non-existence :

Théorème 2.3.1 *Soit $d = 3$ et $\sigma = \sigma^* := 2/(d-2)$. Alors, l'équation (2.2) n'admet pas de solutions positives non triviales dans X pour $\omega \in \{-1\} \cup [-1/\sqrt{2}, +\infty[$.*

Remarque 2.3.1 *En fait, on peut améliorer notre résultat. Précisément, à partir de la preuve du Théorème 1, on voit qu'il n'existe aucune solution radiale (pas nécessairement positive) non triviale de l'équation (2.2) dans X.*

Malheureusement, on ne sait rien sur le cas $\omega \in]-1, -1/\sqrt{2}[$. Cependant, on peut omettre la condition technique pour obtenir une version plus faible du résultat de non-existence et qui ne concerne que les minimiseurs du problème variationnel (2.5), C'est l'objet du prochain paragraphe.

Maintenant, on accorde notre attention à la démonstration du le Théorème 2.3.1. Pour ce faire, on utilise l'identité généralisée de Pohozaev (voir Lemme 2.3.2 ci-dessous), qui est aussi utilisé par Brézis et Nirenberg [33] (voir aussi Benguria, Dolbeault et Esteban [42]). D'abord, on rappelle que si la solution u de l'équation (2.2) existe, alors

u devrait être à symétrie radiale et décroissante en fonction $r = |x|$ (voir [43]). Ainsi, l'équation (2.2) est réduite à

$$\begin{cases} -\partial_{rr}^2 u - \frac{2}{r}\partial_r u + r^2 u + \omega u - |u|^4 u = 0, & r > 0, \\ u(r) > 0, & r > 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

En posant $v(r) = ru(r)$, on voit que v satisfait

$$\begin{cases} \partial_{rr}^2 v - r^2 v - \omega u + r^{-4}|v|^4 v = 0, & r > 0, \\ v(0) = 0, \quad \partial_r v(0) = u(0). \end{cases} \tag{2.14}$$

Afin de pouvoir établir une identité valable pour une large gamme de fonctions tests, on a besoin d'étudier la décroissance à l'infini des solutions de (2.2). Ainsi, on commence par énoncer le résultat suivant, qui sera démontré plus tard.

Lemme 2.3.1 *Soit u une solution de l'équation (2.2), Alors, il existe des constantes C et $\delta_0 > 0$ telles que $u(r) \leq Ce^{-\delta_0 r}$ pour tout $r > 0$.*

En utilisant cette propriété, on établit l'identité de Pohozaev suivante :

Lemme 2.3.2 *Soit $g \in C^3(\mathbb{R}_+)$ avec $\lim_{r\to\infty} |g(r)|r^4 e^{-2\delta_0 r} = 0$, où la constante δ_0 est donnée par le Lemme 2.3.1 . Alors v satisfait l'identité suivante :*

$$-\frac{g(0)}{2}(v'(0))^2 + \int_0^\infty \left(rg(r) + r^2 g'(r) - \frac{g'''(r)}{4} + \omega g'(r) \right) |v(r)|^2 dr = \frac{2}{3}\int_0^\infty r^{-5}(rg'(r) - g(r))|v(r)|^6 dr. \tag{2.15}$$

Maintenant, on est en mesure de démonter le Théorème 2.3.1. Ensuite, on établira la preuve des deux lemmes utilisés dans la démonstration.

Preuve du Théorème 2.3.1. On montre d'abord le cas où $\omega \in [-1/\sqrt{2}, +\infty[$. Posons $g(r) = \int_0^r e^{-\lambda s^2} ds$ pour $\lambda > 0$. Alors, on a clairement $g(0) = 0$. De plus, on voit que

$$g(r) = \int_0^r (s)' e^{-\lambda s^2} ds = \left[s e^{-\lambda s^2} \right]_0^r + 2\lambda \int_0^r s^2 e^{-\lambda s^2} ds = rg'(r) + 2\lambda \int_0^r s^2 e^{-\lambda s^2} ds.$$

Ainsi, on a $rg'(r) - g(r) = -2\lambda \int_0^r s^2 e^{-\lambda s^2} ds < 0$. Par la suite, le terme de droite de (2.15) est strictement négatif.

D'autre part, on peut calculer

$$rg(r) + r^2 g'(r) - \frac{g'''(r)}{4} + \omega g'(r) > 2r^2 g'(r) - \frac{g'''(r)}{4} + \omega g'(r) = (2 - \lambda^2) r^2 e^{-\lambda r^2} + (\frac{\lambda}{2} + \omega) e^{-\lambda r^2}.$$

On a utilisé le fait que $rg'(r) < g(r)$ dans la première inégalité. Si on pose $\lambda = \sqrt{2}$, on trouve $rg(r) + r^2 g'(r) - \frac{g'''(r)}{4} + \omega g'(r) > 0$ pour $r > 0$ si $\omega \geq -1/\sqrt{2}$, ce qui implique que le terme de gauche de (2.15) est strictement positif ce qui est manifestement contradictoire.

Puis, on considère le cas où $\omega = -1$. Soit $g(r) = e^{-r^2} \int_0^r e^{t^2} dt$. Alors, on vérifie aisément que $g \in C^3([0, +\infty[)$ satisfait

$$rg + r^2 g' - \frac{g'''}{4} - g' = 0. \tag{2.16}$$

Clairement, $g(0) = 0$. Par conséquent, il suffit de montrer que $rg' - g \leq 0$ pour tout $r \geq 0$ pour prouver le Théorème 2.3.1. Posant $f(r) = \int_0^r e^{t^2} dt$, on aura

$$rg'(r) - g(r) = -2r^2 e^{-r^2} f(r) + r - e^{-r^2} f(r) = e^{-r^2}(-2r^2 f(r) + re^{r^2} - f(r)).$$

On écrit $h(r) := -2r^2 f(r) + re^{r^2} - f(r)$. Alors, on voit que $h(0) = 0$ et

$$h'(r) = -4rf(r) - 2r^2 e^{r^2} + 2r^2 e^{r^2} + e^{r^2} - e^{r^2} = -4rf(r) \leq 0$$

pour tout $r \geq 0$. Ainsi, on voit que $h(r) \leq 0$ pour tout $r \geq 0$. □

Remarque 2.3.2 *Les fonctions* $g_1(r) = e^{-r^2} \left(\int_0^r e^{t^2} dt \right)^2$ *et* $g_2(r) = e^{-r^2}$ *sont également solutions de l'équation* (2.16). *Cependant, comme* $\lim_{r \to \infty} g_1(r)/\exp(r^2) = 1$, g_1 *ne satisfait pas l'identité* (2.15) . *D'autre part, l'utilisation de* g_2 *dans* (2.15) *n'aboutit à aucune contradiction. Maintenant, on établit la preuve du Lemme 2.3.1.*

Preuve du Lemme 2.3.1. D'après le lemme des fonctions radiales de Strauss (voir [17]), nous avons $\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{H^1}/r$ pour $r \geq 1$. Ainsi, on voit que $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$.

Pour tout $m \geq 0$, il existe une constante positive R_1 telle que $\omega + r^2 |u|^4(r) \geq m$ pour tout $r \geq R_1$. Ainsi, on voit que $u''(r) \geq mu$ pour $r \geq R_1$ à partir de l'équation (2.13). Posons $\xi(r) = \exp(-\sqrt{m}r)\{u'(r) + \sqrt{m}u(r)\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \xi'(r) &= \exp(-\sqrt{m}r)\{-\sqrt{m}u'(r) - mu(r) + u''(r) + \sqrt{m}u'(r)\} \\ &= \exp(-\sqrt{m}r)\{-\sqrt{m}u(r) + u''(r)\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

pour $r \geq R_1$. Donc, ξ est croissante sur $[R_1, \infty)$. Supposons qu'il existe $R_2 > R_1$ telle que $\xi(R_2) > 0$. Alors, on voit que $\xi(r) \geq \xi(R_2) > 0$ pour tout $r \geq R_2$. Cela implique que

$u'(r) + \sqrt{m}u(r) \geq \xi(R_2)\exp(\sqrt{m}r)$. Il s'agit d'une contradiction, car le terme à gauche converge vers zéro, tandis celui de droite diverge comme $r \to \infty$. Par conséquent, on a $\xi(r) \leq 0$ pour $r \geq R_2$. Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}(\exp(\sqrt{m}r)u)'(r) &= \sqrt{m}\exp(\sqrt{m}r)u(r) + \exp(\sqrt{m}r)u'(r)\\ &= \exp(\sqrt{m}r)(\sqrt{m}u(r) + u'(r))\\ &= \exp(\sqrt{m}r)\xi(r)\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Cela implique que $u(r) \leq C_1\exp(-\sqrt{m}r)$ pour $r \geq R_1$, avec $C_1 = \exp(\sqrt{m}R_1)u(R_1)$.

□

Enfin, on conclut ce paragraphe en établissant la preuve du Lemme 2.3.2

Preuve du Lemme 2.3.2. En multipliant l'équation (2.14) par gv' et en intégrant l'équation obtenue entre 0 et ∞, on obtient

$$\begin{aligned}&-\frac{g(0)}{2}(v'(0))^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(r)(v'(r))^2dr + \int_0^\infty \left(rg(r) + \frac{r^2g'(r)}{2}\right)v(r)^2dr + \frac{\omega}{2}\int_0^\infty g'(r)v(r)^2dr\\ &+\int_0^\infty \left(\frac{2}{3}r^{-5}g(r) - \frac{r^{-4}}{6}g'(r)\right)v(r)^6dr = 0\end{aligned} \tag{2.17}$$

En effet, on a

- Le premier terme

$$\begin{aligned}&= \int v''(r)g(r)v'(r)dr\\ &= \int g(r)\partial_r(\frac{v'(r)}{2})^2dr\\ &= \left[g(\frac{v'}{2})^2\right]_0^\infty - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(r)(v'(r))^2dr\\ &= -\frac{g(0)}{2}(v'(0))^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(r)(v'(r))^2dr.\end{aligned}$$

- Le second terme

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^\infty r^2 v(r) g(r) v'(r) dr \\
&= -\int_0^\infty r^2 g(r) \partial_r \left(\frac{v(r)^2}{2} \right) dr \\
&= -\left[\frac{r^2 g(r) v(r)^2}{2} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{2rg(r) + r^2 g'(r)}{2} \right) v(r)^2 dr \\
&= \int_0^\infty \left(rg(r) + \frac{r^2 g'(r)}{2} \right) v(r)^2 dr,
\end{aligned}$$

- Le troisième terme

$$\begin{aligned}
&= -\omega \int_0^\infty g(r) v(r) v'(r) dr \\
&= -\omega \int_0^\infty g(r) \partial_r \left(\frac{v(r)^2}{2} \right) dr \\
&= -\omega \left[g \frac{v^2}{2} \right]_0^\infty + \frac{\omega}{2} \int_0^\infty g'(r) v(r)^2 dr \\
&= \frac{\omega}{2} \int_0^\infty g'(r) v(r)^2 dr,
\end{aligned}$$

- Le quatrième terme

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty r^{-4} g(r) v(r)^5 v'(r) dr \\
&= \int_0^\infty r^{-4} g(r) \partial_r \left(\frac{v(r)^6}{6} \right) dr \\
&= \left[r^{-4} g(r) \frac{v(r)^6}{6} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{-4r^{-5} g(r) + r^{-4} g'(r)}{6} \right) v(r)^6 dr \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{2}{3} r^{-5} g(r) - \frac{r^{-4}}{6} g'(r) \right) v(r)^6 dr.
\end{aligned}$$

NOtons que nous avons utilisé le fait que $\lim_{r \to 0} v(r)/r = u(0)$ dans le calcul du quatrième terme.
Ensuite, en multipliant l'équation (2.14) par $v(r)g'(r)/2$ et en intégrant l'équation obtenue entre 0 et ∞, on obtient

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty (v'(r))^2 g'(r) dr + \frac{1}{4}\int_0^\infty v(r)^2 g'''(r) dr - \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2 v(r)^2 g'(r) dr - \frac{\omega}{2}\int_0^\infty v(r)^2 g'(r) dr + \frac{1}{2}\int_0^\infty r^{-4} v(r)^6 g'(r) dr = 0. \tag{2.18}$$

En effet, on a

- Le premier terme

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{v''(r)}{2} v(r) g'(r) dr \\
&= \left[\frac{v'(r)}{2} v(r) g(r) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{v'(r)}{2} \left(v'(r) g'(r) + v(r) g''(r) \right) dr \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty (v'(r))^2 g'(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^\infty v'(r) v(r) g(r) dr \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty (v'(r))^2 g'(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \partial_r (v(r)^2) g''(r) dr \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty (v'(r))^2 g'(r) dr - \frac{1}{2} \left[\frac{v(r)^2}{2} g''(r) \right]_0^\infty + \frac{1}{4} \int_0^\infty v(r)^2 g'''(r) dr \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty (v'(r))^2 g'(r) dr + \frac{1}{4} \int_0^\infty v(r)^2 g'''(r) dr,
\end{aligned}$$

- Le second terme

$$= -\int_0^\infty r^2 v(r) \frac{v(r) g'(r)}{2} dr = -\frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 v(r)^2 g'(r) dr,$$

- Le troisième terme

$$= -\omega \int_0^\infty v(r) \frac{v(r) g'(r)}{2} dr = -\frac{\omega}{2} \int_0^\infty v(r)^2 g'(r) dr,$$

- le quatrième terme

$$= \int_0^\infty r^{-4} v(r)^5 \frac{v(r) g'(r)}{2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty r^{-4} v(r)^6 g'(r) dr.$$

Alors en retranchant (2.18) à partir de (2.17), on obtient (2.15). □

2.4 Non-existence de minimiseurs

Dans le paragraphe précèdent, on a établi la non−existence de solution radiales pour (2.2) pour un ensemble particulier de fréquence ω, à savoir $\omega \in \{-1\} \cup [-1/\sqrt{2}, +\infty[$. Malheureusement, on ne sait rien sur le cas $\omega \in]-1, -1/\sqrt{2}[$. Cependant, on peut omettre cette condition technique pour énoncer une version plus faible du résultat de non-existence. Pour cela, on écrit

$$I(\omega) = \inf \left\{ \|u\|_X^2 + \omega \|u\|_{L^2}^2 \mid u \in X,\ \|u\|_{L^{2^*}}^2 = 1 \right\}.$$

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, on a prouvé que $I(\omega)$ est atteint pour $\omega \in]-\lambda_1, -1[$ par $v_\omega \in X \setminus \{0\}$. Par conséquent, en posant $u_\omega = I(\omega)^{1/(2^*-2)} v_\omega$, on voit que u_ω satisfait l'équation (2.1). Alors que, pour $\omega \in [-1, +\infty[$, on obtient le

Théorème 2.4.1 *Soit $N = 3$. Le problème de minimisation $I(\omega)$ n'a pas de solution pour $\omega \geq -1$.*

Remarque 2.4.1 *Le théorème 2.4.1 implique que pour $\omega \in [-1, +\infty[$, on ne peut pas obtenir une solution par la même méthode que celle utilisée dans le cas où $\omega \in]-\lambda_1, -1[$.*

Nous présentons deux preuves pour ce théorème. En, effet, suite à nos discutions avec le professeur L. Jeanjean, il nous a permis d'améliorer notre démonstration initiale par un argument qu'il a développé récemment dans [57]. Cependant, on gardera aussi notre démonstration obtenue initialement en s'inspirant de la démarche de Druet [44] car nous pensons que ce raisonnement peut être utiles pour d'autre problèmes de non existences. On commence alors par la première démontration.

Preuve 1 *du Théorème 2.4.1.*

Nous présentons la démonstration sous la forme d'étapes numérotées :

1. $I(-1) \geq I(0)$: autrement, la borne inférieure serait atteinte. En effet, il est possible de remplacer $I(0)$ par S_0 dans le Lemme 2.3. Ainsi, la condition suffisante pour que le minimum $I(\omega)$ soit atteint serait $I(\omega) < I(0)$ au lieu de $I(\omega) < I(0)$. La preuve est simple, il suffit de remplacer $I(0)$ par S_0 où il apparaît dans la démonstration de ce lemme.
2. La fonction $w \to I(\omega)$ est croissante et ainsi en déduit que $I(\omega) = I(0) \forall \omega \in [-1, 0]$
3. Si le minimum $I(\omega)$ est atteint pour $\omega = \omega_0 \in]-1, 0[$ par $u_{\omega_0} \neq 0$, alors pour tout $\omega < \omega_0$ on a

$$I(\omega) \leq \|u_{\omega_0}\|_X^2 + \omega \|u_{\omega_0}\|_2^2 < \|u_{\omega_0}\|_X^2 + \omega_0 \|u_{\omega_0}\|_2^2 = I(\omega_0).$$

4. $\Rightarrow I(\omega) < I(\omega_0)$ pour tout $\omega < \omega_0$ et $I(-1) < I(\omega_0) = I(0)$: contradiction.

□

Ensuite, on prouve le Théorème 2.4.1 en s'inspirant de la démarche de Druet [44]. Dans cette deuxième preuve, et dans le but d'alléger les notations, on va omettre la variable x dans les intégrales que l'on va rencontrer (c'est à dire : on va noter $\int f\, dx$ au lieu de $\int f(x)\, dx$. D'abord, on rappelle le résultat bien connu suivant :

Lemme 2.4.1 *Soit*

$$W_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Alors, on a $\|W_0(x)\|_{L^6} = S_0^{1/4}$*, où* S_0 *est la meilleure constante de Sobolev donnée par*

$$S_0 = \inf\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2 \mid u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3), \|u\|_{L^6} = 1\right\}.$$

Voir e.g. Willem [45, Théorème 1.42] pour la preuve. Ensuite, on rappelle ce résultat qu'on a déjà établi dans le premier paragraphe de ce chapitre :

Lemme 2.4.2 *Soit* $N = 3, p = 2^* - 1$ *et* $\omega > -\lambda_1$*. Si* $I(\omega) < S_0$*, alors il existe un minimisant* $v_\omega \in X$ *de* $I(\omega)$*.*

Maintenant, on est en mesure de démontrer le théorème 2.4.1.
Preuve 2 du Théorème 2.4.1. Comme $I(\omega)$ est atteint si $I(\omega) < S_0$. Alors, on voit que si $I(\omega)$ n'est pas atteint, alors on a $I(\omega) \geq S_0$.

Il découle du Théorème 2.3.1 que $I(-1)$ n'est pas atteint, ce qui implique $I(-1) \geq S_0$. Supposons qu'il existe un minimisant $Q_\omega \in X \setminus \{0\}$ pour $I(\omega)$ avec $\omega > -1$. Alors on trouve

$$I(\omega) = I(-1) + (\omega + 1)\|Q_\omega\|_{L^2}^2 > I(-1) \geq S_0. \tag{2.19}$$

En outre, $Q_\omega \in X$ satisfait

$$-\Delta Q_\omega + |x|^2 Q_\omega + \omega Q_\omega = I(\omega) Q_\omega^5, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

et $\|Q_\omega\|_{L^6}^6 = 1$.

Pour n'importe quel $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ (que l'on fixera ultérieurement), on tire

$$\left(\int Q_\omega^6 (1+\epsilon\varphi)^6 dx\right)^{1/3} \leq I^{-1}(\omega)\Big[\int |\nabla(Q_\omega(1+\epsilon\varphi))|^2 dx + \int |x|^2 |Q_\omega|^2 dx + \omega \int |Q_\omega(1+\epsilon\varphi)|^2 dx\Big] \tag{2.20}$$

à partir de la caractérisation variationnelle de $I(\omega)$. Ainsi, on se ramène à

$$\text{L.H.S. de (3.3)} = 1 + 2\epsilon \int Q_\omega^6 \varphi dx + 5\epsilon^2 \int Q_\omega^6 \varphi^2 dx - 4\epsilon^2 \left(\int Q_\omega^6 \varphi dx\right)^2 + o(\epsilon^2). \tag{2.21}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\text{Le terme de droite de (3.3)}\\
&= I^{-1}(\omega)\Big[\int |\nabla(Q_\omega(1+\epsilon\varphi))|^2dx + \int |x|^2|Q_\omega|^2dx + \omega\int |Q_\omega(1+\epsilon\varphi)|^2dx\Big]\\
&= I^{-1}(\omega)\Big[\int |\nabla Q_\omega|^2|1+\epsilon\varphi|^2dx + 2\int \nabla Q_\omega Q_\omega(1+\epsilon\varphi)\epsilon\nabla\varphi dx\\
&\quad + 2\int \nabla Q_\omega Q_\omega(1+\epsilon\varphi)\epsilon\nabla\varphi dx + \epsilon^2\int |Q_\omega|^2|\nabla\varphi|^2dx\\
&\quad + \int |x|^2|Q_\omega(1+\epsilon\varphi)|^2dx + \omega\int |Q_\omega(1+\epsilon\varphi)|^2dx\Big]\\
&= I^{-1}(\omega)\Big[\int -\Delta Q_\omega Q_\omega(1+\epsilon\varphi)^2dx - 2\int \nabla Q_\omega Q_\omega(1+\epsilon\varphi)\epsilon\nabla\varphi dx\\
&\quad + 2\int \nabla Q_\omega Q_\omega(1+\epsilon\varphi)\epsilon\nabla\varphi dx + \epsilon^2\int |Q_\omega|^2|\nabla\varphi|^2dx\\
&\quad + \int |x|^2|Q_\omega(1+\epsilon\varphi)|^2dx + \omega\int |Q_\omega(1+\epsilon\varphi)|^2dx\Big]\\
&= I^{-1}(\omega)[I(\omega)\int Q_\omega^6(1+\epsilon\varphi)^2dx + \epsilon^2\int |Q_\omega|^2|\nabla\varphi|^2dx]\\
&= 1 + 2\epsilon\int Q_\omega^6\varphi dx + \epsilon^2\int Q_\omega^6\varphi^2dx + \epsilon^2 I^{-1}(\omega)\int |Q_\omega|^2|\nabla\varphi|^2dx. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Prenant $\epsilon \to 0$, il découle de (2.21) et (2.22) que

$$4\int Q_\omega^6\varphi^2dx \le I^{-1}(\omega)\int |Q_\omega|^2|\nabla\varphi|^2dx + 4\left(\int Q_\omega^6\varphi dx\right)^2. \qquad (2.23)$$

On affirme qu'il existe $(y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ tel que

$$\vec{F}(y_0, t_0) = G(y_0, t_0) = 0, \qquad (2.24)$$

où $\vec{F}(y,t) = (F_1(y,t), F_2(y,t), F_3(y,t))$,

$$F_i(y,t) = 2t\int Q_\omega^6\frac{x_i - y_i}{1+t^2|x-y|^2}dx, \quad G(y,t) = \int Q_\omega^6\frac{1-t^2|x-y|^2}{1+t^2|x-y|^2}dx$$

pour $i = 1, 2, 3$. Pour prouver ceci, on écrit

$$H(y,s) = \left(\vec{F}(y,\sqrt{s}) + y, G(y,\sqrt{s}) + s\right)$$

pour $(y,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Alors, on peut prouver le :

Lemme 2.4.3 *Soit $H(y,s) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^4$ défini au dessus. Alors, on a*

$$|H(y,s)|^s \leq |y|^2 + |s|^2 \tag{2.25}$$

si $|y|^2 + |s|^2 > 0$ est suffisamment grand.

On admet le Lemme 2.4.3 pour le moment et on continue la preuve du Théorème 2.4.1. La preuve du Lemme 2.4.3 sera donnée après. Clairement, d'après ce résultat l'image par H d'un ensemble borné est bornée. Ainsi, il existe $R > 0$ tel que $H(B(0,R)) \subset B(0,R)$. Alors, par le théorème du point fixe de Brouwer, il existe $(y_0, t_0) \in R^3 \times \mathbb{R}_+$ tel que $H(y_0,t_0) = (y_0,t_0)$, c'est à dire, $\vec{F}(y_0,t_0) = G(y_0,t_0) = 0$.

On pose Alors

$$\varphi_i = \frac{2t_0(x^i - y_0^i)}{1 + t_0^2|x-y_0|^2}, \text{ pour } i = 1,2,3, \quad \varphi_4(x) = \frac{1 - t_0^2|x-y_0|^2}{1 + t_0^2|x-y_0|^2}.$$

A partir de (2.23) et (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} 4\int Q_\omega^6 \varphi_i dx &\leq I^{-1}(\omega) \int |Q_\omega|^2 |\nabla \varphi_i|^2 dx + 4\left(\int Q_\omega^6 \varphi_i dx\right)^2 \\ &= I^{-1}(\omega) \int |Q_\omega|^2 |\nabla \varphi_i|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

De plus, on verra que

$$\sum_{i=1}^4 |\varphi_i|^2 dx = 1, \quad \sum_{i=1}^4 |\nabla \varphi_i|^2 = \frac{12 t_0^3}{(1 + t_0^2|x-y|^2)^2}.$$

Utilisant (3.2), (2.26) et les relations ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned}
4 &= 4\int Q_\omega^6 dx \\
&= 4\sum_{i=1}^{4}\int |Q_\omega|^6(\varphi_i)^2 dx \\
&\leq I^{-1}(\omega)\sum_{i=1}^{4}|Q_\omega|^2|\nabla\varphi_i|^2 dx \\
&= 12I^{-1}(\omega)\int |Q_\omega|^2\frac{t_0^2}{(1+t_0^2|x-y_0|^2)}dx \\
&< 12S_0^{-1}\int |Q_\omega|^2\frac{t_0^2}{(1+t_0^2|x-y_0|^2)}dx \\
&\leq 12S_0^{-1}\left(\int \frac{t_0^3}{(1+t_0^2|x|^2)^3}dx\right)^{2/3}\|Q_\omega\|_{L^6}^2 \\
&= 12S_0^{-1}\left(\int \frac{t_0^3}{(1+t_0^2|x|^2)^3}dx\right)^{2/3} \\
&= 12S_0^{-1}\times\frac{S_0}{3} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, ce qui achève la démonstration du Théorème 2.4.1. □

Enfin, nous concluons ce chapitre en établissant la preuve du Lemme 2.4.3 qui était admis dans la preuve du Théorème 2.4.1.

Preuve du Lemme 2.4.3. On montre ce lemme suivant plusieurs étapes.
• Etape 1 : d'abord, on montrera que (2.25) est vérifiée si $s > 0$ est suffisamment grand, pour chaque $M > 0$, on prend $s > 0$ suffisamment grand de sorte que

$$\frac{1-s|x|^2}{1+s|x|^2} < -\frac{1}{2}$$

pour $|x| \geq 1/M$. Alors, pour $M > 0$ assez grand, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int Q_\omega^6 \frac{1-s|x-y|^2}{1+s|x-y|^2}dx \\
&= \int_{B(y,\frac{1}{M})} Q_\omega^6 \frac{1-s|x-y|^2}{1+s|x-y|^2}dx + \int_{B(y,\frac{1}{M})^c} Q_\omega^6 \frac{1-s|x-y|^2}{1+s|x-y|^2}dx \\
&\leq \int_{B(y,\frac{1}{M})} Q_\omega^6 \frac{1-s|x-y|^2}{1+s|x-y|^2}dx - \frac{1}{2}\int_{B(y,\frac{1}{M})^c} Q_\omega^6 dx \\
&= \int_{B(y,\frac{1}{M})} Q_\omega^6 \frac{1-s|x-y|^2}{1+s|x-y|^2}dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{B(y,\frac{1}{M})} Q_\omega^6 dx \\
&< -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\int_{B(y,\frac{1}{M})} Q_\omega^6 dx \leq -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ensuite, on montre que pour n'importe quel $\epsilon > 0$, il existe s_0 tel que pour tout $s > s_0$, on a

$$\int Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1+s|x-y|^2}dx < \epsilon. \tag{2.27}$$

Pour $M > 0$ suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}
&\int Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1+s|x-y|^2}dx \\
&= \int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1+s|x-y|^2}dx + \int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})^c} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1+s|x-y|^2}dx \\
&\leq 2\int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})} Q_\omega^6 x_i dx + \int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})^c} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1+M^2}dx \\
&\leq 2\int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})} Q_\omega^6 x_i dx + \frac{2}{M^2+1}\int_{\mathbb{R}^3} Q_\omega^6 x_i dx \\
&< 2\int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})} Q_\omega^6 x_i dx + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On prend $s > 0$ suffisamment grand de sorte que $2\int_{B(y,\frac{M}{\sqrt{s}})} Q_\omega^6 x_i dx < \epsilon/2$. Ainsi, (2.27) est satisfaite.

Utilisant la relation ci-dessus, on peut calculer

$$\begin{aligned}
&|H(y,s)|^2\\
=&\Big|\Big(\int Q_\omega^6 \frac{2x\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx + y\left(1-\int Q_\omega^6 \frac{2\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx\right),\\
&\int Q_\omega^6 \frac{1-s|x-y|^2}{1+s|x-y|^2}+s\Big)\Big|^2\\
\le& s\left(\int Q_\omega^6 \frac{2x}{1+s|x-y|^2}dx\right)^2 + 2\sqrt{s}\int Q_\omega^6 \frac{2x}{1+s|x-y|^2}dx\times\\
&\times\left(1-\int Q_\omega^6 \frac{2\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx\right)^2|y|^2+\left(s-\frac{1}{4}\right)^2\\
\le& s\sqrt{\epsilon}+2\sqrt{\epsilon s}\left(1-\int Q_\omega^6 \frac{2\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx\right)|y|+s^2-\frac{s}{2}+\frac{1}{16}\\
\le&+\left(1-\int Q_\omega^6 \frac{2\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx\right)^2|y|^2+s^2+\left(1-\int Q_\omega^6 \frac{\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}\right)|y|^2
\end{aligned}$$

Pour chaque $M>0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int Q_\omega^6 \frac{\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx\\
=&\int_{B(y,\frac{M}{s^{1/4}})} Q_\omega^6 \frac{\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx + \int_{B^c(y,\frac{M}{s^{1/4}})} Q_\omega^6 \frac{\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx\\
:=& I+II.
\end{aligned}$$

Alors, il s'ensuit que

$$II \le \int_{B^c(y,\frac{M}{s^{1/4}})} Q_\omega^6 \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}M}dx \le \frac{1}{M}\int_{R^3} Q_\omega^6 dx = \frac{1}{M}.$$

Posant $M=4$, on aura $II<1/4$.

En outre, on obtient

$$\begin{aligned}
I &\le \|Q_\omega\|_{L^\infty}^6 \int_{B(y,\frac{M}{s^{1/4}})} \frac{\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx = \|Q_\omega\|_{L^\infty}^6 \int_{B(0,\frac{M}{s^{1/4}})} \frac{\sqrt{s}}{1+s|x'|^2}dx'\\
&\le \|Q_\omega\|_{L^\infty}^6 \int_0^{\frac{M}{s^{\frac{1}{4}}}} \frac{r^2}{\sqrt{s}r^2}dr = \frac{M\|Q_\omega\|_{L^\infty}^6}{s^{3/4}} \to 0
\end{aligned}$$

quand $s\to\infty$. Par conséquent, on a

$$\int Q_\omega^6 \frac{\sqrt{s}}{1+s|x-y|^2}dx < \frac{1}{2}$$

si $s > 0$ est suffisamment grand. Ainsi, on établit $|H(y,s)|^2 \leq |y|^2 + |s|^2$ si $|s| > 0$ est suffisamment grand.

• Etape 2 : on montre à présent que (2.25) est satisfaite si $|y| > 0$ est suffisamment grand.

Pour $M > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int Q_\omega^6 \frac{1 - s|x-y|^2}{1 + s|x-y|^2} dx \\
&= \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 \frac{1 - s|x-y|^2}{1 + s|x-y|^2} dx + \int_{B(y,M)^c} Q_\omega^6 \frac{1 - s|x-y|^2}{1 + s|x-y|^2} dx \\
&\leq \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 dx - \frac{1}{2} \int_{B(y,M)^c} Q_\omega^6 dx \\
&= \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 dx \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 dx.
\end{aligned}$$

Si $|y| > 0$ est suffisamment grand, on a $\int_{B(y,M)} Q_\omega^6 dx < 1/6$. Ainsi, il s'ensuit que

$$\int Q_\omega^6 \frac{1 - s|x-y|^2}{1 + s|x-y|^2} dx < -\frac{1}{4}.$$

Des calculs similaires à ceux menés à l'étape 1 montrent que pour n'importe quel $\epsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\int Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + s|x-y|^2} dx < \epsilon$$

pour $|y| \geq M$. En fait, pour chaque $M > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + s|x-y|^2} dx \\
&= \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + s|x-y|^2} dx + \int_{B(y,M)^c} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + s|x-y|^2} dx \\
&\leq \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + s|x-y|^2} dx + \int_{B(y,M)^c} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + sM^2} dx.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\int_{B(y,M)^c} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + sM^2} dx \leq \frac{2}{1 + sM^2} \int Q_\omega^6 x_i dx < \frac{\epsilon}{2}$$

si $M > 0$ est suffisamment grand. Alors, il existe $R_M > 0$ tel que

$$\int_{B(y,M)} Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1 + s|x-y|^2} dx \leq 2 \int_{B(y,M)} Q_\omega^6 x_i dx < \frac{\epsilon}{2}$$

pour $|y| \geq R_M$. Ainsi, on conclut que

$$\int Q_\omega^6 \frac{2x_i}{1+s|x-y|^2} dx < \epsilon.$$

Alors, des calculs similaires à ceux menés à l'étape 1 mènent à $|H(y,s)|^2 \leq |y|^2 + |s|^2$ pour $|y| > 0$ suffisamment grand. Ceci achève la preuve. □

Chapitre 3

Etude du cas $\sigma > \sigma^*$

3.1 Position du problème

On s'intéresse ici au cas surcritique $\sigma > \sigma^*$. Le calcul numérique que l'on a effectué suggère qu'il existe des branches de bifurcation globales de solutions nodales pour l'équation de (CBE) à chaque valeur propre ω_n (ces simulations seront présentées dans la deuxième partie de cette thèse). En outre, contrairement au cas sous−critique et critique $\sigma \in]0, \sigma^*]$, pour $\omega \in]-\lambda_1, 0[$, l'équation de (CBE) admet plusieurs solutions positives dans X. De même, pour des valeurs particulières de fréquences, plusieurs solutions à un seul nombre de noeuds peuvent exister.

Signalons tout d'abord que puisque l'injection $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ n'a pas lieu si $q > 2^* - 1$, on ne peut pas utiliser la méthode variationnelle directement. Par conséquent, les résultats concernant ce type de non−linéarité, ont été souvent obtenus à l'aide des méthodes fonctionnelles : notamment, la théorie des bifurcations. Néanmoins, à cause du caractère non borné de l'espace considéré, l'application de ces méthodes dans notre cas pose beaucoups de problèmes. En effet, bien que l'on ait déjà prouvé dans [18] l'existence de branches de bifurcation globale, solutions d'une équation elliptique semi-linéaire sur un domaine borné, on utilise essentiellement le fait que $C^{0,\alpha}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ pour chaque $\alpha \in (0, 1]$ si Ω ($\subset \mathbb{R}^d$) est borné. Ici $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est le α−ième espace continu des fonctions de Hölder. Par la suite, le caractère borné du domaine est crucial pour leur preuve puisque cette injection n'a pas lieu dans le cas général. Ainsi, il semble que la méthode soit inopérante pour l'équation de (CBE). Afin de pouvoir expliquer cette difficulté de plus près, on rappelle encore l'équation de Brézis−Nirenberg suivante pour laquelle plusieurs résultats dans le cas surcritique ont été prouvés (voir [46] et [47]) :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u, \text{ sur } \Omega, \ p > 1 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Cette équation non linéaire a un sens dès que l'on sait définir u^p comme fonction

de $L^1_{loc}(\Omega)$, et donc supposer $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. Dans les cas sous−critique et critique $p \leq 1+4/(d-2)$ et d'après les injections de Sobolev, on a $u^p \in L^1_{loc}(\Omega)$ dès que $u \in H^1_0(\Omega)$. On peut donc écrire notre problème sous la forme $F(\lambda, u) = 0$ où F est définie par

$$F : \Sigma_1 \ \to \Sigma_2, \quad u \longmapsto F(\lambda, u) := -\Delta u - u^p - \lambda u$$

où Σ_1 et Σ_2 sont deux espaces de Banach. En effet, il est possible de prendre comme espace de départ $\Sigma_1 = H^2 \cap H^1_0$ muni de la norme $\|\|_{H^2}$ qui le transforme en un espace de Hilbert et $\Sigma_2 = L^2(\Omega)$ comme espace d'arrivée. Cette forme est nécessaire pour l'utilisation de la théorie des bifurcations. De plus, la possibilité de travailler sur des espaces de Hilbert constitue un avantage majeur pour démontrer l'existence des branches bifurquées. Pour mieux présenter cette idée, il est plus commode de rappeler le résultat principal souvent utilisé pour montrer l'existence des solutions bifurquées, à savoir : le Théorème de Crandall−Rabinowitz [19].

Théorème 3.1.1 (Crandall-Rabinowitz [19]) *Soient X et Y des espaces de Banach. Supposons que $F \in C^2(\mathbb{R} \times X, Y)$ est telle que $F(\lambda, 0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les solutions non triviales de $F(\lambda, x) = 0$ voisines de $(\lambda_*, 0)$ forment une courbe $(\lambda(s), s\chi_1 + z(s))$, où $(\lambda(s), z(s)) \subset \mathbb{R} \times D_u F(\lambda_*, 0)^{\perp}$ est une fonction continue au voisinage de $s = 0$ et $\lambda(0) = \lambda_*$ et $z(0) = 0$ si F satisfait ce qui suit :*

(A1) $D_{\lambda,u}F$ *existe et est continue sur* X,

(A2) $\dim \operatorname{Ker} D_u F(\lambda_*, 0) = 1$,

(A3) $\operatorname{Im}(D_u F(\lambda_*, 0))$ *est fermé et* $\operatorname{codim}(\operatorname{Im}(D_u F(\lambda_*, 0))) = 1$,

(A4) il existe $u_0 \in \operatorname{Ker} D_u F(\lambda_*, 0)$ *tel que* $D_{\omega,u}F(\lambda_*, 0)u_0 \notin (\operatorname{Im}(D_u F(\lambda_*, 0)))$.

Dans le cas de l'équation (3.1), il est possible d'appliquer ce théorème indépendamment de la valeur de l'exposant non linéaire p. Précisément, il suffit de vérifier les 4 hypothèses de ce théorème dans le cas sous−critique en utilisant les méthodes hilbertiennes dans les espaces Σ_1 et Σ_2. Ensuite, en vue d'étudier le cas surcritique et puisque il n'est plus possible de donner un sens à l'équation sur l'espace Σ_1, on cherche alors des solutions "classiques" dans l'espace de Banach des fonctions continues $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Ce qui est remarquable dans ce cas, est que l'on peut vérifier les différents points $(A_1) - (A_4)$ pour des catégories différentes des espaces de Banach X et $Y \subset L^2(\Omega)$ dès qu'on sait le faire dans le cas le plus favorable Σ_1. Notamment, on peut choisir les espaces $X = C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \backslash u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ et $Y = C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. On peut aussi utiliser les espaces $X = W^{(2,p)}(\Omega) \cap W_0^{(1,p)}(\Omega)$ et $Y = L^p(\Omega)$. Cela est légitime, car un opérateur elliptique a une propriété de régularisation à l'égard de diverses échelles de régularités. Grâce à cette propriété cruciale, il suffit d'établir les propriétés de Fredholm dans un espace de Hilbert, qui est l'espace le plus commode pour les problèmes elliptiques

linéaires : la géométrie d'un espace de Hilbert est euclidienne. De plus, si le domaine de définition de l'opérateur linéarisé est dense, son adjoint est bien défini et agit sur le même espace. Ceci nous facilite la détermination de la codimension, la multiplicité algébrique, le complément topologique, etc... Compte tenu de ces avantages d'un espace de Hilbert, on est tenté de formuler toutes les applications dans un espace de Hilbert. Toutefois, les avantages d'un espace de Hilbert pour les problèmes linéaires rencontrent finalement un obstacle : les problèmes non linéaires qui ne peuvent pas être surmontés et il est nécessaire de changer d'espace pour donner un sens au terme non linéaire. En effet, les opérateurs non linéaires ne sont en général définis que sur les espaces de Banach des fonctions continues (avec des dérivées continues, etc...) qui sont, d'un point de vue fonctionnel, "mauvais" car ils ne sont pas réflexifs. Par conséquent, pour étudier ce genre de problèmes non linéaires, il est recommandé d'utiliser un espace de Hilbert pour les aspects linéaires et passer à un espace de Banach pour étudier sa non-linéarité. Ce passage n'est malheureusement pas toujours évident, c'est déjà le cas pour notre équation de (CBE).

A présent, on explique brièvement comment on peut utiliser cette approche dans le cas de l'équation (3.1). Ceci permet de mettre en évidence l'inefficacité de cette méthode quand on considère des ouverts non bornées comme le cas de notre équation de (CBE). Considérons alors de nouveau le problème

$$F(\lambda, u) = -\Delta u - u^p - \lambda u = 0$$

avec

$$F : \Sigma_1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to \Sigma_2 = L^2(\Omega).$$

En utilisant les méthodes standards concernant la continuité et la différentiabilité des opérateurs de Nemitskii (voir [17]), on peut facilement vérifier que la fonction F est suffisamment régulière (de classe C^2) pour pouvoir appliquer le Théorème 3.1.1. Ensuite, on calcule

$$D_u F(\lambda, 0)v = -\Delta v - \lambda v, \quad \forall\, v \in \Sigma_1.$$

Comme les bifurcations peuvent être prévues seulement aux valeurs propres de l'opérateur linéarisé, on considère une valeur propre λ_1. Quitte à se restreindre au cas radial ou à considérer la première valeur propre, on peut supposer que celle-ci est de multiplicité égale à 1 ; on pose alors $\operatorname{Ker} D_u F(\lambda_1, 0) =< e_1 >$. Maintenant, d'après la théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints (voir [17]), on sait que $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de l'opérateur $-\Delta$ (ici on utilise le fait qu'on est dans le cas sous$-$critique pour utiliser les injections compactes de Sobolev et qu' on se place dans un espace de Hilbert). Un bref raisonnement montre que :

(1) $\mathrm{Im}(D_u F(\lambda_1, 0)) =< e_1 >^{\perp}$,
(2) $\Sigma_2 = \mathrm{Ker}\, D_u F(\lambda_1, 0) \oplus \mathrm{Im}(D_u F(\lambda_1, 0))$
(3) $D_{\omega,u} F(\lambda_*, 0) e_1 = -e_1 \notin (\mathrm{Im}(D_u F(\lambda_*, 0)))$.

Manifestement, les quatre hypothèses $(A1)-(A4)$ du Théorème 3.1.1 sont satisfaites dans ce cas sous−critique. Il est à noter que cette vérification est devenue relativement simple grâce aux propriétés remarquables des espaces de Hilbert, notamment la possibilité de trouver une base hilbertienne formée de vecteurs propres orthogonaux d'un opérateur auto-adjoint compact.

Considérons maintenant le cas surcritique. Comme on l'a déjà expliqué au début de ce paragraphe, on est amené à vérifier ces hypothèses dans un espace de Banach afin de donner un sens au terme non linéaire u^p. Paradoxalement, on remarquera que cette tâche serait plus facile dans ce cas qui est a priori plus compliqué. Ceci est essentiellement dû aux propriétés de régularité d'un opérateur elliptique et surtout, nécessite l'usage des ouverts bornés contrairement au cas de notre équation de (CBE). En effet, on considère la la restriction de F à un espace de Banach de la manière suivante :

$$\tilde{F} : \quad C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \backslash u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad \to \; C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad u \longrightarrow \tilde{F}(\lambda, u) := F(\lambda, u).$$

Concernant la régularité de $\tilde{F}$ (en particulier l'hypothèse A_1), on peut encore utiliser les théorèmes standards concernant les opérateurs de Nemitskii (voir [17]). Ensuite, on rappelle la propriété de régularité suivante

$$\begin{aligned} &\text{si} \qquad D_u F(\lambda, 0) v = f \text{ avec } v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } f \in L^2(\Omega), \\ &\text{alors} \qquad f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \Rightarrow v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \backslash u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Maintenant, comme $0_{L^2(\Omega)} \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, la régularité elliptique (3.2) implique que les espaces propres géométriques et algébriques correspondant à une valeur propre de $D_u F(\lambda_1, 0)$ sont dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \backslash u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, de sorte que le spectre et la multiplicité géométriqe et algébrique d'une valeur propre de $D_u \tilde{F}(\lambda_1, 0)$ sont les mêmes que ceux de $D_u F(\lambda_1, 0)$. Ainsi, l'hypothèse $(A2)$ est satisfaite dans ce cas. D'autre part, comme dans le cas d'un ouvert borné, l'espace $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ s'injecte continûment dans $L^2(\Omega)$ et qu'on a établi que $\mathrm{Im}(D_u F(\lambda_1, 0))$ est fermé dans $L^2(\Omega)$, on déduit que $\mathrm{Im}(D_u \tilde{F}(\lambda_1, 0)) = \mathrm{Im}(D_u F(\lambda_1, 0)) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est aussi fermé dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Ainsi, on établit le premier point dans l'hypothèse (A_2).

En outre, pour tout $z \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $z \in L^2(\Omega)$, il existe donc $v \in \mathrm{Ker}\, D_u F(\lambda_1, 0) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $v^* \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tels que

$$z = v + D_u F(\lambda_1, 0)(v^*).$$

Par conséquent,

$$D_uF(\lambda_1,0)(v^*) = z - v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}).$$

D'après (3.2), on déduit que

$$v^* \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \backslash u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Ainsi on obtient,

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \text{Ker}\, D_u\tilde{F}(\lambda_1,0) + \text{Im}D_u\tilde{F}(\lambda_1,0)$$

Comme de plus,

$$\text{Ker}\, D_u\tilde{F}(\lambda_1,0) \subset \text{Ker}\, D_uF(\lambda_1,0)$$

et

$$\text{Im}D_u\tilde{F}(\lambda_1 \subset \text{Im}D_uF(\lambda_1,0)$$

on voit que ces deux sous-epaces de $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ sont ortogonaux dans $L^2(\Omega)$. Ainsi

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \text{Ker}\, D_u\tilde{F}(\lambda_1,0) \oplus \text{Im}D_u\tilde{F}(\lambda_1,0).$$

Par conséquent, les hypothèses (A_2), (A_3) et (A_4) en découlent facilement. Ainsi, cette méthode permet de démontrer l'existence de solutions bifurquées indépendamment de l'exposant non linéaire p en appliquant le Théorème 3.1.1. Ensuite, il est possible d'établir l'existence de branches globales de solutions bifurquées avec nombre prescrit de zéros. Pour ce faire, on utilise des propriétés similaires des espaces $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ restreintes au cas d'un ouvert borné (ce résultat a été établi par Rabinowitz dans [25]). A ce stade, le caractère borné du domaine Ω sera encore cruciale pour s'assurer que les zéros des solutions bifurquées ne s'échappent pas à l'infini le long de ces branches (comme on l'avait déjà expliqué dans le cas sous−critique dans le chapitre 2).
Revenons à l'étude de l'équation (CBE) dans le cas surcritique :

$$\begin{cases} -\Delta u + \|x\|^2 u = |u|^{2\sigma}u - \omega u, \text{ sur } \mathbb{R}^d, \ \sigma \geq \dfrac{2}{d-2} \\ u \in X_{rad}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Pour surmonter ces difficultés dues à au caractère non borné du domaine, on considère l'équation modifiée suivante

$$\begin{cases} -\Delta u + |x|^2 u + \omega u - \mathcal{N}_k(u) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \\ u \in X_{rad}. \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\mathcal{N}_k(u) = \chi_k(|u|^2)|u|^{2\sigma}u$ et $\chi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est défini par

$$\chi_k(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < s < k, \\ 0 & \text{pour } k+1 \leq s, \end{cases} \quad 0 \leq \chi_k(s) \leq 1$$

pour $s \geq 0$. Cette forme spéciale de modification permet d'avoir une non−linéarité de type sous−critique. En effet, on peut facilement vérifier que

$$|\mathcal{N}_k(s)| \leq k^{2\sigma}|s| \text{ pour tout } s \geq 0 \tag{3.5}$$

Par conséquent, on peut utiliser les mêmes méthodes employées dans le chapitre (1) pour l'étude du cas sous−critique, notamment l'usage de l'espace de Hilbert X. Alors, en appliquant le théorème de bifurcation locale de Crandall et Rabinowitz 3.1.1 à l'équation (3.4), on voit qu'à chaque valeur propre ω_n correspond une branche de bifurcation locale $(\omega_n(s), u_{\omega,n}(s)) \in]\omega_n, 0[\times(X_{rad})$ qui satisfait $\|u_{\omega,n}(s)\|_{X_{rad}} \to 0$ quand $s \to 0$. Puis, par un argument d'itération on obtient $\|u_{\omega,n}(s)\|_{L^\infty} \leq C_n\|u_{\omega,n}(s)\|_{X_{rad}}$ pour un certain $C_n > 0$. Ainsi, on voit que $\|u_{\omega,n}(s)\|_{L^\infty} \leq k$ si $s > 0$ est suffisamment petit. Ceci entraîne alors $\mathcal{N}_k(u_{\omega,n}(s)) = |u_{\omega,n}(s)|^{2\sigma}u_{\omega,n}(s)$. Précisément, $\{u_{\omega,n}(s)\}$ est une branche de bifurcation locale pour l'équation originale (3.3).

En second lieu, on prouve l'existence de branches globales de solutions par l'absurde. Précisément, on établira le théorème suivant

Théorème 3.1.2 *Soit $d \geq 3$ et $\sigma \geq 2/(d-2)$. Pour chaque valeure propre ω_n, il existe une branche $\mathcal{C}_n \subset]-\infty, 0[\times(X_{rad} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ issue de $(\omega_n, 0)$ telle que*

(1) Si $n = 0$ alors on a

$$\sup\{\|u_{\omega,0}\|_{L^\infty} \mid (\omega, u_{\omega,0}) \in \mathcal{C}_0\} = \infty. \tag{3.6}$$

(2) Si $n \geq 1$, alors l'une des affirmations suivantes est vérifiée :
(i) $\sup\{\|u_{\omega,n}\|_{L^\infty} \mid (\omega, u_{\omega,n}) \in \mathcal{C}_n\} = \infty$.
(ii) C_n n'est pas borné dans $(\mathbb{R} \times X_{rad})$.

En outre, le nombre de noeuds (zéros) d'une solution est conservé le long de chaque courbe non triviale. Ainsi $u_{\omega,n}(s)$ admet exactement n zéros sur $]0, \infty[$ pour tout $s > 0$

En effet, pour chaque valeur propre ω_n, on suppose qu'il n'existe aucune branche vérifiant (3.6) (ou l'assertion (i) dans le cas $n \geq 1$). Alors, en considérant encore l'équation (3.4) et en utilisant notre hypothèse, on montre qu'il existe une branche de bifurcation issue de $(\omega_n, 0)$: $\hat{C}_n = \{(\omega(s), \hat{u}_\omega(s)) \mid s \in \mathbb{R}\}$ de l'équation (3.3) qui est non bornée dans $(\mathbb{R} \times X_{rad})$. Ainsi, on prouve le Théorème 3.1.2 dans le cas $n \geq 1$. D'autre part, lorsque $n = 0$, le fait que $\omega_0(s)$ soit bornée (car les solutions positives existent seulement si $\omega \in]\omega_1, 0[$) implique que $\sup\{\|\hat{u}_\omega(s)\|_X \mid (\omega(s), \hat{u}(s)) \in \hat{C}_0\} = \infty$. Donc, par un argument de compacité, on en déduit il existe une sous-suite $\{\omega(s_p), \hat{u}(s_p)\}$ telle que $\|\hat{u}(s_p)\|_{L^\infty} \to \infty$ quand $p \to \infty$, ce qui fournit une contradiction avec notre hypothèse. Ainsi, on montre le résultat dans le cas $n = 0$.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : au paragraphe 2, on considère la bifurcation locale au voisinage de chaque valeur propre. Au paragraphe 3, on étudie la bifurcation globale dans le cas surcritique et on donne une preuve du Théorème 3.1.2.

3.2 Le comportement local de bifurcation

On commence ce paragraphe par établir un résultat de bifurcation locale pour l'équation modifiée (3.4). Ensuite, on vérifie que les solutions bifurquées obtenues sont en réalité des solutions de l'équation initiale (3.3).

En effet, on considère l'équation modifiée (3.4). On peut facilement vérifier que

$$|\chi_k(s)| \leq k^{2\sigma}|s| \text{ pour tout } s \geq 0.$$

On déduit que, avec cette modification particulière, on obtient un terme non linéaire avec une croissance sous−critique. Par la suite, il est plus commode d'utiliser l'espace de Hilbert X_{rad} pour appliquer le théorème de Crandall-Rabinowitz 3.1.1. De plus, on remarquera que l'opérateur linéarisé est le même que celui déjà étudié dans le Chapitre (1). Ainsi, les hypothèses $(A1) - (A4)$ seront clairement vérifiés. Néanmoins, on rappelle ces notations (déjà employées dans le premier chapitre) car elles seront utiles pour l'étude de la bifurcation globale. En effet, on définit les opérateurs

$$A : X_{rad} \to X^*_{rad} \text{ par } A = -\Delta + |x|^2$$

et $B : X_{rad} \to X^*_{rad}$ par un isomorphisme naturel, c'est à dire

$$\langle Bu, v\rangle = (u, v)_{L^2}.$$

De plus, comme $|\mathcal{N}_k(u)| \leq k^{2\sigma}|u|$, on a $\mathcal{N}_k(u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $u \in X_{rad}$. Donc, l'équation (3.4) peut s'écrire comme suit :

$$u + \omega A^{-1}Bu - A^{-1}\mathcal{N}_k(u) = 0 \quad \text{sur } X_{rad}.$$

On définit alors l'application $f_k(\omega, u) : X_{rad} \to X_{rad}$ par

$$f_k(\omega, u) = u + \omega A^{-1}Bu - A^{-1}\mathcal{N}_k(u).$$

En outre, on vérifie la différentiabilté du terme non linéaire qui est nécessaire pour appliquer le Théorème 3.1.1 ainsi que pour la bifurcation globle plus tard, précisément on a le :

Lemme 3.2.1 *Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $A^{-1}\mathcal{N}_k(u) \in C^1(X_{rad}, X_{rad})$ avec $A^{-1}\mathcal{N}_k(0) = 0$ et $(A^{-1}\mathcal{N}_k)'(0) = 0$.*

Preuve du Lemme 3.2.1. Pour chaque u, v et $h \in X_{rad}$, on a

$$\begin{aligned}\langle \frac{\mathcal{N}_k(u+th)-\mathcal{N}_k(u)}{t}, v\rangle &= \int \frac{1}{t}(\mathcal{N}_k(u+th)-\mathcal{N}_k(u))\ v\ dx \\ &= \int \frac{1}{t}\int_0^1 \frac{d}{d\theta}\mathcal{N}_k(u+th\theta)\ d\theta\ v\ dx \\ &= \int \frac{1}{t}\int_0^1 (\mathcal{N}_k)'(u+t\theta h)\ t\ hd\theta\ v\ dx \\ &= \int \int_0^1 (\mathcal{N}_k)'(u+t\theta h)\ h\ d\theta\ v\ dx.\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1 (\mathcal{N}_k)'(u+t\theta h)hd\theta v\Big| &\le \Big|\int_0^1 2\chi_k'(|u+t\theta h|^2)(u+t\theta h)^{2\sigma+2}hvd\theta \\ &\quad + p\int_0^1 \chi_k(|u+t\theta h|^2)(u+t\theta h)^{2\sigma}hvd\theta\Big| \\ &\le C|hv| \in L^1(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\frac{1}{t}(\mathcal{N}_k(u+th)(x)-\mathcal{N}_k(u)(x))v(x) \to 2\chi_k'(|u|^2)u^{2\sigma+2}hv + p\chi_k(|u|^2)u^{2\sigma}hv$$

quand $t \to 0$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{t\to 0}\langle \frac{\mathcal{N}_k(u+th)-\mathcal{N}_k(u)}{t}, v\rangle = \langle 2\chi_k'(|u|^2)u^p uh + p\chi_k(|u|^2)u^{2\sigma}h, v\rangle.$$

On voit que l'application $u \in X_{rad} \mapsto 2\chi_k'(|u|^2)u^{2\sigma+2}h + p\chi_k(|u|^2)u^{2\sigma}h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est continue par un argument similaire à celui du Lemme 3.3.3. Ainsi, on déduit que $\mathcal{N}_k(u) \in C^1(X_{rad}, X_{rad}^*)$ avec $\mathcal{N}_k(0) = 0$ et $\mathcal{N}_k'(0) = 0$. Alors, comme l'opérateur $A^{-1} : X_{rad}^* \to X_{rad}$ est borné, on obtient le résultat souhaité. □

Par conséquent, on peut appliquer le théorème 3.1.1. Ainsi on obtient le

Théorème 3.2.1 *Pour chaque valeur propre ω_n, la solution de l'équation* (3.4) *sur le voisinage de $(\omega_n, 0) \in \mathbb{R} \times X_{rad}$ est donnée par*

$$\mathcal{C}_n = \{(\omega_n(s), s\chi_1 + sz_n(s)) \mid s \in I\} \cup \{(\omega_n, 0) \mid (\omega, 0) \in V\},$$

où l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ avec $0 \in I$.

Ensuite, on montre que la solution $(\omega_n(s), s\chi_1 + sz_n(s))$ de l'équation (3.4) satisfait aussi l'équation (3.3) si $|s| > 0$ est petit. Pour ce faire, il suffit de vérifier que la norme infinie des solutions bifurquées, reste bornée au voisinage des valeurs propres. Dans ce cas, quitte à utiliser la non−linéarité modifiée f_k avec k suffisamment grande, on aura $f_k(u(s)) = |u(s)|^{2\sigma}u(s)$ au voisinage $(\omega_n, 0)$. Pour prouver ceci, on établit le :

Théorème 3.2.2 *Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que $\|u\|_{L^\infty} \leq C_0\|u\|_X$ pour toute solution $u \in X$ de l'équation* (3.4).

Preuve du Théorème 3.2.2.

En multipliant l'équation (3.4) par $|u|^{2s-1}$ pour $s > 1$ et en intégrant l'équation obtenue, on a

$$\int \nabla u \cdot \nabla(|u|^{2s-1})dx + \int |x|^2|u|^{2s}dx + \omega \int |u|^{2s}dx = \int \mathcal{N}_k(u)|u|^{2s-1}dx \leq C\int |u|^{2s}dx.$$

Ceci conduit à

$$\int \nabla u \cdot \nabla(|u|^{2s-1})dx \leq C\int |u|^{2s}dx.$$

Comme il vient que

$$\int \nabla u \cdot \nabla(|u|^{2s-1})dx = (2s-1)\int |u|^{2s-2}|\nabla u|^2dx$$

et que

$$\int |\nabla(|u|^s)|^2dx = s^2\int |u|^{2s-2}|\nabla u|^2dx,$$

on obtient

$$\int |\nabla(|u|^s)|^2dx \leq C\frac{s^2}{2s-1}\int |u|^{2s}dx \leq Cs\int |u|^{2s}dx.$$

Par l'injection de Sobolev, on a

$$\|u\|^{2s}_{L^{\frac{2ds}{d-2}}} = \||u|^s\|^2_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq \|\nabla(|u|^s)\|^s_{L^2}.$$

Ainsi, il découle que

$$\|u\|_{L^{\frac{2ds}{d-2}}} \leq (Cs)^{\frac{1}{2s}}\|u\|_{L^{2s}}.$$

On pose $s_k = (d/d-2)^k$. Alors, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\|u\|_{L^{\frac{2ds_k}{d-2}}} \leq \Pi_{i=1}^k (Cs_i)^{\frac{1}{2s_i}}\|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}.$$

On écrit $f(k) = \Pi_{i=1}^{k}(Cs_i)^{\frac{1}{2s_i}}$. Alors, on a

$$\log f(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2s_i}(\log s_i + \log C) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\log s_i}{2s_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\log C}{2s_i}.$$

On pose $a_i = \log_{s_i}/(2s_i)$. Alors, on a

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{\log s_{i+1}}{\log s_i}\frac{s_i}{s_{i+1}} = \frac{i+1}{i}\frac{d-2}{d} < 1.$$

Si $i > 1$ est suffisamment grand. Par la suite, on a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log s_i}{2s_i} < \infty$. Clairement, on obtient $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log C}{2s_i} < \infty$. Il s'ensuit qu'il existe une constante $C_0 > 0$ (indépendante du choix de $k \in \mathbb{N}$) telle que $\|u\|_{L^{\frac{2ds_k}{d-2}}(B_1)} \leq \|u\|_{L^{\frac{2ds_k}{d-2}}} \leq C_0\|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}$. Comme $\|u\|_{L^{\frac{2ds_k}{d-2}}(B_1)} \to \|u\|_{L^\infty(B_1)}$ quand $k \to \infty$, on a $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_0\|u\|_X$. De plus, d'après le lemme des fonctions radiales de Strauss (voir [17] par exemple), on a $\|u\|_{L^\infty(B_1^c)} \leq \|u\|_{H^1}/r$ pour $r \geq 1$. Ainsi, on voit que $\|u\|_{L^\infty(B_1^c)} \leq \|u\|_X$. Cela implique que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_0\|u\|_X,$$

ce qui complète la preuve. □

Il découle du Théorème 3.2.2 que $(\omega_n(s), s\chi_1 + sz_n(s))$ devient solution de l'équation originale (3.3), si $s > 0$ est suffisamment petit.

3.3 Le comportement global de bifurcation

Maintenant, on étudie le comportement global des branches bifurquées obtenues dans le paragraphe précédent. Notre objectif est de prouver le Théorème 3.1.2. L'idée est de montrer par l'absurde, que ces branches locales ne peuvent pas être bornées (dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ou dans X_{rad}). En effet, pour chaque valeur propre ω_n on pose

$$\mathcal{A}_n = \big\{\mathcal{C}_n \mid \mathcal{C}_n \subset \mathbb{R} \times (X_{rad} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$$

$$;\mathcal{C}_n \text{ est une branche de bifurcation de l'équation (3.3)issue de } (\omega_n, 0)\big\}$$

et

$$\mathcal{B}_n = \cup\{\mathcal{C}_n \mid \mathcal{C}_n \in \mathcal{A}_n\}.$$

D'après l'argument précédent, $\mathcal{B}_n \neq \{(\omega, 0) \mid \omega \in \mathbb{R}\}$. Supposons que

$$k_n = \sup\{\|u\|_{L^\infty} \mid (\omega, u) \in \mathcal{B}_n\} < \infty. \tag{3.1}$$

En appliquant le théorème de bifurcation globale de Rabinowitz [25] à l'équation modifiée (3.4), on obtient le

Lemme 3.3.1 *Supposons que* (3.4) *est vérifié pour $n \geq 0$ fixé. Il existe alors une branche $\hat{C}_n \subset \mathbb{R} \times X_{rad}$ de l'équation (originale)* (3.3) *avec $(\omega_n, 0) \in \hat{C}_n$ vérifiant*

$$\sup \left\{ \|(\omega, u_\omega)\|_{(\mathbb{R}\times X)} \mid (\omega, u_\omega) \in \hat{C}_n \right\} = \infty.$$

On admet ce lemme pour l'instant et on continue la preuve. Dans le cas $n \geq 1$, ce résultat est suffisant pour montrer le Théorème 3.1.2. D'autre part, lorque $n = 0$, cette branche non bornée dans l'espace X serait en réalité (sous réserve d'existence) non bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ceci serait absurde en raison de notre hypothèse intiale ce qui prouve le théorème. En effet, comme $\omega_0(s)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ (car $\omega_0(s) \in]\omega_1, 0[$), le Lemme 3.3.1 impliquerait qu'il existe une suite $\{(\omega_i, u_{\omega_i})\} \subset \mathbb{R} \times (X_{rad} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ telle que $\|u_{\omega_i}\|_X \to \infty$. On montre alors dans le lemme ci desus qu'une telle suite serait en fait non bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ceci serait suffisant pour montrer le Théorème 3.1.2 dans le cas $n = 0$. Précisément obtient le

Lemme 3.3.2 *Soit $\{(\omega_i, u_{\omega_i})\} \subset \mathbb{R} \times (X_{rad} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ une suite de solutions de* (3.4) *telle que $\|u_{\omega_i}\|_X \to \infty$. Alors, il existe une sous-suite de $\{u_{\omega_i}\}$ (on la désigne encore par la même lettre) telle que $\|u_{\omega_i}\|_{L^\infty} \to \infty$ quand $i \to \infty$.*

Preuve du Lemme 3.3.2.

Supposons que $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|u_{\omega_i}\|_{L^\infty} < C_0$ pour un certain $C_0 > 0$. On écrit $v_i = u_{\omega_i}/\|u_{\omega_i}\|_X$. Comme la suite $\{v_i\}$ est bornée dans X, il existe une sous-suite de $\{v_i\}$ telle que $v_i \to v_0$ faiblement dans X quand $i \to \infty$.

Supposons que $v_0 = 0$. Comme l'injection $X \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est compacte, alors $v_i \to 0$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ quand $i \to \infty$. Ainsi en multipliant l'équation (3.3) par $u_i/\|u_i\|_X^2$ et en intégrant l'équation obtenue, on a

$$1 + \omega_i \|v_i\|_{L^2}^2 = \int |u|_i^{2\sigma} |v_i|^2 dx \leq C_0^{2\sigma} \int |v_i|^2 dx.$$

Ainsi, en prenant $i \to \infty$, on aura $1/2 < 0$. Ceci est une contradiction manifeste.

Donc, $v_0 \neq 0$. Puisque $v_i(x) \to v_0(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ quand $i \to \infty$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $v_0(x) \neq 0$ et $v_i(x_0) \to v_0(x)$ quand $i \to \infty$. Alors, on voit que

$$0 \neq v_0(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{u_{\omega_i}(x_0)}{\|u_{\omega_i}\|_X}.$$

Par conséquent, on a $u_{\omega_i}(x_0) \to \infty$ quand $\omega_i \to \infty$ car $\|u_{\omega_i}\|_X \to \infty$ quand $i \to \infty$. Ceci contredit le fait que $\sup \|u_{\omega_i}\|_{L^\infty} \leq C_0$. Ainsi, on obtient le résultat cherché. □

Maintenant, on récapitule les étapes principales de notre preuve :

Preuve du Théorème 3.1.2.

Dans le cas des solutions positives $n = 0$, Si on admet (3.4), alors il existe une solution (ω_i, u_{ω_i}) de l'équation (3.3) avec $\|u_{\omega_i}\|_X \to \infty$. Il découle du Lemme 3.3.2 qu'il existe une sous-suite de $\{u_{\omega_i}\}$ (que l'on désignera par la même lettre) telle que $\|u_{\omega_i}\|_{L^\infty} \to \infty$ quand $i \to \infty$. Cela contredit notre hypothèse. Ainsi, la branche C_0 est non bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans le cas $n \geq 1$, si on suppose que l'assertion (i) dans le Théorème 3.1.2 n'est pas satisfaite, l'assertion (ii) est alors vérifiée par le Lemme 3.3.1, le résultat est donc démontré. Il reste juste à vérifier que le nombre des noeuds est constant le long de chaque courbe. En s'inspirant de la même démarche que dans le chapitre (1), on a besoin de vérifier trois points essentiels :

(i) Vérifier que les zéros d'une fonction u solution de (3.3), ne peuvent pas s'échapper vers l'infini le long d'une branche de solutions bifurquée non bornée.

(ii) Calculer le nombre de zéros des solutions bifurquées au voisinage de chaque valeur propre.

(iii) Vérifier que le nombre de zéros reste constant au voisinage de chaque solution non nulle.

D'après la remarque 1.4.1, le premier point est obtenu par la même méthode utilisée dans le cas sous−critique. Le second se vérifie aisément en utilisant l'équation modifiée. En effet, au voisinage de chaque valeur propre, les solutions de (3.3) sont aussi solutions de l'équation (3.4). Finalement, le dernier point peut être établi en suivant la preuve du Lemme 1.4.3. Cependant on doit considérer des voisinages bornés dans L^∞ afin de surmonter la difficulté causée par le terme non linéaire surcritique. Ceci est possible car la norme infinie est supposé localement bornée dans le premier cas (l'assertion (i)) et bornée dans le deuxième (l'assertion (ii)).

□

On conclut ce chapitre par la preuve du Lemme 3.3.1 qui a été admis dans la preuve précédente. Pour ce faire, on rappelle d'abord le théorème principal dont on aura besoin, à savoir le théorème de bifurcation globale de Rabinowitz ([25]) :

Théorème 3.3.1 *Soit X un espace de Banach, $S \in \mathcal{L}(X)$ un compact et $T \in C^1(X, X)$ un opérateur compact tel que $T(0) = T'(0) = 0$. Supposons que λ^* est une valeur propre de S avec une multiplicité impaire. Soit $\hat{\mathcal{C}}$ la composante connexe de*

$$\left\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X \setminus \{0\} \mid u - \lambda A^{-1}u - T(u) = 0\right\}$$

contenant $(\lambda^*, 0) \in \mathbb{R} \times X$. Alors, ou bien

(i) $\hat{\mathcal{C}}$ n'est pas borné dans $\mathbb{R} \times X$, ou bien

(ii) il existe une valeur propre $\hat{\lambda} \neq \lambda^*$ de A telle que $(\hat{\lambda}, 0) \in \hat{\mathcal{C}}$.

On commence par établir la compacité du terme non linéaire, précisément, on a le

Lemme 3.3.3 *L' opérateur $A^{-1}\mathcal{N}_k : X_{rad} \to X_{rad}$ est compact pour chaque $k \in \mathbb{N}$.*

Preuve du Lemme 3.3.3.

Un calcul élémentaire montre que pour chaque $q \in (2, 2d/(d-2))$, il existe $C_k > 0$ tel que $|f_k(s)| \leq C_k|s|^q$ pour tout $s \geq 0$. Soit $\{u_n\} \subset X$ tel que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X quand $n \to \infty$ pour un certain $u \in X$. Ainsi, comme l'injection $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ est compacte pour $2 \leq r < 2d/(d-2)$, alors il existe une sous-suite de $\{u_n\}$ (que l'on désigne encore par la même lettre) telle que $u_n \to u$ fortement dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, $u_n(x) \to u(x)$ *p.p.t* $x \in \mathbb{R}^d$ quand $n \to \infty$. De plus, il existe $h \in L^q(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $|u_n(x)| \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (voir e.g. Willem [45, Appendice]). Ainsi, on a

$$|f_k(u_n)(x)| \leq C_k|u_n(x)|^q \leq C_k|h(x)|^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^d).$$

En posant $g_k(x) = C_k|h(x)|^q$, on aura

$$\begin{aligned} |f_k(u_k) - f_k(u)|^{\frac{q+1}{q}} &\leq C(|f_k(u_k)|^{\frac{q+1}{q}} + |f_k(u)|^{\frac{q+1}{q}}) \\ &\leq C(C_k^{\frac{q+1}{q}}|h(x)|^{q+1} + C_k^{\frac{q+1}{q}}|u|^{q+1}) \in L^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Comme $f_k(u_k)(x) \to f_k(u)(x)$ *p.p.t* $x \in \mathbb{R}^d$ quand $n \to \infty$, on voit que $\|f_k(u_k) - f_k(u)\|_{L^{\frac{q+1}{q}}} \to 0$ quand $n \to \infty$ par le théorème de convergence dominée. Alors, d'après le Lemme 2.4.1, on obtient $A^{-1}f_k(u_n) \to A^{-1}f_k(u)$ fortement dans X quand $n \to \infty$. Ceci termine la preuve. □

Maintenant, en utilisant le Théorème 3.3.1, on montre la :

Preuve du Lemme 3.3.1. Soit $n \geq 0$ et supposons que (3.4) est vérifié. En utilisant le résultat du Lemme 3.3.3, celui du Lemme 3.2.1 et les propriétés spectrales de (1.8) que l'on a obtenues dans le chapitre 2, on applique le Théorème 3.2.2 à l'équation (3.4) avec $k = 2k_0$. Alors, pour chaque valeur propre ω_n, il existe une branche de bifurcation $\hat{C}_n$ de l'équation (3.4) issue de $(\omega_n, 0)$, qui satisfait (i) ou (ii) du Théorème 3.3.1. Pour vérifier qu'il s'agit de solution de l'équation originale (3.3) il suffit de prouver que

$$\sup\left\{\|u_\omega\|_{L^\infty} \mid (\omega, u_\omega) \in \hat{C}_n\right\} \leq k_n.$$

Supposons que $\sup\left\{\|u_\omega\|_{L^\infty} \mid (\omega, u_\omega) \in \hat{C}_n\right\} > k_n$. Alors, il existe $(\omega_*, u_{\omega_*}) \in \hat{\mathcal{C}}_n$ tel que $k_n < \|u_{\omega_*}\|_{L^\infty} < 2k_n$. Comme $\mathcal{N}_{2k_n}(u_{\omega_*}) = \mathcal{N}(u_{\omega_*})$, alors $u_{\omega_*} \in X_{rad} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfait l'équation (3.3) avec $\omega = \omega_*$. Mais, ceci est contradictoire avec la définition de $k_n > 0$. Ensuite, on peut éliminer la possibilité de (ii) du Théorème 3.3.1 par l'argument utilisé dans la preuve du Théorème 3.1.2 ci dessus puisqu'on a vérifié qu'il s'agit de solutions de l'équation initiale (3.3). Le résultat est donc montré. □

Remarque 3.3.1 *Le calcul numérique que l'on a effectué (voir chapitre 5) suggère que toutes les branches bifurquées C_n sont en fait non bornées dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ même s'il n'a pas été possible d'établir ce résultat. En effet, Dans le cas $n \geq 1$, d'après le Lemme 3.3.1, il existe une suite $(\omega_i, u_{\omega_i}) \in \hat{C}_n$ de l'équation (3.3) vérifiant*

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \|(\omega_i, u_{\omega_i})\|_{(\mathbb{R},X)} \right\} = \infty,$$

mais ceci ne permet pas de déduire que $\|u_{\omega_i}\|_X$ tend vers l'infini. En fait, d'après l'identité de Pohozaev, on sait que $\omega_i < 0$ dans ce cas surcritique. Néanmoins, il faut s'assurer que ω_i ne tend pas vers $-\infty$. Dans ce cas, la suite ω_i serait bornée et donc nécessairement

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \{\|(u_{\omega_i})\|_X\} = \infty.$$

Il serait alors possible d'appliquer le Lemme 3.3.2 (qui ne dépend pas de l'indice n de la brache bifurquée) pour vérifier qu'il existe une sous-suite de $\{u_{\omega_i}\}$ (que l'on désignera par la même lettre) telle que $\|u_{\omega_i}\|_{L^\infty} \to \infty$ quand $i \to \infty$.

Deuxième partie

Etude numérique

Chapitre 4

Etude de la méthode de tir

4.1 Introduction et résultat principal

Dans la première parie de ce travail, on a établit l'existence les solutions stationnaires localisées en espace de l'équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel harmonique de (CBE). On a remarqué que les conditions nécessaires et suffisantes d'existence concernant les solutions nodales, dépendent de l'exposant non linéaire σ. De plus, l'étude théorique n' a pas suffi pour obtenir des résultats dans tous les cas. Par exemple, on s'intéresse à la multiplicité de chaque état excité dans le cas sous−critique qui reste une question ouverte. En outre, les conditions nécessaires d'existence des solutions nodales dans le cas critique et surcritique fait toujours l'objet de recherches même dans le cas le plus simple de l'équation de Brézis−Nirenberg (2.1) et seulement peu de résultats sont connus (voir [34], [35] et [36]). Ainsi, dans cette deuxième partie, on présente des méthodes numériques permettant le calcul de ces solutions afin de donner des réponses à plusieurs questions qui restent hors de portée d'un point de vue théorique.
Nous étudions tout d'abord la convergence de l'algorithme de tir vers des états stationnaires localisés avec un nombre prescrit de zéros pour l'équation de (CBE). Cette étude nous permettra d′appliquer la méthode de tir pour le calcul numérique de ces solutions et d'étudier quelques asymptotiques à grandes valeurs de k et à grand exposant non linéaire σ. Bien que le résultat principal de ce paragraphe ne concerne que le cas sous−critique $\sigma < \sigma^*$, on obtiendra des résultats partiels de convergence qu'on peut utiliser numériquement dans les cas critique et surcritique. Ainsi, nous serons en mesure de dégager le diagramme de bifurcation dans les trois cas de non−linéarités. La forme des diagrammes obtenus permet à mieux comprendre le phénomène de bifurcation pour cette équation. En particulier, plusieurs résultats d'existence, non−existence, unicité et stabilité concernant les solutions nodales seront conjecturés numériquement.

En effet, cherchant des solutions radiales localisés , notre problème elliptique non linéaire se transforme en le système différentiel (3.1) dont on rappelle l'expression :

$$\begin{cases} u'' + \frac{d-1}{r}u'(r) - \omega u(r) - r^2 u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0 \\ u(0) = \beta > 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

En fait, chercher une solution de classe C^2 en $r = 0$ nécessite de poser $u'(0) = 0$ si $d > 1$ afin d'éviter un point anguleux à l'origine. D'autre part, bien qu'il soit aussi possible de chercher des solutions du système différentiel (1.7) si $d = 1$, notre étude théorique de l'algorithme de tir ne concerne en fait que le problème (3.1). Néamoins, on notera bien que les mêmes phénomènes se produisent dans ce dernier cas. Précisément, il est possible de calculer les solutions stationnaires impaires en dimension $d = 1$ en utilisant la même méthode mais avec $u'(0)$ comme paramètre de tir (des explications et illustrations seront présentés plus tard). Ainsi, on cherche des solutions globales de (3.1) qui tendent vers zéro quand $r \to \infty$. Comme on l'a déjà signalé, le cas d'une solution positive de (3.1) a été largement étudié puisqu'on sait que toutes les solutions positives de l'équation elliptique (1.2) sont radiales (voir [11], théorème 2 et remarque pp.1047 et [10], Proposition 7.1). Sachant ceci, il était intéressant d'utiliser (3.1) pour prouver l'existence et l'unicité des solutions positives de (1.2) par une simple technique d'EDO (voir, e.g.;[10]). Mais, dans ce travail, on va chercher toutes les solutions possibles de (3.1) qu'on a étudié théoriquement dans la première partie. Le but de cette étude, est de prouver l'existence des états stationnaires en utilisant une autre méthode. L'avantage majeur de cette nouvelle approche est de pouvoir donner une expression à chaque solution nodale à l'aide du paramètre β. De plus, cette description sera suffisamment explicite pour pouvoir calculer numériquement toutes les solutions nodales.

On rappelle, qu'on désigne par $u(r, \beta)$ la solution de (3.1) (il est prouvé dans [7] que ce problème de valeurs initiales possède une unique solution globale pour tout $\beta > 0$). De plus, la dimension d n'est pas nécessairement restreinte aux entiers et on peut considérer d comme un nombre réel dans tout ce qui suit. Ainsi, le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant

Théorème 4.1.1 *Soit $d \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ et*

$$\begin{cases} 0 < \sigma < \sigma^* & \text{pour } d > 1 \\ 0 < \sigma \leq 1 & \text{pour } d = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors, pour tout entier $k \geq 0$, on définit l'ensemble (éventuellement vide)

$$A_k = \{\beta > 0 \ \mid \ u(r, \beta) \text{ possède exactement } k \text{ zéros dans } [0, +\infty[\}$$

et

$$k_0 = min\{k \in \mathbb{N} \ \mid \ A_k \text{ n'est pas vide}\}$$

alors, pour tout $k \geq k_0$, A_k est un ensemble non vide borné. De plus, si on note $\beta_k = \sup\{A_k\}$, alors la solution correspondante : $u(r, \beta_k)$ admet exactement k zéros dans $[0, +\infty[$ et : $u(r, \beta_k) \to 0$ exponentiellement quand $r \to +\infty$.

Comme on peut déduire de la première partie de ce travail que $k_0 = 0$ si $\omega > -d$ on obtient le même résultat suivant :

Corollaire 4.1.1 *Soit $k \geq 0$ un entier. Si $\omega > -d$, il existe une solution de (3.1) ayant exactement k zéros dans $[0, +\infty[$.*

Remarque 4.1.1 *Notons que dans le cas unidimensionnel, la restriction des valeurs de σ aux valeurs données au théorème 4.1.1, c'est à dire $0 < \sigma \leq 1$ est une condition technique imposée par les difficultés rencontrées dans la preuve du Lemme 4.2.2 pour montrer que les ensembles A_k sont non vides pour tout $k \geq k_0$.*

la démonstration de ce théorème fera l'objet du prochain paragraphe.

4.2 Structure des solutions radiales

Le théorème 4.1.1 sera prouvé comme suit : on commence par rappeler quelques faits élémentaires concernant les solutions de l'équation (3.1). Puis, on prouve que les ensembles A_k sont bornés à l'aide d'un changement de variables : on désigne par $u(r, \beta)$ la solution de (3.1) (il est montré dans [7] que ce problème de valeur initiale possède une unique solution globale pour tout $\beta > 0$). La fonction $u(r, \beta)$, convenablement modifiée par un changement d'échelle, converge quand $\beta \to +\infty$ vers la solution de

$$\begin{cases} w''(r) + \frac{d-1}{r} w'(r) + |w(r)|^{2\sigma} w(r) = 0 \\ w(0) = 1, \quad w'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

et il est connu que, pour $\sigma < \sigma^* = 2/(d-2)$, w possède une infinité de zéros (voir par exemple [12]). (C'est le seul endroit où la condition sur σ est utilisée). Ensuite, on utilisera intensivement des arguments d'énergie afin de trouver des états stationnaires définis par les ensembles A_k et leurs maximums β_k.

4.2.1 Démonstration du résultat principal

Preuve du Théorème 4.1.1 D'abord, on introduit la fonction

$$E(r) = \frac{1}{2}|u'(r)|^2 + \frac{1}{2\sigma+2}|u(r)|^{2\sigma+2} - \frac{\omega}{2}|u(r)|^2 - \frac{1}{2}|ru(r)|^2$$

qui sera appelée l'énergie de la solution et désignée simplement par $E(r)$ au lieu de $E(r,\beta)$ puisqu'elle dépend de la valeur initiale β. D'après (3.1), on peut voir que $E(r)$ satisfait

$$E'(r) = -\frac{d-1}{r}|u'(r)|^2 - r|u(r)|^2 \geq 0$$

et par la suite E est une fonction strictement décroissante. En fait, si $d > 1$, par le théorème d'unicité des solutions des problèmes des valeurs initiales, une solution de (3.1) ne peut pas avoir un point critique où $u = 0$ à moins qu'elle soit constante. Dans le cas unidimensionnel, on utilise le fait que les zéros d'une solution non constante sont isolés.

On remarque finalement que si $u(r) = 0$ pour certaines valeurs finies $r > 0$ alors $E(r) = \frac{1}{2}u'(r)^2 > 0$, Ainsi, si l'énergie d'une solution devient négative, cette solution ne peut pas par la suite changer de signe.

Maintenant, on utilise cette fonction pour montrer que si β est assez grand, $u(r,\beta)$ possède plusieurs zéros ; en fait le nombre de zéros devient arbitrairement grand quand $\beta \to \infty$. Ceci découle clairement du lemme suivant.

Lemme 4.2.1 *Pour tout $\beta > 0$, on définit*

$$v(r,\beta) = \frac{1}{\beta}u(\beta^{-\sigma}r, \beta) \tag{3.4}$$

Alors quand $\beta \to \infty$, $v(r,\beta) \to w(r)$ uniformément sur tout compact de $[0, +\infty[$, où w est la solution de (3.3).

Preuve Un calcul simple montre que $v(r,\beta)$ satisfait

$$\begin{cases} v'' + \frac{d-1}{r}v'(r) - (\omega + \beta^{-2\sigma}r^2)\beta^{-2\sigma}v(r) + |v(r)|^{2\sigma}v(r) = 0 \\ v(0) = 1, \quad v'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

En utilisant la fonction d'énergie, on aura : pour $r > 0, \beta > 0$,

$$E(\beta^{-\sigma}r) < E(0) = \frac{1}{2\sigma+2}\beta^{2\sigma+2} - \frac{1}{2}\omega\beta^2$$

de sorte que

$$\frac{1}{2\sigma+2}|v(r,\beta)|^{2\sigma+2} < \frac{1}{2\sigma+2} - \frac{1}{2}\omega\beta^{-2\sigma} + \frac{1}{2\beta^{2\sigma}}(\omega + \beta^{-2\sigma}r^2)|v(r,\beta)|^2.$$

Remarquons maintenant que, au moins pour $\beta > 1$ et sur les compacts K de $[0, +\infty[$, on peut trouver deux constantes M_1 et M_2 qui ne dépendent pas de β telles que

$$|v(r,\beta)|^{2\sigma+2} < M_1 + M_2|v(r,\beta)|^2.$$

Comme $\sigma > 0$, il s'ensuit que $v(r,\beta) < M$ pour tout $r \in K$, $\beta > 1$. De même, on a

$$\frac{1}{2}|v'(r,\beta)|^2 < \frac{1}{2\sigma+2} - \frac{1}{2}\omega\beta^{-2\sigma} + \frac{1}{2\beta^{2\sigma}}(\omega + \beta^{-2\sigma}r^2)|v(r,\beta)|^2$$

Le résultat obtenu pour $v(r,\beta)$, montre que $|v'(r,\beta)|$ est bornée indépendamment de β, sur les compacts de $[0,+\infty[$. D'après le théorème d'Azerla-Ascoli et un argument de diagonalisation standard il existe une suite $\beta_k \to +\infty$ et une fonction continue $w(r) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telles que

$$v(r,\beta_k) \to w(r) \text{ uniformément sur tout compact de } [0,+\infty[$$

Maintenant, en utilisant (3.14) on tire que

$$r^{d-1}v'_{\beta_k} = \int_0^r (\omega + \beta^{-2\sigma}t^2)\beta^{-2\sigma}t^{d-1}v_{\beta_k}(t) - t^{d-1}|v_{\beta_k}(t)|^{2\sigma}v_{\beta_k}(t)dt \tag{3.6}$$

et on voit que le terme de droite de (3.6) converge uniformément sur tous les intervalles $[0,T]$ vers

$$-\int_0^r t^{d-1}|v(t)|^{2\sigma}v(t)dt.$$

En particulier, les dérivées $v'_{\beta_k}(r)$ convergent vers une certaine fonction uniformément sur les compacts de $[0,+\infty[$. D'après un théorème standard sur les suite de fonction, cette limite doit être $v'(r)$. Par conséquent, $v \in C[0,+\infty[\cap C^1[0,+\infty[$, $v(0) = 1, v'(0) = 0$, et

$$r^{d-1}v' = -\int_0^r t^{d-1}|v(t)|^{2\sigma}v(t)dt$$

On en déduit facilement que v vérifie (3.3). □

Par la suite, on en conclut que tous les ensembles $A_k, k \geq k_0$ sont bornés, mais on doit vérifier qu'il sont non vides pour justifier l'existence d'une borne supérieure β_k. C'est l'objectif du lemme suivant. C'est la seule éventualité où la restriction au cas $0 < \sigma \leq 1$ si $d = 1$ était nécessaire.

Lemme 4.2.2 *Soit $\tilde{\beta} > 0$ une valeur pour laquelle $u(r,\tilde{\beta})$ possède exactement k zéros $(k \geq 0)$ et aussi $u(r,\tilde{\beta}) \to 0$ quand $r \to \infty$. Si $|\beta - \tilde{\beta}|$ est suffisamment petit alors $u(r,\beta)$ admet au plus $k+1$ zéros sur $[0,+\infty[$.*

Preuve On va donner la preuve dans le cas $k = 0$; il suffit de modifier légèrement les détails pour le cas $k > 0$. La clé de la preuve réside dans le positionnement d'extremas d'une solution de (3.1).
On commence par noter que si $u = u(r,\beta)$ atteint un minimum relatif en $r = r_0 > 0$,

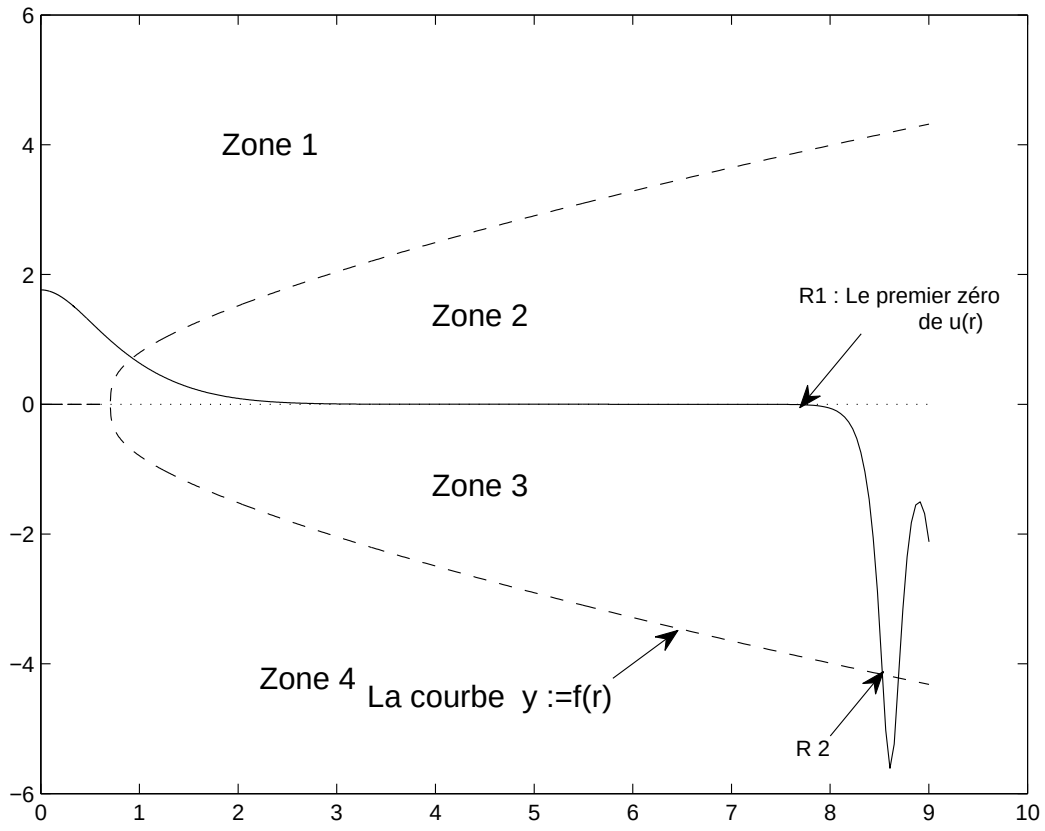


FIGURE 4.1 –

alors il s'ensuit que $u(r_0) \neq 0, u'(r_0) = 0$ et $u''(r_0) > 0$; précisément, on a l'inégalité suivante :

$$[(\omega + {r_0}^2) - |u(r_0)|^{2\sigma}]u(r_0) > 0$$

dont on tire

$$|u(r_0)|^{2\sigma} < (\omega + {r_0}^2), \text{ si } u(r_0) > 0$$

et

$$|u(r_0)|^{2\sigma} > (\omega + {r_0}^2), \text{ if } u(r_0) < 0$$

Ainsi, en utilisant la courbe : $y = f(r) = \pm(\omega + {r_0}^2)^{1/2\sigma}$, on peut diviser le plan $(r, u(r))$ en quatre parties (voir Figure 4.1) de la manière suivante : dans les parties 1 ou 3, u peut seulement avoir un maximum et dans les parties 2 ou 4 tous les extremums de la solution sont des minimums.
Supposons maintenant que β est proche de $\tilde{\beta}$ et que $u(r, \beta)$ admet un zéro ; il existe

donc $R_1 > 0$ tel que

$$u(R_1, \beta) = 0,\ u > 0 \text{ dans } [0, R_1[$$

Le Lemme 4.2.2 en découle (dans le cas $k = 0$) si on arrive à montrer que $u(r, \beta)$ n'admet pas un autre zéro, ce qui est garanti si on peut montrer que $E(r, \beta)$ prend des valeurs négatives avant n'importe quel deuxième zéro éventuel de u. En fait, on montrera que $E(r, \beta)$ est devenue négative avant le premier minimum de $u(r, \beta)$ (après son premier zéro R_1). Or, quand $\beta \to \tilde{\beta}$, la continuité par rapport à β montre que R_1 devient arbitrairement grand et par conséquent, la courbe $(r, u(r))$ pour r légèrement plus grand que R_1, sera forcément dans la partie 3. Mais, comme on sait que $u'(R_1) < 0$, la solution ne peut pas admettre un minimum avant d'intercepter la courbe $y = f(r)$. Ce point sera noté R_2 et satisfait $|u(R_2, \beta)| = (\omega + {R_2}^2)^{1/2\sigma} \to +\infty$ pour β suffisamment proche de $\tilde{\beta}$. Le Lemme 4.2.2 s'ensuit alors si on montre que $E(R_2, \beta) < 0$. On a alors

$$\begin{aligned} E(R_2, \beta) &= E(R_1, \beta) + \int_{R_1}^{R_2} E'(r, \beta) dr \\ &= E(R_1, \beta) - \int_{R_1}^{R_2} \frac{d-1}{r} u'^2(r, \beta) + r u^2(r, \beta) \\ &< E(R_1, \beta) - \int_{R_1}^{R_2} 2\sqrt{d-1} u(r) u'(r) dr \\ &= E(R_1, \beta) - \sqrt{d-1} |u(R_2, \beta)|^2 < 0,\ \forall\, d > 1, \end{aligned}$$

si $|\beta - \tilde{\beta}| \to 0$ car

$$\begin{aligned} E(R_1, \beta) &= \frac{1}{2} u'^2(R_1, \beta) < E(0, \beta) \\ &= \frac{1}{2\sigma + 2} \beta^{2\sigma+2} - \frac{1}{2} \omega \beta^2 \end{aligned}$$

et donc $E(R_1, \beta)$ est bornée pour β proche de $\tilde{\beta}$.
Puis, on pose $d = 1$ et on affirme que

$$E(R_1, \beta) \to 0, \text{ quand } \beta \to \tilde{\beta}. \tag{3.7}$$

En effet, posons $\epsilon > 0$, d'après l'hypothèse $u(r, \tilde{\beta}) \to 0$ quand $r \to \infty$, on peut aisément remarquer que $u'(r, \tilde{\beta}) \to 0$ quand $r \to \infty$ (voir la preuve du Lemme 4.2.3 ci-dessous). Par conséquent, il existe r_0 dans la partie 2 tel que $|u'(r_0, \tilde{\beta})| < \epsilon$. La continuité de $u'(r_0, \beta)$ par rapport à β implique qu'il existe un voisinage de $\tilde{\beta}$ que l'on désigne par $V(\tilde{\beta})$ et tel que $|u'(r_0, \beta)| < |u'(r_0, \tilde{\beta})| + \epsilon < 2\epsilon$ pour tout β dans ce voisinage. Comme $V(\tilde{\beta})$ peut être choisie de sorte que le premier zéro de $u(r, \beta)$: $R_{1,\beta}$ soit plus grand que r_0 pour $\beta \in V(\tilde{\beta})$, on peut déduire que la courbe

$$(r, u(r, \beta)),\ r \in (r_0, R_{1,\beta})$$

reste dans la partie 2 pour tout $\beta \in V(\tilde{\beta})$. Ceci entraîne que

$$|u'(R_{1_\beta}, \beta)| < |u'(r_0, \beta)| < 2\epsilon, \ \forall \ \beta \in V(\tilde{\beta})$$

et donc $E(R_{1,\beta}) = \frac{1}{2}|u'(R_{1,\beta}, \beta)|^2 \to 0$ quand $\beta \to \tilde{\beta}$. Il s'ensuit que $y = u(r, \beta)$ ne traverse pas $y = ((\sigma+1)(\omega + r^2))^{\frac{1}{2\sigma}}$ si $r > R_{1,\beta}$ et β est proche de $\tilde{\beta}$. Supposons qu'il existe un premier $r_c > R_{1,\beta}$ tel que

$$|u|^{2\sigma}(r_c) = (\sigma+1)(\omega + r_c^2)$$

dans ce cas, on devrait avoir

$$|u'(r_c)| \geq k_1 2r_c(\omega + r_c^2)^{1/2\sigma - 1} \geq k_2 r_c^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}.$$

D'après l'hypothèse $0 < \sigma \leq 1$, il existe une constante $k > 0$ indépendante de β telle que

$$E(r_c) = 1/2|u'(r_c)|^2 > k,$$

ce qui contredit (3.7) lorsque β est proche de $\tilde{\beta}$ car $R_{1,\beta} < r_c$; ainsi $E(R_{1,\beta}) > E(r_c)$. On conclut que $\forall\ r > R_{1,\beta}$ (le premier zéro de $u(r, \beta)$)

$$\frac{1}{2\sigma+2}|u(r)|^{2\sigma+2} - \frac{\omega}{2}|u(r)|^2 - \frac{1}{2}|ru(r)|^2 < 0.$$

En particulier, si on note par r_{min} un éventuel premier minimum de u après son premier zéro (donc avant n'importe quel éventuel second zéro), on obtient

$$E(r_{min}) = \frac{1}{2\sigma+2}|u(r_{min})|^{2\sigma+2} - \frac{\omega}{2}|u(r_{min})|^2 - \frac{1}{2}|r_{min}u(r_{min})|^2 < 0.$$

Le Lemme 4.2.2 est donc prouvé.

□

Maintenant, on va chercher la relation entre la fonction d'énergie et les différents types de solutions de (3.1) en vue de détecter les solutions localisées. C'est l'objectif du lemme suivant :

Lemme 4.2.3 *Supposons que $u(r, \beta)$ est une solution de* (3.1) *qui admet un nombre fini de zéros. Alors*
(i) Si $u(r, \beta) \to 0$ quand $r \to \infty$, alors $u(r, \beta)$ décroit exponentiellement lorsque $r \to \infty$, et $E(r) \to 0$ quand $r \to \infty$, donc $E(r) > 0$, $\forall\ r > 0$
(ii) Si $u(r) \nrightarrow 0$ quand $r \to \infty$, alors il existe un nombre positif r_0 tel que $E(r_0) < 0$.

Avant de prouver le Lemme 4.2.3, on verra comment l'appliquer pour obtenir le théorème 4.1.1. D'abord, on rappelle qu'on a déjà défini

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid A_k \text{ est non vide}\}$$

Alors, le lemme 4.2.1 implique que A_{k_0} est majoré. Ainsi, on définit $\beta_{k_0} = \sup A_{k_0}$ et on affirme que la solution $u(r, \beta_{k_0})$ vérifie

$$u(r, \beta_{k_0}) \text{ possède exactement } k_0 \text{ zéros dans } [0, +\infty[, \tag{3.8}$$

$$u(r, \beta_{k_0}) \to 0 \text{ quand } r \to \infty. \tag{3.9}$$

D'abord, on note, pour tout $\beta > 0$, $Z(\beta)$ le nombre de zéros de la solution $u(r, \beta)$. D'après la définition de k_0, $Z(\beta_{k_0}) \geq k_0$. Puis, en supposant que $Z(\beta_{k_0}) \geq k_0 + 1$, la continuité de $u(r, \beta)$ par rapport à β implique que $u(r, \beta)$ admet au moins $k_0 + 1$ zéros finis pour $\beta - \beta_{k_0} < 0$ et suffisamment petit, en contradiction avec la définition de β_{k_0}. Ainsi (3.8) est vérifié. D'autre part, supposons par l'absurde que $u(r, \beta_{k_0}) \nrightarrow 0$ quand $r \to \infty$. D'après le Lemme 4.2.3, il existe un nombre positif $\tilde{r}$ tel que $E(\tilde{r}, \beta_{k_0}) < 0$. En utilisant encore des arguments de continuité, on voit qu'il existe un voisinage de β_{k_0} que l'on désigne par $V_1(\beta_{k_0})$, et tel que $E(\tilde{r}, \beta) < 0$ pour tout β sur le voisinage. Par conséquent, pour tout $\beta \in V_1(\beta)$, $Z(\beta)$ est le nombre de zéros des solutions correspondantes situées juste dans le compact $[0, \tilde{r}]$.
On montre à présent que l'on peut trouver un autre voisinage de β_{k_0} : $V_2(\beta_{k_0}) \subset V_1(\beta_{k_0})$ tel que : $\forall\ \beta \in V_2(\beta_{k_0})$, le nombre de zéros de $u(r, \beta)$ dans $[0, \tilde{r}]$ est égal à k_0, ce qui contredit encore la définition de β_{k_0} ; donc (3.9) est aussi vérifié.

En fait, en utilisant la fonction d'énergie, on peut trouver des constantes M_1 et M_2 indépendantes de β et telles que

$$\begin{aligned} E(r, \beta) < E(r, 0) &= \frac{1}{2\sigma + 2}\beta^{2\sigma+2} - \frac{1}{2}\omega\beta^2 \\ &< M_1 \ , \forall\ \beta \in V_1(\beta_{k_0}) \ , \forall\ r > 0. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma + 2}|u(r, \beta)|^{2\sigma+2} &< M_1 + \frac{1}{2}(\omega + \tilde{r}^2)|u(r, \beta)|^2 \\ &< M_2|u(r, \beta)|^2 \ , \forall\ \beta \in V_1(\beta_{k_0}) \ , \forall\ r \in [0, \tilde{r}] \end{aligned}$$

Comme $\sigma > 0$, $|u(r, \beta)|$ est bornée indépendamment de β sur $[0, \tilde{r}]$ et on déduit que

$$\frac{1}{2}|u'(r, \beta)|^2 < M_1 + \frac{1}{2}(\omega + \tilde{r}^2)|u(r, \beta)|^2.$$

Finalement, on aboutit à

$$|u'(r,\beta)| < M \ , \ \forall \ \beta \in V_1(\beta_{k_0}) \ , \ \forall \ r \in [0,\tilde{r}]. \tag{3.10}$$

Donc, $u'(r,\beta)$, est aussi bornée indépendamment de β sur $[0,\tilde{r}]$ pour $\beta \in V_1(\beta_{k_0})$. D'après la continuité suivant un paramètre, on sait que $u(r,\beta)$ converge point par point vers $u(r,\beta_{k_0})$ quand $\beta \to \beta_{k_0}$. On en déduit par (3.10) que $u(r,\beta) \to u(r,\beta_{k_0})$ uniformément sur le compact $[0,\tilde{r}]$ quand $\beta \to \beta_{k_0}$. Comme $u(r,\beta_{k_0})$ admet exactement k_0 zéros dans $[0,\tilde{r}]$, il en découle facilement que l'on peut trouver le voisinage $V_2(\beta_{k_0})$ prouvant (3.9).
Ensuite, on définit le sous-ensemble de A_{k_0+1} : $A'_{k_0+1} = \{\beta > \beta_{k_0}\ u(r,\beta)$ admet au plus k_0+1 zéros $\}$. Il découle du lemme 4.2.2 que A'_{k_0+1} n'est pas vide, de même le lemme 4.2.1 implique que A'_{k_0+1} est majoré. Alors, on pose $\beta_{k_0+1} = \sup A'_{k_0+1}$ et on remarque que $u(r,\beta)$ admet exactement k_0+1 zéros pour $\beta \in]\beta_{k_0}, \beta_{k_0+1}[$. On peut alors montrer, par des arguments similaires à ceux utilisés dans les preuves de (3.8) et (3.9) que $u(r,\beta_{k_0+1})$ est une solution de (3.1) ayant exactement k_0+1 zéros. En raisonnant par récurrence, on peut fabriquer des solutions avec n'importe quel nombre $k \geq k_0$ donné de zéros, ce qui montre le théorème 4.1.1 sauf pour la décroissance exponentielle de ces solutions qui sera démontrée via le lemme 4.2.3.

□

Preuve du lemme 4.2.3 Dans le cas unidimensionnel et pour les solutions strictement positives, ce résultat est donné dans [10]. La preuve est similaire à celle de notre cas général à l'exception de quelques détails. D'abord, on considère l'assertion (i). En effet, supposons que $u(r,\beta)$ est une solution de (3.1) ayant un nombre fini de zéros et vérifiant $u(r,\beta) \to 0$ lorsque $r \to \infty$. Alors, on affirme que

$$|u'(r,\beta)| \to 0 \text{ quand } r \to \infty \tag{3.11}$$

$$|u(r,\beta)| \text{ décroit exponentiellement quand } r \to \infty \tag{3.12}$$

Par la suite $E(r,\beta) \to 0$ quand $r \to \infty$. En fait, comme $u(r) = u(r,\beta)$ garde un signe constant après un certain $r_0 > 0$, on suppose d'abord que $u(r) > 0, \forall\ r > r_0$. De plus, lorsque $r \to \infty$ la courbe $(r,u(r))$, sera nécessairement localisée dans la partie 2 car $u(r) \to 0$, ainsi on peut montrer aisément que cette solution n'aura plus de minimum et qu'il existe un réel positif $r_1 > r_0$ tel que $u'(r) < 0,\ \forall\ r \geq r_1$. Il s'ensuit que

$$u''(r) \geq [(\omega + r^2) - |u(r)|^{2\sigma-1}]u(r) \ , \ \forall \ r \geq r_1$$

D'autre part, d'après l'hypothèse $u(r) \to 0$ quand $r \to \infty$, pour tout réel positif m, il existe un réel positif strict $r_2 \geq r_1$ tel que

$$(\omega + r^2) - |u(r)|^{2\sigma-1} \geq m \ , \ \forall \ r \geq r_2.$$

Donc notant $u(r) > 0$, $\forall\, r \geq r_2$, on obtient

$$u''(r) \ \geq mu(r) \ , \forall\, r \geq r_2 \tag{3.13}$$

Notons d'abord que (3.13) implique que $u''(r) > 0$ pour r assez grand. Par la suite, on déduit $u'(r) \to 0$ quand $r \to \infty$ sous les hypothèses et donc (3.11) est vérifié. Posons maintenant

$$\rho(r) := \exp(-\sqrt{(}mr)(u'(r) + \sqrt{m}u(r))$$

alors comme on a $\rho'(r) = \exp(-\sqrt{m}r)(u''(r) - u(r)) \geq 0$ d'après (3.13), $\rho(r)$ est croissante sur $[r_2, +\infty[$. S'il existe $r_3 \geq r_2$ tel que $\rho(r_3) > 0$, alors $\rho(r) > \rho(r_3) > 0$ pour tout $r > r_3$. Ceci implique que

$$u'(r) + \sqrt{m}u(r) \geq \rho(r_3)\exp(\sqrt{m}r).$$

Mais cela conduit à une contradiction puisque le terme de gauche converge vers zéro quand $r \to \infty$ d'après l'hypothèse et (3.11), tandis que le terme de droite tend vers l'infini quand $r \to \infty$. Par conséquent, on obtient $\rho(r) \leq 0$ pour $r \geq r_2$. Ainsi, on aura

$$(\exp(\sqrt{m}r)u(r))' = \exp(2\sqrt{m}r)\rho(r) \leq 0 \ , \forall\, r > r_2$$

ce qui implique

$$u(r) \leq C_1\exp(-\sqrt{m}r) \ , \forall\, r > r_2$$

où $C_1 = \exp(\sqrt{m}r_2)u(r_2)$ Maintenant, si $u(r) < 0$ pour r suffisamment grand, on remarque que $-u(r) = |u(r)|$ satisfait la même équation sauf pour les conditions initiales, donc (3.11) et (3.12) sont vérifiés pour $|u(r)| > 0$ si r est suffisamment grand ce qui prouve la première assertion.

Maintenant, on considère l'assertion (ii). En effet, Supposons que $u(r, \beta)$ est une solution de (3.1) qui admet un nombre fini de zéros tel que $u(r) \nrightarrow 0$ quand $r \to \infty$. Quitte à utiliser la fonction $-u(r)$, en peut supposer que $u(r) > 0, \quad \forall\, r > r_0($ car $-u(r)$ est aussi solution de la même équation et en plus $E_u(r, \beta) = E_{-u}(r, \beta))$. Alors, il suffit de montrer que $E(r)$ devient négative dans les deux cas possibles suivantes :

(a) $\underset{r\to\infty}{liminf} u(r, \beta) > 0.$

(b) $\underset{r\to\infty}{liminf} u(r, \beta) = 0$ et $\underset{r\to\infty}{limsup} u(r, \beta) > 0.$

Dans le premier cas, on obtient que $E'(r) \to -\infty$ quand $r \to \infty$ et en déduit facilement que $E(r) \to -\infty$, d'où le résultat. Dans le deuxième cas, comme les solutions $u(r, \beta)$ sont au moins de classe C^2, la condition (b) implique qu'il existe $r^* > 0$ tel que $u'(r^*) = 0$ et $u''(r^*) = (\omega + (r*)^2u(r*) - |u(r*)|^{2\sigma+2} > 0$. Par conséquent, on déduit que

$$E(r*) < \left(\frac{1}{2\sigma + 2} - \frac{1}{2}\right)|u(r*)|^{2\sigma+2} < 0$$

ce qui termine la preuve.

Remarque 4.2.1 *On note qu' on utilisé l'hyppothèse $\sigma < \sigma*$ seulement pour se servir du fait que l'équation limite* (3.3) *possède une infinité de zéros dans le cas sous−critique. Par conséquent, les autres résultats techniques obtenus dans ce paragraphe et notamment le Lemme 4.2.3 restent valables pour tout $\sigma > 0$.*

□

4.3 Résultats supplémentaires

4.3.1 Le cas critique et surcritique

Les résultats obtenus théoriquement dans la première partie, montrent que la structure des états excités changent dans le cas critique est surcritique. En effet, d'après l'identité de Pohozaev, on sait déjà que les solutions nodales u_k n'existent pas pour $\sigma \geq \sigma^*$. Ce changement peut être expliqué par la perte de compacité et de la condition de Palais-Smale. En suivant les étapes décrites dans notre deuxième approche, on s'aperçoit que cette modification est conséquence du fait que les ensembles A_k ne sont plus bornés dans ce cas. Par exemple, pour $\sigma = \sigma*$, la solution de l'équation (3.3) est strictement positive (voir [33]). Ainsi, on ne peut rien en déduire concernant le nombre de noeuds de $u(r, \beta)$ quand $r \to \infty$. D'ailleurs, on sait déjà que les conditions nécessaires et suffisentes s'écrivent en fonction de ω dans le cas présent, alors que, l'équation (3.3) ne dépend pas de ω. Néanmoins, d'après la Remarque 4.2.1, toutes les autres étapes de la démonstrartion du Téhorème 4.1.1 restent valablent indépendamment de la valeur de $\sigma > 0$. Ceci permet en fait de dégager un résultat partiel qui sera suffisant pour calculer numériquement des solutions nodales dans le cas $\sigma \geq \sigma^*$, on a alors le :

Théorème 4.3.1 *Soit $d > 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Si il existent $0 < a < b < c$ telque*

$$k_1 := Z(\beta_1) \neq k_2 := Z(\beta_2) \quad \text{pour tout } \beta_1 \in [a, c[\text{ et } \beta_2 \in]c, b] \ . \tag{3.14}$$

Alors, la solution $u(r, c)$ admet exactement $k_0 := min(k_1, k_2)$ zéros dans $[0, +\infty[$ et $u(r, c) \to 0$ exponentiellement quand $r \to +\infty$.

Preuve du Théorème 4.3.1. Si $u(r, c) \nrightarrow 0$ quand $r \to \infty$, alors il existe un nombre positif r_0 tel que $E(r_0) < 0$. En utilisant la même démarche du preuve du Théorème 4.1.1 et la continuité de $u(r, \beta)$ par rapport à β on obtient que $Z(\beta)$ reste constante sur un voisinage de c, ce qui contredit notre hyppothèse. D'autre part, d'après le Lemme 4.2.2 on déduit que k_1 et k_2 sont deux entiers consécutifs. Finalement, si $Z(\beta) = \max(k_1, k2)$, en utilisant de nouveau la continuité de $u(r, \beta)$ par rapport à β, on a $Z(\beta) \geq \max(k_1, k_2)$ sur un voisinage de c, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses.

□

4.3.2 Généralisations au cas d'un ouvert borné et de potentiel polynomiale

L'argument du lemme 4.2.1 fournit des informations supplémentaires à celles utilisées ici. En effet, soit $z_k(\beta)$ le k−ième zéro de $u(r,\beta)$. Pour β suffisamment grand, $z_k(\beta)$ existe et est une fonction continue de β. En outre, lorsque $\beta \to \infty$ on déduit à partir de (3.4) que $\beta^\sigma z_k(\beta)$ est le k−ième zéro de $v(r,\beta)$ et converge vers le k−ième zéro de $w(r)$, où w vérifie (3.3). En particulier, on a

$$z_k(\beta) \to 0 \text{ quand } \beta \to \infty.$$

Cette remarque conduit immédiatement à notre second théorème, que l'on peut interpréter par la donnée de solutions radiales pour le problème de Dirichlet dans une boule.

Théorème 4.3.2 *soit $d \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ et σ comme au Théorème 4.1.1. Alors, pour tout entier $k \geq k_0$, (k_0 défini au Théorème refth1), il existe une solution du problème*

$$\begin{cases} u'' + \frac{d-1}{r}u'(r) - \omega u(r) - r^2 u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0 \\ u'(0) = 0, \quad u(R) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

ayant exactement k zéros dans $[0, R[$.

Nos méthodes s'appliquent aussi à la même équation mais avec un terme potentiel plus général. Par exemple, il est facile de remplacer le terme $r^2u(r)$ dans (3.1) par $P_m(r)u(r)$, et $P_m(r) = \sum_{i=0}^m a_i r^i$ est une fonction polynomiale de degré $m \geq 2$ vérifiant $a_i \geq 0, i \leq m$. C'est à dire, on définit l'énergie d'une solution comme déjà fait pour eqrefedo :

$$E(r) = \frac{1}{2}|u'(r)|^2 + \frac{1}{2\sigma+2}|u(r)|^{2\sigma+2} - \frac{\omega}{2}|u'r)|^2 - \frac{1}{2}P_m(r)|u(r)|^2$$

et ainsi

$$E'(r) = -\frac{d-1}{r}|u'(r)|^2 - \frac{1}{2}P'_m(r)|u(r)|^2 \leq 0.$$

L'analyse précédente est alors encore valable.

Chapitre 5

Calcul numérique des solutions radiales et diagrammes de bifurcation

5.1 Introduction

On expose maintenant quelques calculs numériques qui illustrent les résultats obtenus dans la partie théorique et donnent une idée plus claire sur la forme de ces solutions. En outre, les diagrammes de bifurcation seront tracés afin de fournir des informations sur les solutions (surtout la multiplicité) essayant de répondre numériquement à quelques questions qui restent ouvertes. Il est à noter que les résultats du chapitre précédent montrent qu'on peut utiliser la méthode de tir pour calculer les solutions à nombre prescrit de zéros pour tout $\sigma > 0$. Ainsi, une variété de simulations numériques sur les solutions localisées de (1.1) seront exécutée dans les cas sous-critique, critique et surcritique. Les détails seront exposés dans les trois paragraphes suivants. On donne à présent une brève description de la méthode générale que nous allons utilier. D'abord, on transforme l'équation (3.1) en un système général du premier ordre de la forme $Y'(r) = F(r, Y(r))$ avec $Y(r) = (u(r), u'(r)) \in \mathbb{R}^2$ et

$$F(r, x, y) = (y, \frac{(1-d)y}{r} + x(r^2 + \omega - |x|^{2\sigma})) \in \mathbb{R}^2, \qquad r > 0.$$

Remarquons que la fonction F peut être évaluée en $r = 0$ à l'aide d'un développement de Taylor de la dérivée $u'(0)$. En effet, un développement de Taylor en $r = 0$ de la dérivée conduit à $u'(r)/r \approx u''(0)$ quand $r \to 0$. Par conséquent, on a $u''(r) + (d-1)u'(r)/r \approx du''(0)$ et la dérivée seconde de u en zéro peut s'exprimer à l'aide de (3.1) comme $u''(0) \approx (\omega u_0 - u_0|u_0|^{2\sigma})/d$. Ensuite, la donnée initiale β devrait être prescrite de telle sorte que la solution correspondante possède de bonnes propriétés de décroissance à l'infini. En fait, il faut trouver les valeurs $\beta = \beta_k$ telque les solutions correspondantes $u_k(r) = u(r, \beta_k)$ admettent exactement k zéros dans $[0, +\infty[$ et tendent exponentiellement vers 0 quand $r \to +\infty$. La détermination des ces vleurs particulières

β_k dépendra du pramètre σ comme on l'expliquera plus tard. D'autre part, comme toutes les solutions non triviales de (1.12) dans un voisinage de $(\omega_n, 0)$ sont sur la courbe bifurquée C_n, il est possible de calculer les branches C_n au voisinage de chaque valeur propre ω_n. Le diagramme intégral de bifurcation est alors déduit par continuité en utilisant les mêmes algorithmes.

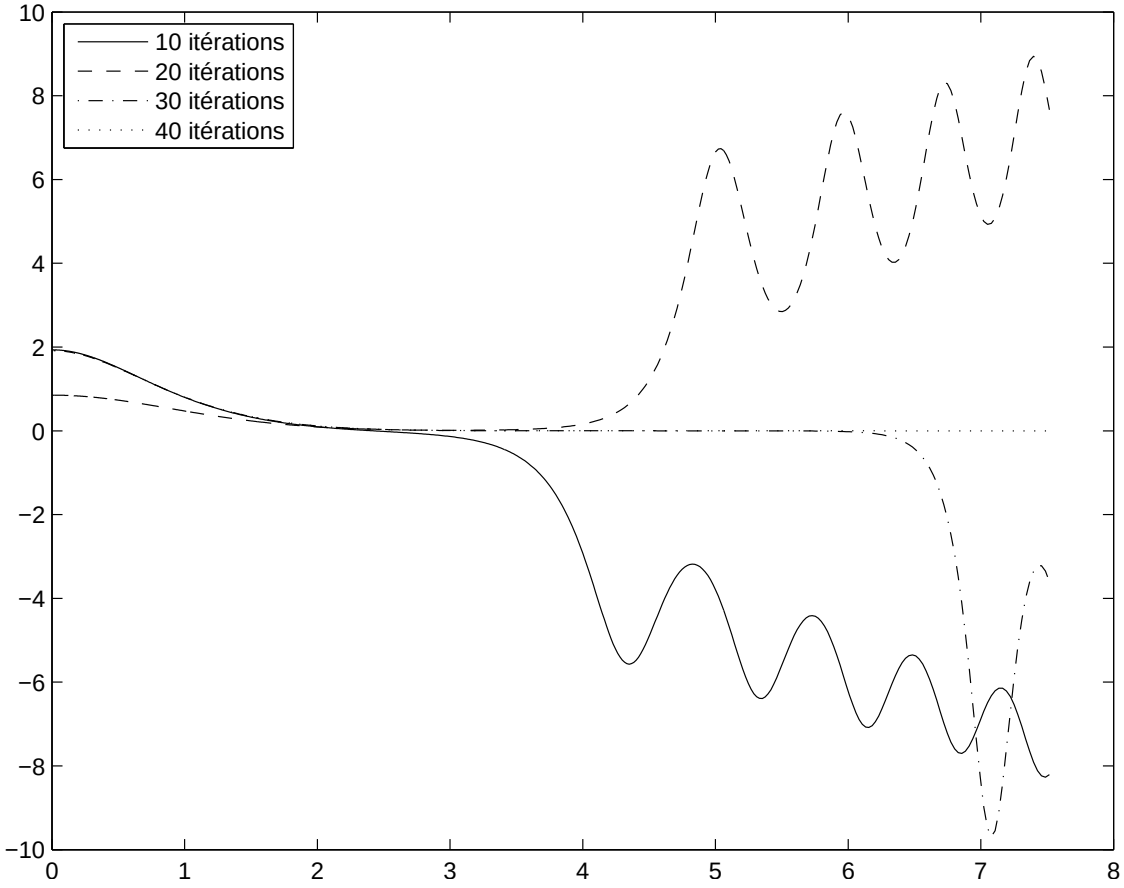


FIGURE 5.1 – Détermination itérative de l'état fondamental de (??) : $u_0 : d = 2, \sigma = 1, \omega = -0.5$.

5.2 Le cas sous−critique

On considère ici le cas sous−critique $\sigma < 2/(d-2)$. En utilisant les informations données dans la preuve du Théorème 4.1.1, il suffit de trouver les valeurs

$$\beta = \beta_k = \sup \{\beta > 0 \mid u(r, \beta) \text{ a exactement } k \text{ zéros dans } [0, +\infty[\},$$

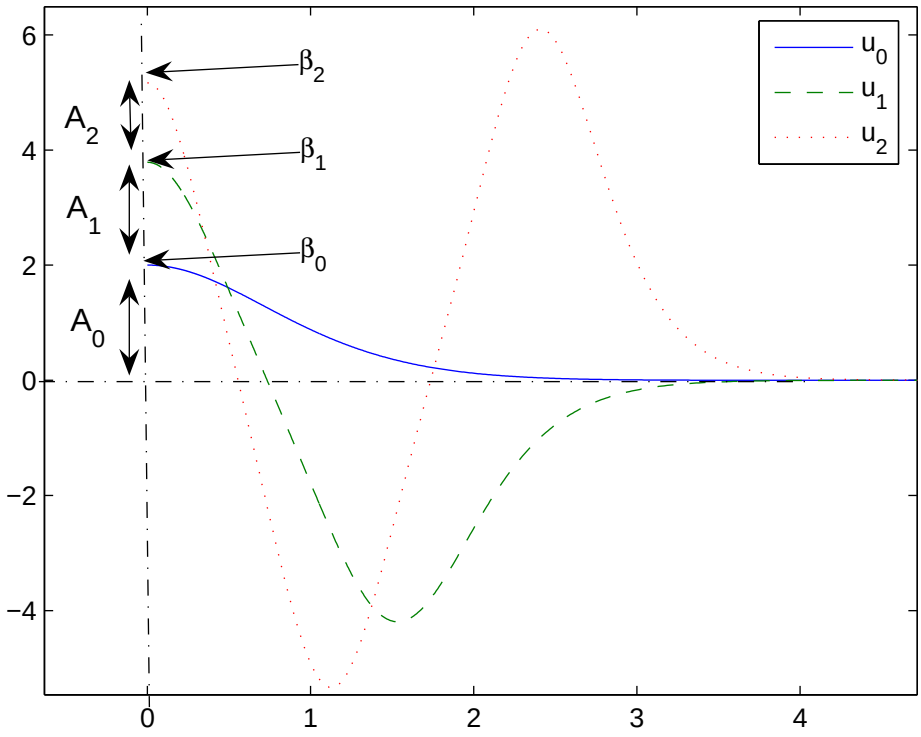


FIGURE 5.2 – Structure des ensembles A_k dans le cas $\sigma < \sigma^*$, ici $d = 1$ et $\sigma = 1$.

alors $u_k(r) = u(r, \beta_k)$ admet exactement k zéros dans $[0, +\infty[$ et $u(r, \beta_k) \to 0$ exponentiellement quand $r \to +\infty$. Cette information explique complètement l' algorithme qui sera utilisé. Notons que dans le cas unidimensionnel, on ne restreindra pas la valeur de σ à celle donnée au Théorème 4.1.1, c'est à dire $0 < \sigma \leq 1$ et on traitera σ comme un réel strictement positif car on a remarqué à travers toutes nos expérimentations que le Lemme 4.2.2 reste valable même lorsque $\sigma > 1$.

Maintenant, on présente l'algorithme numérique afin de localiser les états excités. On commence par calculer $u_k(0)$, par exemple, si $\omega > -d$ on cherche d'abord u_0, qui est sans nœuds. Ainsi à chaque étape n, la valeur exacte β_0 est cherchée dans un intervalle $[a_n, b_n]$. On calcule $\beta_n = (a_n + b_n)/2$ et on résout (3.1) pour $\beta = \beta_n$. Si la solution approchée devient négative en un certain r_0, alors la valeur cherchée β_0 vérifie $\beta_0 < \beta_n$, et ainsi on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \beta_n$. Si la solution est toujours plus grande qu'une certaine valeur prescrite $\epsilon > 0$, alors on écrit $a_{n+1} = \beta_n$ et $b_{n+1} = b_n$. L'intervalle initial est choisi de sorte que $a_0 < \beta < b_0$: a_0 est égal à zéro et b_0 est tel que la solution du problème de Cauchy correspondant change de signe. Puis, la valeur β_1 sera cherchée dans

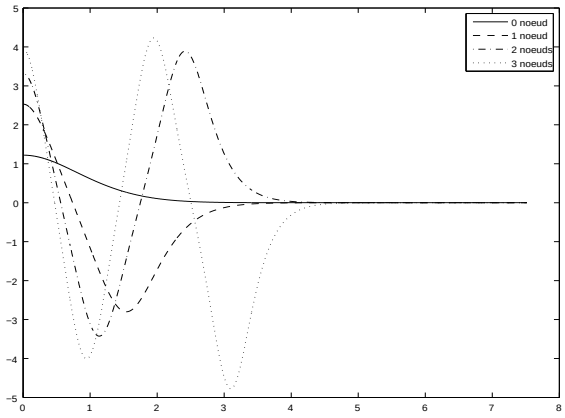


FIGURE 5.3 – Les courbes des quatre premiers états stationnaires de (1.1) ($d = 1$, $\sigma = 1$, $\omega = 0$).

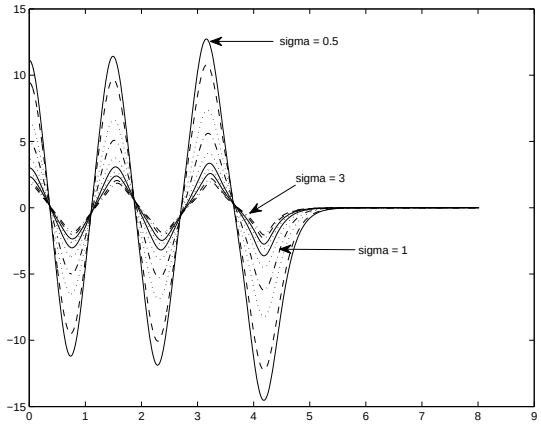


FIGURE 5.4 – Les courbes de u_5 ($d = 1$, $\omega = 0$, $\sigma \in [0.5, 3]$).

$[a_n = \beta_0, b_n]$, avec b_n supposée assez grande de sorte que la solution correspondante n'ait qu'un zéro au plus. L'algorithme pour la détermination du premier état excité (noté u_1) est très semblable à celui décrit précédemment. Ici, à l'étape n, si la solution calculée avec β_n change de signe plus d'une fois, on fixe $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \beta_n$. Dans l'autre cas, on prescrit $a_{n+1} = \beta_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Le système différentiel est donc résolu numériquement avec une méthode classique de Runge-Kutta d'ordre 4 sur un intervalle borné $[0, R]$ où R est supposé plus grand que tous les nœuds de la solution cherchée (on prend R suffisamment grand et on vérifie que la solution calculée avec cet algorithme ne dépend pas de R). La solution approchée est alors calculée sur les points discrets prescrits $r_j = j\delta r$ $(0 \geq j \geq N)$ où N est donné et $\delta r = R/N$.

On présente dans la Figure 5.15, la solution itérative approchant l'état fondamental u_0 de (1.2) obtenu dans le cas $d = 2, \sigma = 1, \omega = -0.5$, pour $R = 8$ et $N = 10000$ points de discrétisation pour le résolveur différentiel, aux itérations 10, 20, 30, et 40. Notons aussi que $\|u_0\|_\infty$ est toujours égale à $u_0(0)$ et ceci peut être prouvé aisément par les arguments utilisés au Lemme (4.2.2). En outre, on a vérifié numériquement que cette identité reste valable dans le cas général ($k \geq 1$) sauf pour le cas unidimensionnel, où on a observé que cette norme est toujours atteinte au dernier maximum de la solution. On pense que celà est dû à la présence du terme potentiel. Comme l'existence de ces solutions excitées $(u_k, k \geq 1)$ est une conséquence de la présence de ce terme harmonique. En fait, dans le cas d'énergie pure : (1.3), une intégration explicite permet de résoudre cette équation et seuls les états localisés positifs peuvent être obtenus si $d = 1$. Ensuite, en présente dans la Figure 5.5 la première branche bifurquée C_0 caculée avec différentes valeurs de σ. Les profils des courbes obtenus montrent que ces courbes

croissent beaucoups plus vite vers l'infini pour les petites valeurs de σ. Finalement, on voit dans la Figure 5.4 le graphe du cinquième état excité u_5 dans le cas $d = 1$, $\omega = 0$ et différentes valeurs de σ. On voit que cette solution garde presque la même forme et les positions des nœuds restent approximativement inchangées. La variation de σ change seulement l'amplitude. On a observé ce comportement pour différentes valeurs de k, σ, et ω, mais seulement dans le cas unidimensionnel.

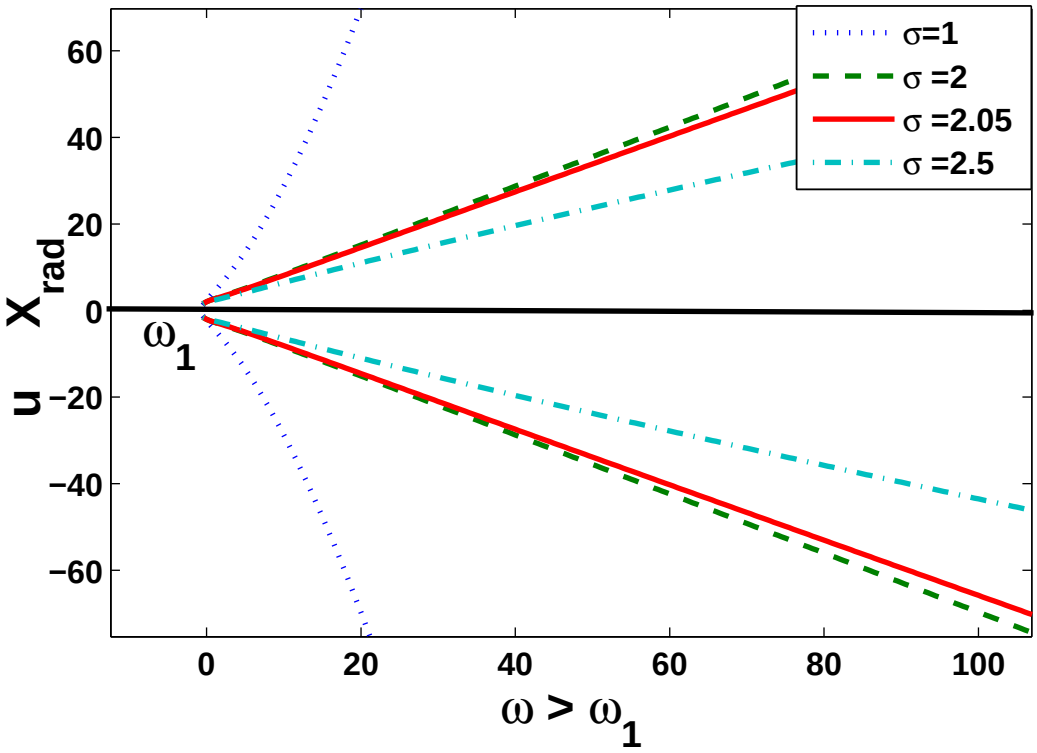


FIGURE 5.5 – le comportement de la branche bifurquée C_0 en fonction de σ : $d = 1$, $\sigma = 1,\ 2,\ 2.05,\ 2.5,$.

On présente maintenant les résultats obtenus dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel : dans la Figure 5.6 on donne les profils des trois premiers états stationnaires calculés avec $d = 3$, $\sigma = 0.75$ et $\omega = -1$ tandis que dans la Figure 5.7 on trace les trois premières branches bifurquées obtenues pour $d = 2$, $\sigma = 1.5$.

On peut clairement repérer dans la Figure 5.7 qu'à chaque valeur fixée de la fréquence $\omega > \omega_k$, il existe exactement deux solutions symétriques localisées de (3.1) (resp. (1.7)) à k nœuds : u_k et $-u_k$. Autrement, la k−ième solution bifurquée est unique quitte

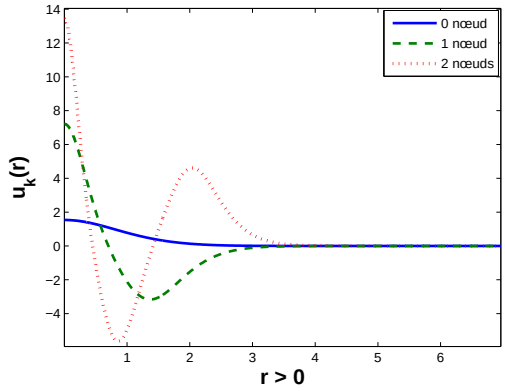


FIGURE 5.6 – Graphes des trois premiers états stationnaires de (1.1) ($d = 3$, $\sigma = 0.75$, $\omega = -1$).

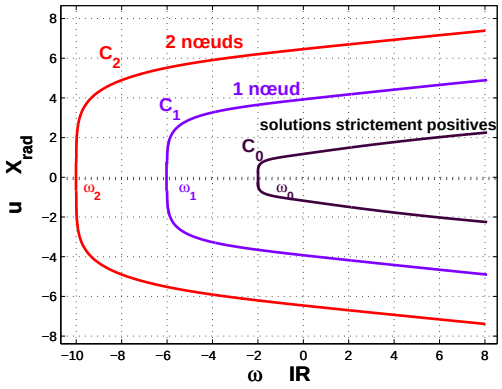


FIGURE 5.7 – Les branches bifurquées C_0, C_1, et C_2 : $d = 2$, $\sigma = 1.5 < \sigma^*$.

à supposer que $u_k(0) > 0$. D'autre part, on présente dans la Figure 5.8, les résultats obtenus dans le cas tri-dimensionnel $d = 3$ pour $\sigma = 0.5$ et pour différentes valeurs de ω qui tend vers $-d$. On a remarqué que cette solution (u_0) tend uniformément vers zéro quand $\omega \to -d$. En effet, ceci est le comportement de tous les états excités : u_k quand $\omega \to -(4k + d)$. Ceci illustre le fait que les solution obtenu par la méthode de tir (4.1.1) sont les solutions bifurquées étudiées théoriquement dans la première partie. Même si cette coïncidence paraît logique et prévue, on ne sait pas le prouver théoriquement. En effet, des solutions nodales peuvent exister sans qu'elles soient des solutions bifurquées. Néanmoins, d'prés l'unicité de la solution positive établie dans [7], on sait que les solutions positives obtenus par différentes manières coïncident. Ces deux propriétés ont été observées à travers tous nos tests dans le cas sous-crtique ce qui suggère un résultat d'unicité pour chaque état excité, pour tout $d \geq 1$, $\omega > \omega_k$ et $\sigma < 2/(d-2)$. Il s'agit d'une question difficile qui reste ouverte sauf pour le cas de l'état fondamental u_0 (qui est strictement positive) dans le cas sous-critique. En fait, dans [7] et [10], Hirose et Ohta ont remarqué l'unicité de la solution positive pour tout $d \geq 1$, $\omega > -d$ et $\sigma < \sigma^* = 2/(d-2)$ utilisant un théorème de classification générale de Yanagida et Yotsutani [32]. La difficulté est due à l'influence des trois paramètres d, σ et ω sur la multiplicité de chaque état excité comme on va le voir dans le paragraphe suivant en étudiant le cas critique.

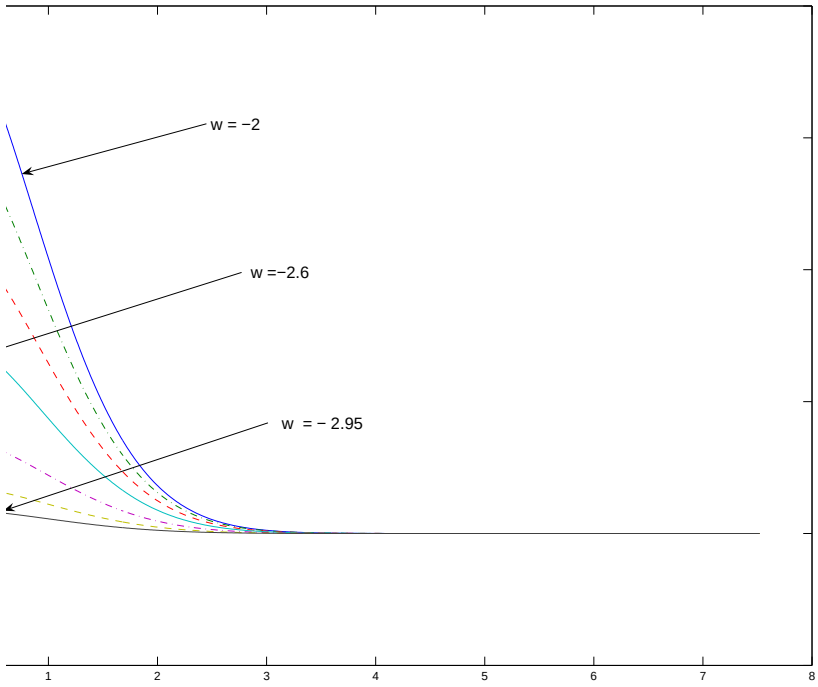


FIGURE 5.8 – le comportement de u_0 quand $\omega \to -d$ ($d = 3$, $\sigma = 0.5$).

5.3 Le cas critique

Nous avons vu au chapitre 4 (le Théorème 4.3.1) que les résultats numériques utilisés pour les petites non−linéarités restent valides dans le cas critique et suritique et permettent d'extraire des résultats indépendamment de la non−linéarité. En fait, si on considère le système différentiel ordinaire (3.1), en notant

$$A_k := \{\beta > 0 \ \mid \ u(r, \beta) \text{ possède exactement } k \text{ zéros dans } [0, +\infty[\}$$

(lorsque $u(r, \beta)$ désigne l'unique solution de (3.1) avec la condition initiale $u(0) = \beta$), alors si $\sigma < \sigma^*$, ces ensembles sont bornés et connexes, et il est suffisant de calculer la borne supérieure de chaque ensemble pour obtenir le k−ième état excité. Ceci peut être effectué facilement en utilisant la méthode de tir standard utilisée dans le cas $\sigma < \sigma^*$. Maintenant, pour les grandes non−linéarités, il peut arriver que ces ensembles ne soient plus connexes et parfois non bornés ; c'est pourquoi la méthode de tir doit être dans ce cas légèrement modifiée . Plus précisément, il suffit de déterminer le bord de chaque ensemble A_k constitué de plusieurs points, chaque point définissant une solution

à k nœuds. En d'autres termes, il suffit de détecter numériquement les points β_k qui représentent une modification du nombre des nœuds de la solution correspondante de (3.1). Ceci équivau à calculer les bornes supérieure et inférieure de chaque sous ensemble non vide de A_k par un algorithme ascendant de tir pour le maximum et un algorithme descendant pour le minimum. De plus, d'après le Théorème 4.3.1, la solution obtenue décroît exponentiellement vers zéro quand r tend vers l'infini. Ceci est dû aux bonnes propriétés de la fonction d'énergie $E_u(r)$ définie dans la partie 3, notamment, la propriété (1.16) qui reste vraie indépendamment de la non−linéarité (voir aussi la Remarque 4.2.1).

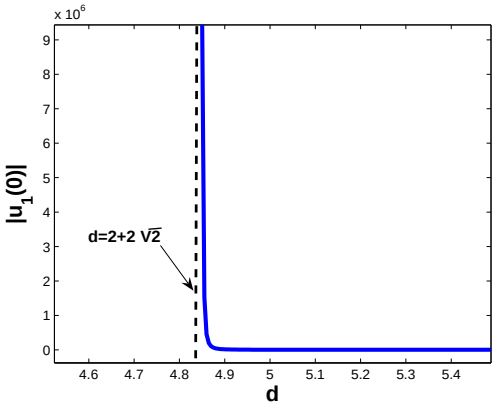


FIGURE 5.9 – Valeur de l'amplitude du point traversant $u_1(\omega_0(d))$ en fonction de d.

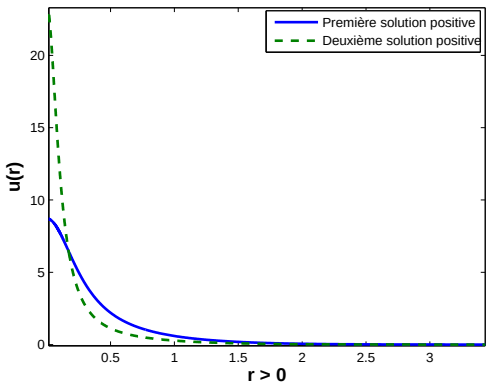


FIGURE 5.10 – Les deux premières solutions positives obtenues dans le cas surcritique, $d = 4$, $\sigma = 1.1 > \sigma^* = 1$.

En utilisant cettee stratégie modifiée de tir, on a étudié numériquement le comportement des courbes de bifurcation dans le cas critique. Ici, il est plus convenable d'utiliser la norme infinie au lieu de $\|u\|_{X_{rad}}$ pour tracer les courbes bifurquées. En fait, plusieurs résultats d'existence relatifs à la non−linéarité critique sont exprimés relativement à cette norme. Plus précisément, en calculant les limites de ω quand la norme infinie de la solution correspondante tend vers l'infini, on obtient des conditions suffisantes d'existence pour chaque type de solutions nodales. Pourtant, ces méthodes ne permettent pas de fournir des conditions nécessaires même si des résultats partiels ont été obtenus dans le cas de l'équation de Brézis-Niremberg (2.1) restreinte à la boule unité ; il a été démontré en particulier que ce problème est fortement lié à la dimension d (comme c'était le cas pour l'état fondamental u_0). De plus, il a été conjecturé dans [36] que dans ce cas, les conditions nécessaires obtenues utilisant cette méthode sont nécessaires pour les valeurs de la dimension d inférieures à $2+\sqrt{2}$. Signalons que dans le cas radial, les problèmes elliptiques sont réduits à des équations différentielles ordinaires et la dimension de l'espace peut être considérée comme un paramètre réel. Cette

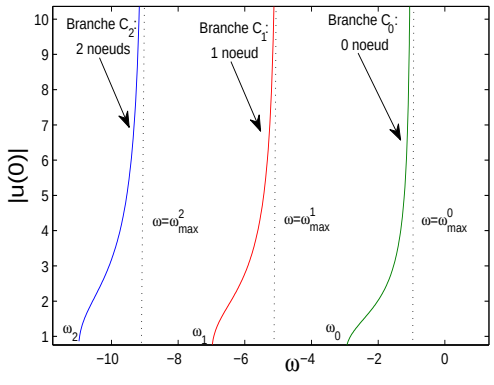


FIGURE 5.11 – Les trois premières branches bifurquées dans le cas critique : $d = 3$.

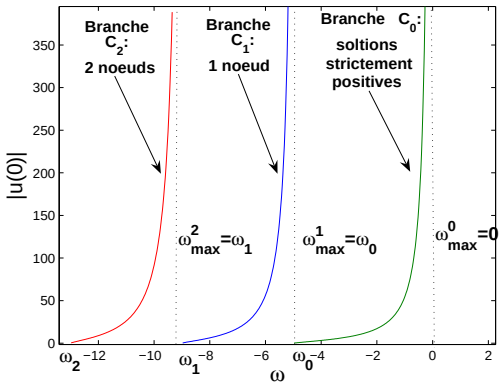


FIGURE 5.12 – Les trois premières branches bifurquées dans le cas critique : $d = 4$.

conjecture a été récemment partiellement vérifiée dans [34] en étudiant le cas particulier $d = 4$. En calculant numériquement les branches C_n relatives à notre cas, on observe

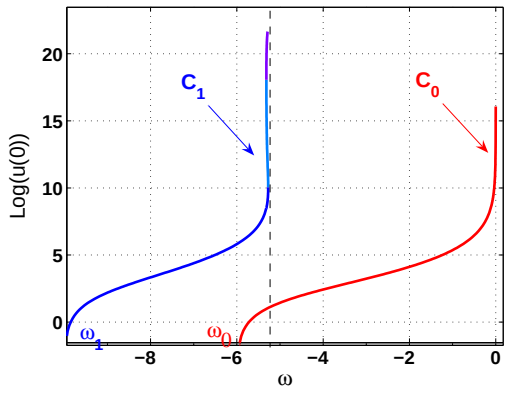


FIGURE 5.13 – Les deux premières branches bifurquées dans le cas critique : $d = 6$.

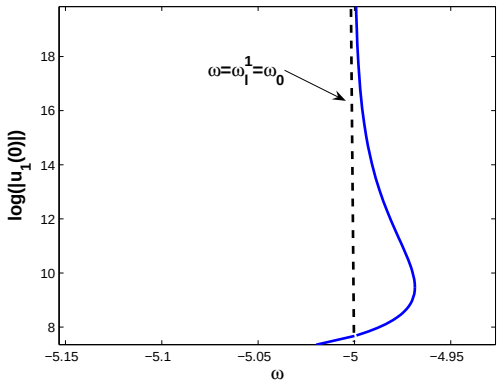


FIGURE 5.14 – Profil de C_1 quand $\|u_1\|_\infty \to \infty$, $d = 5$.

clairement ce phénomène. En outre, la particularité de cette même valeur a été mise en évidence pour l'équation de Bose-Einstein (CBE). D'une manière spécifique, tous nos tests suggèrent que, pour tout $d \leq 2 + 2\sqrt{2}$, les courbes bifurquées paramétrées par la norme infinie, croissent de 0 à l'infini en restant strictement monotones. Ceci suggère aussi l'unicité de chaque état excité pour ces petites dimensions. De plus, dans ce cas,

ces courbes n'intersectent aucune droite vercticale d'équation $\omega = \omega_k$ avant de diverger et restent loin de la valeur propre suivante bien qu'une structure plus spécifique a été observée pour n'importe quel d supérieur à la valeur citée dessus. Précisément, lorsque $d > 2+2\sqrt{2}$, chaque branche C_k intercepte la valeur propre ω_{k-1} avant de diverger. Dans le but de calculer la valeur exacte de cette dimension particulière, on étudie l'amplitude de la solution $u_1(\omega_0)$ en fonction de d, ceci constitue le point d'intersection obtenu quand C_1 traverse $\omega_0 := \omega_0(d) = -d$. D'après la Figure 5.9, cette valeur diverge quand la dimension d décroit vers $2 + 2\sqrt{2}$. Cela suggère que lorsque d est inférieur à cette valeur, la courbe ne traverse aucune valeur propre avant de tendre vers l'infini. Précisément, tous nos calculs numériques concernant l'équation de Bose-Einstein dans le cas critique suggèrent qu'on a :

- Si $3 \leq d \leq 2 + 2\sqrt{2}$, pour tout entier $k \geq 0$ il existe une valeur $\omega_{max}^k \leq 0$ tel que
  1. pour $\omega_k < \omega < \omega_{max}^k$, il existe une unique solution radiale de (2.2) qui a exactement k nœuds ;
  2. pour $\omega_{max}^k \leq \omega < 0$, il n'y a aucune solution radiale à k nœuds de (2.2).
- Si $2 + 2\sqrt{2} < d \leq 6$ pour tout entier $k \geq 1$ il existe une valeur $\omega_l^k < \omega_{max}^k < 0$ tel que
  1. pour $\omega_k < \omega \leq \omega_l^k$, ou $\omega = \omega_{max}^k$ il existe une unique solution radiale de (2.2) qui a exactement k nœuds ;
  2. pour $\omega_l^k < \omega < \omega_{max}^k$, (2.2) admet au moins 2 solutions radiales à k nœuds ;
  3. pour $\omega_{max}^k < \omega < 0$, il n'existe aucune solution radiale à k nœuds de (2.2).

De plus, nos calculs suggèrent que le cas $k = 0$ (l'état fondamental) est spécial puisque la propriété d'unicité est conservée jusqu'au cas critique $\sigma = \sigma^*$ contrairement à l'autre état excité, puisque cette propriété est perdue pour tout $k \geq 1$ si $2 + 2\sqrt{2} < d \leq 6$. Ceci est illustré dans le cas $d = 6$ à travers la Figure 5.13 par le fait que la branche C_1 tend vers l'infini en oscillant contrairement à C_2 qui diverge tout en restant strictement monotone. Dans les figures 5.11 et 5.12 on a tracé respectivement les profils des trois premières branches bifurquées pour $d = 3$ et $d = 4$. Remarquons qu'il a été vérifié numériquement que les valeurs maximales des états excités sont toujours atteintes à l'origine sauf dans le cas unidimensionnel. Donc pour des raisons de commodité, on utilise le paramètre de tir $|u(0)|$ en traçant les diagrammes bifurqués dans les cas critique et surcritique. Pour observer clairement la forme de la courbe bifurquée quand $\|u\|_\infty \to \infty$, on trace sur la Figure 5.14 le profil de C_1 quand $d = 5$ en utilisant la fonction log. Le diagramme obtenu indique que $\omega_l^1 = \omega_0$. Aussi, on peut remarquer sur la Figure 5.12 que le même résultat est satisfait si $d = 4$ (dans ce cas $\omega_{max}^1 = \omega_0$) contrairement aux cas $d = 3$ et $d = 6$ comme le montrent les Figures 5.11 et 5.13. Cela coïncide exactement avec les résultats obtenus pour l'équation de Brézis−Nirenberg (2.1) (voir [37]).

5.4 Le cas surcritique

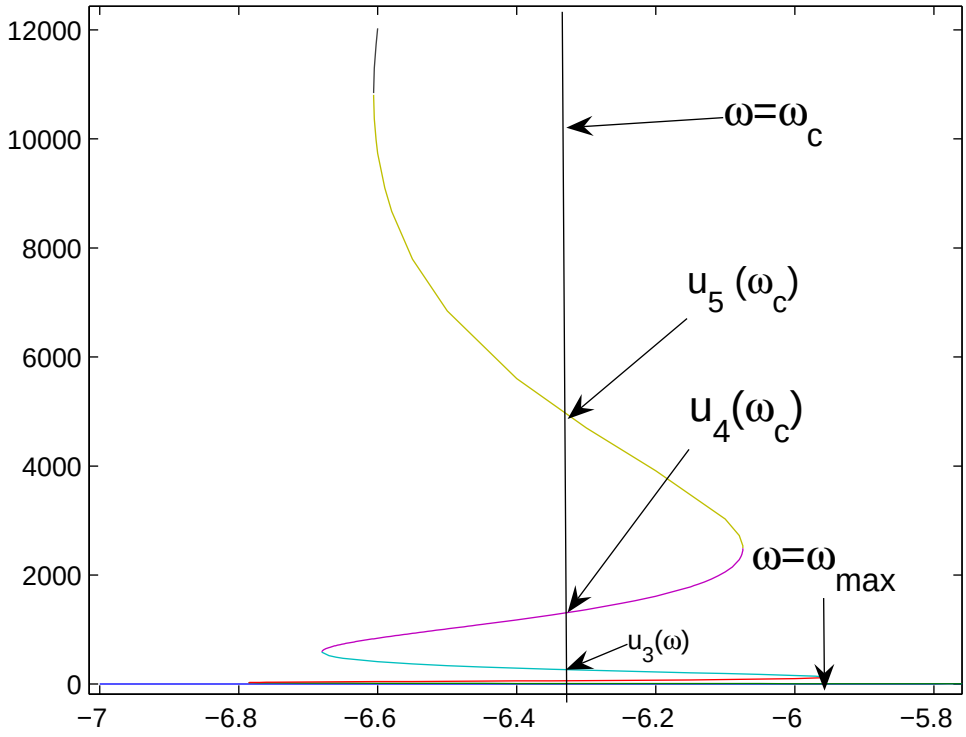


FIGURE 5.15 – Branche bifurquée C_1 dans le cas $\sigma > \sigma^*$, ici $d = 3$ et $\sigma = 2.2$.

On se concentre maintenant sur les résultats obtenus pour $\sigma > 0$ en commençant par l'analyse de la structure des solutions positives. Il semble qu'il s'agisse du premier cas auquel l'unicité des solutions positives est perdue puisqu'il est possible de calculer plusieurs solutions différentes pour une valeur fixée de ω comme le montre la Figure 5.10. On illustre dans Figure 5.16 la branche C_0 calculée pour une valeur surcritique très proche de σ^* et on remarque que contrairement au cas critique, cette courbe n'est pas monotone. De plus, on peut voir à travers la Figure 5.17 que cette courbe oscille en tendant vers l'infini donnant naissance à plusieurs solutions positives pour ω fixé. En outre, il a été observé pour une valeur de ω qui dépend de σ que l'équation (3.1) (resp. (1.2)) peut avoir une infinité de solutions positives. Ce phénomène a été aussi observé pour d'autres états excités. En fait, comme le justifient les Figures 5.17 et 5.19, les profils obtenus suggèrent que la structure des états excités ne dépend pas du nombre des nœuds dans ce cas. De plus, on illustre dans la Figure 5.18 l'influence du

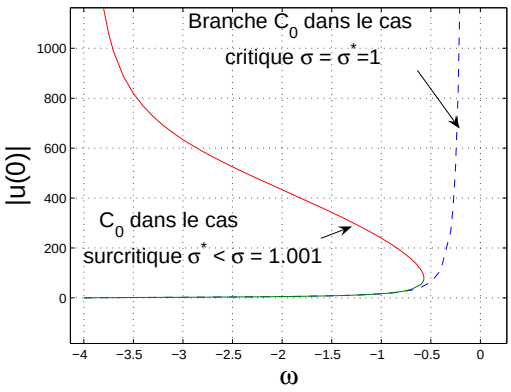


FIGURE 5.16 – Comparaison des cas critique surcritique, $d = 4$.

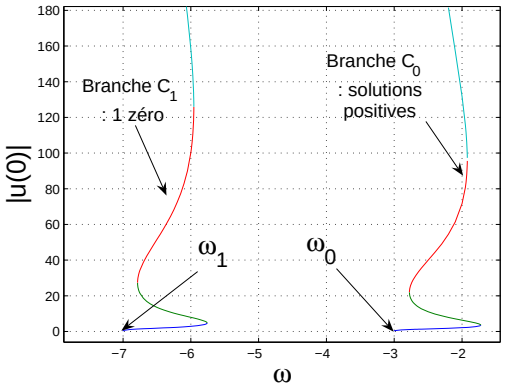


FIGURE 5.17 – Les deux premières branches bifurquées dans le cas surcritique, $d = 3$, $\sigma = 2.2$.

paramètre σ sur la forme des branches bifurquées, et il semble qu'elles gardent toujours la même forme en rétractant dans la valeur propre correspondante. Cela suggère que pour de grandes valeurs de σ, les états excités existent seulement dans un voisinage de ces valeurs. Il est important de noter que ceci reste vrai si $d = 6$ (et même 7). En fait, rappelons que pour ces dimensions, ces branches C_n obtenues dans le cas critique oscillent autour d'une valeur propre au moins, ce qui suggère la possibilité d'existence d'au moins une solution non triviale de (1.2) pour tout $\omega < 0$. Comme on le voit sur la Figure 12, ce comportement n'est plus satisfait pour des non−linearités assez grandes .On note que Dolbeault et Flores [46] et Guo et Wei [47] ont prouvé rigoureusement des phénomènes similaires pour l' équation elliptique semi-linéaire sur la boule unité (2.1). En effet on prouve dans [46] l'existence de plusieurs solutions avec le même nombre de noeuds pour des fréquences particulière dans le cas $d \leq 10$. Dans le cas $d > 10$, Guo et Wei ont prouvé récemment que ce phénomène n'a pas lieu dans le cas de la première branche bifurquée C_0 pour des grandes valeurs d'exposent non linéaire p. Précisément, considérant l'équation de Brézis-Nirenberg (2.1) dans le cas surcritique, si on pose

$$p_c(d) = \frac{(d-2)^2 - 4d + 8\sqrt{d-1}}{(d-2)(d-10)}$$

alors, pour tout $p \geq p_c$ cette équation à au plus un nombre fini de solution à chaque valeur fixée de ω. Toutes ces questions restent encore ouvertes dans notre cas. En effet, les invariances d'échelles possibles pour l'équation (2.1) ne sont plus possibles dans notre cas. Sachant que la démonstration établie par Guo et Wei dans [47] fait appel à des techniques d'équations différentielles ordinaires et de changement de variables fondés sur des invariances caractéristiques du cas sans potentiel (voir chapitre 3). Il

n'a pas été possible d'établir ce résultat dans notre cas (ce problème fait l'objet d'une collaboration actuelle avec Laurent Di Menza, Hiroaki Kikuchi et Reika Fukuizumi).

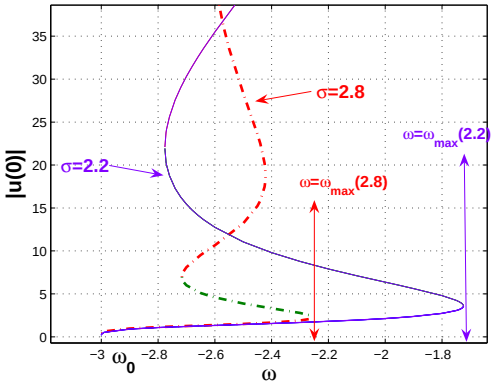


FIGURE 5.18 – La première branche bifurquée dans le cas surcritique, $d = 3$, $\sigma = 2.2, 2.8$.

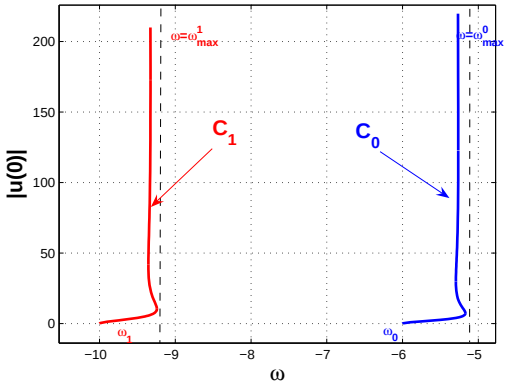


FIGURE 5.19 – Les deux premières branches bifurquées dans le cas surcritique, $d = 6$, $\sigma = 1$.

Chapitre 6

Asymptotiques

6.1 Les asymptotiques pour les grandes valeurs de k

On veut maintenant étudier le comportement asymptotique des états excités lorsque le nombres de nœuds croît. En effet, dans le cas puissance pure, il a été trouvé dans [15] que les normes L^2 et H^1 de u_k se comportent asymptotiquement comme $k^{d/2}$ sous des hypothèses convenables basées sur la non-linéarité. Dans [4], il a été montré que la norme L^∞ de la k−ième état excité se comporte comme $k^{\gamma(d,\sigma)}$ pour des grandes valeurs de k avec $\gamma(d,\sigma) = \frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma}$. Notre objectif est d'étudier l'influence de d, σ et ω sur les états stationnaires excités de l'équation de (CBE) pour un grand nombre de nœuds.

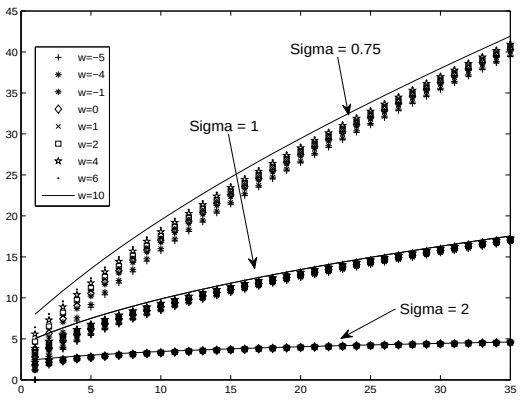


FIGURE 6.1 – $\|u_k\|_{L^\infty}$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 1$, $\sigma \in \{0.75, 1, 2\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 10\}$.

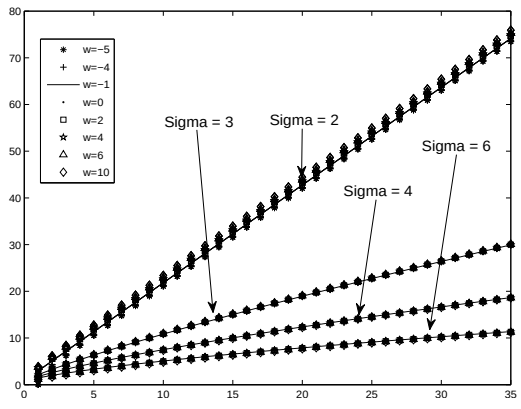


FIGURE 6.2 – $\|u_k\|_{L^2}$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 1$, $\sigma \in \{2, 3, 4, 6\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 10\}$.

Au début, on s'intéresse au cas unidimensionnel puisque comme on le verra plus tard, ce cas est assez particulier. On commence par tracer les Figures 6.1 et 6.2 les deux quantités $\|u_k\|_{L^\infty}$ et $\|u_k\|_{L^2}$ en fonction de k pour $0 \leq k \leq 35$ et différentes valeurs de σ et ω. Le long de ces calculs, le système 3.1 a été résolu sur un domaine spatial qui croît avec le nombre des nœuds (on a observé dans tous nos tests qu'un choix convenable de R dans le calcul de u_k précédemment décrit est $R_k = R_0 + k\theta$, où θ est une constante dépendant de σ et ω). Ces deux graphes montrent que ces deux quantités croissent pour n'importe quelle valeur de σ ou ω. Aussi, il est facile de remarquer dans ces deux graphes que l'influence de σ sur les solutions, est beaucoup plus grande que celle de ω surtout pour un nombre de nœuds assez grand. Finalement, notons que $\|u_k\|_{L^2}$ semble dépendre linéairement du paramètre k si $\sigma = 2$ de même pour la norme infinie si $\sigma = 0.5$.

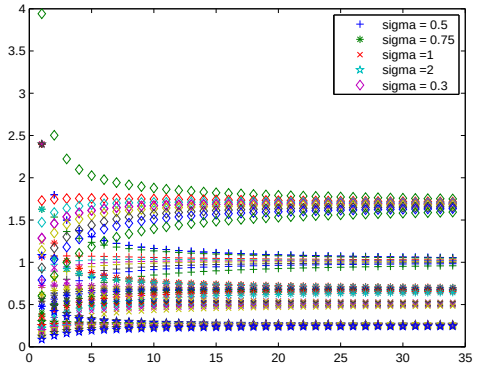


FIGURE 6.3 – La dérivée de $\log \|u_k\|_{L^\infty}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 1$, $\sigma \in \{0.3, 0.5, 0.75, 1, 2\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 10\}$.

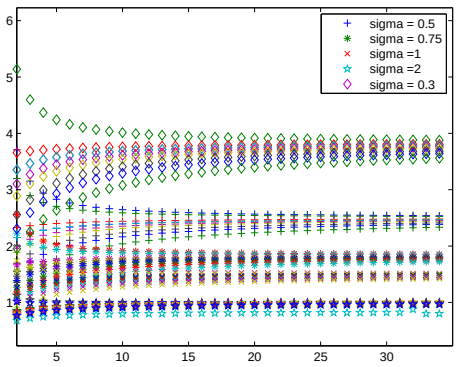


FIGURE 6.4 – La dérivée de $\log \|u_k\|_{L^2}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 1$, $\sigma \in \{0.3, 0.5, 0.75, 1, 2\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 10\}$.

Dans le but d'étudier plus précisément la dépendance de ces normes en fonction de k, on calcule aussi $\log \|u_k\|_{L^\infty}$ et $\log \|u_k\|_{L^2}$ par rapport à de $\log k$ et on trace les dérivées par rapport à k. Cela nous fournit une manière simple de déterminer un taux exponentiel d'une certaine suite f_k en fonction de k : si la pente tend vers une certaine constante, disons γ, alors f_k est régie par les asymptotiques $f_k \sim k^\gamma$. Les valeurs obtenues dans les Figures 6.3 et 6.4, et aussi dans toutes nos expérimentations, montrent que ces deux suites convergent pour n'importe quelle valeur donnée de σ ou ω. Par la suite, on peut estimer la détection de deux lois puissance qui décrivent le comportement des ces deux quantités pour des grandes valeurs de k. En outre, on voit dans ces deux graphes, et comme on l'a remarqué dans toutes nos expérimentations,

que ces limites ne dépendent pas de ω, ce qui suggère que les asymptotiques des normes L^∞ et L^2 des solutions sont régies par les même lois puissance

$$\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{\gamma(d=1,\sigma)} \ , \ \|u_k\|_{L^2} \sim k^{\theta(d=1,\sigma)}$$

Afin de déterminer le profil de γ, on calcule cette valeur limite de la dérivée quand σ varie continûment de 0 à $\sigma^* = +\infty$ et on a trouvé que γ diverge quand σ tend vers 0 et tend vers zéro quand $\sigma \to \infty$. On étudie alors $\log \gamma(1,\sigma)$ en fonction de $\log \sigma$ et on observe une pente très proche de -1 ; on pose alors

$$\gamma(1,\sigma) = \frac{C(1)}{\sigma}, \ \sigma > 0.$$

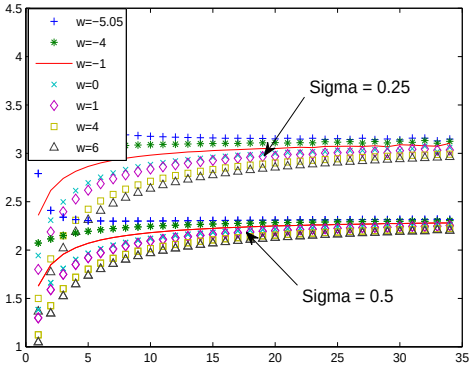


FIGURE 6.5 – La dérivée de $\log \|u_k\|_{L^\infty}$ en fonction de $\log k$ pour $d = 3$, $0 \leq k \leq 35$, $\sigma \in \{0.25, \ 0.5\}$ et $\omega \in \{-5.5, -4, -1, 0, 1, 4, 6\}$.

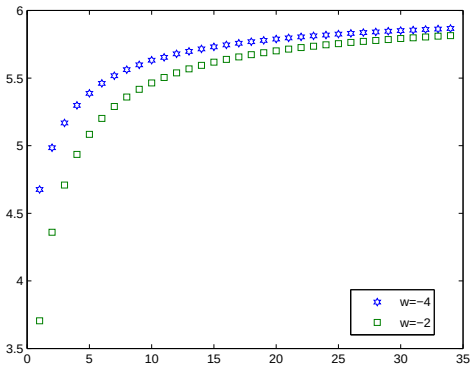


FIGURE 6.6 – La dérivée de $\log \|u_k\|_{L^2}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 4$, $\sigma = 0.25$ et $\omega \in \{-2, -4\}$.

La constante $C(1)$ est alors numériquement déterminée en comparant le profil numérique de $\gamma(1,\sigma)$ avec l'expression désirée. On a trouvé dans tous nos tests que $C(1) \simeq \frac{1}{2}$. En examinant le résultat exposé dans la Figure 6.7, on conjecture alors que dans ce cas unidimensionnel

$$\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{1/2\sigma}, \ k \to \infty, \quad d = 1 \ \ et \ \ \omega \in \mathbb{R}.$$

De même, on a étudié le comportement de $\theta(1,\sigma)$ dans $(0,\sigma^*)$, et on a remarqué qu'il tend vers $1/2$ quand $\sigma \to \infty$ et diverge quand $\sigma \to 0$, alors on étudie $\log(\theta(1,\sigma) - 1/2)$ en fonction de $\log \sigma$ et on observe une pente très proche de -1 ; on pose alors

$$\theta(1,\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{M(1)}{\sigma}, \ \sigma > 0.$$

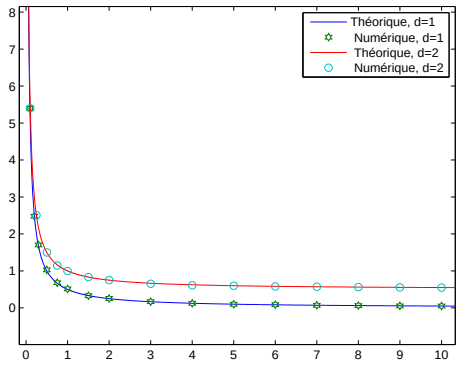


FIGURE 6.7 – Comparaison entre les valeurs numériques et théoriques possibles de $\gamma(d,\sigma)$, $\sigma \in [0,\sigma^*[$, $d=1,\,2$.

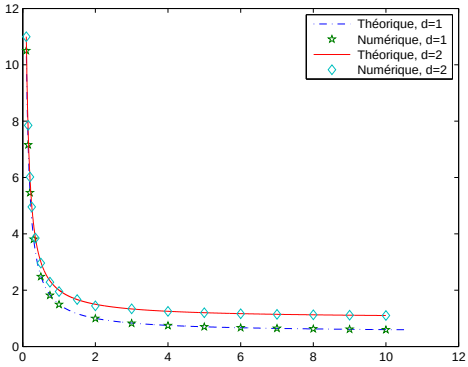


FIGURE 6.8 – Comparaison entre les valeurs numériques et théoriques possibles de $\theta(d,\sigma)$, $\sigma \in [0,\sigma^*[$, $d=1,\,2$.

Comme on a déjà fait pour la fonction $\gamma(1,\sigma)$, on déduit à partir de nos résultats la valeur de la constante $M(1)$, et on conjecture alors que

$$\|u_k\|_{L^2} \sim k^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sigma}} \; k \to \infty \quad d=1 \quad et \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

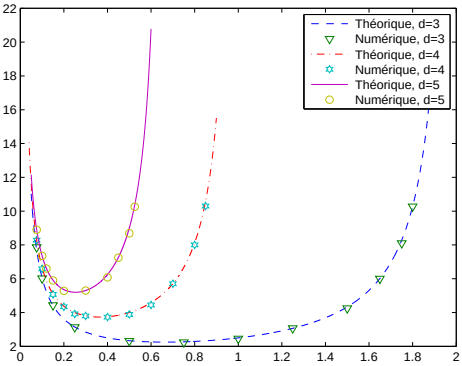


FIGURE 6.9 – Comparaison entre les valeurs numériques et théoriques possibles de $\gamma(d,\sigma)$, $\sigma \in [0,\sigma^*[$, d=3,4,5.

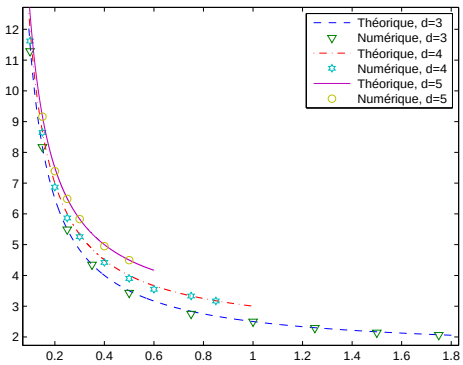


FIGURE 6.10 – Comparaison entre les valeurs numériques et théoriques possibles de $\theta(d,\sigma)$, $\sigma \in [0,\sigma^*[$, d=3,4,5.

Les mêmes calculs ont également été effectués pour des valeurs supérieures de d. D'abord, on a vérifié que les deux suites des dérivées de $\log \|u_k\|_{L^2}$ et $\log \|u_k\|_{L^\infty}$ par

rapport à $\log k$, restent convergentes pour n'importe quelles valeurs possibles de ω et σ, et vers une limite qui est toujours indépendante de w (voir Figure 6.6 et Figure 6.5). D'autre part, on a noté que la norme L^2 de la solution garde encore les mêmes asymptotiques $\|u_k\|_{L^2} \sim k^{M(d)+\frac{1}{\sigma}}$ avec $M(d) \simeq d/2$. En identifiant ces expressions avec les résultats exposés dans les Figures 6.8 et 6.10, on conjecture par la suite que

$$\|u_k\|_{L^2} \sim k^{\frac{d}{2}+\frac{1}{\sigma}} \; k \to \infty, \quad d \geq 1 \text{ et } \omega \in \mathbb{R}.$$

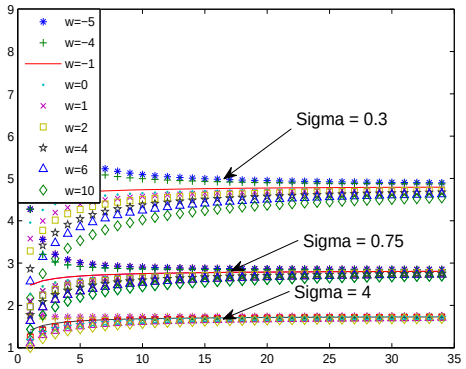


FIGURE 6.11 – La dérivée de $\log \|\nabla u_k\|_{L^2}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 1$, $\sigma \in \{0.3, 0.75, 4\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6, 10\}$.

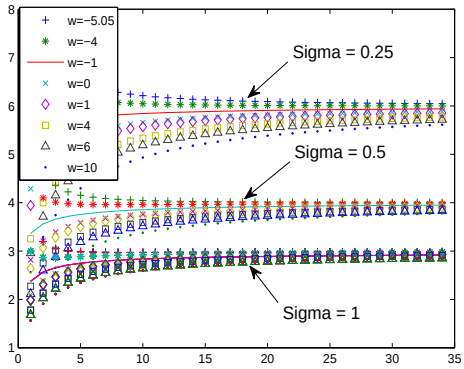


FIGURE 6.12 – La dérivée de $\log \|\nabla u_k\|_{L^2}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 2$, $\sigma \in \{0.25, 0.5, 1\}$ et $\omega \in \{-5.5, -4, -1, 0, 1, 4, 6, 10\}$.

Par la suite, on étudie le comportement de $\gamma(d, \sigma)$ pour $d \geq 2$. Au début, on remarque que si $d = 2$, $\gamma(2, \sigma)$ garde le même profil que celui du cas unidimensionnel sauf que $\gamma(2, \sigma) \to 1/2$ quand $\sigma \to \infty$. On a alors étudé $\log(\gamma(2, \sigma) - 1/2)$ en fonction de $\log \sigma$ en s'inspirant de ce qui a été fait pour $\theta(d, \sigma)$. En utilisant les résultats montrés dans la Figure 6.7 on conjecture que

$$\gamma(2, \sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sigma}.$$

Puis, on a similairement calculé les valeurs de $\gamma(d, \sigma)$ pour $d \geq 3$. Etonnamment, il s'est avéré que dans ce cas, γ diverge quand $\sigma \to \sigma^*$ et aussi quand $\sigma \to 0$. Ainsi, on a eu l'idée d'exprimer $\gamma(d, \sigma)$ sous la forme $C_1(d)/\sigma + C_2(d)/(\sigma^* - \sigma)$. Les deux constantes possibles $C_1(d)$ et $C_2(d)$ sont alors numériquement déterminées en comparant les profils numériques de $\gamma(d, \sigma)$ avec l'expression désirée. Signalons que pour les grandes valeurs de σ (c'est à dire $\sigma \to \sigma^*$) et les petites valeurs de $(\sigma \to 0)$, il devient très difficile de trouver des valeurs précises des solutions excitées puisque les valeurs à l'origine

deviennent très grandes (par exemple, pour $k = 35$, $\omega = -8$ et $d = 4$, on a trouvé $u_k(0) \approx 2.9 \times 10^{15}$). Donc, afin de trouver les valeurs limites les plus précises possibles des dérivées, on utilise une valeur précise de ω. En fait, on a observé durant nos calculs, que la convergence dans nos suites devient plus rapide si ω est égal à $-d$. Les résultats obtenus par cette méthode suggèrent que $C_1(d) \sim 1/2$ et $C_2(d) \sim 1 + \sigma^*/2$. Pour s'assurer encore que notre fonction prend la forme souhaitée, on étudie $\log(\gamma(d,\sigma) - 1/2\sigma)$ en fonction de $\log(\sigma^* - \sigma)$ et $\log(\gamma(d,\sigma) - \frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma})$ en fonction de $\log(\sigma)$ et on observe chaque fois une pente très proche de -1, ce qui confirme notre choix de la forme de cette fonction γ. Notons que cette expression a encore un sens pour $d = 2$, on a alors $\sigma^* = \infty$ ce qui implique $\gamma(d,\sigma) = 1/2 + 1/2\sigma$ ce qui a été observé ci-dessous. En examinant finalement les résultats présentés aux Figures 6.7 et 6.9 qui affichent un accord remarquable entre le γ calculé pour différents σ et d et notre expression trouvée, on conjecture que

$$\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{\frac{1}{2\sigma} + \frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma}}, \quad k \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad et \quad d \geq 2 \tag{3.1}$$

On a finalement fait les mêmes tests pour $\|\nabla(u_k)\|$ et la fonction d'énergie :

$$E(u_k) = \|\nabla(u_k)\|_{L^2}^2 + \|xu_k\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\sigma+1}\|u_k\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$$

afin de chercher encore des taux asymptotiques similaires. Le comportement de ces deux quantités apporte beaucoup à celui de $\|u_k\|_{L^2}$. En fait, nous avons obtenu que la valeur limite de la dérivée du log de ces normes, ne dépend pas de ω et diverge quand $\sigma \to 0$ (voir Figures 6.11, 6.12, 6.13 et 6.14). Les profils obtenus montrent qu'on a les asymptotiques

$$\|\nabla u_k\|_{L^2} \text{ et } \|E(u_k)\| \sim k^{1+\frac{d}{2}+\frac{1}{\sigma}}, \quad k \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad et \quad d \geq 1.$$

6.2 Les asymptotiques pour des grands exposants non linéaires : le cas $\sigma^* = \infty$

Nous nous intéressons ici au comportement asymptotique des solutions nodales u_k quand $\sigma \to \sigma^*$. Dans ce paragraphe, On va commencer par l'étude des deux premiers cas $d = 1$ et $d = 2$ puisque dans ces deux cas $\sigma^* = \infty$. Donc on essayera de calculer les états stationnaires pour des grandes valeurs de σ afin d'étudier le comportement de $\|u_k\|_{L^\infty}$, $\|u_k\|_{L^2}$, $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ quand $\sigma \to \infty$.

Nos expérimentations montrent d'abord que pour $d = 1$, la valeur de la solution à l'origine semble converger vers 1 quand $\sigma \to \infty$ indépendamment de ω et k, bien que

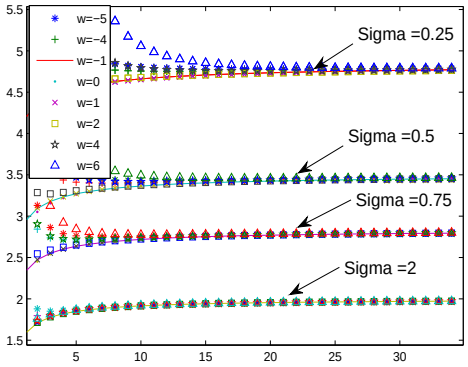


FIGURE 6.13 – Dérivée de log $E(u_k)$ en fonction de log k pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 1$, $\sigma \in \{0.25, 0.5, 0.75, 2\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6\}$.

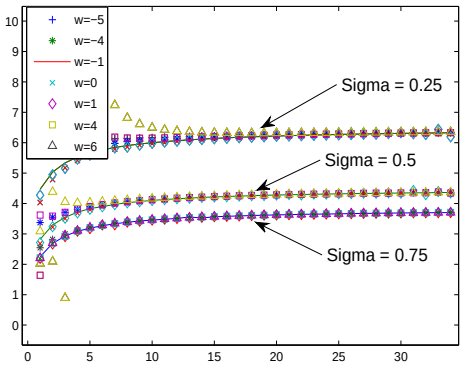


FIGURE 6.14 – Dérivée de log $E(u_k)$ en fonction de log k pour $0 \leq k \leq 35$, $d = 3$, $\sigma \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ et $\omega \in \{-5, -4, -1, 0, 1, 2, 4, 6\}$.

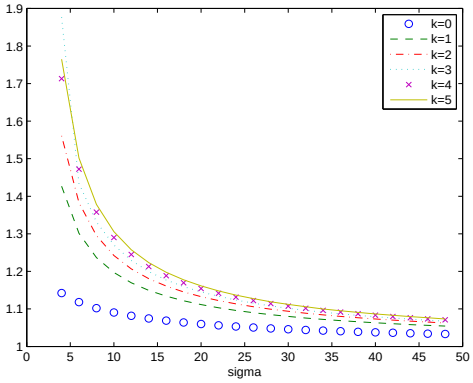


FIGURE 6.15 – Les valeurs de $|u_k(0)|$ par rapport à σ, $d = 1$, $\omega = 0$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

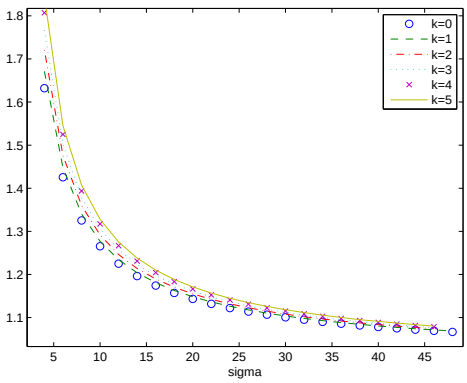


FIGURE 6.16 – les valeurs de $|u_k(0)|$ par rapport à σ, $d = 1$, $\omega = 15$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

la convergence semble être plus lente pour des grandes valeurs de ω (voir Figures 6.15 et 6.16 où cette valeur est représentée par rapport à σ pour $\omega = 0$ et $\omega = 15$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$). De plus, on a observé que $\|u_k\|_{L^\infty}$ converge aussi vers la même limite et encore indépendamment de ω et k. Or, comme on a signalé au paragraphe 6, pour le cas unidimensionnel, l'état excité possède une suite croissante d'extremas et le maximum de l'état stationnaire est atteint au dernier extremum et non à l'origine comme pour les

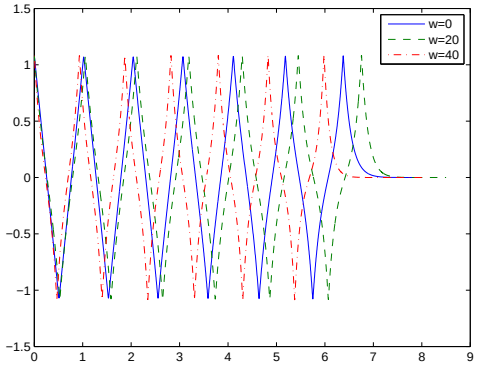


FIGURE 6.17 – Graphe de u_{12}, $\sigma = 50$, $d = 1$ et $\omega \in \{0, 20, 40\}$.

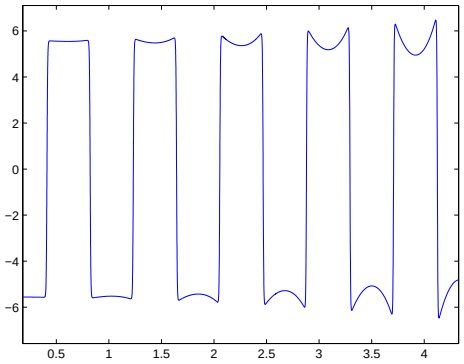


FIGURE 6.18 – Graphe de u'_{11}, $\sigma = 50$, $d = 1$ et $\omega = 15$.

autres cas. Par la suite, tous les maximums et les minimums des solutions convergent aussi de la même manière vers 1 quand $\sigma \to \infty$. De plus, les profils spatiaux de ces solutions pour des grandes valeurs de σ, semblent converger vers une fonction dérivable par morceaux et périodique (qui s'annule à l'infini). Comme on a vu dans la Figure 6.17, cette fonction limite semble dépendre légèrement de ω (voir Figure 6.17). Afin d'étudier cette fonction de plus près, on représente d'abord la dérivée de u_k et on observe une convergence vers une fonction en escalier "quasi−périodiques" quand $\sigma \to \infty$ (voir Figure 6.18). On a alors calculé la "période" de u_k (que l'on désignera par $T_\omega(k)$) pour différentes valeurs de k. Pour toute valeur fixée de ω, on a clairement observé que $T_\omega(k) \to 0$ quand $k \to \infty$. On étudie alors $\log T_\omega(k)$ en fonction de $\log k$ et on observe une pente très proche de -1 quand $k \to \infty$ ce qui suggère que

$$T_\omega(k) \sim \frac{f(\omega)}{k}, \quad k \to \infty.$$

On a aussi remarqué dans toutes nos expérimentations que f est une fonction décroissante de ω. D'autre part, on représente de manière similaire dans les Figures 6.19 et 6.20 les profils $\|u_k\|_{L^2}$ par rapport à σ et il s'avère que cette norme tend vers une certaine limite qui dépend de k et ω quand $\sigma \to \infty$. Pour chaque valeur choisie de k, cette limite est une fonction décroissante en ω. On représente aussi dans les Figures 6.21 et 6.22 les résultats obtenus pour $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$, qui gardent un comportement similaire à celui de la norme L^2, même si la valeur limite dans ce cas est une fonction croissante de ω. On peut expliquer ceci par la croissance de $\|\nabla u_k\|_{L^\infty}$ en ω, si σ est suffisamment grand, comme on l'a déjà signalé, la valeur limite de $\|u_k\|_{L^\infty}$ reste égale à 1 alors que la période $T_\omega(k)$ décroit en ω.

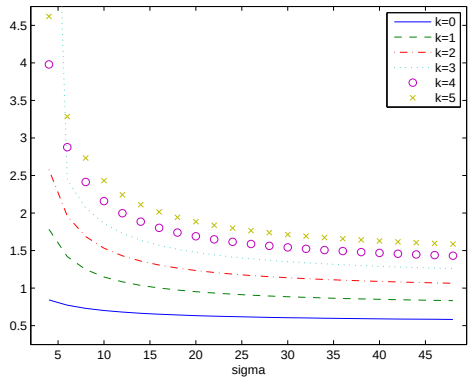


FIGURE 6.19 – les valeurs de $\|u_k\|_{L^2}$ par rapport à σ, $d = 1$, $\omega = 0$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

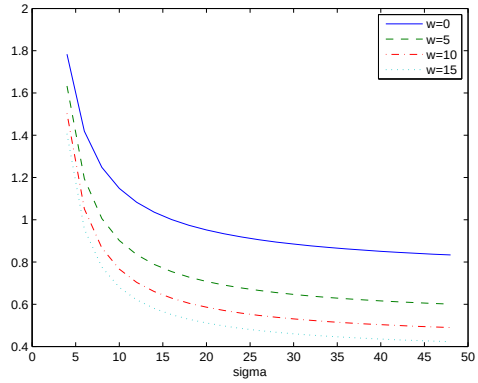


FIGURE 6.20 – les valeurs de $\|u_k\|_{L^2}$ par rapport à σ, $d = 1$, $k = 1$ et $\omega \in \{0, 5, 10, 15\}$.

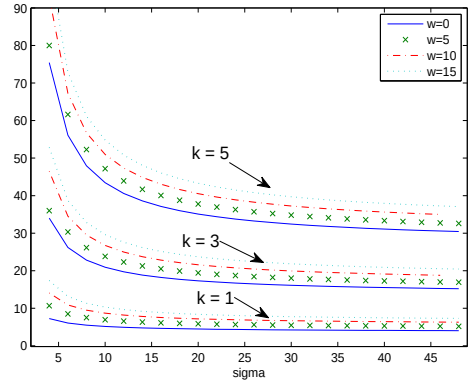


FIGURE 6.21 – les valeurs de $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ par rapport à σ, $d = 1$, $\omega \in \{0, 5, 10, 15\}$ et $k \in \{1, 3, 5\}$.

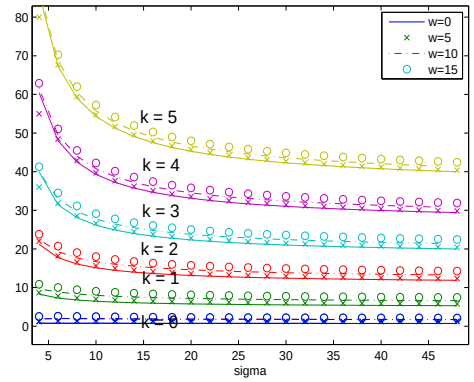


FIGURE 6.22 – les valeurs de $E(u_k)$ par rapport à σ, $d = 1$, $\omega \in \{0, 5, 10, 15\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Puis, on a effectué les mêmes expérimentations dans le cas bidimensionnel. On a signalé un comportement similaire à celui du cas $d = 1$ à l'exception de quelques changements. En fait, les valeurs de la solution à l'origine convergent aussi quand σ est grand, mais cette limite dépend maintenant du nombre de nœuds et de ω comme vu dans la Figure 6.24 où $\|u_k\|_{L^\infty}$ est représentée pour différents k et ω en fonction de σ. En outre, la représentation spatiale de u_k, pour des valeurs variées de σ suggère l'existence d'un rétrécissement autour de l'origine quand $\sigma \to \infty$, comme le montre la

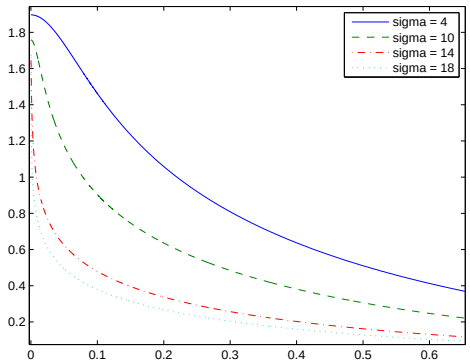


FIGURE 6.23 – Profil de $u_0(x)$: le comportement de u_0 autour de l'origine, $\sigma \in \{4, 10, 14, 18\}$, $d = 2$.

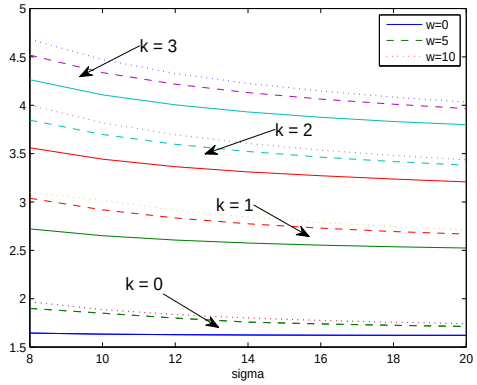


FIGURE 6.24 – les valeurs de $\|u_k\|_{L^\infty}$ par rapport à σ, $d = 2$, $\omega \in \{0, 5, 10\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

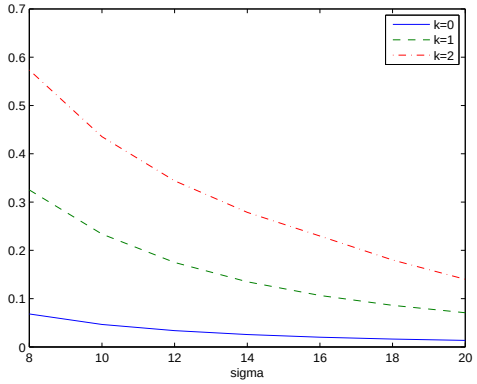


FIGURE 6.25 – les valeurs de $\|u_k\|_{L^2}$ par rapport à σ, $d = 2$, $\omega = 5$ et $k \in \{1, 2, 3\}$.

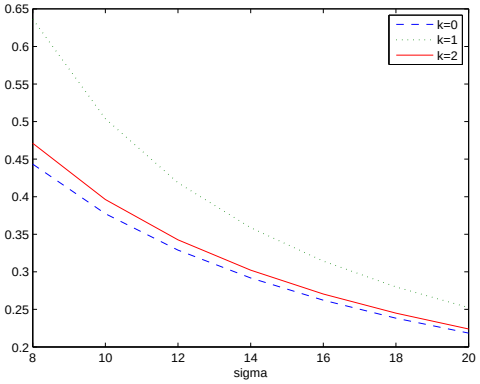


FIGURE 6.26 – les valeurs de $E(u_k)$ par rapport à σ, $d = 2$, $\omega = 0$ et $k \in \{1, 2, 3\}$.

Figure 6.23. De plus, tous les zéros de la solution tendent vers zéro quand $\sigma \to \infty$, et par la suite on ne trouve plus le profil asymptotique périodique observé dans le cas unidimensionnel. Dans ce cas (et aussi lorsque $d \geq 3$), on a utilisé un solveur différentiel sur une grille non uniforme géométriquement raffinée autour de $r = 0$ (afin d'assurer une meilleure approximation au voisinage de l'origine) ; on a posé $r_j = \lambda^j r_0$ où $\lambda > 0$ est une constante choisie dépendante de d, k et ω. Toutes les expérimentations ont été effectuées avec $1.0001 < \lambda < 1.01$ en choisissant à chaque fois λ suffisamment petit pour capturer la singularité. On représente aussi dans les Figures 6.25 et 6.26 les pro-

fils de $\|u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ par rapport à σ, on trouve que ces quantités tendent vers zéro quand σ est grand pour toutes valeurs prescrites de k et ω. On a aussi observé le même comportement pour $\|\nabla u_k\|_{L^2}$.

6.3 Les asymptotiques pour des grands exposants non linéaires : le cas $\sigma^* < \infty$

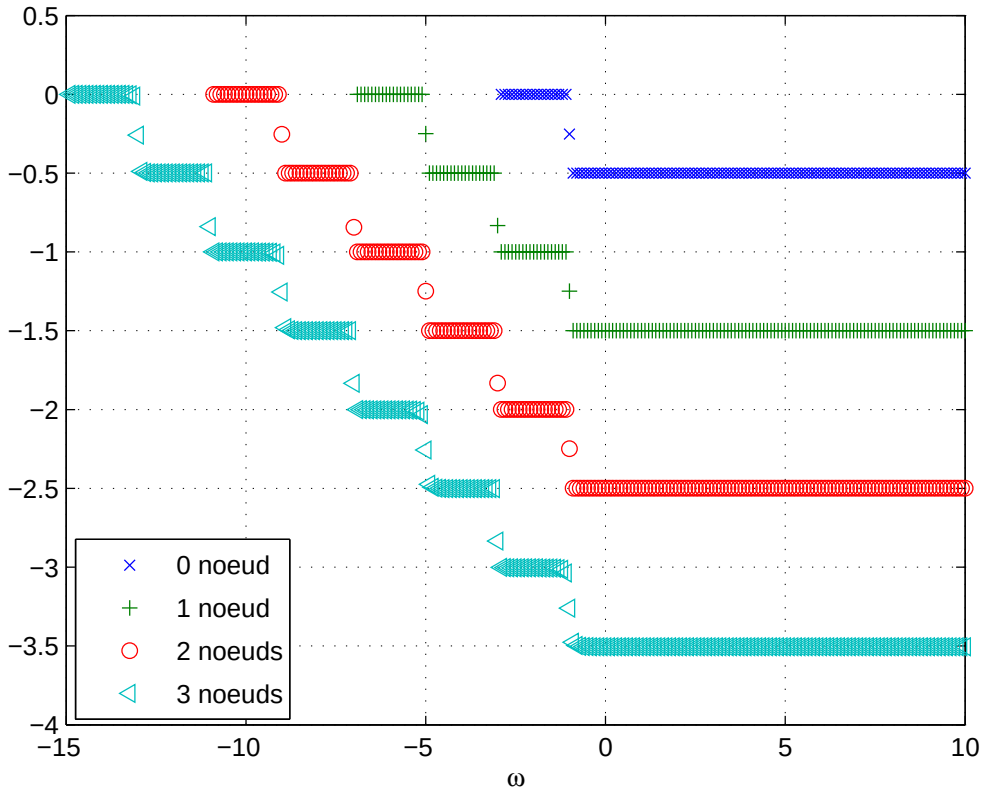


FIGURE 6.27 – Les valeurs limites des dérivées de $\log(\|u_k\|_{L^\infty})$ par rapport à $\log(\sigma^* - \sigma)$ en fonction de ω : $h_{k,d}(\omega)$, $d = 3$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

On considère maintenant le cas $d \geq 3$ pour lequel $\sigma^* < \infty$. On rappelle que dans le cas sans potentiel, on peut prouver en utilisant l' identité de Pohozaev

$$\frac{d\omega\sigma}{\sigma+1}\|\nabla u\|_2 = \frac{2-(d-2)\sigma}{\sigma+1}\|u\|_2$$

que dans le cas $\omega > 0$, les états stationnaires existent uniquement lorsque $\sigma < \sigma^*$ (voir [4]). Mais comme on l'avait remarqué dans le Chapitre 4, en conséquence de la présence du potentiel harmonique, la situation est partiellement améliorée. En effet, en utilisant la méthode introduite par Brézis et Nirenberg (voir [16] et [17]), on a prouvé l'existence de ω^* avec $0 < \omega^* < d$ tel que pour $\omega \in]-d, -\omega^*[$, l'équation (1.2) admet une solution positive dans X. De plus, d'après les résultats que nous avons établi dans le chapitre 5 (qui concernent les cas critiques et surcritiques), On sait qu'il existe des branches globales d'états excités u_k, $(k \geq 1)$ à chaque valeur propre ω_n. Notons que lors du calcul numérique de ces branches bifurquées dans le chapitre précédent, on a discuté le phénomène d'existence de la fréquence ω_{max}^k qui définit l'intervalle d'existence maximale de chaque solution u_k. En particulier, on a remarqué l'importance de la dimension particulière $2 + 2\sqrt{2}$ dans ce phénomène. Néanmoins, comme on a observé que pour presque toutes les valeurs de ω, la valeur de la solution à l'origine devient très grande quand $\sigma \to \sigma^*$, il était très difficile de vérifier directement l'existence de n'importe quel u_k si $\sigma = \sigma^*$. En plus, il est possible que des solutions existent sans qu'il appartiennent à la branche de bifurcation. Ainsi, on procèdera à une deuxième stratégie pour trouver à la fois les valeurs de ω pour lesquelles les solitons existent encore dans le cas critique, et un taux possible d'explosion de $u_k(0) = \|u_k\|_{L^\infty}$ en terme de $(\sigma^* - \sigma)$ dans le cas de non−existence. En fait, pour une valeur prescrite de d et ω, en utilisant l'algorithme du tir, on calcule les états excités u_k pour des valeurs variées de σ choisi tendant vers σ^* et on calcule la dérivée de $\log \|u_k\|_{L^\infty}$ en fonction de $\log (\sigma^* - \sigma)$. Puis, on s'intéresse au comportement limite de cette suite quand $\sigma \to \sigma^*$. Dans tous les tests numériques, nous avons trouvé que cette suite converge toujours vers une valeur limite finie qui dépend de ω : c'est la propriété clé de cette suite (ce n'était pas vrai quand on n'a pas utilisé la fonction log). Alors, si la valeur limite est positive ou nulle, on déduit que $u_k(0)$ converge vers une certaine limite $u_k^*(0)$. Sinon, on conclut que $u_k(0) \to \infty$ ce qui suggère que u_k n'existe pas dans ce cas. Le taux d'explosion de cette quantité en tant que fonction de $(\sigma^* - \sigma)$ est alors déterminé. Ainsi, on réduit les valeurs possibles de ω à celles donnant seulement une limite positive. Puis, on utilise un algorithme similaire à celui appliqué au cas sous-critique et avec une donnée initiale proche de $u_k^*(0)$ afin de vérifier que (u_k) existe et possède des propriétés de décroissance à l'infini. En efet, comme on l' a expliqué dans le chapitre précédent, l'hypothèse $\sigma < \sigma^*$ du Théorème 4.1.1, était utilisée pour s'assurer que l'ensemble A_k est encore toujours majoré même si $k \to \infty$ et ainsi on prouve l'existence pour n'importe quel état excité, mais les résultats donnés aux lemmes 4.2.2 les 4.2.3 restent vrais si $\sigma \geq \sigma^*$ et on doit seulement vérifier que A_k est localement borné, ceci est équivalent à vérifier que la solution changera le nombre de nœuds à un moment donné pour une condition initiale β quelconque, même s'il ne s'agit pas de la borne supérieure de A_k. Plus précisément, si on vérifie (en utilisant $u_k^*(0)$) qu'il existe un sous-ensemble non vide et borné de A_k :A_k' comme au théorème 4.3.1, alors $u(r, \sup\{A_k'\})$ est une solution de (3.1) qui admet k nœuds et tend exponentiellement vers zéro quand $r \to \infty$.

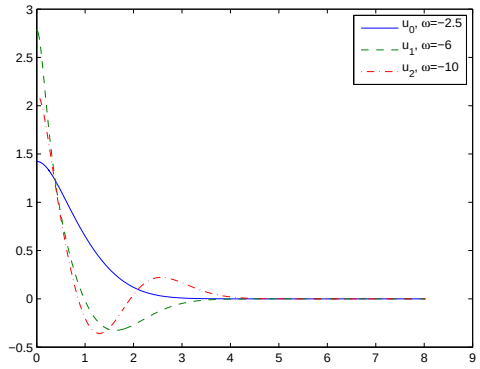


FIGURE 6.28 – courbes de u_k dans le cas critique, $-(4k+d) < \omega < \omega_k^*$, $d = 3$, $\omega = \sigma^* = 2$ et $k \in \{0, 1, 2\}$.

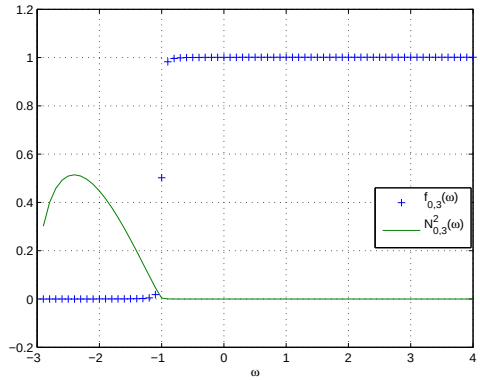


FIGURE 6.29 – courbes de $N_{k,d}^2$ et $f_{k,d}$ par rapport à ω, $k = 0$, $d = 3$.

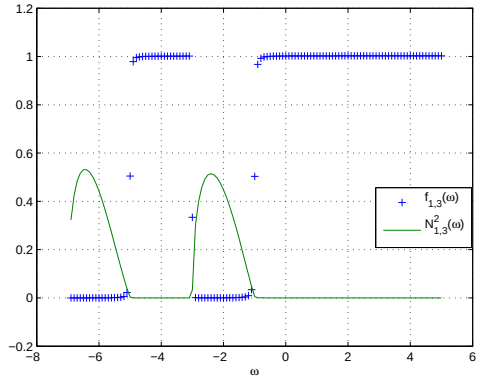


FIGURE 6.30 – courbes de $N_{k,d}^2$ et $f_{k,d}$ par rapport à ω, $k = 1$, $d = 3$.

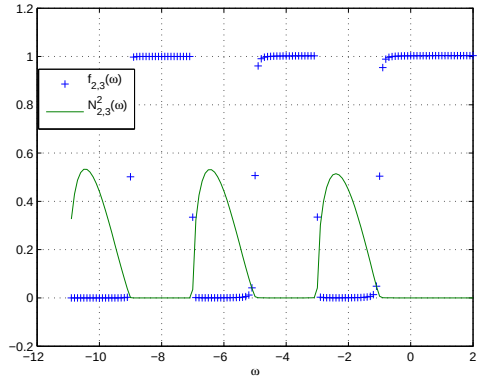


FIGURE 6.31 – courbes de $N_{k,d}^2$ et $f_{k,d}$ par rapport à ω, $k = 2$, $d = 3$.

Par cette méthode, on commence d'abord l'étude du cas $d = 3$ en représentant dans la Figure 6.27 la limite quand $\sigma \to \sigma^* = 2$ de la dérivée de $\log \|u_k\|_{L^\infty}$ dépendant de $\log(\sigma^* - \sigma)$, en fonction de ω, lorsque ω varie entre les valeurs possibles obtenues au paragraphe 2, à savoir $\omega > \omega_k - (4k+d)$. Dorénavant, cette fonction sera notée $h_{k,d}(\omega)$ et satisfait lorsque $\sigma \to \sigma^*$

$$u_k(0) = \|u_k\|_{L^\infty} \sim (\sigma^* - \sigma)^{h_{k,d}(\omega)}, \quad d \geq 3, \quad \omega \in]\omega_k, +\infty[.$$

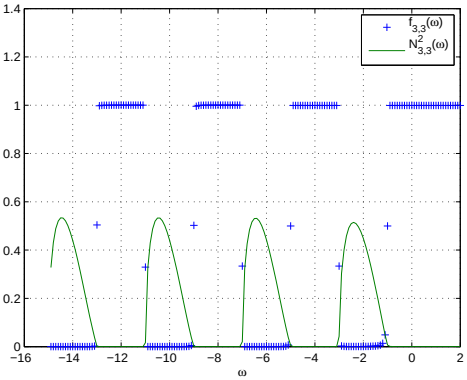


FIGURE 6.32 – courbes de $N^2_{k,d}$ et $f_{k,d}$ par rapport à ω, $k = 3$, $d = 3$.

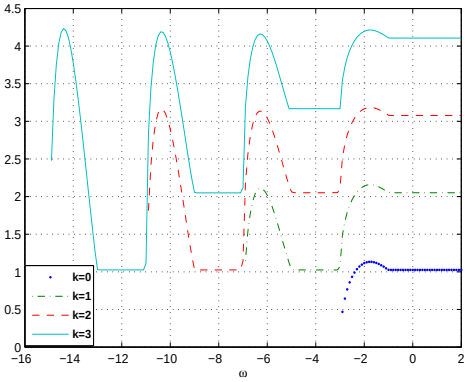


FIGURE 6.33 – les valeurs limites de $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ quand $\sigma \to \sigma^* = 2$: $g_{k,3}$ par rapport à ω, $d = 3$, et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

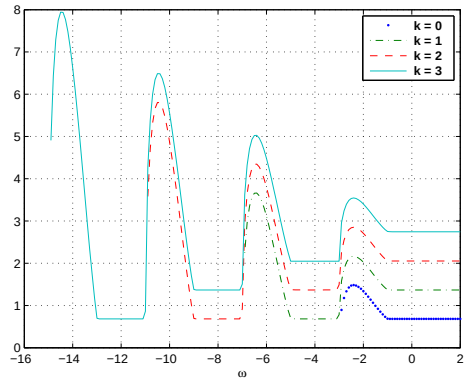


FIGURE 6.34 – les valeurs limites de $E(u_k)$ quand $\sigma \to \sigma^* = 2$: $e_{k,3}$ par rapport à ω, $d = 3$, et $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

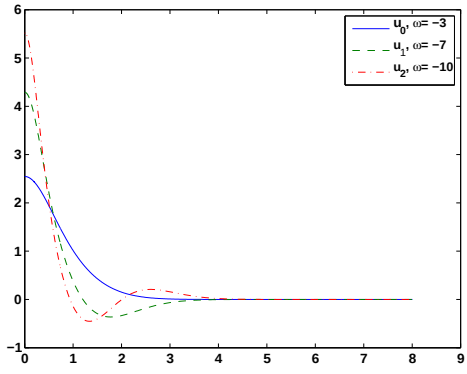


FIGURE 6.35 – courbes de u_k dans le cas critique, $-(4k + d) < \omega < \omega^*_k$, $d = 4$, $\omega = \sigma^* = 2$ et $k \in \{0, 1, 2\}$.

Puis, on vérifie que cette limite est positive seulement quand

$$\omega_k < \omega < \omega^k_{max,d=3} = -(4k + 1), \ d = 3, \ k \geq 1.$$

Ensuite, on utilise la méthode de tir comme précédemment pour assurer l'existence de la solution u_k, à l'aide de la valeur limite $u^*_k(0)$. Finalement, on a conclu que dans le cas critique, u_k existe lorsque $d = 3$ et $\omega_k < \omega < \omega^k_{max,3}$. Remarquons que ce résultat généralise celui obtenu théoriquement dans le chapitre 3 lors de l'étude de la première

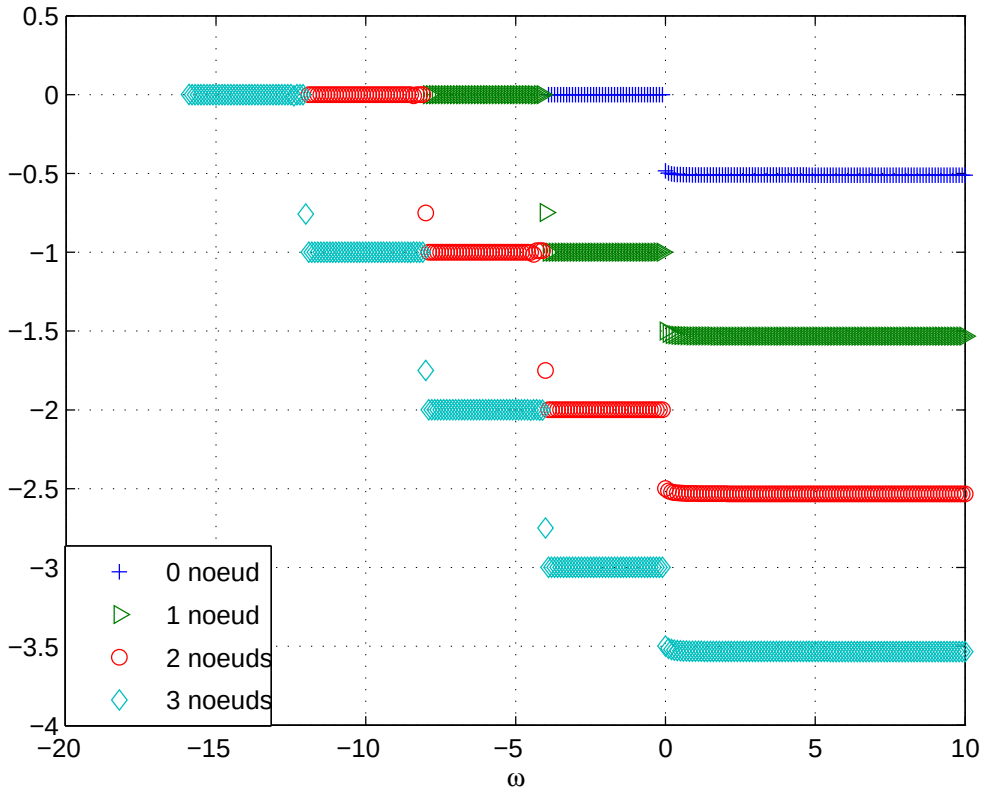


FIGURE 6.36 – Les valeurs limites des dérivées de $\log(\|u_k\|_{L^\infty})$ dépendant de $\log(\sigma^* - \sigma)$ en fonction de ω, $d = 4$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

branche bifurquée C_0 par la méthode de Brézis−Nirenberg. En particuler, on note que le résultat de non−existence du Théorème 2.3.1 peut être généralisé pour toutes les fréquences $-3 < \omega \leq -1$ bien qu'aucun résultat théorique ne le confirme.
On représente dans la Figure 6.28 les profils de u_1, u_2, et u_3 avec des valeurs variées du paramètre ω comme précédemment. De plus, on peut remarquer dans la Figure 6.27 que si $\omega \geq \omega_k^*$ alors $\|u_k\|_{L^\infty} \to \infty$ quand $\sigma \to \sigma^*$ et que la taux de divergence dépend à la fois du nombre des nœuds k et de ω. Il semble aussi que des valeurs grandes de k et ω donnent une tendance plus forte à la divergence. De plus, on voit que $h_{k,d}(\omega)$ révèle une fonction discontinue de ω en prenant des valeurs isolées pour chaque $\omega := -(2n+1)$, $n \geq 0$. Plus précisément, on a déduit à travers tous nos tests que l'on peut aboutir à la formule générale suivante :

$$h_{k,3}(-(2n+1)) = \frac{2n-1}{4} - k, \quad n \geq 0, \quad k \geq 0.$$

On a aussi remarqué que $h_{k,3}$ est une fonction en escalier puisqu'elle reste constante sur les intervalles $I_n :=]-(2(n+1)+1)\ ,\ -(2n+1)[$. Toutes nos expérimentations suggèrent que

$$\forall\, \omega \in I_n,\ h_{k,3}(\omega) = \frac{n}{2} - k, \quad k \geq 0 \text{ et } n \geq 0.$$

Ainsi, on obtient l'identité

$$h_{k+1,3}(\omega) = h_{k,3}(\omega) - 1. \tag{3.2}$$

Finalement, signalons que si $\omega > -1$, alors $h_{k,3}(\omega) = -\frac{1}{2} - k$ comme vu dans le cas sans potentiel (NLS) pour les fréquences $\omega > 0$ (voir [4]).
De même, on a étudié le comportement de $\|u_k\|_{L^2}$ quand $\sigma \to \sigma^*$. On a observé que cette quantité converge pour toutes les valeurs possibles ω vers une certaine limite dépendant de ω que l'on notera par $N^2_{k,d=3}(\omega)$. Afin d'étudier plus précisément cette limite et le taux de convergence considéré en fonction de $\sigma^* - \sigma$, ω et k, on a aussi calculé la limite quand $\sigma \to \sigma^* = 2$, de la dérivée de log $\|u_k\|_{L^2}$ dépendant de log $(\sigma^* - \sigma)$, que l'on notera par $f_{k,d=3}(\omega)$. Quand $\sigma \to \sigma^*$, notre recherche numérique a montré que

$$\|u_k\|_{L^2} \to N^2_{k,3}(\omega) \sim (\sigma^* - \sigma)^{f_{k,3}(\omega)},\ \sigma \to \sigma^*,\ d = 3,\ \omega \in \mathbb{R}.$$

On représente dans les Figures 6.29, 6.30, 6.31 et 6.32 ces deux fonctions calculées avec $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$. On voit alors que $f_{k,3}$ et $N^2_{k,3}$ gardent exactement le même profil et les mêmes valeurs indépendamment de k. Plus précisément, ces deux identités sont satisfaites numériquement :

$$f_{k+n,3}(\omega) = f_{k,3}(\omega),\ \forall\, n,\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

$$N^2_{k+n,3}(\omega) = N^2_{k,3}(\omega),\ \forall\, n,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

De plus, le taux $f_{k,3}(\omega)$ numériquement déterminé semble s'accorder avec le taux explicite donné par

$$\begin{cases} f_{k,3}(\omega) = 1, & \text{si} \quad \omega \in]-1, +\infty[\text{ ou } \omega \in I_n, \text{ avec } n \text{ impair} \\ f_{k,3}(\omega) = 0, & \text{si} \quad \omega \in I_n, \text{ avec } n \text{ pair} \\ f_{k,3}(-(2n+1)) = 1/3, & \text{si} \quad n \text{ impair} \\ f_{k,3}(-(2n+1)) = 1/2, & \text{si} \quad n \text{ pair}\ . \end{cases} \tag{3.5}$$

De plus, on a vérifié dans toutes nos expérimentations que $N^2_{k,3}$ possède un profil périodique pour les valeurs négatives de ω et on peut écrire dans le cas général que

$$N^2_{k,3}(\omega) = N^2_{k,3}(\omega - 4),\ \forall\, \omega \leq -1 \text{ et } (\omega - 4) \geq -(4k+3).$$

TABLE 6.1 – $h_{0,d}(\omega > 0)$

d	4	5	6	7	8	9	10
$h^+_{0,d}$	-0.52	-0748	-0.997	-1.2497	-1.4994	-1.7484	-1.9985

Finalement, on a appliqué la même méthode pour étudier le comportement de $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$. On conclut que ces deux quantités convergent vers des limites finies qui dépendent de ω quand $\sigma \to \sigma^* = 2$, alors on définit $g_{k,3}(\omega) = \lim_{\sigma\to\sigma^*} \|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $e_{k,3}(\omega) = \lim_{\sigma\to\sigma^*} E(u_k)$ pour $d = 3$ et $k \geq 0$. Il apparaît que $g_{k,3}$ et $e_{k,3}$ sont des fonctions linéaires de k pour toute valeur prescrite de ω, comme le montre les Figures 6.33 et 6.34. On a de même remarqué dans toutes nos expérimentations que $g_{k,3}$ et $e_{k,3}$ restent constants si $\omega \in I_n$ avec n impair ou $\omega \geq -1$. On a aussi conjecturé les valeurs asymptotiques de ces deux fonctions quand $k \to +\infty$ ou $\omega \to -\infty$ en utilisant seulement les résultats obtenus pour de petites valeurs de k et ω. En fait, nos résultats suggèrent que l'on peut avoir dans le cas général

$$\begin{cases} g_{k,3}(\omega) \approx & k+1, & \forall\, \omega \geq -1,\ \forall\, k \geq 0 \\ g_{k,3}(\omega) \approx & k-(n-1)/2, & \forall\, \omega \in I_n,\ \text{ avec } n \text{ impair },\ \forall\, k \geq 0 \\ g_{k+1,3}(\omega) \approx & g_{k,3}(\omega)+1, & \forall\, \omega > -(4k+d),\ \forall\, k \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

et

$$\begin{cases} e_{k,3}(\omega) \approx & (2/3)(k+1), & \forall\, \omega \geq -1,\ \forall\, k \geq 0 \\ e_{k,3}(\omega) \approx & (2/3)(k-(n-1)/2), & \forall\, \omega \in I_n,\ \text{ avec } n \text{ impair },\ \forall\, k \geq 0 \\ e_{k+1,3}(\omega) \approx & e_{k,3}(\omega)+2/3, & \forall\, \omega > -(4k+d),\ \forall\, k \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Les mêmes calculs ont été faits pour des valeurs supérieures de d. Ils ont montré que si $d \geq 4$ alors on a beacoups moins de valeurs de ω pour les quelles on peut pas calculer les états stationnaires localisés u_k dans ce cas critique. En effet, comme le montrent les Figures 6.36, 6.37 et 6.38 pour toutes les valeurs négatives de ω sauf pour les valeurs $\{\omega_k := -(4k+d),\ k \geq 0\}$ quand $d = 4$, il était possible de calculer un état excité avec k nœuds si $\omega_k < \omega < \omega_{k-1}$. Ceci confirme encore les résultats que l'on a obtenus numériquement en calculant les branches C_k dans ce cas critique. En particuler, il y a une différence capitale entre le cas $d = 4$ et $d = 5, 6$: les courbes de bifucations C_k traverse la valeur propre ω_{k-1} quand $d \geq 5$ (précisément $d > 2+2\sqrt{2}$. En fait, la valeur limite de la dérivée de $\log(\|u_k\|_{L^\infty})$ par rapport à $\log(\sigma^* - \sigma)$ (encore notée $h_{k,d}(\omega)$), était positive pour toutes ces valeurs de ω. Il est donc prévu que dans le cas critique $\sigma = \sigma^*$, pour tout $d \geq 4$ l'état fondamental u_0 existe quand $-d < \omega < \omega^*_{0,d} = 0$, et n'importe quel état excité u_k $(k \geq 1)$ peut être déterminé quand $\omega_k < \omega < \omega^k_{max,d}$ avec

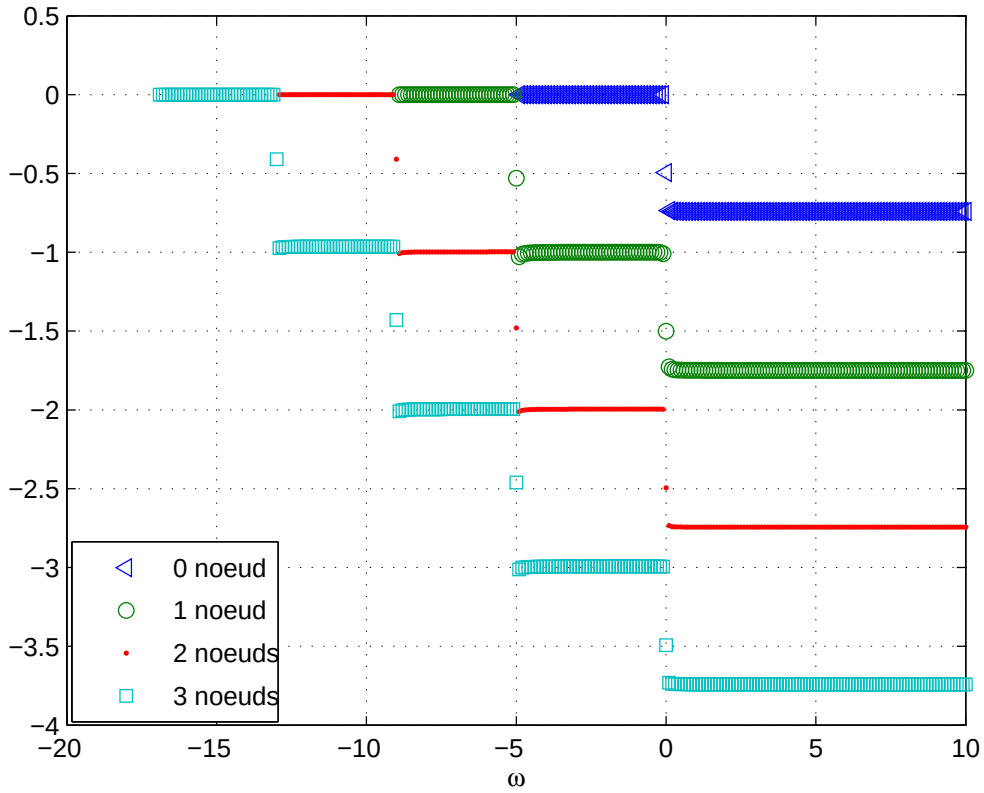


FIGURE 6.37 – Les valeurs limites des dérivées de $\log(\|u_k\|_{L^\infty})$ par rapport à $\log(\sigma^* - \sigma)$ en fonction de ω, $d = 5$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\omega^k_{max,d} = \omega_{k-1} \text{ si } d = 4$$
$$\omega^k_{max,d} > \omega_{k-1} \text{ si } d \geq 5.$$

De plus, dans le cas $d = 5$, la Figure 6.37 indique le taux de divergence $\|u_k\|_{L^\infty} \sim (\sigma^* - \sigma)^{-\frac{1}{2}}$ quand $\omega \to \omega_{k-1}$. En effet, on a noté dans le chapitre (6) que la courbe bifurquée C_k tourne autour de ω_{k-1} avant de diverger quand $\omega \to \omega_{k-1}$ (voir la Figure 5.14 dans le chapitre 6). On remarque que ce résultat est similaire à celui obtenu dans [37] et [38] dans le cas de l'équation de Brézis−Niremberg (2.1).

D'autre part, les résultats obtenus indiquent que $h_{k,d}(\omega)$ est toujours une fonction en escalier et que quelques formules trouvées dans le cas tri-dimensionnel restent valables dans le cas général

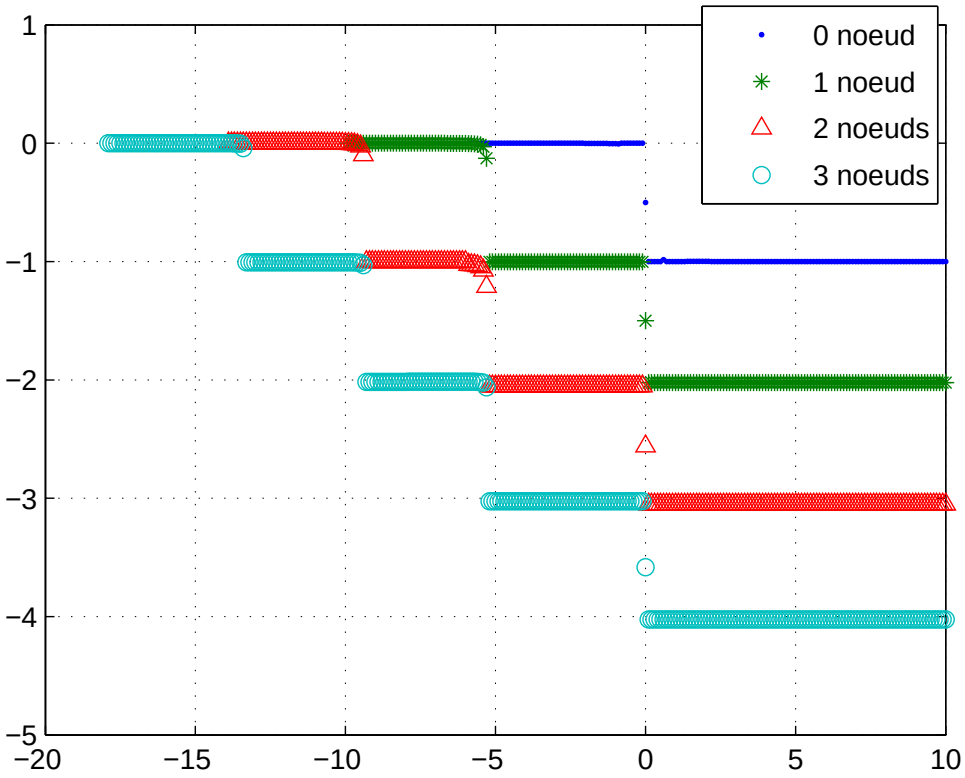


FIGURE 6.38 – Les valeurs limites des dérivées de $\log(\|u_k\|_{L^\infty})$ par rapport à $\log(\sigma^* - \sigma)$ en fonction de ω, $d = 6$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

par exemple, La valeur de $h_{k,d}(\omega)$ reste constante si $\omega > 0$, (cette constante sera désignée par $h^+_{k,d}$) mais le profil $-1/2 - k$ n'est plus valable quand $d \geq 5$, puisqu'on voit dans les Figure 6.37 et 6.38 que $h_{k,5}(\omega) = -3/4 - k$ et $h_{k,6}(\omega) = -1 - k$, $\forall\, k > 0$ bien qu'il reste valable si $\omega = 0$ ou $d = 4$. On présente dans le Tableau 6.1 les valeurs calculées de $h^+_{k,d}$ pour $4 \geq d \geq 10$. Ce résultat suggère que l'on peut écrire dans le cas général

$$h^+_{k,d} = -\frac{d-2}{4} - k, \quad \forall\, d \geq 4, \quad \forall\, k \geq 0. \tag{3.8}$$

En outre, si on désigne par $j_{k,d}$ l'intevalle $]\omega_k, \omega^k_{max,d}[$, alors on peut aboutir à cette expression générale :

$$h_{k,d}(\omega) = k - n \quad \forall\, d \geq 4,\ k \geq 0,\ \text{et}\ \omega \in j_{k,d}. \tag{3.9}$$

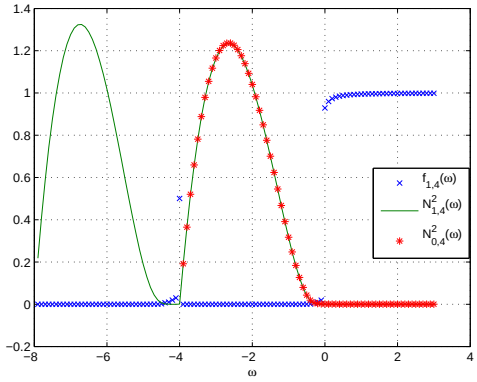


FIGURE 6.39 – graphes de $N^2_{k,d}$ et $f_{k,d}$ par rapport à ω, $k \in \{0,1\}$ et $d = 4$.

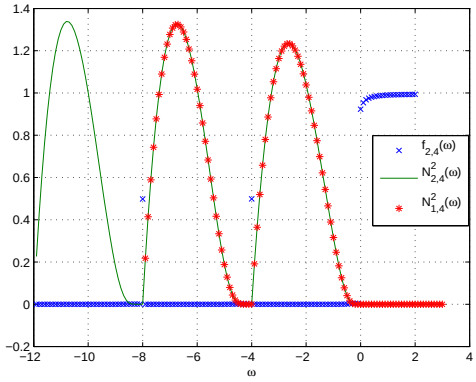


FIGURE 6.40 – graphes de $N^2_{k,d}$ et $f_{k,d}$ par rapport à ω, $k \in \{1,2\}$ et $d = 4$.

Notons aussi que $h_{k,d}$ prend toujours des valeurs spécifiques quand $\omega = \omega^n_{max,d}$; en particulier on a observé que

$$h_{k,d}(\omega^n_{max,d}) = -(3/4 + k - n - 1),\ \forall\, k \geq n+1,\ \text{si } d = 4$$

$$h_{k,d}(\omega^n_{max,d}) = -(1/2 + k - n - 1),\ \forall\, k \geq n+1,\ \text{si } d = 5.$$

Nos tests ont montré que $\|u_k\|_{L^2}$, $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ ont un comportement similaire à celui trouvé dans le cas tridimensionnel sauf pour les changements dus au changement de la structure de $\omega^k_{max,d}$, notamment, tout intervalle I_k avec n impair, défini si $d = 3$, est maintenant remplacé par le seul point $\omega^n_{max,d}$. En fait les graphes de $f_{k,d}$ et $N^2_{k,d}$ montrent que les valeurs prises par ces deux fonctions restent indépendantes de k (voir Figures 6.39 et 6.40). Par conséquent, les deux identités (3.3) et (3.4) ont lieu pour tout $d \in \{3,4,5\}$. On a aussi noté que les valeurs calculées de $f_{k,d}$ et $N^2_{k,d}$ pour des valeurs positives de ω et $\omega^k_{max,d}$, $k \geq 1$ et $d \in \{4,5\}$ sont égales à celles obtenues précédemment pour $d = 3$. On conjecture alors que

$$f_{k,d}(\omega) = 1,\ \forall\, \omega > 0\ \ \forall\, d \in \{3,4,5\}. \tag{3.10}$$

$$f_{k,d}(\omega^n_{max,d}) = 1/2,\quad \forall\, n \geq 1,\quad \forall\, k \geq 1\ \ \forall\, d \in \{3,4,5\}. \tag{3.11}$$

Puis, on représente dans les Figures 6.41 et 6.42 les profils de $g_{k,4}$ et $g_{k,5}$ pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, rappelant que à chaque valeur de ω, $g_{k,d}(\omega)$ est obtenue comme une limite numériquement calculée de $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ quand σ tend vers σ^*. De même, on représente dans les Figures 6.43 et 6.44 les profils de $e_{k,4}$ et $e_{k,5}$ pour les mêmes valeurs de k qui apparaissent comme deux fonctions linéaires de k pour toute valeur

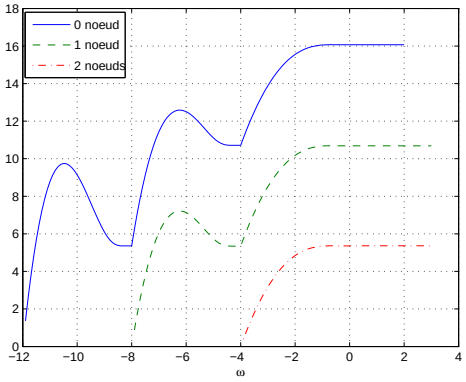


FIGURE 6.41 – valeurs limites de $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ quand $\sigma \to \sigma^* = 1$: $g_{k,4}$ par rapport à ω, $d = 4$, et $k \in \{0, 1, 2\}$.

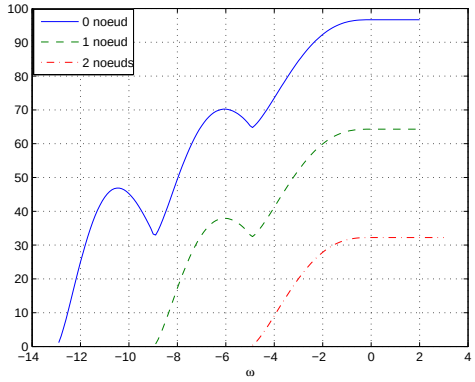


FIGURE 6.42 – valeurs limites de $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ quand $\sigma \to \sigma^* = 1$: $g_{k,5}$ par rapport à ω, $d = 5$, et $k \in \{0, 1, 2\}$.

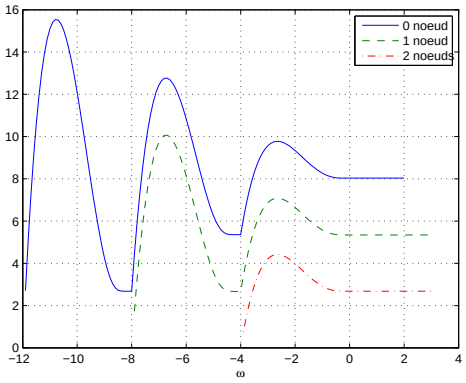


FIGURE 6.43 – valeurs limites de $E(u_k)$ quand $\sigma \to \sigma^* = 1$: $e_{k,4}$ par rapport à ω, $d = 4$, et $k \in \{0, 1, 2\}$.

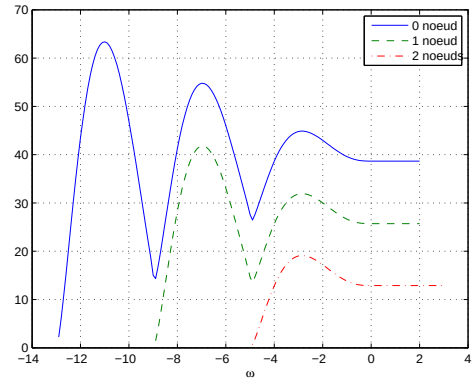


FIGURE 6.44 – valeurs limites de $E(u_k)$ quand $\sigma \to \sigma^* = 2/3$: $e_{k,5}$ par rapport à ω, $d = 5$, et $k \in \{0, 1, 2\}$.

prescrite de ω (ce même comportement à été observé dans le cas de l'équation (1.3) dans[4]). De plus, on a toujours trouvé qu'à chaque valeur fixée de k, $g_{k,d}$ et $e_{k,d}$ ne dépendent pas de ω dans $[0, +\infty[$ et sont toutes les deux constantes qui croissent exponentiellement en fonction de d (et linéairement en fonction de k). Par la suite, on désignera respectivement par

$$g^+_{k,4} = g_{k,4}(\omega > 0)$$

TABLE 6.2 – Comparaison entre les estimations numérique et théorique possible de $g_{0,d}(w)$ et $e_{0,d}(w)$ si $\omega > 0$

(a) $g^+_{0,d}$

d	Théorique	Numérique
4	5.333	5.355
5	32	32.209
6	224	230.745
7	1792	1901.5
8	16128	19018
9	161280	210100

(b) $e^+_{0,d}$

d	Théorique	Numérique
4	2.666	2.677
5	12.8000	12.88
6	74.666	76.91
7	512	557.589.7
8	4032	4754.5
9	35840	46689

et

$$e^+_{k,4} = e_{k,4}(\omega > 0).$$

En cherchant une approximation de $e^+_{k,4}$, on a calculé $e^+_{0,d}$ pour des valeurs supérieures de d. On a alors trouvé que

$$g^+_{0,d+1}/g^+_{0,d} \approx d + 2, \quad \forall\, d \geq 4. \tag{3.12}$$

Par conséquent, on obtient

$$g^+_{0,d} \approx (d+1)(d)...(7)(6)g^+_{0,4}, \quad \forall\, d \geq 5.$$

En outre, en utilisant la valeur calculée de $g^+_{0,4}$ qui ressemble de proche à 16/3, et le comportement linéaire observé dans toutes nos expérimentations et même dans le cas de puissance pure (voir [4]), on déduit l'estimation théorique possible suivante de $g^+_{k,d}$ qui est confirmée par les résultats représentés dans le Tableau 9.1(a) :

$$g^+_{k,d} \approx (k+1)\frac{(d+1)!}{5!}\frac{16}{3}, \quad \forall\, d \geq 4, \quad \forall\, k \geq 0. \tag{3.13}$$

De plus, comme le montrent les Figures 6.41 et 6.42, on a remarqué à travers toutes nos expérimentations que $g^+_{0,d}$ n'est pas atteint seulement sur les valeurs positives de ω mais aussi sur les valeurs particulières $\omega : \omega^k_{max,d}$ et nos résultats suggèrent qu'on a

$$g_{k,d}(\omega^n_{max,d}) \approx (k+1-n)g^+_{0,d} = g^+_{k-n,d} \quad \forall\, d \in \{4,5\} \quad \forall\, k, n \geq 0 \quad \text{et} \quad k \geq n. \tag{3.14}$$

Ensuite, en cherchant une estimation de $e^+_{0,d}$, on a calculé $e^+_{0,d}$ pour $1 \leq d \leq 9$ et observé qu'on a toujours

$$\frac{g_{0,d}+}{e^+_{0,d}} = \frac{d}{2}.$$

Ainsi, en utilisant (3.16) et en examinant les résultats présentés dans le Tableau 9.1(b), on conjecture alors que

$$e^+_{k,d} \approx (k+1)\frac{2}{d}\frac{(d+1)!}{5!}\frac{16}{3}, \quad \forall\, d \geq 4, \quad \forall\, k \geq 0. \tag{3.15}$$

Notons finalement qu'on s'est rendu compte que quand $d \in \{4,5\}$ $e^+_{0,d}$ est aussi atteint en $\omega^k_{max,d}$ comme suit

$$e_{k,d}(\omega^n_{max,d}) \approx (k+1-n)e^+_{0,d} = e^+_{k-n,d} \quad \forall\, d \in \{4,5\}, \quad \forall\, k,n \geq 0 \quad \text{et} \quad k \geq n. \tag{3.16}$$

Signalons que les Tableaux 9.1(a) et 9.1(b) montrent un accord meilleur entre les valeurs calculées de $g^+_{0,d}$ et $e^+_{0,d}$ pour des valeurs plus petites de d. Cependant, le calcul avait été effectué avec $10^{-7} \leq \epsilon = \sigma^* - \sigma \leq 10^{-4}$. Pour les grandes valeurs de d ($d \geq 7$), les valeurs limites des différentes quantités ne peuvent pas être calculées avec précision (on devrait calculer ces valeurs avec un ϵ plus petit) afin de voir les résultats numériques converger vers les expressions données.

6.4 Récapitulatif des principaux résultats

Récapitulons à présent les principaux résultats que nous avons obtenu de ce chapitre.

1. **Les asymptotiques pour les grandes valeurs de** k : les comportements de $\|u_k\|_{L^\infty}$, $\|u_k\|_{L^2}$, $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ pour des grandes valeurs de k sont décrits par les lois puissances suivantes :

   • $\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{\gamma(d,\sigma)}$, $k \to \infty$, $d \geq 1$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$, avec :

   $$\begin{cases} \gamma(1,\sigma,\omega) = \gamma(1,\sigma) = \dfrac{1}{2\sigma}, & si\ d = 1. \\ \gamma(d,\sigma,\omega) = \gamma(d,\sigma) = \frac{1}{2\sigma} + \frac{1+\sigma^*/2}{\sigma^*-\sigma}, & si\ d \geq 2. \end{cases}$$

   • $\|u_k\|_{L^2} \sim k^{\frac{d}{2}+\frac{1}{\sigma}}$, $k \to \infty$, $d \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

   • $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $\|E(u_k)\| \sim k^{1+\frac{d}{2}+\frac{1}{\sigma}}$, $k \to \infty$, $d \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

2. **Les asymptotiques pour des grands exposants non linéaires : le cas** $\sigma^* = \infty$:
   • Le cas $d = 1$: quand $\sigma \to \infty$, $\|u_k\|_{L^\infty}$ converge vers 1 indépendamment de ω et k. D'autre part, $\|u_k\|_{L^2}$, $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ convergent vers des contantes qui dépendent de ω et k.
   • Le cas $d = 2$: quand $\sigma \to \infty$, $\|u_k\|_{L^\infty}$ converge vers une contante qui dépend

de ω et k. D'autre part, $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ convergent vers 0 indépendamment de k et ω.

3. **Les asymptotiques pour des grands exposants non linéaires : le cas** $\sigma^* < \infty$: les comportements asymptotiques quand $\sigma \to \sigma^*$ de $\|u_k\|_{L^\infty}$, $\|u_k\|_{L^2}$, $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ sont décrits par les lois puissances suivantes :

• $\|u_k\|_{L^\infty} = u_k(0) \sim (\sigma^* - \sigma)^{h_{k,d}(\omega)},\ \sigma \to \sigma^*,\ d \geq 3$ et $\omega \in]\omega_k, +\infty[$.

En outre, nos expérimentations ont montré que $h_{k,d}$ est une fonction en escalier et discontinue de ω et prend des valeurs isolées pour chaque $\omega := \omega^k_{max,d}$ (la fréquence qui définit l'intervalle d'existence maximale de chaque solution u_k dans le cas $\sigma = \sigma^*$). De plus, la valeur de $h_{k,d}(\omega)$ reste constante si $\omega > 0$, (cette constante à été désignée par $h^+_{k,d}$). Les valeurs numériques obtenus de cette fontion dans les cas $d = 3$, 4, 5 et 6 sont données respectivement par les figures 6.27, 6.36, 6.37 et 6.38. En particulier, on a observé les propriétés générales suivantes :
(i) Pour tout $k \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} h^+_{k,d} = -\dfrac{1}{2} - k, & si\ d = 3, \\ h^+_{k,d} = -\frac{d-2}{4} - k, & si\ d \geq 4, . \end{cases}$$

(ii) Pour tout $k,\ n \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} h_{k,3}(\omega) = \dfrac{n}{2} - k, \quad \forall\, \omega \in]-(2(n+1)+1)\ ,\ -(2n+1)[, & si\ d = 3, \\ h_{k,d}(\omega) = k - n, \quad \forall\, \omega \in]\omega_k\ ,\ \omega^k_{max,d}[, & si\ d \geq 4. \end{cases}$$

• $\|u_k\|_{L^2} \to N^2_{k,d}(\omega) \sim (\sigma^* - \sigma)^{f_{k,d}(\omega)},\ \sigma \to \sigma^*,\ d \geq 3,\ \omega \in \mathbb{R}$.

Nos simulations numériques ont montré que $N^2_{k,d}$ est une fonction en escalier et discontinue de ω et prend des valeurs isolées pour chaque $\omega := \omega^k_{max,d}$. De plus, la valeur de $N^2_{k,d}(\omega)$ reste constante si $\omega > 0$. Les valeurs numériques obtenus de ces deux fontions dans les cas $d = 3$, 4 et 5 sont données respectivement par les figures 6.29, 6.30, 6.31, 6.32, 6.39 et 6.40. Ces graphes montrent que les valeurs prises par ces deux fonctions sont indépendantes de k. En particulier, on a observé les propriétés générales suivantes :
(i) Pour tout $k \geq 0$ on a :

$$f_{k,d}(\omega) = 1,\ \forall\, \omega > 0\ \ \forall\, d \in \{3, 4, 5\}.$$

(ii) Pour tout $k,\ n \geq 0$ on a :

$$f_{k,d}(\omega^n_{max,d}) = 1/2, \quad \forall\, d \in \{3, 4, 5\}.$$

• $\|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $E(u_k)$ convergent vers des limites finies qui dépendent de ω quand $\sigma \to \sigma^*$. Ces deux limites on été désignées par $g_{k,3}(\omega) := \lim_{\sigma\to\sigma^*} \|\nabla u_k\|_{L^2}$ et $e_{k,3}(\omega) = \lim_{\sigma\to\sigma^*} E(u_k)$ pour tout $d \geq 3$ et $k \geq 0$. nos expérimentations ont montré que $g_{k,3}$ et $e_{k,3}$ sont des fonctions linéaires de k pour toute valeur prescrite de ω comme le montre les Figures 6.33, 6.34, 6.41, 6.42, 6.43 et 6.44. On a de même remarqué que $g_{k,3}$ et $e_{k,3}$ restent constants si $\omega \geq 0$. Par la suite, on a noté respectivement par $g^+_{k,4} = g_{k,4}(\omega > 0)$ et $e^+_{k,4} = e_{k,4}(\omega > 0)$. D'aprés les résultats obtenus, on a pu conjecturé les propriétés générales suivantes :
(i) Pour tout $d \geq 4$ et $k \geq 0$ on a :

$$g^+_{k,d} \approx (k+1)\frac{(d+1)!}{5!}\frac{16}{3}.$$

(ii) Pour tout $d \geq 4$ et $k \geq 0$ on a :

$$e^+_{k,d} \approx (k+1)\frac{2}{d}\frac{(d+1)!}{5!}\frac{16}{3}.$$

Chapitre 7

Les solutions vortex dans le cas bidimensionnel

7.1 Structure des solutions vortex

Dans le cas particulier $d = 2$, il est aussi possible de chercher des états stationnaires désignés par vortex qui s'écrivent en $\psi(t, x) = e^{i\omega t} e^{im\theta} u(\|x\|)$, où m est un entier (parfois connu sous le nom de la charge du vortex) et (r, θ) désigne les coordonnées polaires de x (pour x$= (x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$). Celà veut dire que la solution spatiale n'est plus radiale, même si la fonction u dépend encore de r. En injectant cette expression dans (1.1), on trouve maintenant la nouvelle équation différentielle ordinaire

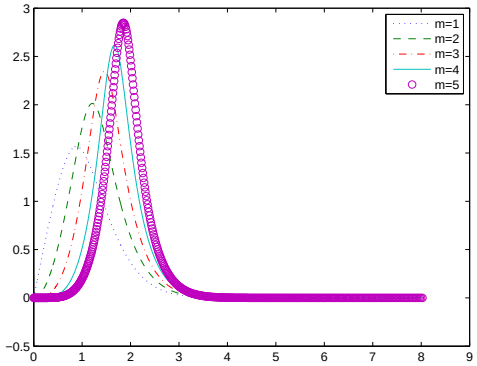


FIGURE 7.1 – Graphe du vortex sans nœuds dans le cas $\sigma = 1.5$, $\omega = -d = -2$ and $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

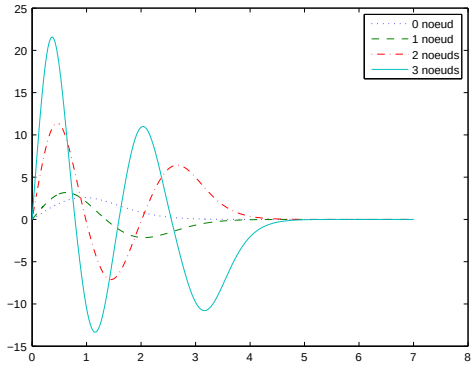


FIGURE 7.2 – Graphe des quatre premières solutions vortex : $u_{k,1}$ calculées avec : $\omega = -(4k+2)$, and $\sigma = 0.5$, $d = 2$.

$$u''(r) + \tfrac{1}{r}u'(r) - \tfrac{m^2}{r^2}u(r) - r^2u(r) - \omega u(r) + |u(r)|^{2\sigma}u(r) = 0,\ r > 0. \tag{3.1}$$

Contrairement à la situation précédente, il n'est plus possible de supposer que $u(0) \neq 0$ à cause du nouveau terme $u(r)/r^2$ dans (3.1) et on doit trouver une autre méthode pour exprimer ce problème. On pose alors $u(r) = r^m v(r)$ afin d'éliminer le terme m^2u/r^2. Il est facile de vérifier que la nouvelle fonction v est solution de l'équation modifiée

$$v''(r) + \frac{2m+1}{r}v'(r) - \omega v(r) - r^2v(r) + r^{2m\sigma}|v(r)|^{2\sigma}v(r) = 0,\ r > 0. \tag{3.2}$$

ce qui ressemble à celle dans le cas radial même si la non-linéarité dépend maintenant de r. Dans le cas puissance pure : (1.3), ces vortex ont été étudiés théoriquement dans [13] et [14] où il a été prouvé que ces solutions ont la même structure que celle trouvée dans le cas radial pour (1.3). En effet, il a été remarqué que : pour toute charge vortex positive m, il existe une solution vortex de (1.3) avec n'importe quel nombre donné de zéros. De plus, ces solutions sont définies comme déjà fait au Théorème 4.1.1 : en utilisant les ensembles A_k et leurs maximums β_k. Par la suite, il était possible d'utiliser l'algorithme du tir pour calculer ces solutions non radiales (voir [4]). Mais dans notre cas, ce type de solutions n'a été étudié ni théoriquement ni numériquement. Donc, on est intéressé de voir numériquement si la structure montrée au théorème (4.1.1) persiste pour les solutions vortex. Ainsi, on utilise encore la stratégie du tir dans ce nouveau contexte afin de trouver les états stationnaires désignés par $u_{k,m}$ (c'est à dire avec k nœuds et correspondant à la charge vortex m). Etonnamment, on a trouvé que cette méthode permettait de calculer une suite infinie de solutions vortex localisées : $u_{k,m}$, $k \geq k_0$ pour n'importe quelle valeur de $\omega \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{N}$. En outre, toutes nos expérimentations suggèrent que la valeur de k_0 est décrite par une expression générale de m, ω et d. En examinant tous nos résultats, on conjecture donc que $\forall\ \omega \in \mathbb{R}$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ et $\forall\ \sigma > 0$:

$$u_{k,m} \text{ existe si seulement si } \omega > -(4k + 2(m+1)). \tag{3.3}$$

Notons que cette expression généralise la condition (1.6) obtenue dans la première partie pour la valeur de $m = 0$. Aussi cette formule est beaucoup plus importante que (1.6). En effet, dans ce cas, il est toujours possible de trouver un état stationnaire positif même si $\omega \to -\infty$, en supposant que m est choisi suffisamment grand. Par exemple, on sait que l'état fondamental $u_0 = u_{0,0}$ n'existe pas si $\omega = -d = -2$, mais en utilisant cette expression, on peut calculer $u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}...$ et de même, on peut calculer une suite infinie d'états stationnaires avec n'importe quel nombre donné de nœuds k pour toutes les valeurs données du paramètre chimique ω, il s'agit de prendre m suffisamment grand : $m > -(\omega + 2 + 4k)/2$. Ainsi, on trace dans la Figure 7.1 les profils des solutions

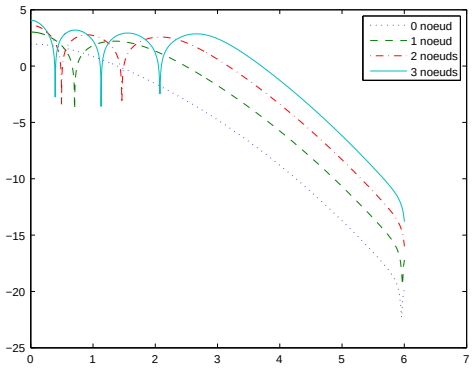


FIGURE 7.3 – Graphe du log de $u_{k,m}$($\sigma = 0.5$ $\omega = 2$, $m = 0$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

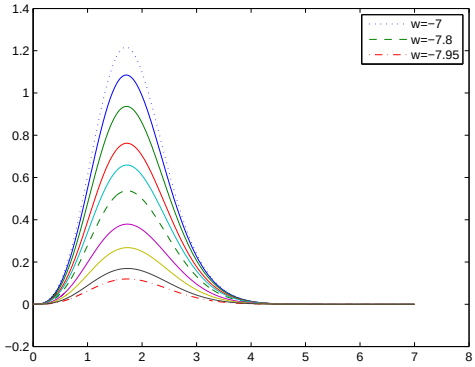


FIGURE 7.4 – comportement de $u_{k,m}$ quand $\omega \to -(4k + (m + 1)d)$ ($m = 3$, $\sigma = 1$).

sans nœuds (mais qui s'annulent en $r = 0$; le k−ième état excité est défini ici comme étant la solution qui s'annule k fois en dehors de l'origine), calculées avec $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$ et $m = 5$ alors que dans la Figure 7.2 on trace les solitons avec $m = 1$ obtenus pour plusieurs k ($k = 0, 1, 2, 3$). Il est facile de remarquer dans la Figure 7.1 que l'amplitude maximale dépend de m contrairement au cas d'énergie pure, puisqu'il a été signalé dans [4] que dans ce cas, les solutions obtenues pour m assez grand ressemblent à un soliton spatialement translaté $u_{0,1}$, et ainsi l'amplitude maximale ne dépend pas de m. On voit aussi dans la Figure 7.3 le graphe du logarithme des solutions vortex, il est à noter que les asymptotiques ne dépendent pas du nombre des nœuds et que ces solutions décroissent exponentiellement loin de l'origine. De façon similaire, on a vérifié que ce comportement ne dépend pas de m mais on a clairement noté que ce soliton possède de meilleures propriétés de décroissance pour des valeurs de ω plus grandes. Finalement, dans la Figure 7.4, on trace les résultats obtenus dans le cas $m = 3$, $k = 0$, $\sigma = 1$ et pour différentes valeurs de ω qui tend vers $-(m + 1)d$. On a remarqué que cette solution tend uniformément vers zéro quand $\omega \to -(4k + (m + 1)d) = -8$. En effet, ceci est le comportement de tous les états excités u_k quand $\omega \to -(4k+(m+1)d)$.

7.2 Asymptotiques pour les solutions vortex

On cherche maintenant des lois asymptotiques pour les solutions vortex quand k est grand similaires à celles obtenues pour les états excités. On commence par étudier $\|u_{k,m}\|_{L^\infty}$. On a remarqué que cette norme possède un comportement similaire à celui du premier cas, même si on remarque une petite influence du nouveau paramètre m.

Alors, on a calculé la dérivée de log $\|u_{k,m}\|_{L^\infty}$ par rapport à log k et observé que cette suite converge vers une limite qui ne dépend ni de ω ni de m (voir Figures 7.5 et 7.6). De plus, les valeurs obtenues indiquent qu'on a exactement la même asymptotique

$$\|u_{k,m}\|_{L^\infty} \sim k^{\frac{1}{2\sigma}+\frac{1}{2}} \quad k \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad m \geq 1.$$

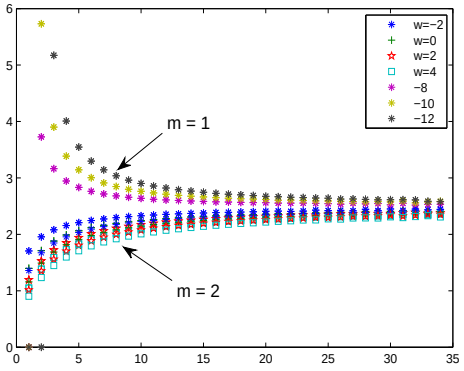


FIGURE 7.5 – Derivée de log $\|u_{k,m}\|_{L^\infty}$ en fonction de log k for $0 \leq k \leq 35$, $\sigma = 0.25$, $m \in \{1,2\}$ et $\omega \in \{-12,-10,-8,-2,0,2,4\}$.

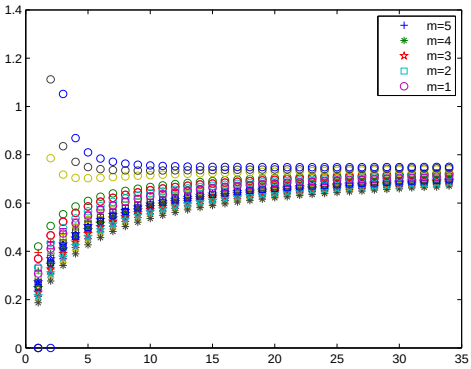


FIGURE 7.6 – Derivée de log $\|u_{k,m}\|_{L^\infty}$ en fonction de log k pour $0 \leq k \leq 35$, $\sigma = 2$, $m \in \{1,2,3,4,5\}$ et $\omega \in \{-8,-2,0,2,4\}$.

On a aussi remarqué que $\|u_{k,m}\|_{L^\infty}$, $\|\nabla u_{k,m}\|_{L^2}$ et $E(u_{k,m})$ garde la même croissance asymptotique que celle trouvée pour les états excités dans le cas $d = 1$. En effet, nos expérimentations suggèrent que $\|u_k\|_{L^2} \sim k^{1/2+1/\sigma}$, $\|\nabla(u_{k,m})\|$ et $E(u_{k,m})$ évoluent comme $k^{3/2+1/\sigma}$ quand $k \to \infty$ (voir Figures 7.7 et 7.8). Finalement, on a étudié $\|v_{k,m}\|_{L^\infty} = \|u_{k,m}/r^m\|_{L^\infty}$, quand v est une solution de (3.1). Il s'agit d'une quantité importante car elle peut mesurer la vitesse de départ des états excités quand on varie la condition initiale puisque elle était toujours atteinte en $r = 0$. Donc on a essayé de détecter un éventuel taux de croissance décrit par une certaine loi puissance en calculant la dérivée de log $\|v_{k,m}\|_{L^\infty}$ par rapport à log k, et effectivement on a observé que cette suite converge quand $k \to \infty$ pour n'importe quelles valeurs fixées de σ, ω et m. De plus, on a noté que cette limite dépend seulemnt de σ et m (voir Figures 7.9 et 7.10), ce qui suggère que $\|u_{k,m}\|_{L^\infty} \sim k^{\tilde{\gamma}(2,\sigma,m)}$ quand $k \to \infty$. Même s'il est difficile de rechercher une forme explicite de $\tilde{\gamma}(2,\sigma,m)$ en fonction de σ et m, nous somme partis du fait que cette quantité évolue dans le cas puissance pure (1.3) comme $k^{1/2*(1+\sigma m)}$ (voir [4]) et que $\frac{1}{2} = \gamma(2,\sigma)$ dans ce cas. Nous avons donc eu l'idée de chercher $\tilde{\gamma}$ sous la forme

$$\tilde{\gamma}(2,\sigma,m) \;=\; (1+\sigma m) \times \gamma(2,\sigma) \;=\; \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}\right) \times (1+\sigma m)\,.$$

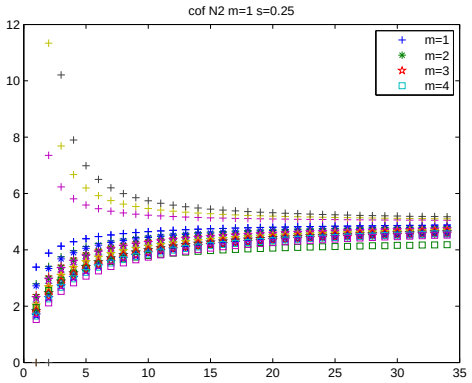


FIGURE 7.7 – Derivée de log $\|u_{k,m}\|_{L^2}$ en fonction de log k pour $0 \leq k \leq 35$, $\sigma = 0.25$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $\omega \in \{-8, -2, 0, 2, 4, 8\}$.

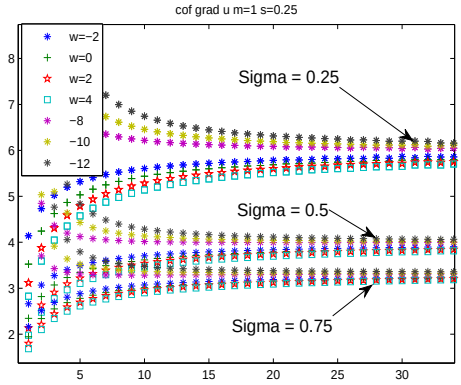


FIGURE 7.8 – Derivée de log $\|u_{k,m}\|_{L^\infty}$ en fonction de log k pour $0 \leq k \leq 35$, $m = 1$, $\sigma \in \{0.25, 0.5, 0.75\}$ et $\omega \in \{-10, -12, -8, -2, 0, 2, 4\}$.

Etonnamment, on voit dans la Figure 7.11 qu'il existe un accord remarquable entre la valeur de $\tilde{\gamma}$ calculée pour différents σ et m et cette expression. Alors on a utilisé des arguments similaires à ceux utilisés pour déterminer γ, ce qui nous a permis de conjecturer que

$$\|u_k\|_{L^\infty} \sim k^{(1/2+1/2\sigma)(1+\sigma m)}, \quad k \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{R}, \qquad m \geq 1 \; et \; d = 2. \tag{3.4}$$

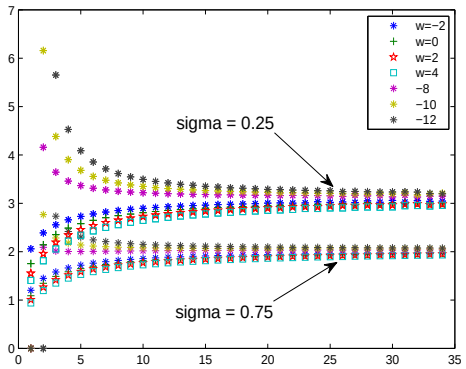


FIGURE 7.9 – Derivée de $\log \|v_{k,m}\|_{L^2}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $m = 1$, $\sigma \in \{0.25, 0.5\}$ et $\omega \in \{-2, 0, 2, 4\}$.

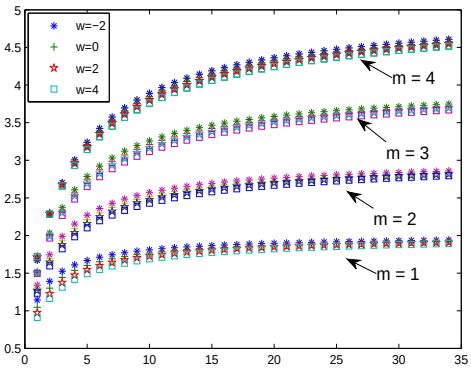


FIGURE 7.10 – Derivée de $\log \|v_{k,m}\|_{L^\infty}$ en fonction de $\log k$ pour $0 \leq k \leq 35$, $\sigma = 1$, $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $\omega \in \{-2, 0, 2, 4\}$.

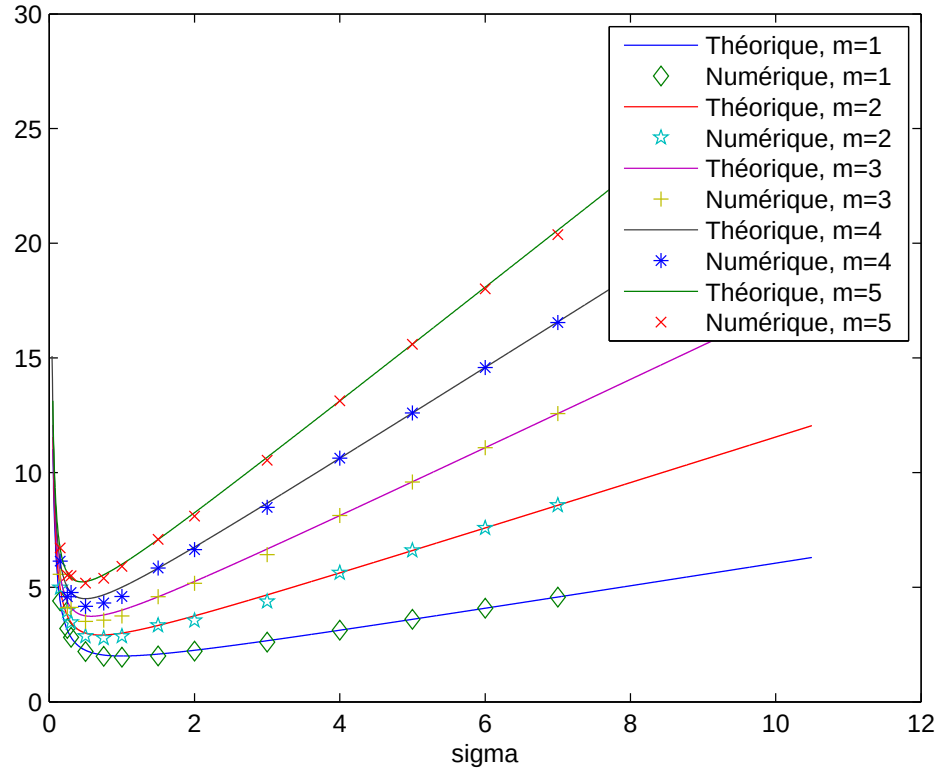


FIGURE 7.11 – Comparaison entre les valeurs numériques et théoriquement possibles de $\gamma_m(2,\sigma,m)$, $\sigma \in [0,\infty[$, $d=2$, et $m \in \{1,2,3,4,5\}$.

Chapitre 8

Stabilité de l'état fondamental

8.1 Introduction

L'une des questions les plus intéressantes qui concernent l'équation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel harmonique (1.1) est la stabilité de ses états stationnaires, qui permet de définir de meilleurs choix pour la réalisation expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein une durée la plus longue possible. Afin de pouvoir rappeler les résultats obtenus dans ce sujet, on commence par rappeler les définitions des deux notions principales de stabilité : la stabilité orbitale et l'instabilité forte. Pour ce faire, on note d'abord qu'il est prouvé dans [48] que pour tout $u_0 \in X$, il existe $T_0 = T_0(\|u_0\|_X) > 0$ et une unique solution locale $u \in C([0, T_0), X)$ de l'équation (1.1) avec $u(0) = u_0$. De plus, la solution satisfait les lois de conservation suivantes :

$$E(u(t)) = E(u_0), \quad \|u(t)\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2$$

pour $t \in [0, T_0)$, où

$$E(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \frac{1}{2\sigma+2}\|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

Maintenant, on est en mesure de rappeler les

Définition 8.1.1 *On dit que l' onde stationnaire $e^{i\omega t}u_\omega$ de l'équation* (1.1) *est orbitalement stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que si $u_0 \in X$ et $\|u_0 - u_\omega\|_X < \delta$, alors la solution $u(t)$ de l'équation* (1.1) *avec $u(0) = u_0$ satisfait*

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|u(t) - e^{i\theta}u_\omega\|_X < \epsilon$$

pour tout $t \geq 0$. Sinon, $e^{i\omega t}u_\omega$ est dit orbitalement instable.

Définition 8.1.2 *On dit que l' onde stationnaire $e^{i\omega t}u_\omega$ de l'équation* (1.1) *est fortement instable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u_n \in X$ telle que*

$$\|u_n - u_\omega\|_X < \epsilon$$

et la solution $u_n(t)$ *de l'équation* (1.1) *avec* $u(0) = u_n$ *satisfait*

$$T_0(\|u_n\|_X) < +\infty$$

Le cas de la même l'équation non linéaire mais avec $V(x) = 0$ a été intensivement étudié dans les années 1980. En particulier, Grillakis, Shatah et Strauss (J. Funct. Anal. (1987)) ont donné une théorie générale concernant la stabilité des ondes stationnaires pour un système Hamiltonien abstrait, qui peut contenir l'équation (1.1), l'équation sans potentiel (NLS), l'équation de Klein−Gordon non linéaire, etc.... En effet, la condition suffisante de Grillakis, Shatah et Strauss pour prouver la stabilité et l'instabilité de l'état fondamental de ces équations s'exprime en terme du carré de la norme L^2 : $\|u_{0,\omega}\|_2^2$ qui désigne le nombre de particules dans notre cas . Plus exactement on a :

1. $\partial_\omega \|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 > 0 \ \Rightarrow \ u_0$ est orbitalement stable.
2. $\partial_\omega \|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 < 0 \ \Rightarrow \ u_0$ est orbitalement instable.

Dans le cas $V(x) = 0$, l'équation (NLS) est invariante par le changement d'échelle $\omega^{1/\sigma} u(\omega^2 t, \omega x)$, $\omega > 0$, donc $\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 = \omega^{1/\sigma - 1/2} \|u_{0,1}\|_{L^2}^2$ pour tout $\omega > 0$. D'après cette relation, on déduit facilement que $\sigma = 2/d$ est l'exposant critique entre le cas stable et le cas instable indépendamment de $\omega > 0$. De plus, dans le cas $\sigma = 2/d$, on vérifie facilement que les solutions stationnaires vérifient $E(u_{k,\omega}) = 0$. Par conséquent, en considérant la suite $u_\varepsilon := (1+\varepsilon) u_{k,\omega}$, on peut facilement vérifier que $u_\varepsilon \to u_{k,\omega}$ dans $H^1(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, on a $E(u_\varepsilon) < 0$ quand $\varepsilon \to 0$, par suite, en utilisant un résultat classique, on démontre que les solutions correspondantes $u_\varepsilon(t, .)$ ne peuvent pas être globales et explosent en temps fini. Ainsi les solutions stationnaires sont fortement instables dans ce cas. En particulier, le problème de stabilité de l'état fondamental $u_{0,\omega}$ de (NLS) est complètement résolu.

Si on étudie le cas $V(x) \neq 0$, l'équation n'a plus d'invariance par changement d'échelle, Il devient donc difficile de calculer la croissance et la décroissance de la norme L^2 en fonction de ω. Ainsi, on ne peut pas appliquer directement cette théorie. De plus, dans le cas critique $\sigma = 2/d$, on vérifie facilement que les solutions stationnaires possèdent une énergie strictement positive, donc on ne peut pas obtenir des résultats d' instabilité comme dans le premier cas. Néanmoins, en généralisant une technique introduite par Rose et Weinstein dans [54], Fukuizumi à réussi à obtenir plusieurs résultats partiels de stabilité pour notre équation de (CBE). En effet, en utilisant la théorie des bifurcations, elle arrive à mesurer la croissance de la norme L^2 de l'état fondamental u_0 au voisinage de la première valeur propre ω_1. De même, elle obtient des résultats d'instabilité orbitale pour les fréquences suffisamment grandes. Avant d'essayer de donner des versions plus précises en utilisant les simulations numériques , On récapitule dans le théorème suivant l'ensemble de ces résultats déjà obtenus.

Théorème 8.1.1 (Fukuizumi [2] et [3]) *Soit $u_{0,\omega}$ l'état fondamental (la première solution bifurquée) de l'équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel harmonique* (1.1)*, alors :*

1. *Si $0 < \sigma \leq 2/d$, il existe $\omega^1 > 0$ tel que l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ est orbitalement stable pour tout $\omega \in (\omega^1, \infty)$.*
2. *Si $2/d < \sigma < 2/(d-2)$, il existe $\omega^2 > 0$ tel que l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ est orbitalement instable pour tout $\omega \in (\omega^2, \infty)$.*
3. *Si $0 < \sigma \leq 2/(d-2)$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ est orbitalement stable pour tout $\omega \in (\omega_1, \omega_1 + \epsilon_0)$.*

On note que le deuxième résultat dans ce théorème a été limité au cas sous−critique $2/d$. En effet, Nos résultats du troisième chapitre montrent que C_0 n'existe que pour $\omega_1 < \omega < 0$. Par suite, il n'est plus possible de faire tendre ω vers l'infini dans ce cas. Cependant, on a remarqué numériquement que ce résultat peut être étendu au cas $\sigma = 2/(d-2)$ pour $d \geq 4$ en considérant des fréquences suffisamment proches de zéro. Ainsi, le deuxième paragraphe de ce chapitre sera consacré à la démonstration de ce résultat. On note que la preuve est similaire à celle de Fukuizumi et Otha dans [3]. La difficulté réside dans la vérification de la condition suffisante sans avoir besoin de supposer ω suffisamment grande.

Ensuite, on cherche à vérifier numériquement la condition énergétique de stabilité afin de donner un résultat optimal sans se limiter au cas des petites ou grandes fréquences. Précisément, on essaye d'observer numériquement le comportement détaillé de la norme $\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2$ le long de la branche de bifurcation C_0. En particulier on notera que tous nos calculs suggèrent bien que pour $\sigma > 2/d$, cette quantité admet toujours le même comportement en fonction de la fréquence indépendamment de la nolinéarité et de la dimension. Ceci se traduit par l'existence d'une unique fréquence (ω_c) telle que u_0 soit orbitalement stable pour tout $(\omega < \omega_c)$ et orbitalement instable si $(\omega > \omega_c)$. Enfin, étant en mesure de calculer cette fréquence numériquement, on s'intéressera au comportement de cette valeur seuil en fonction de l'exposant non linéaire σ et la dimension d.

Dans le cas des autres solutions bifurquées, il n'est plus possible d'utiliser le comportement de la norme L^2 pour étudier la stabilité. Le problème est alors plus difficile et peu de résultats théoriques et numériques sont connus. Cependant, dans le chapitre suivant, on présentera quelques résultats numériques de stabilité pour ces états excités dans le cas de l'équation de Brézis−Nirenberg sur la boule unité B_1. En effet, en essayant d'étudier le cas de notre équation de (CBE), on a remarqué que les effets de bord dus à l'utilisation d'un ouvert borné au lieu de $\mathbb{R}^d$ pour la résolution numérique, ne permettent pas d'avoir des résultats précis. Par contre, en considérant le cas de l'ouvert

borné B_1, on peut utiliser les conditions au bord réelles, à savoir $u(x) = 0, \forall\, x \in \partial B_1$. Ceci nous a permis d'observer quelques résultats originaux pour ce type de solutions comme on le verra au prochain chapitre

8.2 Instabilité de l'état fondamental dans le cas critique $\sigma = 2/(d-2)$

Dans ce paragraphe, On étudie l'instabilité de l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_{0,\omega},\ \omega \in \mathbb{R}$ pour l'équation de (CBE) :

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi - \|x\|^2\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,$$

où $d \geq 4$ et $\sigma = 2/(d-2)$. Ici, $u_{0,\omega}$ désigne la première solution bifurquée étudiée dans le chapitre 3 du problème stationnaire :

$$-\Delta u + |x|^2 u + \omega u - |u|^{2\sigma}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1}$$

Ainsi, notre résultat principal s'énonce comme suit :

Théorème 8.2.1 *Soit $d \geq 4, \sigma = 2/(d-2)$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ soit instable pour $\omega \in (-\epsilon_0, 0)$.*

Signalons que si on définit la fonctionnelle $S_\omega \in C^2(X,\mathbb{R})$ par

$$S_\omega(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\omega}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2\sigma+2}\|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2},$$

alors on voit que u_ω est une solution faible si et seulement si u_ω est un point critique de S_ω. Dans le paragraphe 2 ci-dessous, on considère le problème d'existence de l'état fondamental, c'est-à-dire une solution minimisant la fonctionnelle S_ω (cette solution correspond à l' états quantiques de plus basse énergie). En effet, afin de pouvoir utilisé la condition suffisante d'instabilité obtenue par Fukuizumi dans [3], on besoin d'utiliser une formulation variationnelle différente de celle considérée dans le chapitre 3 lors de l'étude du cas critique avec la méthode de Brézis−Nirenberg. Ce pendant, il nous suffit d'établir le lien entre les solution obtenues dans le chapitre 3 et les éventuelles solutions du nouveau problème de minimisation dont on a besoin.

8.2.1 Caractérisation Variationnelle de l'état fondamental

Le long de ce paragraphe, on étudie la caractérisation variationnelle de l'état fondamental de (3.2). Dans le chapitre 3, on a montré que pour $\omega \in (\omega_1, 0)$, il existe une

solution $u_{0,\omega}$ de (3.2), qui minimise le problème suivant :

$$\begin{aligned} I(\omega) &:= \inf_{u\in X\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_X^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^{2\sigma+2}}^2} \\ &= \inf\left\{\|u\|_X^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 \mid u\in X, \|u\|_{L^{2\sigma+2}} = 1\right\}. \end{aligned}$$

En considérant le problème de minimisation suivant :

$$d(\omega) := \inf\{S_\omega(u) \mid u\in X\setminus\{0\}, K_\omega(u) = 0\},$$

où $K_\omega(u) = \|u\|_X^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}$. on tire alors le :

Lemme 8.2.1 *Pour tout $\omega\in(\omega_1, 0)$, on a*

$$d(\omega) = \frac{\sigma}{2(\sigma+1)} I^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\omega).$$

Preuve du Lemme 8.2.1. On affirme d'abord que

$$d(\omega) \le \frac{(\sigma)}{2(\sigma+1)} I^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\omega). \tag{3.2}$$

Soit $v\in X$ tel que $\|v\|_{L^{2\sigma+2}} = 1$. On pose

$$f(t) := S_\omega(tv) = \frac{t^2}{2}\left(\|v\|_X^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2\right) - \frac{t^{2\sigma+2}}{2\sigma+2}\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

Alors, on voit que

$$f'(t) = t(\|v\|_X^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2) - t^{2\sigma+1}.$$

Ainsi, la fonction f atteint son unique maximum en $t_{\max} = (\|v\|_X^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2)^{1/(2\sigma)}$. Alors, puisque $0 = f'(t)|_{t=t_{\max}} = \langle S'_\omega(t_{\max}v), v\rangle$, on a

$$0 = \langle S'_\omega(t_{\max}v), t_{\max}v\rangle = K_\omega(t_{\max}v).$$

Il découle de la définition de $d(\omega)$ que

$$\begin{aligned} d(\omega) \le S_\omega(t_{\max}v) &= \frac{t_{\max}^2}{2}(\|v\|_X^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2) - \frac{t_{\max}^{2\sigma+2}}{2\sigma+2} \\ &= \frac{\sigma}{2(\sigma+1)}(\|v\|_X^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2)^2. \end{aligned}$$

En prenant l'inf sur $v\in X$, on obtient (3.2).

Puis, on montre que

$$d(\omega) \ge \frac{\sigma}{2(\sigma+1)} I^{\frac{\sigma+1}{\sigma}}(\omega). \tag{3.3}$$

Pour tout $u \in X$ tel que $K_\omega(u) = 0$, on a

$$I(\omega) \leq \frac{\|v\|_X^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2}{\|v\|_{L^{2\sigma+2}}^2} = \|v\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma} = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma} S_\omega(v)\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\sigma}{2(\sigma+1)} I(\omega)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \leq S_\omega(v).$$

En prenant l'inf sur $v \in X$, on voit que (3.3) est vérifiée, ce qui termine la preuve. (3.3). □

On pose

$$\mathcal{M}_\omega := \{u \in X \mid S_\omega(u) = d(\omega),\ K_\omega(u) = 0\},$$

Par le Lemme 8.2.1, on conclut que $\mathcal{M}_\omega \neq \emptyset$ pour $\omega \in (-\lambda_1, 0)$.

8.2.2 Condition suffisante d'instabilité

Pour montrer le Théorème 9.1.1, on utilise la proposition suivante qui à été prouvé dans [3]. :

Lemme 8.2.2 *Si $\partial_\lambda^2 E(u_\omega^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$, alors l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_\omega$ de l'équation (3.1) est instable dans X, où $v^\lambda(x) = \lambda^{d/2}v(\lambda x)$ pour $\lambda > 0$.*

Alors le Théorème 8.2.1 s'ensuit en combinant la Proposition 8.2.2 avec la :

Lemme 8.2.3 *Soit $d \geq 4$ et $\sigma = 2/(d-2)$. Alors, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $\partial_\lambda^2 E(u_{0,\omega}^\lambda)|_{\lambda=1} < 0$ pour $\omega \in (-\epsilon_0, 0)$.*

Afin de prouver le Lemme 8.2.3, on donne tout d'abord plusieurs lemmes qui seront nécessaires ci-après.

Lemme 8.2.4 *Soit $d \geq 4$ et $\sigma = 2/(d-2)$. Alors, l'état fondamental $u_{0,\omega}$ de (3.2) satisfait*

$$\omega\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 + 2\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2 dx = 0. \tag{3.4}$$

Preuve du Lemme 8.2.4. (3.4) est une conséquence de l'identité de Pohozaev suivante :

$$\|\nabla u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 + \int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2 dx + \omega\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 - \|u_{0,\omega}\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = 0.$$

$$\frac{d-2}{2}\|\nabla u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 + \frac{d+2}{2}\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2 dx + \frac{d}{2}\omega\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 - \frac{d}{2\sigma+2}\|u_{0,\omega}\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = 0.$$

□

Lemme 8.2.5 *Soit $d \geq 4, \sigma = 2/(d-2)$ et $u_{0,\omega}$ l'état fondamental de (3.2). Alors, il existe $C_0 > 0$ tel que $\|u_{0,\omega}\|_{L^2} \leq C_0$ pour $\omega \in (\omega_1, 0)$.*

Preuve du Lemme 8.2.5.
On prend $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on le fixe. Alors, d'après la définition de $I(\omega)$, on a

$$I(\omega) \leq I(0) \leq \frac{\|\varphi\|_X^2}{\|\varphi\|_{L^{2^*}}^2}$$

Par conséquent, d'après le Lemme 8.2.1, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{2(\sigma+1)} \left(\frac{\|\varphi\|_X}{\|\varphi\|_{L^{2^*}}} \right)^{2\frac{\sigma+1}{\sigma}} &\geq \frac{\sigma}{2(\sigma+1)} I(\omega)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \\
&= d(\omega) \\
&= \frac{\sigma}{2(\sigma+1)} (\|v\|_X^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2) \\
&\geq \frac{\sigma}{2(\sigma+1)} (\lambda_1 + \omega) \|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda_1 + \omega > 0$, on obtient le fait que $\|u_{0,\omega}\|_{L^2}$ est borné, à partir de l'estimation ci-dessus. □

Lemme 8.2.6 *Soit $N \geq 4, \sigma = 2/(d-2)$ et $u_{0,\omega}$ l'état fondamental de (3.2). Alors, il existe $C_1 > 0$ (qui ne dépend pas de ω) tel que $\|u_{0,\omega}\|_{L^{2\sigma+2}} > C_1$ pour $\omega \in (\omega_1/2, 0)$.*

Preuve du Lemme 8.2.6. D'après l'injection de Sobolev, on a

$$\begin{aligned}
C^{2\sigma+2} \|u_{0,\omega}\|_X^{2\sigma+2} &\geq \|u_{0,\omega}\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \\
&= \|u_{0,\omega}\|_X^2 + \omega \|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2 \\
&\geq \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) \|u_{0,\omega}\|_X^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \|u_{0,\omega}\|_X^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on prouve que $\|u_{0,\omega}\|_X \geq (\frac{1}{2} C^{\sigma+1})^{1/\sigma}$ pour tout $\omega \in (\omega_1/2, 0)$. Finalement, on en déduit que

$$\|u_{0,\omega}\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} \geq \frac{1}{2} \|u_{0,\omega}\|_X^2 \geq C.$$

□

Maintenant, nous somme en mesure de prouver la Proposition 8.2.3.

[Preuve de la Proposition 8.2.3] On a

$$\frac{d}{d\lambda}E(u^{\lambda}_{0,\omega}) = \lambda\|\nabla u_{0,\omega}\|^2_{L^2} - \lambda^{-3}\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2dx - \frac{N\sigma}{2(\sigma+1)}\lambda^{d\sigma-1}\|u_{0,\omega}\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}},$$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}E(u^{\lambda}_{0,\omega}) = \|\nabla u_{0,\omega}\|^2_{L^2} + 3\lambda^{-4}\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2dx - \frac{d\sigma}{2(\sigma+1)}(d\sigma-1)\lambda^{d\sigma-2}\|u_{0,\omega}\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}}.$$

□

En utilisant l'égalité $d/d\lambda E(u^{\lambda}_{0,\omega})|_{\lambda=1} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\lambda^2}E(u^{\lambda}_{0,\omega})|_{\lambda=1} &= \|\nabla u_{0,\omega}\|^2_{L^2} + 3\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2dx \\ &\quad - \frac{d\sigma}{2(\sigma+1)}\left(\frac{d\sigma}{2(\sigma+1)} - 1\right)\|u_{0,\omega}\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}} \\ &= 4\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2dx - \frac{d\sigma}{2(\sigma+1)}\left(d\sigma-2\right)\|u_{0,\omega}\|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}}.\end{aligned}$$

Il découle des Lemmes 8.2.4 et 8.2.5 que $\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2dx \to 0$ quand $\omega \to 0$. Ainsi, d'après le Lemme 8.2.6, on voit que

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}E(u^{\lambda}_{0,\omega}) \leq 4\int |x|^2|u_{0,\omega}(x)|^2dx - \frac{4}{d-2}C < -\frac{2}{d-2}C$$

si $\omega < 0$ est suffisamment proche de 0.

8.3 Etude numérique de la stabilité de l'état fondamental

Dans ce paragraphe, on utilise les simulations numériques pour fournir une illustration des résultats théoriques sur la stabilité et l'instabilité de l'état fondamental de l'équation de (CBE) déjà obtenues en utilisant la théorie rigoureuse.

8.3.1 Critère de stabilité

On commence par l'étude du comportement de la norme L^2 en fonction de la fréquence ω en variant l'exposant σ et la dimension d. Cela nous permettra de généraliser

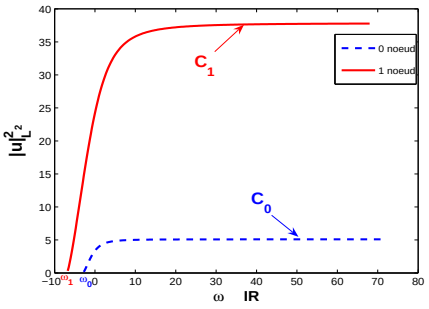


FIGURE 8.1 – $\|u_k\|_2$ en fonction de ω, $\sigma = 2/d$, $d = 3$, $k = 1, 2$.

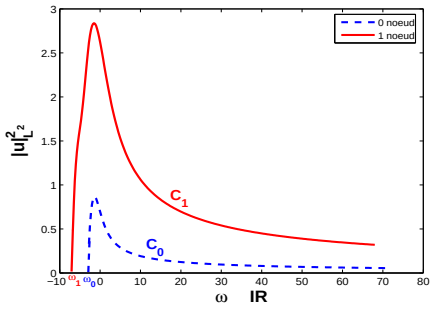


FIGURE 8.2 – $\|u_k\|_2$ en fonction de ω, $\sigma > 2/d$, $d = 3$, $k = 1, 2$.

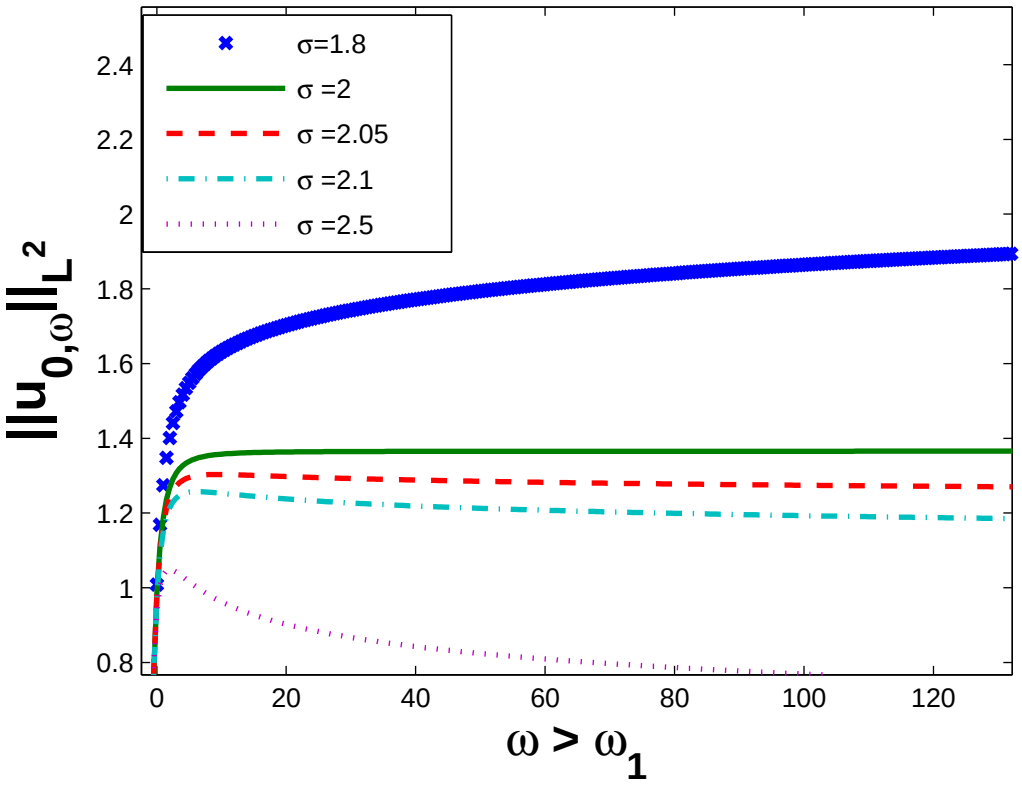


FIGURE 8.3 – $\|u_0, \omega\|_2$ en fonction de ω, $d = 1$ et $\sigma \in \{1.8, 2, 2.05, 2.1, 2.5\}$.

le résultat théorique déjà établi qui est malheureusement restreint aux petites et très grandes fréquences. On représente dans les figures 8.1, 8.2 et 8.3 les résultats obtenus

dans les cas $d = 1$ et $d = 3$ pour différentes valeurs de σ. On peut signaler dans les figures 8.1 et 8.3 que $\|u_{0,\omega}\|_{L^2}^2$ est une fonction strictement croissante de ω dans les cas critique et sous-critique (i.e., quand $0 < \sigma \leq 2/d$). D'autre part, les figures 8.2 et 8.3 montrent que pour $2/d < \sigma < 2/(d-2)$, cette courbe admet un seul point critique en une fréquence particulière que l'on désignera par $\omega_c := w_c(d, \sigma)$. Par la suite, on aboutit à un unique point de transition où on passe du régime stable au régime instable.

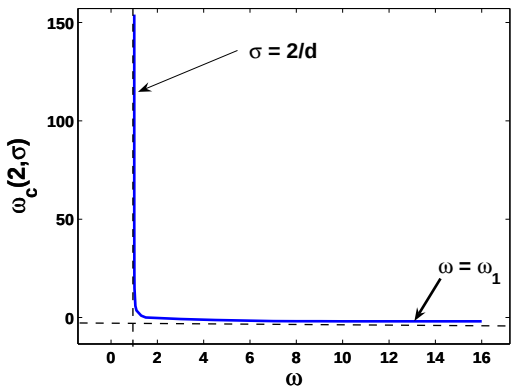


FIGURE 8.4 – $\omega_c(1, \sigma)$ en fonction de σ.

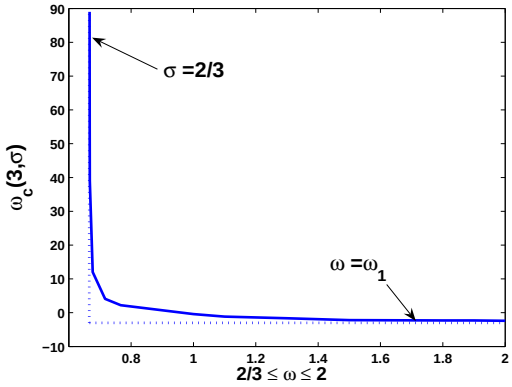


FIGURE 8.5 – $\omega_c(3, \sigma)$ en fonction de σ.

Afin d'étudier la dépendance de ce cette fréquence seuil considérée en fonction de σ et d, on a calculé $\omega_c(d, \sigma)$ pour différentes valeurs de d et σ. Les résultats obtenus dans les Figures 8.4 et 8.5, et aussi dans toutes nos expérimentations, montrent que

$$\omega_c(\sigma, d) \to \infty, \text{ quand } \sigma \to 2/d$$

et si $d \in \{1, 2\}$, alors

$$\omega_c(d, \sigma) \to \omega_1, \text{ quand } \sigma \to \infty.$$

En outre, en essayant de décrire plus précisément la dépendance de cette fréquence vis-à-vis de σ et d, on a aussi étudié le comportement asymptotique de $\omega_c(d, \sigma)$ quand $\sigma \to 2/d$. En fait, on a considéré $\log(\omega_c)$ par rapport à $\log(\sigma)$ et calculé les dérivées par rapport à $\log(\sigma - 2/d)$. Ceci nous fournit un moyen simple pour déterminer un taux exponentiel d'une certaine suite f_x relativement à x : si la pente tend vers une constante γ, alors f_x est régie par l'asymptotique $f_x \sim x^\gamma$. Les valeurs obtenues dans les figures 8.6 et 8.7 et dans toutes nos expérimentations, montrent que cette suite converge pour tout $1 \leq d \leq 5$ vers une constante γ qui ne dépend pas de la dimension d. De plus, nos expérimentations indiquent que $\gamma \sim -1/2$. Ceci suggère que l'asymptotique de $\omega_c(d, \sigma)$ est régie par une loi puissance

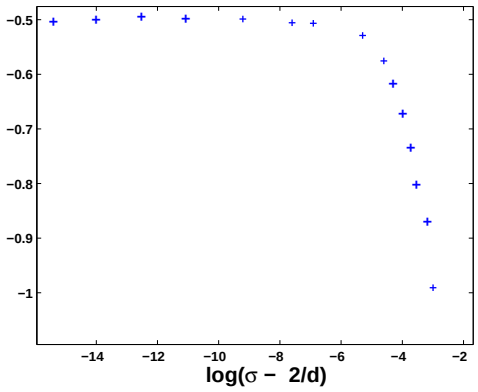


FIGURE 8.6 – La dérivée de $\log(\omega_c(2,\sigma))$ par rapport à $\log(\sigma - 2/d)$, $d = 2$ et $\sigma \in]2/d, 2/(d-2)[$.

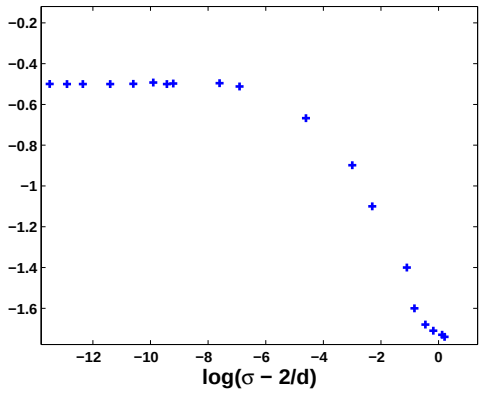


FIGURE 8.7 – La dérivée de $\log(\omega_c(3,\sigma))$ par rapport à $\log(\sigma - 2/d)$, $d = 3$ et $\sigma \in]2/d, 2/(d-2)[$.

$$\omega_c(d,\sigma) \sim (\sigma - 2/d)^{-\frac{1}{2}}, \text{ quand } \sigma \to 2/d.$$

8.3.2 Dynamiques de stabilité

Maintenant, on résout l'équation d'évolution en utilisant la méthode classique de différences finies que l'on décrit brièvement sans perte de généralité dans le cas unidimensionnel $d = 1$. Si Δt et Δx désignent respectivement les pas en temps et en espace, on cherche la valeur approchée u_j^n à l'instant $t_n = n\Delta t$ et au point spatial $x_j = j\Delta x$. Ainsi, on effectue la discrétisation de (1.1) comme suit

$$\frac{i}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{1}{2\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right)$$
$$-\frac{1}{2}x_j^2(u_j^{n+1} + u_j^n) + \frac{1}{p+1}\frac{|u_j^{n+1}|^{p+1} - |u_j^n|^{p+1}}{|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2}\left(u_j^n + u_j^{n+1}\right) = 0.$$

On pense qu'il est plus convenable de faire l'usage de ce plan symétrique non linéaire de Crank−Nicholson pour étudier la stabilité des ondes stationnaires même s'il nécessite de faire une inversion algébrique non linéaire à chaque étape. En fait, la forme spéciale de la discrétisation du terme non linéaire assure que la norme L^2 discrète

$$N_n = \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n|^2$$

et l'énergie discrète

$$E_n = \Delta x \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} | \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} |^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j^2 |u_j^n|^2 - \frac{1}{p+1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n|^{\sigma+1} \right)$$

sont exactement conservées. Ceci est une propriété très importante car on cherche des solutions approchées qui partagent les mêmes invariances que dans le cas continu puisqu'il est bien connu que les phénomènes de stabilité et d'explosion sont fortement liés à ces loi de conservation. Pour montrer l'accord du numérique avec la théorie de stabilité rigoureuse, on doit remarquer que $\|u(t,.) - u_{0,\omega}\|_X$ reste "petit" dans le cas de stabilité mais croît dans le cas d'instabilité. Dans ce dernier cas, toutefois, le fait de remarquer numériquement que $\|u(t,.) - u_{0,\omega}\|_X$ croit ne nous permet pas de distinguer les différents types d'instabilité tel que :

1. L'instabilité forte.
2. L'instabilité par épaisseur finie ou " *finite-width instability*", c'est à dire, des petites perturbations peuvent entraîner une modification importante de la largeur de la soliton (voir [53] et [49]).
3. L'instabilité par dérive ou "*drift instability*", c'est à dire, le centre de la masse dans une direction x_j, défini par $1/\|u(0,.)\|_{L^2}^2 \int |u(t,x)|^2 \, x_j \, dx$ s'éloigne de son emplacement initial (voir [49], [53] et [51]).
4. L'instabilité par diffraction totale ou " *total-diffraction instability*", c'est à dire, $\|u(t,.)\|_{L^\infty} \to 0$ quand $t \to \infty$ (voir [51]).

Par la suite, au lieu de représenter la norme X, on trace les dynamiques de l'amplitude maximale ou la norme L^2 (la masse) de la solution. Ces deux quantités donnent une description plus informative des dynamiques, tout en montrant si la solution est stable.

Ainsi, on commence par le cas de stabilité et on trace dans la Figure 8.8 les résultats obtenus dans le cas $d = 1$ et $\sigma = 2.2$. Dans ce cas surcritique, on a vérifié numériquement que $\omega_c(1, 2.2) = -0.5$. Par suite, l'état fondamental $u_{0,-0.7}$ est orbitalement stable dans ce cas. Afin d'observer la manifestation de ce phénomène en présence de perturbation, on a utilisé comme condition initiale la fonction

$$u_\varepsilon(x) := (1+\varepsilon) u_{0,\omega}(x).$$

les profils obtenus montre que la stabilité se manifeste par des légère oscillations périodiques de $|u(t,x)|$ tout en restant très proches du profil initial. De plus, en répétant cette expérience pour différentes valeurs de σ, ω et d telque $\omega < \omega_c(d,\sigma)$, on a observé ce même comportement indépendament du fait qu'on soit dans le cas sous−critique ou surcritique. D'autre part, dans le cas d'instabilité orbitale $\omega > w_c(d,\sigma)$, lorsqu'on a utilisé cette même donnée initiale, la solution calculée semble exploser en temps fini

même pour ε arbitrairement petit. En effet, comme le montre la Figure 8.9, le norme infini de la solution augment rapidement et toute la masse de la solution se concentre à l'origine. Même si on ne peut pas vérifier numériquement que cette norme tend vers l'infini, les profils observés suggèrent bien que dans ce cas d'instabilité, l'état fondamental est en fait fortement instable. Afin d'observer l'influence du paramètre ω sur ce phénomène d'instabilité, on présente dans la Figure 8.10 l'évolution de $\|u(t,.)\|_\infty$ dans le cas $d = 1$, $\sigma = 3.5$ et $\varepsilon = 0.0003$. On remarque que l'instabilité devient plus forte pour les grandes fréquences dans le sens où l'explosion en temp fini se manifeste plus rapidement.

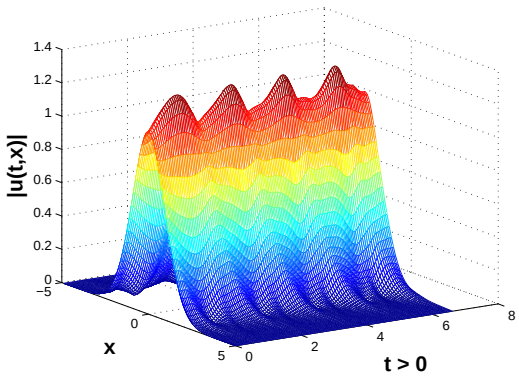


FIGURE 8.8 – Profil spatial de $u(t,x)$, ici $d = 1$, $\sigma = 2.2$, $\varepsilon = 0.25$ et $\omega = -0.7 < w_c(1, 2.2) = -0.5$.

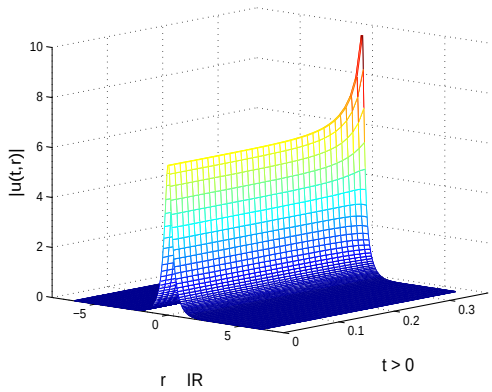


FIGURE 8.9 – Profil spatial de $u(t,x)$, ici $d = 3$, $\sigma = 1$, $\varepsilon = 0.0005$ et $\omega = 2.5 > w_c(1, 2.2) = 1$.

Finalement, Puisque ces mêmes profils ont été observés à travers toutes nos expérimentations pour toutes les dimensions de 1 à 5, on conclut ce paragraphe par la conjecture suivante :

Observation 8.3.1 *1. Si $1 < \sigma \leq 2/d$, l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ est orbitalement stable pour tout $\omega \in]\omega_1, +\infty[$.*

2. Si $2/d < \sigma \leq 2/(d-2)$, il existe $\omega_c(d,\sigma) > 0$ tel que
- *Si $\omega \in]\omega_1, \omega_c(d,\sigma)[$, alors l'onde stationnaire $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ est orbitalement stable.*
- *Si $\omega \in]\omega_c(d,\sigma), +\infty[$, alors $e^{i\omega t}u_{0,\omega}$ est fortement instable.*

Remarque 8.3.1 *Comme on l'avait remarqué au début de ce paragraphe, une étude numérique détaillée des états excités, dans le cas sans potentiel sur la boule unité, sera présentée dans le chapitre suivant. En effet, on a fait ce choix pour éviter les effets des*

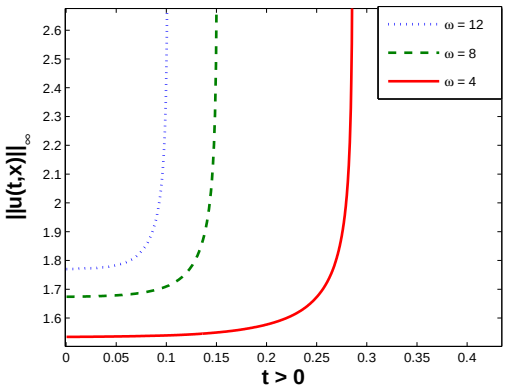


FIGURE 8.10 – $\|u(t,.)\|_\infty$, en fonction de t dans le cas d'instabilité : influence de ω, ici $d = 1$, $\sigma = 3.5$, $\varepsilon = 0.0003$.

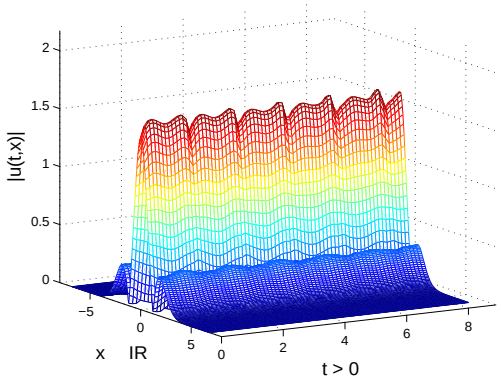


FIGURE 8.11 – Profil spatial de $u_1(t,x)$, ici $d = 3$, $\sigma = 0.9$, $\varepsilon = 0.7$ et $\omega = -6.9$

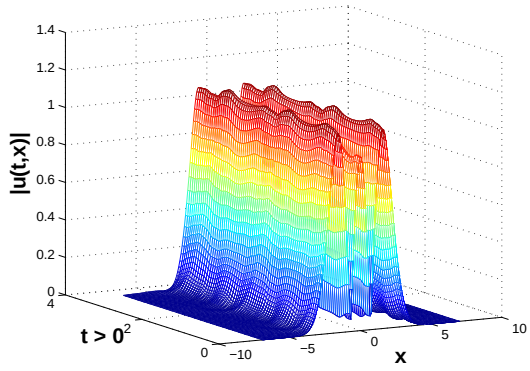


FIGURE 8.12 – Profil spatial de $u_1(t,x)$, ici $d = 1$, $\sigma = 2.2$, $\varepsilon = 0.2$ et $\omega = -4.7$.

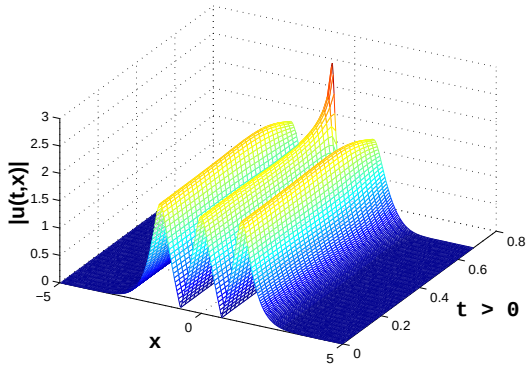


FIGURE 8.13 – Profil spatial de $u_1(t,x)$, ici $d = 1$, $\sigma = 2.5$, $\varepsilon = 0.0005$ et $\omega = 3$.

conditions de bords qui sont imposées par la discrétisation numérique contrairement au cas d'un ouvert borné ou les valeurs de la solution sur le bord sont réelles. Néanmoins, dans notre cas de l'équation de (CBE), on a clairement observé 2 phénomènes qui semblent ne pas être influencés par ces effets de bord. En effet, lorsque la fréquence ω est suffisamment proche des valeurs propres ω_k, l'état excité correspondante semble supporter les perturbations radiales même quand σ et ε sont relativement grands. Par exemple, on présente dans la Figure 8.11 le profil de la solution calculée pour $d = 3$, $\sigma = 0.9$. Bien que la valeur de $\varepsilon = 0.7$ n'est pas négligable, On remarque que $u(t,x)$

garde le même profil et supporte cette importante perturbation pour une longue durée de temps (voir aussi la Figure 8.12). D'autre part, dans le cas surcritique $\sigma > 2/d$, si ω est suffisamment large, les profils obtenus indiquent une instabilité forte similaire à celle observée dans le cas de l'état fondamental. En effet, les solutions calculées avec des valeurs de ε arbitrairement petits, semblent exploser en temps fini (voir la Figure 8.13).

Chapitre 9

Résultats numériques dans le cas sans potentiel

9.1 Introduction et rappels

Dans ce chapitre, on considère l'équation Schrödinger non linéaire sur la boule unité de $\mathbb{R}^N$ avec des conditions au bord de dirichlet :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times B_1, \\ u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \partial B_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $u : \mathbb{R} \times B_1 \to \mathcal{C}, B_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\right\}, N \geq 1$ et $1 < p \leq 1 + 4/(N-2)$.

On étudie numériquement la stabilité des états stationnaires $u(t,x) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ de l'équation (3.1), avec $\omega \in \mathbb{R}$ et Q_ω solution du problème elliptique :

$$\begin{cases} -\Delta Q + \omega Q - |Q|^{p-1}Q = 0, \quad x \in B_1, \\ Q = 0, \quad x \in \partial B_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Notons qu'on a choisit d'utiliser des notations différentes avec $|Q|^{p-1}Q$ à la place de $|u|^{2\sigma}u$ et N à la place de d...
En effet, comme on le remarquera plus tard, plusieurs résultats sont similaires à celles obtenus dans le chapitre présédent. Par suite, ce changement au niveau des notations permet une meilleure consultation des figures qui seront présentées sans aucune confusion. De plus, On a choisit de noter la non−linéarité ainsi pour des raisons de commodité puisque les résultats théoriques connus pour cette équation ont été exprimés à l'aide de cette notation. On commence par rappeler que la stabilité orbitale de cette équation à été étudié récemment dans [50]. Les résultats obtenus sont similaires à celle du théorème 8.1.1. De plus, un résultat de stabilité partiel concernant la deuxième solution bifurquée à été prouvé théoriquement. Précisément, on a les deux résultats suivants

Théorème 9.1.1 *soit $N \geq 1$ et Q_ω l'état fondamental de l'équation* (3.2). *supposons que le problème de Cauchy de l'équation* (3.1) *est localement bien posé dans $H_0^1(B_1, \mathcal{C})$. Alors on a :*

1. *Si $1 < p \leq 1 + 4/N$, alors il existe $\omega_1 > 0$ tel que l'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est orbitalement stable pour tout $\omega \in (\omega_1, \infty)$.*
2. *Si $1 + 4/N < p < 2^* - 1$, alors il existe $\omega_2 > 0$ tel que l'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est orbitalement instable pour tout $\omega \in (\omega_2, \infty)$.*
3. *Si $1 < p \leq 2^* - 1$. alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que l'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ is est orbitalement instable pour $\omega \in (-\lambda_1, -\lambda_1 + \epsilon_0)$.*

Théorème 9.1.2 *soit $N = 1$, $p \geq 3$ et $Q_{2,\omega(s)}$ la deuxième état excité* (3.2). *supposons que le problème de Cauchy de l'équation* (3.1) *est localement bien posé dans $H_0^1(B_1, \mathcal{C})$. Alors il existe $s_1 > 0$ tel que l'état stationnaire $e^{i\omega t}Q_{2,\omega(s)}$ est orbitalement stable dans $H^1_{0,impair}(-1, 1)$ pour $s \in (-s_1, s_1)$, c'est à dire, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ te lque pour tout $v_0 \in H^1_{0,impair}(-1, 1)$ satisfaisant $\|v_0 - Q_{2,\omega(s)}\| < \delta$, on a*

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|v(t) - e^{i\theta}Q_{2,\omega(s)}\|_{H^1} < \epsilon$$

pour tout $t > 0$, avec $v(t) \in H^1_{0,impair}(-1, 1)$ la solution de l'équation (3.1) *tel que $v(0) = v_0$.*

Ce paragraphe sera organisé ainsi. D'abord, on utilise les simulations numériques pour fournir une illustration des résultats théoriques sur la stabilité et l'instabilité de l'état fondamental de (3.2) déjà obtenues en utilisant la théorie rigoureuse. Puis, on va essayer d'étudier le cas des états excités d'ordre supérieur (i.e., les solutions radiales qui bifurquent à partir d'une valeur propre de mode supérieur) pour lesquels très peu de résultats sont connus, à la fois du point de vue théorique que numérique (voir [52]). En fait, on essayera de traiter le cas du second et du troisième états excités $Q_{2,\omega}$ et $Q_{3,\omega}$ dans l'espace de dimension un. En particulier, on notera que nos simulations numériques suggèrent que lorsque $N = 1$, le résultat du théorème 9.1.2 est valable pour tout $\omega > -\lambda_2$.

Ici, notre approche est similaire à celle de [49] et [51]. Afin d'étudier la stabilité sous l'effet des perturbations radiales, on utilise la condition initiale

$$u_0(x) = (1 + \varepsilon_p)Q_{k,\omega}(x). \tag{3.3}$$

Afin d'étudier la stabilité sous l'effet des perturbations non radiales (asymétriques), on utilise la condition initiale

$$u_0(x) = Q_{k,\omega}(x - \varepsilon_c\theta(x)) \tag{3.4}$$

où $\theta \in C_0^\infty(B1)$ et $\theta(0) = 1$. En effet, à cause de la condition de Dirichlet aux bords, il n'est pas possible d'utiliser un shift latéral standard. En fait, on utilise la fonction régulière suivante dans tous nos calculs :

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}\exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}) & \text{pour } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{pour } \|x\| = 1, \end{cases} \qquad \text{pour tout } x \in B_1.$$

Ensuite, on résout le NLS (3.1) en utilisant le même schéma numérique utilisé dans le cas sans potentiel à savoir

$$\frac{i}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{1}{2\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{p+1}\frac{|u_j^{n+1}|^{p+1} - |u_j^n|^{p+1}}{|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2}\left(u_j^n + u_j^{n+1}\right) = 0.$$

Ainsi la norme L^2 discrète

$$N_n = \Delta x \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n|^2$$

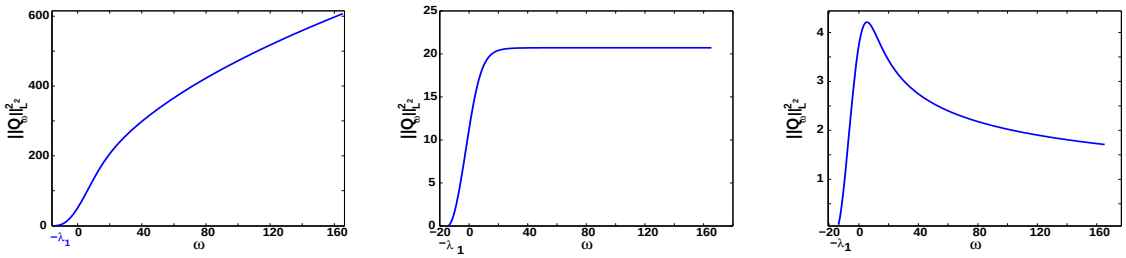
et l'énergie discrète

$$E_n = \Delta x \left(\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right|^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j^n|^{p+1} \right)$$

sont également conservées dans ce cas. Finalement, on rappelle que l'on utilisera fréquemment la fonction

$$F(\varepsilon_p) = \max_{t\geq 0}\left\{ \frac{\max\limits_x |u(t,x)| - \max\limits_x |Q_{k,\omega}(x)|}{\max\limits_x |Q_{k,\omega}(x)|} \right\}, \quad \varepsilon_p > 0$$

comme mesure de la Force de la stabilité radiale.



(a) (b) (c)

FIGURE 9.1 – $\|Q_\omega\|_2^2$ en fonction de ω, ici $N = 4$ et (a) $p = 1.5$, (b) $p = 2$ et (c) $p = 2.5$.

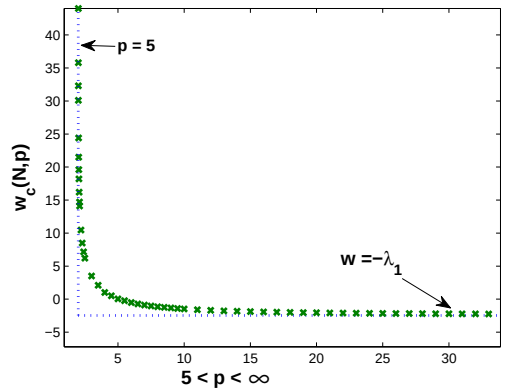


FIGURE 9.2 – $\omega_c(1,p)$ en fonction de p.

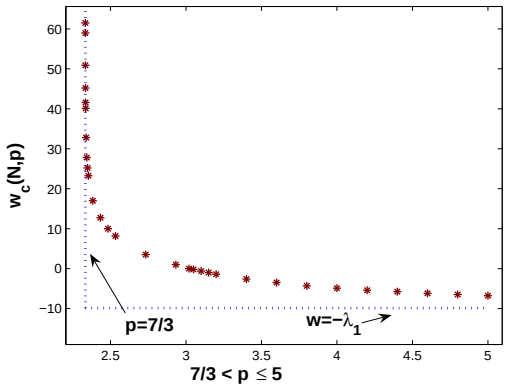


FIGURE 9.3 – $\omega_c(3,p)$ en fonction de p.

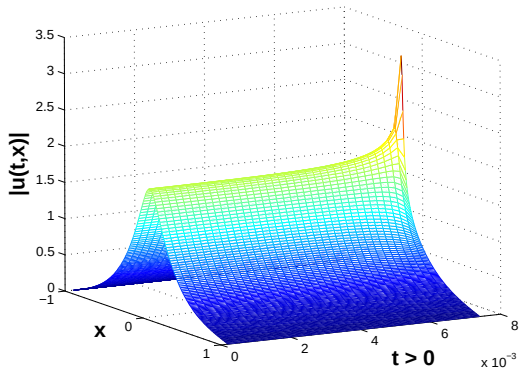


FIGURE 9.4 – Graphe de $|u(t,x)|$ relativement à t et x, $N=1$, $p=8$, $\omega=12$ et $\varepsilon_p=0.0003$.

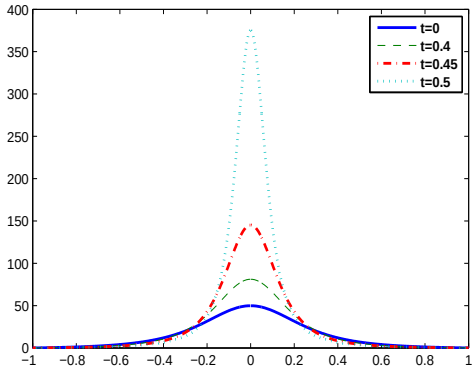


FIGURE 9.5 – Profil spatial de $u(t,x)$ pour t varié, ici $N=4$, $p=2.2$, $\varepsilon_p=0.0005$ et $\omega=6>w_c(4,2.2)$.

9.2 Stabilité de l'état fondamental

9.2.1 Critère de stabilité

On commence par l'étude du comportement de la norme L^2 en fonction de la fréquence ω en variant l'exposant p et la dimension N. Cela nous permettra de généraliser le résultat théorique déjà établi uniquement restreint aux petites et très grandes fréquences. On représente dans la Figure 9.1 les résultats obtenus dans le cas $N=4$ pour différentes valeurs de p. On peut signaler dans les deux premiers graphes que $\|Q_\omega\|_{L^2}^2$ est une fonction strictement croissante de ω dans les cas critique et sous-

critique (i.e., quand $1 < p \leq 1 + 4/N$). D'autre part, le troisième graphe montre que pour $1 + 4/N < p < 1 + 4/(N-2)$, cette courbe admet un seul point critique en une fréquence particulière que l'on désignera par $\omega_c := w_c(N,p)$. Par la suite, on aboutit à un unique point de transition où l'on passe du régime stable au régime instable. De plus, si $\omega > w_c(N,p)$, lorsqu'on a utilisé la donnée initiale (3.3), la solution calculée semble exploser en temps fini même pour ε_p arbitrairement petit. Puisque ces mêmes profils ont été observés à travers toutes nos expérimentations pour toutes les dimensions de 1 à 5, on conjecture que :

Observation 9.2.1 *1. Si $1 < p \leq 1 + 4/N$, l'onde stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est orbitalement stable pour tout $\omega \in]-\lambda_1, +\infty[$.*

2. Si $1 + 4/N < p < 2^* - 1$, il existe $\omega_c(N,p) > 0$ tel que
- *Si $\omega \in]-\lambda_1, \omega_c(N,p)[$, alors l'onde stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est orbitalement stable.*
- *Si $\omega \in]\omega_c(N,p), +\infty[$, alors $e^{i\omega t}Q_\omega$ est fortement instable.*

Afin d'étudier la dépendance de ce cette fréquence seuil considérée en fonction de p, on a calculé $\omega_c(N,p)$ pour différentes valeurs de N et p. Les résultats obtenus dans toutes nos expérimentations (voir Figures 9.2 et 9.3), montrent que

$$\omega_c(N,p) \to \infty, \text{ quand } p \to 1 + 4/N$$

et si $N \in \{1,2\}$, alors

$$\omega_c(N,p) \to -\lambda_1, \text{ quand } p \to \infty.$$

En outre, en essayant de décrire plus précisément la dépendance de cette fréquence vis-à-vis de N et p, on a aussi étudié le comportement asymptotique de $\omega_c(N,p)$ quand $p \to 1 + 4/N$. En fait, en posant $\sigma = (p-1)/2$ et $\sigma^* = 2/(N-2)$ (dans le but de pouvoir comparer avec le cas du potentiel harmonique), on a considéré log (ω_c) par rapport à $\log(\sigma)$ et calculé les dérivées par rapport à $\log(\sigma - \sigma^*)$. Nos expérimentations indiquent que cette suite converge toujours vers une contante $\gamma \sim -0.16$ qui ne dépend pas de la dimension. On pense que cette constante doit dépendre du rayon R de la boule puisqu'il est bien connu que dans le cas de l'espace entier, l'état fondamental de (NLS) est fortement instable si $p = 1 + 4/N$.

9.2.2 La force de stabilité

Après avoir utilisé la condition de la pente afin de distinguer les solutions stables et instables, on essaye maintenant de décrire les dynamiques de stabilité dans chaque cas et d'aborder la question de la force de stabilité. Notons que dorénavant, on considèrera uniquement le cas $N = 1$.

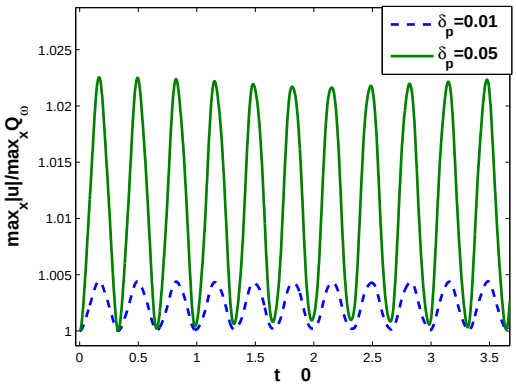


FIGURE 9.6 – $\max_x |u| / \max_x Q_\omega$ en fonction de t pour $p = 2.5$ et $\omega = 5$.

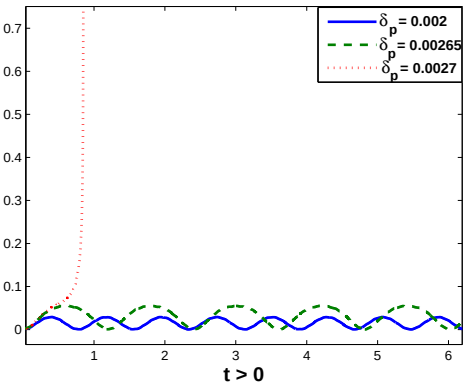


FIGURE 9.7 – $(\max_x |u| - \max_x Q_\omega) / \max_x Q_\omega$ en fonction de t pour $p = 5$ et $\omega = 1$.

Afin d'analyser la dynamique de stabilité pour l'état fondamental sous perturbation radiale, on a utilisé la condition initiale (3.3) en faisant varier progressivement la valeur de ε_p et en comparant l'amplitude de la solution obtenue avec celle de Q_ω. En cas de stabilité, (i.e., $1 < p < 5$ ou pour de petites fréquences lorsque $p \geq 5$) nos résultats montrent que ce phénomène apparaît par de petites oscillations du module de la solution calculée restant très proche de $|Q_w|$ et gardant son même profil . En effet, la solution ne semble pas converger mais reste oscillante même après une longue période. La Figure 9.6 représente les valeurs de l'amplitude normalisée $\max_x u / \max_x Q_\omega$ en fonction de t pour $p = 2.5$, $\omega = 5$ et avec les perturbations de l'amplitude respectivement $\varepsilon_p = 0.01$ et 0.05. Les profils obtenus montrent que les oscillations ne sont pas parfaitement périodiques. Cependant, en réalisant les mêmes tests pour de grandes valeurs de temps, on a clairement observé une certaine forme de symétrie globale (de grande période) qui se manifeste, ce qui suggère que la fluctuation maximale est atteinte pour de petites valeurs de temps. Dans la Figure 9.7, on donne les résultats concernant le cas critique $p = 5$. On remarque que pour de petites valeurs de ε_p, quelques oscillations similaires à celles obtenues dans le cas sous-critique viennent d'apparaître. Mais, en augmentant la perturbation, la solution obtenue semble exploser. Notons aussi que le même phénomène a été observé dans le cas surcritique $p > 5$ pour de petites fréquences. Ensuite, on présente dans le Tableau 9.1(a) les valeurs de la fluctuation maximale F obtenues pour des valeurs variées de p, ω et ε_p. Notre but est d'étudier la force de la stabilité radiale relativement à différents paramètres. Nos résultats montrent qu'à p fixé, la stabilité décroît en augmentant ω. Cela signifie que pour de grandes fréquences, même si Q_ω est stable, les perturbations doivent être aussi petites que possible pour que les solutions restent proches de l'état fondamental. En outre, les valeurs obtenues

TABLE 9.1 – Valeurs de la fluctuation maximale $F(\varepsilon_p)$ obtenues avec la donnée initiale $(1+\varepsilon_p)Q_\omega$, $\varepsilon_p \in \{0.01, 0.05\}$, $\omega \in \{2, 5, 20\}$ et $1 \leq p \leq 5$.

(a) $\varepsilon_p = 0.01$

ω	$\omega = 2$	$\omega = 5$	$\omega = 20$
p	F	F	F
$p = 1.5$	0.026%	0.05%	0.17%
$p = 2$	0.11%	0.19%	0.6%
$p = 2.5$	0.24%	0.42%	1%
$p = 3$	0.42%	0.8%	1.8%
$p = 3.5$	0.7%	1.35%	3%
$p = 4$	1%	2.1%	5.25%
$p = 4.5$	1.45%	3.33%	12%
$p = 5$	2.1%	6.1%	coll.

(b) $\varepsilon_p = 0.05$

ω	$\omega = 2$	$\omega = 5$	$\omega = 20$
p	F	F	F
$p = 1.5$	0.13%	0.24%	0.9%
$p = 2$	0.53%	1%	2.7%
$p = 2.5$	1.2%	2.25%	5.4%
$p = 3$	2%	4.25%	9%
$p = 3.5$	3.6%	7.1%	14%
$p = 4$	4.9%	12.5%	25%
$p = 4.5$	7.5%	23%	53%
$p = 5$	10.3%	coll.	coll.

TABLE 9.2 – Valeurs de la fluctuation maximale $F(\varepsilon_p)$ obtenues avec la condition initiale $u_0(x) = (1+\varepsilon_p)Q_{2,\omega}(x)$.

(a) $p = 3$

ε_p	$\varepsilon_p = 5.10^{-3}$	$\varepsilon_p = 10^{-3}$
ω	$F(5.10^{-3})$	$F(10^{-3})$
$\omega = -5$	0.22 %	0.05 %
$\omega = 20$	0.4 %	0.1 %
$\omega = 40$	0.8 %	0.14 %
$\omega = 100$	1 %	0.2 %

(b) $p = 5$

ε_p	$\varepsilon_p = 5.10^{-4}$	$\varepsilon_p = 10^{-4}$
ω	$F(5.10^{-4})$	$F(10^{-4})$
$\omega = -5$	0.035 %	0.005 %
$\omega = 20$	0.25 %	0.05 %
$\omega = 40$	0.9 %	0.2 %
$\omega = 100$	12 %	2.5 %

montrent aussi qu'à ω fixé, la stabilité est d'autant moins marquée que p augmente.

9.2.3 La stabilité sous perturbations non radiales

On traite maintenant le cas d'une perturbation non radiale en utilisant la condition initiale (3.4). Quand Q_ω est stable, sous l'influence d'un décalage latéral, la stabilité orbitale apparaît par des oscillations latérales du module de la solution obtenue autour de Q_ω. En effet, comme on l'a aussi signalé dans le cas d'une perturbation uniforme, la solution calculée ne semble pas converger et garde un mouvement latéral, gardant le même profil que Q_ω. Pour mettre en évidence ce comportement, on a exécuté quelques tests avec des valeurs relativement grandes de ε_c de sorte que les déplacements de la solution soient mieux observés. Ainsi, on présente dans la Figure 9.8, les profils obtenus pour $p = 8$, $\omega = -1$ et $\varepsilon_c = 0.1$. Rappelons que, relativement à cette valeur

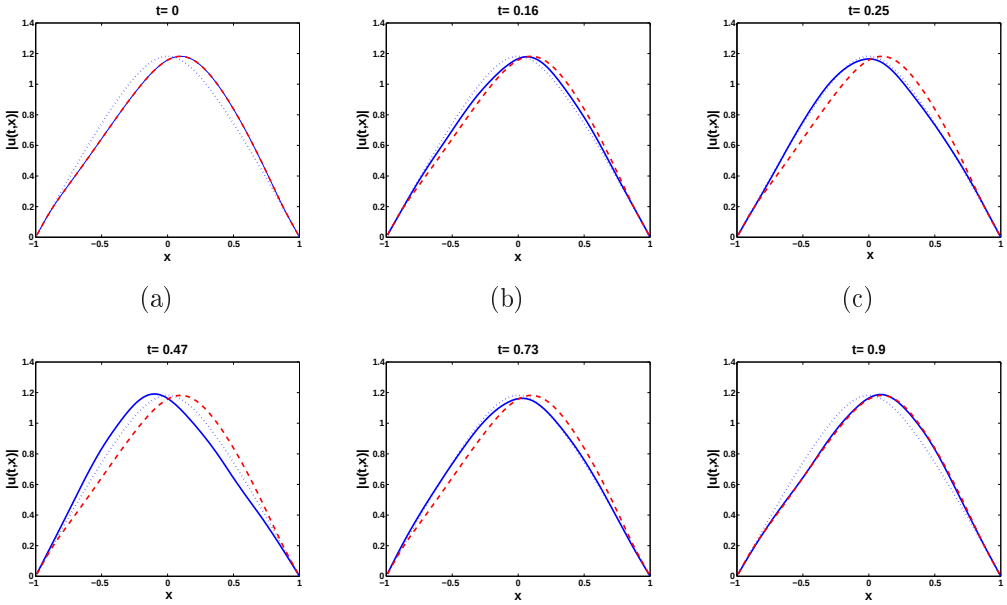


FIGURE 9.8 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et Q_ω (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 8$, $\omega = -1$ et $\varepsilon_c = 0.1$.

surcritique de p, il existe une fréquence seuil de stabilité ω_c. En utilisant la condition de pente, on a vérifié numériquement que $\omega_c \approx 2.1$. Par conséquent, Q_{-1} est orbitalement stable dans ce cas. Il est remarquable dans cette figure que la solution perturbée par un déplacement depuis la droite revient rapidement de droite et devient presque superposée sur Q_ω en $t = 0.25$. Puis, elle garde un mouvement latéral jusqu'à atteindre rapidement la droite de Q_ω. Finalement, elle revient rapidement à la donnée initiale u_0. Le même comportement se répète après, d'une manière quasi-périodique pour des valeurs plus grandes de t.

On s'intéresse maintenant au cas d'une onde instable. Comme on l'a déjà signalé, lorsque $p > 1 + 4/N$ et $\omega > \omega_c$, l'instabilité orbitale est en fait une instabilité forte et la solution obtenue en utilisant la condition initiale du type (3.3) explose en temps fini pour des valeurs arbitrairement petites de ε_p. Ici, on se pose la question suivante : quel comportement aurait Q_ω en présence d'une perturbation asymétrique ? Afin de s'en sortir, on traite encore le cas $p = 7$ mais en utilisant maintenant $\omega = 4 > \omega_c(1,7)$. La Figure 9.9 montre l'évolution de la solution relativement à de petites valeurs de $\varepsilon_c = 0.0002$. On peut remarquer que cette petite déviation cause une décroissance considérable et rapide de la norme infinie ce qui pourrait donner l'impression qu'on est dans le cas d'instabilités à diffraction totale (c'est à dire $\|u(t,.)\|_\infty \to 0$). Mais, comme ceci

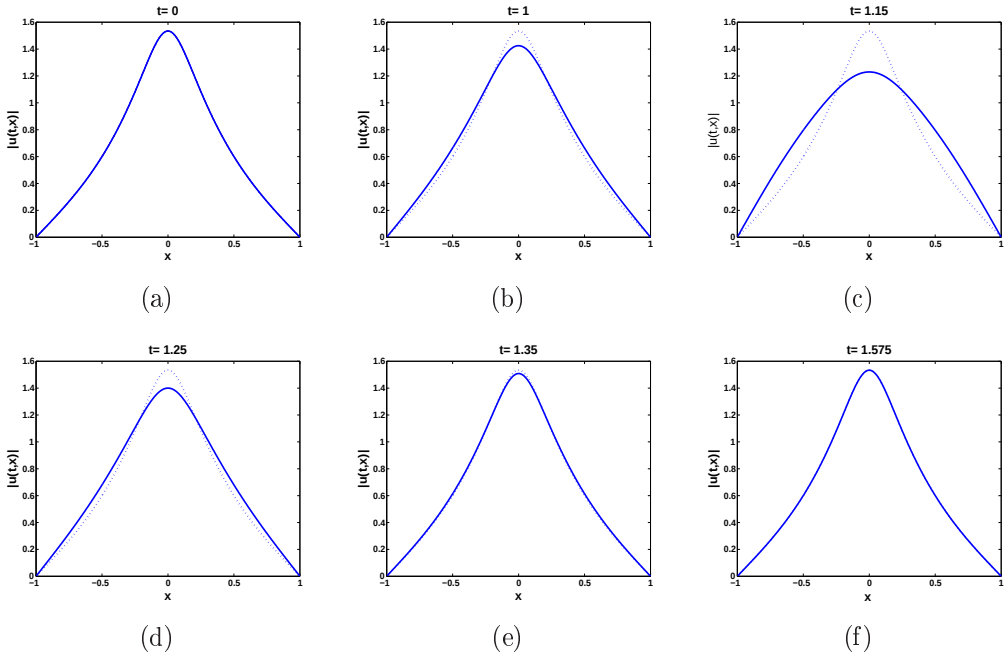


FIGURE 9.9 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et Q_ω (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 8$, $\omega = 4$ et $\varepsilon_c = 0.0003$.

est impossible à cause de la conservation de la norme L^2 tant que le domaine est borné, ce phénomène sera rapidement arrêté et la solution reviendra rapidement superposée avec la donnée initiale u_0. Puis, ce comportement se répétera quasi-périodiquement quand t est plus grand. On doit signaler qu'on n'a remarqué aucun signe d'instabilité par dérive (c'est à dire le déplacement d'une partie non négligable de la norme L^2 dans le sens se la perturbation) comme il est souvent prévu pour ce type de perturbation.

9.3 Stabilité du second état excité $Q_{2,\omega}$

9.3.1 Stabilité dans $H^1_{0,impair}(-1,1)$

Par le Théorème 9.1.2, on sait que $Q_{2,\omega}$ est orbitalement stable sous les perturbations impaires pour les fréquences très proches de $-\lambda_2$. Notre premier objectif sera alors d'essayer de comprendre les dynamiques de stabilité dans ce cas en utilisant la condition initiale (3.3) (qui présente une perturbation impaire ici). Alors, on voudrait chercher si le même mécanisme apparaîtra pour de grandes valeurs de ω. Il faut bien noter que pour la simulation numérique dans ce cas, il est plus convenable d'utiliser un diagramme numérique qui renforce la symétrie de la solution calculée. En effet, on a

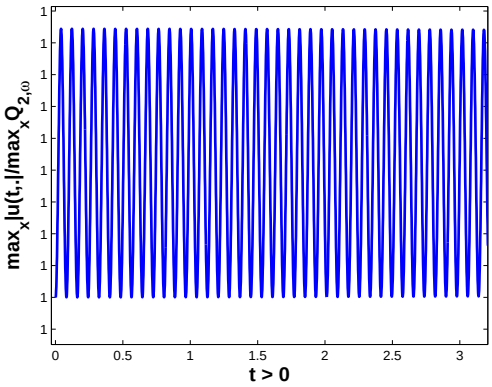


FIGURE 9.10 – $\max_x |u|/\max_x Q_{2,\omega}$ en fonction de t pour $p = 3$, $\omega = -7.5$ et $\varepsilon_p = 0.0001$.

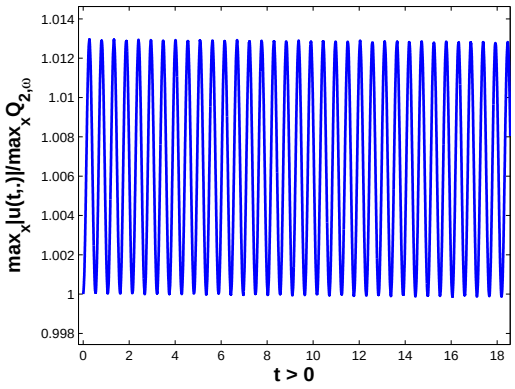


FIGURE 9.11 – $\max_x |u|/\max_x Q_{2,\omega}$ en fonction de t pour $p = 5$, $\omega = 100$ et $\varepsilon_p = 0.00005$.

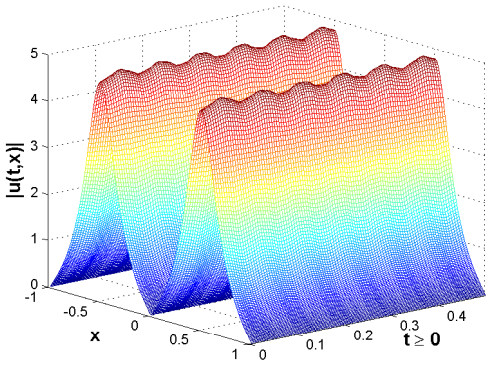


FIGURE 9.12 – Graphe de $|u(t,x)|$ par rapport à t et x, $p = 3$, $\omega = 0$ et $\varepsilon_p = 0.01$.

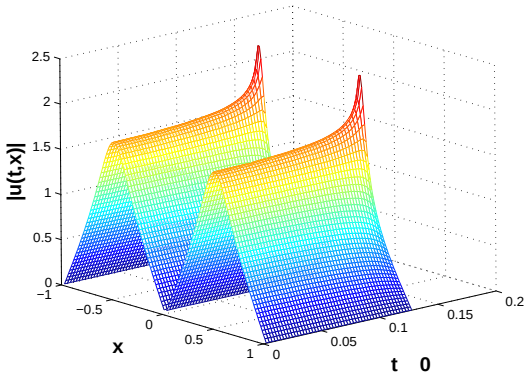
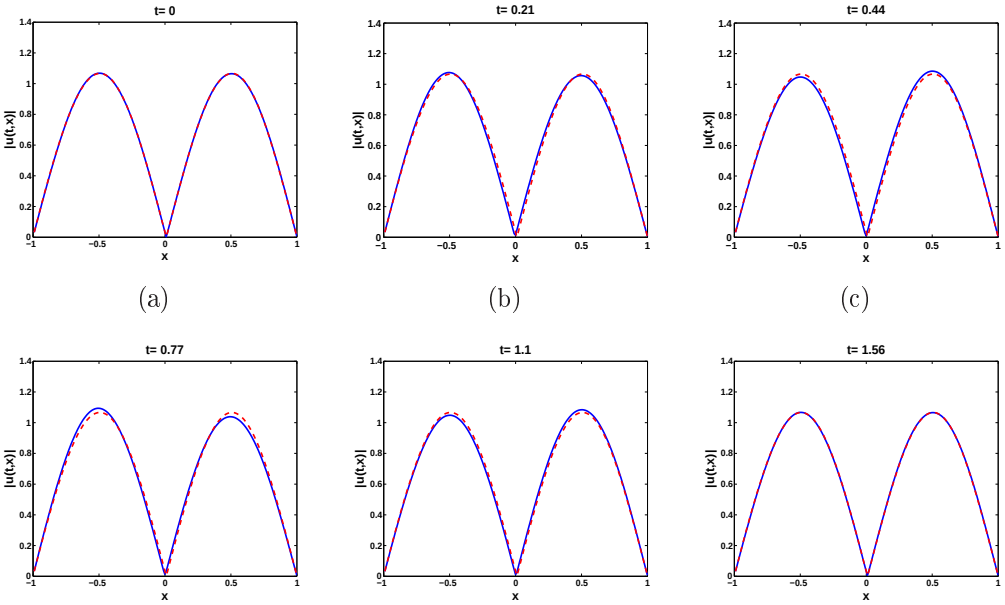


FIGURE 9.13 – Graphe de $|u(t,x)|$ relativement à t et x, $p = 8$, $\omega = 7$ et $\varepsilon_p = 0.001$.

remarqué que cette onde stationnaire montre une "forte" instabilité par dérive en présence d'une perturbation asymétrique (comme on le verra dans le paragraphe suivant). Cependant, ceci peut être malheureusement causé par l'approximation numérique elle-même. Pour cette raison, il est très difficile de déterminer l'influence due seulement à une perturbation impaire. Donc, en prenant en considération que la solution devrait être impaire, on résout l'équation (3.1) seulement sur $[0, 1]$. De plus, on injecte dans le diagramme numérique, la condition $u(t, \delta x) = u(t, -\delta x)$ pour tout t positif strict.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

FIGURE 9.14 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{2,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 3$, $\omega = -9$ et $\varepsilon_c = 0.01$.

Nos calculs montrent que les résultats obtenus avec et sans cette méthode sont souvent différents l'un de l'autre surtout dans le cas $Q_{2,\omega}$.

Afin d'illustrer le Théorème 9.1.2, on verra dans la Figure 9.10, les valeurs normalisées $\max_x |u|/\max_x |Q_{2,\omega}|$ en fonction de t pour la condition initiale (3.3) avec $p = 4$, $\omega = -7.5$ et $\varepsilon_p = 0.002$. On peut voir que cette perturbation mène à une oscillation de l'amplitude de la solution tout en restant très proche de celle de $Q_{2,\omega}$. En outre, comme le montre la Figure 9.12, on a clairement observé que la solution garde le même profil que $Q_{2,\omega}$ pour des valeurs suffisamment grandes du temps et même pour ε_p supérieur. On voudrait savoir si le résultat obtenu par le Théorème 9.1.2 (qui concerne seulement les petites fréquences), reste valable pour les autres valeurs de ω. En effet, cela dépend de la non−linéarité. En fait, après avoir testé plusieurs valeurs de ω et p, on a signalé que lorsque $1 < p \leq 5$, la solution obtenue (en utilisant la même condition initiale (3.4)) montre la même déviation que celle des petites fréquences même si on augmente ω. Par exemple, en réalisant la même simulation que celle représentée dans la Figure 9.10 mais avec des valeurs plus grandes de p et ω, ($p = 5$ au lieu de 3 et $\omega = 100$ au lieu de -7.5), on peut clairement montrer dans la Figure 9.11 qu'on obtient des oscillations similaires dans les deux cas (même si elles sont plus importantes dans le calcul précédent). Par la suite, on donne au Tableau 9.1(b) les valeurs maximales de la fluctuation F calculées

dans les cas $p = 3$ et $p = 5$ pour des valeurs variées de ω. Il est important de signaler que F décroit en diminuant ε_p pour de petites fréquences aussi que pour les grandes fréquences et presque avec le même rapport. Cela va garantir non seulement que la solution perturbée garde le même profil que $Q_{2,\omega}$ mais aussi qu'il est toujours possible de rester proche de l'orbite de cette onde stationnaire et en utilisant des perturbations suffisamment petites. Notons aussi que ces valeurs illustrent parfaitement le fait que la force de stabilité dans $H^1_{0,impair}$ varie de la même manière que celle de la stabilité de Q_ω en présence d'une perturbation radiale : i.e., elle décroit en augmentant p ou ω et atteint le niveau le plus bas quand $p = 1 + 4/N$. Finalement, notons que les mêmes calculs faits dans le cas surcritique $p > 1+4/N$, suggèrent que le résultat du théorème 9.1.2 n'est pas valide pour ω assez grand. En fait, comme le montre la Figure 9.13, si ω n'est pas très proche de $-\lambda_2$, les solutions calculées semblent exploser même en utilisant de petites perturbations.

Il est certain que ces résultats obtenus sont limités aux perturbations particulières impaires obtenues en utilisant la condition initiale (3.3) et ne concernent pas toutes les perturbations impaires possibles dans $H^1_{0,\text{impair}}(-1,1)$. Pourtant, le fait que le comportement des solutions perturbées de cette manière ne change pas en modifiant largement ω, suggère que le critère de stabilité sous l'influence des perturbations impaires (qui a été prouvé théoriquement par le Théorème 9.1.2) reste valide pour tout $1 < p \leq 1+4/N$ indépendamment de ω. Mais, on devrait prêter attention en énonçant la conclusion de ce paragraphe :

Observation 9.3.1 *L'onde stationnaire $Q_{2,\omega}$ est numériquement stable sous la perturbation impaire* (3.3) *pour tout $\omega > -\lambda_2$, si $1 < p \leq 1 + 4/N$ mais seulement pour de petites fréquences lorsque $p > 1 + 4/N$. En outre, dans le cas précédent, la donnée initiale* (3.3) *avec $0 < \varepsilon_p < 1$ mène à une explosion en temps fini.*

9.3.2 Stabilité sous perturbations non radiales

On commence l'étude du cas $1 < p < 5$ en présentant dans la Figure 9.14, l'évolution de la solution pour $p = 3$, $\varepsilon_c = 0.01$ et une valeur de $\omega = -9$ qui est suffisamment proche de $-\lambda_2 = -\pi^2$. Cette figure concerne seulement les valeurs du temps comprises entre $t = 0$ et $t = 1.5$. En effet, en calculant $u(t,x)$ jusqu'à $t = 60$, on a clairement remarqué qu'il évolue de manière quasi-périodique en terme de temps et les profils observés dans la Figure 9.14 sont suffisants pour décrire son comportement global en présence de la perturbation non symétrique (3.4). On peut clairement remarquer que $|u|$ reste très proche de $|Q_{2,\omega}|$ même si la perturbation correspondante $\varepsilon_c = 0.01$ est relativement grande. En réalité, en exécutant la même expérience avec $\varepsilon_c = 0.001$, les deux courbes ($|u|$ et $|Q_{2,\omega}|$) sont quasiment identiques. Afin de mieux comprendre cette dynamique qui suggère la stabilité de cette onde sous ce type de perturbation, on a aussi étudié le partage de la masse $\|u\|_2^2$ entre le côté gauche $x < 0$ et le côté droit

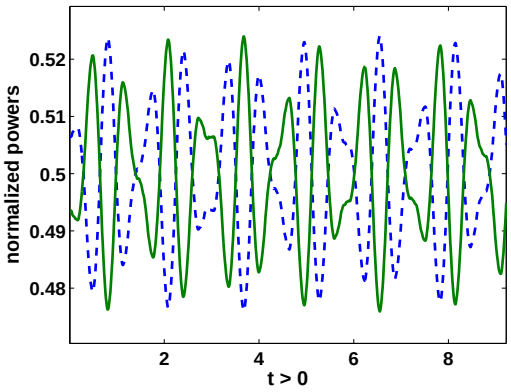


FIGURE 9.15 – Les énergies normalisées $\int_0^\infty |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne continue) et $\int_{-\infty}^0 |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne interrompue) pour la simulation de la Figure 9.14.

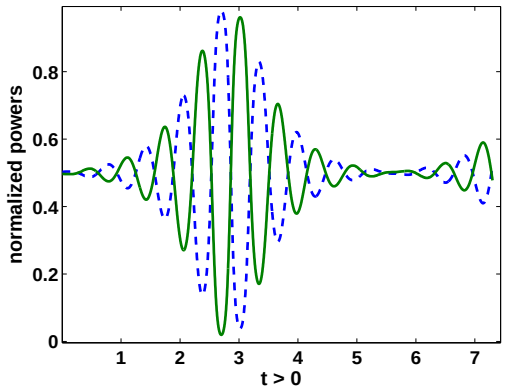


FIGURE 9.16 – Les énergies normalisées $\int_0^\infty |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne continue) et $\int_{-\infty}^0 |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne interrompue) pour la simulation de la Figure 9.17.

$x > 0$. Comme exposé dans la Figure 9.15, à cause de ce petit décalage initial à droite, seule une petite quantité de l'énergie suit ce mouvement ($\approx 0.6\%$). Celle-ci sera par la suite réfléchie par le bord réfléchissant (ou le mur) $x = 1$. Ainsi, la quantité d'énergie déplacée va croitre à chaque instant en heurtant les deux bords $x = 1$ et $x = -1$ jusqu'à atteindre une valeur maximale de 2% lorsque $t \approx 1$. Toutefois, cette oscillation de masse va décroitre promptement en gardant la solution proche de l'orbite de $Q_{2,\omega}$ et atteint même la valeur 0 lorsque $t \approx 1.5$. Le même phénomène se répètera plus loin quasi-périodiquement permettant à la solution u de garder un profil similaire à celui exposé dans la Figure 9.14.

Afin d'étudier l'influence de la fréquence ω, on présente dans les Figures 9.16 et 9.17 les résultats obtenus avec la même valeur $p = 3$ mais lorsque ω est légèrement plus grande ($\omega = -4$ au lieu de -9). On peut signaler que les profils obtenus sont significativement différents. En effet, même si la valeur de ε_c utilisée pour cette simulation est dix fois plus petite que celle utilisée dans le cas $\omega = -9$, ce petit décalage provoque une énorme modification dans le profil de la solution. Plus précisément, la quantité de masse déplacée par la perturbation croit rapidement à cause des bords réfléchissants et presque toute l'énergie jaillit en oscillant entre le côté gauche ($x < 0$) et le côté droit ($x > 0$), (voir Figure 9.16), de sorte que pour $t \approx 3$, $\approx 95\%$ de la norme L^2 est en mouvement entre les côtés gauche et droit.

Quand $p \geq 5$, nos simulations montrent que ce même phénomène a lieu si la fréquence est suffisamment petite. Par exemple, on présente dans la Figure 9.18 l'évolution

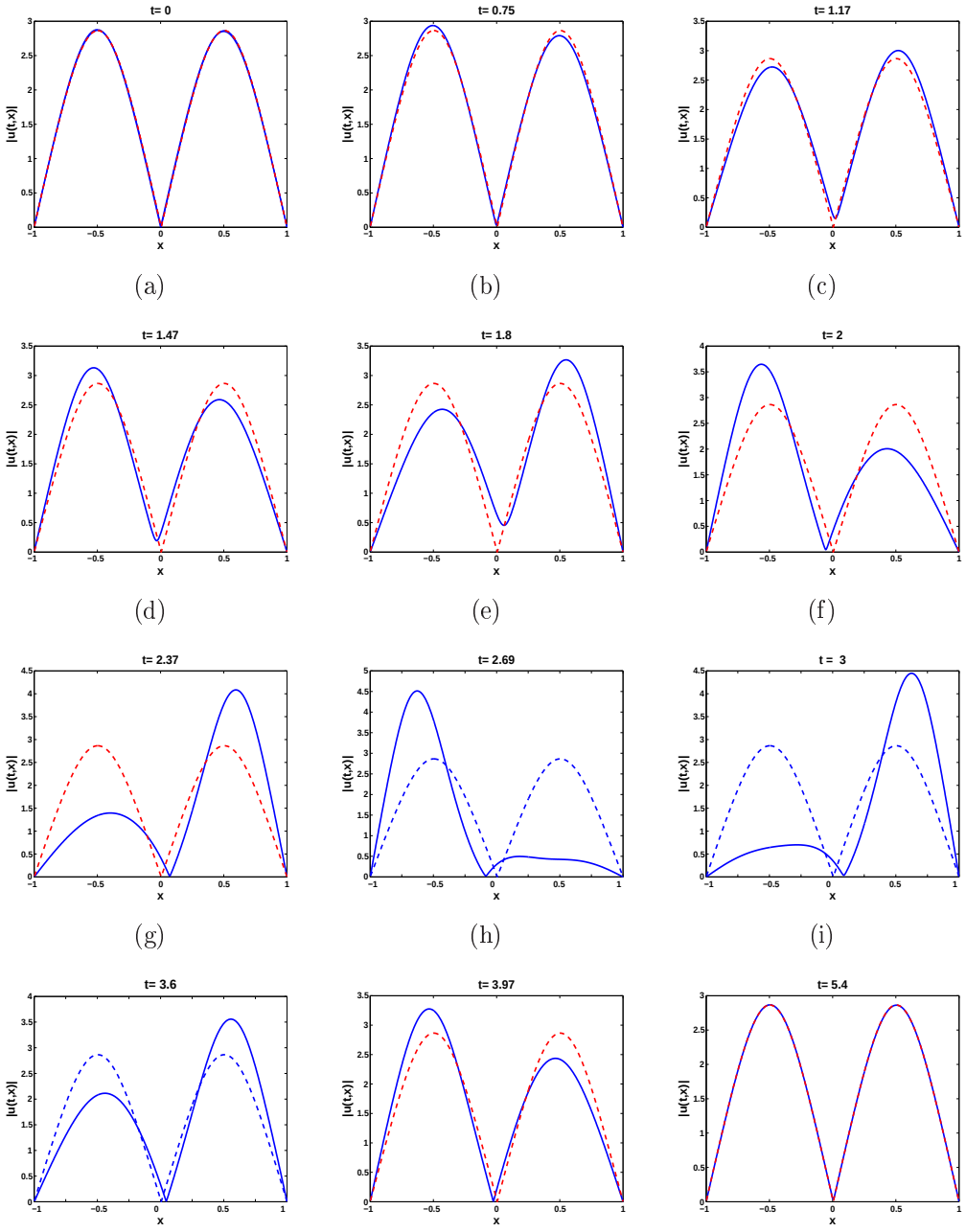


FIGURE 9.17 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{2,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 3$, $\omega = -3.8$ et $\varepsilon_c = 0.001$.

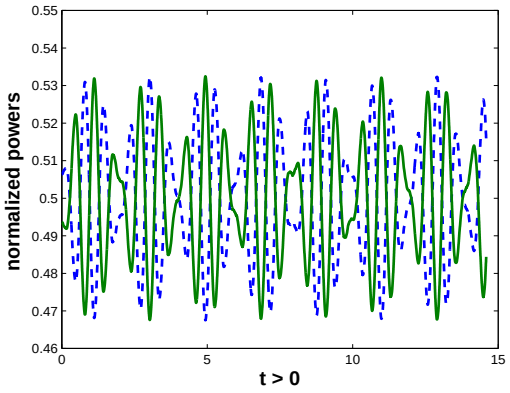


FIGURE 9.18 – Les énergies normalisées $\int_0^\infty |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne continue) et $\int_{-\infty}^0 |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne interrompue) pour $p = 7$, $\omega = -9.3$ et $\varepsilon_c = 0.01$.

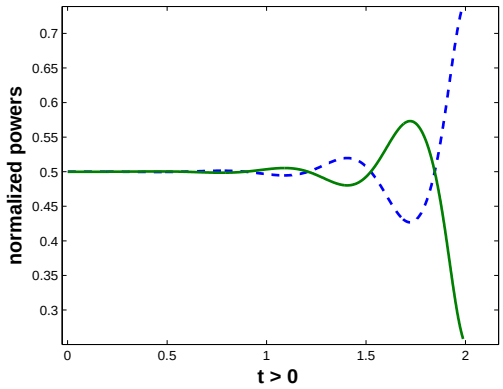
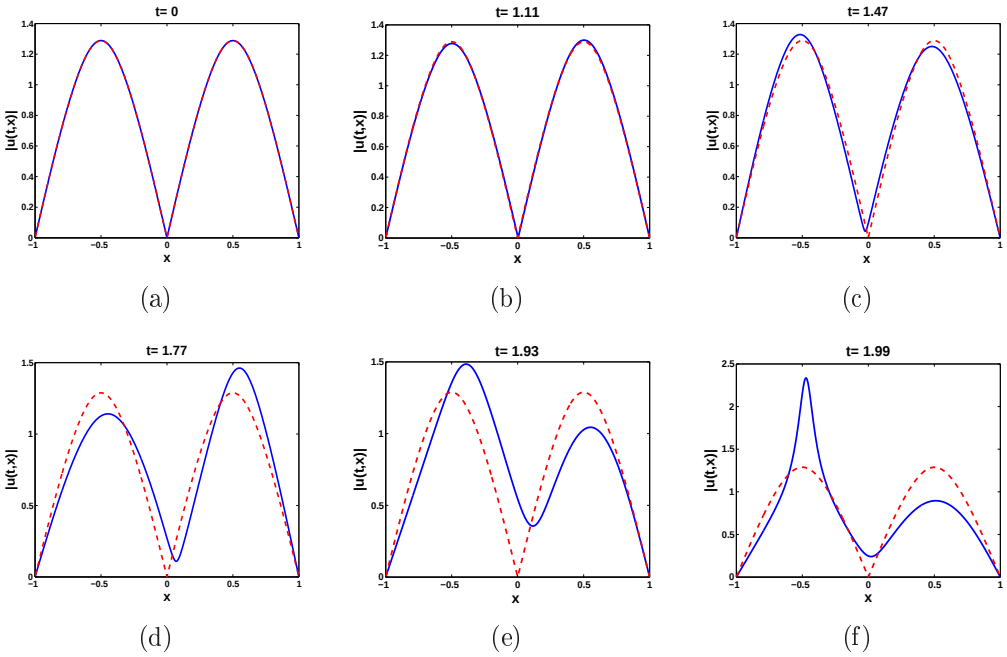


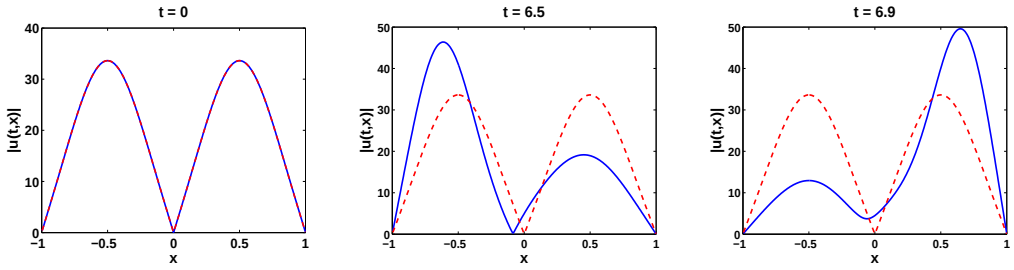
FIGURE 9.19 – Les énergies normalisées $\int_0^\infty |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne contiune) et $\int_{-\infty}^0 |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne interrompue) pour la simulation de la Figure 9.20.



(a) (b) (c)

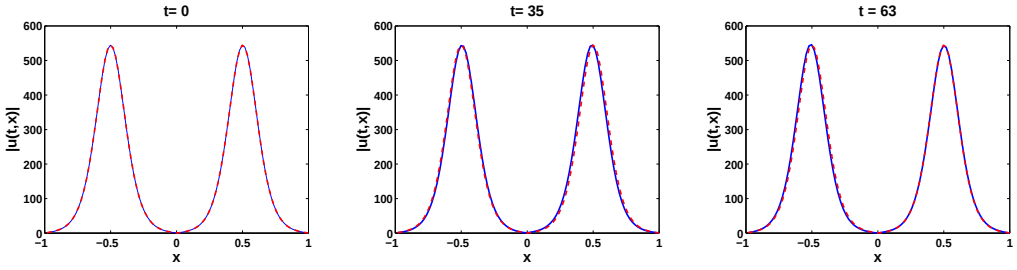
(d) (e) (f)

FIGURE 9.20 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{2,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 8$, $\omega = -7$ et $\varepsilon_c = 0.0001$.



(a) (b) (c)

FIGURE 9.21 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{2,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 1.9$, $\omega = 10$ et $\varepsilon_c = 0.0001$.



(a) (b) (c)

FIGURE 9.22 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) and $Q_{2,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 1.9$, $\omega = 200$ et $\varepsilon_c = 0.002$.

de l'énergie pour $p = 7$ et $\omega = -9.3$. On peut évidemment remarquer que l'effet des bords réfléchissants est promptement réduit et le taux de masse déplacée ne dépasse pas 3%. Par ailleurs, on a vérifié que la solution garde presque le même profil quand ω est petit, ce qui suggère que le même résultat observé quand $p < 5$ est vérifié en fait pour tout $p > 1$ si ω est suffisamment proche de $-\lambda_2$. En répétant la même simulation et en augmentant légèrement ω jusqu'à la valeur -7, on trouve que la solution obtenue modifie son comportement. En effet, comme le montre les Figures 9.19 et 9.20, une partie importante de la masse est transportée par cette perturbation. De plus, comme prévu, la non−linéarité surcritique focalisante agit simultanément avec les bords pour former rapidement une singularité. Ainsi, toute "la masse" presque se concentrera en un point, celui de l'explosion.

Comme tous nos tests suggèrent que ces phénomènes sont vérifiés dans tous les cas $1 < p < 20$, on termine ce paragraphe par l'observation suivante :

Observation 9.3.2 *Pour tout $p > 1$, si ω est suffisamment proche de $-\lambda_2$ alors le*

second état excité est numériquement stable sous la perturbation non radiale (3.4). *Cependant, pour des fréquences légèrement supérieures, il subit une instabilité par dérive si* $p < 5$ *et une instabilité par dérive combinée avec une forte instabilité quand* $p \geq 5$.

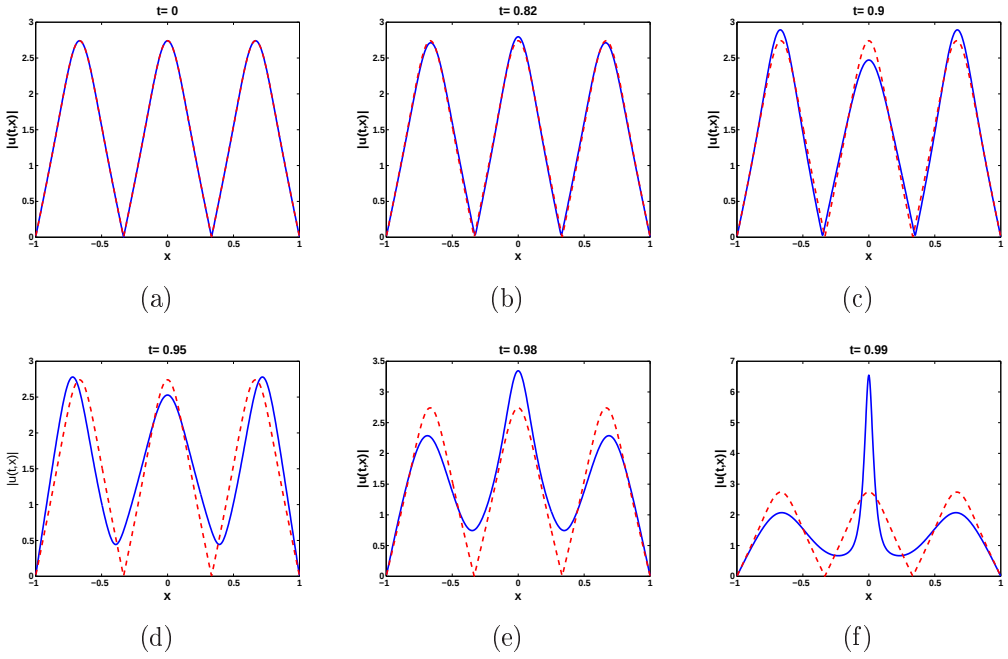
9.3.3 Le cas de très grandes fréquences

Tous nos tests ont montré que les deux phénomènes précédemment décrits se manifestent de la même manière pour tout $1 < p < 5$, à savoir la stabilité numérique de $Q_{2,\omega}$ pour ω petit et l'instabilité par dérive pour les fréquences légèrement supérieures. Néanmoins, en étudiant le cas d'une fréquence très grande ($\omega > 100$), nos tests ont prouvé que le phénomène d'instabilité déjà observé pour des fréquences moyennes, devient moins visible lorsqu'on augmente ω ou quand on diminue p. En fait, comme le montre la Figure 9.22, quand $\omega \to \infty$, la partie essentielle de $\|Q_{2,\omega}\|_{L^2}$ sera concentrée très proche de l'origine et très loin du bord. Par ailleurs, comme cette masse devient très grande dans ce cas, les oscillations éventuelles ne se manifestent pas sauf pour de très grandes valeurs de temps ce qui rend délicate l'observation numérique de ces phénomènes et nécessite un temps de calcul inaccessible. C'est pourquoi on n'est pas certain si $Q_{2,\omega}$ reste instable sous la perturbation asymétrique quand $\omega \to +\infty$. Par exemple, on va illustrer ce phénomène par les Figures 9.21 et 9.22. En fait, la première montre clairement l'instabilité de Q_2 pour $p = 1.9$, $\omega = 10$ et $\varepsilon_c = 0.0001$, alors qu'en répétant la même simulation pour les mêmes valeurs de p et en augmentant considérablement la valeur de ω vers $\omega = 200$, le profil obtenu montre que les oscillations sont très faibles et s'accèlèrent très lentement. De plus, on peut remarquer que bien que la valeur $\varepsilon_c = 0.002$ utilisée dans le second test est 20 fois plus grande que celle du premier test, quand $\omega = 10$ la solution change de profil promptement avant $t = 7$, alors que quand $\omega = 200$ la solution garde presque le même profil sauf quelques oscillations jusqu'à $t = 63$.

9.4 Le troisième état excité

9.4.1 Le cas $p \geq 5$

Maintenant, on aborde le cas du troisième état excité, i.e., la solution bifurquée de la troisième valeur propre $-\lambda_3 = 9\pi^2/4 \approx -22.2066$. On a choisi de commencer par le cas surcritique puisque, comme on le verra plus loin, les dynamiques de la solution perturbée restent approximativement les mêmes comparées à celles observées en considérant $Q_{2,\omega}$. En effet, notre simulation indique clairement que si ω est suffisamment petit, alors $Q_{3,\omega}$ semble numériquement stable. En fait, la solution calculée en utilisant la condition initiale (3.3) semble avoir des oscillations similaires à partir de la solution exacte comme pour le second état lié $Q_{2,\omega}$. Cependant, pour des fréquences



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

FIGURE 9.23 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{3,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 5$, $\omega = 8$ et $\varepsilon_p = 0.0001$.

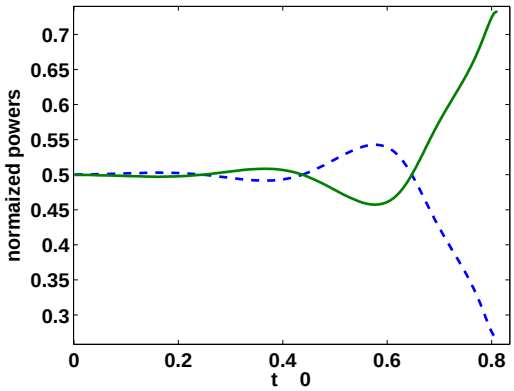


FIGURE 9.24 – Les énergies normalisées $\int_0^\infty |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne continue) et $\int_{-\infty}^0 |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (line interrompue) pour la simulation de la Figure 9.26.

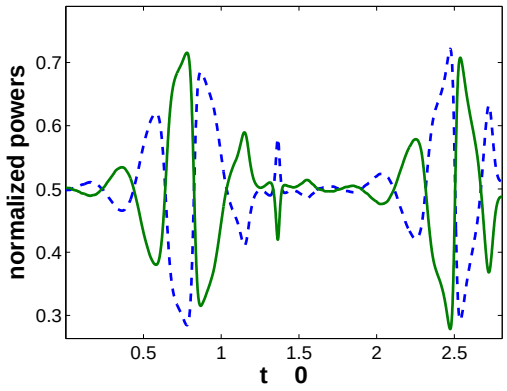


FIGURE 9.25 – Les énergies normalisées $\int_0^\infty |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne continue) et $\int_{-\infty}^0 |u|^2 / \int_{-\infty}^\infty |u_0|^2 dx$ (ligne interrompue) pour la simulation de la Figure 9.27.

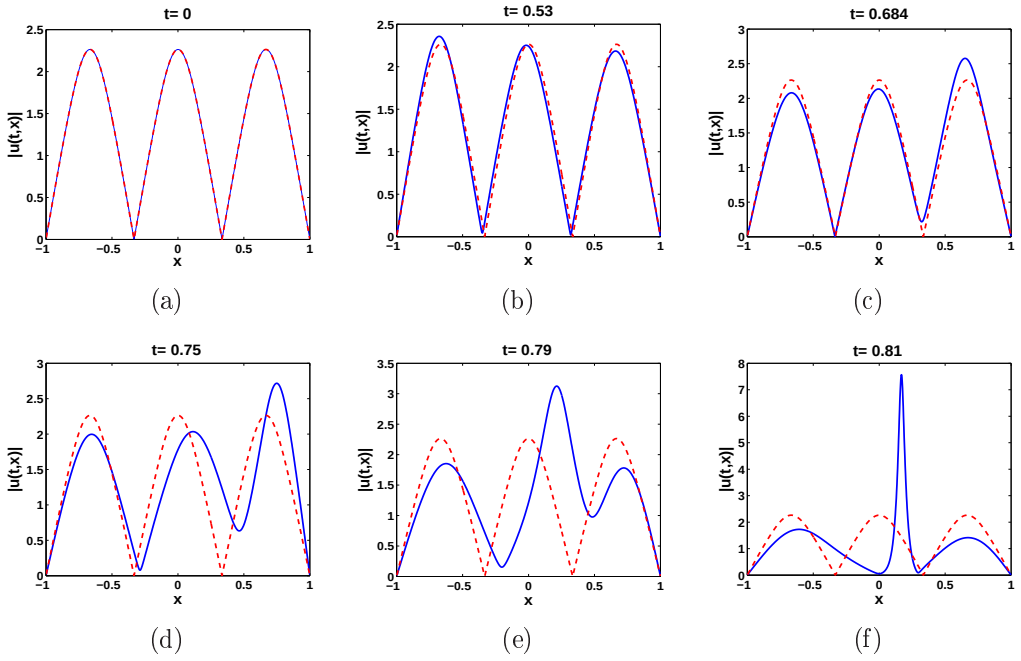


FIGURE 9.26 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{3,\omega}$ (line interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 5$, $\omega = -7$ et $\varepsilon_c = 0.0001$.

légèrement supérieures, les solutions calculées explosent en temps fini même pour de très petites valeurs de ε_p. Comme illustration, on montre dans la Figure 9.23 le résultat pour $p = 5$, $\omega = 8$ et $\varepsilon_p = 0.0001$. On peut observer de petites oscillations focalisantes-défocalisantes au début, mais les effets réfléchissants causés par les conditions du bord augmentent promptement l'amplitude de ces oscillations et permettent de focaliser la solution vers l'origine. Par conséquent, l'influence de l'effet focalisant domine celui du terme de diffraction défocalisant et cause l'explosion de $u(t,x)$ en temps fini.

En utilisant les perturbations non radiales, les résultats obtenus sont très similaires à ceux trouvés pour $Q_{2,\omega}$. En effet, comme le montre la Figure 9.29, lorsque ω est proche de $-\lambda_3$, le petit décalage initial cause des oscillations de la norme L^2 entre les cotés droit et gauche dont l'amplitude décroit rapidement sans modifier le profil de la solution. Alors que, pour des fréquences légèrement supérieures, même en utilisant des perturbations asymétriques infinitésimales, toute la masse presque est déviée. Par ailleurs, l'instabilité par dérive semble être associée à une explosion en temps fini quand $p \geq 5$. (voir Figures 9.26 et 9.24). Par la suite, on énonce l'observation simple suivante :

Observation 9.4.1 *Lorsque $p \geq 5$, les deux états stationnaires $Q_{2,\omega}$ et $Q_{3,\omega}$ possèdent des caractéristiques de stabilité similaires.*

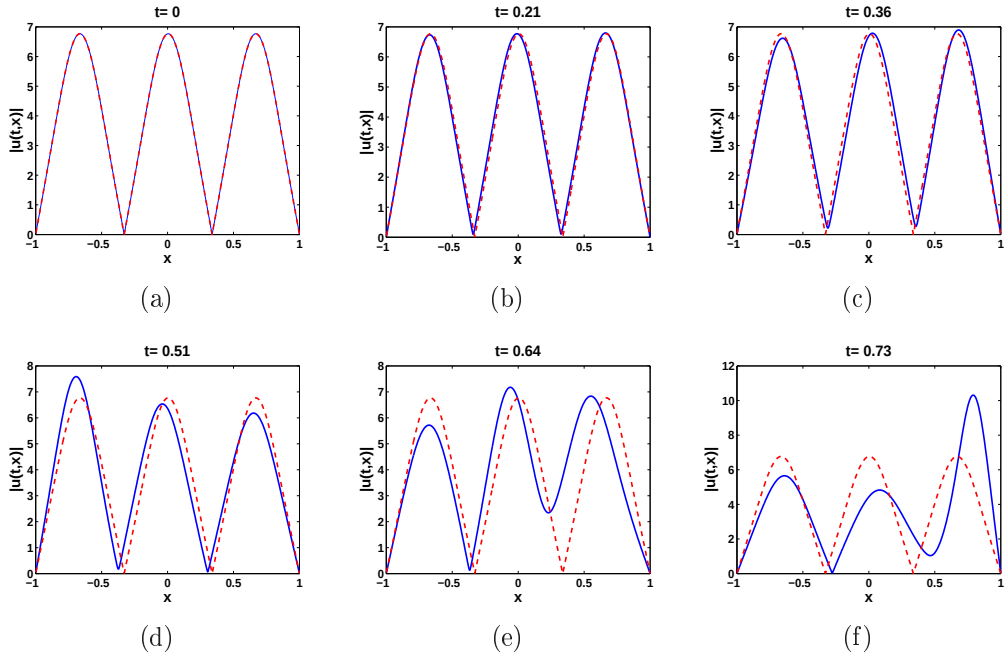


FIGURE 9.27 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{3,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 3$, $\omega = 10$ et $\varepsilon_c = 0.0005$.

9.4.2 Le cas $1 < p < 5$

Contrairement au cas surcritique, lorsque $1 < p < 5$, nos simulations numériques suggèrent que les propriétés de stabilité de $Q_{3,\omega}$ sont bien différentes de celles de $Q_{2\omega}$ et l'étude semble plus délicate . Afin de mieux comprendre ce phénomène particulier, on va restreindre notre étude dans ce paragraphe à l'exposant $p = 3$ et on commence par le cas des perturbations radiales.
La Figure 9.30 expose les valeurs normalisées $\max_x |u|/\max_x |Q_{3,\omega}|$ en fonction de t, pour $\omega = -21.5$,$\varepsilon_p \in \{0.01, 0.05\}$ (et $p = 3$). Notons qu'une perturbation $\varepsilon_p = 0.05$ induit de petites oscillations et $F(0.05) = 0.027\%$. De plus, en réduisant ε_p de 0.05 à 0.01, il s'ensuit une réduction de l'amplitude relative des oscillations par presque cinq fois, ainsi $F(0.01) = 0.005\%$. De plus, comme le profil de la solution reste non modifié pour beaucoup de temps, on conclut que $Q_{3,\omega}$ est numériquement stable sous les perturbations radiales (3.3). On a fait le même test en augmentant continûment ω à partir de $-\lambda_3$ et on a clairement observé le même comportement pour toutes les petites fréquences jusqu'à la valeur $\omega = -6$ pour laquelle on a vérifié qu'une perturbation de $\varepsilon_p = 0.005$ induit seulement de petites oscillations, jusqu'à $t = 80$ et $F(0.005) = 0.07\%$. En outre, en réduisant ε_p à 0.001, l'amplitude des oscillations décroit approximativement par le même rapport que celui obtenu quand $\omega = -21.5$, de

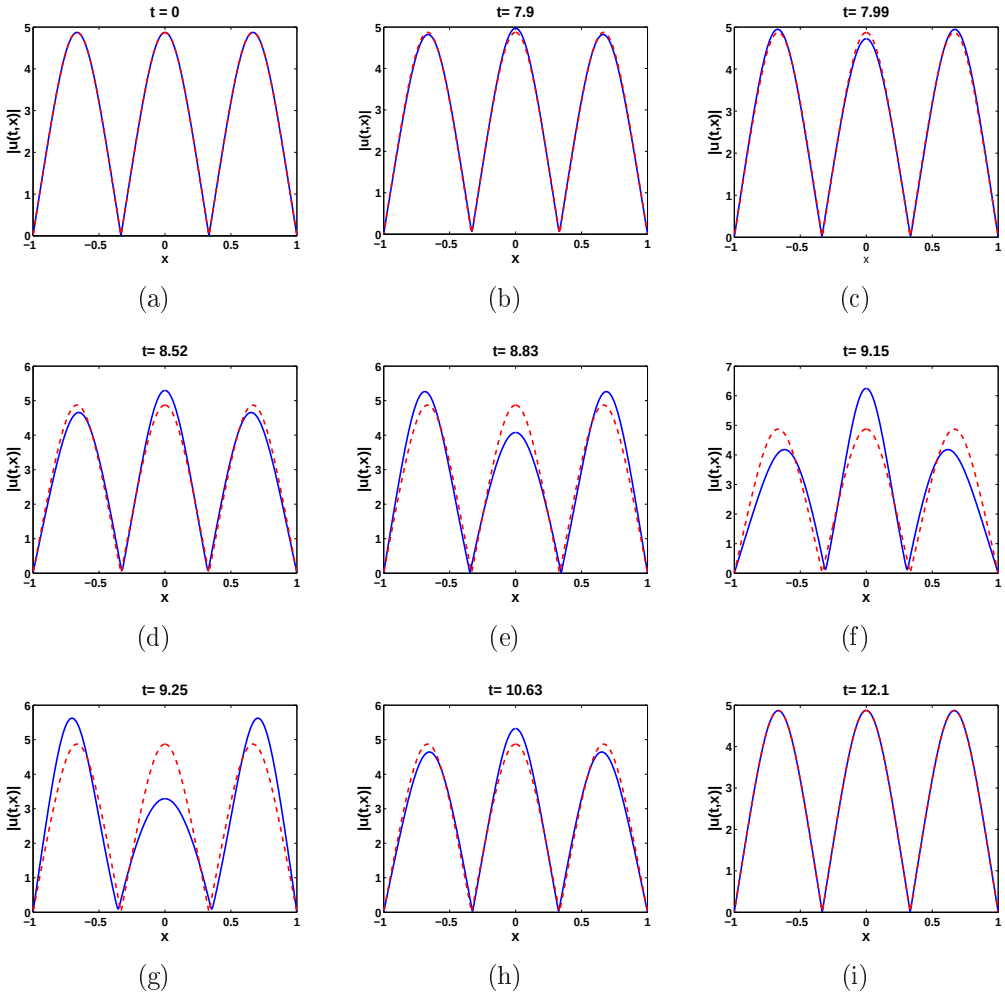


FIGURE 9.28 – $|u(t,x)|$ (ligne continue) et $Q_{3,\omega}$ (ligne interrompue) en fonction de x, pour des valeurs variées de t. Ici, $p = 3$, $\omega = -5$ et $\varepsilon_c = 0.0005$.

sorte que $F(0.001) = 0.014\%$. Par contre, lorsque $\omega = -5$, la solution calculée change de profil suggérant l'instabilité de $Q_{3,\omega}$ sous l'influence des perturbations radiales (3.3). En fait, comme indiqué par la Figure 9.28, les oscillations focalisantes-défocalisantes s'accélèrent très rapidement. Par conséquent, la solution se rétrécit et la masse sera concentrée à l'origine. Toutefois, étant donné que pour $p = 3$ il est impossible d'avoir une explosion en temps fini, la partie majeure de la masse sera rapidement diffractée avant d'être réfléchie encore par les bords. Ceci cause la modification du profil de $|u(t,.)|$ même avant $t = 10$, ce qui suggère que les propriétés de stabilité de $Q_{3,\omega}$ dans $H^1_{\mathrm{rad}(-1,1)}$ étaient modifiées entre $\omega = -6$ et $\omega = -5$. Ensuite, on a fait les mêmes simulations pour des fréquences plus grandes et clairement trouvé les mêmes dynamiques

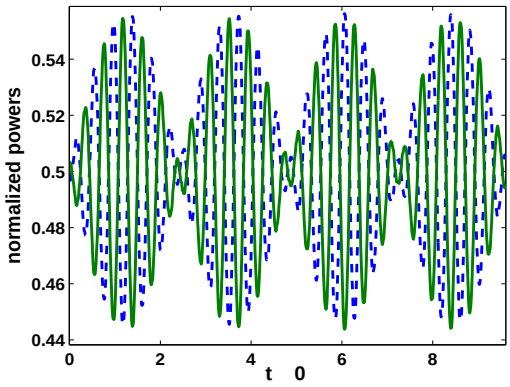


FIGURE 9.29 – Les énergies normalisées pour $p = 7$, $\omega = -21.5$ et $\varepsilon_c = 0.01$.

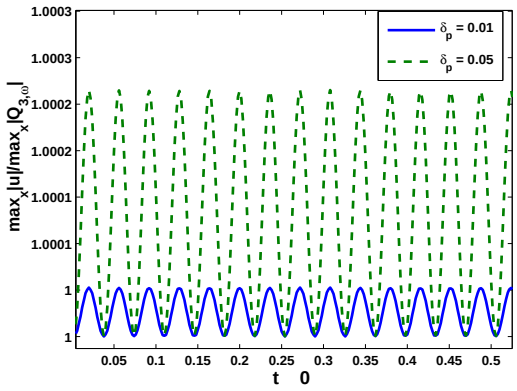


FIGURE 9.30 – $\max_x |u| / \max_x Q_\omega$ en fonction de t pour $p = 3$ et $\omega = -21.5$.

instables jusqu'à $\omega = 400$. Toutefois, cette instabilité devient de plus en plus faible, ce qui signifie qu'elle n'a pas lieu avant une période de temps qui croit en fonction de ω, par exemple lorsque $\omega = 200$ ce phénomène se manifeste à $t \approx 30$ tandis que pour $\omega = 30$ il ne se manifeste pas avant $t = 40$. Même si cette observation ne confirme pas que $Q_{3,\omega}$ restera instable pour de grandes valeurs de ω, elle permet, au moins, de conclure que contrairement à l'état fondamental, l'instabilité est plus faible pour les grandes fréquences dans ce cas. Néanmoins, on conjecture que

Observation 9.4.2 *Lorsque $p = 3$, il existe $\omega^* \geq -\lambda_3$ tel que $Q_{3,\omega}$ est stable sous les perturbations radiales* (3.3) *pour $-\lambda_2 \leq \omega < \omega^*$ et instable pour $\omega > \omega^*$. De plus, cette instabilité est plus faible pour les grandes fréquences.*

En utilisant les perturbations non radiales (3.4), nos simulations indiquent clairement que $Q_{3,\omega}$ possède les mêmes propriétés de stabilité que celles de $Q_{2,\omega}$. En fait, le petit décalage initial cause simplement la déviation d'une petite partie de l'énergie sous l'influence de l'effet des bords réfléchissants. Cette proportion va par la suite osciller entre les bords gauche et droit avant de décroitre rapidement sans modifier le profil de la solution. Alors que, pour des fréquences plus grandes, la perturbation asymétrique (3.4) conduit à une instabilité par dérive (voir figures 9.27 et 9.25).

9.5 Récapitulatif des principales observations

Récapitulons à présent les principaux résultats que nous avons obtenu de ce chapitre.

1. **Stabilité de l'état fondamental** :

• Si $1 < p \leq 1 + 4/N$, l'onde stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est orbitalement stable pour tout $\omega \in]-\lambda_1, +\infty[$.

• Si $1 + 4/N < p < 2^* - 1$, il existe $\omega_c(N,p) > 0$ tel que

(i) Si $\omega \in]-\lambda_1, \omega_c(N,p)[$, alors l'onde stationnaire $e^{i\omega t}Q_\omega$ est orbitalement stable.
(ii) Si $\omega \in]\omega_c(N,p), +\infty[$, alors $e^{i\omega t}Q_\omega$ est fortement instable.

De plus

• $\omega_c(N,p) \to -\lambda_1$, quand $p \to \infty$, si $N \in \{1,2\}$.

• $\omega_c(N,p) \to \infty$, quand $p \to 1 + 4/N$, pour tout $N \geq 1$.

• Le comportements asymptotique de $\omega_c(N,p)$ quand $\sigma \to 2/N$ esr décrit par la lois puissance : $\omega_c(N,p) \sim (\sigma - 2/N)^\gamma$, avec $\gamma \sim -0.16$.

2. **Stabilité du second état excité** $Q_{2,\omega}$:

• Cas des perturbations impaires : l'onde stationnaire $Q_{2,\omega}$ est numériquement stable sous la perturbation impaire (3.3) pour tout $\omega > -\lambda_2$, si $1 < p \leq 1 + 4/N$ mais seulement pour de petites fréquences lorsque $p > 1 + 4/N$. En outre, dans le cas précédent, la donnée initiale (3.3) avec $0 < \varepsilon_p < 1$ mène à une explosion en temps fini. De plus, cette instabilité est plus forte pour les grandes fréquences.

• Cas des perturbations non radiales : pour tout $p > 1$, si ω est suffisamment proche de $-\lambda_2$ alors le second état excité est numériquement stable sous la perturbation non radiale (3.4). Cependant, pour des fréquences légèrement supérieures, il subit une instabilité par dérive si $p < 5$ et une instabilité par dérive combinée avec une forte instabilité quand $p \geq 5$. De plus, cette instabilité est plus faible pour les grandes fréquences si $p < 5$ et plus forte si $p \geq 5$.

3. **Stabilité du troisième état excité** $Q_{3,\omega}$:

• Cas des perturbations radiales : Lorsque $p \geq 5$, $Q_{3,\omega}$ possède les mêmes caractéristiques de stabilité que la deuxième états stationnaires $Q_{2,\omega}$. Ce pendant, les résultats obtenus pour $p = 3$ indiquent qu' il existe $\omega^* \geq -\lambda_3$ tel que $Q_{3,\omega}$

est stable sous les perturbations radiales (3.3) pour $-\lambda_2 \leq \omega < \omega^*$ et instable pour $\omega > \omega^*$. De plus, cette instabilité est plus faible pour les grandes fréquences.

• Cas des perturbations non radiales : pour tout $p > 1$, si ω est suffisamment proche de $-\lambda_2$ alors le troisième état excité est numériquement stable sous la perturbation non radiale (3.4). Cependant, pour des fréquences légèrement supérieures, il subit une instabilité par dérive si $p < 5$ et une instabilité par dérive combinée avec une forte instabilité quand $p \geq 5$. De plus, cette instabilité est plus faible pour les grandes fréquences si $p < 5$ et plus forte si $p \geq 5$.

Bibliographie

[1] Young−Geun O 1989 Cauchy problem and Ehrenfest's law of of positive solution of nonlinear Schrödinguer equation with potentials *Journal of Differential Equations* **81** 255–274.

[2] Fukuizumi R 2000 Stability and Instability of standing waves for the nonlinear Schrödinguer equation with harmonic potential *Master Thesis Discrete Contin. Dynam. systems* **7** 525–524.

[3] Fukuizumi R and Otha M 2003 Instability of standing waves for the nonlinear Schrödinguer equation with potentials *Differential and Integral Equations* No 6 **16** 691–706.

[4] Di Menza L 2009 Numerical computation of solitons for optical systems *M2AN* vol 3 **1** 173–208.

[5] Mc Leod K, Troy W C and Weissler F B 1990 Radial solutions of $\delta u + f(u) = 0$ with prescribed numbers of zeros *J. Diff. Eq.* 368–378.

[6] Kavian O and Weissler F B 1994 The pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation *Michigan Math. J.* **41** 151–173.

[7] Hirose M and Ohta M 2002 Structure of positive radial solutions of scalar field equations with harmonic potential *J. Diff. Eq.* 519–540.

[8] Kajikiya R 1995 Norm estimates for radially symmetric solutions of semilinear elliptic equations *Trans. Amer. Math. Soc.* vol 347 **4** 1163–1199.

[9] Tsurumi T and Wadati M 1997 Collapses of wavefunctions in multidimensional nonlinear Schrödinger equations under harmonic potential *J. Phys. Soc. Japan* **66** 3031–3034.

[10] Hirose M and Ohta M 2007 Uniqueness of positive solutions to scalar field equations with harmonic potential *Funkcial. Ekvac.* vol 50 **1** 67–100.

[11] Li Y and Ni W M 1993 Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ *Comm. Partial Differential Equations* **18** 1043–1054.

[12] Haraux A and Weissler F B 1982 Non-uniqueness for a semilinear initial-value problem *Indiana Univ. Math. J.* **31** 167–189.

[13] Mizumachi T 2005 Vortex solitons for $2D$ focusing nonlinear Schrödinger equation *Diff. Int. Equ.* vol 18 **4** 431–450.

[14] Iaia J and Warchall H 1995 Nonradial solutions of semilinear elliptic equations in two dimensions *J. Diff. Equ.* vol 119 **2** 533–558.

[15] Kajikiya R 1995 Norm estimates for solutions of semilinear elliptic equations *Trans. Amer. Math. Soc.* vol 347 **4** 1163–1199.

[16] Escobedo M and Kavian O 1987 Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation *Nonlinear Anal.* **11** 1103–1133.

[17] Kavian O 1993 Introduction à la théorie des points critiques *Springer-Verlag* 307–308.

[18] Rabinowitz P H 1986 Minmax methods in critical point theory with applications to differential equations *Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional conference Series in mathematics published by the AMS* **65**.

[19] Crandall M G and Rabinowitz P H 1971 Bifurcation from a simple eigenvalues *J.Functional Analysis* **8** 321–340.

[20] Crandall M G and Rabinowitz P H 1970 Bifurcation from a simple eigenvalues *J. Mathematical mechanics* **19** 1083–1102.

[21] Kurth M 2004 On the existence of infinitely many modes of a nonlocal nonlinear Schrödinger equation related to dispersion managed solutions *SIAM Journal on Mathematical Analysis* vol 36 **3** 967–985.

[22] Kunze M, Kupper T, Mezentsev V K, Shapiro E G and Turitsyn S 1999 Nonlinear solitary waves with Gaussian tails *Phys.D.* **128** 273–295.

[23] Courant R and Hilbert D 1953 Methods of Mathematical Physics *Interscience Publ. New York* Vol 1.

[24] Kielhofer H 2004 Bifurcation Theory, An Introduction With Applications to PDEs *Springer-Verlag.*

[25] Rabinowitz P H 1971 Some Global Results For Nonlinear Eigenvalues Problems *J.Functional Analysis* **7** 487–513.

[26] Fukuizumi R 2000 Stability and instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential *Master Thesis, J. equation* 525–543.

[27] Dautray R and Lions j L 1990 Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Vol 3 Spectral Theory and Applications *Springer-Verlag Berlin.*

[28] Hadj Selem F Radial solutions with prescribed numbers of zeros for the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential (Preprint).

[29] Di Menza L and Hadj Selem F Numerical study of solitons for nonlinear Schrödinger Equation with harmonic potential *Preprint.*

[30] Hadj Selem F an Kikuchi H Existence and non-existence of solution for semilinear elliptic equation with harmonic potential and Sobolev critical/supercritical nonlinearities (Preprint).

[31] Fukuizumi R, Hadj Selem F and Kikuchi H Stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation on the unit ball (Preprint).

[32] Yanagida E and Yotsutani S 1993 Classification of the structure of positive radial solutions to $\Delta u + K(|x|)u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$ *Arch. Rational Mech. Anal.* **124** 239–259.

[33] Brézis H and Nirenberg L 1983 Positive solutions of nonlinear elleptic equations involving critical Sobolev exponents *Communs pure and appl. Math* **36** 437–477.

[34] Arioli G, Gazzola F, Grunau H C and Sassone E 2008 The second bifurcation branch for radial solutions of the Brézis-Nirenberg problem in dimension four *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* vol 15 **1-2** 69–90.

[35] Roselli P and Williem M 2009 Least energy nodal solutions of the Brézis-Nirenberg problem in dimension $N = 5$ *Commun. Contemp. Math.* vol 11 **1** 59–69.

[36] Gazzola F and Grunau H C 2000 *On the role of space dimension $n = 2 + 2\sqrt{2}$ in the semilinear Brézis-Nirenberg eigenvalue problem Analysis (Munich)* vol 20 **4** 395–399.

[37] Atkinson F V, Brézis H and Peletier L A 1990 Nodal solutions of elliptic equations with critical Sobolev exponents *J. Differential Equations* vol 85 **1** 151–170.

[38] Atkinson F V and Peletier L A 1988 Solutions of elliptic equations involving critical exponents *Asymptotic Anal.* vol 1 **2** 139–160.

[39] Dávila J, Del Pino M, Musso M and Wei J 2007 Standing waves for supercritical nonlinear Schrödinger equations *J. Differential Equations* vol 236 **1** 164–198.

[40] Kabeya Y, Yanagida E and Yotsutani S 2001 Global structure of solutions for equations of Brézis–Nirenberg type on the unit ball *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **131 A** 647–665.

[41] Struwe M 2008 Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems *Springer* **4th ed.**.

[42] Benguria R D, Dolbeault J and Esteban M 2000 Classification of the solutions of semilinear elliptic problems in a ball *J. Differential Equations* **167** 438–466.

[43] Li Y and Ni W M 1993 Radial symmetry of positive solution of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ *Comm. Partial Differential Equations* **18** 1043–1054.

[44] Druet O 2002 Elliptic equations with critical Sobolev exponents in dimension 3 *Ann. I. Poincarè–AN* **19** 125–142.

[45] Willem 1996 M Minimax theorems *Birkhäuser*.

[46] Dolbeault J and Flores I 2007 Geometry of phase space and solutions of semilinear elliptic equations in a ball *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** 4073–4087.

[47] Guo Z and Wei J Global solution branch and Morse index estimate of a semilinear elliptic equation with super-critical exponent *preprint.*

[48] Killip R, Visan M and Zhang X 2009 Energy-critical NLS with quadratic potentials *Comm. Partial Differential Equations* **34** 1531–1565.

[49] Le Coz S, Fukuizumi R, Fibich G, Ksherim B, and Sivan Y 2008 Instability of bound states of a nonlinear Schrödinger equation with a Dirac potential *Phys. D* **237** no. 8 1103–1128.

[50] Fukuizumi R, Hadj Selem F and Kikuchi H Stability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation on the unit ball *(preprint).*

[51] Fibich G, Sivan Y and Weinstein M I 2006 Bound states of nonlinear Schrödinger equations with a periodic nonlinear microstructure *Phys. D* **217** no. 1 31–57.

[52] Fibich G and Merle F 2001 Self-focusing on bounded domains *Phys. D* **155** no. 1-2 132–158.

[53] Sivan Y, Fibich G and Ilan B 2008 Drift instability and tunneling of lattice solitons *Phys. Rev.* **E 77** 045601R.

[54] Rose H A and Weinstein M I 1988 On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential *Phys. D* **30** vol 1-2 207–218.

[55] Brézis H and Lieb E 1983 A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** 486–490.

[56] Chatah J and Strauss W 1985 Instability of nonlinear bound states *Commun. Math. Phys.* **100** 173–190.

[57] Jeanjean L and Squassina M An approach to minimization under a constraint : the added mass technique *Calculus of Variations and PDE* to appear.