U.F.R SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

Ecole Doctorale Sciences, Technologies, Santé

Thèse

Présentée par

Marcus Rogério DE CASTRO

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne-Ardenne

(Domaine de recherche: Dynamiques non-linéaires, Electrotechnique, Automatique)

Analyse des modes chaotiques dans un moteur linéaire à réluctance variable en vue du contrôle

présentée et soutenue publiquement le 25 novembre 2010

Composition du jury

Rapporteurs :	Jean Pierre BARBOT	ENSEA, Cergy-Pontoise
	Marie-Cécile PÉRA	Université de Franche-Comté, Belfort
Examinateurs :	Abdelali EL AROUDI	Université Rovira i Virgili, Tarragone
	Franck BETIN	Université de Picardie Jules Verne
Co-directeurs :	Clément GOELDEL	CReSTIC, Reims
	Bruno ROBERT	CReSTIC, Reims

Mis en page avec la classe thloria.

JE dédie cette thèse au plus grand trésor de ma vie, mon épouse Aline de Castro et nos deux enfants João Victhor et Julian Davi.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué à ce travail.

Mes remerciements vont en premier lieu à Clément GOELDEL et Bruno ROBERT pour l'excellente direction de ce travail, l'énorme considération et l'amitié qui ma été offerte pendant toutes ces années. Tous les conseils, les remarques, la grande liberté qu'ils m'ont laissée et surtout leur très grande disponibilité ont rendu cette thèse possible.

Des remerciements très reconnaissants au Professeur Henrique Cunha Jr. pour m'avoir donné cette opportunité d'élargir mes horizons, de m'encourager à faire cette thèse en France et principalement pour son amitié depuis le début de mon parcours en génie électrique.

A toute l'équipe du laboratoire GPEC de l'Université Fédérale du Ceará pour le soutien des collègues et également des professeurs qui mêmes distants m'ont beaucoup encouragé pendant le développement de ce travail en particulier à mon grand ami Francisco Kléber Lima.

Au Professeur Ricardo THÉ pour la mise à disposition du prototype de moteur linéaire à réluctance variable.

Je remercie également David CARTON, directeur du département d'enseignement, pour son aide, sa confiance et pour toute l'attention qu'il m'a apporté pendant la période d'ATER et les séances de TP.

Je pense également à mon collègue et ami Hassen Ben-Maad qui m'a transmis ses encouragements tout au long de ce parcours.

A mes collègues de laboratoire les techniciens Stephane Lecasse et Olivier Chevrier, pour la réalisation de toutes les cartes électroniques de commande du moteur ainsi que pour leur disponibilité et leur sympathie.

Je tiens à remercier particulièrement tous les membres de la famille KHOLER pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté, à moi et à ma famille, pendant toute ces années en France. J'ai eu beaucoup de chance d'avoir fait leur connaissance, en particulier celles de madame Ana Fátima da Costa KHOLER et mademoiselle Naíma da Costa KHOLER. Dans le même cercle d'amitié, je tiens à remercier mon ami Victor Cordeiro França pour sa présence et son amitié inconditionnelles.

Enfin, à tous les amis et collègues chercheurs qui directement ou indirectement m'ont encouragé tout au long de mes etudes dont ce travail est l'aboutissement.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

Ce rapport de thèse concerne la modélisation et l'étude des dynamiques non linéaires d'un moteur linéaire à réluctance variable tant du point de vue de l'expérimentation numérique que du point de vue du prototypage. Le moteur sujet d'étude a été prototypé au Brésil, au département de Génie Electrique de l'Université Fédérale du Ceará, dans les laboratoires GPAR - Groupo de Pesquisa em Automata e Robôtica (Groupe de Recherche en Automatique et Robotique) et GPEC Groupo de Processamento de Energia e Contrôle (Groupe de Conversion d'Energie et Contrôle). Initié dans le cadre d'un projet de Master, ce sujet de recherche a bénéficié du support du programme européen Alßan "bourses d'études de haut niveau pour l'Amérique latine" qui vise au renforcement de la coopération entre l'Union Européenne et l'Amérique latine dans le domaine de l'Education Supérieure. Un second prototype a été cédé par l'Université Fédérale du Ceará à l'Université de Reims-Champagne-Ardenne pour la réalisation du banc d'essais de la thèse au sein du CReSTIC - Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication.

Dès le début du 20ème siècle, la recherche sur les moteurs linéaires a débuté en envisageant l'application à la propulsion de trains de passagers. Aujourd'hui, les applications des machines linéaires sont plus diversifiées dans les domaines industriels. Elles représentent un marché en développement en Europe et aux USA sans toutefois qu'il existe de marché de masse, ce marché n'étant porté que par l'innovation en termes d'applications et de performances. En contrepartie de ses avantages spécifiques, le moteur à réluctance variable a l'inconvénient de présenter une forte oscillation de la force de traction. Celle-ci peut engendrer des vibrations importantes, voire des mouvements erratiques, surtout en phase d'accélération.

Ces comportements sont dus au principe même de la conversion électromécanique basée sur une forte dépendance non linéaire entre la position du mobile et la réluctance d'entrefer. Nous en venons à évoquer de façon apparemment paradoxale les non linéarités du moteur linéaire car il s'agit bien d'un mouvement de translation mais le modèle de connaissance de la machine est fortement non linéaire au sens mathématique du terme. Nous aurons donc recours à des outils mathématiques appropriés pour explorer les comportements dynamiques de cette machine. Les différents types de comportements du moteur correspondent à des solutions du système dynamique de natures différentes : solutions d'équilibre, solutions périodiques et solutions apériodiques qui se déclinent elles-mêmes en quasi-périodiques ou chaotiques. Des quatre, le chaos est le plus difficile à caractériser, à prédire, à simuler de manière fiable. La production de données expérimentales chaotiques exploitable à l'analyse est un fait rare dans le domaine du génie électrique, rarissime dans celui des machines électriques.

L'analyse non linéaire et le développement d'outils capables d'identifier et de caractériser les comportements dynamiques des systèmes non linéaires constituent aujourd'hui des axes de recherches prometteurs dans les domaines de la modélisation et du contrôle des systèmes dynamiques. Les applications potentielles de ces outils dans le domaine de l'ingénierie électrique sont nombreuses. En effet, l'analyse de la fiabilité de systèmes de plus en plus complexes nécessite d'être capable de prédire et de caractériser les comportements apériodiques susceptibles d'apparaître par exemple sous l'action de la dégradation de paramètres physiques ou encore sous l'influence de paramètres à fortes variations liés aux alimentations ou aux charges variables, entre autres. Les méthodes de contrôle du chaos qui ont beaucoup évolué depuis la méthode OGY permettent parfois d'élargir la plage d'opération des systèmes de manière efficace et à faible coût.

L'étude de la dynamique des systèmes non linéaires a considérablement évoluée au cours des dernières décennies en partie sous l'impulsion donnée par la théorie ergodique du chaos d'Eckmann et Ruelle. Les applications, d'abord en physique, se sont ensuite rapidement étendues à d'autres champs des sciences exactes et naturelles puis à différents domaines de l'ingénierie. Toutefois, une tendance qui a longtemps prévalu en physique, en raison d'une certaine réminiscence de la pensée de Laplace, persiste encore en ingénierie. Le comportement chaotique, pourtant stable au sens de Lyapunov, est perçu de facto comme une sorte d'instabilité imprévisible. Incontrôlable, indescriptible et inattendu, il s'agit donc d'un comportement anormal au sens de l'ingénieur. Un des objectif de cette thèse est de montrer comment il est possible de caractériser le chaos et d'en faire la démonstration tant par le calcul numérique que par l'expérimentation sur banc d'essais.

Depuis les travaux de E.Lorenz et ceux de J.Yorke, il est apparu clairement ce que contenaient déjà en prémices les études qualitatives des solutions des équations différentielles de H.Poincaré. Le chaos n'est pas toujours le fait de la complexité. Il peut apparaître dans un système de faible dimension parfaitement déterministe tel le problème à trois corps qui a permis à Poincaré d'ouvrir la porte de la théorie du chaos pour les générations futures. Il n'est donc pas toujours nécessaire d'invoquer des phénomènes physiques secondaires habituellement négligés ou des phénomènes aléatoires comme des bruits de mesure pour expliquer l'apparition du chaos dans un processus ou un équipement industriel. Ceci explique notre intérêt pour les applications potentielles des différentes branches de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, ou théorie du chaos pour faire court, dans les domaines du génie électrique. Cependant, dans ce mémoire, il sera peu question de bifurcations, de crises et de contrôle du chaos. Le principal objet concerne l'analyse des modes apériodiques par la reconstruction d'attracteurs étranges, le calcul des dimensions fractales et des exposants de Lyapunov.

Bien que la réalité du chaos et de ses propriétés d'auto-organisation soient aujourd'hui largement reconnues, et mises en évidence dans bien des disciplines scientifiques, les publications abordant ce sujet dans des domaines applicatifs proches de la réalité industrielle sont peu nombreuses. Exception faite du domaine de la conversion statique DC-DC, les applications au génie électrique sont encore plus rares. C'est donc dans un réel esprit d'innovation que nous avons débuté notre travail. En sachant qu'une connaissance fine et précise du comportement dynamique est essentielle pour le développement d'une stratégie de contrôle efficace, nous proposons d'utiliser des outils d'analyse non linéaires sur un système de conversion électromécanique composé d'une machine linéaire à réluctance variable alimentée par un convertisseur de puissance et commandé par des microcontrôleurs dspic. La détection des régimes irréguliers, les calculs d'entropie, l'estimation des invariants caractéristiques, leur interprétation physique et surtout la comparaison critique avec les résultats pratiques sont les principaux thèmes abordés dans ce travail.

Dans ce but, le mémoire de thèse est divisé en deux parties principales. La première qui correspond aux chapitres I et II relève clairement du génie électrique et aborde tout ce qui concerne le moteur lui-même. La seconde, plus abstraite, correspond aux chapitres III et IV. Elle est plus proches des mathématiques appliquées, sans toutefois jamais s'éloigner des problématiques expérimentales. Elle traite en profondeur de la méthode d'estimation des invariants caractéristiques et de son application aux données issues du banc d'essais.

Le chapitre I présente le moteur, ses caractéristiques mécaniques et électriques, quelques détails sur sa géométrie et des justifications sur sa conception. Il rappelle aussi le principe physique de génération de la force de traction par la variation de réluctance, principe à l'origine de la nature non-linéaire de son modèle.

Le modèle d'état est élaboré à partir des équations de la conversion électromécanique. Quelques rappels sur la coénergie, l'inductance incrémentale et les hypothèses simplificatrices appliquées au modèle sont aussi abordées. Le modèle prend en compte les frottements sec et fluide. La charge est de type inertiel consistant simplement en une augmentation de la masse du chariot mobile. Deux modèles sont proposés. Le premier modèle analytique est bâtit en utilisant la méthode des tubes de flux et il est validé par comparaison avec un modèle de simulation par éléments finis. La forme complexe de ce modèle limite son usage à des fins de simulation et ne permet pas les investigations analytiques nécessaires dans la deuxième partie de la thèse. Le second modèle dynamique, appelé modèle harmonique, est un système différentiel à partir duquel il sera possible de pousser plus avant le traitement analytique, en particulier pour l'estimation des exposants de Lyapunov.

Ce chapitre met aussi en avant les difficultés particulières posées par la simulation de comportements chaotiques. L'extrême sensibilité des solutions chaotiques vis-à-vis de l'état et des paramètres requiert des précautions spécifiques au niveau de la conformation du modèle. Du point de vue de la simulation numérique, l'utilisation d'un modèle réduit (sans dimension) présente l'avantage d'améliorer la stabilité de la simulation en réduisant la dynamique numérique [1] des variables. Les précautions à prendre au niveau du noyau intégrateur pour éviter la propagation et l'accumulation des erreurs sont également présentées en vue de simuler des attracteurs étranges cohérents avec l'expérimentation. De plus, l'utilisation d'un modèle simplifié et bien conformé permet de diminuer les temps de simulation et les temps de calculs des invariants. Il est aussi plus compatible avec l'implantation de la commande en temps réel sur les microcontrôleurs ce qui serait très intéressant pour le développement ultérieur des commandes par modèle interne.

Le deuxième chapitre est dévolu à la présentation du banc d'essais. Il est composé du moteur, des convertisseurs d'alimentation, des cartes de commande et de mesure à base de microcontrôleurs Dspic et du PC. Les détails relatifs au moteur et à l'architecture du PC n'entrent pas dans le cadre de ce chapitre. En revanche, nous y présentons les schémas des cartes de puissance avec les spécifications des composants et capteurs utilisés.

Nous présentons notre programme d'interface gérant la communication avec la carte de commande par une liaison série RS232 full-duplex. Ce programme génère et envoie certaines consignes avant le démarrage du moteur : mode d'opération en boucle ouverte ou fermée, valeur du courant de contrôle, contrôle par codeur optique ou en mode sans capteur par estimation d'inductance en temps réel, fréquence de pas (boucle ouvert) ou vitesse de translation (boucle fermée) et commande manuelle ou automatique.

Les hacheurs d'alimentation sont complètement spécifiés et les choix technologiques sont justifiés en rapport avec l'architecture deux quadrants qui a été retenue. Les détails de réalisation des cartes électroniques sont également fournis. Quelques précisions sur l'implantation du contrôle par hystérésis dans les microcontrôleurs DsPic sont abordés sous forme d'organigrammes. Nous donnons également une description complète de la stratégie d'acquisition des données expérimentales et de leur transfert vers l'ordinateur. L'algorithme de communication et le protocole sont indiqués pour justifier les limitations de vitesse imposées.

La programmation du contrôle de courant par hystérésis est détaillée. Elle permet d'estimer

1. La dynamique numérique désigne le rapport entre les différentes amplitudes des variables qui, pendant les opérations arithmétiques, peuvent occasionner des dépassement de représentation du type overflow ou underflow

en temps réel la valeur des inductances incrémentales des phases. Ces estimations en ligne sont réalisées selon deux méthodes : par la mesure des temps de montée/descente du courant dans la phase alimentée ou sur une phase voisine.

Enfin, ce chapitre présente les premières acquisitions de positions lors de déplacements élémentaires. Ces enregistrement seront utiles pour déterminer les coefficients de frottement. Des déplacements sur N pas avec commande en boucle fermée sont réalisés avec accélération et décélération optimales. Des estimations d'inductance le long d'un pas mécanique et également tout au long de la course du chariot sont présentés. Enfin ces mesures d'inductance en temps réel sont utilisées pour réaliser un autopilotage sans capteur.

Le troisième chapitre consiste d'abord en une présentation des outils d'analyse non linéaire puis en leurs applications au modèle harmonique directement ou aux séries de données générées par simulation de ce modèle. Il débute donc par la présentation de diagrammes de Feigenbaum uni et bidimensionnels permettant non seulement de détecter des bifurcations ainsi que les zones de fonctionnements apériodiques, mais aussi de comparer les performances des deux modèles dans le but de montrer qu'un modèle simplifié est néanmoins capable de reproduire qualitativement toute la richesse des dynamiques observées expérimentalement. Les simulations intensives pour l'obtention des diagrammes de Feigenbaum, surtout en dimension deux, ont été réalisées en utilisant la bibliothèque de calcul parallèle MPI (*message passing interface*) pour être programmées dans l'environnement C++ sur le super calculateur ROMEO II du Centre de Ressources Informatiques (CRI) de l'Université de Reims Champagne-Ardenne.

La technique de plongement et reconstruction des attracteurs est appliquée avant de présenter les algorithmes d'estimation des dimensions fractales, leurs programmations et les réglages paramétriques de l'ensemble. Une attention toute particulière est portée au calcul des exposants de Lyapunov. Plusieurs algorithmes sont détaillés et comparés après avoir été programmés et appliqués, soit au modèle différentiel soit aux données issues de la simulation.

Nous proposons également dans ce chapitre une contribution à l'amélioration d'un l'algorithme d'évaluation du spectre de Lyapunov par la méthode HQR. Cette amélioration est basée sur une application du théorème d'ergodicité d'Oseledec. Un gain de temps appréciable, de l'ordre d'un tiers, a été obtenu à précision équivalente, les tests ayant été réalisés à la fois sur le système tridimensionnel classique de Lorenz et sur notre modèle en dimension cinq, de type non autonome, excité par des fonctions périodiques discontinues. L'algorithme est adapté à ce genre de systèmes en utilisant comme point de départ celui proposé par [Cheng 00] et [Chen 06].

Le chapitre se conclut par trois études de cas mettant en lumière les influences de certains paramètres expérimentaux, comme les frottements ou les courants d'alimentation, sur le comportement chaotique via les dimensions fractales et le spectre de Lyapunov. Cela permet de souligner que, si ces paramètres ont une influence sur certains invariants du chaos, ils n'en sont toutefois pas à l'origine. La dernière étude est présentée pour souligner toute la difficulté d'interprétation des invariants et le souci constant de la cohérence qui doit présider à toute conclusion sur la nature de la dynamique observée.

L'ensemble du chapitre précédent prépare les choix algorithmiques et les réglages paramétriques avant de les utiliser pour analyser les données expérimentales dans ce dernier chapitre. Dans le chapitre IV, nous utilisons ces méthodes et outils pour détecter et analyser le chaos expérimental dans certains modes de fonctionnement du moteur. C'est donc un chapitre de synthèse qui exploite les données fournies par le banc d'essais décrit au chapitre II et les traite par les méthodes exposées au chapitre III.

Les problématiques expérimentales sont présentées de manière détaillée et les solutions sont argumentées. En particulier, les inconvénients posés par la dérivation de séries temporelles de position pour générer la vitesse, une solution évoquée au chapitre précédent, sont mis en évidence.

Nous proposons une méthodologie permettant de surmonter ces difficultés en utilisant des séries longues de position même si la course du moteur linéaire est évidemment très limitée. La précision des estimations en dépend puisque les performances des algorithmes sont liées au nombre de points des attracteurs.

Le traitement des acquisitions de position par le codeur optique pour générer des séries de vitesse de meilleure qualité est réalisé en mettant en œuvre un filtre linéaire programmé dans $MATLAB$®. L'influence des bruits de mesure dans l'estimation des invariants est également abordée. L'interprétation physique des invariants n'a pas été négligée dans cette partie et une comparaison avec les résultats obtenus à partir de la simulation contribue à valider définitivement le modèle harmonique.

A la fin de ce dernier chapitre, on trouvera une application pratique tout à fait remarquable des exposants de Lyapunov. Plus précisément, le plus grand d'entre eux sera utilisé pour estimer l'horizon de prédictibilité de la trajectoire du moteur en fonctionnement chaotique. Cette estimation a pu être vérifiée expérimentalement à partir de considérations sur le rôle du frottement sec dans la zone à force de traction nulle entourant les points d'équilibre.

1

Machine Linéaire à Réluctance Variable

Sommaire

1.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation et à la modélisation du prototype de machine linéaire à réluctance variable qui est l'objet de ce travail de thèse. Le choix de la machine a été effectué par le laboratoire GPAR au Brésil qui a également réalisé le prototype. Du point de vue applicatif, les moteurs linéaires présentent un certain nombre d'avantages spécifiques :

- Une construction simple et un moteur robuste avec très peu de maintenance.
- L'utilisation de bobines concentrées au lieu d'enroulements répartis confère un faible coût de réalisation.
- La continuité d'opération en cas de défaut sur une bobine est assurée sur les machines ayant plus de deux phases.
- Un refroidissement facile puisqu'une seule partie du circuit magnétique est pourvue de bobines.
- La force de traction est indépendante du sens du courant ce qui permet d'utiliser des sources de courant unidirectionnelles. Dans certaines applications, cela réduit le nombre de commutateurs de puissance.
- L'aptitude à fonctionner en boucle ouverte par entraînement direct, y compris pour des déplacements précis sur de grandes longueurs ainsi qu'une vaste gamme d'applications industrielles qui nécessitent un mouvement linéaire au lieu d'un mouvement tournant.
- L'absence de mécanisme de conversion du mouvement rotatif en translation (par exemple vis sans fin) contribue à augmenter le rendement de l'entraînement.

Tous ces avantages justifient grandement l'intérêt que nous portons à cette machine.

Après une presentation sommaire de la machine, nous allons en donner un modèle dynamique complet. Ce modèle sera développé par application des lois générales de la conversion électromécanique. Il devra préciser les hypothèses et les approximations utilisées pour arriver à une forme simple représentant les caractéristiques essentielles de cette structure.

Dans les machines linéaires à réluctance variable (MLRV) la variation de la réluctance, ou de l'inductance, est le phénomène le plus important qui est à l'origine de la création des forces mais il est également la principale source de non linéarité du moteur. La modélisation de cette inductance est donc primordiale. Diverses méthodes, comme la modélisation par les éléments finis et la méthode des tubes de flux, sont proposées dans la littérature, voir par exemple [Lin 08, Deihimi 02]. Pour ce travail on a choisi la méthode des tubes de flux car on obtient comme résultat des équations analytiques simulables par des logiciels comme $MATHCAD^{®}$ ou $MATLAB^{®}$ et $SIMULINK^{®}$. L'autre avantage de cette méthode est que l'on pourra changer les paramètres, comme par exemple l'entrefer, sans avoir besoin de refaire une nouvelle analyse, tout simplement en utilisant les mêmes équations et en changeant la valeur du paramètre.

A partir de ce modèle nous avons développé une version simplifiée appelée modèle harmonique qui ne retient que les composantes continues et le premier harmonique.

Lors de l'élaboration de ces différents modèles la saturation magnétique n'a pas toujours été prise en compte. Pour vérifier les limites de ces approximations, une simulation par un logiciel d'éléments finis sera réalisée. les valeurs des inductances obtenues par les deux méthodes seront comparées.

Dans le domaine de la dynamique non linéaire et de la simulation numérique une adaptation du modèle mathématique en vue de minimiser les erreurs d'arrondis dans le calcul numérique est nécessaire comme l'on montré les travaux de [Alin 02]. Cette conformation du modèle est faite d'une part par la représentation exacte en virgule flottante de certaines variables de comportement récursive et d'autre part par la normalisation et la réduction du modèle. L'objectif est donc d'obtenir un modèle simplifié et fiable qui pourra servir à la simulation dynamique dans les différents régimes de fonctionnement réguliers ou chaotiques.

1.2 Prototype

Le prototype de moteur linéaire à réluctance variable utilisé dans cette étude est présenté sur les figures 1.1 et 1.2. Il s'agit d'une machine électrique composée d'un chariot mobile appelé *translateur* capable de se déplacer de façon incrémentale sur deux rails. Ce translateur possède six dents (A,B,C et A',B',C') et porte trois phases. Chaque phase est constituée par deux bobines en série, bobinées sur les dents A *et* A', par exemple. La partie statique, ou rail, est constituée d'une crémaillère dentée de $1,80\ m$ de long qui ne comporte aucune bobine.

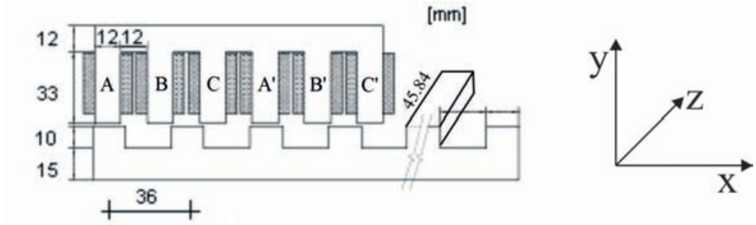
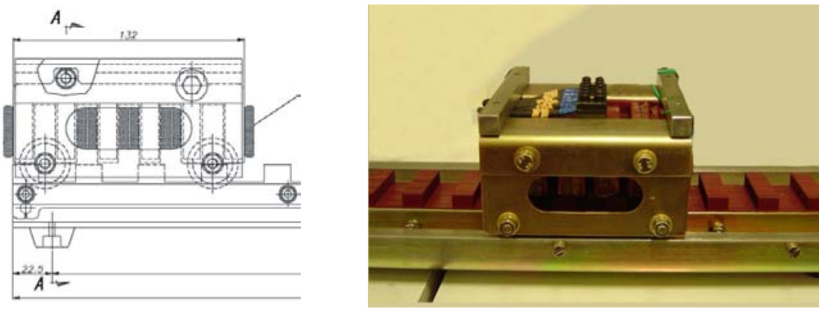


FIGURE 1.1 – Schéma du MLRV.



(a) (b)

FIGURE 1.2 – (a) Coupe transversale ; (b) Machine linéaire - MLRV

Le Tableau 1.1 présente les paramètres selon lesquels la machine a été projetée. La figure 1.1 donne le schéma de la MLRV avec les principales dimensions en *mm*. Les pas différents au stator et au translateur respectivement de 36 *mm* et 24 *mm*, communiquent à notre prototype un pas mécanique de 12 *mm* lorsque la structure est alimentée en mode I (une phase à la fois). C'est dans ce mode que nous allons effectuer l'essentiel de nos expériences. La figure 1.2 montre la photo du translateur réalisé.

Dans ce prototype, le translateur de la machine est posé sur la partie fixe et se déplace selon l'axe 'x'. Il est supporté par quatre roulettes. Cette configuration est la plus simple à réaliser mécaniquement. Ainsi la force de réaction normale des roulettes, orienté selon l'axe 'y', compense la force d'attraction et le poids du chariot. Le cas contraire où la partie mobile est suspendue au dessous des rails est plutôt utilisé dans les applications de lévitation magnétique, voir par exemple [Campo 02] et [Liu 00a].

Cette réalisation mécanique permet d'ajuster facilement la valeur de l'entrefer et ainsi de tester les niveaux de saturation du circuit magnétique.

Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
Nombre de phases	N_{ph}	3	*uni*
Nombre de pôles par phase	N_p	2	*uni*
Longueur du stator	L_t	1,8	m
Vitesse nominale	v_n	0,5	m/s
Temps d'accélération	t_{ac}	0,2	s
Masse de la partie mobile	M	4,5	Kg
Courant max. par phase	I_{max}	8,5	A
Densité du courant	J	6	A/mm^2
Largeur d'entrefer	l_g	1	mm
Puissance mécanique par pôle	P_m	11,42	W
Nombre de spires par bobine	N_e	113	*uni*

TABLE 1.1 – Paramètres de dimensionnement de la machine

1.3 Modèle dynamique complet

La conversion d'énergie électrique en énergie mécanique par variation de réluctance consiste à alimenter judicieusement les circuits électriques entourant des pièces ferromagnétiques qui constituent un circuit magnétique déformable. Dans notre cas, ces pièces ferromagnétiques sont mobiles selon un seul axe. Elles se déplacent donc sous l'action de la force magnétique de traction longitudinale et cherchent en permanence la position de réluctance minimale.
Par définition, un système électromécanique se caractérise par l'association d'un certain nombre de circuits électriques localisés dans l'espace et reliés par des lignes de champs qui les traversent. Les trajets de ces lignes de champs définissent un chemin magnétique caractérisé par les réluctances des différentes parties du circuit magnétique.

Les équations d'un système électromagnétique peuvent être exprimées de deux façons différentes, soit par les tenseurs de Maxwell soit par l'analyse des circuits électriques. C'est cette deuxième méthode que nous allons utiliser. Dans le cas de l'hypothèse linéaire nous détermineront les inductances propres et mutuelles. Dans le cas non linéaire, avec prise en compte de la saturation des circuits magnétiques, nous définiront les inductances incrémentales.

A partir des énergies nous obtiendront par dérivation les forces qui agissent sur le système dynamique. Les équations sont ensuite développées et les frottements complexes qui changent avec la position et la vitesse sont aussi modélisés.
Pour commencer la modélisation mathématique on prendra les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Les résistances et les inductances des trois phases sont considérées comme identiques ;
- Les matériaux ferromagnétiques sont idéaux $(\mu_r = \infty)$;
- Les effets d'encoche sont négligés ;
- Le primaire est supposé de longueur infinie ;
- L'effet des courants induits est négligé ;
- Le primaire du moteur est considéré comme une masse rigide ;
- Les guidages sont supposés idéaux (raideur infinie des roulements), ce qui permet de négliger le déplacement dans la direction de l'axe y.

1.3.1 Équations électriques

La loi de Kirchhoff appliquée à la phase n s'écrit :

$$V_n = r_n \cdot i_n + \frac{d\Psi_n}{dt} \tag{1.1}$$

où V_n est la tension appliquée à la phase n, i_n son courant, r_n sa résistance et Ψ_n son flux total.

Comme notre machine a trois phases, si on prend en compte la saturation du fer, le flux devient une fonction des trois courants et des positions longitudinale (x) et verticale (y) du chariot, voir figure 1.1.Le déplacement dans la direction "z" perpendiculaire au guidage est considéré comme nul.

$$\Psi_n = \Psi_n(i_1, i_2, i_3, x, y) \tag{1.2}$$

En introduisant la notion d'inductance :

$$\Psi_n = \sum_{m=1}^{3} L_{nm}(i_1, i_2, i_3, x, y) \cdot i_m \tag{1.3}$$

Où L_{nm} est l'inductance propre si $n = m$ ou mutuelle si $n \neq m$.

$$\frac{d\Psi_n}{dt} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial \Psi_n}{\partial i_m} \cdot \frac{di_m}{dt} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Psi_n}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{1.4}$$

Les termes de l'équation 1.4, $\frac{\partial \Psi_n}{\partial i_m}$, sont appelés inductances incrémentales propre ou mutuelle l_{nm}.

$$l_{nm} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial i_m} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial i_m} \left(L_{nk}(i_1, i_2, i_3, x, y) \cdot i_k \right) \tag{1.5}$$

$$l_{nm} = L_{nm}(i_1, i_2, i_3, x, y) + \sum_{k=1}^{3} i_k \cdot \frac{\partial}{\partial i_m} L_{nk}(i_1, i_2, i_3, x, y) \tag{1.6}$$

Donc l'équation 1.1 peut être écrite comme 1.7.

$$V_n = r_n \cdot i_n + \sum_{m=1}^{3} \left[l_{nm} \cdot \frac{di_m}{dt} + i_m \cdot \frac{\partial L_{nm}(i_1, i_2, i_3, x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + i_m \cdot \frac{\partial L_{nm}(i_1, i_2, i_3, x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right] \tag{1.7}$$

Vues les symétries de construction de notre translateur les flux mutuels sont négligeables comme nous allons le justifier à la section 1.4.2. Par conséquence le flux devient une fonction de l'inductance propre de la phase alimentée et l'inductance propre L_{nn} sera notée L_n.

$$\Psi_n = L_n(i_n, x, y) \cdot i_n \tag{1.8}$$

Comme la masse du translateur plaque celui-ci sur les rails, la variable "y" reste constante. L'équation 1.7 devient tout simplement 1.9 :

$$V_n = r_n \cdot i_n + l_n \cdot \frac{di_n}{dt} + i_n \cdot \frac{\partial L_n(i_n, x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{1.9}$$

où,

$$l_n = L_n(i_n, x, y) + \frac{\partial}{\partial i_n} L_n(i_n, x, y). \tag{1.10}$$

Si l'on se place dans le cas d'un milieu linéaire, où il n'existe pas le phénomène de saturation, l'inductance incrémentale devient égale à l'inductance propre qui ne dépend plus que de la position dans le plan x, y. Dans ce cas le flux peut être écrit comme :

$$\Psi_n = L_n(x, y) \cdot i_n \tag{1.11}$$

et l'équation électrique est alors,

$$V_n = r_n \cdot i_n + L_n(x, y) \cdot \frac{di_n}{dt} + i_n \cdot \frac{\partial L_n(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{1.12}$$

1.3.2 Bilan énergétique

L'obtention des équations du couple commence à partir du bilan énergétique, soit dW_{elec} l'énergie électrique fournie au système pendant un temps dt, dW_{th} les pertes thermiques, dW_{mec} l'accroissement d'énergie mécanique et dW_{mag} l'accroissement de l'énergie accumulée dans le champ magnétique pendant le même temps.

$$dW_{elec} = dW_{th} + dW_{mec} + dW_{mag} \tag{1.13}$$

$$dW_{elec} = \sum_{n=1}^{3} r_n \cdot i_n^2 \cdot dt + F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + dW_{mag} \tag{1.14}$$

L'énergie électrique fournie au système peut aussi être définie par 1.15.

$$dW_{elec} = \sum_{n=1}^{3} V_n \cdot i_n dt \tag{1.15}$$

En vertu de l'équation 1.1, l'énergie absorbée par le système peut être écrite comme 1.16.

$$dW_{elec} = \sum_{n=1}^{3} r_n \cdot i_n^2 \cdot dt + \sum_{n=1}^{3} i_n \frac{d\Psi_n}{dt} dt \tag{1.16}$$

En substituant l'équation 1.16 dans 1.14

$$dW_{mag} = \sum_{n=1}^{3} i_n \frac{d\Psi_n}{dt} dt - F_x dx - F_y dy \tag{1.17}$$

en même temps,

$$dW_{mag} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial W_{mag}}{\partial \Psi_n} \cdot d\Psi_n + \frac{\partial W_{mag}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial W_{mag}}{\partial y} \cdot dy \tag{1.18}$$

A partir des équations 1.17 et 1.18 on arrive à l'expression suivante :

$$\sum_{n=1}^{3} \left[\frac{\partial W_{mag}}{\partial \Psi_n} - i_n \right] \cdot d\Psi_n + \left[\frac{\partial W_{mag}}{\partial x} + F_x \right] \cdot dx + \left[\frac{\partial W_{mag}}{\partial y} + F_y \right] \cdot dy = 0 \tag{1.19}$$

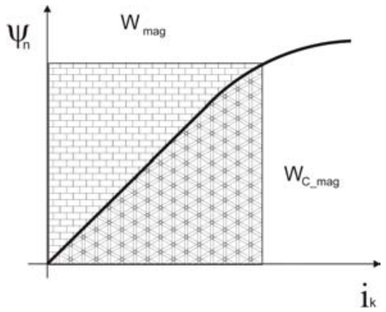


FIGURE 1.3 – Interprétation graphique de l'énergie et de la coénergie magnétique

Comme dans les équations $d\Psi$ et dx s'annulent séparément [Jufer 04].

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{mag}}{\partial \Psi_n} &= i_n \\ \frac{\partial W_{mag}}{\partial x} &= -F_x \\ \frac{\partial W_{mag}}{\partial y} &= -F_y \end{aligned} \tag{1.20}$$

De l'équation 1.20 il résulte que l'énergie accumulée dans le circuit magnétique dans le cas où le moteur est bloqué sur une position, (dx=0 et dy=0) [2] est donnée par 1.21.

$$W_{mag} = \sum_{n=1}^{3} \int_0^{\Psi} i_n d\Psi_n \tag{1.21}$$

La relation 1.2 exprime le flux en fonction des courants et des variables de position. Réciproquement on peut aussi écrire les courants en fonction du flux, soit :

$$i_n = i_n(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, x, y) \tag{1.22}$$

Par symétrie de relation avec la notion d'énergie magnétique, on peut définir la coénergie de façon duale à l'énergie magnétique.

$$W_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} \int_0^{i} \Psi_n \cdot di_n \tag{1.23}$$

La figure 1.3 illustre la répartition de l'énergie et de la coénergie magnétique dans le plan $\Psi \times i$ dans le cas d'un circuit saturable [3].

Partant des deux définitions de l'énergie et de la coénergie et de l'observation du graphique présenté dans la figure 1.3 on trouve la relation existant entre ces deux grandeurs.

$$dW_{mag} + dW_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} \Psi_n \cdot di_n + \sum_{n=1}^{3} i_n \cdot d\Psi_n \tag{1.24}$$

2. Dans ce développement on ne considère pas les pertes par hystérésis et les courants de Foucault.
3. Dans le cas sans saturation l'énergie et la coénergie sont égales.

$$dW_{mag} + dW_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} d(\Psi_n \cdot i_n) \tag{1.25}$$

Par substitution de l'expression de $dW_{C_{mag}}$, obtenue à partir de 1.25, dans 1.17 on obtient la relation équivalent pour la coénergie.

$$dW_{mag} = d(\Psi_n \cdot i_n) - dW_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} i_n \cdot d\Psi_n - F_x \cdot dx - F_y \cdot dy \tag{1.26}$$

$$dW_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} d\left(\Psi_n \cdot i_n\right) - \sum_{n=1}^{3} i_n \cdot d\Psi_n + F_x \cdot dx + F_y \cdot dy \tag{1.27}$$

$$dW_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} \Psi_n \cdot di_n + F_x \cdot dx + F_y \cdot dy \tag{1.28}$$

De plus, $dW_{C_{mag}}$ peut être exprimée selon la fonction ci-dessous :

$$dW_{C_{mag}} = dW_{C_{mag}}\left(i_1, i_2, i_3, x, y\right). \tag{1.29}$$

Par conséquent, en utilisant les dérivées partielles la relation 1.29 devient :

$$dW_{C_{mag}} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial i_n} di_n + \frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial y} dy. \tag{1.30}$$

Par substitution de 1.30 dans 1.28, on arrive à l'expression :

$$\sum_{n=1}^{3} \left[\frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial i_n} - \Psi_n\right] di_n + \left[\frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial x} - F_x\right] dx + \left[\frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial y} - F_y\right] dy = 0. \tag{1.31}$$

De la même façon que pour les expressions d'énergie magnétique en 1.32, les expressions équivalentes pour la coénergie sont obtenues à partir de 1.31.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial i_n} &= \Psi_n \\ \frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial x} &= F_x \\ \frac{\partial W_{C_{mag}}}{\partial y} &= F_y \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.3.3 Équations mécaniques

En faisant la substitution de 1.23 dans 1.32 on obtient :

$$F_x = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^i \Psi_n \cdot di_n\right]. \tag{1.33}$$

En considérant un milieu linéaire le flux est donné par 1.11 et la force de traction s'écrit :

$$F_x = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^i L_n(x,y) \cdot i_n \cdot di_n \right] \tag{1.34}$$

soit :

$$F_x = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{3} i_n^2 \cdot \frac{dL_n(x,y)}{dx} \tag{1.35}$$

De façon similaire, la force d'attraction est égale à :

$$F_y = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{3} i_n^2 \cdot \frac{dL_n(x,y)}{dy}. \tag{1.36}$$

L'équation dynamique qui représente le mouvement de translation du système mécanique est donnée par 1.37 :

$$M.\frac{d^2x}{dt^2} = F_x - f_l - D.\frac{dx}{dt} - f_{sec} \cdot sign(v_x). \tag{1.37}$$

F_x, F_y, f_l, D et f_{sec} représentent respectivement la force de traction, la force d'attraction entre les dents, la charge, le coefficient de frottement fluide et la force de frottement sec. On remarquera que la masse du moteur et la force d'attraction entre les dents agissent sur le déplacement longitudinal par le biais du frottement sec μ_s.

1.3.4 Système dynamique

Avec comme vecteurs d'état de dimension cinq $\overline{X} = [i_1, i_2, i_3, x, v_x]$, le modèle dynamique peut être mis sous la forme 1.38.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{di_n}{dt} & = & \frac{1}{L_n(x)} \cdot \left(V_n - r \cdot i_n - \frac{dL_n(x)}{dx} \cdot i_n \cdot v_x \right) \\ \frac{dx}{dt} & = & v_x \\ \frac{dv_x}{dt} & = & \frac{1}{M} \cdot (F_x - D \cdot v_x - f_{sec} \cdot sign(v_x)) \end{array} \right. \tag{1.38}$$

1.4 Modélisation de l'inductance

La variation de l'inductance est à l'origine de la conversion électromécanique et donc du mouvement du chariot. La non-linéarité de ce phénomène est incontournable et est la cause principale du comportement apériodique du système.

La construction d'une machine linéaire de grande longueur est délicate. Des imperfections d'ordre mécanique apparaissent forcément et elles se traduisent par des variations d'amplitude de l'inductance le long du parcours. Des dissymétries entre les trois phases peuvent également apparaître. Les modèles développés doivent prendre en compte ces imperfections.

1.4.1 Principe de la modélisation de la perméance

Dans la littérature sur la modélisation et la commande des moteurs à réluctance variable, on trouve des modèles simplifiés pour représenter l'inductance de chaque phase du moteur [Liu 00b], [Nagel 98], [Russa 98], [Nagel 00]. Le plus connu est le modèle du premier harmonique. Ce modèle approxime l'inductance par une fonction sinusoïdale avec une composante continue. Ce modèle convient bien pour des simulations numériques du moteur fonctionnant dans des régimes réguliers stables.

La modélisation par des tubes de flux à déjà été présentée dans de nombreux travaux, [Liu 99] et [Chayopitak 04]. Il s'agit d'une méthode analytique capable de faire apparaître dans ses résultats les détails de la géométrie irrégulière de ce genre de machine.

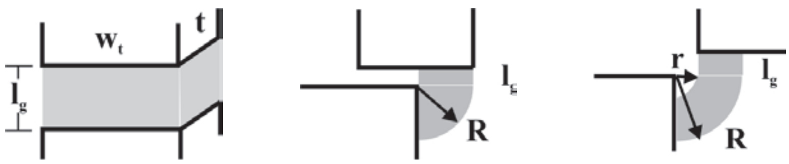
La méthode des tubes de flux est basée sur la représentation du flux magnétique dans l'entrefer par des figures géométriques, " les tubes ". Ces tubes sont des figures composées par des lignes et des arcs de cercle qui sortent d'une surface du matériau ferromagnétique et qui arrivent à l'autre surface toujours de façon perpendiculaire. Le calcul de la perméance suppose que le noyau de fer est idéal et s'effectue donc seulement pour la région de l'entrefer.

La perméance d'un élément de tube de longueur l et de section dA est donnée par :

$$dP = \mu_o \cdot \frac{dA}{l} \tag{1.39}$$

On détermine la perméance d'un tube par intégration et la perméance totale par sommation des perméances individuelles des tubes en parallèle. Ces calculs seront effectués pour différentes positions du chariot.

Pour l'analyse de notre machine nous avons utilisé trois formes de tubes qui doivent couvrir toutes les configuration rencontrées le long du parcours.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.4 – (a) Position de permeance maximale, (b) Position intermédiaire (c) Position de permeance minimale

Premier tube : type 0 = rectangulaire figure 1.4(a)

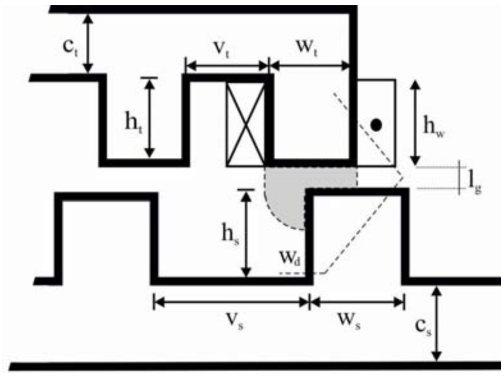
$$P_0 = \mu_o \cdot \frac{w_t \cdot w_d}{l_g}, \tag{1.40}$$

où $w_t \cdot w_d$ représente la section du tube et l_g sa longueur.

Deuxième tube : type 1 = un quart de cercle plus l'entrefer l_g. figure 1.4(b)

$$P_1 = \frac{2 \cdot \mu_o \cdot w_d}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{R \cdot \pi + 2l_g}{2 \cdot l_g}\right), \tag{1.41}$$

où R est le rayon du quart de cercle.



Stator		Translateur	
w_d	40 mm	l_g	1 mm
w_s	15 mm	w_t	12 mm
c_s	15 mm	c_t	12 mm
v_s	21 mm	v_t	12 mm
h_s	10 mm	h_t	33 mm
P_s	36 mm	P_t	24 mm

FIGURE 1.5 – Dimensions du moteur

Troisième tube : type 2 = un quart d'une couronne circulaire plus l'entrefer l_g figure 1.4(c)

$$P_2 = \frac{2 \cdot \mu_o \cdot w_d}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{R \cdot \pi + 2l_g}{r \cdot \pi + 2l_g}\right), \tag{1.42}$$

où r est le rayon interne de la couronne et R son rayon externe.

La figure 1.5 précise les nomenclatures utilisées pour les différentes grandeurs géométriques qui interviennent dans les calculs ainsi que leurs valeurs numériques.

Pour calculer la perméance d'entrefer du moteur linéaire, on a considéré que :
- la hauteur de la bobine est égale à la hauteur de la dent de la partie mobile,
- le flux mutuel est négligeable,
- la perméance du noyau de fer est infinie.

1.4.2 Flux mutuel

Le passage d'une machine tournante à une machine linéaire a comme conséquence la perte de la symétrie axiale. Ce changement occasionne une perte d'équilibre sur les forces d'attraction entre les parties mobile et statique. Dans la version tournante du moteur, ces forces s'annulent naturellement, alors que dans la version linéaire, la force d'attraction doit être supportée par les roulettes. Elle est variable en fonction de la position puisque l'épaisseur d'entrefer varie et l'inductance aussi selon l'équation 1.36.

La deuxième conséquence de cette perte de symétrie peut être aussi une augmentation de l'inductance mutuelle, malgré la commande appliquée qui alimente une phase à la fois, il existe toujours des croisements des courants pendant les changements de phase et les mutuelles interviennent alors sur le comportement dynamique du moteur. Il est donc très important d'analyser de près les valeurs de ces mutuelles.

En utilisant la méthode des tubes de flux, on essaie de déterminer les inductances mutuelles en tenant compte des dimensions géométriques particulières présentées dans la figure 1.5 et ses symétries. On remarquera que le pas statorique P_s et le pas du translateur P_t sont différents.

La figure 1.6, présente le flux produit par la bobine A dans la position d'équilibre avec l'alignement de la dent A ($x = 0$).

La figure 1.7, présente le flux produit par la bobine A' dans la même position.

Les flux produits par la bobine A dans les dents autres que A et A' sont annulés par les flux produits par la bobine A'. En utilisant le théorème de superposition, le flux produit par la phase

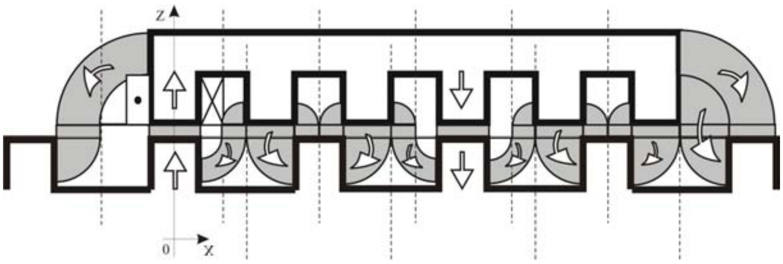


Figure 1.6 – Flux produit par la bobine A.

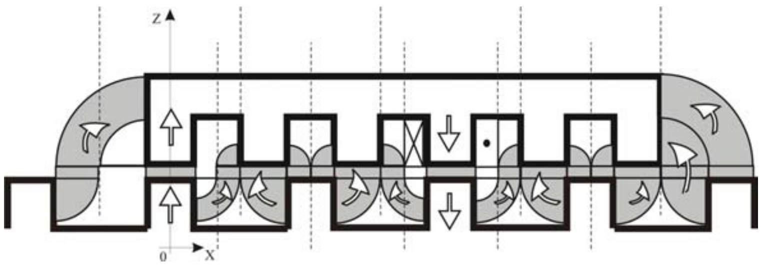


Figure 1.7 – Flux produit par la bobine A'.

A avec alimentation des bobines A e A'est donné par la figure 1.8. Il est entièrement concentré sur les dents A et A'

Pour la position $x = 0$ l'inductance mutuelle est donc négligeable. En raison des symétries on peut démontrer de même que cette propriété reste valable pour toutes les valeurs de x.

Donc, a partir de ce point de vue et en considérant que la perméance du fer est infinie, le flux mutuel sera négligé dans la suite du travail sur le modèle dynamique.

1.4.3 Application de la méthode des tubes de flux

Nous allons analyser la répartition du flux sous la dent A du chariot lorsque celle-ci se déplace de la position $x = 0$ jusqu'à la position en milieu des dents du stator qui correspond à un demi-pas statorique, c'est-à-dire 18 mm. Par symétrie, on obtiendra la suite de la courbe pour l'autre demi-pas. Cette analyse a été publiée en [De Castro 08a].

En utilisant les trois formes de tubes qui ont été définies dans la section antérieure pour faire la modélisation de la perméance d'entrefer par la méthode des tubes de flux, on a trouvé cinq étapes pour l'analyse.

Les analyses qui suivent sont réalisées pour une seule phase (A) et sur un seul pôle de la phase,

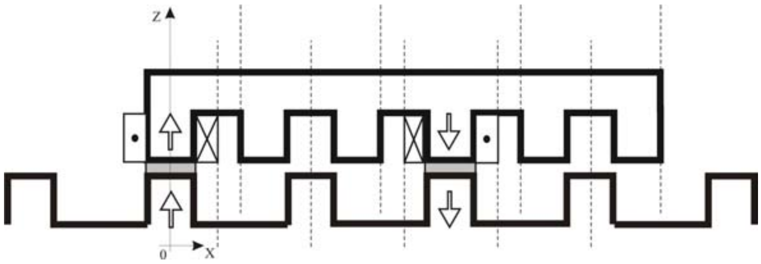


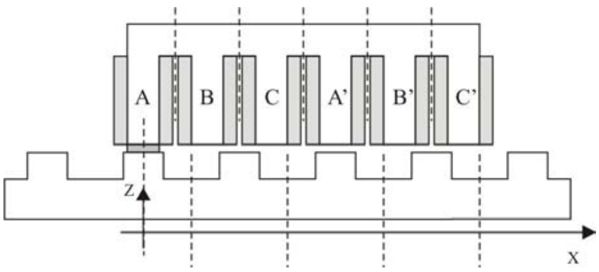
Figure 1.8 – Flux produit par la phase A avec alimentation des bobines A et A'.

pour le deuxième pôle de la phase les valeurs sont les mêmes. Nous allons trouver cinq étapes successives. Pour chacune de ces étapes nous obtenons une association de tubes en parallèle dont nous faisons la sommes des perméances.

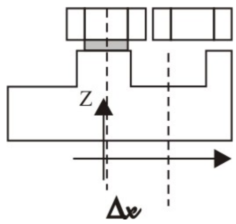
a) *Étape 1*

On est dans la première étape, la plus simple, tant que la dent A reste entièrement devant une dent du stator. Cette étape est décrite par un seul tube du type 0. Elle démarre par la position $x = 0$ qui représente la position d'alignement parfait entre les dents de la phase A. Cette étape se termine quand l'extrémité de la dent de la partie mobile et du stator se trouvent sur la même ligne.
Le Tube de flux P01 correspond à la perméance d'un tube du type 0 dans l'étape 1.

$$0 \leq x \leq \frac{ws - wt}{2} \tag{1.43}$$



(a)



(b)

FIGURE 1.9 – (a) Position dans l'étape 1, (b) Zoom

$$P_{01} = \mu_o \int_0^{w_t} \frac{w_d}{l_g} dr \tag{1.44}$$

$$P_{01} = \mu_o \cdot w_t \cdot \frac{w_d}{l_g} \tag{1.45}$$

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = 0 \tag{1.46}$$

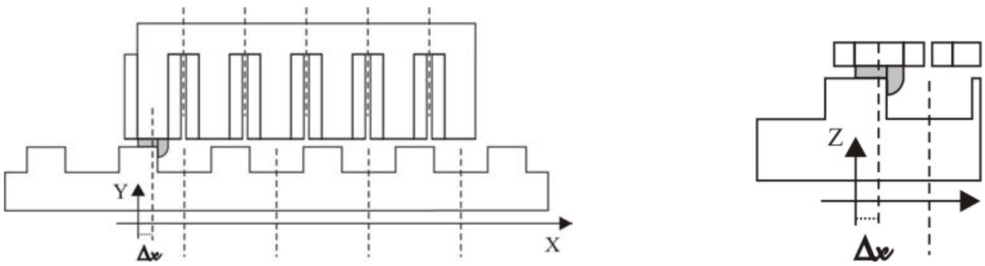
b) *Étape 2*

Cette étape démarre quand un deuxième tube de flux apparaît. Nous sommes alors en présence d'un tube du $P02$ du type 0 et d'un tube $P12$ du type 1, dont les perméances vont s'ajouter. Cette étape se termine lorsque le tube $P02$ en quart de cercle devient plus long que la distance entre une dent du translateur et le fond d'encoche du stator.

$$\frac{w_s - w_t}{2} < x \leq \frac{w_s - w_t}{2} + 2 \cdot \frac{h_s}{\pi} \tag{1.47}$$

$$P_{02} = \mu_o \int_{x-\frac{wt}{2}}^{\frac{ws}{2}} \frac{w_d}{\mathrm{lg}} dr \tag{1.48}$$

$$\frac{dP02}{dx} = -\mu_o \cdot \frac{w_d}{\mathrm{lg}} \tag{1.49}$$



(a) (b)

FIGURE 1.10 – (a) Position dans l'étape 2, (b) Zoom

$$P_{12} = \mu_o \int_0^{x-\frac{ws-wt}{2}} \frac{w_d}{\frac{\pi \cdot r}{2} + \mathrm{lg}} dr \tag{1.50}$$

$$P_{12} = 2 \cdot w_d \cdot \mu_o \cdot \frac{\ln\left(2 \cdot \pi \cdot x - \pi \cdot w_s + \pi \cdot w_t + 4 \cdot l_g\right) - \ln\left(4 \cdot l_g\right)}{\pi} \tag{1.51}$$

$$\frac{dP_{12}}{dx} = 4 \cdot \mu_o \cdot \frac{w_d}{2 \cdot \pi \cdot x - \pi \cdot w_x + \pi \cdot w_t + 4 \cdot l_g} \tag{1.52}$$

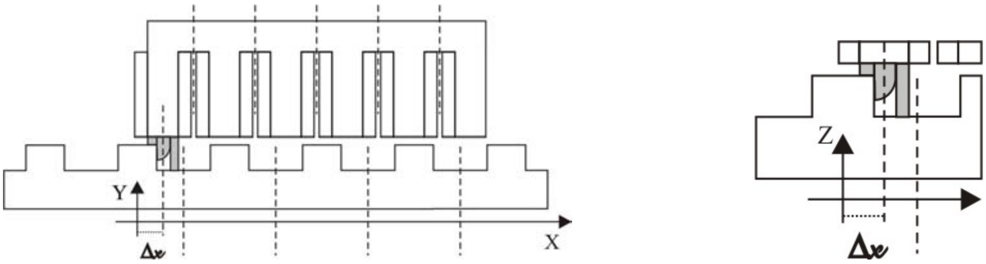
$$P_2\left(x\right) = P_{02}\left(x\right) + P_{12}\left(x\right) \tag{1.53}$$

$$\frac{dP_2\left(x\right)}{dx} = \frac{dP_{02}\left(x\right)}{dx} + \frac{P_{12}\left(x\right)}{dx} \tag{1.54}$$

c) *Étape 3*

Cette étape démarre lorsque le tube $P12$, un quart de cercle, se dédouble, il donne naissance à deux nouveaux tubes $P13$ du type 1 et $P003$ du type 0. Cette étape se termine quand le tube $P03$ disparaît, c'est à dire quand la deuxième extrémité de la dent de la partie mobile et celle du stator se trouvent sur la même ligne.

$$\frac{ws - wt}{2} + 2 \cdot \frac{hs}{\pi} < x \leq w_t + \frac{ws - wt}{2}$$



(a) (b)

FIGURE 1.11 – (a) Position dans l'étape 3, (b) Zoom

$$P_{03} = \mu_o \int_{x-\frac{w_t}{2}}^{\frac{w_s}{2}} \frac{w_d}{l_g} dr \tag{1.55}$$

$$P_{03} = \frac{\mu_o \cdot w_d}{2} \cdot \frac{w_t - 2 \cdot x + w_s}{l_g} \tag{1.56}$$

$$\frac{dP_{03}}{dx} = -\frac{\mu_o \cdot w_d}{l_g} \tag{1.57}$$

$$P_{13} = \mu_o \int_0^{\frac{2 \cdot h_s}{\pi}} \frac{w_d}{\frac{\pi \cdot r}{2} + l_g} dr \tag{1.58}$$

$$P_{13} = 2 \cdot \mu_o \cdot w_d \cdot \frac{\ln(h_s - l_g) + \ln(l_g)}{\pi} \tag{1.59}$$

$$\frac{dP_{13}}{dx} = 0 \tag{1.60}$$

$$P_{003} = \mu_o \int_0^{x - \left(\frac{w_s - w_t}{2} + \frac{2 \cdot h_s}{\pi}\right)} \frac{w_d}{h_s + l_g} dr \tag{1.61}$$

$$P_{003} = \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{w_d}{h_s + l_g} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot x - \pi \cdot w_s + \pi \cdot w_t - 4 \cdot h_s}{\pi} \tag{1.62}$$

$$\frac{dP_{003}}{dx} = \mu_o \cdot \frac{w_d}{h_s + l_g} \tag{1.63}$$

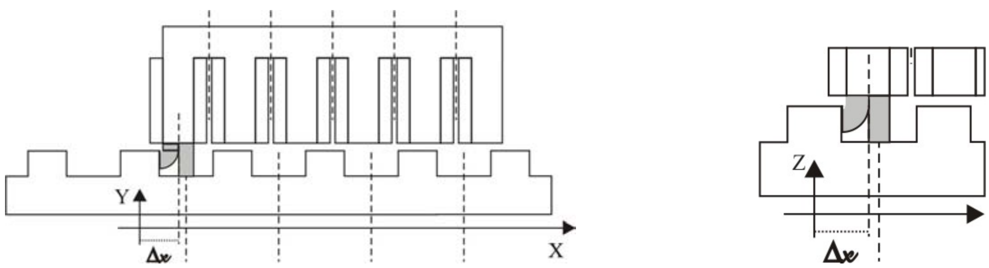
$$P_3(x) = P_{03}(x) + P_{13}(x) + P_{003}(x) \tag{1.64}$$

$$\frac{P_3(x)}{dx} = \frac{P_{03}(x)}{dx} + \frac{P_{13}(x)}{dx} + \frac{P_{003}(x)}{dx} \tag{1.65}$$

d) *Étape 4*

Lorsque le tube $P03$ disparaît, le tube $P13$ se transforme en un tube $P24$, un quart de couronne de type 2. Il ne reste plus que deux tubes, le $P24$ et $P14$. Cette étape se termine quand les lignes de champs issues de la dent A sont attirées par la dent suivante du stator.

$$w_t + \frac{ws - wt}{2} < x \leq \frac{ws - wt}{2} + v_s - 2 \cdot \frac{hs}{\pi}$$



(a) (b)

FIGURE 1.12 – (a) Position dans l'étape 4, (b) Zoom

$$P_{24} = \mu_o \int_{x - \left(\frac{w_s - w_t}{2} + w_t\right)}^{2 \cdot \frac{h_s}{\pi}} \frac{w_d}{\frac{\pi \cdot r}{2} + l_g} dr \tag{1.66}$$

$$P_{24} = 2 \cdot w_d \cdot \mu_o \cdot \frac{\ln(4 \cdot (h_s + l_g)) - \ln(2 \cdot \pi \cdot x - \pi \cdot (w_s + w_t) + 4 \cdot l_g)}{\pi} \tag{1.67}$$

$$\frac{dP_{24}}{dx} = -4 \cdot \mu_o \cdot \frac{w_d}{2 \cdot \pi \cdot x - \pi \cdot (w_t + w_s) + 4 \cdot l_g} \tag{1.68}$$

$$P_{14} = \mu_o \cdot \int_{\frac{w_s}{2}+\frac{2\cdot h_s}{\pi}}^{x+\frac{w_t}{2}} \frac{w_d}{h_s + l_g} dr \tag{1.69}$$

$$P_{14} = \frac{\mu_o \cdot w_d}{2} \cdot \frac{2\cdot\pi\cdot x + \pi\cdot(w_t + w_s) - 4\cdot h_s}{\pi\,(h_s + l_g)} \tag{1.70}$$

$$\frac{dP_{14}}{dx} = \mu_o \cdot \frac{w_d}{h_s + l_g} \tag{1.71}$$

$$P_4\,(x) = P_{14}\,(x) + P_{24}\,(x) \tag{1.72}$$

$$\frac{P_4\,(x)}{dx} = \frac{P_{14}\,(x)}{dx} + \frac{P_{24}\,(x)}{dx} \tag{1.73}$$

e) *Étape 5*

Dans cette dernière étape, nous sommes en présence de trois types de tubes de flux $P25, P15$ et $P225$.

$$\frac{ws - wt}{2} + v_s - 2\cdot\frac{hs}{\pi} < x \leq \frac{ws - vs}{2}$$

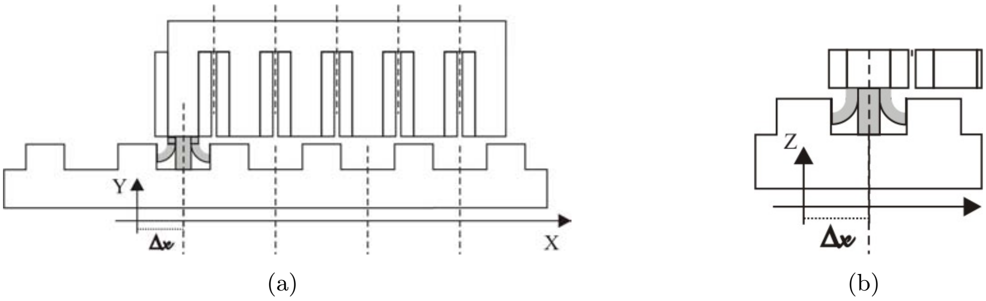


Figure 1.13 – (a) Position dans l'étape 5, (b) Zoom

$$P_{25} = \mu_o \int_{x-\left(\frac{w_s-w_t}{2}+w_t\right)}^{2\cdot\frac{h_s}{\pi}} \frac{w_d}{\frac{\pi\cdot r}{2} + l_g} dr \tag{1.74}$$

$$P_{25} = 2\cdot w_d\cdot\mu_o\cdot\frac{\ln\left(4(h_s + l_g)\right) - \ln\left(2\cdot\pi\cdot x - \pi\cdot(w_s + w_t) + 4\cdot l_g\right)}{\pi} \tag{1.75}$$

$$\frac{dP_{25}}{dx} = -4\cdot\mu_o\cdot\frac{w_d}{2\cdot\pi\cdot x - \pi\cdot(w_t + w_s) + 4\cdot l_g} \tag{1.76}$$

$$P_{15} = \mu_o \cdot \int_{\frac{w_s}{2}+\frac{2\cdot h_s}{\pi}}^{\frac{w_s}{2}+v_s-2\frac{h_s}{\pi}} \frac{w_d}{h_s + l_g} dr \tag{1.77}$$

$$P_{15} = \mu_o \cdot w_d \cdot \frac{v_s\cdot\pi - 4\cdot h_s}{\pi\,(h_s + l_g)} \tag{1.78}$$

$$\frac{dP_{15}}{dx} = 0 \tag{1.79}$$

$$P_{225} = \mu_o \int_{\frac{ws}{2}+vs-\left(x+\frac{w_t}{2}\right)}^{2\cdot\frac{h_s}{\pi}} \frac{w_d}{\frac{\pi\cdot r}{2} + l_g} dr \tag{1.80}$$

$$P_{225} = 2 \cdot w_d \cdot \mu_o \cdot \frac{\ln\left(4(h_s + l_g)\right) - \ln\left(-2 \cdot \pi \cdot x + \pi \cdot (w_s - w_t) + 2 \cdot v_s \cdot \pi + 4 \cdot l_g\right)}{\pi} \tag{1.81}$$

$$\frac{dP_{225}}{dx} = 4 \cdot \mu_o \cdot \frac{w_d}{-2 \cdot \pi \cdot x + 2 \cdot \pi \cdot v_s + \pi \cdot (w_s - w_t) + 4 \cdot l_g} \tag{1.82}$$

$$P_5\,(x) = P_{15}\,(x) + P_{25}\,(x) + P_{225}\,(x) \tag{1.83}$$

$$\frac{P_5\,(x)}{dx} = \frac{P_{15}\,(x)}{dx} + \frac{P_{25}\,(x)}{dx} + \frac{P_{225}\,(x)}{dx} \tag{1.84}$$

Cette phase se termine quand la dent A du translateur a atteint la position médiane entre les deux dents du stator, soit $x = 18\ mm$.

L'exploitation des cinq étapes a permis d'obtenir les perméances et leurs dérivées pour un demi-pas statorique c'est-à-dire pour $0 \leq x \leq 18\ mm$. L'inductance de phase peut être calculée en fonction des valeurs de la perméance à partir de l'équation :

$$L(x) = (2 \cdot N)^2 \cdot \frac{P(x)}{2} \tag{1.85}$$

Par symétrie, la fonction d'inductance $L(x)$ est paire, après l'assemblage de toutes les étapes, la figure 1.14 représente l'inductance sur un pas statorique complet.

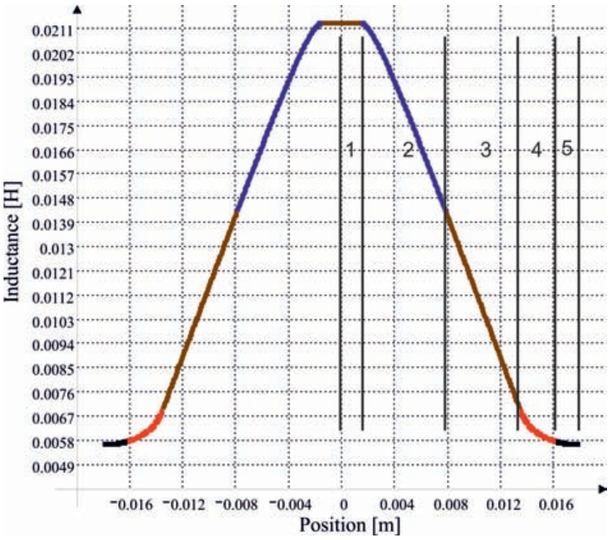


FIGURE 1.14 – Inductance en fonction du déplacement

La force de traction F_x 1.35, étant proportionnelle à la dérivée de l'inductance propre par rapport à x, la figure 1.15 représente cette dérivée sur un pas statorique. Cette courbe est impaire.

Pour chaque étape, après dérivation des perméances par rapport à y, on obtient $\frac{dL}{dy}$ proportionnelle à la force d'attraction entre les dents du translateur et du stator. La figure 1.16 présente la dérivée de l'inductance dans la direction verticale.

L'inductance propre, figure 1.14, présente une allure proche de la sinusoïde avec comme valeurs extrêmes,

$$L_{max} = 21,0\ mH \qquad L_{min} = 5,7\ mH. \tag{1.86}$$

Cette allure justifie l'approximation couramment utilisée du modèle harmonique du premier ordre.

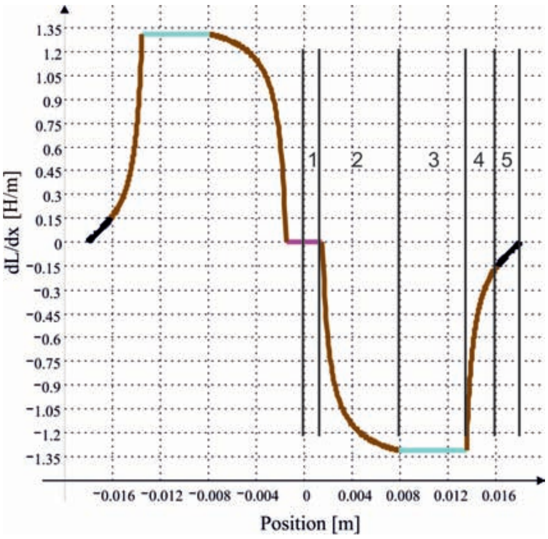


Figure 1.15 – Dérivée horizontale de l'inductance en fonction du déplacement.

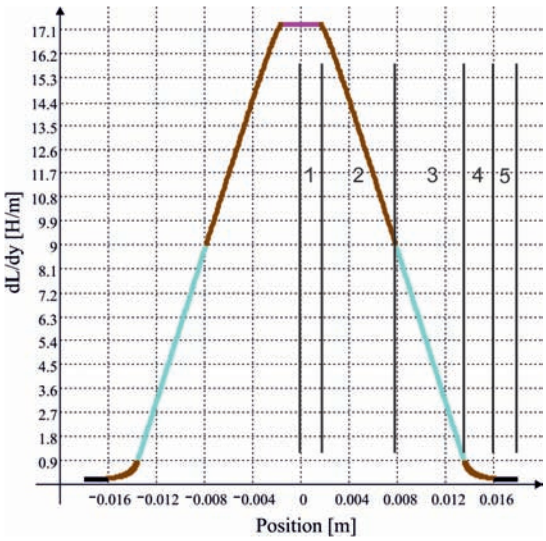


Figure 1.16 – Dérivée verticale de l'inductance en fonction du déplacement.

Par contre la courbe de la dérivée de l'inductance par rapport à x, figure 1.15, qui permet de calculer la force de traction, est plus éloignée de la sinusoïde. La zone morte au voisinage de l'équilibre entraîne une incertitude de positionnement.

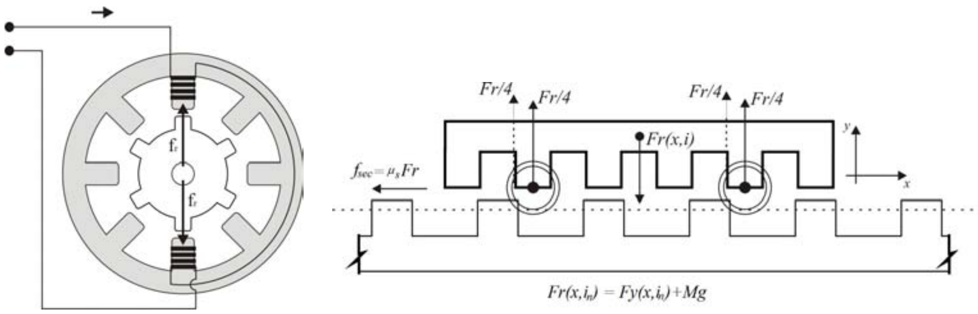
La courbe de la dérivée de l'inductance par rapport à y, figure 1.16, a une allure presque triangulaire. Cette force agit sur le frottement sec par l'équation 1.87,

$$f_{sec} = \mu_s \left[F_y + M \cdot g \right] \tag{1.87}$$

où le coefficient μ_s est multiplie la force résultante normale sur la surface de contact roues-rails. La force de frottement sec f_{sec} devient dépendante de la position et du courant qui alimente la phase selon l'équation 1.36. Dans le cas où une seule phase est alimentée, le frottement sec devient :

$$f_{sec} = \frac{\mu_s}{2} \left[i_n^2 \frac{dL_n}{dy} + M \cdot g \right] \tag{1.88}$$

Dans les machines tournantes cette force d'attraction s'annule à cause de la symétrie radiale comme le montre la figure 1.17 et n'a donc pas d'influence sur le frottement sec qui reste presque constant. Dans le cas de la machine linéaire à réluctance variable, cette force a une influence considérable sur le frottement sec. Elle devient la principale responsable des vibrations mécaniques à cause de sa grande amplitude.



(a) moteur tournant

(b) Moteur Linéaire

FIGURE 1.17 – (a) Forces radiales qui s'annulent par les pôles symétriques ; (b) Forces d'attraction et de frottement sec qui dépendent de la position et du courant dans la phase.

1.4.4 Modèle harmonique de l'inductance

Comme résultat de l'analyse sur l'inductance propre d'une phase, on a constaté une forme à peu près sinusoïdale. Ce fait renforce l'idée de l'utilisation d'un modèle harmonique du premier ordre. La figure 1.18(a) présente l'analyse de Fourrier de l'inductance. Seules les deux premières raies seronts rétenues pour le modèle harmonique avec :

Donc, les valeurs retenues pour l'obtention de ce modèle harmonique sont :

$$L_0 = 13\ mH \qquad L_1 = 8\ mH \tag{1.89}$$

L'inductance est donc donnée par :

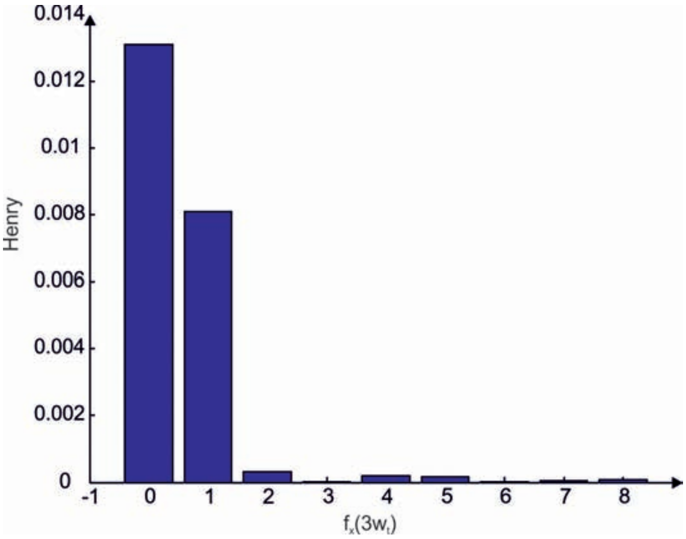
$$L_n(x) = L_0 + L_1 \cdot cos \left[2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{P_s} - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3} \right] \tag{1.90}$$

La figure 1.18(b) présente l'analyse de Fourrier de la dérivée de l'inductance par rapport à x. Elle n'a pas de composante continue, la composante fondamentale est importante mais les harmoniques 2,4 et 5 ne sont pas négligeables. Neanmoins, pour notre modèle harmonique nous utiliserons la dérivée $\frac{dL_n(x)}{dx}$ calculée directement à partir de 1.91. Soit :

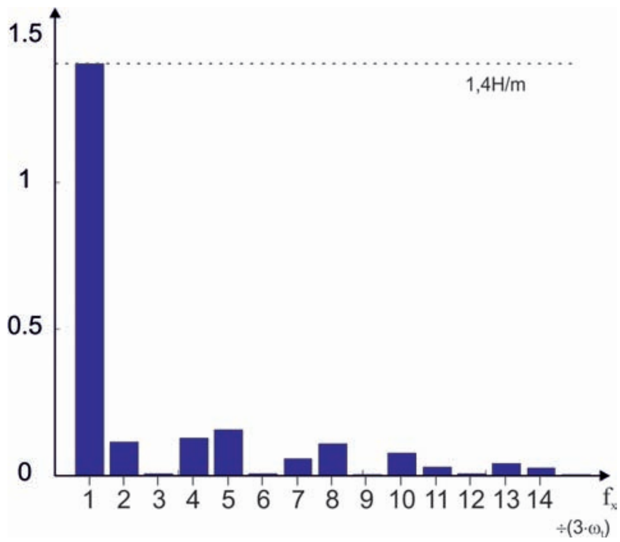
$$\frac{dL_n(x)}{dx} = -\frac{2 \cdot \pi \cdot L_1}{P_s} \cdot sin \left[2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{P_s} - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3} \right] \tag{1.91}$$

Ulterieurement, nous testerons la précision de ce modèle en comparant les résultats avec la simulation exacte du modèle tube de flux.

La courbe de la figure 1.16 donnant la dérivée de l'inductance par rapport à la coordonnée y est beaucoup plus proche de la sinusoïde. De façon simple nous allons modéliser cette courbe à



(a) Inductance



(b) Dérivée de l'inductance par rapport à x

FIGURE 1.18 – Spectres de Fourier

partir de ses valeurs extrêmes $\frac{dL}{dy}|_{max} = 17,33\ H/m$ et $\frac{dL}{dy}|_{min} = 0,16\ H/m$ par une expression de la forme :

$$\frac{dL}{dy} = L_0^y + L_1^y \cdot cos\left[2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{P_s} - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3}\right] \tag{1.92}$$

où,

$$L_0^y = \frac{\frac{dL}{dy}|_{max} + \frac{dL}{dy}|_{min}}{2}, \tag{1.93}$$

et

$$L_1^y = \frac{\frac{dL}{dy}|_{max} - \frac{dL}{dy}|_{min}}{2}. \tag{1.94}$$

1.4.5 Modèle saturé

Le modèle qui a été développé pour l'inductance, en considérant qu'elle n'est pas une fonction du courant, est en effet une simplification qui n'est pas tout-à-fait justifié sachant que tout les matériaux ferromagnétiques sont saturables et fonctionnent plus au moins dans le coude de saturation.

Pour les machines à réluctance variable les dents sont saturés uniquement lorsqu'elles sont en vis-à-vis, ce qui écrête la courbe d'inductance.

Pour une commande sans capteur avec la détermination de la position par mesure de l'inductance, la saturation du noyau nous pose un grand problème. C'est à dire, si le niveau de saturation est faible, la courbe d'inductance reste encore avec un seul maximum local dans l'intervalle de $[-18\,mm \quad 18\,mm]$, et on arrive à déterminer la position sans redondance. Par contre, dans le cas d'une forte saturation, l'inductance décroît et la décision devient plus compliquée. Quelques travaux ont été publiés sur le sujet de la modélisation de l'inductance pour la commande sans capteur dans les régimes saturés [Suresh 99] et [Gao 04].

1.5 Comparaison avec la simulation par les éléments finis

Afin de valider la modélisation par la méthode des tubes de flux, une simulation en utilisant la méthode des éléments finis a été mise en œuvre. Pour cette simulation nous avons utilisé le logiciel *open source* gratuit ***Finite Element Method Magnetics*** FEMM - version 4.2.

Le FEMM est un ensemble de programmes pour résoudre les problèmes d'électromagnétisme en basse fréquence à deux dimensions. Le but de cette présentation n'est pas d'entrer dans les détails de la méthode des éléments finis, mais d'utiliser le logiciel comme un outil qui nous donnera un résultat numérique pour valider notre modèle analytique.

L'idée de base des éléments finis est de diviser le problème en un grand nombre de régions avec des géométries très simples, comme des triangles par exemple. Dans ces régions les vraies valeurs des potentiels sont approximées par des fonctions simples et si les régions sont suffisamment petites la valeur calculée s'approche de la valeur exacte.

Spécifiquement, le FEMM discrétise le domaine du problème en éléments, ou régions, triangulaires. En chaque élément, la solution est approximée par interpolation linéaire de la valeur du potentiel sur chacun des trois sommets du triangle.

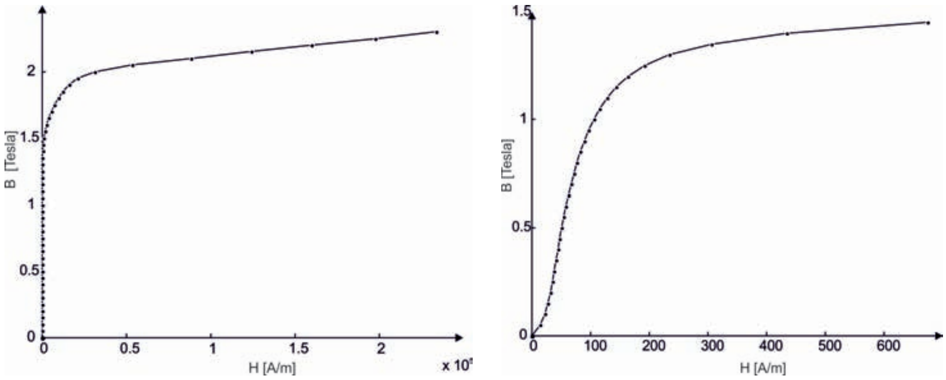
Les paramètres utilisés dans la simulation sont présentés ci-dessous.

Le matériau utilisé est un acier silicium M-19 GNO (Grain non orienté) présenté dans la bibliothèque du logiciel comme : ***M-19 steel***, laminé dans le sens parallèle au plan du dessin 1.20 à une épaisseur de 0.635 mm par lamine. Ce matériel a une perméabilité relative de $\mu_r = 4416$.

La caractéristique B *vs.* H du matériel est présentée dans la figure 1.19.

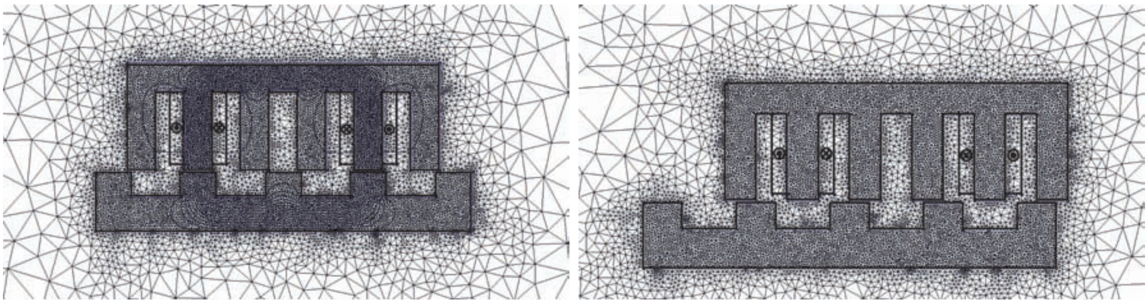
Le maillage triangulaire a été construit en laissant le logiciel libre de choisir la taille des éléments dans l'air. Dans le fer nous avons imposé une taille maximale de 1 mm pour garantir une bonne précision. Ce maillage est recalculé à chaque étape ou position du calcul. La figure 1.20. représente le maillage pour deux positions remarquables.

La simulation réalisée pour les deux principales positions d'équilibre du chariot code, par la couleur, l'intensité de l'induction dans différentes régions du moteur pour une phase alimentée. La comparaison entre les figures 1.21 et 1.22 montre que les dents du translateur sont légèrement saturées autour de la position d'équilibre et ne le sont pas du tout en position intermédiaire. On observe également que les lignes de champs de fuites sont plus nombreuses en dehors de l'alignement. On constate que le flux de fuite est variable sur un pas. En tenir compte dans



(a) (b)

Figure 1.19 – Caractéristique B x H pour le matériau M-19 acier silicium grain non orienté

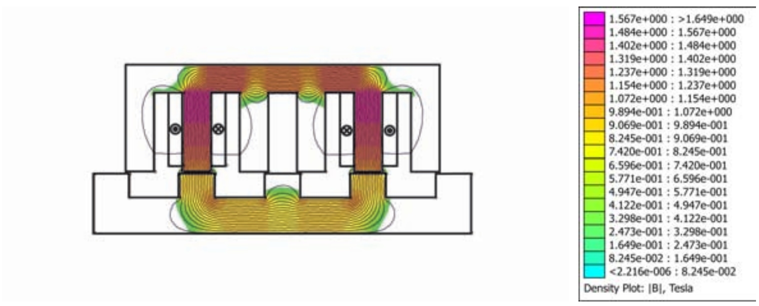


(a) Position d'équilibre ou alignée pour la phase B : $x = 12\ mm$

(b) Position intermédiaire (équilibre instable) : $x = 30\ mm$

Figure 1.20 – Maille avec la définition des éléments triangulaires

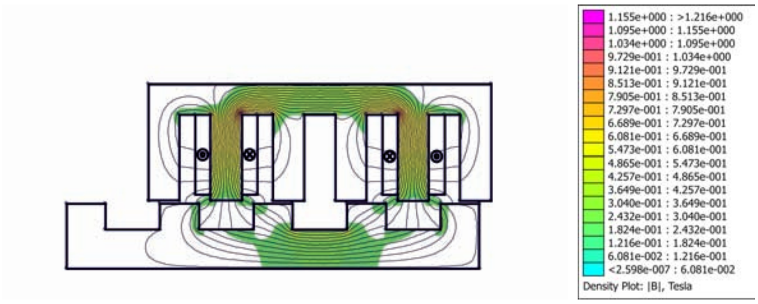
le modèle à tubes de flux compliquerait beaucoup l'analyse. Toutefois, le flux de fuite restant négligeable devant le flux principal il n'est pas nécessaire de le modéliser.



(a) (b)

Figure 1.21 – Densité du flux pour la position d'équilibre stable

Le pack FEMM permet l'utilisation d'un langage de génération des ***scripting/bath*** open-source appelé LUA. Dans l'ensemble de commandes standard du LUA, le FEMM a ajouté des commandes spécifiques pour manipuler des fichiers et pour travailler avec les étapes d'avant et

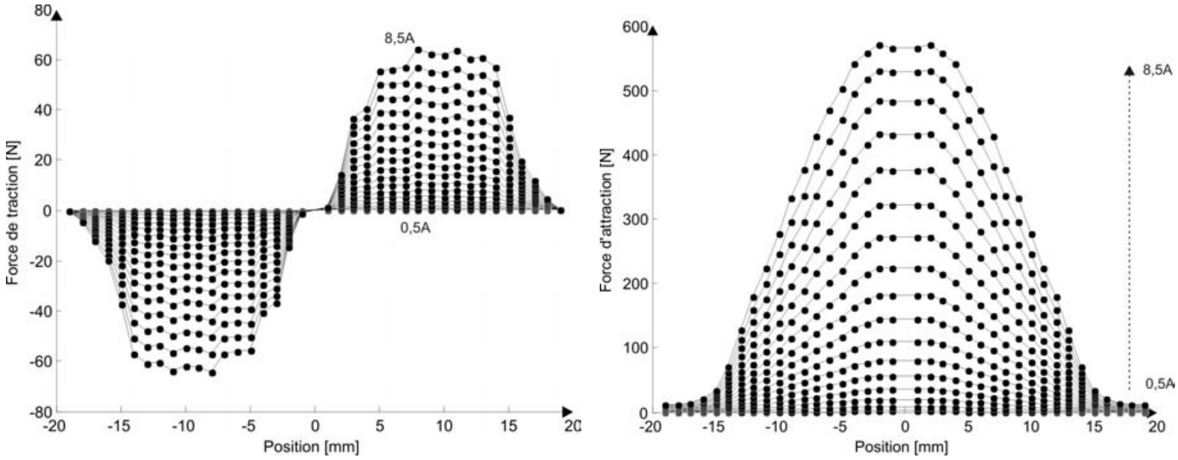


(a) (b)

FIGURE 1.22 – Densité du flux pour la position intermédiaire d'un demi-pas statorique

post process. En utilisant ce langage, on a développé un script pour calculer les valeurs de flux et forces de traction et d'attraction sur le chariot du moteur entre deux positions d'équilibre stable.

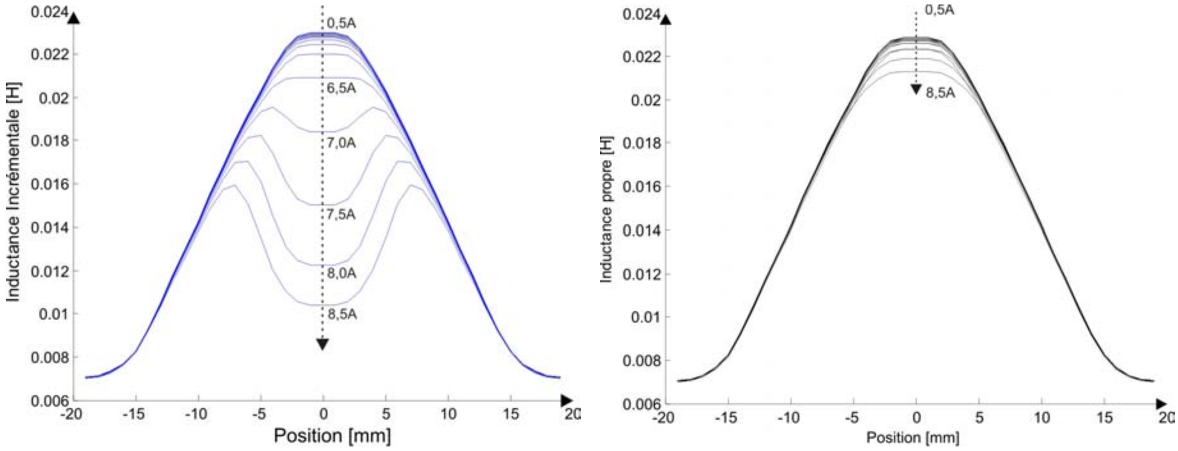
La figure 1.23(a) présente la force de traction F_x qui est exercée sur le chariot et la figure 1.23(b) présente la force d'attraction F_y. Pour ces deux figures, à chaque position, les points ont été calculés pour des courant allant de $0,5\ A$ à $8,0\ A$ par pas de $0,5\ A$.



(a) Force de traction sur le chariot F_x (b) Force magnétique d'attraction sur le chariot F_y

FIGURE 1.23 – Forces de traction et d'attraction simulées par la méthode des éléments finis.

Les valeurs sont calculées à chaque étape en considérant le cas statique, c'est-à-dire avec une vitesse zéro. A la fin de la simulation, les valeurs d'inductance obtenues correspondent donc à l'inductance propre de la phase. La figure 1.24(b) représente cette inductance propre en fonction de la position pour différents courants. L'influence de la saturation montre une légère déformation de la région plate et une diminution de la valeur maximale. Le logiciel permet également de tracer l'inductance incrémentale figure 1.24(a) qui est la dérivée du flux par rapport au courant. En absence de saturation c'est-à-dire pour des courants faibles ces deux figures coïncident. Par contre, l'inductance incrémentale est fortement impactée par la saturation qui est maximale à la position $x = 0$. Il arrive que sur la courbe de l'inductance incrémentale, avec un fort courant, pour le point d'équilibre $x = 0$, la valeur de l'inductance devient un point minimum. Cette déformation de la courbe rend impossible l'estimation de la position à partir de l'acquisition de l'inductance à cause de sa ambiguïté.



(a) Inductance incrémentale en fonction de la position et du courant dans la phase

(b) Inductance propre en fonction de la position et du courant dans la phase

Figure 1.24 – Effect de la saturation sur les inductances propres et incrémentales.

La figure 1.25 présente le flux total sous une dent en fonction du courant pour les différentes positions.

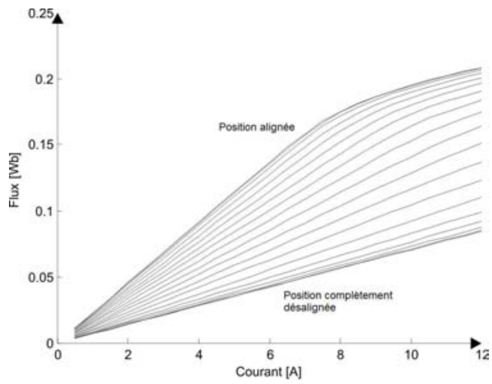


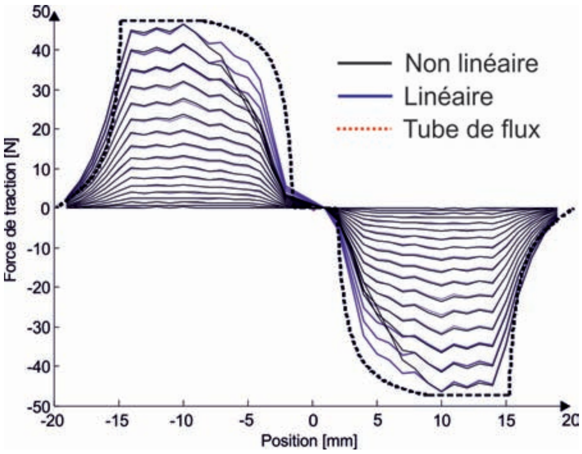
Figure 1.25 – Flux total en fonction de la position et du courant dans la phase

La comparaison entre les résultats obtenus par la méthode des tubes de flux et par le logiciel de simulation par les éléments finis FEMM est présentée sur les figures 1.26(a) et figure 1.26(b).

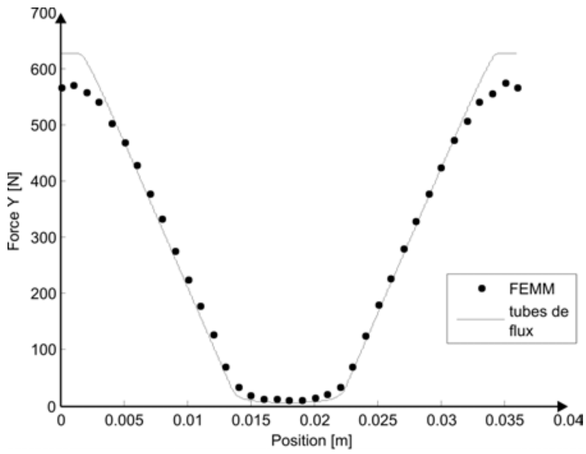
Cette différence est surtout causée par la non linéarité du matériel qui est prise en compte lors de la simulation par les éléments finis.

L'influence de la saturation du noyau sur la force d'attraction entre les pôles du moteur est marquée par une diminution de sa valeur maximum et aussi par une légère déformation sur la région plate. Par ailleurs, sur la force de traction du chariot la saturation n'apporte pas une différence qui soit remarquable sur les simulations.

Dans une simulation avec le même matériel mais en considérant ce matériel avec des caractéristiques magnétiques linéaires, les résultats montrent une différence négligeable au niveau de la force de traction.



(a) Force de traction sur le chariot F_x



(b) Inductance propre en fonction de la position et du courant dans la phase

FIGURE 1.26 – Comparaison entre éléments finis et tubes de flux.

1.6 Modèle réduit

L'étude des systèmes physiques se fait toujours à partir des équations différentielles dérivées des lois fondamentales. Vu l'importance croissante de l'analyse des systèmes non-linéaires et l'impossibilité de trouver des solutions analytiques, les méthodes numériques sont devenues incontournables pour la résolution des problèmes scientifiques.

L'utilisation des ordinateurs pour trouver les solutions numériques pose les questions suivantes : Jusqu'à quel moment les solutions numériques sont-elles valables ? Quelles sont les influences des approximations numériques sur la précision des résultats. Nous travaillons avec des systèmes sensibles aux conditions initiales. Dans ce cas, les imprécisions n'entraînent-elles pas de faux résultats ?

Quelques études ont été faites pour essayer de trouver des réponses à ces questions. Nous pouvons citer [Sauer 97] et [Robert 02]. La précision et la stabilité des simulations numériques constituent les principaux défis en simulation numérique. Les erreurs d'arrondis, dues à l'arithmétique en virgule flottante, les problèmes d'over flow et under flow contribuent à l'imprécision des résultats et sont la cause des instabilités de certains algorithmes. En considérant les systèmes dynamiques stables et réguliers, les petites imprécisions de la représentation en virgule flottante ne sont pas importantes. Par contre, ce problème peut devenir plus perceptible, voire dangereux, si le système entre dans une région de régime de fonctionnement où il y a une grande quantité de trajectoires instables comme c'est le cas dans un attracteur étrange. Dans cette situation, l'effet papillon peut provoquer des erreurs qualitatives dans le comportement dynamique, par exemple, l'apparition "*d'attracteurs fantômes*" qui n'existent pas dans les expérimentations réelles.

Pour essayer d'éliminer ou de minimiser les erreurs causées par les dépassements, la première mesure qui a été prise est la normalisation du modèle, soit l'obtention d'un modèle sans dimension ou modèle réduit. Les simulations faites avec ce modèle réduit permettront de faire plus facilement la comparaison entre simulations avec différents paramètres. La deuxième action a été l'utilisation d'une représentation virgule flottante exacte pour les variables qui ont un comportement récursif dans l'algorithme, comme par exemple le temps et la fréquence.

Soit f la fréquence de commutation des phases, le temps réduit s'écrit alors :

$$t^{pu} = t \cdot f \tag{1.95}$$

En temps réduit la période de commande d'un pas est donc unitaire.

Dans la suite, les grandeurs avec exposant "pu" sont les grandeurs réduites donc sans dimension.

La valeur I_{max} du courant dans une phase a été donnée dans le tableau 1.1 nous posons :

$$i_n^{pu} = \frac{i_n}{I_{max}}. \tag{1.96}$$

Si les phases sont alimentées à partir d'une tension continue E, nous posons :

$$V_n^{pu} = \frac{V_n}{E}. \tag{1.97}$$

Vues les grandeurs géométriques du moteur et que le moteur étant triphasé, alimenté une seule phase à la fois, un pas moteur correspond à une distance d'un tiers du pas statorique. Nous posons :

$$x^{pu} = \frac{3 \cdot x}{P_s} \tag{1.98}$$

En tenant compte de 1.95 la vitesse réduite s'écrit :

$$v_x^{pu} = v_x \cdot \frac{3}{P_s \cdot f} \tag{1.99}$$

D'après les équations 1.96 et 1.97 on obtient :

$$r^{pu} = r \cdot \frac{I_{max}}{E}. \tag{1.100}$$

Pour normaliser complètement les équations électriques et les équations mécaniques nous posons :

$$L^{pu} = L \cdot \frac{f \cdot I_{max}}{E}. \qquad D^{pu} = \frac{D}{M \cdot f} \tag{1.101}$$

$$M^{pu} = \frac{\left[\frac{P_s}{3} \cdot f\right]^2}{\frac{E^2}{r} \cdot \frac{1}{f}} \cdot M \qquad f_{sec}^{pu} = \frac{3 \cdot f_{sec}}{M \cdot w_s \cdot f^2} \tag{1.102}$$

En utilisant 1.91 et après les changements de variable, la fonction harmonique de l'inductance devient (1.103) :

$$L_n^{pu}(x^{pu}) = L_0^{pu} + L_1^{pu} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot x^{pu} - (n-1) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \tag{1.103}$$

Par conséquent :

$$\frac{dL_n(x)}{dx} = \frac{dL_n^{pu}(x)}{dx^{pu}} \cdot \frac{3 \cdot E}{P_s \cdot f \cdot I_{max}}. \tag{1.104}$$

On en déduit le modèle sans dimension :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{di_n^{pu}}{dt^{pu}} & = & \dfrac{1}{L_n^{pu}\left(x^{pu}\right)}\cdot\left(V_n^{pu}-r^{pu}\cdot i_n^{pu}-\dfrac{dL_n^{pu}\left(x^{pu}\right)}{dx^{pu}}\cdot i_n^{pu}\cdot v_x^{pu}\right) \\ \dfrac{dx^{pu}}{dt^{pu}} & = & v_x^{pu} \\ \dfrac{dv_x^{pu}}{dt^{pu}} & = & \dfrac{1}{2\cdot M^{pu}}\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{3} i_n'^{2}\cdot\dfrac{dL_n^{pu}\left(x^{pu}\right)}{dx^{pu}} - sign(v_x^{pu})\cdot[D^{pu}|v_x^{pu}|+f_{sec}^{pu}] \end{array}\right. \tag{1.105}$$

La deuxième mesure qui a été mise en œuvre pour minimiser les possibles erreurs d'arrondis est l'exacte représentation du format numérique des variables. Pour résoudre le modèle dynamique, nous utilisons un algorithme de Runge-Kutta et une représentation exacte en virgule flottante pour les conditions initiales du système, pour le pas d'intégration et pour les paramètres utilisés dans les diagrammes de bifurcation.

Pour avoir une représentation exacte des variables en virgule flottante, les nombres doivent avoir la forme (1.106) :

$$A = \frac{B}{2^k}\; avec\; B\; \in\; \mathbb{N}\; et\; k \in\; \mathbb{N}. \tag{1.106}$$

De même, pour coder exactement le pas d'intégration, nous avons normé le temps. De cette façon, un pas d'intégration de la forme $s_i = 2^{-k}$ évite le cumul d'erreur le long de la trajectoire.

Pour une simulation en boucle ouverte simple, le paramètre de contrôle f est toujours choisi pour avoir une représentation exacte.

Pour l'obtention des diagrammes de Feigenbaum nous utilisons comme paramètre de bifurcation la fréquence, le courant de phase ainsi que l'inductance maximale. Dans tous les cas, les paramètres de bifurcation sont incrémentés de manière à être codés exactement en binaire. Pour d'autres informations sur la réduction du modèle voir par exemple [De Castro 08b].

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir présenté notre prototype de machine linéaire à réluctance variable, nous avons développé son modèle dynamique complet. La méthode utilisée passe par l'écriture générale des équations électriques et par le bilan énergétique du système. Elle permet d'établir les expressions de la force de traction responsable du déplacement et de la force d'attraction du chariot vers le rail responsable du frottement. Le développement de cette théorie permet de faire apparaître les hypothèses simplificatrices utilisées pour aboutir à ce modèle. Le modèle complet du système dynamique est donné sous la forme variables d'état.

Le point important de cette présentation est la modélisation et le calcul de l'inductance en fonction de la position. La méthode des tubes des flux a été utilisée pour obtenir des équations analytiques mettant facilement en évidence l'influence des différents paramètres de dimensionnement, en particulier la valeur d'entrefer. Cette méthode a été appliquée en négligeant les flux mutuels, les flux de fuites ainsi que la saturation du matériau.

L'annulation des flux mutuels a été justifiée par des considérations technologiques. Les caractéristiques déduites de la simulation par éléments finis ont justifié nos choix de modélisation consistant à négliger les effets des flux de fuite et de la saturation magnétique. Pour rendre les équations plus utilisables en vue des simulations dynamiques, nous avons développé un "modèle harmonique" en ne gardant que la composante continue et le fondamental des grandeurs en fonction de la position.

La validation à l'aide de logiciel de simulations par éléments finis a surtout permis d'étudier l'influence de la saturation des dents sur les forces de traction. Á partir d'un courant de 6 A, la saturation diminue la valeur maximum de la force d'attraction et modifie légèrement sa forme au voisinage de la position d'équilibre.

Pour optimiser les résultats des simulations numériques, un modèle réduit a été développé. Ce modèle nous permet de régler en partie le problème de la dynamique numérique. La deuxième mesure qui a été mise en œuvre est la représentation exacte en virgule flottante de toutes les variables de comportement récursif.

2

Banc d'essais

Sommaire

2.1 Introduction

Afin de pouvoir tester des lois de commande et analyser des comportements apériodiques ou chaotiques de notre actionneur, nous devons disposer d'un banc d'essais fiable, modulaire, bien instrumenté et d'un système de supervision convivial et capable de stocker une quantité importante d'information. Cette ensemble va être conçu autour de deux microcontrôleurs et d'un ordinateur PC.

La première partie de ce chapitre présente le banc d'essais développé et son instrumentation. Les différentes fonctions nécessaires à l'alimentation et la commande du moteur vont être réparties dans deux microcontrôleurs DSPic et réalisées sur deux cartes électroniques.

La carte hacheur et commande rapprochée va gérer à la fraction de micro seconde prêt, les courants de phase et sera chargée de mesurer les temps de montée et de descente du courant. La carte de commande va gérer la position, générer les asservissements et devra communiquer avec les autres modules.

Le système d'enregistrement et traitement de données devra être convivial et permettre de piloter les manipulations.

La deuxième partie présente les essais qui ont surtout pour objectifs d'identifier les paramètres mécaniques du système. Pour montrer les possibilités de notre banc d'essais, nous décrivons les essais classiques des moteur pas-à-pas : commande d'un pas, déplacement de N pas en boucle ouverte, commande bang-bang et commande en boucle fermée avec capteur.

L'originalité du moteur à réluctance variable est l'influence de la position sur la valeur de l'inductance des phases. Dans la troisième partie nous allons essayer d'exploiter cette originalité pour détecter la position sans utiliser un autre capteur. Une méthode basée sur la mesure precise de temps de montée et de descente des courants hachés est proposée, implantée et testée. Afin de s'affranchir des problèmes de saturation, une solution plus originale a été proposée. Elle consiste à mesurer l'inductance à l'aide de la phase non active.

2.2 Banc d'essais : Conception et instrumentation

Pour commander et exploiter les différents régimes de fonctionnement du prototype, un banc d'essais a été construit. Cet ensemble schématisé par la figure A.1 est composé par :

- deux cartes de puissance : Hacheur bas et Hacheur haut ;

- deux cartes électroniques équipées par des microcontrôleurs dsPIC, l'une réalisant la commande rapprochée du hacheur et l'autre la commande globale à partir du codeur. Ces deux cartes communiquent par une liaison série synchrone rapide SPI.

- une interface graphique de supervision a été développée en langage C++ sur un ordinateur PC. Ce superviseur communique avec les microcontrôleurs par liaison série, est responsable de la configuration de démarrage de la carte de commande, gère la stratégie de commande choisie par l'utilisateur et permet l'acquisition et la sauvegarde des données.

2.2.1 Convertisseur de puissance

Afin de contrôler la force produite par chaque phase du moteur nous avons décidé de faire une commande du courant avec un hachage par hystérésis. Cette tâche va être confiée au convertisseur statique réversible en tension représenté par la figure 2.2.

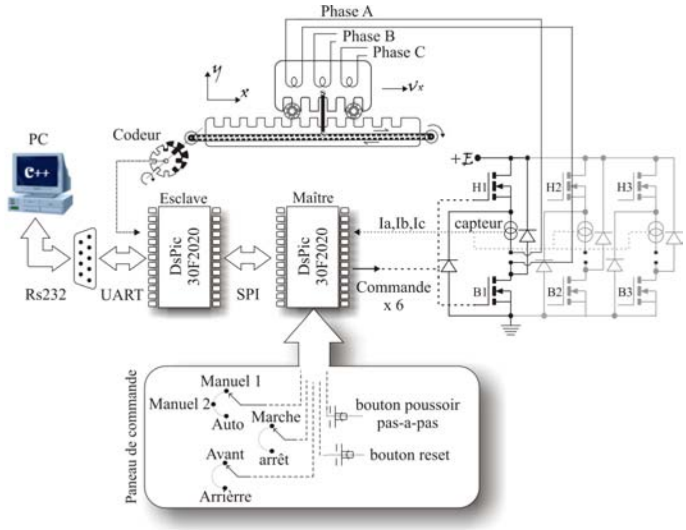


FIGURE 2.1 – Schéma synoptique du banc d'essais.

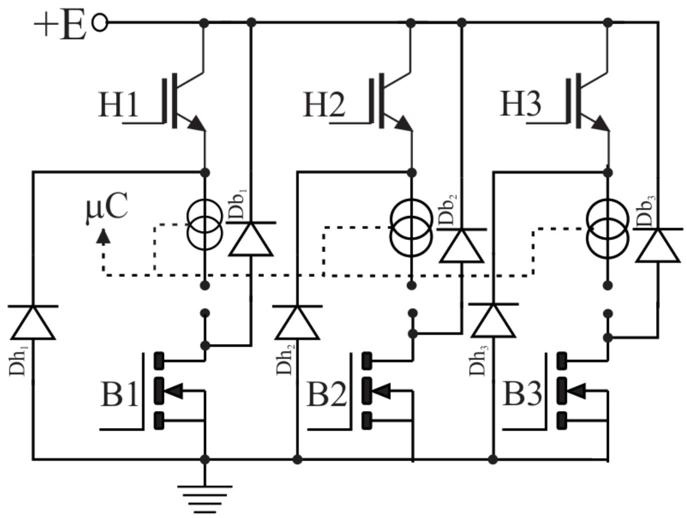
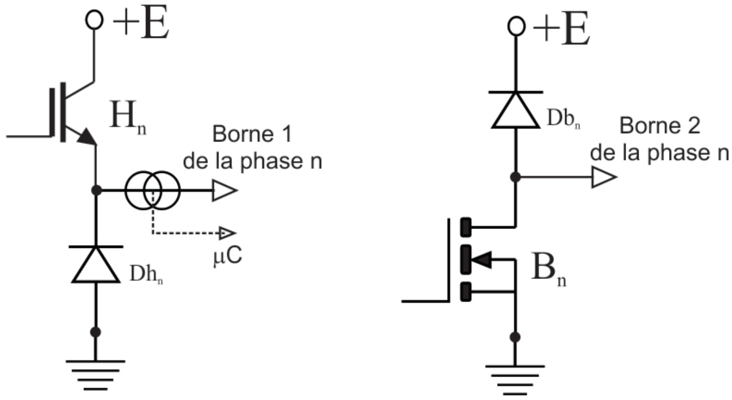


FIGURE 2.2 – Convertisseur de puissance réversible en tension

La réversibilité en tension du convertisseur est nécessaire à cause de la force électromotrice de réaction due à la variation de la réluctance. Au moment où la phase se trouve sur une situation avec une dérivée d'inductance négative, on a une caractéristique électromotrice. Au contraire, dans une situation de déplacement avec une variation positive de l'inductance, la réaction est contrélectromotrice. Dans le cas de la réaction motrice, pour imposer une dérivée négative sur le courant, il faudra impérativement appliquer une tension inverse sur la phase avec une valeur absolue plus grande que la valeur de la réaction du moteur. Afin d'imposer cette tension inverse à la phase, il est nécessaire d'ouvrir en même temps les deux transistors qui se trouvent sur un même bras du hacheur (H_n et B_n). A ce moment, les deux diodes liées à la phase deviennent passantes et la tension d'alimentation est appliquée en inverse sur la phase. Si la tension inverse appliquée est inférieure à la valeur de la réaction électromotrice, le courant continue à monter. Ce serait le cas si on hachait avec un seul des deux transistors en mettant ainsi l'enroulement en court-circuit pendant la phase de roue libre. De cette manière la réaction électromotrice continuerait à faire monter le courant, ce qui ferait échouer le contrôle par hystérésis.

L'oscillation du courant entre les valeurs fixes I_{max} et I_{min} permet d'estimer l'inductance de la phase et par conséquent de la position du chariot à partir de la dérivée du courant haché comme on verra dans le paragraphe 2.4.

Le convertisseur de puissance a été divisé et réalisé en deux cartes électroniques appelées respectivement ***hacheur haut*** et ***hacheur bas***. Cette organisation a été pensée en minimisant les inductances parasites et en diminuant la longueur des chemins de cuivre entre les interrupteur statiques (diodes et transistors) et les deux bornes de la source d'énergie, la figure 2.3 montre cette organisation.



(a) Hacheur haut (b) Hacheur bas

FIGURE 2.3 – Repartition des composants de puissance dans les deux cartes hacheur

Les surtensions de commutation ainsi minimisées, comme nos composants sont à commutation rapides, les pertes par hachage sont très faibles. D'autre part, cette division nous permet aussi d'améliorer le lay-out car on a une quantité plus petite de composants électroniques à placer sur chaque carte. Comme on peut le remarquer, dans la carte "***hacheur haut***", lee commutateur de puissance utilisé est le IGT4E10H036 alors que pour le hacheur complémentaire nous avons utilisé des MOSFET BUK453-100B. Les principales caractéristiques du MOSFET sont présentées dans le tableau 2.2.1.

Symbole	paramètre	MAX	MIN	UNIT
V_{ds}	Drain-source voltage	100	100	V
I_D	courant de drain	14	13	A
P_{tot}	Puissance total dissipée	75	75	W
T_j	Température de jonction	175	175	^oC
$R_{DS(ON)}$	Résistance drain-source	0,16	0,20	Ω

TABLE 2.1 – BUK453-100B.

Le choix d'un IGBT pour le hacheur haut se doit surtout à cause du fait que les émetteurs ne sont pas reliés directement à la masse. Cette configuration crée des surtensions élevées qui sont très dangereuses pour les transistors MOSFET. De plus il faut prendre un driver avec un "*bootstrap*" pour pouvoir commander le hacheur haut.

Le composant IGT est un nouveau type de transistor appelé le MOS-gate. Ce dispositif rassemble les caractéristiques de haute impédance du MOSFET et les basses pertes en état de conduction de l'IGBT. Le design et les caractéristiques de gate de l'IGT sont similaires à celles du MOSFET. Une importante différence est la résistance équivalente $R_{DS(ON)}$ laquelle est environ dix fois plus petite que dans un MOSFET. Une autre caractéristique est la variation très modérée de la chute de tension entre collecteur-émetteur dans toute la plage de temperature entre 25^oC et 150^oC.

Symbole	paramètre	MAX	MIN	UNIT
V_{CES}	Tension collector-émetteur	-	500	V
I_C	courant continue de drain	10	18	A
$V_{CE(SAT)}$	chute de tension en état de conduction	2,5	2,9	V
T_j	Température de jonction	-55	150	^oC

Table 2.2 – IGT4E10.

Autre mesure importante, la séparation des masses des circuits de puissance et des circuits de commande, a été nécessaire. Elle nous permet d'éviter les interférences et les bruits conduits qui peuvent perturber les mesures du courant de phase. Ces mesures CI1, CI2 et CI3 sont réalisées sur la carte hacheur haut par des capteurs de courant isolés à effet hall **LEM LA-55P**. Pour la même raison les circuits de driver utilisés pour commander les transistors sont des composants opto-isolés, nous avons utilisé le HCPL3150 comme le montre la figure 2.4 également alimentés par les convertisseurs DC-DC isolées **NKEO515S** 5V/15V 1W.

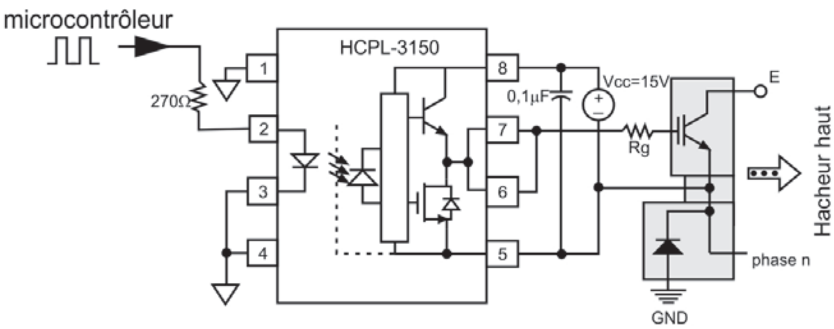


Figure 2.4 – Connexion du drive HCPL 3150 sur les transistors du hacheur haut

2.2.2 Carte hacheur et commande rapprochée

Le dsPIC30F2020 a été choisi pour commander le hachage du courant et réaliser les estimations d'inductance sur les phases du moteur. Ce choix a été dicté par sa vitesse de 30 $Mips$, ses fonctions DSP capables de réaliser des calculs performants et surtout la vitesse d'acquisition et de conversion de son convertisseur analogique numérique de 2 $Msps$. Ses différentes broches sont multifonctions et programmables comme le montre la figure 2.5.

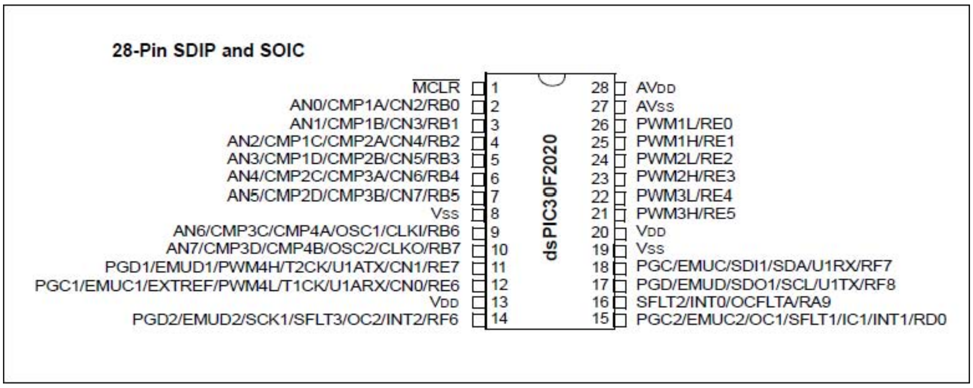


FIGURE 2.5 – Le dsPIC30F2020

Ce dsPIC possède quatre comparateurs analogiques haute vitesse indépendants. Chaque comparateur est associé à un convertisseur digital analogique programmable (DAC) qui peut servir comme référence de tension. Nous allons nous en servir pour programmer les références du courant I_{min} et I_{max}.

Sur la deuxième entrée de chaque comparateur, un multiplexeur permet de choisir une voie parmi quatre, voir figure 2.6. Les mesures des trois courants seront ainsi branchées sur les différents comparateurs et sélectionnées dynamiquement selon les besoins. Les mesures $CI1$, $CI2$ et $CI3$ sont donc branchées respectivement sur les broches 4, 5 et 9 du dsPIC.

Chaque comparateur a la possibilité de générer une interruption à chaque changement d'état de sa sortie. Elle peut être autorisée ou inhibée par programme.

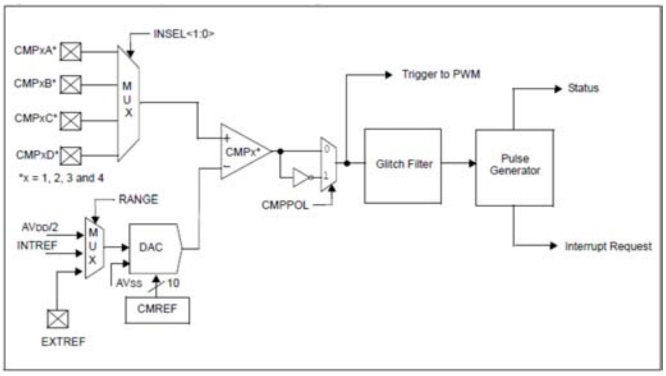


FIGURE 2.6 – Module comparateur

La table 2.3 donne la configuration des comparateurs utilisés pour contrôler les courants. Les différents temps de montés T_1 et de descente T_2 sont mesurés par un timer interne.

La figure 2.7 présente le courant haché démarrant à l'instant M_0 et subissant un changement de consigne à l'instant t_c. Si $I_{max2} < I_{max}$ la modification de consigne est prise en compte à partir de M_3 et le courant va décroitre jusqu'en S_1. Si $I_{max2} > I_{max}$ la modification de consigne est prise en compte à partir de N_3 et le courant va croitre jusqu'en P_1.

Si le courant représenté correspond à la phase 1, les points M_1, M_2 et M_3 ($P_1, P_2 \cdots$ ou $R_1, R_2 \cdots$), seront détectés et traités par le comparateur CMP1 selon l'organigramme 2.8(a).

Phase alimentée	I_{max}	I_{min}
I	CMP1	CMP2
II	CMP1	CMP2
III	CMP3	CMP4

TABLE 2.3 – Configuration des comparateurs

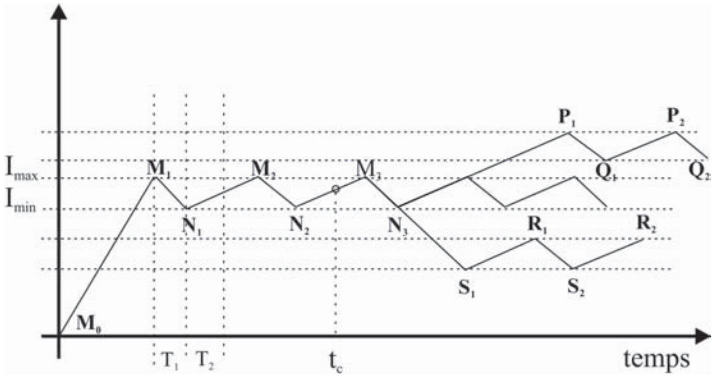
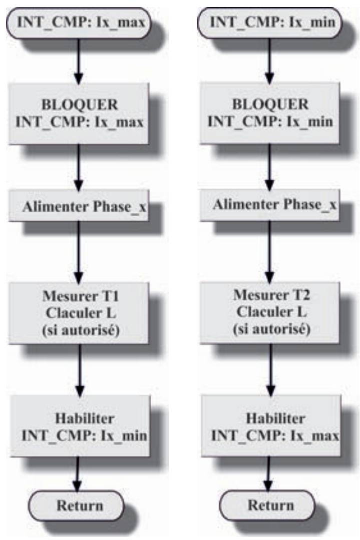


FIGURE 2.7 – Hachage et changement de consigne de I_1

Les points N_1, N_2 et N_3 (Q_1, Q_2 $\cdots$ ou S_1,S_2 $\cdots$), seront détectés et traités par le comparateur CMP2 selon l'organigramme 2.8(b).



(a) (b)

FIGURE 2.8 – Interruptions des comparateurs

Les durées des montées et des descentes du courant ainsi haché sont très variables en fonction de la position (car la valeur de l'inductance varie) et dépendent de la valeur du courant haché et de la tension de l'alimentation. Le tableau 2.4 donne les valeurs extrêmes approximatives de ces durées pour une fourchette de courant de 0,5 A au voisinage de 8 A.

	T_1		T_2	
	Max	Min	Max	Min
24 V	420 ms	125 ms	219 ms	62,5 ms
48 V	219 ms	62,5 ms	109 ms	31,3 ms

TABLE 2.4 – Durée T_1 et T_2 du hachage

Une variable interne est initialisée à 3 après la commutation suivant un changement de phase ou un changement de la référence du courant. Elle est décrémentée jusqu'à zéro lors de chaque commutation. Si la valeur de cette variable est nulle, le calcul du coefficient d'inductance à partir des dernier valeurs connue de T_1 et T_2 est effectué. Le résultat de ce calcul est transmis. Les calculs d'inductances sont ainsi réalisés en M_2, N_2, M_3, ($P_2\ Q_2 \cdots$ ou $S_2\ R_2\ \cdots$).

Cette carte possède une face avant avec trois boutons de position et deux boutons poussoir $Bt_{1 \cdots n}$. Les trois boutons de positions sont désignés Bt_1 : Marche/arrêt, Bt_2 : Manuel/Auto et Bt_3 : SENS. Le bouton Bt_1 s'applique à tout les modes d'opération. Si Bt_1 est en position ARRÊT, toutes les interruptions sont déshabilitées et le programme reste dans une boucle d'attente infinie jusqu'au passage à la position MARCHE.

Le bouton Bt_2 en association avec une variable interne appelée MODE INTERNE permet de définir quatre modes de fonctionnement.

- En fonctionnement manuel pas-à-pas (MODE INTERNE = 1) les pas sont commandés par le bouton poussoir Bt_4 et le sens par Bt_3.
- En fonctionnement manuel PC (MODE INTERNE = 0) la phase alimentée est pilotée par l'interface PC.
- en fonctionnement Auto à fréquence fixe (MODE INTERNE = 0) le moteur va effectuer des déplacements aller/retour d'une distance donnée et à fréquence fixe. Ces deux grandeurs sont transmises par l'interface PC. L'arrêt du mouvement se fait par le bouton Bt_1.
- en fonctionnement Auto boucle fermée (MODE INTERNE = 1) la machine se déplace d'une distance donnée à une vitesse imposée avec une accélération maximale, asservissement de vitesse et une décélération maximale. La distance et la vitesse sont transmises par l'interface PC.

Le bouton poussoir Bt_5 correspond au RESET du microprocesseur.

Pour assurer un bon fonctionnement de l'informatique industrielle en présence de l'électronique de puissance, des mesures pratiques ont été appliquées pour éviter les bruits sur les mesures du courant et les interferences au niveau des communications. Nous avons complètement isolé les masses des circuits de commande et des circuits de puissance. L'utilisation de câbles blindés et la séparation de la masse d'alimentation analogique de la masse digitale du microcontrôleur ont été nécessaires pour assurer un fonctionnement fiable du banc.

2.2.3 Carte de commande et protocoles de communication

Le cœur de la carte de commande est le dsPIC 33FJ128MC802. Ce composant a été choisi pour sa versatilité et pour la quantité de fonctions et périphériques destinés au contrôle des moteurs qu'il possède. Cette versatilité se traduit surtout par la possibilité de remappage des périphériques pendant le fonctionnement. Les principales fonctions utilisées sont : le convertisseur analogique/numérique avec des entrés multiplexées, le QEI (Quadrature encoder interface), les interruptions déclenchées par changement d'état des ports, appelées des ICN (Input change notification), et également les IC (Input Capture) déclenchés par des fronts.

Cette carte de commande aura comme principales fonctions la gestion du codeur optique de position du moteur, la communication avec la carte hacheur et avec le PC et la génération de la commande en boucle fermée.

2.2.3.1 Mesure de la position

Le codeur optique incrémental de 500 tops par tour est monté ou bout du moteur. L'information des deux voies en quadrature est traitée en double précision par interruption grâce aux entrées IC (input captures) du dsPIC. Avec l'accouplement mécanique, nous obtenons une précision de déplacement linéaire d'un dixième de millimètre sur l'ensemble du parcours. La position absolue du translateur est donc repérée par un nombre de 0 à 18000 représenté par un mot de seize bits. La distance d'un pas mécanique correspond ainsi à 120 tops codeur. L'initialisation du codeur c'est à dire le calage de la valeur absolue de la position est fait lors de la procédure de démarrage du moteur sur la position d'équilibre la plus proche de la phase d'initialisation choisie.

Pour la vitesse nominale 0,5 m/s la fréquence des tops codeurs est de 5 KHz soit une période de 200 μs.

2.2.3.2 Communication avec la carte hacheur

La liaison série synchrone rapide (1,875Mbits/sec) SPI est utilisée pour communiquer avec la carte hacheur. Cette liaison est un bus bidirectionnel configurable en maître/esclave. Le maître est confié à la carte hacheur. Physiquement les échanges bidirectionnels se font en même temps par des mots à seize bits. La transmission d'un mot prend donc $8,5$ μs

Le protocole de communication entre les deux cartes se fait de deux façons. En absence de hachage le maître envoie une requête à la carte de commande sous la forme d'un mot de seize bits réservé égale à 0x8001. Lorsque le hacheur fonctionne le maître envoie à chaque estimation d'inductance la requête représentée par la figure 2.9. Les deux bits de poids fort représentent le numéro de la phase alimentée et le reste représente l'estimation de l'inductance.

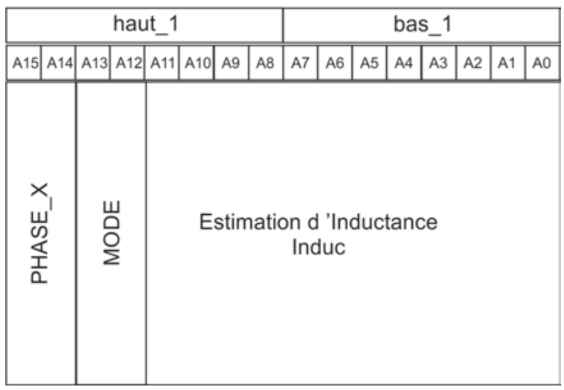
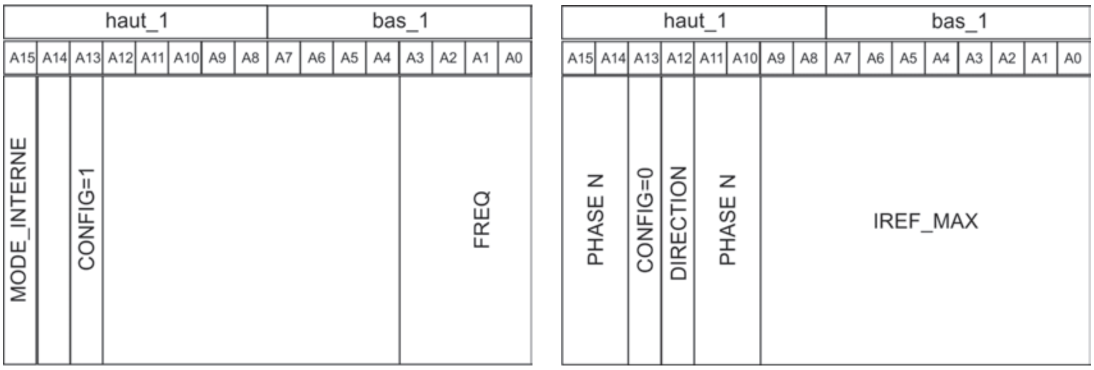


FIGURE 2.9 – Mot de requête

La carte de commande peut répondre de trois façons. La réponse nulle est automatique quand aucune commande n'est prévue. La figure 2.10(a) présente la réponse de configuration où la variable CONFIG est égale à un. Le bit MODE INTERNE est initialisé et les valeurs de la fréquence ou de la vitesse sont transmises.

La figure 2.10(b) présente la réponse de commande où la variable CONFIG est égale à zéro. Deux bits sont utilisés pour indiquer le numéro de la phase à alimenter, dix bits pour transmettre la référence du courant maximum et dans le cas d'un fonctionnement en boucle ouverte à fréquence fixe le bit DIRECTION permet de changer le sens du mouvement sous contrôle de la carte de commande.



(a) Mot de configuration

(b) Mot de commande

Figure 2.10 – Mots de communication carte de commande et carte hacheur

2.2.3.3 Communication avec le PC

La carte de commande est aussi chargée de communiquer avec le PC. Pour cela une communication série assynchrone full-duplex à trois fils de type RS232 est utilisée pour établir la liaison entre le port série du PC et le module UART du microcontrôleur dsPIC 33F. La vitesse de communication retenue est de 115 $Kbits/s$, c'est le maximum toléré par le PC.

Les transferts dans le sens carte/PC sont faits par des mots de huit bits chacun. Cette limitation est imposée par le module UART du microcontrôleur qui ne peut faire que des envois de 8 ou de 9 bits plus un STOP et un START bit. Une fois que le mot de huit bits est écrit dans le registre de transfert du module UART l'envoi se fait de façon automatique et transparente au programmeur. Comme les variables dans le microcontrôleur sont représentées par des mots de seize bits (unsigned), chaque envoi se fait par la séquence de deux mots de huit bits qui doivent être concaténés en arrivant dans le PC. A la fin de chaque transmission une interruption est générée. Chaque interruption générée par le module UART à la fin d'une transmission déclenche le transfert du prochain mot s'il est disponible. Le temps nécessaire pour envoyer un mot de seize bits est de :

$$T_{envois} = \frac{20bits}{115 \cdot 10^3 bits/s} \approx 174 \cdot 10^{-6} s \qquad (2.1)$$

Les variables envoyées par la carte de commande vers le PC représentent la position donnée par le codeur optique, le temps entre deux tops codeurs et la valeur estimée de l'inductance de phase. La durée d'envoi de ce paquet est donc de 522 μs.

Deux modes d'observation ont été mis en place, en envois synchronisés par les tops codeurs ou en envois régulièrement espacé dans le temps à l'aide d'un timer.

Dans le mode synchronisé par le codeur il faut envoyer l'incrément de temps et les valeurs d'inductance si on en a besoin. Dans ce cas à partir d'une vitesse de 0,26 m/s on ne peut plus envoyer qu'une information sur deux. Cette technique est utilisée lors de l'asservissement de vitesse en boucle fermée.

Dans le mode synchronisé par le timer nous avons décidé d'envoyer un, deux ou trois mots tous les 530 μs. Ce mode est utilisé pour acquérir les séries temporelles nécessaires pour l'analyse des fonctionnements chaotiques.

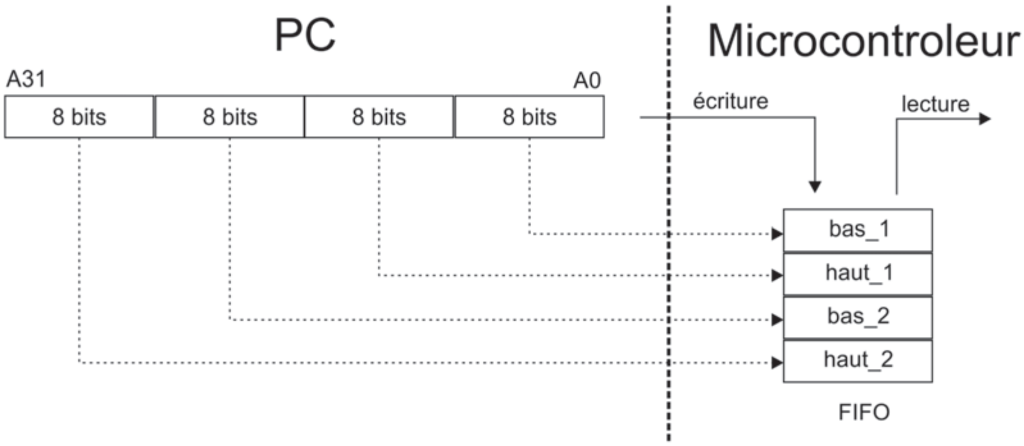


FIGURE 2.11 – Logique de transfert entre PC et carte de commande

Dans le sens de communication PC/carte de commande, les informations transmises sous forme de mots de 32 bits sont des informations de paramétrages envoyés avant l'exécution des mouvements. Lors de l'arrivée dans le microcontrôleur les octets sont placés dans les registres d'une FIFO comme l'indique la figure 2.11. Une interruption est déclenchée chaque fois que la pile est remplie.

Les figures 2.12 et 2.13 montrent le format d'un mot d'initialisation et d'un mot de commande.

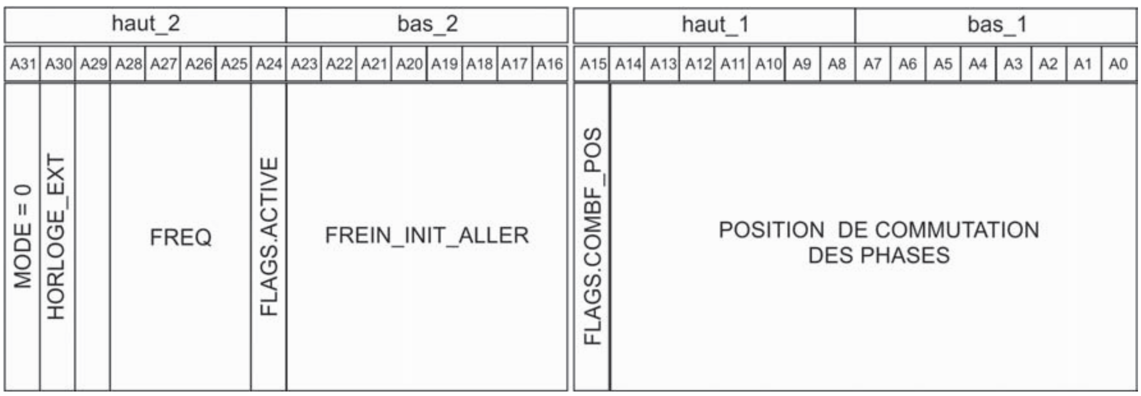


FIGURE 2.12 – Mot d'initialisation : P_{Init}

2.2.3.4 La commande en boucle fermée avec capteur de position

Afin d'assurer un déplacement à vitesse constante tout le long du rail, nous avons mis en place dans la carte de commande un algorithme de commande en boucle fermée avec régulation

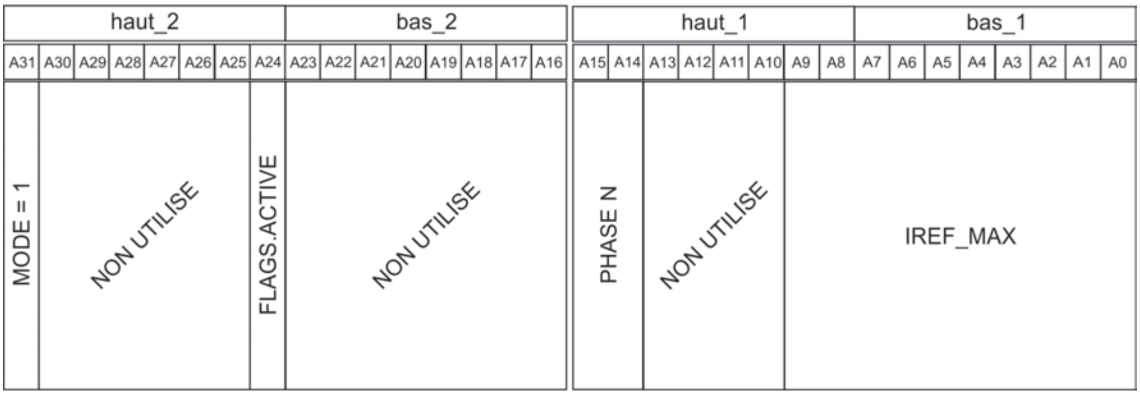


FIGURE 2.13 – Mot de commande : P_{Cmd}

de vitesse. La position et la vitesse sont mesurées par le capteur incrémental, la commutation des phases est effectuée en fonction de la position, c'est à dire en autopilotage et le courant est calculé et commandé pour asservir la vitesse. La figure 2.14 montre les couples moteurs en fonction de la position pour l'alimentation de chaque phase.

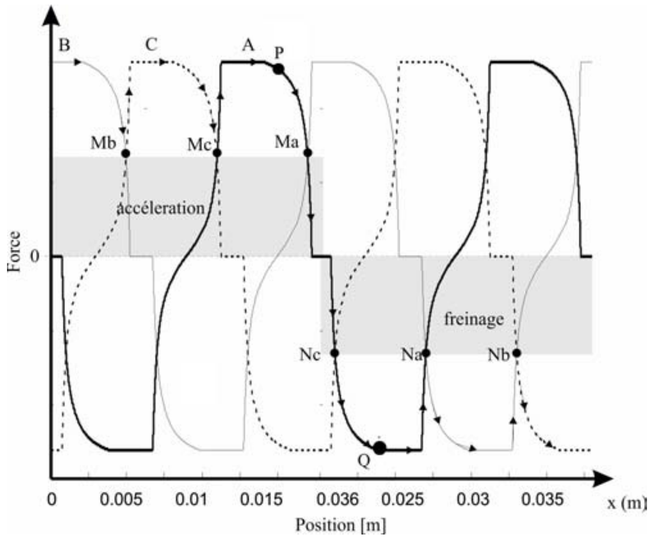


FIGURE 2.14 – Obtention d'un couple maximum pendant les changements de phases

Afin de profiter d'un couple maximum lors d'une accélération, il faut effectuer les changements de phase dans les positions correspondant aux points d'intersection de ces courbes M_b, M_c, M_a. Par contre, à cause du temps de monté du courant pendant les commutations des phases, de façon pratique, la commande de changement de phase doit être appliquée avant ce point, c'est ce que l'on appelle l'avance de phase [Kuo 74]. Si les courants de références de deux phases sont différents le point de commutation optimale est également déplacé comme le montre la figure 2.15.

Dans la pratique, après de nombreux essais, nous avons réalisé une commutation systématique à mi-chemin d'un pas, c'est-à-dire 6 mm ou 60 tops codeur.

Pour effectuer un freinage efficace dans le sens avant, il faut développer un couple de freinage

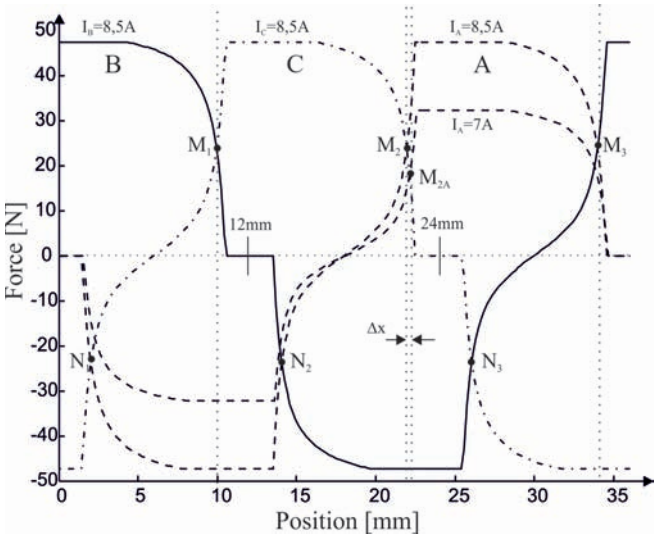


FIGURE 2.15 – Position du couple maximum

maximum, c'est-à-dire qu'il faut commuter les phases aux points N_c, N_a, N_b.

Une autre question importante est le passage de l'état d'accélération à l'état de décélération. Par exemple pour passer dans l'état de décélération à partir du point P sur la figure 2.14, on peut instantanément choisir la phase qui donne un couple maximum négatif et réaliser la commutation en passant du point P au point Q et puis poursuivre les commutations $N_c, N_a, N_b \cdots$. Cette méthode est délicate à implémenter et brutale au niveau du changement de couple.

La deuxième méthode consiste en retenir la phase alimentée en faisant de cette manière un passage progressif de l'accélération vers la décélération ce qui en plus minimise le nombre de commutations. La transition ainsi réalisée indiquée par des flèches passe par les points P, M_a, N_c, N_a, N_b. C'est cette seconde méthode que nous avons décidé d'implanter.

Pour asservir la vitesse, le programme de régulation sera synchronisé par les tops du codeur de position. La période d'échantillonnage n'est donc pas constante par contre la position d'échantillonnage est constante. L'information vitesse "instantanée" sera obtenue par la mesure du temps entre deux tops, $\Delta T(n)$. La consigne de vitesse est donnée par la période $\Delta T_{ref}(n)$.

$$I_{ref}(n) = \left[K \cdot \frac{\Delta T(n) - \Delta T_{ref}(n)}{\Delta T_{ref}(n)} + 1\right] \cdot I_{ref}(n-1) \tag{2.2}$$

Le courant de référence $I_{ref}(n)$ recalculé lors de chaque top codeur à partir de sa valeur précédente $I_{ref}(n-1)$ est donnée par la formule 2.2. Si la vitesse est bonne, on remarque que le courant reste inchangé. Le coefficient K permet de régler le gain de l'asservissement.

Le programme limite les consignes $I_{ref}(n)$ transmises entre 3,0 A et 8,5 A.

2.2.4 Système d'enregistrement et traitement de données

La quantité de données à acquérir pour l'analyse du chaos est très importante. Ces données doivent être reprises et traitées ulterieurment par des logiciels comme Matlab, TISEAN, etc... Notre choix s'est donc porté sur l'utilisation d'un PC pour stocker ces valeurs. Ce même PC permetra d'initialiser et de lancer les différentes manipulations.

Comme indiqué dans le paragraphe 2.2.3.3, les variables reçues de la carte de commande représentent la position, le temps entre deux tops codeur et la valeur de l'inductance. Ces données d'acquisition sont automatiquement stockées dans trois fichiers : dataPos.dat, dataTemps.dat et dataInd.dat qui sont remis à jours lors de chaque acquisition.

La figure 2.16 présente l'interface graphique qui a été développée. Une fenêtre permet le choix du port de communication, nous utilisons "COM1" qui est activé par "ouvrir la porte" et désactivé par "Fermer la porte". Le bouton "Sortir" commande la fermeture de cette interface. Il est possible d'initialiser la position du moteur en alimentant une parmi les trois phases ou de couper l'ensemble de phases par le bouton "arrêter". Pour valider une de ces sélections il faut appuyer sur le bouton "Alimenter la Phase". Dans tous les modes boucle ouverte, la valeur du courant I_{max} est initialisée à partir de l'interface.

Le mode de fonctionnement du moteur est determiné par la combinaison des positions de l'interrupteur AUTO/MANUEL situé sur la face avant de la carte hacheur et du choix affiché par les boutons "MODE" sur l'interface.

En mode "MANUEL", en fonctionnement pas-à-pas "Bt-PC", la commande est envoyée à partir du bouton "Alimenter la phase" du PC. En fonctionnement pas-à-pas "Bt-CARTE", le moteur est commandé par le bouton poussoir situé sur la façade avant de la carte hacheur.

En mode "AUTO", le fonctionnement boucle ouverte à fréquence constante "BO-vit", permet d'éffectuer des déplacements avec un "nombre de pas" affiché et à la fréquence "freq-BO[Hz]" affichée.

Le mode "AUTO" boucle fermée "BFermée" peut être également lancé à partir de cette interface. Dans ce cas, le déplacement sera effectué sur une distance imposée par "nombre de pas" et à une vitesse fixée par "vitesse mm/s". Deux cas d'autopilotage sont prévus, soit "par la valeur d'inductance", soit "par le codeur". Si on utilise l'estimation de l'inductance, le paramètre "seuil d'inductance" détermine la position de la commutation. Si on utilise le codeur, c'est le paramètre "Position codeur" qui impose cette position.

L'interface d'acquisition de données peut fonctionner en temps réel en choisissant l'option "Acquisition actuelle" ou en reprenant les valeurs du dernier enregistrement dans "Ficher data...dat".

La figure 2.16 présente également la capture d'écran avec l'interface d'acquisition des donnés lors de l'avance d'un pas. On observe la vitesse et la position en fonction du temps. Le paramètre "Tmax" permet de fixer la durée d'une fenêtre d'affichage. Pour valider l'écriture de ce paramètre il faut appuyer sur "Actualise" et éventuellement sur "Relire Fichier" pour revoir les acquisition sous la nouvelle échelle. Toutes les estimations d'inductances sont affichées par des points dans le plan "Inductance vs. Position". Sur la figure présentée, nous avons un grand nombre de points car le moteur oscile beaucoup autour de sa position d'équilibre. La dernière figure représente le plan de phase "position vs. vitesse". Ce plan est destiné à afficher des sections de Poincaré obtenues à partir d'un échantillonage à fréquence constante une fois par période électrique. Cette période d'échantillonage est affichée dans "T[s]" et vaut trois fois la période d'alimentation des phases. La position de la prise d'échantillon est fixée entre 0 et 100% à l'aide d'un curseur par rapport à l'alimentation des phases A,B ou C. Pour éviter d'afficher des points indésirables, l'affichage ne commence qu'après une durée indiquée par "Transitoire". Comme les échantillons disponibles ne correspondent pas exactement aux instants souhaités, le paramètre "Delta t" fixe une fenêtre de tolérance autour de l'instant théorique. Si aucune valeur n'est disponible dans cette fenêtre, aucun affichage ne sera effectué. L'ensemble des figures utilisent des échelles automatiques et grâce à la souris nous pouvons y effectuer des effets de loupe.

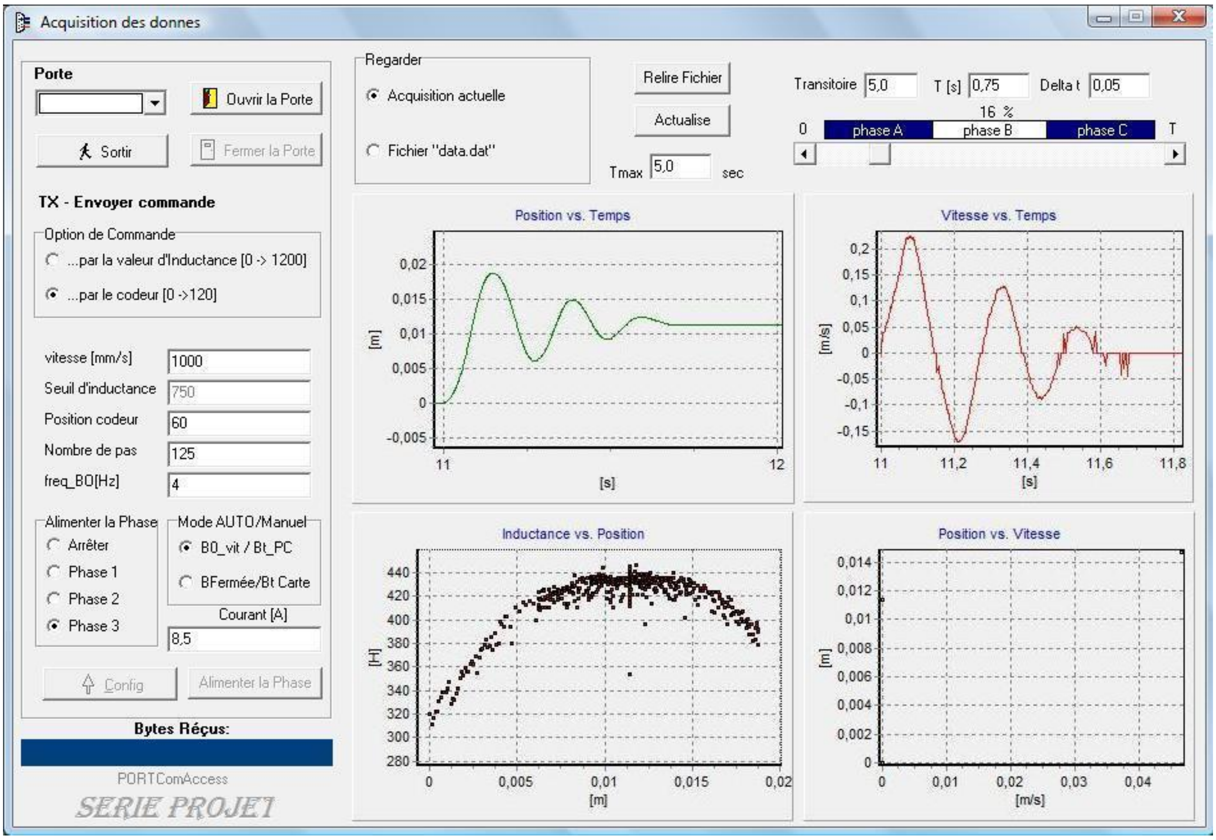


FIGURE 2.16 – Interface graphique et acquisitions.

2.3 Essais et identification

2.3.1 Détermination des paramètres mécaniques

2.3.1.1 Identification de l'amortissement

L'équation mécanique de notre système représenté par 1.37 a comme force de traction, selon le modèle harmonique de la dérivé de l'inductance de la phase n développée dans 1.91 :

$$F_x(x) = -\frac{1}{2} \cdot i_n^2 \cdot L_1 \cdot \frac{2\pi}{3 \cdot \omega_r} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3 \cdot \omega_r} \cdot x(t) - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \tag{2.3}$$

Pour des petits déplacements autour de la position d'équilibre, cette fonction peut être linéarisée comme $F_x = -K \cdot x$, comme dans la figure 2.17.

Une première approximation pour K autour de la position $x(t) = 0$ nous donne,

$$K = L_1 \cdot \left[\frac{2\pi}{3 \cdot \omega_r}\right]^2 \cdot \frac{i_1^2}{2} \tag{2.4}$$

En négligeant le frottement sec pour commencer, c'est à dire $\mu_s = 0$, le système prend la forme classique d'un système masse ressort amorti avec une force extérieure $f_l(t)$ (charge).

$$f_l(t) = M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + D \cdot \frac{dx(t)}{dt} + K \cdot x(t) \tag{2.5}$$

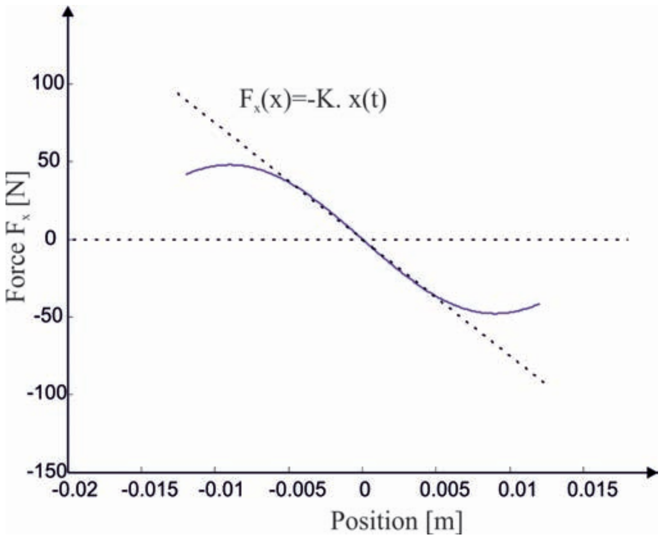


Figure 2.17 – Modèle linéaire de la force de traction

En appliquant la transformée de Laplace.

$$\frac{X(s)}{F_l(s)} = \frac{1}{M \cdot s^2 + D \cdot s + K} \tag{2.6}$$

Afin d'identifier les valeurs des coefficients K et D, le système dynamique peut être approximé par un système du deuxième ordre classique donné par :

$$\frac{X(s)}{F_l(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \qquad avec \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \tag{2.7}$$

Un système du deuxième ordre peut être reconstruit à partir de sa réponse indicielle avec les valeurs respectives du dépassement et de la constante de temps qui sont marqués sur la figure 2.18.

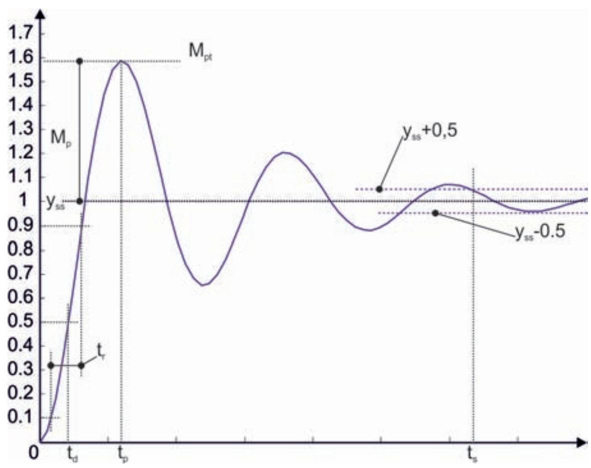


Figure 2.18 – Réponse indicielle théorique

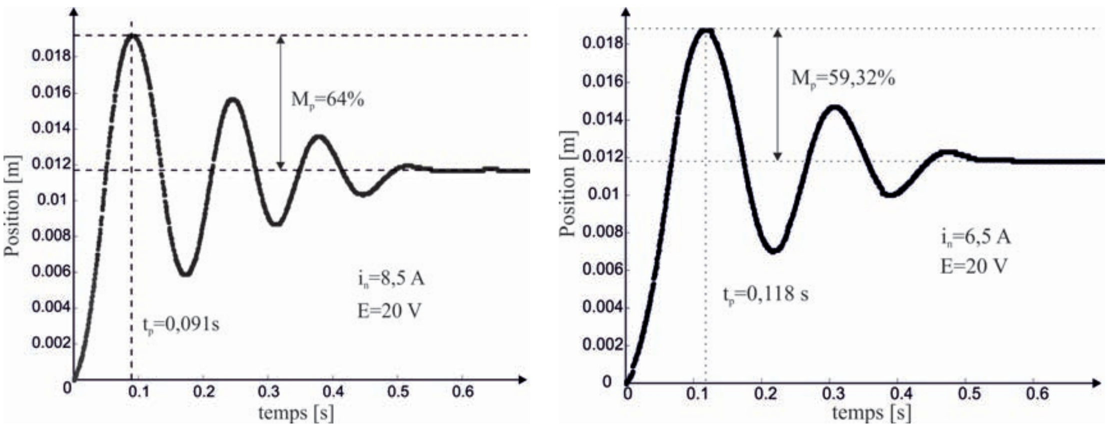
Les valeurs d'amortissement et de pulsation sont donnés par inversion des formules :

$$M_p = 100 \cdot \exp \frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.8}$$

et

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \tag{2.9}$$

Les paramètres nécessaires pour cette approximation sont tirés à partir de la courbe d'un pas (figure 2.19). Cette courbe a été obtenue avec la phase du moteur alimentée par un créneau de courant $\Delta I = 0,5\ A$ à partir d'un bus de tension de $20\ V$.



(a) acquisition $I_{max} = 8,5\ A$ (b) acquisition $I_{max} = 6,5\ A$

FIGURE 2.19 – Réponses indicielles expérimentales

Pour les différentes acquisitions, les résultats de l'identification de la pulsation et de l'amortissement sont donnés dans le tableau 2.3.1.1.

I_{max} $[A]$	M_p $[\%]$	t_p $[s]$	ξ	ω_n	D $\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$
$8,5$	63,6	0,092	0,142	34,50	9,80
$8,0$	65,8	0,104	0,132	30,47	8,05
$7,0$	60,32	0,116	0,158	27,43	8,67
$6,5$	58,82	0,122	0,166	26,11	8,67
$6,0$	56,10	0,130	0,181	24,57	8,90
$4,5$	42,00	0,179	0,266	18,21	9,69

TABLE 2.5 – Identification des paramètres ξ et ω_n

Comme ω_n est proportionnel à $\sqrt{K}$ et que d'après l'équation 2.4, K est proportionnel à i_n^2, ω_n doit être proportionnel à i_n. Ceci est vérifié sur la figure 2.20.

2.3.1.2 Identification du frottement sec

Pour estimer le frottement sec, nous appliquons de faibles valeurs de courant pour essayer d'effectuer un pas. On a remarqué que si la valeur du courant est inférieure à $2,3\ A$ le chariot ne

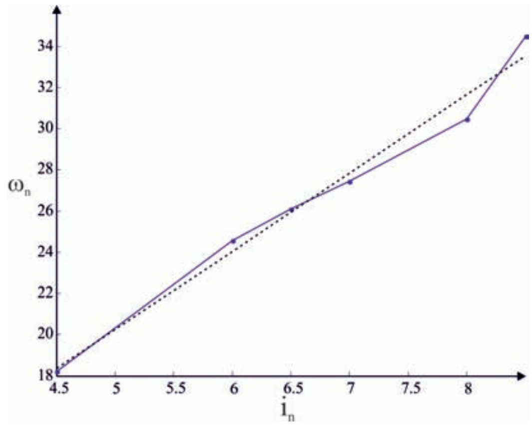


Figure 2.20 – Relation entre la pulsation ω_n et le courant de phase i_n

bouge pas. Si cette valeur est supérieure à 2,5 A il se déplace d'un pas et la position d'équilibre est pratiquement atteinte. La figure 2.21 représente l'interprétation de cette expérience. Pour une meilleure precision les caractéristiques de forces sont calculées par le modèle à tubes de flux.

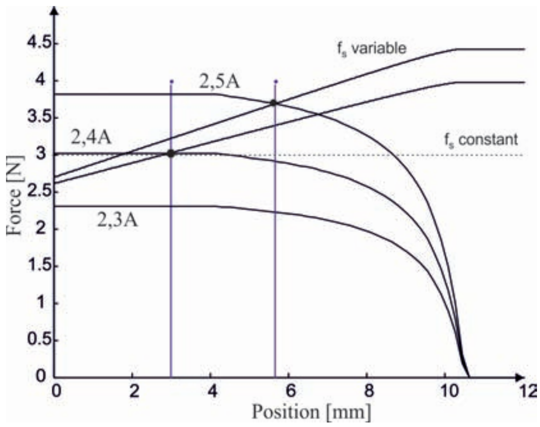


Figure 2.21 – Estimation du frottement sec pour I=2,4 A

Pour une valeur du courant égale à $2,4\ A$, la position atteinte lors d'un déplacement quasi-statique est $\Delta x = 3,6\ mm$ comme le montre l'enregistrement du déplacement de la figure 2.22.

Dans ce cas on peut remarquer que le moteur reste immobile si on le place manuellement à toute position entre $3,6\ mm \leq x \leq 12\ mm$ car dans ce cas le frottement est supérieur à la force de traction.

La modélisation par tubes de flux donne une force de $3,0\ N$ pour un courant de $2,4\ A$.

Afin de valider les valeurs de frottement ainsi déterminées nous avons implanté des modèles de frottement dans la simulation du modèle harmonique.

Dans un premier temps un frottement sec constant $\|f_s(x)\| = 3,0\ N$ a été retenu. Dans en deuxième temps un frottement sec variable dépendant de la force d'attraction entre les dents, F_y, a été simulé. Comme indiqué dans le chapitre I, en 1.87 nous avons retenu :

$$f_s = -\mu_s \cdot sign(v_x) \cdot (F_y + M \cdot g) \tag{2.10}$$

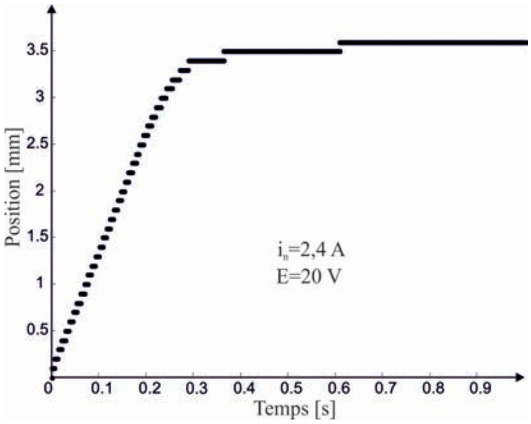
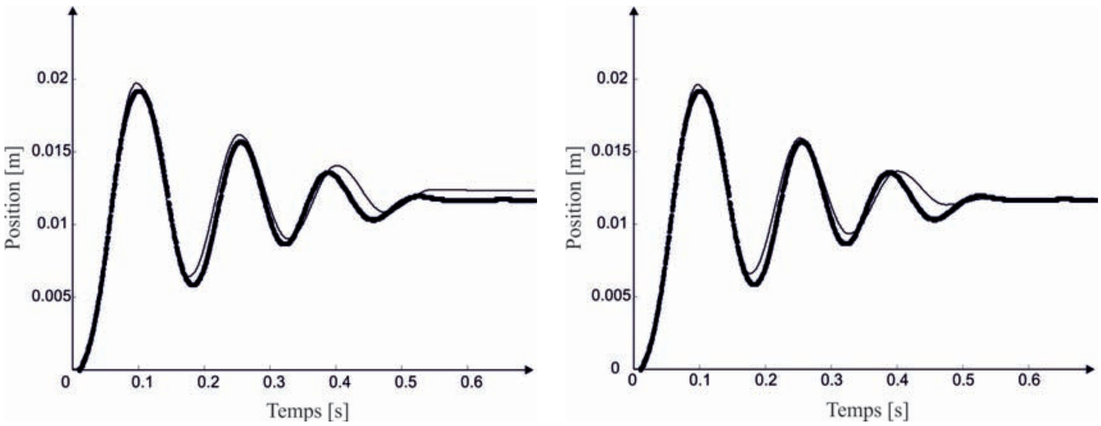


FIGURE 2.22 – Déplacement avec un courant de $2,4\ A$



(a) $f_s = constant$

(b) $f_s = f_s(x)$

FIGURE 2.23 – Comparaison entre les acquisitions et le modèle de frottement dans SIMULINK : $i_n = 8,5\ A$

En remplaçant F_y par son expression donnée en 1.91, on obtient :

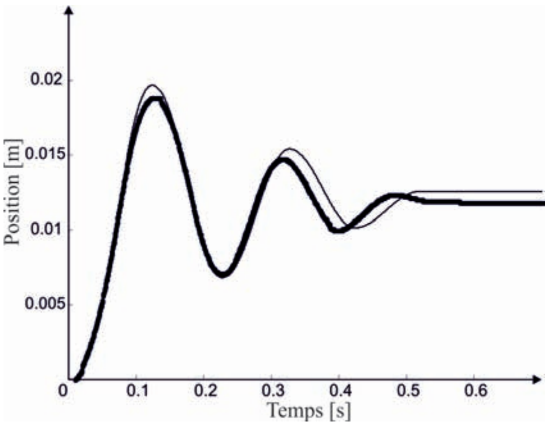
$$\|f_s\| = \mu_s \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot i_n^2 \cdot \left[L_o^y + L_1^y \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{0,036} \cdot x(t) - (n-1) \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right] + M \cdot g\right] \tag{2.11}$$

En faisant la substitution de $x = 3,6\ mm$ et $i_n = 2.4\ A$ pour $n = 2$ avec un $f_s(x) = 3,0\ N$ la valeur du coefficient de frottement sec est égale à :

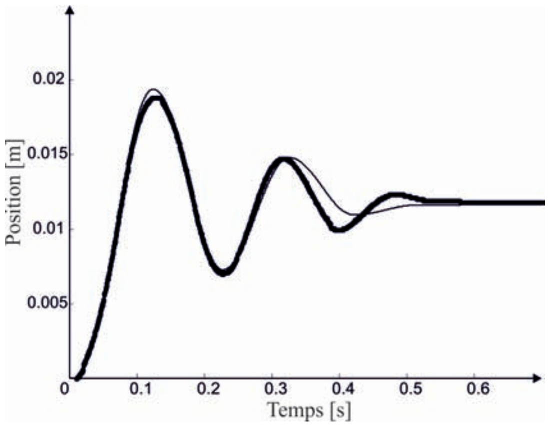
$$\mu_s = 0,0347. \tag{2.12}$$

Ces modèles de frottements ont été ajoutés au modèle dynamique et implantés dans l'environnement SIMULINK/MATLAB. Le fichier correspondant, appelé "mod non reduit.mdl", est démarré à partir du fichier "MLRV.m" décrit dans l'annexe B.9.

Les figures 2.23 et 2.24 présentent les simulations de l'avance d'un pas avec les deux modèles de frottement et pour deux valeurs différents du courant. Sur ces courbes nous avons également reporté, en gras, les enregistrements expérimentaux correspondants.



(a) $f_s = constant$



(b) $f_s = f_s(x)$

FIGURE 2.24 – Comparaison entre les acquisitions et le modèle de frottement dans SIMULINK : $i_n = 6,5\ A$

On observe une réponse plus précise à la fin de chaque pas mécanique quand on utilise le frottement variable en fonction de la position du chariot.

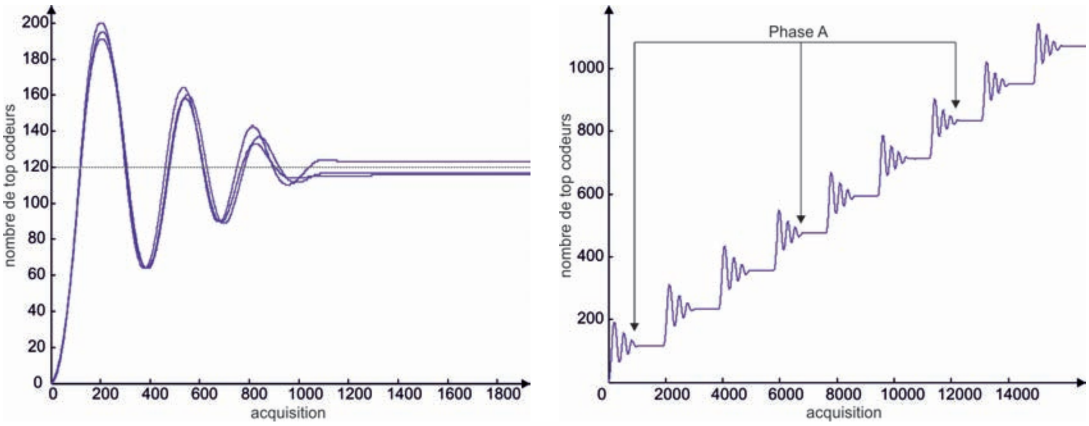
Pour des raisons de simplifications et de rapidité de calcul c'est le modèle avec frottement sec constant qui va être retenu pour la suite.

2.3.2 Déplacement de N pas en boucle ouverte

Le fonctionnement normal d'un moteur pas-à-pas est en boucle ouverte. Si l'on se trouve dans la région appelé START/STOP, on est capable d'appliquer une commande de N pas à une fréquence constante et le moteur démarrera et s'arrêtera à la position souhaitée. La figure 2.25(a) présente la comparaison entre l'application d'un pas sur chaque phase en partant à chaque fois de la même position absolue $x = 0$. Dans cette figure on constate que les oscillations pour les trois pas ne sont pas parfaitement identiques, ce qui peut être justifié par une différence entre les inductances des trois phases. On constate également l'effet du frottement sec qui conduit à une position finale quelconque dans une zone morte. D'après le modèle tube de flux cette zone morte est de $\pm 1,5\ mm$ soit ± 15 top codeurs. D'après l'analyse par la méthode des éléments finis cette zone est réduite à cause des effets de bords et la réalité semble plutôt confirmer cette deuxième analyse.

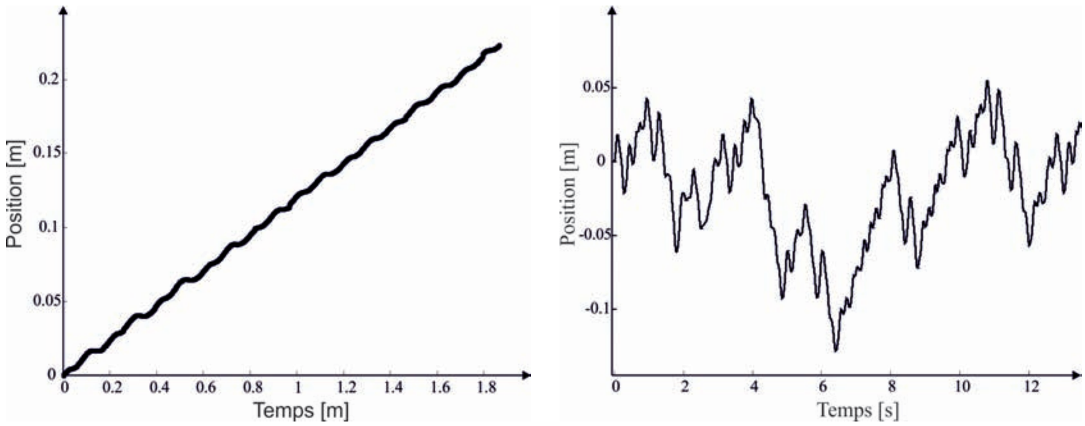
La figure 2.25(b) présente le déplacement de neuf pas enchaînés avec une fréquence d'alimentation de 1 Hz. Si l'on effectue ce type d'enregistrement sur toute la longueur du rail, on constate que les oscillations lors de l'alimentation d'une même phase ne sont pas identiques. Ceci peut être expliqué par un changement de l'inductance le long du parcours, c'est-à-dire un changement de l'épaisseur de l'entrefer en fonction de la position du translateur sur le rail.

La figure 2.26 présente le comportement à 10 Hz où la machine se déplace de façon périodique et puis à 6 Hz dans un régime apériodique. A mesure que la fréquence augmente, le moteur sort de la région autorisée et le mouvement dévient imprévisible. La deuxième partie de cette thèse est dédiée à l'étude de ces comportements appelés *régimes apériodiques*.



(a) (b)

FIGURE 2.25 – Application de N pas en boucle ouverte



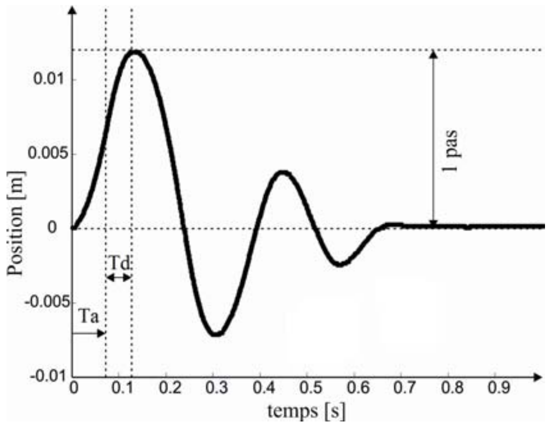
(a) A 10 Hz : régulier (b) A 6 Hz : apériodique

FIGURE 2.26 – Deux comportements qualitativement differents

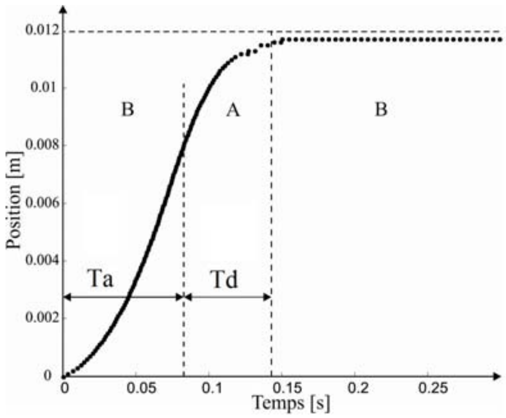
2.3.3 Commande bang-bang

Lors de l'avance d'un pas on observe une forte oscillation autour de la position d'équilibre. Ces oscillations sont intolérables dans la pratique. Pour les éviter, la technique de la commande bang-bang, figure 2.27, avec freinage électrique est bien adaptée. Cette technique consiste à commander un pas, c'est-à-dire, à accélérer le chariot pendant une durée T_a et à le freiner pendant une durée T_d afin de communiquer au translateur l'énergie juste nécessaire pour atteindre la position finale sans dépassement.

La figure 2.27(a) montre l'évolution du translateur pendant la procédure de détermination des temps d'accélération T_a et de freinage T_d pour la phase B. À l'instant $t = 0$ (on suppose que la phase A est alimentée et que le translateur se trouve dans la position d'équilibre correspondante) on déclenche le déplacement du translateur en coupant l'alimentation de la phase A et en alimentant la phase B du moteur (période d'accélération). A l'instant T_a on coupe la phase B et on réalimente la phase A. Le moteur revient donc vers sa position initiale. Par essais successifs on détermine T_a afin que la position maximale arrive à la position d'équilibre finale désirée. En plus



(a)



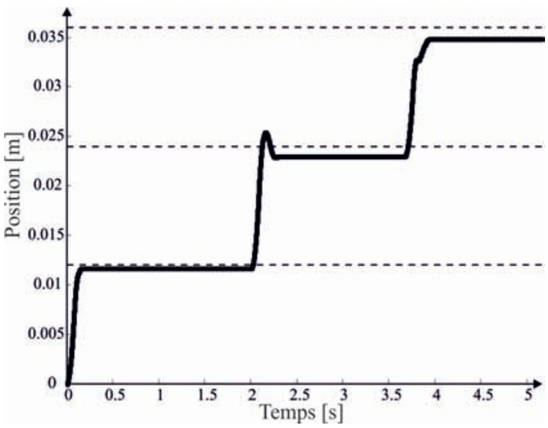
(b)

FIGURE 2.27 – Implémentation de la commande bang-bang sur la phase B

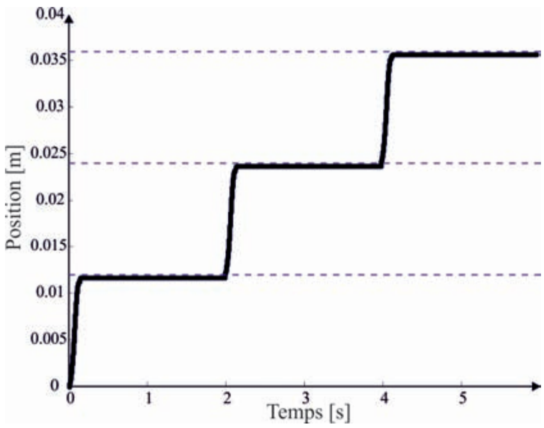
de la bonne valeur de T_a, cette opération nous permet de trouver la valeur de T_d qui correspond au temps écoulé entre l'instant T_a et l'instant de cette position maximale.

À la fin de T_d, pour effectuer un pas complet, la phase finale (B) doit être réalimentée pour stabiliser le moteur sur la position d'équilibre souhaitée. La figure 2.27(b) présente le résultat obtenu pour la commande bang-bang sur la phase B.

La figure 2.28(a) montre l'évolution sur trois pas avec les durées T_a et T_d identifiées pour la phase B.



(a) T_a et T_d identiques pour les trois phases



(b) T_a et T_d adaptés

FIGURE 2.28 – Commande bang-bang

On constate que les déplacements lors de l'alimentation des phases C et A ne sont pas optimaux à cause des différences entre les inductances de phase. Afin de régler ce problème, les valeurs de T_a et T_d peuvent être déterminées de façon indépendante pour chaque phase alimentée, soit T_a^i et T_d^i avec $i = 1, 2, 3$. Les valeurs ainsi trouvées sont présentées dans le tableau 2.3.3.

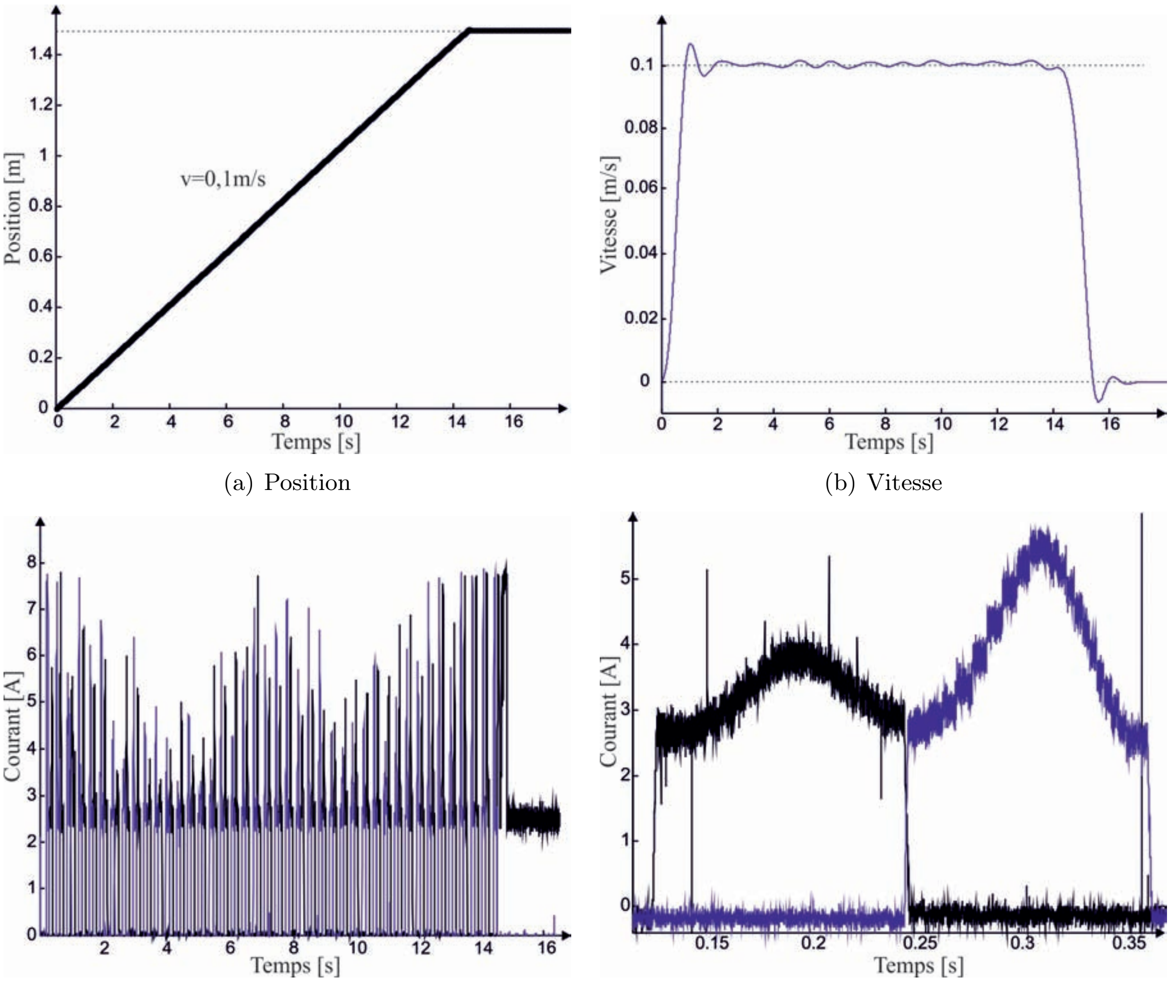
La figure 2.28(b) montre l'évolution obtenue sur trois pas. Les résultats sont concluants mais, là encore, si on effectue ce type d'enregistrement sur toute la longueur du rail, on constate des disparités.

	Phase A	Phase B	Phase C
T_a	93 ms	83 ms	91 ms
T_d	51 ms	60 ms	55 ms

TABLE 2.6 – Durées T_a et T_d pour les trois phases.

2.3.4 Déplacement de N pas en boucle fermée

Dans cette section nous présentons les essais du moteur commandé en boucle fermée par autopilotage à l'aide du capteur de position avec asservissement de la vitesse par action sur le courant de référence du hacheur selon la technique présenté à la section 2.2.3.4.

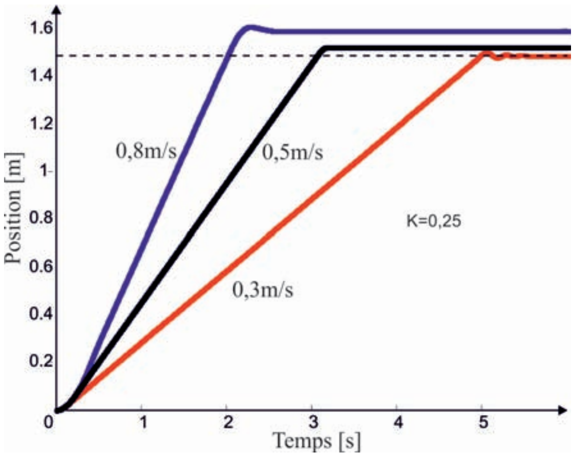


(a) Position (b) Vitesse

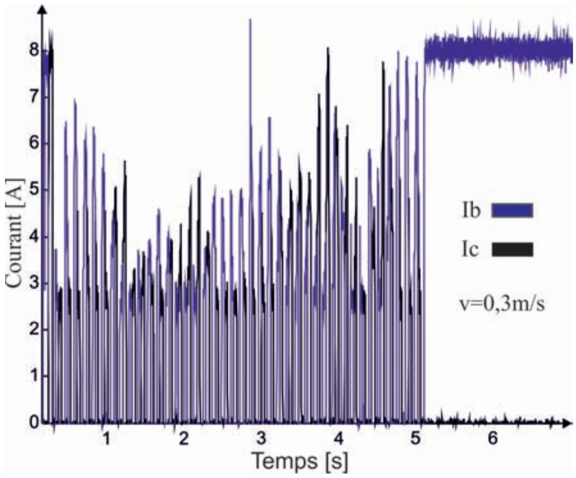
(c) Courant (d) Détail du courant

FIGURE 2.29 – Dynamiques en boucle fermée à $0,1\ m/s$

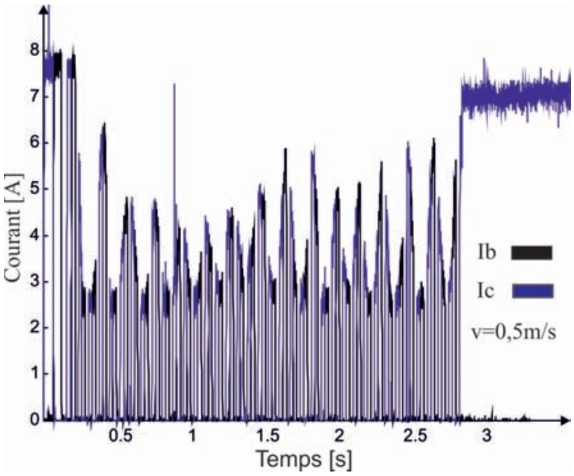
La montée en vitesse est réalisée avec une accélération et un courant maximum de 8,5 A. Lorsque la vitesse de référence est atteinte la régulation agit sur le courant pour maintenir cette vitesse. L'arrêt est déclenché par une position spécifiée à l'avance et la décélération se fait à couple de freinage maximum jusqu'a l'arrêt.



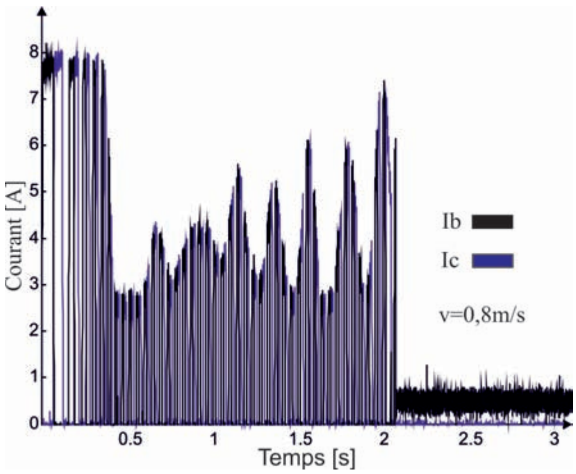
(a) Position



(b) Contrôle du courant pour une vitesse de $0,3\ m/s$



(c) Contrôle du courant pour une vitesse de $0,5\ m/s$



(d) Contrôle du courant pour une vitesse de $0,8\ m/s$

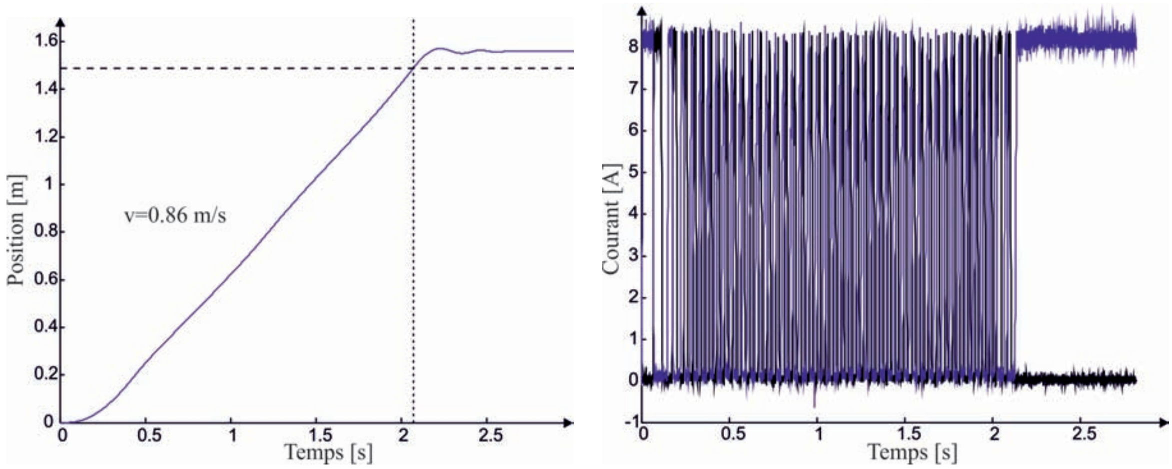
Figure 2.30 – Asservissement de vitesse pour trois valeurs de référence

La figure 2.29 montre un essai à vitesse lente de $0,1\ m/s$. Les figures 2.29(a) 2.29(b) représentent respectivement la position et la vitesse lors de ce mouvement. On remarque l'avantage de cette commande par rapport au fonctionnement pas-à-pas à la même fréquence : les oscillations de vitesse sont pratiquement supprimées.

Les figures 2.29(c) et 2.29(d) présentent deux parmi les trois courants lors de cette évolution. Sur la figure 2.29(c) en voit que sur l'ensemble de la distance les courants ne sont pas répétitifs, l'asservissement corrige les imperfections du banc. La figure 2.29(d) qui montre le détail du courant sur deux pas a été prise directement avec l'oscilloscope numérique avec la base de temps adaptée. Vue la vitesse de $0,1\ m/s$ un pas correspond à $120\ ms$. Lors de cet essai, le calcul de la référence courant a été effectué tous les 4 tops codeur, soit toutes les $4\ ms$. On observe les paliers de courant haché qui en résultent et qui contrôlent le couple à l'intérieur de chaque pas.

La figure 2.30 montre les déplacements complets pour les vitesses de $0,3\ m/s$, $0,5\ m/s$ et $0,8\ m/s$. Dans les trois cas la position de freinage commence à partir du 125^{me} pas.

Pour une vitesse de référence de $1\ m/s$ 2.31 le courant contrôlé atteint son maximum de $8,5\ A$ et notre asservissement n'arrive plus à atteindre la valeur de vitesse attendue. Pour améliorer



(a) Position

(b) Contrôle du courant pour une vitesse de référence de 1 m/s

FIGURE 2.31 – Asservissement de vitesse pour une vitesse de référence de 1 m/s

cette performance il faut augmenter la tension d'alimentation de 24 à 48V.

2.4 Estimation de l'inductance

L'utilisation d'un codeur optique pour mesurer la position et la vitesse est courante mais est assez onéreuse. Pour les moteurs hybrides ou les moteurs à réluctance variables, l'information position est contenue dans la valeur du flux magnétique, c'est à dire dans la valeur de l'inductance. La mesure rapide de l'inductance permet dans certains cas, d'estimer la position ainsi que la vitesse, mais elle est délicate à mettre en œuvre et peut être perturbée par la saturation du circuit magnétique. Nous allons exploiter les performances en rapidité et précision des nouveaux microcontrôleurs pour mettre en œuvre cette estimation. Pour éviter les problèmes posés par la saturation nous proposons, dans un dernier temps, d'effectuer la mesure de l'inductance sur une phase non alimentée.

2.4.1 Principe de la mesure

Dans son travaille novateur [Acarnley 85] a proposé l'estimation de l'inductance par l'analyse des temps de montée et de descente d'un courant haché sur une phase. Cette méthode permettre d'estimer la valeur de l'inductance sur la phase alimentée.

Actuellement, avec les microcontrôleurs DSP, capables de faire des millions de calculs par seconde cette méthode peut être utilisée avec beaucoup d'efficacité et une grande précision.

Le principe de cette mesure indirecte de l'inductance commence par l'analyse du flux à travers une phase du moteur. D'après l'équation 1.8 ce flux s'écrit :

$$\Psi_n = \Psi_n(i_n, x) = L_n(i_n, x) \cdot i_n \tag{2.13}$$

D'après l'équation 1.7 l'équation électrique de cette phase sera alors,

$$V_n = R.i_n + i_n \cdot \frac{\partial L_n}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + l_n \cdot \frac{di_n}{dt} \tag{2.14}$$

Où l_n représente l'inductance incrémentale l_{nn} de la phase n en l'absence d'inductances mutuelles. On rappelle que d'après l'équation 1.6 l'inductance incrémentale s'écrit :

$$l_n = L_n(i_n, x) + i_n \cdot \frac{\partial L_n(i_n, x)}{\partial i_n}, \tag{2.15}$$

et que en absence de saturation elle est égale à l'inductance propre L_n.

Le deuxième membre de l'équation 2.14 contient la réaction à la variation de la réluctance. Ce terme ne peut pas être mesuré par la forme du courant, donc il faut trouver une façon de l'estimer, de l'annuler, ou bien il faut le négliger.
L'équation (2.14) peut être écrite comme (2.16) .

$$l_n \cdot \frac{di_n}{dt} = V_n - R.i_n - i_n \cdot \frac{\partial L_{i_n,x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \tag{2.16}$$

Dans le cas d'un courant haché entre I_{max} et I_{min} obtenu par un driver réversible en tension, $V_n = +E$ pendant une durée T_1 de la montée du courant et $V_n = -E$ pendant la durée T_2 de la descente du courant.

Vu que la dérivée du courant à l'instant de la commutation t_k n'est pas définie, on notera t^- l'instant qui précède la commutation et t^+ l'instant qui la suit. La dérivée du courant en ces points sera donc définie.

Lors du passage de la phase montante du courant vers la phase descendante et en considérant que i_n^- est le courant dans la phase dans à l'instant t^- immédiatement avant la commutation, l'équation qui décrit cet état est présenté par .

$$l_n \cdot \left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^-} = E - R.i_n^- - i_n^- \cdot \frac{\partial L_n}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{2.17}$$

De façon similaire, en notant i_n^+ le courant à l'instant t^+ immédiatement après la commutation,

$$l_n \cdot \left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^+} = -E - R.i_n^+ - i_n^+ \cdot \frac{\partial L_n}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \tag{2.18}$$

Si on fait la différence entre (2.17) et (2.18) étant donné que les grandeurs l_n, $\frac{\partial L_n(i_n,x)}{\partial x}$, i_n et $\frac{dx}{dt}$ on toutes les mêmes valeurs dans les deux équations, on obtient :

$$\left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^-} \cdot l_n - \left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^+} \cdot l_n = 2 \cdot E \tag{2.19}$$

Donc, théoriquement les valeurs d'inductance peuvent être calculées par (2.20)

$$l_n = \frac{2 \cdot E}{\left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^-} - \left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^+}} \tag{2.20}$$

Le courant étant contrôlé par le hacheur dans une fourchette Δi faible nous pouvons considérer qu'il est à variation linéaire. Ses dérivées peuvent donc être approximées par $\left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^-} = \frac{\Delta i}{T_1}$ et $\left.\frac{di_n}{dt}\right|_{t^+} = -\frac{\Delta i}{T_2}$ l'équation 2.20 devient donc :

$$l_n = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 + T_2} \cdot \frac{2 \cdot E}{\triangle i_n} \tag{2.21}$$

Dans le programme de hachage implanté dans le dsPIC, les durées T_1 et T_2 sont mesurées par un timer avec une précision de 1/30 μs. Le calcul de $\frac{T_1 \cdot T_2}{T_1+T_2}$ est effectué dans le micro hacheur, il a été programmé en assembleur en virgule fixe et ne nécessite ainsi qu'environ 2 μs de temps d'exécution. Ce calcul est effectué à chaque commutation du hacheur. On calcule ainsi l'inductance avec un retard d'environs une demi-période de hachage. Cette grandeur est transmise à la carte de commande qui ajoute la position. Le paquet formé par ces deux données est transmit au PC qui multiplie l'information d'inductance par $\frac{2E}{\Delta i}$ pour finalement stocker et afficher $l_n(x)$.

2.4.2 Essais

La première acquisition d'inductance a été faite lors de la réponse d'un pas lorsque le moteur part de la position initiale $x = 0$ vers la première position stable à $x = 12\ mm$. Ce déplacement correspond à l'application d'un créneau de courant hachée par hystérésis entre $8,0\ A$ et $8,5\ A$.

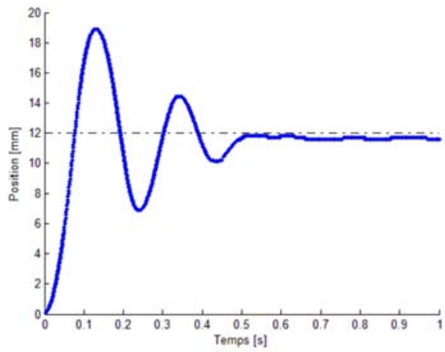


FIGURE 2.32 – Réponse sur un pas

Pendant que le pas représenté à la figure 2.32 est exécuté, l'inductance sur la phase alimentée est acquise. La figure 2.33 présente l'estimation de cette inductance en fonction de la position pendant ce déplacement.

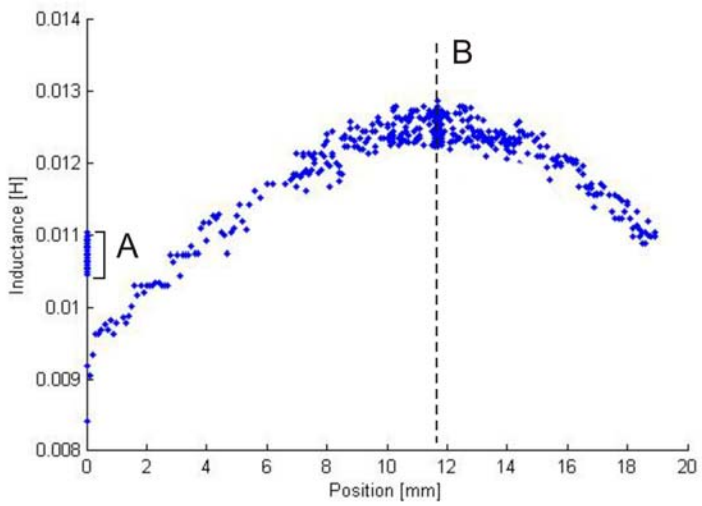


FIGURE 2.33 – Estimation de l'inductance lors d'exécution d'un pas

Le point *'A'* représente l'inductance de la phase précédente au point de départ du mouvement. Le point *'B'* représente l'inductance de la phase alimentée lorsque le translateur se trouve à la position d'équilibre.

Lors de cette avance d'un pas, le moteur oscille autour de sa position d'équilibre ce qui explique que sur la courbe d'inductance on observe un nuage de points. La courbe de l'inductance en fonction de la position est bien une portion de sinusoïde avec un maximum de $12,5\ mH$. Cette inductance n'a pas l'air d'être influencée par une saturation.

La figure 2.34 présente une acquisition d'inductance sur une phase alimentée avec 1A sur un déplacement relatif de $2 \cdot \pi$ degré, soit l'équivalent à trois pas ($3x12\ mm$). L'acquisition a été faite en plaçant la partie mobile sur une position d'équilibre, en alimentant la phase correspondante et en déplaçant le chariot manuellement jusqu'a la position d'équilibre suivante.

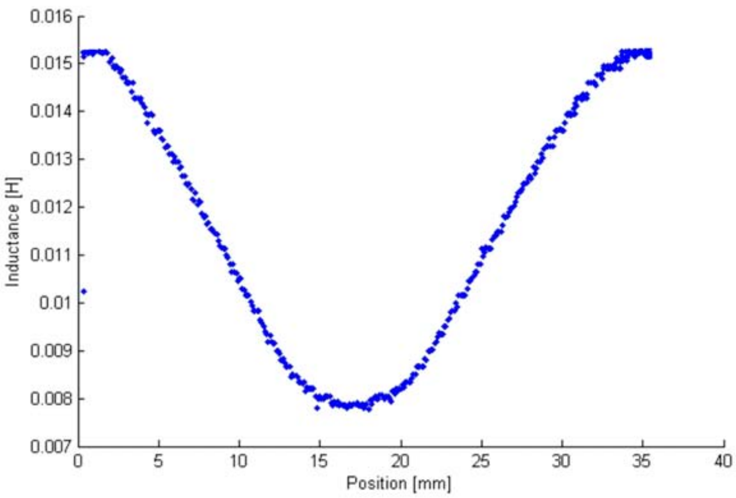


Figure 2.34 – Variation de l'inductance pour une phase entre deux positions d'équilibre

Cette figure présente une allure sinusoïdale avec $L_{max} = 15,5\ mH$ et $L_{min} = 8\ mH$ ce qui justifie bien le modèle de premier harmonique développé en 1.4.4. Sur cette figure en peut remarquer la région plate qui mesure à-peu-près $3\ mm$ comme le prévoit la théorie des tubes de flux.

Les estimations des inductances tout le long du parcours sont présentées sur la figure 2.35. Une phase est alimentée par un courant haché entre $0,5\ A$ et $1,0\ A$; et le translateur est déplacé manuellement sur toute la longueur du stator. Cette opération est répétée pour chacune des phases. On remarque une importante variation des maximums d'inductance lors de ce déplacement.

Ces mesures sont reproductibles. On peut attribuer ces variations à des imperfections de fabrication d'ordre mécanique qui entraînent une variation d'entrefer tout au long du stator.

La figure 2.36 présente un zoom sur la figure 2.35 qui fait apparaître les inductances des trois phases. On constate encore une forte différence entre les inductances des trois phases. Ces différences sont cette fois imputables à la différence de hauteur des dents du translateur.

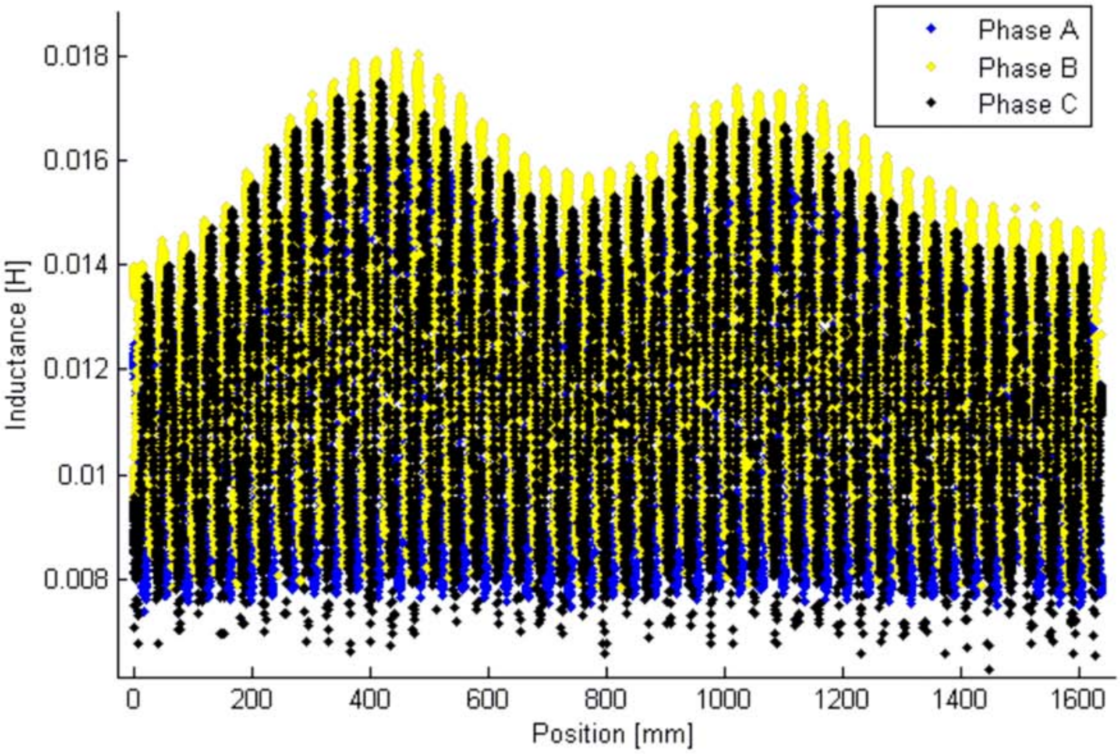


FIGURE 2.35 – Variation de l'inductance des trois phases le long du parcours

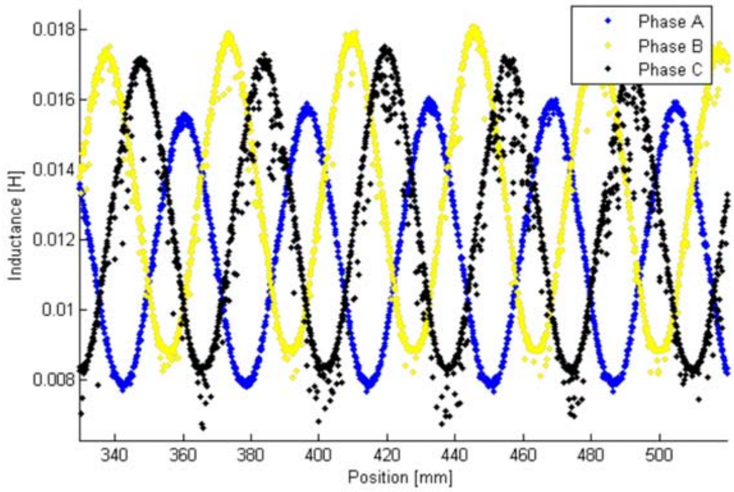


FIGURE 2.36 – Variation de l'inductance entre les trois phases

2.4.3 Phénomène de saturation

A cause des entrefers très petits que l'on trouve dans certaines régions le long du parcours, notre machine peut présenter des saturations qui dépendent de la valeur du courant appliqué sur la phase. La figure 2.37 présente les mesures des inductances pour une même phase alimentée avec différentes valeurs de courant en fonction de la position.

Pour ces expériences le chariot est déplacé manuellement d'environ 10 *cm*. La saturation se manifeste à partir de 4 *A* et pour les positions d'équilibre. Pour des courants plus importants l'inductance incrémentale passe même par un minimum local. L'estimation de la position à partir d'une courbe d'inductance saturée devient alors très délicate.

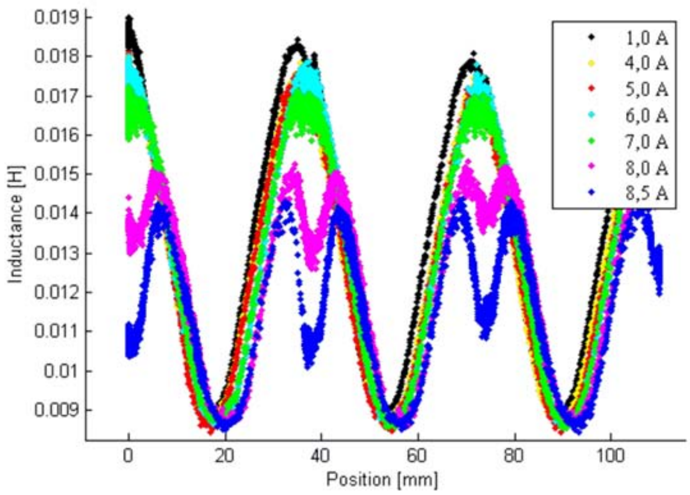


FIGURE 2.37 – Phénomène de saturation

Pour éviter d'utiliser les modèles d'inductance saturée et de compliquer les calculs, nous proposons de faire la mesure de l'inductance sur une phase inactive en appliquant un faible courant.

2.4.4 Estimation de l'inductance sur les phases inactives

2.4.4.1 Principe

La mesure de l'inductance sur une phase inactive apparaît comme une solution au problème de la saturation. En effet sur cette phase inactive, les courants de mesure peuvent rester très faibles. Par contre, les mesures serons plus sensibles aux parasites de commutation des autres phases. Pour pallier à ces problèmes nous avons synchronisé le hachage de la phase active sur ces mesures en remaniant notre programme de commande rapprochée comme le montre la figure 2.38.

Comme choix de la phase de mesure, nous avons retenu la phase précédemment alimentée selon le sens du déplacement. Ainsi, l'inductance mesurée présente une courbe décroissante qui démarre à partir de son maximum. Cette situation va nous autoriser à faire une mise à l'échelle des courbes afin de corriger les imperfections d'entrefer.

D'autres techniques de mesure de la position ont été déjà traités dans plusieurs travaux, par exemple [Komatsuzaki 07].

Grace à la mesure du temps de montée et de descente, comme indiqué à la section 2.4.1, notre technique élimine l'influence de la force de réaction électromotrice.

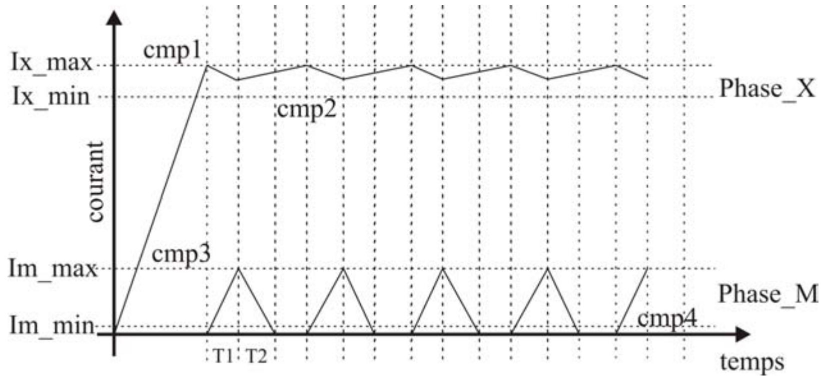


FIGURE 2.38 – Estimation de l'inductance sur la phase inactive.

2.4.4.2 Implémentation sur dsPIC

Du point de vue pratique, la commande d'une phase et l'estimation simultanée de l'inductance sur l'autre phase provoque des problèmes de commutation sur le hachage à hystérésis et donne de mauvaises mesures. Pour éviter ces erreurs nous avons décidé d'appliquer une stratégie qui synchronise les hacheurs du courant sur les séquences de mesure. Cette stratégie consiste à couper la phase active lorsque le courant arrive à I_{max} et alimenter à cet instant la phase de mesure. Pour éviter les déclenchement intempestifs des comparateurs, ceux-ci ne sont habilités a fonctionner que après un délai de $10\mu s$ environ. Un comparateur scrute le passage du courant principal par Ix_{min}, alors qu'en autre scrute le passage du courant de mesure par Im_{max}. Le comparateur du courant de mesure est prioritaire, dès que Im_{max} est atteint, on coupe la phase de mesure et l'on remet en service la phase de commande. Étant donné les valeurs des inductances et les limites de courants mises en jeu, on peut garantir que le hachage du courant sur la phase de puissance sera toujours à l'intérieur de la région définie par les deux seuils I_{max} et I_{min}, comme représenté sur la figure 2.38. Par contre, si le courant de phase remonte à Ix_{max} avant l'extinction du courant de mesure, une nouvelle séquence de hachage est déclenchée et l'on perdra une mesure d'inductance.

Sur le dsPIC30F2020 il y a quatre comparateurs disponibles (CMP1, CMP2, CMP3 et CMP4) avec chacun quatre entrées multiplexées (A, B, C et D). Ces comparateurs partagent les mêmes pattes d'entrée du microcontrôleur. De façon a utiliser une seule patte du composant par phase, nous avons configuré deux comparateurs pour chaque phase. Par contre, à cause de la limitation du nombre des comparateurs disponibles, nous avons utilisé les comparateurs 1 et 2 sur les entrés C et A pour la phase un, les comparateurs 1 et 2 avec les entrés D et B pour la phase deux et les comparateurs 3 et 4 avec les entrés C et A pour la phase trois. Cette stratégie, nous oblige à reconfigurer correctement les entrées des comparateurs 1 et 2 à chaque fois qu'on alimente ces phases.

Les affectations de ces comparateurs pour la phase alimentée et pour la phase de mesure sont données par le tableau 2.7.

Dans le cas de l'alimentation de la phase 1 la figure 2.38 indique les comparateurs utilisés.

Les programmes d'interruption des différents comparateurs sont donnés par les organigrammes de la figure 2.39. Les autorisations de ces interruptions sont affectées dynamiquement.

Le principal problème posé par cette méthode est la détection du niveau inférieur du courant de la phase de mesure. De façon idéale on devra détecter le passage par zéro du courant. Or, les capteurs de courant ont un "*DC offset*" et ont de petites différences entre eux. Nous avons donc

Phases		Comparateurs utilisés			
Phase alimenté	**Mesure sur**	Ix_{Max}	Ix_{Min}	Im_{Max}	Im_{Min}
Phase I	Phase III	CMP1	CMP2	CMP3	CMP4
Phase II	Phase I	CMP1	CMP1	CMP2	CMP2
Phase III	Phase II	CMP3	CMP4	CMP1	CMP2

TABLE 2.7 – Stratégie de mesure et configuration des comparateurs pour la séquence d'alimentation des phases I, II et III

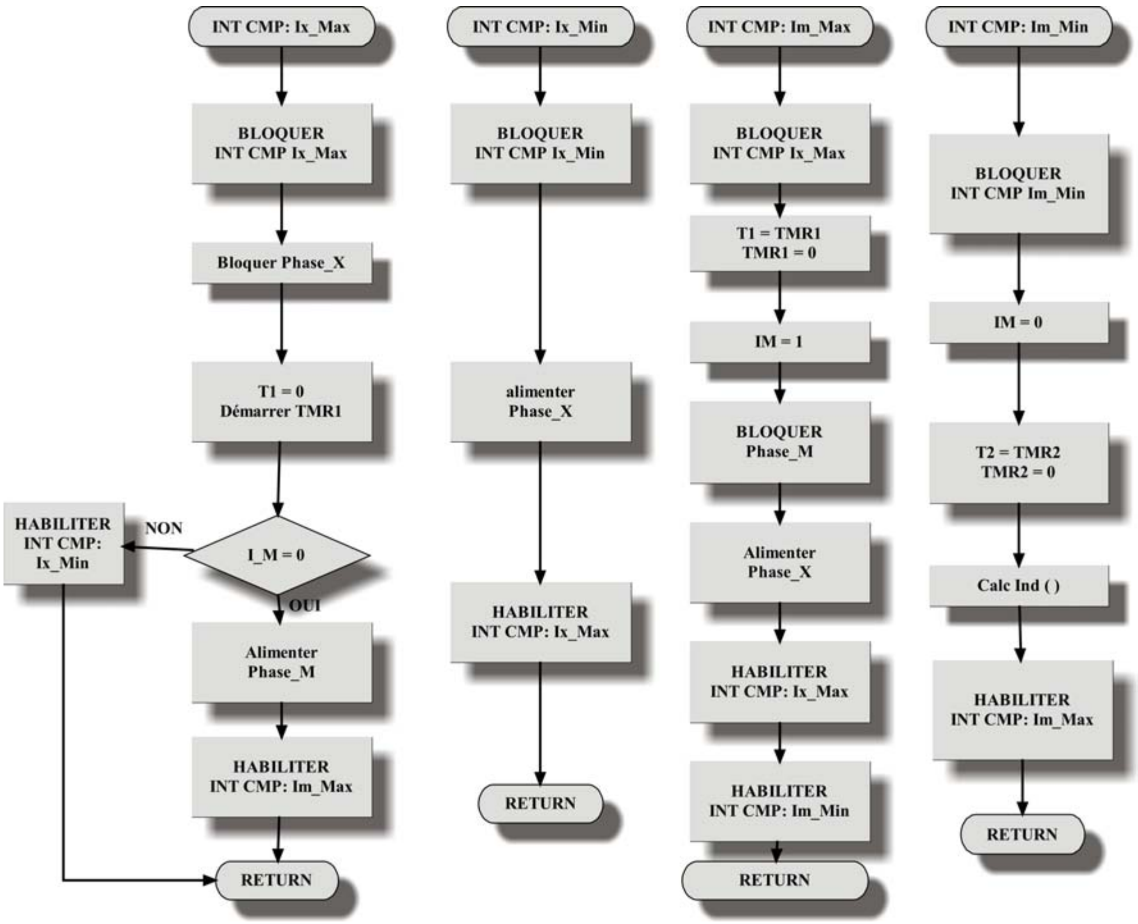


FIGURE 2.39 – Interruptions des comparateurs

défini par programme trois seuils qui représentent les courants zéro sur chaque phase.

2.4.4.3 Résultats

La figure 2.40 montre l'acquisition d'inductance sur une phase inactive lorsque la phase active est hachée par un courant de $4,0\ A$ et $8,5\ A$. Ces enregistrements ont été réalisés en déplaçant le chariot à la main. Les deux séries de mesure sont identiques et aucune ne contient l'effet d'une saturation.

La figure 2.41 montre l'enregistrement des valeurs d'inductance ainsi mesurées si le moteur est commandé en pas-à-pas sur trois pas. Comme lors de cet essai le moteur oscille autour de ses

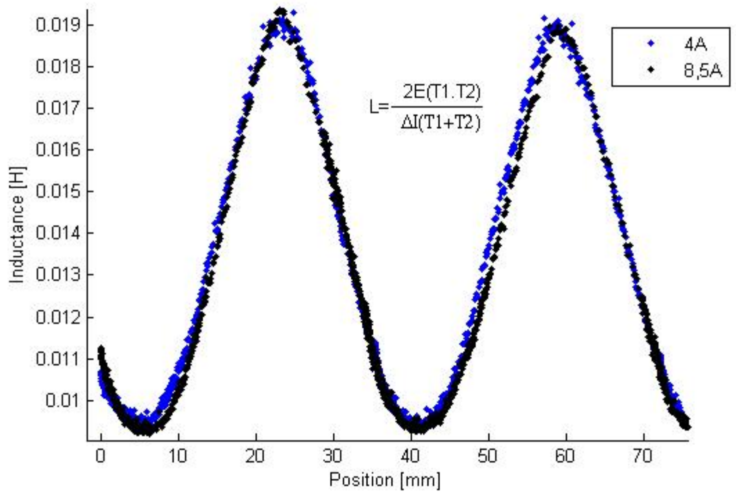


FIGURE 2.40 – Acquisition d'inductance sur une phase différée

positions stables, les courbes d'inductance tracées dépassent ces positions et atteignent même les valeurs d'inductances minimales. On retrouve sur cette experience la dissymétrie de fabrication des dents du translateur. C'est la valeur maximale de l'inductance de la troisième phase qui est la plus pénalisée, les valeurs minimales sont moins influencées.

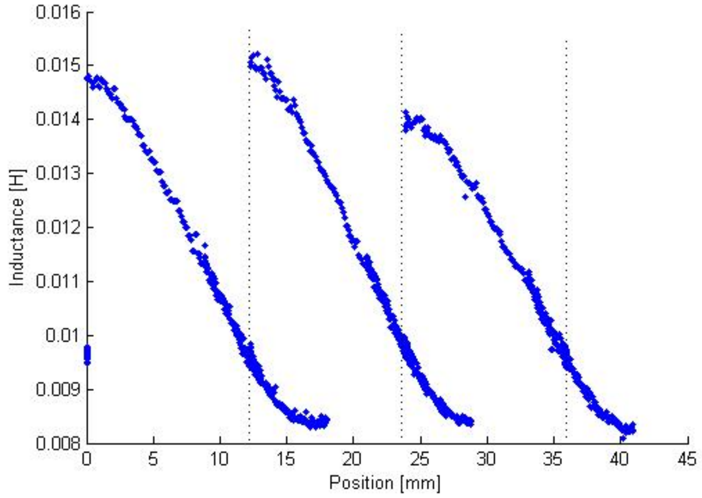


FIGURE 2.41 – Acquisition d'inductance sur trois pas consécutifs

La figure 2.42 présente les trois acquisition antérieures avec un ajustement d'échelle. Les trois courbes sont parfaitement identiques et vont permettre un autopilotage précis grâce à un seuil d'inductance.

Un tel autopilotage a été réalisée et est décrit par la figure 2.43. La commutation des phases est déclenchée à partir d'un seuil d'inductance initialisée sur l'interface PC et la vitesse asservie à $0,6$ m/s est bien contrôlée. la performance de cet autopilotage parait aussi bonne que celle

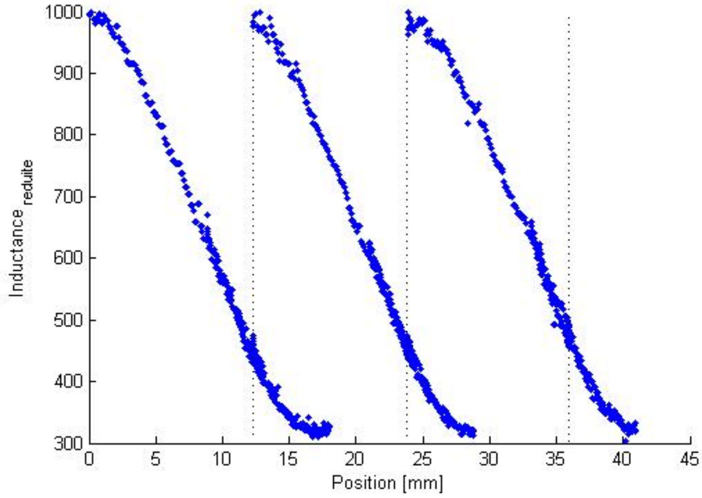
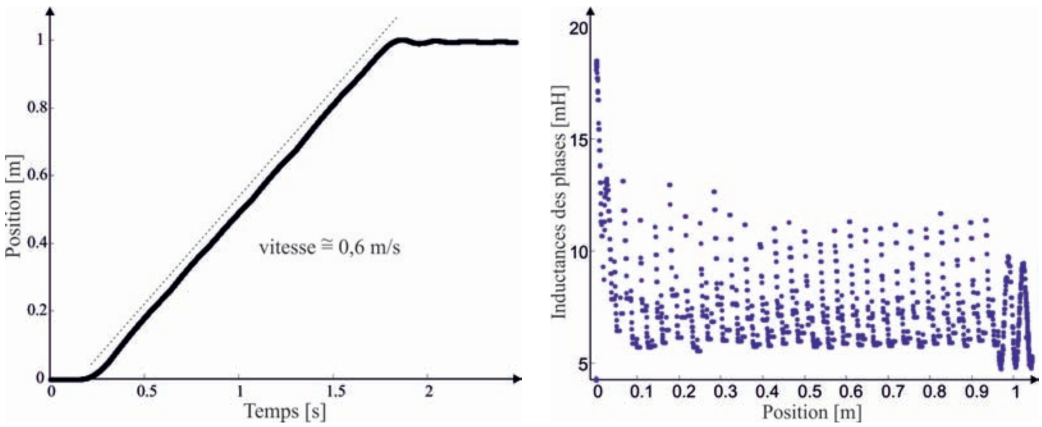


FIGURE 2.42 – Acquisition d'inductance sur trois pas consécutifs - cas normé

obtenue à partir du capteur de position.



(a) Autopilotage (b) Commutation entre les inductances

FIGURE 2.43 – Autopilotage par les estimations d'inductance.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le banc d'essais qui a été réalisé et instrumenté. Nous avons précisé et justifié les choix pour les différentes cartes qui ont été réalisées et programmées :

- les hacheurs de puissance haut et bas avec les capteurs de courant,
- la carte de commande rapprochée qui gère le hacheur à hystérésis et mesure avec précision les temps de montés et descente des courants,
- la carte de commande qui mesure la position et génère les asservissements,
- l'interface de supervision et de stockage qui fonctionne sur le PC.

Les communications entre ces différentes cartes ont été décrites.

Cet ensemble facile a utiliser correspond tout-à-fait à nos besoins et va nous permettre d'effectuer les essais souhaités et les enregistrements et les stockages nécessaires pour la suite de ce travail.

Des enregistrements d'évolutions simple en pas-à-pas ont permis d'identifier avec précision les paramètres essentiels de la mécanique à savoir l'amortissement et le frottement sec. Une étude assez fine a mis en évidence qu'un frottement sec variable en fonction de la position représente très bien la réalité. Ces données sont prises en compte dans les simulations ultérieures.

Bien que ce n'était pas le but de cette thèse, quelques essais de commande avancée de cette machine ont été présentés. En particulier une commande en boucle fermée avec autopilotage à l'aide d'un capteur de position et avec asservissement de la vitesse.

En vu de réaliser ultérieurement une commande boucle fermée sans capteur, deux méthodes de mesures dynamiques de l'inductance ont été présentées, implantées et testées. Une première qui mesure l'inductance sur la phase alimentée est assez facile à mettre en oeuvre mais présente l'inconvénient d'être trop sensible à la saturation. La seconde méthode, très originale, qui consiste à alimenter la phase inactive, complique beaucoup la tâche du microcontrôleur. Après de nombreuses précautions (synchronisation des hachages, délai anti-parasites, seuil de détection du zéro, ...) nous avons prouvé que cette méthode est très efficace pour la détection de la position. Elle permet même par une mise à l'échelle de s'affranchir des imperfections matérielles du banc. Un autopilotage sans capteur a été réalisé et donne d'aussi bonnes performances que le fonctionnement avec capteur.

Des suggestions pour la suite du travail peuvent être données. L'utilisation d'une liaison entre les cartes de commande et d'acquisition en utilisant la liaison SPI avec un bit de synchronisation (le dspic2020 ne permet pas cette fonction pour la communication SPI). Une liaison série entre la carte de commande et le PC plus rapide en utilisant par exemple un port USB au lieu du protocole RS232. Une récupération des mesures des courants de phase par des dispositifs optiques, par exemple des fibres optique, pourrait être envisagée pour mieux s'affranchir des parasites.

On pourrait également réaliser l'ensemble de cette commande dans un seul microcontrôleur ce qui permettrait d'éviter les problèmes de liaisons.

Il reste enfin à réaliser et a tester une commande en boucle fermée complète sans capteur.

3

Détection et analyse du chaos

Sommaire

3.1 Introduction

Depuis longtemps, la modélisation et le contrôle linéaires sont appliqués avec succès dans nombres de domaines de l'ingénierie. Les méthodes linéaires ont mis à disposition des chercheurs des outils mathématiques puissants ayant fait la preuve de leur efficacité dans beaucoup d'applications industrielles. Dans ces applications, on recherche le plus souvent des solutions reflétant soit un état d'équilibre, soit un fonctionnement périodique. Cependant, la plupart des processus réels sont naturellement non linéaires. Par conséquent, un modèle linéaire reste une approximation souvent grossière de la réalité car il résulte de simplifications qui ne sont justifiées que dans un domaine de fonctionnement restreint. On peut considérer que la théorie des systèmes linéaires est un sous-produit de la théorie des systèmes dynamiques en général dont les systèmes non linéaires sont en fait les représentants les plus nombreux. Ce constat justifie en partie de se tourner plus largement vers des outils non linéaires pour étudier des problèmes d'ingénierie. Au cours des dernières décennies, l'analyse et le contrôle non linéaires des systèmes dynamiques ont connus un essor considérable, comme en témoigne le nombre considérable de publications sur le sujet. Cet intérêt s'explique de plusieurs façons. Pour commencer, on peut citer la possibilité d'étendre le domaine de fonctionnement des systèmes en caractérisant de nouveaux modes d'opération. Cela constitue un des avantages apportés par les méthodes non-linéaires mais ce n'est pas le seul. On peut ajouter la possibilité d'analyser et de modéliser des systèmes fortement non-linéaires caractérisés par des discontinuités [Müller 95], ce que ne permettent pas les modèles linéarisés. C'est le cas, par exemple, du frottement de Coulomb, de la saturation, des cycles d'hystérésis, des zones mortes et du "*backlash*". La non prise en compte de tels phénomènes dans l'élaboration du contrôle rend les systèmes sensibles à l'apparition d'instabilités et de cycles limites indésirables. La synthèse d'un contrôleur non-linéaire doit surtout s'appuyer sur une modélisation mathématique précise afin d'avoir une connaissance étendue de l'ensemble des régimes de fonctionnement possibles du système en question. Le modèle doit être aussi simple que possible mais cependant capable de reproduire fidèlement les différents comportements dynamiques du système réel. Cette tâche n'est pas évidente d'autant plus, qu'outre les difficultés inhérentes à leur nature non linéaire, la modélisation doit parfois aussi prendre en compte certains phénomènes physiques secondaires. Par conséquent, le travail de modélisation d'un système dynamique et la caractérisation, tant qualitative que quantitative, à partir de simulations numériques par exemple, est une tache assez délicate. La phase d'investigation, d'identification et de caractérisation des régimes de fonctionnement d'un système dynamique, passe obligatoirement par la détection et l'analyse de comportements irréguliers car apériodiques de nature quasi-périodiques ou parfois chaotiques.

Dans ce but, nous avons divisé ce chapitre en trois parties. Nous présentons en première partie les méthodes de détection et d'analyse du chaos. En particulier, notre contribution consiste en la modification d'un algorithme d'estimation du spectre de Lyapunov en vue de la reduction du temps de calcul et de l'augmentation de la précision. La deuxième partie a pour but de valider qualitativement l'usage du modèle simplifié, utilisé dans la troisième partie, pour illustrer l'application des outils et méthodes présentés en première partie. Dans la partie trois, les méthodes sont appliquées, soit directement au modèle différentiel, soit aux séries temporelles obtenues par simulation du modèle.

D'autres travaux qui ont abordé l'analyse du phénomène chaotique sur les actionneurs incrémentales, comme les moteur pas-à-pas par exemple, peuvent être trouvés sur [Robert 00], [Robert 01], [Reiss 03], [J.H. Chen 00], [Zhong i 00], [Zhong Li 99] et [K.T. Chau 99].

3.2 Mesures du chaos

Depuis une dizaine d'années environ, les méthodes d'analyse des systèmes non-linéaires ont été considérablement développées. La théorie ergodique de Boltzmann-Gibbs (1884), la notion de dimension fractale et la théorie des bifurcations, ont constitué la base nécessaire à l'élaboration de divers outils d'analyse et de caractérisation des systèmes dynamiques non-linéaires. L'ensemble a été remarquablement synthétisé par [Eckmann 85a], [Eckmann 85b] sur trois aspects théoriques : dimension (nombre de degrés de liberté effective), entropie (production/perte d'information) et exposants caractéristiques (sensibilité aux conditions initiales).

Mathématiquement la complexité des systèmes non linéaires se reflète dans le fait que la plupart des ces systèmes n'ont pas de solution analytique, ce qui conduit à rechercher des solutions par des méthodes numériques.

Contrairement au cas linéaire, les systèmes dynamiques non-linéaires peuvent présenter plusieurs points d'équilibre (stables ou instables), ainsi que des comportements apériodiques. De plus, une petite perturbation des conditions initiales d'un système linéaire stable provoque de petits écarts dans l'état du système. Plus généralement, les écarts constatés entre les états du système perturbé et non perturbé sont en rapport avec l'amplitude de la perturbation initiale. En revanche, une petite variation dans les conditions initiales d'un système non-linéaire peut éventuellement provoquer une variation considérable de son comportement dynamique, ce qui le rend imprévisible d'un point de vue pratique. C'est en 1975 que, pour la première fois, le terme CHAOS a été employé pour désigner ce genre de comportement dynamique par Tien-Yien Li et James A. Yorke dans leur célèbre article "period 3 implies chaos" [LI 75]. Cette infinie sensibilité aux conditions initiales, aussi dénommée "effet papillon" [LORENZ 63], est peut-être l'une des propriétés les plus remarquables du phénomène chaotique.

La définition d'un système chaotique ne fait pas l'unanimité dans la communauté scientifique. Certains auteurs définissent le système chaotique comme étant un système parfaitement déterministe qui présente un comportement d'apparence aléatoire. Cependant, le comportement apparemment aléatoire ne suffit pas pour caractériser le chaos. C'est à cause de ce fait que certains chercheurs lient la définition du comportement chaotique à celle de l'attracteur chaotique. L'attracteur chaotique ou attracteur étrange est l'objet géométrique vers lequel toutes les trajectoires initialisées dans son bassin d'attraction convergent. Ces attracteurs sont de nature fractale et ils sont caractérisés par des "*invariants*" mesurables. Une définition caractéristique est donné par [Parker 87] dont l'attracteur chaotique viens des intersections transversales entre différentes variétés (*manifolds*) de Poincaré.

Dans les systèmes dissipatifs, la transition d'une solution régulière vers le chaos s'opère le plus souvent selon trois scenarios de base ou routes vers le chaos. Il s'agit de la cascade sous-harmonique (ou doublements de période successifs), de la route par les intermittences(déstabilisation d'un cycle limite) et de la route par la quasi périodicité (transition par différents formes de destruction d'un tore) [Nayfeh 95].

3.2.1 Bifurcations

Le mot bifurcation a été introduit en dynamique non-linéaire par Henri Poincaré pour désigner un changement qualitatif dans la solution d'un système différentiel non linéaire, tel que le nombre de solutions ou leurs natures. Ces bifurcations résultent des changements de stabilité dus à la variation d'un paramètre duquel ce système est intrinsèquement dépendant. D'autres types de bifurcations ont été étudiés ultérieurement. Les bifurcations sont un des outils mathématiques et graphiques capables d'indiquer les possibles régions d'occurrence du chaos.

3.2.2 Sections de Poincaré

La mise en évidence d'un attracteur chaotique est un des principaux révélateurs de l'existence d'un comportement chaotique. Ces attracteurs sont caractérisés, entre autres, par leur dimension fractale. Dans l'espace géométrique, deux trajectoires initialisées infiniment proches l'une de l'autre, dans le bassin d'attraction, divergent l'une de l'autre de manière exponentielle tout en convergeant l'une et l'autre vers l'attracteur. L'attracteur lui-même demeure borné.

Bien que le comportement chaotique rappelle celui d'un système aléatoire, le chaos en diffère fondamentalement par le fait qu'il s'agit d'un phénomène tout-à-fait déterministe. Cependant, la complexité des dynamiques chaotiques autorise l'usage d'outils probabilistes et statistiques pour les caractériser et tenter de le prédire [Guégan 03], [Berliner 92]. Puisque les solutions chaotiques sont bornées, ce sont des solutions stables au sens de Lyapunov malgré la divergence des trajectoires.

On peut réaliser facilement la section de Poincaré d'un système non autonome d'ordre n, à fonction d'excitation périodique de période T, en remarquant qu'il est possible de le rendre autonome à l'ordre $n+1$ en utilisant le temps comme nouvelle variable d'état [4]. Dans un nouvel espace de type cylindrique 3.1, l'application de Poincaré peut-être vue comme un échantillonnage stroboscopique à la période d'excitation T [Just 00].

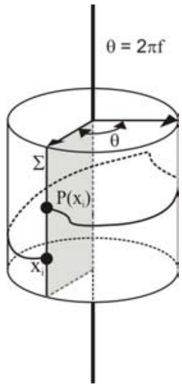


FIGURE 3.1 – Espace cylindrique - Système non autonome du premier ordre.

La suite des itérés d'une application de Poincaré constitue une section de Poincaré. La section de Poincaré est un outil efficace permettant de discriminer facilement un régime quasi périodique d'un régime chaotique bien que tous deux soient apériodiques. Dans le premier cas, les points de la section de Poincaré s'organisent le long d'une courbe fermée qui est en fait la trace, sur la surface de coupe, d'un tore dans l'espace d'état. Dans le cas d'un attracteur chaotique, les points de sa section de Poincaré se dispersent sur la surface de coupe tout en conservant les propriétés fractales de l'attracteur lui-même. Dans le premier cas donc, la dimension de la section de Poincaré est entière et dans l'autre non. De plus, la figure 3.2 illustre le fait que toutes les sections de Poincaré, d'un tore ou d'autres types d'attracteur, ne sont pas topologiquement équivalentes.

3.2.3 Plongement

Les acquisitions expérimentales produisent des séries de données temporelles. Pour cette raison, une grande partie des outils d'analyse non-linéaire sont actuellement dédiés à l'extraction

4. L'annexe C.2 présente une discussion sur ce sujet

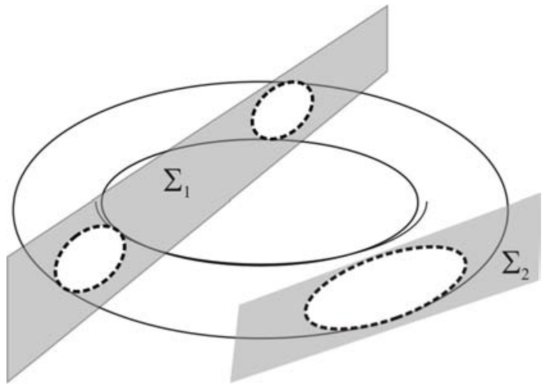


Figure 3.2 – Différentes sections de Poincaré d'un même tore.

d'information à partir de séries temporelles.

La théorie du plongement stipule qu'il est possible de reconstruire toute la dynamique d'un système à partir de la connaissance du comportement d'une seule de ses variables. Plonger une variable signifie être en mesure de reconstruire une dynamique équivalente à l'originale, c'est-à-dire préservant qualitativement le scenario des bifurcations et conservant quantitativement les mesures des invariants caractéristiques.

La nécessité du plongement devient claire quand on essaie de calculer les invariants à partir d'une série temporelle brute. Les régions d'estimation de la valeur des dimensions fractales et des exposants de Lyapunov sur l'attracteur sont souvent problématiques en raison d'une conformation inadéquat de l'attracteur dans l'espace d'état. Les évaluations des invariants sont beaucoup plus précises lorsqu'elles sont opérées sur un attracteur reconstruit à partir de données plongées. La reconstruction d'un attracteur est donc généralement la première étape de l'analyse d'un système dynamique.

Théoriquement, la valeur de l'invariant est, par définition, indépendante du type de données à partir desquelles on en ferait le calcul :données brutes ou données plongées. Cependant, il faut rappeler que lorsqu'on exploite les données sous forme de séries temporelles, on ne réalise pas un calcul d'invariant mais une estimation. Or les estimations numériques sont produites en mettant en œuvre des algorithmes, ce qui renvoie à la délicate question de la convergence de ces algorithmes. De ce point de vue, il est clair que la convergence des algorithmes est particulièrement sensible à la façon dont l'information dynamique est conditionnée dans la série temporelle. Par exemple, la présence des discontinuités est très préjudiciable à la convergence algorithmique. C'est à ce niveau que le plongement prend toute son importance, étant souvent même indispensable pour reconditionner l'information dynamique sous une forme plus exploitable par les algorithme d'estimation. Il est clair, entre autres, que la convergence de l'estimation d'une dimension fractale est très sensible à l'aspect géométrique de l'attracteur dans l'espace d'état, ce qui rend le plongement primordial pour une bonne estimation.

Après avoir choisi la variable de plongement pertinente, souvent empiriquement et à partir de l'expertise physique du processus, il faut déterminer quelle est la dimension minimale de l'espace de représentation du nouvel attracteur pour reproduire toute la dynamique du système d'origine sans ambiguïté topologique sur l'attracteur reconstruit. C'est ce qu'on appelle la *Dimension de Plongement.*

D'après le théorème de Takens [Takens 85], on peut considérer qu'une reconstruction est fiable si la dimension de plongement choisie D_e est deux fois plus grande que la dimension fractale de l'attracteur. On comprend par "fiable" que la reconstruction préserve les mesures des invariants. Cependant, des travaux plus récents comme [Ding 93] ont montré qu'une dimension de plongement $D_e > D_2$ est déjà suffisante pour conserver, dans l'espace de plongement, tous les invariants du système d'origine. Pour plus d'informations sur la fiabilité des reconstructions, voir [Rosenstein 94].

Diverses méthodes de plongement ont été proposées. La méthode des **coordonnées retardées** ou méthode des **retards** est la plus largement utilisée. Cette méthode est basée sur la génération des nouveaux états du système à partir de décalages temporels réalisés sur la série temporelle de la variable plongée. Ces décalages sont des multiples d'un retard de base noté τ.

Soit $x_{i=1\cdots N}$ une série temporelle acquise à intervalles de temps constants δt et D_e la dimension de plongement. Les vecteurs reconstruits $X_{n=1\cdots D_e}$ en utilisant un retard sur les acquisitions δi (qui correspond à un temps de Delay τ) sont obtenus par 3.1.

$$X_n^T = [x_{n\cdot\delta i} \quad x_{(n+1)\cdot\delta i} \ \cdots x_{N-(D_e-1)\cdot\delta i}]. \tag{3.1}$$

Selon le théorème de Takens le retard τ peut être choisi de façon arbitraire. Cependant cette valeur affecte fortement le résultat des estimations des dimensions fractales et des exposants de Lyapunov. Plusieurs approches ont été proposées en vue de choisir le retard qui convient pour à assurer la précision des estimations des invariants et leurs cohérences.

Enfin, notons que d'autres méthodes de plongement ont également été proposées dans la littérature comme, par exemple, la reconstruction de l'espace tangent [Xu 09], [Darbyshire 96].

3.2.3.1 Choix de la variable plongée

Une des principales difficultés pour caractériser un système expérimental en régime chaotique est le fait qu'on a rarement accès à toutes les variables d'état et celles auxquelles on a accès sont soumises à des bruits de mesure. De plus, il est fréquent qu'un régime de fonctionnement ne développe pas sa dynamique de manière homogène sur l'ensemble des variables. Certaines sont relativement pauvres en information tandis que d'autres portent la partie la plus représentative de l'énergie et du contenu spectral qui règle le comportement dynamique.

A priori, le choix de la variable à plonger est sans importance pour l'estimation d'un invariant dans la mesure où chaque variable porte toute l'information sur le comportement dynamique. Toutefois, en raison d'un mauvais conditionnement de la variable, des difficultés dans l'estimation des invariants peuvent surgir. C'est le cas par exemple lorsque l'information utile est masquée par une dynamique régulière fortement redondante. Voir par exemple le commentaire de la figure 3.14. Il peut aussi que certaines variables présentent de singularités rendant impossible toute estimation dans certaines zones de l'espace des paramètres. Par exemple cela peut survenir lorsque le système subis une reduction d'ordre.

Cet état de fait a été constaté dans certaines situations pratiques. Afin de choisir une variable de plongement pertinente, l'étude présenté en [Letellier 05] propose une vision très intéressante et innovante basée sur la mesure de l'observabilité de la variable à choisir en établissant un lien entre observabilité et plongement.

3.2.3.2 Choix du retard

Il existe deux méthodes pour déterminer approximativement le retard de plongement adéquat (Delay). L'essentiel est de reconstruire un vecteur de coordonnées indépendantes. La première méthode consiste à évaluer la fonction d'autocorrélation et à choisir le retard qui correspond à sa première annulation. Ceci assure l'indépendance linéaire des coordonnées. La seconde méthode recherche le retard correspondant au premier minimum local de la fonction d'information mutuelle. L'avantage de cette méthode est de s'appuyer sur une notion d'indépendance plus générale que la précédente. En revanche, l'estimation de l'information mutuelle requiert un algorithme plus sophistiqué et davantage de temps de calcul. Cet algorithme a été proposé par [Fraser 86].

3.2.3.3 Choix de la dimension

Rappelons que le moteur étudié est modélisé par un système dynamique déterministe. Par conséquent, aucune intersection de trajectoires dans l'espace d'état n'est possible. Dans ces conditions, la dimension de plongement à choisir est donc la dimension de l'espace permettant de représenter toutes les trajectoires et l'attracteur sans ambiguïté topologique, et en particulier ne faisant pas apparaître d'intersections. Cette dimension est toujours plus petite ou égale à la dimension réelle du système autonome équivalent. La détermination de la dimension de plongement est réalisée à l'aide de l'algorithme des *faux plus proches voisins*(***false nearest neighbors***) proposé par Abarbanel et Kennel [Kennel 92], [Abarbanel 93], [Kennel 02], [Hegger 99a].

Pour implémenter l'algorithme des plus proches voisins avec de bonnes performances en termes de temps de calcul, on utilise un algorithme de tri rapide, le KD-three [Sproull 91].

3.2.4 Dimensions fractale

Les objets fractals constituent une classe très particulière du point de vue de la géométrie. Ces sont des objets dont la dimension, au sens topologique, est non entière. La géométrie fractale telle que nous la connaissons a été développée à partir des travaux du mathématicien franco-américain Benoît Mandelbrot dans son article fondateur "Formes nouvelles du hasard dans les sciences" [Mandelbrot 73]. Toutefois, les travaux précurseurs de mathématiciens de la fin du $19^{ème}$ siècle et du début du $20^{ème}$ avaient ouvert la voie à une notion de dimension moins restrictive. On peut penser entre autres à Felix Hausdorff et Abram Samoilovitch Besicovitch dont la définition de la dimension s'avérera être fractale a posteriori. La définition mathématique rigoureuse de la dimension de Hausdorff-Besicovitvh peut être trouvée en [Hausdorff 19].

On rapporte souvent la complexité d'un système physique au nombre de ses degrés de liberté. Il convient cependant de faire la différence entre, d'une part, la dimension de l'espace de représentation de l'état du système et, d'autre part, la dimension effective de l'espace dans lequel s'inscrit sa dynamique. Les systèmes dissipatifs ont en effet tendance à s'auto-organiser en diminuant leur entropie. Toutefois, pour détecter et quantifier le chaos, il est nécessaire de pouvoir distinguer un comportement irrégulier issu d'un système dynamique, souvent de faible dimension, d'un comportement irrégulier typiquement stochastique (dimension infinie).

Un attracteur chaotique est un objet géométrique extrêmement complexe caractérisé par une dimension fractale. Estimer la dimension de l'attracteur est une des méthodes permettant de détecter le chaos dans la dynamique. Cette mesure du chaos est liée à la notion d'entropie et constitue un indicateur du niveau de complexité de l'attracteur ainsi que de l'existence d'une propriété d'autosimilarité. Différentes dimensions fractales ont été définies. Certaines peuvent être estimées efficacement eu égard au temps de calcul et à la précision. C'est le cas de la *dimension de capacité* et de la *dimension de corrélation*. Pour cette raison, nous les utiliserons préférentiellement dans la suite ce mémoire. De plus, elles peuvent être estimées non seulement à partir de la trajectoire mais aussi à partir de la section de Poincaré.

3.2.4.1 Dimension de Hausdorff-Besicovitch

La notion de dimension introduite par Hausdorff ne conduit pas directement à l'évaluation numérique pratique de la dimension au sens topologique du terme. La dimension de Hausdorff n'est pas immédiatement exploitable pour être évaluée par une méthode algorithmique.

On considère que A est un ensemble fractal dont on souhaite déterminer la dimension. $C(r, A) = \beta_1, \beta_2 ... \beta_k$ étant un ensemble de boules de diamètre $\delta(\beta_i) = \delta_i < r$ tel que $A \subset \cup_{i=1}^{k} \beta_i$.

Par conséquent, la fonction

$$\Gamma(A, D, r) = \inf_{C(r,A)} \sum_i \delta_i^D, \tag{3.2}$$

est en quelque sorte une mesure à grain grossier de A. Il s'agit de la mesure de Hausdorff. La limite de $\Gamma(A, D, r)$ lorsque $r \to 0$ dégénère au point $D = D_H$. Ce point de dégénérescence, D_H, définit la dimension de Hausdorff [Theiler 90].

$$\Gamma(A, D) = \limsup_{r \to 0} \Gamma(A, D, r) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad D < D_H \\ 0 & \text{si} \quad D > D_H \end{cases} \tag{3.3}$$

La dimension au sens de Hausdorff est définie par 3.4.

$$D_H = inf\{D : \Gamma(A, D) = 0\}. \tag{3.4}$$

3.2.4.2 Dimension de capacité

La principale difficulté s'opposant à l'évaluation numérique de la dimension de Hausdorff est la fonction inf à évaluer sur tout l'ensemble des possibles de $C(A, r)$. Si on remplace les collections de boules de tailles variables $\delta_i < r$ par un pavage d'hypercubes de taille fixe r et en notant $n(r)$ le nombre d'hypercubes non vides, on obtient une mesure qui constitue une limite supérieure de la mesure de Hausdorff.

$$\Gamma(A, D, r) = \inf_{C(r,A)} \sum_i \delta_i^D \leq \sum_i r^D = n(r) \cdot r^D. \tag{3.5}$$

De la relation 3.5 et 3.4, on déduit :

$$n(r) \sim r^{-D_0} \tag{3.6}$$

On définit ainsi une nouvelle dimension, appelée *Dimension de Capacité* et notée D_0.

$$D_0 = \lim_{r \to 0} \frac{\log(1/n(r))}{\log(r)} \tag{3.7}$$

La dimension de capacité est une limite supérieure de la dimension de Hausdorff mais, dans la plupart des cas, la dimension de capacité, prend la même valeur que la dimension de Hausdorff. L'algorithme utilisé pour l'évaluer est connu sous l'appellation ***box-counting*** [Foroutan-pour 99], [Kruger 96].

3.2.4.3 Dimension d'information

Étant donné que la dimension de capacité est un concept purement géométrique, cette mesure ne donne aucune information sur la dynamique du système en général et en particulier sur la fréquence de visite des $n(r)$ cubes. Or, dans le cas d'un attracteur chaotique, la trajectoire visite les hypercubes avec une fréquence qui varie beaucoup de l'un à l'autre. Cependant, bien que la dimension de capacité ne soit pas apte à caractériser la dynamique sur un attracteur étrange, l'approche ***box-counting*** est toujours utilisée pour l'évaluation de la dimension fractale car elle est très performante au niveau algorithmique. Voir [Leibovitch 89].

Soit un attracteur étrange approximé par un nombre fini N de points sur l'espace R^n. Soit un ensemble de hypercubes de côté r capable de couvrir l'attracteur. En notant $N_i(r)$ le nombre de points situé dans la hypercube i, la probabilité, à un instant donné, que cette hypercube soit visité par la trajectoire est exprimée par 3.8.

$$P_i(r) = \frac{N_i(r)}{N} \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{n(r)} P_i(r) = 1 \tag{3.8}$$

L'entropie de l'information, connue sous le nom d'entropie de Shannon, est formulée par l'équation 3.9 :

$$I(r) = -\sum_{i=1}^{n(r)} P_i(r) \cdot log P_i(r) \tag{3.9}$$

La quantité I(r) peut être interprétée comme la valeur moyenne de l'information nécessaire pour spécifier l'état d'un système (l'attracteur en question) avec une précision r. Quand $I(r)$ est formulée avec un logarithme à base 2 son unité est le ***bit*** d'information. La *Dimension d'Information* s'en déduit par 3.10.

$$D_1 = \lim_{r \to 0} \frac{I(r)}{log(1/r)} = \lim_{r \to 0} \sum_{i=1}^{n(r)} \frac{P_i(r) \cdot log P_i(r)}{log(r)} \tag{3.10}$$

Clairement, si l'attracteur est uniformément distribué dans l'espace, alors $P_i(r) = 1/n(r)$ et la dimension d'information coïncide avec la dimension de capacité : $D_1 = D_0$.

3.2.4.4 Dimension de corrélation

La dimension de corrélation est sans doute la dimension fractale la plus utilisée par les chercheurs dans les domaines applicatifs de la théorie du chaos. A priori, il n'y a guère d'avantages théoriques à cette dimension sur la dimension d'information si ce n'est qu'elle exploite la densité des solutions périodiques instables plongées dans tout attracteur chaotique. L'avantage déterminant de la dimension de corrélation réside dans la simplicité de son implantation algorithmique puisqu'elle ne fait appel qu'à la notion de distance entre points.

L'intérêt de cette dimension fractale tient également au fait que, selon [Ding 93], la reconstruction d'un attracteur par la méthode des retards serait possible à la simple condition que la dimension de plongement $D_e \geq D_2$ (voir section 3.2.3). Cela constitue un point de vérification supplémentaire de la cohérence des estimations réalisées à partir de séries temporelles.

Soit $H(u)$, la fonction de ***Heaviside*** définie en 3.11 :

$$H(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u < 0 \\ 1 & si \quad u \geq 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

L'algorithme proposé par Procaccia et Grassberger [Grassberger 83a], [Grassberger 83b], [Grassberger 83c], [Grassberger 84] approxime la fonction de corrélation intégrale d'une série temporelle finie par 3.12 :

$$C(r) = \frac{2}{N \cdot (N-1)} \sum_{p \neq q} H[r - \|x_p - x_q\|] \tag{3.12}$$

La définition de la dimension de corrélation s'en déduit 3.13 :

$$D_2 = \lim_{r \to 0} \frac{logC(r)}{log(r)} \tag{3.13}$$

Là encore une approche probabiliste de cette dimension fractale est possible. Soit $P_i(p,r)$ la probabilité que la hypercube i de rayon r soit occupé par un point x_p. Notons $P_i(q/p,r)$ la probabilité que ce cube soit occupé par le point x_q sachant que x_p l'occupe déjà. La probabilité que deux points quelconques occupent conjointement la même hypercube est donnée par :

$$P_i\left(p \cap q, r\right) = P_i(p,r) \cdot P_i(q/p,r) \tag{3.14}$$

Si les deux événements sont indépendants : $P_i(q/p,r) = P_i(p,r) \;\Rightarrow\; P_i(p \cap q, r) = P_i^2(p,r)$.
En définissant l'entropie à l'ordre 2,

$$I_2(r) = -log\left(\sum_{i=1}^{n(r)} P_i^2(p,r)\right) \tag{3.15}$$

on déduit la dimension de corrélation :

$$D_2 = -\lim_{r \to 0} \frac{I_2(r)}{log(r)} \tag{3.16}$$

3.2.4.5 Dimensions généralisées de Rényi

Comme cela a été indiqué, la dimension fractale d'information est le rapport entre l'entropie de Shannon $I_1(r)$ et le $log(r)$ quand $r \to 0$. Cependant, l'entropie de Shannon n'est elle-même qu'un cas particulier de l'entropie généralisée $I_q(r)$.

$$I_q(r) = \frac{1}{1-q} log\left(\sum_{i=1}^{n(r)} P_i(r)^q\right) \tag{3.17}$$

De l'entropie généralisée, on peut déduire une suite de dimensions fractales appelées dimension généralisées de Rényi définies par 3.18.

$$D_q = -\lim_{r \to 0} \frac{I_q(r)}{log(r)} \tag{3.18}$$

Les trois premières dimensions de Rényi coïncident avec les dimensions définies précédemment. Le cas $q = 0$ correspond à la dimension de capacité. Le cas particulier $q = 1$ constitue une singularité dans la formule d'entropie généralisée, singularité qui peut être levée en appliquant la règle de l'Hospital pour retrouver l'expression de l'entropie de Shannon 3.9 et par là celle de la dimension d'information. Le cas $q = 2$ aboutit à l'expression de la dimension de corrélation.

3.2.4.6 Relation d'ordre

À partir de la définition de la dimension d'information 3.10, il est facile de vérifier que, si tous les cubes sont équiprobables, alors la dimension d'information est égale à la dimension de capacité 3.7. Il s'agit cependant d'un cas particulier. Plus généralement $D_1 \leq D_0$. De même, la relation d'ordre théorique entre la dimension d'information et la dimension de corrélation est : $D_2 \leq D_1$. Par conséquent la relation d'ordre entre les trois premières dimensions fractales est la suivante :

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0. \tag{3.19}$$

L'extension de la notion de dimension fractale aux ordres supérieurs, par les dimensions de Rényi, permet de préciser l'estimation de la dimension fractale au sens absolu du terme. En effet, la relation d'ordre précédente peut être généralisée :

$$D_q \leq D_p \qquad si\ q > p. \tag{3.20}$$

Par conséquent, si les dimensions de Rényi convergent aux ordres supérieurs, alors elles définissent de manière unique une limite supérieure de la dimension fractale de l'attracteur. En revanche, si la série des dimensions de Rényi ordonnées ne convergent pas, alors il faut en conclure que l'attracteur n'est pas simplement fractal mais qu'il possède une structure multi-fractale.

3.2.5 Exposants de Lyapunov

3.2.5.1 Définition

Dans un système chaotique, les trajectoires divergent exponentiellement. Le taux de divergence exponentielle entre les trajectoires constitue une des mesures qui caractérisent le comportement chaotique et permettent de le détecter. Il conditionne l'aptitude à prévoir le comportement du système à plus ou moins long terme. Par définition les exposants de Lyapunov mesurent ce taux de divergence ou convergence, entre deux trajectoires dans l'espace d'état. Ils sont directement liés à la sensibilité du système aux conditions initiales. Eu égard aux exposants de Lyapunov, l'attracteur chaotique est caractérisé par l'existence d'au moins un exposant positif, un exposant nul et tous les autres exposants négatifs. De plus, la stabilité de la dynamique chaotique, c'est-à-dire l'existence d'un ensemble chaotique attracteur, nécessite que la somme de tous les exposants soit négative. On peut donc en déduire que la dimension minimale de l'espace d'état permettant l'existence d'une solution chaotique, pour un système différentiel autonome en temps continu, est égale à trois. Par extension de la notion de direction propre des systèmes linéaires, on peut dire que, localement ou en tout point, l'attracteur a une direction d'étirement (exposant positif), une ou plusieurs autres directions de compression (exposants négatifs) et une direction sur laquelle les rapports entre les trajectoires ne s'altèrent pas (exposant nul). Cependant, le mécanisme de compression n'est pas suffisant pour assurer à lui seul que l'attracteur est borné puisqu'il existe au moins un exposant positif à l'origine de l'étirement. Le troisième mécanisme indispensable à la stabilité de l'attracteur [5] est le repliement. Ce repliement intervient au tant que non-linéarité essentielle obligeant le flot divergeant à changer brutalement de direction pour que les trajectoires restent confinées dans une région bornée de l'espace. C'est ce troisième mécanisme qui permet de décorréler les trajectoires [Abarbanel 91].

5. note de bas de page : Par abus de langage puisque par définition un attracteur est stable. Il serait préférable de parler de la stabilité de l'ensemble chaotique.

L'étirement et la compression sont deux mécanismes directement liés à la capacité du système à créer ou à détruire de l'information au cours du temps. C'est la quantification de cette capacité, par une mesure, qui définit l'horizon de prédiction de la dynamique, à compter d'une condition initiale. Comme cela a déjà été expliqué, les dimensions fractales constituent aussi un des indices de l'occurrence du comportement chaotique.

Kaplan et Yorke en [Kaplan 79a] ont conjecturé que la dimension fractale d'un attracteur étrange peut être approximée à partir du spectre des exposants de Lyapunov. Cette dimension, appelée dimension de Kaplan-Yorke ou dimension de Lyapunov, est définie par 3.21 ou j est tel que $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$.

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{i+1}|} \tag{3.21}$$

Il est intéressant de tenter un rapprochement entre la dimension de Lyapunov, introduite par la conjecture de Kaplan-Yorke, et les dimensions fractales définies dans la section précédente.

Une première comparaison de la dimension de Lyapunov avec la dimension de capacité montre que cette dernière lui est sensiblement supérieure. De fait, il avait été également conjecturé que la dimension de Lyapunov constituait une approximation de la dimension d'Information [Kaplan 79b]. Ledrappier a vérifié que la *dimension de Lyapunov* est génériquement équivalente à la dimension d'information D_1 de part sa nature probabiliste, [Ledrappier 81]. A partir de la relation d'ordre introduite en 3.19, on peut s'attendre à ce que la dimension de Lyapunov soit une limite supérieure de la dimension de corrélation, c'est-à-dire $D_L \geq D_2$, [Chlouverakisa 05].

En complément de l'approche probabiliste précédente, on notera également l'approche d'avantage géométrique de la dimension de Lyapunov présentée dans [Parker 87].

3.2.5.2 Principe de l'estimation

Les exposants de Lyapunov sont autant d'invariants caractérisant la dynamique chaotique le long de l'attracteur et leurs estimations constituent donc également des indices importants du chaos au même titre que les dimensions fractales de l'attracteur lui même. Cependant, estimer le spectre des exposants de Lyapunov avec précision est une tâche ardue, particulièrement lorsquelle doit être opérée à partir de séries temporelles.

Dans ce paragraphe, nous traiterons d'abord de la méthode d'estimation des exposants de Lyapunov en exploitant le système différentiel qui préside à la dynamique. Nous présenterons dans les paragraphes suivants différentes méthodes d'estimation ayant pour buts de réduire l'incidence des imprécisions du calcul numérique et d'assurer la robustesse des estimations. Cependant, il est fréquent que le système d'équations du modèle ne soit pas connu. Dans ce cas, l'estimation des exposants de Lyapunov doit être réalisée à partir de séries temporelles, ce qui pose des problèmes spécifiques qui seront abordés dans la section 3.4.

Le processus d'estimation des exposants de Lyapunov à partir du système d'équations différentielles est basé sur le comportement du système variationnel associé au modèle dynamique.

Soit le système dynamique 3.22 autonome, non-linéaire de dimension n décrit par le champ vectoriel f, admettant un vecteur solution n dimensionnel y_i avec $i = 1 \cdots n$.

$$\dot{y}(t) = f(y(t)), \qquad y(0) = y_0, \tag{3.22}$$

où $y \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $t \in \mathbb{R}^+$.

Soit $Q = [q_1 \; q_2 \cdots q_n]^T$ le vecteur des coordonnées généralisées associées aux vecteurs z_j, $j = 1 \cdots n$, de la base orthonormale $\{z\}$ de l'espace n dimensionnel. En dérivant les deux termes du système 3.22 par rapport à Q, on obtient ce qu'on appelle le système variationnel :

$$\frac{d\dot{y}_i}{dq_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \quad \texttt{avec} \quad k = 1 \cdots n. \tag{3.23}$$

Á chaque élément y_i du vecteur d'état, on associe un vecteur variationnel Y_i décrivant la sensibilité de cette variable dans les directions associées aux coordonnées généralisées :

$$Y_i = \left[\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \right]. \tag{3.24}$$

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$ la matrice des dérivées de tous les éléments y_i par rapport à toutes les coordonnées q_j :

$$Y = [Y_1, Y_2, \cdots Y_n]^T. \tag{3.25}$$

On définit la matrice Jacobienne du champ f :

$$J_{i,j}(t) = \left[\frac{\partial f_i(y(t))}{\partial y_j} \right], \tag{3.26}$$

La loi de composition des dérivées 3.23 appliquée au système dynamique 3.22 permet de déduire le système variationnel suivant :

$$\dot{Y}(t) = J(t) \cdot Y(t). \tag{3.27}$$

L'intégration du système variationnel donne une matrice carrée de rang n portant les dérivées de toutes les variables d'état par rapport aux coordonnées généralisées. Le système étant non linéaire, cette matrice évolue au cours du temps, le long de la trajectoire. La base orthonormale $\{z\}$ doit donc être continûment adaptée pour maintenir l'indépendance des variables y_i. Soit $Y_j(t) = Y(t) \cdot z_j$ le vecteur dérivé de $y(t)$ dans la direction de z_j. Les nombres caractéristiques de Y sont définis par la relation :

$$\overline{\lambda}_j = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|Y_j(t)\|}{\|Y_j(0)\|} \right). \tag{3.28}$$

De plus selon Aleksandr Lyapunov, la base orthonormale $\{z\}$ est définie normale si la somme des nombres caractéristiques est minimale [Lyapunov 47]. Notons $\{b\}$ cette base normale :

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i(b_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i(z_i), \tag{3.29}$$

Si les nombres caractéristiques sont évalués sur une base normale, alors ils sont appelés exposants de Lyapunov. Il a aussi montré que la matrice fondamentale $Y(t)$, solution du système variationnel, est régulière si la relation 3.30 est vérifiée.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\texttt{det}\ Y(t)| < \infty \tag{3.30}$$

De plus, Oseledec, dans son travail "Théorème ergodique multiplicatif" [Oseledec 68], a prouvé que, si les vecteurs portés par les colonnes de $Y(t)$ constituent une **base normale** de l'espace - ce qui est ici supposé être le cas puisque le système variationnel sera défini sur la base $\{b\}$ normale - et si $Y(t)$ est une **matrice régulière**, alors les exposants de Lyapunov existent et son finis quel que soit l'écart initial $Y(0)$. Comme conséquence du théorème d'ergodicité d'Oseledec, les exposants de Lyapunov sont indépendants de la condition initiale $y(0)$ sur l'attracteur.

Par conséquent, la seule condition à respecter est l'orthonormalité de $Y(0)$. Cela nous permet de choisir la matrice identité comme condition initiale :

$$Y(0) = I_n. \tag{3.31}$$

3.2.5.3 Méthodes d'estimation basées sur le modèle différentiel

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que les méthodes applicables quand on dispose du modèle différentiel. Il existe plusieurs méthodes pour estimer numériquement les valeurs des exposants de Lyapunov. Ces méthodes se distinguent, d'une part, par les différents algorithmes d'orthonormalisation qui peuvent être appliqués et, d'autre part, par le type de données sur lesquelles ces algorithmes sont appliqués : soit directement à partir du système différentiel, soit à partir de séries temporelles simulées ou à partir de séries temporelles expérimentales bruitées.

La méthode la plus simple est sans doute l'algorithme de Wolf [Wolf 85]. L'idée de base consiste à observer l'évolution d'une petite sphère de perturbations initiales le long d'une trajectoire. Au cours du temps, cette sphère de perturbations évolue vers un ellipsoïde. Les exposants de Lyapunov correspondent aux moyennes temporelles du logarithme de l'étirement (ou contraction) des axes principaux de l'ellipsoïde. L'algorithme de Wolf approxime les exposants de Lyapunov par les normes des vecteurs générés par l'orthonormalisation de Gram Schmidt appliquée le long de la solution fondamentale du système variationnel. Pratiquement l'orthonormalisation ne peut pas être continue. Elle doit être appliquée à intervals de temps réguliers, c'est-à-dire après un certain nombre d'itérations.

Ces dernières années, d'importants efforts on été produits pour améliorer la précision de l'orthonormalisation, dont dépend finalement celle de l'estimation des exposants de Lyapunov. De ce point de vue, à partir du travail de Benettin ([Benettin 80]), il est apparu que les méthodes de factorisation QR était plus performantes. Les méthodes QR se divisent en deux lignes d'applications : la méthode QR discrète que nous présentons d'abord et la méthode QR continue qui sera présentée en suite. Malgré leur équivalence conceptuelle, leurs implémentations et leurs performances respectives, dans le cadre du calcul en précision finie, différent largement.

La solution fondamentale du système variationnel étant disponible, la factorisation $Y = QR$ est appliquée afin d'obtenir, d'une part, la matrice Q orthogonale et, d'autre part, R qui est diagonale supérieure, les éléments de sa diagonale étant positifs.

Q étant une matrice orthogonale, elle preserve la norme du produit avec un vecteur.

$$\|Q \cdot b_i\| = \|b_i\| \tag{3.32}$$

Par voie de conséquence, la relation suivante est vérifiée :

$$\overline{\lambda}_i = \lim_{t\to\infty} \log \|Y(t) \cdot b_i\| = \lim_{t\to\infty} \log \|R(t) \cdot b_i\| \tag{3.33}$$

Le but de ces méthodes est d'extraire le spectre de Lyapunov directement de la factorisation QR de la solution fondamentale $Y(t)$. Sachant que les exposants de Lyapunov sont portés par la diagonale de R(t).

a) Orthogonalisation et factorisation QR

La méthode d'orthogonalisation de la matrice $Y(t)$ joue un rôle essentiel dans la précision des estimations du spectre de Lyapunov. Comme cela a déjà été expliqué, le système dynamique étant non linéaire, il est nécessaire de redéfinir, à intervalle de temps régulier, la base orthogonale

$\{b_i\}$ sur laquelle $Y(t)$ doit être projetée. Ayant choisi la factorisation QR, il reste à choisir la méthode d'orthogonalisation permettant d'obtenir cette factorisation. Parmi différentes méthodes d'orthogonalisation [Von Bremen 97], nous avons retenu la méthode de Gram Schmidt modifiée et la méthode de Householder [Von Bremen 97].

La méthode classique d'orthonormalisation de Gram Schmidt (Annexe B.6.0.1) est réputée être numériquement instable (voir [Trefethen 97]) dans le cadre itératif imposé pour l'estimation du spectre de Lyapunov. En effet, l'accumulation des erreurs d'arrondis de cette méthode à chaque factorisation QR conduit à la perte de l'orthogonalité de la matrice Q. Pour cette raison, l'algorithme de Gram Schmidt a été modifié pour en améliorer la stabilité. Cependant, l'algorithme MGS (Gram Schmidt Modifié Annexe B.6.0.2) reste assez décevant quant à la précision de l'orthogonalisation. Pour obtenir un résultat de meilleure qualité, on préfère recourir à la méthode de Householder, présentée avec les deux précédentes en Annexe B.6.0.3.

Nous présenterons plus loin, dans la section 3.3, les performances comparées de la méthode QR discrète, associée aux méthodes d'orthogonalisation de Gram Schmidt et de Householder, ainsi que de la méthode QR continue.

Les questions relatives aux méthodes d'orthogonalisation étant reportées en annexe, et la comparaison des performances étant présentées plus loin, nous nous intéressons, dans les deux paragraphes suivants, uniquement aux méthodes d'estimation par la factorisation QR.

b) Algorithme QR discret

L'algorithme de calcul des exposants de Lyapunov par la factorisation QR discrète, utilisé dans notre travail, a été développé par [Chen 06].

Le système dynamique 3.22 étant intégré avec un certain pas, on pourrait trouver judicieux de procéder à la réorthonormalisation à chaque pas d'intégration. L'idée principale de cet algorithme consiste, au contraire, à espacer les réorthonormalisation d'un nombre de pas entier le long de la trajectoire de référence. Le système variationnel est intégré avec le même pas que le système dynamique. Seul le pas de réorthonormalisation est allongé dans le but de réduire l'imprécision induite par les erreurs d'arrondis. En effet, la précision des méthodes d'intégration numérique est directement liée à la taille du pas d'intégration. De manière à avoir une bonne approximation et à assurer la convergence de la solution numérique, il faut souvent adopter un pas d'intégration assez petit par rapport au temps total de simulation. Cependant, comme on le sait, un pas trop petit pose aussi problème en raison de la troncature numérique. Dans les systèmes complexes, surtout ceux qui sont candidats au comportement chaotique, ces erreurs dues à un pas trop grand ou trop petit occasionnent des résultats incohérents avec la réalité en ce sens que les solutions calculées et les solutions réelles peuvent être de natures différentes. De la même manière, la réorthonormalisation à chaque pas d'intégration, c'est-à-dire trop souvent, peut provoquer la perte d'orthogonalité par accumulation de ces erreurs. Cependant, la convergence rapide de tous les vecteurs dans la direction du plus grand étirement interdit d'attendre trop longtemps avant de réorthonormaliser les colonnes de $Y(t)$. Ces constatations nous imposent un compromis entre le pas minimal de réorthonormalisation pour réduire les erreurs d'arrondis et le pas maximal de réorthonormalisation avant que la matrice ne devienne singulière.

On considère le système variationnel 3.27 dont on souhaite obtenir la réponse sur l'intervalle $[0\ T]$. Soit h le pas d'intégration et $M \in \mathbb{N}$ le nombre de pas sur l'intervalle : $h = \frac{T}{M}$ $h, T \in \mathbb{R}$. Le temps prend ainsi ses valeurs discrètes sur l'ensemble $\{t_0 ... t_i ... t_M\}$, où $t_i = h \cdot i$. Si h est suffisamment petit, l'approximation suivante est vérifiée :

$$\dot{Y}(t) \approx J(y(t_i)) \cdot Y(t) \qquad t_i < t < t_{i+1}. \tag{3.34}$$

Par conséquent, la solution du système variationnel sur un pas d'intégration peut être approximée par :

$$Y(t_{i+1}) \approx \exp(h \cdot J(y(t_i))) \cdot Y(t_i). \tag{3.35}$$

Ce qui aboutit sur l'intervalle $[0\ T]$ à :

$$Y(T) = \lim_{h \to 0} \prod_{i=0}^{i=M-1} \exp(h \cdot J(y(t_i))) \cdot Y(0). \tag{3.36}$$

Soit $h^{'}$ le pas de réorthonormalisation et $L \in \mathbb{N}$, diviseur de M, tel que $L = \frac{h^{'}}{h}$, l'intervalle $[0\ T]$ peut être divisé en $\frac{M}{L} \in \mathbb{N}$ pas de réorthonormalisation.

En définissant les instants $t_k = k \cdot h \cdot L$, $k \in \mathbb{N}$ et $k = 0 \cdots \frac{M}{L}$, on peut dire que la réorthonormalisation sera réalisée aux instants t_k pour $k = 1 \cdots \frac{M}{L}$.

Donc, pour $Y(0) = I_n$ et en divisant le produit 3.36 en intervalles de longueurs $L \cdot h$:

$$Y(T) \approx \prod_{i=M-L}^{i=M-1} \exp(h \cdot J(y(t_i))) \cdots \prod_{i=kL}^{i=kL+L-1} \exp(h \cdot J(y(t_i))) \cdots \prod_{i=0}^{i=L-1} \exp(h \cdot J(y(t_i))). \tag{3.37}$$

C'est-à-dire :

$$Y(T) \approx \prod_{k=1}^{k=\frac{M}{L}} \left[\prod_{i=(k-1)L}^{i=k \cdot L-1} \exp(h \cdot J(y(t_i))) \right]. \tag{3.38}$$

On définit la matrice H_k, représentative de la dynamique sur un pas d'orthonormalisation :

$$H_k = \prod_{i=(k-1)L}^{kL-1} \exp(h \cdot J(y(t_i))), \tag{3.39}$$

Le système 3.37 devient,

$$Y(T) \approx \prod_{k=1}^{M/L} H_k \tag{3.40}$$

L'objectif est d'obtenir la factorisation QR de la matrice $Y(T)$ par une méthode récurrente. En effet, la simple factorisation QR des matrices H_k ne permet pas d'obtenir la factorisation QR de $Y(T)$ par un simple produit. Á la première étape, en décomposant $H_1 = Q_1 \cdot R_1$ on obtient :

$$Y(T) \approx H_{M/L} \cdots H_j \cdots Q_1 R_1 = Q_1 [Q_1^T H_{M/L} Q_1] \cdots [Q_1^T H_k Q_1] \cdots [Q_1^T H_2 Q_1] R_1 \tag{3.41}$$

Par conséquent toute matrice orthogonale Q est telle que $Q^T Q = I_n$.

$$Y(T) \approx Q_1 [Q_1^T H_{M/L} Q_1] \cdots [Q_1^T H_k Q_1] \cdots [Q_1^T H_2 Q_1] R_1 \tag{3.42}$$

Dans une deuxième étape, la factorisation QR doit être appliquée à la matrice $B_2 = Q_1^T H_2 Q_1 = Q_2 \cdot R_2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} Y(T) &\approx Q_1 Q_1^T H_{M/L} Q_1 \cdots Q_1^T H_k Q_1 \cdots Q_1^T H_3 Q_1 Q_2 R_2 R_1 \\ &\approx Q_1 Q_2 [Q_2^T Q_1^T H_{M/L} Q_1 Q_2] \cdots [Q_2^T Q_1^T H_k Q_1 Q_2] \cdots [Q_2^T Q_1^T H_3 Q_1 Q_2] R_2 R_1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

De façon générale la factorisation QR sera appliquée systématiquement aux matrices :

$$B_{k+1} \equiv Q_k^T Q_{k-1}^T \cdots Q_1^T H_{k+1} Q_1 Q_2 \cdots Q_k = Q_{k+1} R_{k+1} \quad (3.44)$$

A la dernière étape nous obtenons $Y(T)$s B_k, nous permet d'arriver à une factorisation équivalente à la fin d'intervalle T, c'est-à-dire :

$$Y(T) \approx Q_1 Q_2 \cdots Q_{\frac{M}{L}} R_{\frac{M}{L}} \cdots R_2 R_1 = Q \cdot R \quad (3.45)$$

On rappelle que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure qui porte sur sa diagonale les produits des éléments des diagonales des deux matrices. Il vient :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \prod_{k=1}^{\frac{M}{L}} R_{k_{1,1}} & \mathbf{R}_{1,2} & \cdots & \cdots & \mathbf{R}_{1,n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \prod_{k=1}^{\frac{M}{L}} R_{k_{i,i}} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{R}_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \prod_{k=1}^{\frac{M}{L}} R_{k_{n,n}} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Par conséquent les exposants de Lyapunov peuvent être estimés en divisant l'accumulation logarithmique des éléments des diagonales des matrices R_k par le temps d'intégration :

$$\lambda_i = \frac{1}{M \cdot h} \cdot \sum_{k=1}^{\frac{M}{L}} log(R_{k_{i,i}}). \quad (3.47)$$

Les développement qui precedent n'ont d'intérêts dans la mesure où ils nous permet maintenant de préciser notre contribution à cet algorithme. En effet, comme on l'aura compris, ce n'est pas tant la solution $Y(t)$ du système variationnel qui nous importe, pour estimer le spectre de Lyapunov, que l'accumulation des comportements locaux de ce système sur les intervalles $[t_k,\ t_{k+1}]$.

Z.-M. Chen a organisé la résolution de l'algorithme QR discret de la manière suivante. D'une part, il évalue la trajectoire du système dynamique 3.22 $y(t)$ en utilisant un noyau intégrateur du quatrième ordre (Adams-Bashforth) :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} \cdot [55f(x_n) - 59f(x_{n-1}) + 37f(x_{n-2}) - 9f(x_{n-3})]. \quad (3.48)$$

D'autre part, pour le système variationnel, il évalue les matrices H_k en utilisant, à chaque pas d'intégration, un développement en série de Taylor des exponentielles des matrices 3.39.

$$\exp(h \cdot J(x)) = I_n + \sum_{i=1}^{16} \frac{h^i}{i!} \cdot [J(x)]^i + \mathcal{R}_{16} \tag{3.49}$$

On remarque que les développements sont étendus jusqu'à l'ordre seize, ce qui implique une masse de calcul importante. Cet ordre élevé est rendu nécessaire par l'accumulation des restes à chaque pas d'intégration, ce qui conduirait sinon, selon la longueur du pas d'orthonormalisation, à une forte imprécision sur H_k.

c) Amélioration de l'implémentation de l'algorithme

Notre contribution, à ce niveau, consiste à s'affranchir des développements en série, imprécis eu égard au temps de calcul qu'ils requièrent. Pour cela, nous proposons d'évaluer les matrices H_k sur un pas d'orthonormalisation en remarquant que H_k est solution du système différentiel suivant :

$$\dot{H}(t) = J(y(t)) \cdot H(t), \qquad H(0) = I_n \tag{3.50}$$

On note que la condition initiale $H(0) = I_n$ équivaut à fixer les conditions initiales $Y(t_k) = I_n$, ce qui est toujours possible en vertu du théorème d'ergodicité d'Oseledec 3.31.

Nous proposons donc d'évaluer les matrices H_k en utilisant le même noyau intégrateur que celui utilisé pour résoudre le système dynamique 3.22 et trouver la trajectoire de référence $y(t)$.

Nous commençons par valider notre programme en évaluant le spectre de Lyapunov sur l'attracteur de Lorenz et en le comparant au spectre de référence dont les valeurs sont publiées. Ensuite, pour apprécier l'avantage de notre approche en termes de précision ou de temps de calcul, nous présentons des comparaisons de performances basées sur l'estimation du spectre de Lyapunov du même attracteur.

Afin de valider notre implémentation améliorée nous avons choisi d'évaluer les exposants de Lyapunov pour le système d'équations de Lorenz :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & \sigma \cdot (x_2 - x_1) \\ \dot{x_2} & = & \alpha \cdot x_1 - x_1 \cdot x_3 - x_2 \\ \dot{x_3} & = & x_1 \cdot x_2 - \beta \cdot x_3. \end{array} \right. \tag{3.51}$$

En choisissant le paramétrage habituel : $\sigma = 10,0$, $\alpha = 28,0$ et $\beta = \frac{8}{3}$ ([Peitgen 92]). Théoriquement, la somme des exposants de Lyapunov doit être égale à le trace du Jacobien, c'est-à-dire, $\sum \lambda_i = Trace(J) = -\sigma - 1 - \beta = -13,6667$. Les valeurs des exposants de Lyapunov pour cet attracteur sont : $\lambda_1 = 0.906$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = -14.572$.

En utilisant notre méthode, avec l'algorithme de Runge-Kutta, un pas d'intégration égal à $h = 1/256\ s$ pour 999 secondes simulées et un pas d'orthonormalisation égal à $L = 64 \cdot h = 0,25\ s$, le temps de simulation est de $2,96\ s$. Les valeurs obtenues pour les exposants de Lyapunov sont respectivement : $\lambda_1 = 0,9043$, $\lambda_2 = 2,3 \cdot 10^{-3}$ et $\lambda_3 = -14,5732$ dont la somme est égale à $\Sigma\lambda_i = -13,6666$.

Le tableau 3.1 qui résume ces résultats confirme notre programmation.

	λ_1	λ_2	λ_3	$\sum \lambda_i$
Théoriques	0,906	0,0	-14,572	-13,6667
Estimés	0,9043	$2,3 \cdot 10^{-3}$	-14,5732	-13,6666

Table 3.1 – Comparaison des spectres de Lyapunov théorique et estimé

Le tableau 3.2 présente les résultats de simulation pour la résolution du système variationnel en utilisant l'expansion en série de Taylor de la méthode de CHEN. Cette simulation a été réalisée avec un pas de calcul des matrices H_k $h = 1/256$ s et un pas d'orthonormalisation de $0,25$ s. Les matrices H_k ont été évaluées par l'équation 3.49 avec des développements en série de longueur n variable.

n	Temps de calcul [s]	λ_1	λ_2	λ_3	$\sum \lambda_i$
2	1,404	1.0502	0.1706	-15.0480	-13.8273
3	1,778	0.9178	-0.0113	-14.5630	-13.6565
4	2,558	0.9043	0.0022	-14.5734	-13.6669
5	3,151	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666
6	4,150	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666
8	6,770	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666
10	10,35	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666
12	14,68	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666
14	20,46	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666
16	27,27	0.9043	0.0023	-14.5732	-13.6666

TABLE 3.2 – Comparaison des spectres de Lyapunov par la méthode de CHEN

Les deux méthodes ont été implémentées avec l'orthonormalisation HQR discrète. On remarque qu'à partir de $n = 5$ les résultats obtenus par la méthode de CHEN sont identiques aux nôtre.

Nous proposons maintenant d'évaluer les performances de notre algorithme en l'appliquant au modèle harmonique du moteur linéaire à réluctance variable à la fréquence $f = 1/T = 4,20$ Hz. Pour le tableau 3.3, la trajectoire de référence ainsi que le système variationnel ont été simulés par une intégration Runge-Kutta avec un pas d'integration $h = T/2^i$ s pour $i = 7 \cdots 13$. Au total 1999 périodes sont simulés à chaque fois. Seules les 999 dernières périodes sont conservées ; les 1000 premières sont considérées transitoires. Le pas d'orthonormalisation est égal à $L = 128 \cdot h$ s.

T/h	λ_1	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	$\sum \lambda_i$
128	3,2404	-4,5223	-174,5679	-178,5466	-184,4640	-5389,0
256	2,9715	-4,2953	-337,4526	-366,8056	-390,4524	-1096,0
512	3,0007	-4,3912	-422,3579	-499,3702	-550,1927	-1473,3
1024	3,0635	-4,3909	-421,7640	-500,6991	-558,0159	-1481,8
2048	3,1432	-4,5255	-422,9329	-499,0795	-557,1841	-1480,6
4096	3,0303	-4,4719	-422,4332	-499,3108	-557,8585	-1481,0
8192	3,0074	-4,3735	-417,7075	-500,3379	-561,8806	-1481,3

TABLE 3.3 – Comparaison à pas variable des spectres de Lyapunov par notre méthode.

On ne doit pas s'étonner de l'absence de la colonne λ_2 en effet, contrairement au système de Lorenz qui est autonome, notre modèle est non-autonome et il est excité par une fonction périodique. En consequence, il n'est pas nécessaire de le modéliser de façon autonome en dimension six. Un système variationnel en dimension cinq suffit en sachant que l'exposant correspondant à la fonction d'excitation est nécessairement nul et n'a donc pas besoin d'être calculé. La dernière colonne du tableau 3.3 qui évalue la somme des exposants ainsi que la figure 3.3 nous conduisent à retenir comme spectre de référence les valeurs de la ligne grisée pour un pas de $h = T/2048$.

Le tableau 3.4 évalue les performances de la méthode de CHEN sur plusieurs critères. Les

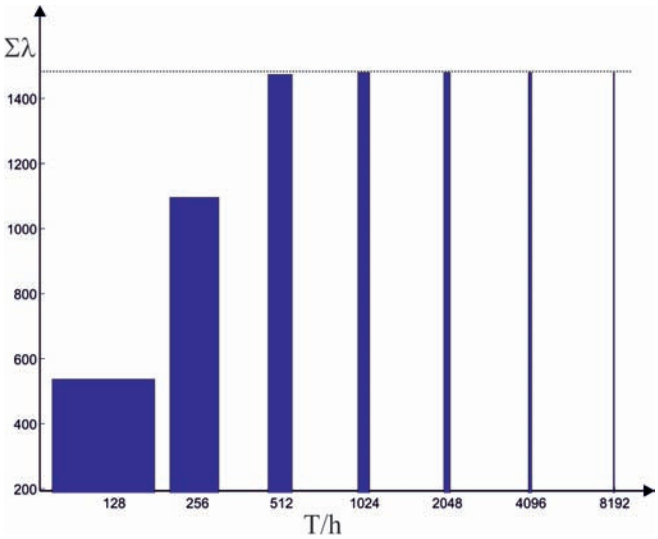


FIGURE 3.3 – Somme des exposants de Lyapunov vs. nombre de pas d'intégration par période.

développements en série des matrices H_k sont évalués avec un pas $h = T/2048$ et pour différents ordres de développements. Il reporte les temps de calcul ainsi que les erreurs relatives sur chaque exposant. Ces erreurs sont évaluées par rapport aux références indiquées dans le tableau 3.3. Les deux dernières colonnes indiquent l'erreur relative sur la somme des exposants ainsi que la somme quadratique des erreurs individuelles.

On note que pour un développement à l'ordre quatre le temps de calcul de spectre par la méthode de CHEN, soit 36 s, est légèrement supérieur à celui qui nous avons obtenu par notre algorithme pour calculer le spectre de référence, soit 33 s. Á ce niveau l'algorithme de CHEN requiert $9,1\%$ de temps de calcul supplémentaire. Cependant, pour approcher le spectre de référence avec une plus grande précision, l'ordre de développement doit être porté à cinq. C'est en effet à cet ordre que l'erreur sur la somme des exposants ainsi que la somme des erreurs quadratiques sont minimales. Á ce niveau, l'algorithme de CHEN consomme $36,4\%$ de temps supplémentaire. Au delà, même si la somme des exposants reste constante, on constate d'importantes dégradations des précisions individuelles sur les exposants. Enfin nous pouvons vérifier qu'à partir de l'ordre douze, préconisé par CHEN, les résultats n'évoluent plus alors même que temps de calcul explose.

Á noter que tous les temps de calcul indiqués incluent la simulation de la trajectoire de référence $y(t)$. L'algorithme utilisé pour le calcul des exposants de Lyapunov du système dynamique non-autonome, excité par une fonction périodique, est présenté en Annexe B.4. Pour tous les calculs et tableaux, la factorisation QR a été réalisée en utilisant l'algorithme HQR bien que l'algorithme de Gram-Schmidt modifié aurait également pu convenir.

d) Algorithme QR continu

Soit $Y(t) = Q(t) \cdot R(t)$ la factorisation unique de la réponse du système variationnel 3.27. Le principal problème pour le calcul des exposants de Lyapunov par les méthodes discrètes est la difficulté de préserver l'orthogonalité de la matrice Q à chaque pas d'intégration du système variationnel 3.27, [Von Bremen 01]. L'algorithme QR continu a été proposé afin de résoudre ce problème. Dans cet algorithme, l'orthogonalité de Q est maintenue de façon continue à chaque

n	**Temps[s]**	$\epsilon_1(\%)$	$\epsilon_3(\%)$	$\epsilon_4(\%)$	$\epsilon_5(\%)$	ϵ_6 $(\%)$	$\epsilon_{\sum\lambda_i}(\%)$	$\sum(\epsilon_i)^2(\%)$
2	26,0	-0.0610	0.2579	-2.3942	-3.4911	-4.2912	-3,47	$3,64 \cdot 10$
3	29,9	-0.0011	-0.0010	0.0047	0.0786	0.1565	0.0867	$3,0 \cdot 10^{-2}$
4	36,0	0	0	-0.0212	-0.0481	0.0543	-0.0018	$5,7 \cdot 10^{-3}$
5	45,0	0	0	-0.0110	-0.0112	0.0182	-5.8096e-005	$5,8 \cdot 10^{-4}$
6	55,0	0	0	0.0454	-0.0257	-0.0116	-5.8096e-005	$2,8 \cdot 10^{-3}$
8	83,9	0	0	0.0952	-0.0065	-0.0665	-5.8096e-005	$13,5 \cdot 10^{-3}$
10	123,4	0	0	0.0553	-0.0159	-0.0279	-5.8096e-005	$4,1 \cdot 10^{-3}$
12	161,1	0	0	0.1043	-0.0093	-0.0710	-5.8096e-005	$16,0 \cdot 10^{-3}$
14	336,0	0	0	0.1043	-0.0093	-0.0710	-5.8096e-005	$16,0 \cdot 10^{-3}$
16	599,0	0	0	0.1043	-0.0093	-0.0710	-5.8096e-005	$16,0 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.4 – Performances comparées de l'algorithme de CHEN.

pas d'intégration. L'idée est de ne pas résoudre le système variationnel directement mais plutôt après la factorisation $Y = QR$. Dieci, [Dieci 94], a montré que l'orthogonalité des tenseurs de rotation Q dans la méthode QR continue peut être préservée en utilisant un simple algorithme d'intégration de type Runge Kutta :

$$\dot{Y} = \dot{Q} \cdot R + Q \cdot \dot{R} = J \cdot Q \cdot R. \tag{3.52}$$

En multipliant à gauche par Q^T et à droite par R^{-1}, on obtient :

$$Q^T \cdot \dot{Q} + \dot{R} \cdot R^{-1} = Q^T \cdot J \cdot Q. \tag{3.53}$$

La matrice R étant triangulaire supérieure, R^{-1} et $\dot{R}$ sont également triangulaires supérieures et par consequent le produit $\dot{R} \cdot R^{-1}$ l'est aussi. On remarque de plus que la matrice $Q^T \cdot \dot{Q}$ est antisymétrique (Annexe C.1).

Comme cela a été établi en B.1, les exposants de Lyapunov sont intrinsèquement liés, à long terme, aux éléments de la diagonale de $R(t)$.

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot log(R_{i,i}). \tag{3.54}$$

Dans l'équation 3.53, l'antisymétrie de $Q^T \cdot \dot{Q}$ implique :

$$(\dot{R} \cdot R^{-1})_{i,i} = (Q^T \cdot J \cdot Q)_{i,i}. \tag{3.55}$$

Par dérivation :

$$\frac{d}{dt} log(R_{i,i}) = \frac{\dot{R}_{i,i}}{R_{i,i}} = (Q^T J Q)_{i,i}. \tag{3.56}$$

On en déduit :

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (Q^T J Q)_{i,i} dt. \tag{3.57}$$

Il reste à connaître l'évolution de $Q(t)$ le long de la trajectoire pour calculer l'intégrale.

Définissons la matrice antisymétrique $S(t)$ comme suit :

$$S_{i,j}(t) = \begin{cases} (Q^T \cdot J \cdot Q)_{i,j} & si \quad i > j, \\ 0 & si \quad i = j. \\ -(Q^T \cdot J \cdot Q)_{j,i} & si \quad i < j, \end{cases} \tag{3.58}$$

Dans l'équation 3.53, puisque $\dot{R} \cdot R^{-1}$ est triangulaire supérieure, alors :

$$[Q^T \cdot \dot{Q}]_{i,j} = [Q^T \cdot J \cdot Q]_{i,j} = S_{i,j}(t) \; \forall \; i > j. \tag{3.59}$$

Par conséquent, puisque S(t) est aussi antisymétrique, par définition, on en déduit :

$$Q^T(t) \cdot \dot{Q}(t) = S(t). \tag{3.60}$$

On obtient ainsi un système différentiel qui preserve l'orthogonalité de sa solution $Q(t)$:

$$\dot{Q}(t) = Q(t) \cdot S(t). \tag{3.61}$$

Il suffit d'intégrer numériquement ce système.

La section 3.4 présentera une comparaison des trois méthodes : Gram-Schmidt modifiée, HQR discrète et QR continue. D'autres travaux concernant les méthodes d'estimation des exposants de Lyapunov et les algorithmes d'orthonormalisation peuvent être approfondis dans [Christiansen 97] et [Lu 05]. Des analyses détaillées des méthodes QR appliquées aux systèmes discrets et continus sont présentées en [Dieci 95], [Dieci 97], [Dieci 03], [Dieci 05], [Dieci 06]. Une comparaison entre ces méthodes d'orthonormalisation a été publiée en [De Castro 10a].

3.2.5.4 Exposants de Lyapunov et séries temporelles

Sur le terrain expérimental, l'estimation des exposants de Lyapunov est encore plus ardue. En effet, les donnés expérimentales sont acquises sous forme de séries temporelles souvent soumises à des incertitudes dues aux bruits de mesures ou aux bruits électroniques qui réagissent eux-mêmes sur les circuits de commande. Comme cela a été expliqué, les exposants de Lyapunov constituent des invariants de la dynamique sur l'attracteur indépendamment de l'instant initial et de l'espace de représentation. Il peuvent donc, théoriquement, être estimés directement sur l'attracteur original. Cependant, les algorithmes d'estimation sont plus performants lorsque ils sont appliqués sur l'attracteur reconstruit après plongement. Parmi diverses méthodes, on peut citer [Wolf 85], améliorée plus tard et référencé par plusieurs travaux comme [Abarbanel 92], [Darbyshire 96], [Eckmann 86], [Eckmann 92], [Rosenstein 93] [Sauer 99] et [Sauer 98]. Dans cet étude nous utiliserons la méthode proposée par [Hegger 99b] en raison de sa robustesse.

Sur les série temporelles, le travail débute à la section 3.3 par la génération de séries simulées par la résolution du système dynamique. Exemptes de bruit, ces séries sont utilisées pour ajuster les paramètres des algorithmes d'estimation. Ce sont les paramètres de plongement (variable plongée, retard et dimension de plongement), ainsi que les paramètres d'estimation (longueur de la série temporelle et pas de réorthonormalisation). Ces paramètres seront ensuite utilisés pour traiter les séries expérimentales bruitées au chapitre 4. La détermination des paramètres de plongement a été réalisée par la méthode proposée par [Olbrich 97] et nous l'avons programmée dans l'environnement $MATLAB^{®}$. Les exposants de Lyapunov ont ensuite été estimés en programmant l'algorithme de Hegger Kantz dans l'environnement $MATLAB^{®}$ ainsi qu'on utilisant la boîte à outils non-linéaires $TISEAN$ 3.0® disponible sur internet [R. Hegger 99].

3.3 Validation du modèle simplifié

Notre analyse commence par la comparaison des modèles présentés dans les chapitres antérieurs afin de s'assurer que le modèle simplifié qui sera utilisé par la suite pour la production des séries temporelles simulées est réaliste. En effet, les simulations numériques des diagrammes de bifurcation et des sections de Poincaré sont assez lourdes. Pour cette raison, il est souhaitable que le modèle soit le plus simple possible.

Afin de comparer le modèle harmonique et le modèle par tubes de flux, du point de vue de la reproduction des phénomènes non linéaires, la figure 3.4 présente leurs diagrammes de Feigenbaum respectifs. Ces diagrammes ont été calculés avec 1024 valeurs du paramètre fréquence et pour chacune d'elles 333 points sont simulés. Dans les deux cas, on a négligé le frottement et on a considéré une augmentation de la masse du chariot en ajoutant une charge de 5,5kg, ce qui donne un ensemble de 10,0kg au total pour la partie mobile. Cette accroissement de la masse (charge) permet d'augmenter l'amplitude des oscillations dans tous les régimes de fonctionnement pour une meilleure comparaison.

Dans la pratique, le moteur est commandé par un convertisseur de puissance qui contrôle le courant de chaque phase entre deux valeurs $I_{max} = 8,5\ A$ et $I_{min} = 8\ A$ (contrôle par hystérésis). La tension d'alimentation $E = 50\ V$ permet d'obtenir une montée et une descente du courant assez rapides. Afin de simplifier la simulation, le hacheur de courant est modélisé par une résistance en série avec la source E : $r = \frac{E}{I_{max}} \approx 6\ \Omega$.

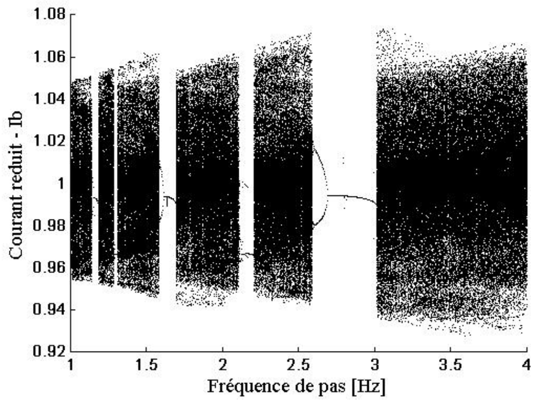
De la même manière, nous avons calculé les sections de Poincaré stroboscopiques en dimension cinq à partir des deux modèles. La figure 3.5 présente leurs projections sur le plan position/vitesse à la fréquence de pas $f = 4,203125\ Hz$. Pour le lecteur qui s'étonnerai de la précision de cette fréquence, il faut rappeler que le codage numérique exact (section 1.6), nous impose un ensemble fini de valeurs bien particulières.

Comme on peut le remarquer, les similitudes qualitatives entre les deux modèles sont assez claires. Sur les diagrammes de Feigenbaum, les différences apportées par le modèle simplifié, c'est-à-dire le modèle harmonique, se résument à un léger décalage du diagramme vers les fréquences basses. Qualitativement, on peut affirmer que les deux modèles présentent globalement les mêmes caractéristiques dynamiques.

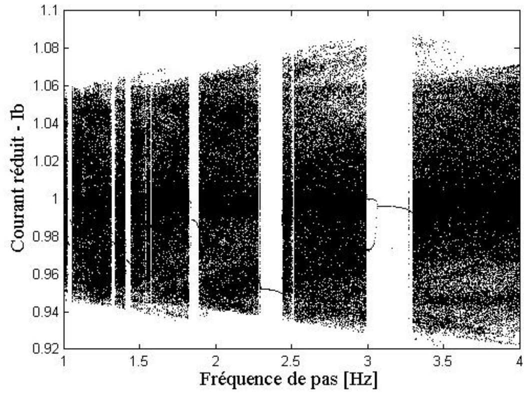
Par ailleurs, les mêmes attracteurs peuvent aussi être projetés en trois dimensions en ajoutant l'échantillonnage du courant comme le montrent les projections sur le cube position / vitesse / courant de la figure 3.6. Cependant, la question de savoir quelle est la meilleure dimension pour représenter un attracteur, du point de vue de l'analyse dynamique, n'est pas évidente. En effet, lors de la modélisation un choix plus ou moins arbitraire des variables d'état a été fait en se basant sur des considérations énergétiques. Cela pose le problème de savoir si toutes les variables sont réellement nécessaires pour bien représenter la dynamique du système sur un certain régime de fonctionnement. La réponse est donnée par la théorie du plongement que nous avons présentée à la section 3.1.3.2 et que nous appliquerons à la section 3.3.1.

En ajoutant des valeurs de frottement sec et fluide à la simulation du modèle harmonique, on remarque une diminution de la dispersion de l'attracteur présumé chaotique. La figure 3.7, à comparer avec la figure 3.5(a), représente le nouvel attracteur dans le plan position / vitesse. Cette observation nous conduit à penser que le phénomène chaotique existe indépendamment des phénomènes secondaires, même si l'aspect de l'attracteur étrange en est modifié. Par contre, une question se pose. Ce changement implique-t-il une diminution de la complexité de l'attracteur chaotique ?

Pour répondre à la question sur la complexité d'un attracteur par rapport à un autre, les mesures d'entropie servent de grandeurs de comparaison quantitative. Ces mesures peuvent être

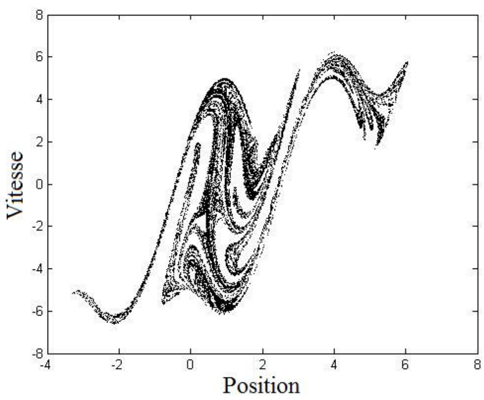


(a) Modèle harmonique

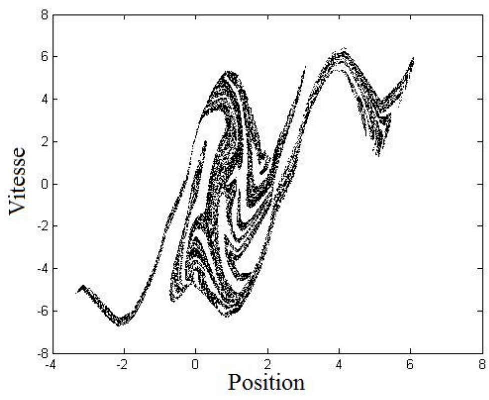


(b) Modèle par tubes de flux

FIGURE 3.4 – Diagrammes de Feigenbaum : fréquence de pas de $1Hz$ à $4Hz$.



(a) Modèle harmonique

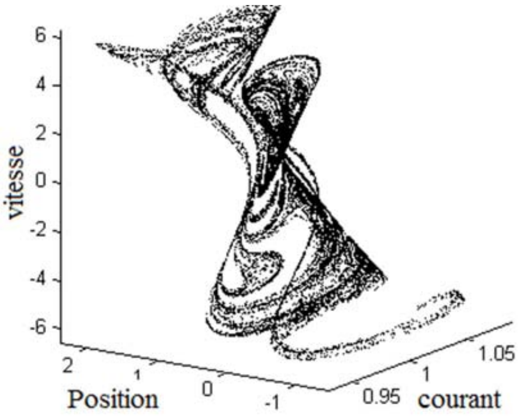


(b) Modèle par tubes de flux

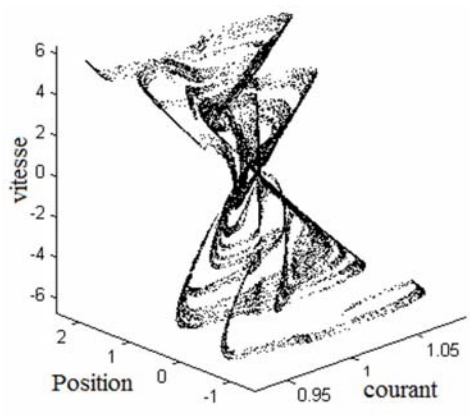
FIGURE 3.5 – Projections des sections de Poincaré sur le plan position vs. vitesse.

données par la détermination des dimensions fractales.

Pour confirmer la similitude des comportements dynamiques des deux modèles, deux autres attracteurs sont mis en évidence. Cette fois, ils sont choisis à des fréquences légèrement différentes



(a) Modèle harmonique



(b) Modèle par tubes de flux

Figure 3.6 – Projections des sections de Poincaré sur le cube position vs. vitesse vs. courant

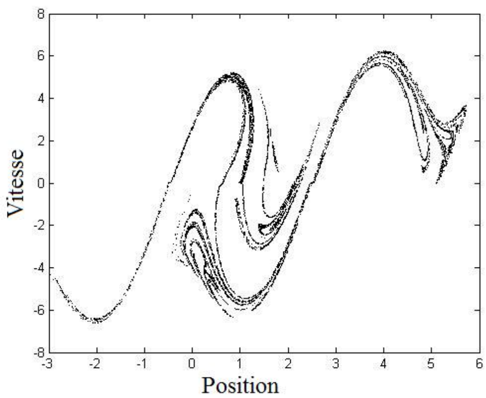
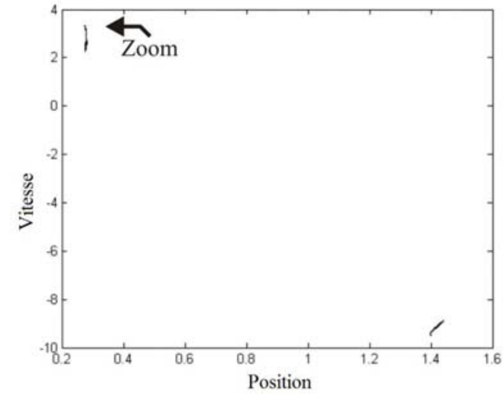


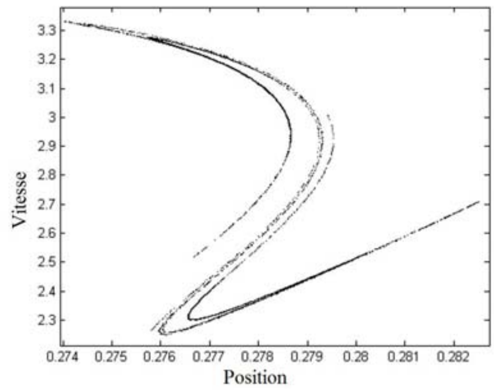
Figure 3.7 – Section de Poincaré projetée avec frottements sec et fluide.

pour être situés dans des régions équivalentes sur les diagrammes de bifurcation, soit à $f = 2,4\ Hz$ pour le modèle harmonique et $f = 2,5\ Hz$ pour le modèle tubes de flux. La figure 3.8 présente un attracteur caractérisé par une fréquence dominante sous harmonique de période deux. Les points alternent de manière régulière entre les deux segments sans qu'il soit possible de prévoir à long terme leur positions dans les segments. La dynamique chaotique est mise en évidence par les grossissements d'une de deux structures, révélant ainsi l'aspect feuilleté caractéristique d'un objet fractal tel qu'un attracteur étrange.

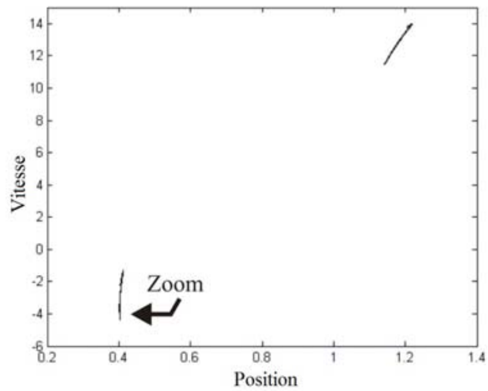
Comme dans l'exemple précédent, on constate que les comportement dynamique des deux modèles sont qualitativement identiques, à savoir un régime sous-harmonique de bruyant, même s'ils présentent des différences quantitatives. Ces comparaisons nous permettent de conclure que notre modèle simplifié est capable de bien reproduire tous les comportements dynamiques du moteur dans les analyses qui seront menées dans les sections à suivre.



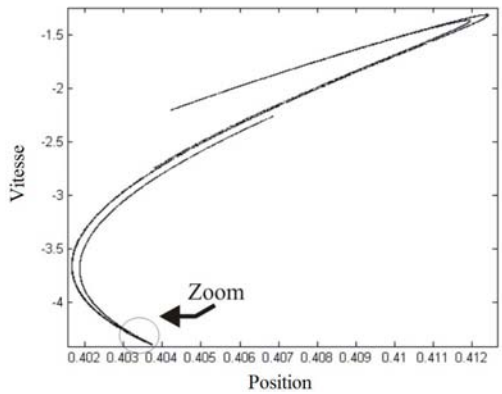
(a) Attracteur étrange $f = 2,50\ Hz$ modèle des tubes de flux



(b) Zoom - modèle des tubes de flux



(c) $f = 1,42\ Hz$ modèle harmonique



(d) Zoom - modèle harmonique

FIGURE 3.8 – Projections des sections de Poincaré pour les deux modèles

3.4 Détection et analyse du chaos sur données simulées

Cette section présente l'application des outils mathématiques pour la détection et l'analyse du chaos à partir des données obtenues par simulation numérique en utilisant le modèle simplifié (ou modèle harmonique) de l'inductance. L'objectif est surtout d'arriver à des résultats qualitatifs et quantitatifs qui puissent servir de base de comparaison avec les résultats expérimentaux.

Étant donné l'équivalence des modèles présentés à la section précédente, nous retenons le modèle harmonique pour toutes les simulations à suivre dans le but de réduire les temps d'analyse numérique du chaos.

3.4.1 Boite à outils non linéaires

Dans le but de réaliser les simulations nécessaires ainsi que les calculs d'invariants, nous avons développé une boîte à outils qui nous avons programmée dans l'environnement C++. Cette boîte à outils non linéaires est capable de simuler le système, de tracer des diagrammes de Feigenbaum même bidimensionels, des sections de Poincaré stroboscopiques ainsi que de plonger les variables et d'estimer les exposants de Lyapunov à partir du système différentiel en utilisant chacune des trois méthodes exposées.

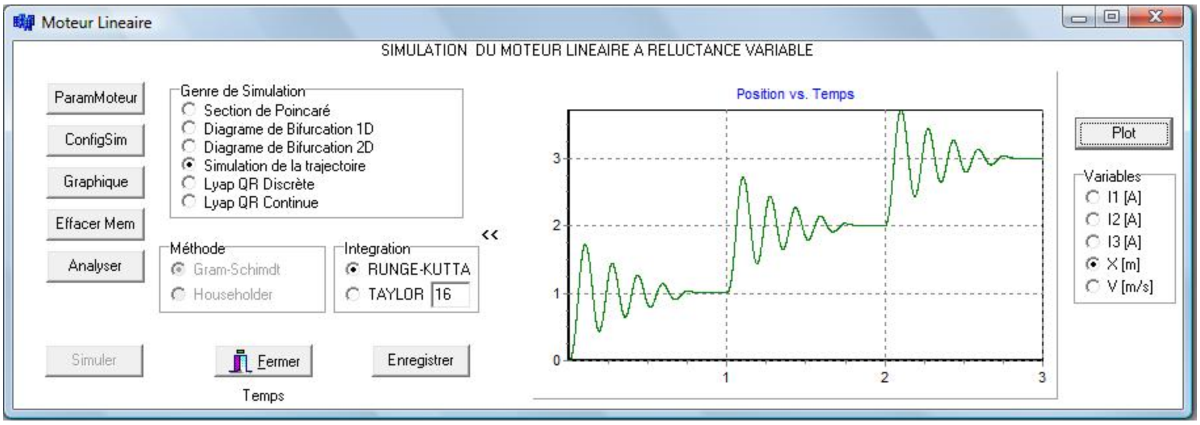


FIGURE 3.9 – Fenêtre principale de notre boîte à outils.

Ce programme nous permet aussi de changer les paramètres du moteur comme par exemple : la masse, l'intensité du courant contrôlé, les amplitudes des inductances de phase et les coefficient des frottements fluide et sec.

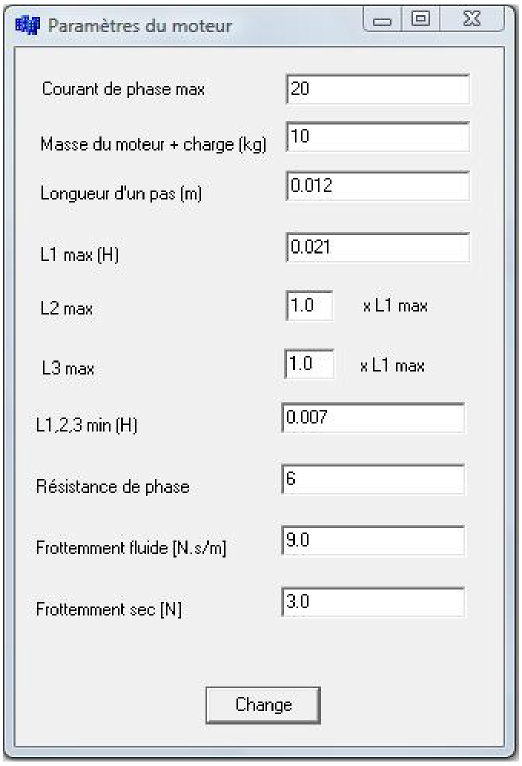


FIGURE 3.10 – Fenêtre de configuration des paramètres du moteur.

Bien sur, nous sommes aussi capables d'imposer certains paramètres de simulation et d'estimation tels que le pas et la méthode d'intégration de la trajectoire, le pas et la méthode d'orthonormalisation, les conditions initiales de simulation, la tension et la fréquence d'alimentation et le nombre des périodes simulées, entre autres.

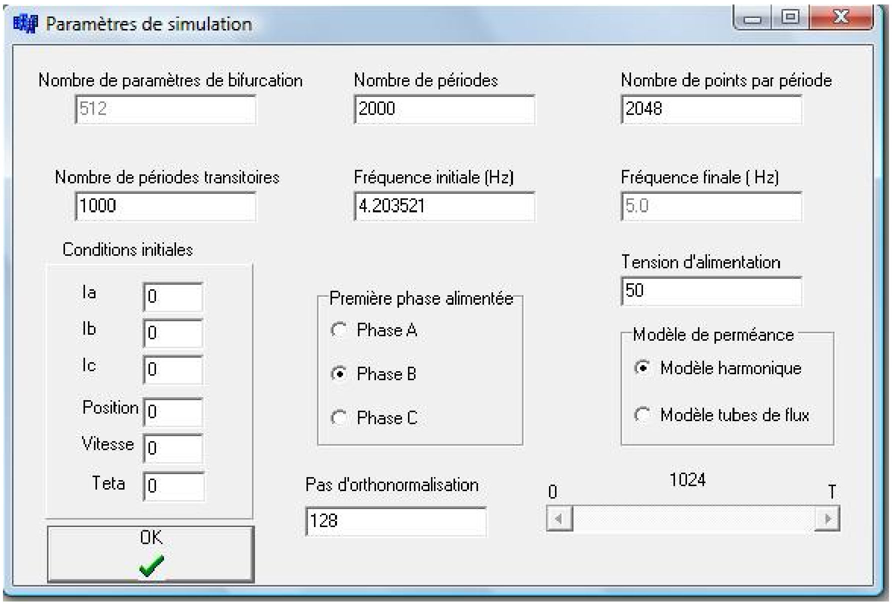


FIGURE 3.11 – Fenêtre de paramètres de simulation et d'invariants.

Après chaque simulation il est possible d'enregistrer les résultats dans des fichiers au format ".dat" qui peuvent ensuit être ouverts dans l'environnement MATLAB pour une analyse plus approfondie ou pour l'exploitation graphique des données.

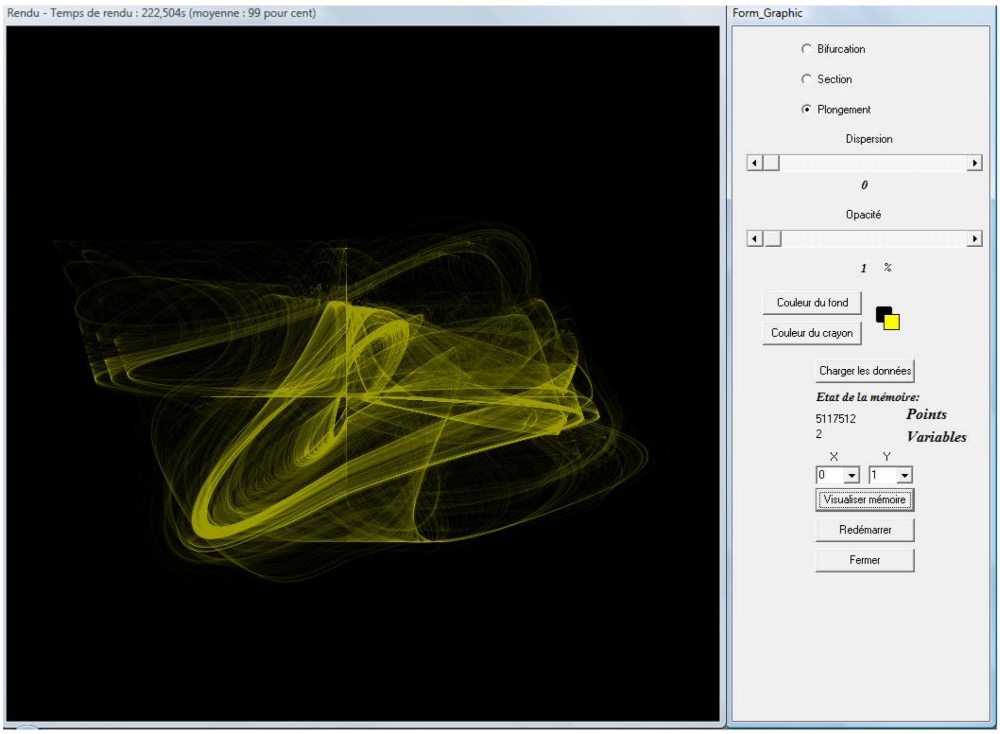


FIGURE 3.12 – Visualisation des attracteurs en appliquant la transparence

Bien que le but principal soit l'obtention des valeurs numériques sous la forme de fichiers texte, la boîte à outils est aussi capable de pré-visualiser certaines courbes directement comme le montre la figure 3.9.

Afin d'améliorer la visualisation des attracteurs chaotiques plongés, nous avons ajouté un module de traitement graphique que nous avons programmé en utilisant les concepts de transparence et de dispersion.

3.4.2 Diagramme de bifurcation bi-dimensionnel

Le prototype réel a révélé, d'une part, que les amplitudes des inductances de phase varient le long du stator (section 2.4.2, figure 2.36) et, d'autre part, qu'il existe une dispersion des amplitudes entre les trois phases.

L'amplitude de l'inductance de phase est un paramètre important qui influe directement sur la force de traction du moteur. Afin de détecter les zones candidates au comportement chaotique, on réalise un diagramme de bifurcation à deux dimensions. Le moteur est alimenté par des créneaux de courant contrôlés à 6 A pour éviter la zone de saturation magnétique. Pour respecter la réalité expérimentale, la valeur minimale de l'inductance est maintenue constante $L_{min} = 7\ mH$ et on varie la valeur maximale : $13\ mH \leq L_{max} \leq 21\ mH$. Ces deux extrêmes correspondent aux valeurs extrêmes mesurées sur le prototype.

On réalise la simulation du moteur à vide avec un frottement sec équivalent à 3 N et un frottement fluide de 9 $N\ s\ m^{-1}$.

La figure 3.13 présente le diagramme de bifurcations bi-dimensionnel. Les deux paramètres de bifurcation sont la fréquence de pas, en abscisse, et la valeur maximale de l'inductance en ordonnée.

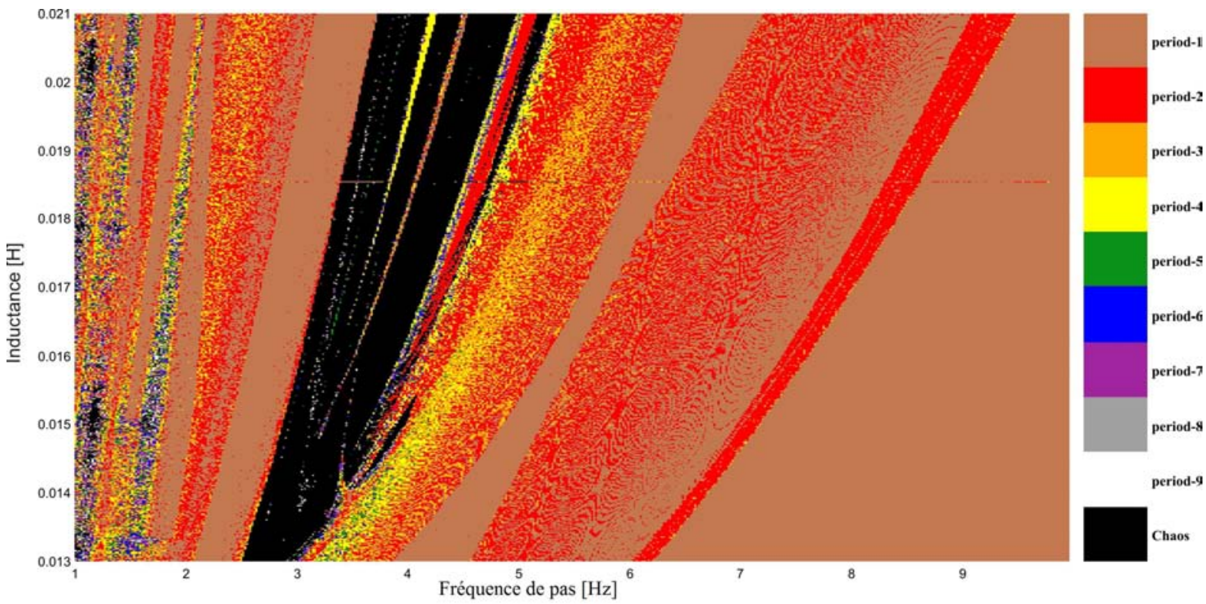
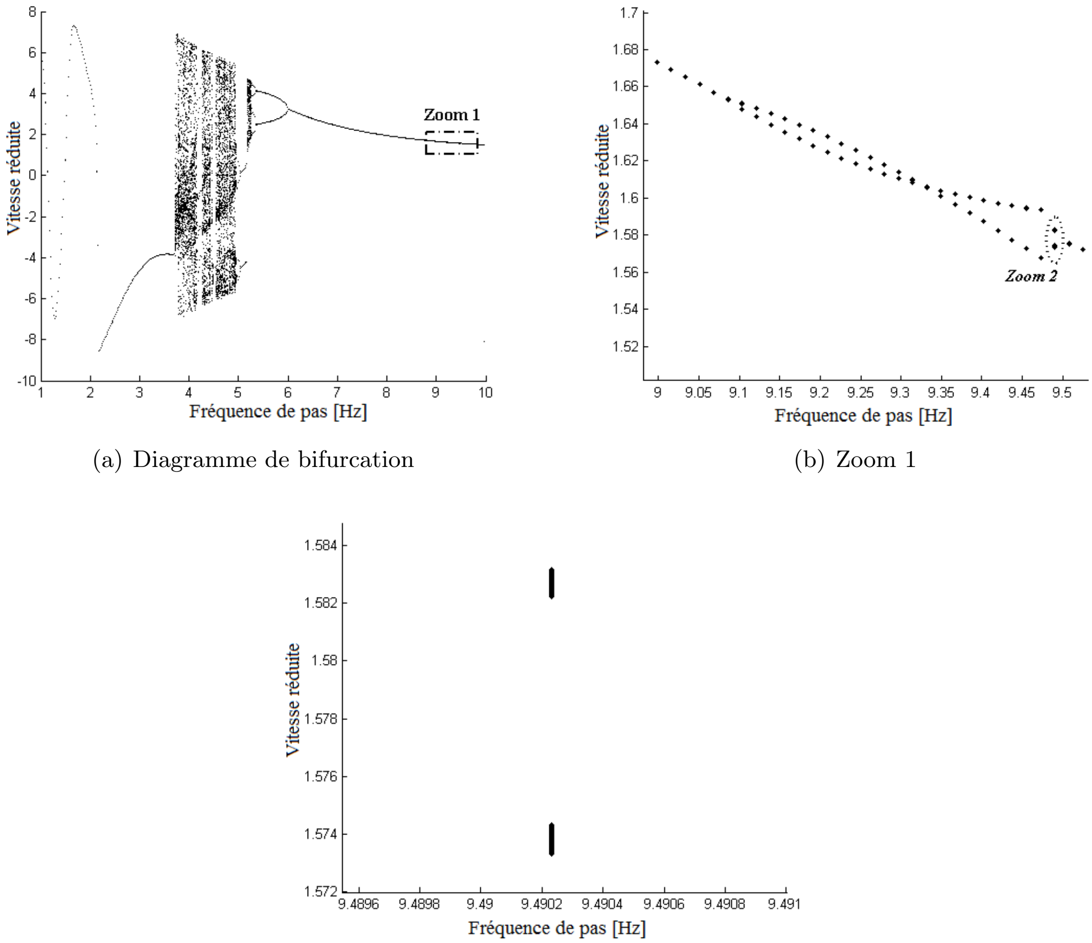


Figure 3.13 – Diagramme de bifurcation 2D

Tout comme un diagramme de Feigenbaum, réalisé avec un seul paramètre de bifurcation, ce diagramme indique la périodicité des solutions et les zones de non périodicité. Ici, elles sont codées par la couleur. Ce diagramme présente la même limitation qu'un diagramme de Feigenbaum puisque il n'est a priori pas possible de distinguer un régime quasi-périodique d'un régime chaotique.

Par exemple, avec un usinage mécanique d'excellente qualité, on peut imaginer une accélération sur une horizontale avec une amplitude d'inductance constante le long du parcours. Quelle qu'elle soit, il est clair que la trajectoire traversera une zone de fonctionnement apériodique en noir. Réciproquement, à fréquence constante (par exemple $3,0\ Hz$), ce diagramme permet de comprendre que, si l'inductance maximale varie le long du parcours, le fonctionnement pourra être, selon le cas, périodique ou non.



(a) Diagramme de bifurcation

(b) Zoom 1

(c) Zoom 2

FIGURE 3.14 – Diagramme de bifurcation et zooms successifs - $L_{max} = 21\ mH$

On observe que, lorsque l'inductance maximale diminue, la zone de fonctionnement apériodique se rétrécit. Comme cela correspond aussi à une réduction de sa dérivée par rapport à la position et donc à une diminution de l'énergie convertie, on pourrait être amené à penser que le comportement apériodique du moteur est essentiellement provoqué par un excédent d'énergie insuffisamment absorbée sur un pas. Toutefois, cet excédent d'énergie pourrait tout aussi bien provoquer un comportement instable divergeant et pas obligatoirement chaotique. Par conséquent, nous pouvons en déduire que la simple existence des oscillations provoquées par cet amortissement insuffisant ne saurait être la seule ou la principale cause du chaos. De fait, on observe que les zones chaotiques alternent avec les zones périodiques à des niveaux d'énergie similaires. En réalité donc, l'occurrence du chaos est principalement due au caractère non linéaire du système.

Revenons à l'interpretation à donner aux zones ombres et claires des diagrammes de Feigenbaum de la figure 3.4 pour introduire la section suivante. Ces diagrammes permettent de se faire une idée du comportement global du moteur sur une plage de fréquence d'alimentation. Cependant, non seulement il n'est pas possible de préciser si les régions noires sont chaotiques ou quasi-périodiques mais il n'est même pas possible d'assurer en tout rigueur qu'il s'agit de comportements apériodiques. En effet, un régime périodique à très longue période pourrait être masqué par des erreurs d'approximation numérique. De la même façon, les régions claires qui semblent correspondre à des synchronisations peuvent cacher un comportement apériodique de faible amplitude comme cela a été illustré par la figure 3.8. Pour résumer, disons que, malgré toutes les précautions numériques, les diagrammes de Feigenbaum ne fournissent que des indices sur les comportements dynamiques du moteur. Ceux-ci devront être analysés de façon plus précise et caractérisés quantitativement par l'estimation des *invariants* de leur dynamiques.

Pour illustrer ce genre d'imprécision, la figure 3.14(a) présente le diagramme de Feigenbaum réalisé pour une valeur fixe d'inductance $L_1 = L_2 = L_3 = 21\ mH$. Le zoom de la figure 3.14(b) révèle que ce qui avait l'apparence d'un mode périodique fondamental pouvait aussi bien être un mode sous-harmonique deux. De même, à plus petite échelle encore, le zoom de la figure 3.14(c) révèle un comportement apériodique de faible amplitude là où le zoom précédent indiquait une période deux. Dans ce dernier cas, il a été vérifié qu'il ne s'agit pas d'un problème de convergence extrêmement lente à proximité d'un point de bifurcation, par nature structurellement instable.

3.4.3 Analyses de cas

Les commentaires et l'exemple précédents justifient la nécessité d'analyser les fonctionnements apériodiques du moteur de manière plus rigoureuse par l'estimation des invariants caractéristiques : dimensions fractales et exposants de Lyapunov. De plus, cette section a pour but de déterminer les paramètres de plongement appropriés au traitement des données expérimentales, traitement qui sera présenté au chapitre quatre.

Nous présentons trois études de cas pour illustrer notre propos. Elles correspondent à trois paramétrages différents du modèle. Les paramètres sont regroupés dans le tableau 3.5. La première étude de cas concerne le modèle utilisé dans la section précédente, c'est-à-dire avec une charge inertielle sans frottement et une alimentation au courant maximal. Pour le deuxième cas étudié, on introduit le frottement, le moteur fonctionnant à vide et le courant d'alimentation étant réduit pour éviter la saturation. On montrera aussi l'influence sur les invariants de la dispersion des inductances des trois phases. Enfin, la troisième étude présente un cas litigieux et montre comment lever l'incertitude sur son interprétation en procédant à l'analyse de ses invariants.

Cet ensemble d'études donnera un aperçu des influences exercées par les paramètres du moteur et de son alimentation sur ses dynamiques.

Les simulations ont été réalisées dans l'environnement C++ pour générer des séries temporelles. La programmation des méthodes d'estimation de spectres de Lyapunov, présentées dans la section 3.2.5, a également été réalisée en C++. La recherche des paramètres de plongement - retard (Information mutuelle et fonction d'autocorrelation) et dimension de plongement (Faux plus proches voisins) - a été programmée sous $MATLAB^{®}$ de même que l'estimation des dimensions fractales et la détermination du plus grand exposant de Lyapunov par la méthode de KANTZ. Les algorithmes sont présentés en Annexe B.2. Certaines analyses fractales ont été réalisées en utilisant le *package open source TISEAN 3.0*.

Paramètres	Cas I	Cas II	Cas III
Frottement sec [N]	$0,0$	$3,0$	$3,0$
Frottement fluide [Ns/m]	$0,0$	$9,0$	$9,0$
Masse du chariot [kg]	$10,0$	$4,5$	$4,5$
Fréquence de pas [Hz]	$4,2$	$4,2$	$3,77$
Courant max [A]	$8,5$	$6,0$	$6,0$
Tension d'alimentation [V]	$50,0$	$30,0$	$30,0$
$L1_{max}$ **Ind. phase 1 [mH]**	$21,0$	$21,0$	$21,0$
$L2_{max}$ **Ind. phase 2 [mH]**	$21,0$	$21,0(19,0)$	$19,0$
$L3_{max}$ **Ind. phase 3 [mH]**	$21,0$	$21(17,0)$	$17,0$

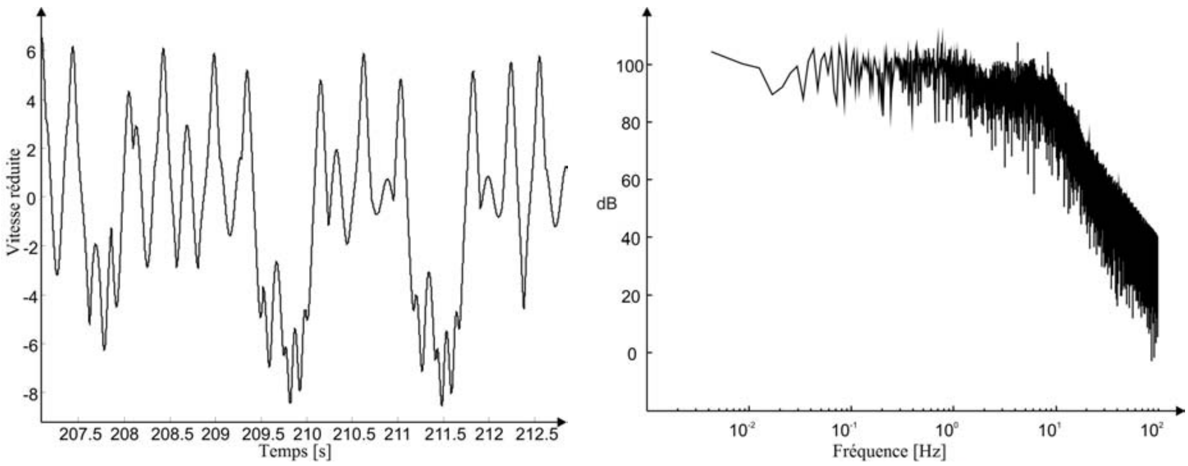
TABLE 3.5 – Paramétrages du modèle

3.4.3.1 Premier cas

a) Plongement

Pour le premier cas, les trois inductances sont identiques et leur valeurs sont égales à l'inductance maximale relevée expérimentalement le long de la course du chariot. On rappelle qu'on néglige les frottements et que la masse du chariot chargé est portée à 10 kg. Le modèle différentiel est simulé sur 2000 pas du moteur et on néglige les 1000 premiers pour éviter les transitoires. La série temporelle utilisée pour estimer les dimensions fractales et les exposants de Lyapunov comporte donc un peu plus de 2 millions des points.

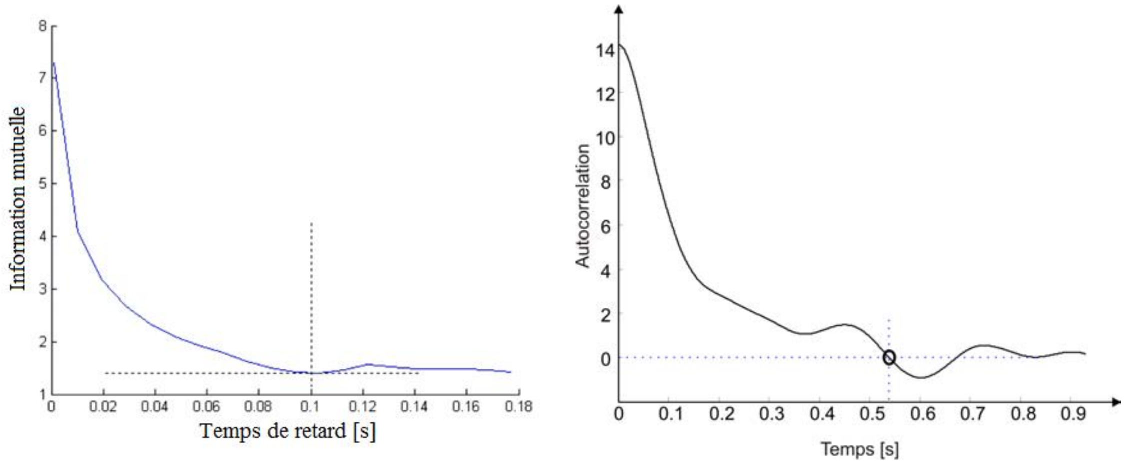
Il est fréquent que l'analyse d'une dynamique apériodique débute par la représentation temporelle d'une ou plusieurs variables mettant en évidence l'apparence aléatoire du comportement des variables. Elle est souvent complétée d'une petite analyse spectrale qui, si le spectre est continu, est un indice du comportement chaotique. La figure 3.15 représente l'évolution temporelle de la vitesse (sans dimension) sur une vingtaine de pas et le spectre de Fourier calculé sur la série complète.



(a) Série temporelle simulée : vitesse réduite (b) Transformée rapide de Fourier

FIGURE 3.15 – (a) Vitesse réduite : Forme d'onde et spectre de Fourier

En utilisant la série temporelle simulée de la variable vitesse, les paramètres de plongement ont été déterminés. La figure 3.16 montre comment nous avons déterminé le retard du plongement. Le premier minimum de l'information mutuelle indique un retard de plongement $\tau_{info} = 0,1\ s$. En utilisant le premier passage à zéro de la fonction d'autocorrelation on obtient un retard de plongement beaucoup plus grand. Il est habituel que les estimations fournies par ces deux méthodes soient fort différentes surtout lorsqu'il n'y a pas de composante périodique marquée. Comme cela a été expliqué à la section 3.2.3.2, l'information mutuelle donne généralement un résultat plus réaliste.



(a) Information Mutuelle (b) Autocorrelation

FIGURE 3.16 – Estimation du retard de plongement.

On détermine la dimension de plongement par la méthode des faux plus proches voisins illustrée sur la figure 3.17. Les paramètres de cet algorithme sont, d'une part, le retard de plongement $\tau_{info} = 0,1\ s$ et, d'autre part, la largeur de la fenêtre de Theiler. Cette fenêtre est un interval de temps centré au tour de chaque point de la série dont on recherche les voisins. Dans cet interval de temps, on considère que les points sont fortement corrélés et on s'abstient d'évaluer leur degré de voisinage avec le point étudié. Nous avons fixé la largeur de la fenêtre de Theiler, de part et d'autre du point, égale à $\tau_{cor} = 0,6\ s$ pour éviter tout effet de corrélation.

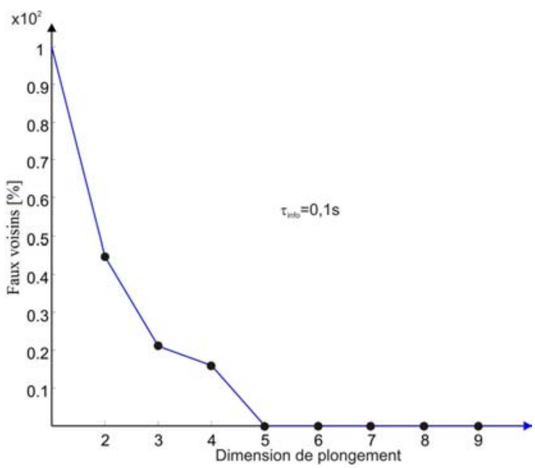
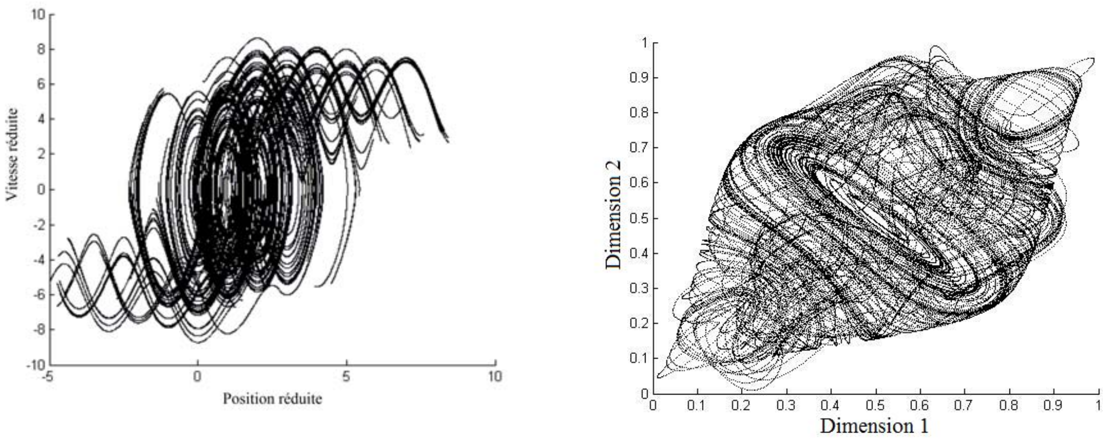


FIGURE 3.17 – Les faux plus proches voisins.

La figure 3.17 montre qu'un plongement de l'attracteur en dimension $D_e \geq 5$ doit nous permettre d'évaluer les dimensions fractales et le spectre de Lyapunov dans de bonnes conditions, les données étant ainsi correctement formatées.

Une projection en deux dimensions de l'attracteur plongé est présentée sur la figure 3.18. Le plongement a été réalisé en utilisant le retard $\tau_{info} = 0,1\ s$ et une dimension de plongement $D_e = 5$.

Comme on peut voir sur la figure 3.18(a), l'attracteur d'origine est constitué d'un ensemble des courbes disjointes en raison de l'application d'un modulo sur la position. Á moins que le moteur ne soit bloqué ou en vibration autour d'une position d'équilibre, ce qui impliquerait que la vitesse moyenne serait nulle, la représentation de l'attracteur sous cette forme n'est pas utile. De plus, les phases étant alimentées en créneaux, les trois courants sont aussi de nature discontinue. Il y a donc avantage à choisir la vitesse comme variable de plongement. On obtient ainsi des trajectoires continues propres à révéler la structure fractale de l'attracteur, (figure 3.18(b)). Après plongement, l'attracteur reconstruit permet de calculer les invariants. L'utilisation de la position comme variable de plongement est soumis à certaines conditions comme on le verra au chapitre IV.



(a) Attracteur réel

(b) Attracteur plongé

FIGURE 3.18 – Projections en deux dimensions d'un attracteur chaotique - 1ère cas

Le même plongement est présenté sur la figure 3.19 mais avec 1 million de points représentés au lieu de vingt mille sur la figure 3.18(b). De plus, nous avons programmé un traitement graphique basé sur la transparence et la diffusion des points pour améliorer la visualisation de la structure de l'attracteur. Les details du traitement qui nous avons programmé sont précisés dans l'annexe B.8. Ce mode de visualisation sera utile, par exemple, pour analyser l'influence sur la dynamique de la dispersion des valeurs d'inductance des trois phases.

Les invariants peuvent aussi être estimés à partir des sections de Poincaré à condition que les intervals de temps entre les échantillons consécutifs ne dépassent pas le temps de décorrélation. La figure 3.20 présente des sections de Poincaré obtenues à partir de l'attracteur d'origine (figure 3.20(a)) et à partir de l'attracteur plongé (figure 3.20(b)). Ces sections en dimension cinq sont projetées chacune sur un plan. Il s'agit de sections stroboscopiques réalisées à la période d'alimentation, c'est-à-dire, un pas sur trois. Dans ces conditions l'interval de temps $T \approx 0,24\ s$ reste inférieur au temps de décorrélation $\tau_{cor} \approx 0,55\ s$. Dans le cas contraire, les algorithmes d'estimation des invariants ne peuvent plus converger.

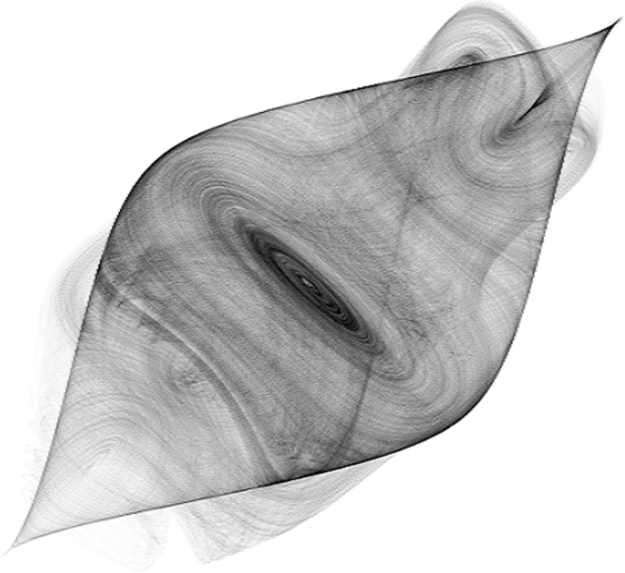
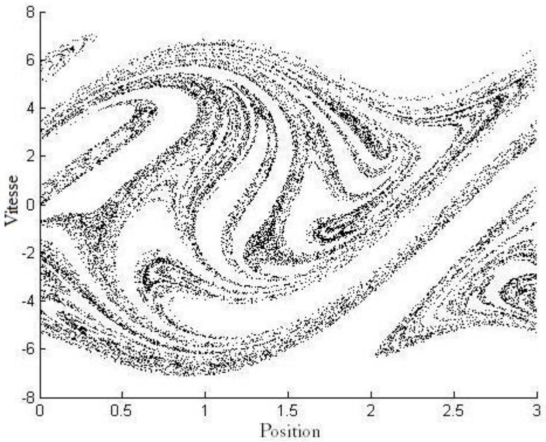
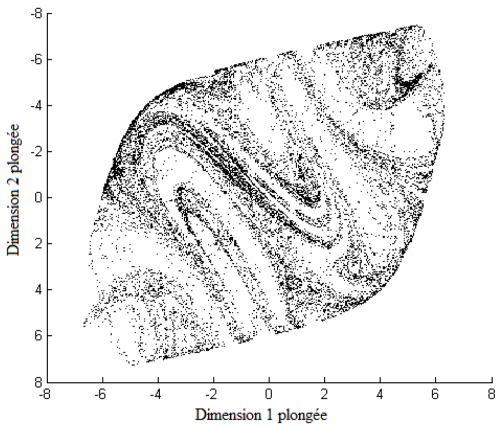


FIGURE 3.19 – Projection en haute résolution



(a) Á partir de l'attracteur original



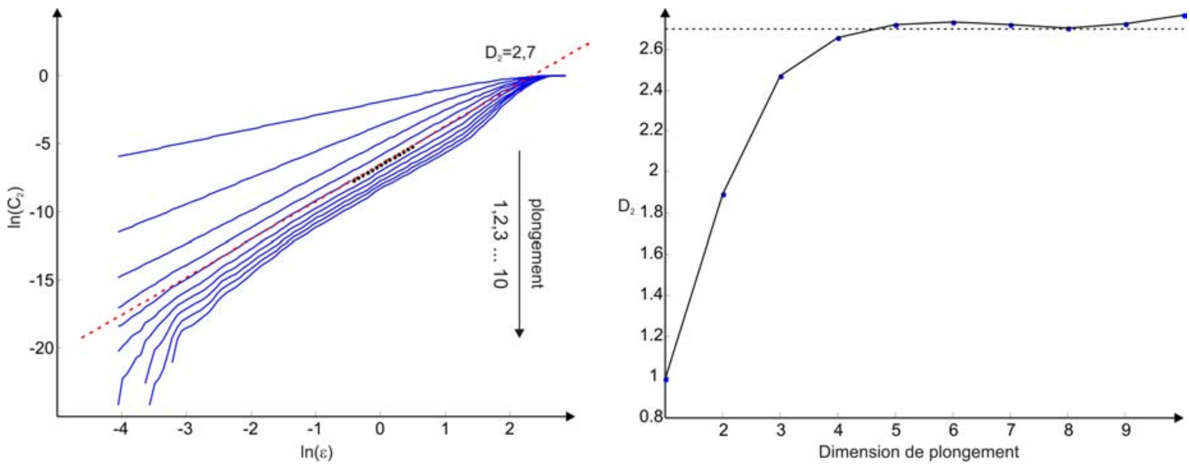
(b) Á partir de l'attracteur plongé

FIGURE 3.20 – Sections de Poincaré projetées en deux dimensions

b) Dimension fractale

Nous venons d'expliquer que l'estimation des invariants peut théoriquement être réalisée aussi bien à partir des données issues de l'attracteur original qu'à partir des données plongées. Cependant, le plongement devient absolument nécessaire pour réaliser ces estimations à partir de séries temporelles expérimentales bruitées. Afin de préparer les analyses expérimentales du chapitre IV, nous présentons ici l'estimation des invariants à partir d'une série simulée. La série est d'abord simulée puis plongée. On peut aussi dire qu'il s'agit d'une expérimentation numérique.

Pour s'assurer de la convergence de la dimension de corrélation, nous réalisons une série d'estimations en variant la dimension de plongement. Pour ce faire, nous avons utilisé le package *TISEAN* 3.0®, dont la figure 3.22(b) montre les résultats. Chaque courbe est obtenue après plongement dans une dimension donnée et la pente estimée dans la zone linéaire donne la di-



(a) Intégrale de corrélation (b) Convergence de D_2 vs. Dimension de plongement

FIGURE 3.21 – Dimension de corrélation D_2

mension de corrélation. La figure 3.21(b) montre comment D_2 converge dès que la dimension de plongement est suffisante. On note, sur la droite du graphique, que la dispersion des points dans un espace de plongement de trop grande dimension dégrade l'estimation.

La ligne de code pour TISEAN peut être lancée à partir de l'environnement $MATLAB^{®}$:

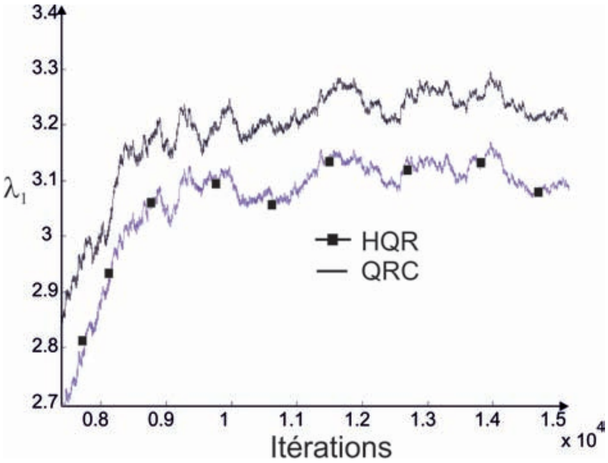
!d2 data.dat -d100 -t500 -oD2

Nous avons traité ensuite les fichiers générés par TISEAN avec la fonction ***robustfit*** de $MATLAB^{®}$ pour trouver la dimension de corrélation $D_2 \approx 2,7$ avec un écart-type de $s = 0,27$. Sa convergence à partir de la dimension cinq confirme le résultat obtenu par la méthode des faux plus proches voisins. Toutefois, un plongement en dimension quatre s'avérera suffisant pour obtenir les exposants de Lyapunov avec une bonne précision. Quelques résultats ont aussi été présentés en [De Castro 09].

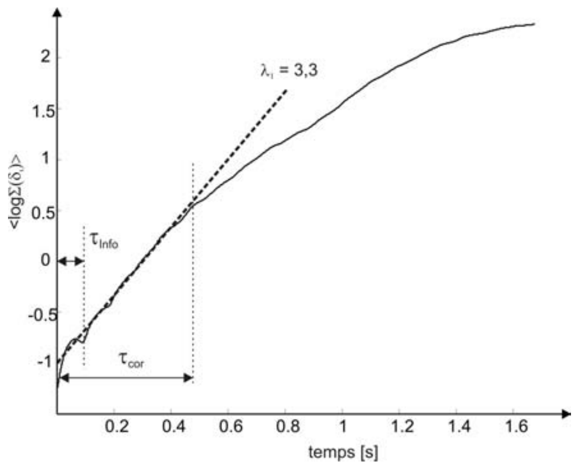
c) Exposants de Lyapunov

Pour les séries expérimentales du chapitre IV, le plus grand exposant de Lyapunov sera évalué par la méthode de KANTZ. Au préalable, nous allons estimer le spectre de Lyapunov à partir du modèle différentiel en utilisant les méthodes d'orthonormalisation discrète et continue. La figure 3.22(a) montre la convergence du plus grand exposant vers une valeur comprise entre $3,0\ bits/s$ et $3,2\ bits/s$, selon la méthode d'estimation.

Ces valeurs sont reportées avec précision dans le tableau 3.6 après une régression dans la région quasi-horizontale au delà de la 10000$^{\text{ème}}$ itération. Elles servent de référence pour valider le réglage des paramètres de l'algorithme de KANTZ. Pour cet algorithme le retard de plongement, la dimension de plongement et la fenêtre de Theiler sont identiques à ceux utilisés pour la dimension fractale. Un paramètre important est le nombre de voisins de chaque point à partir desquels les divergences des trajectoires sont calculées et moyennées. Ce paramètre conditionne la taille initiale de la boule en évolution. La comparaison avec les valeurs de référence ont pour but de s'assurer que ce dernier paramètre est réglé de manière réaliste. La figure 3.22(b) montre comment estimer le plus grand exposant de Lyapunov en évaluant la pente sur des longueurs d'itération correspondant à des temps compris entre τ_{info} et τ_{cor}. Dans cet exemple, nous avons programmé sous MATLAB avec un nombre de voisins égal à dix. Une régression nous permet d'estimer $\lambda_1 \approx 3,3\ bits/s$.



(a) Méthodes HQR et QR continue



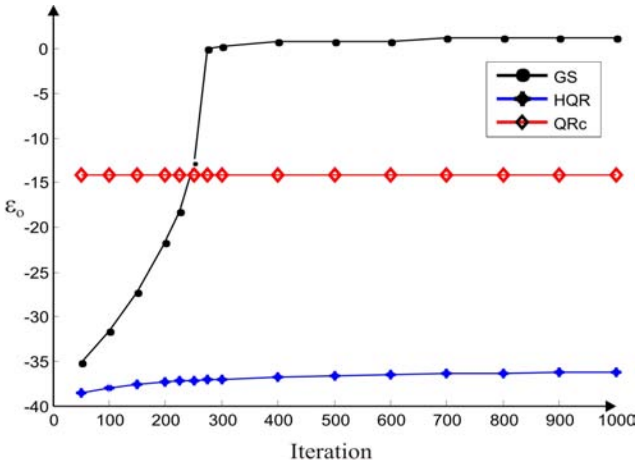
(b) Méthode de Kantz

Figure 3.22 – Le plus grand exposant de Lyapunov estimé à partir (a) de la série temporelle plongée, (b) du système variationnel.

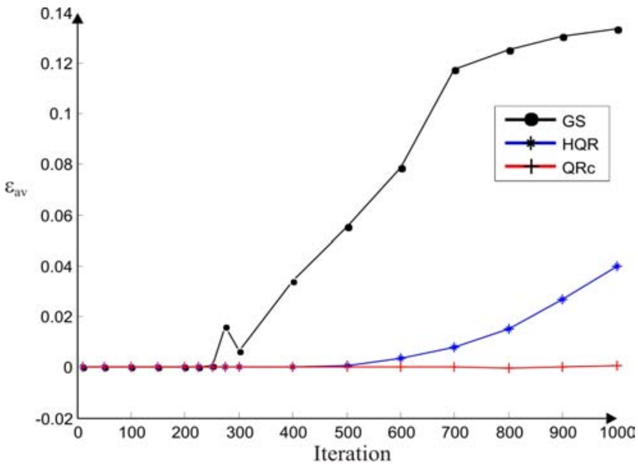
Ce résultat, obtenu à partir de la série temporelle, est très proche des valeurs obtenues à partir du système variationnel.

Afin de comparer les performances entre les méthodes QR discrète avec orthonormalisation de Gram Schmidt Modifiée ou de Householder et la méthode QR continue, deux indices ont été utilisés. Le premier indice utilisé est la precision de l'orthonormalisation de chaque méthode. Cette valeur est obtenue à partir du produit interne des vecteurs "orthogonaux" trouvés après l'application de chaque méthode. Cette erreur ϵ_0 est présentée sur la figure 3.23(a) en utilisant un logarithme decimal. Ensuite, la figure 3.23(b) montre l'erreur ϵ_{av} évaluée par différence avec la trace du Jacobien.

Il faut remarquer ici que les difficultés d'estimation des invariants ne sont pas le seul fait du bruit expérimental puisque la série utilisée dans cet exemple est complètement exempte de bruit. On retiendra donc, que le réglage paramétrique des algorithmes est de la plus grande importance et que, de manière générale, toute estimation d'invariant livrée sans précision sur les méthodes



(a) Erreur d'orthonormalisation



(b) Différence avec la trace du Jacobien

FIGURE 3.23 – Le plus grand exposant de Lyapunov : comparaison entre les méthodes.

et paramètres doit être considérée avec beaucoup de circonspection.

λ	**QRC**	**HQR**	KANTZ
λ_1	3,19	3,06	3,3
λ_2	0	0	
λ_3	-4,23	-4,31	
λ_4	-401	-420	
λ_5	-490	-500	
λ_6	-589	-559	

TABLE 3.6 – Spectres de Lyapunov

Maintenant que nous disposons du spectre de Lyapunov et de la dimension de corrélation, nous pouvons utiliser la conjecture de Kaplan-Yorke pour vérifier la cohérence de ces estimations. On rappelle en effet que la dimension de Lyapunov est une limite supérieure de la dimension de corrélation. En appliquant la relation 3.21, nous obtenons :

$$D_L = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|} \approx 2,75 > D_2 = 2,7. \tag{3.62}$$

d) Considérations expérimentales

Sur le banc d'essais les acquisitions sont réalisées à partir d'un codeur pour déterminer la position instantanée du chariot et construire la série temporelle de position. Pour appliquer la méthode que nous venons de présenter, il faut calculer la dérivée de la série expérimentale de position pour créer la série expérimentale de vitesse. Cela a pour effet d'amplifier le bruit de mesure inhérent à la précision du codeur. Dans l'objectif d'éviter cet inconvenient, tout en conservant des estimations de bonne qualité, nous montrons dans ce paragraphe comment exploiter la série de position. Nous le faisons avec une série simulée pour valider notre approche avant de l'appliquer aux séries expérimentales dans le chapitre IV.

Une particularité liée au contexte expérimental est que le moteur est une machine linéaire. Deux cas de figure sont possibles pour le fonctionnement apériodique. Dans le premier cas, la position évolue à long terme dans un domaine borné. C'est par exemple ce qu'on observe dans un mode de fonctionnement apparenté à une vibration. Dans l'autre cas, l'évolution apériodique de la position s'opère avec une vitesse moyenne non nulle qui entraîne, à terme, le chariot vers l'une des deux extrémités du stator. Si on exploite la série de position brute, le mauvais conditionnement des données, empêche de déterminer le retard et la dimension de plongement. En effet, la figure 3.24 montre qu'en utilisant la série brut (figure a) l'autocorrélation ne croise jamais le zéro et il n'y a pas non plus de minimum sur l'information mutuelle (figure b). Cette constatation reste vraie même en prolongeant très loin les itérations. Des essais pour trouver des valeurs empiriques de retard conduisent à des estimations ambiguës, ne faisant pas apparaître de régions linéaires pour estimer, non plus de convergence que ce soit pour la dimension fractale ou les exposants de Lyapunov. Au contraire, on trouve parfois une dimension infinie, ce qui est normalement la signature d'un système stochastique où instable au sens de Lyapunov.

La solution que nous proposons ici (une possibilité supplémentaire sera proposée au chapitre IV) consiste à replier la série de position sur elle même pour augmenter la densité de l'attracteur. La question pratique consiste à determiner la longueur du repliement mécanique le long de la série.

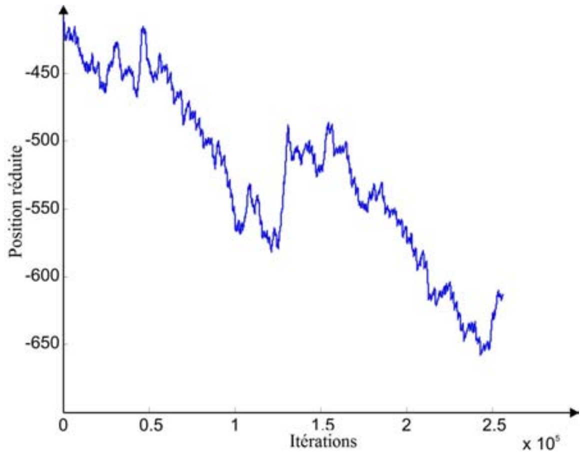
Soit X^N, la série temporelle de position donnée par :

$$X^N = [x_1, x_2, x_3, \cdots x_N] \tag{3.63}$$

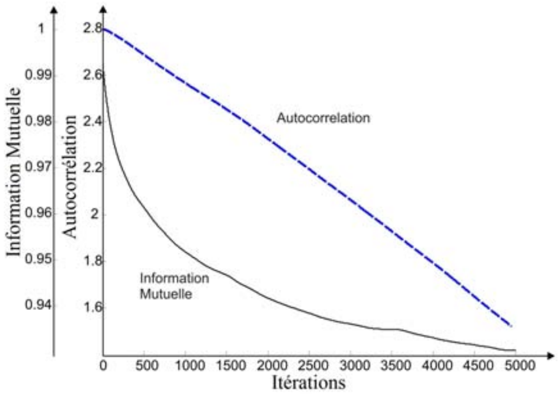
Pour obtenir la même dimension fractale que celle obtenue en travaillant sur la série de vitesse, nous normons la position avec un pas de repliement multiple de ω_s. Pour rappel, ω_s est la longueur de trois pas mécaniques, soit l'équivalent d'un pas statorique. Soit k ce multiple :

$$y_i = mod(x_i, k\omega_s) \qquad k \in \mathbb{N}^+ \tag{3.64}$$

Pour rester proche des conditions expérimentales nous générons une série de position avec un pas d'échantillonnage élargi avec $p = 256$ points par période. Nous opérons le repliement avec $k = 2$. L'information mutuelle permet maintenant de déterminer un retard de plongement optimal autour de 110 itérations $\approx 0,1\ s$. Remarquons que ce résultat est en total cohérence avec le retard de plongement déterminé à partir de la série de vitesse au paragraphe a). La figure 3.25 présente une projection en dimension deux de la trajectoire plongée après repliement. En rapport avec la longueur du repliement, on remarque avec intérêt la formation de cinq ensembles de boucles sur la diagonale et un sixième dans les angles de la seconde diagonale.



(a) Position vs. itérations.



(b) Information mutuelle et autocorrélation.

FIGURE 3.24 – Série temporelle de position : $f = 4,2\ Hz$, 256 points par période

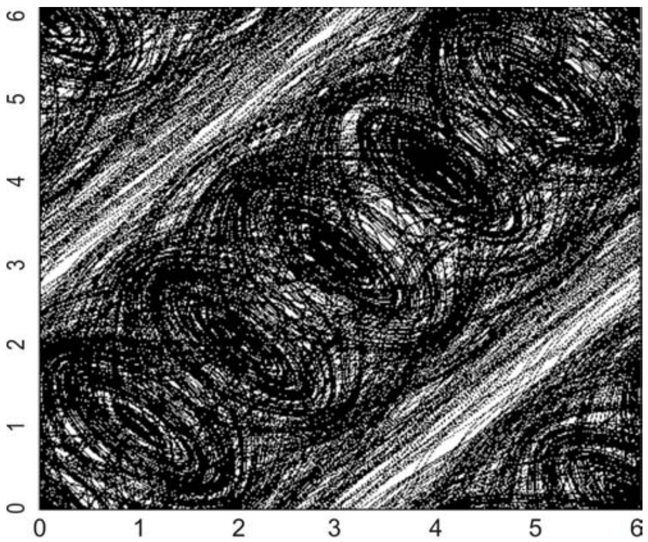


FIGURE 3.25 – Position repliée et plongée : $f = 4,2\ Hz$, 256 points par période.

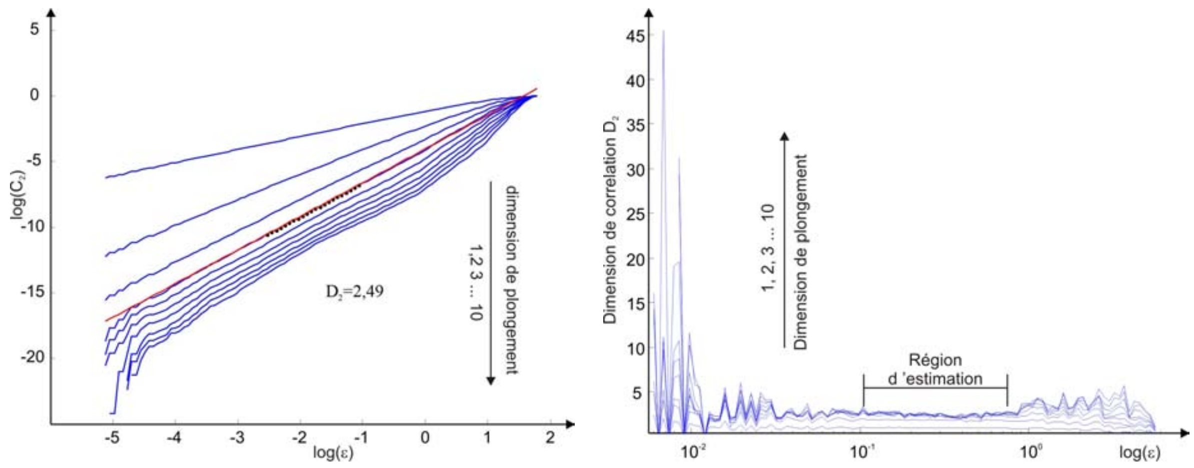
La figure 3.26 présente l'estimation de la dimension de corrélation réalisée dans ces conditions.

La valeur de la dimension de corrélation, estimée à partir de la série de position, est $D_2 = 2,49$ (régression sur la figure 3.26(a)) avec un écart-type de $s = 0,24$ sur la région d'estimation définie sur la figure 3.26(b).

L'exposant de Lyapunov qui a été estimé à partir de la série temporelle de position, plongée après repliement est présenté sur la figure 3.27.

L'inconvénient de normer la série de position est d'insérer des discontinuités sur la trajectoire plongée. Ces discontinuités génèrent des oscillations rapides sur la courbe d'estimation du plus grand exposant de Lyapunov, comme on peut le voir sur le zoom de la figure 3.27. L'amplitude de ces oscillations peut être diminuée en augmentant la longueur de la série temporelle.

Le tableau comparatif 3.7, montre les excellents résultats qui nous avons obtenus à partir de



(a) Intégrale de corrélation

(b) Dimension de corrélation

FIGURE 3.26 – Estimation de D_2 à partir de la série de position repliée.

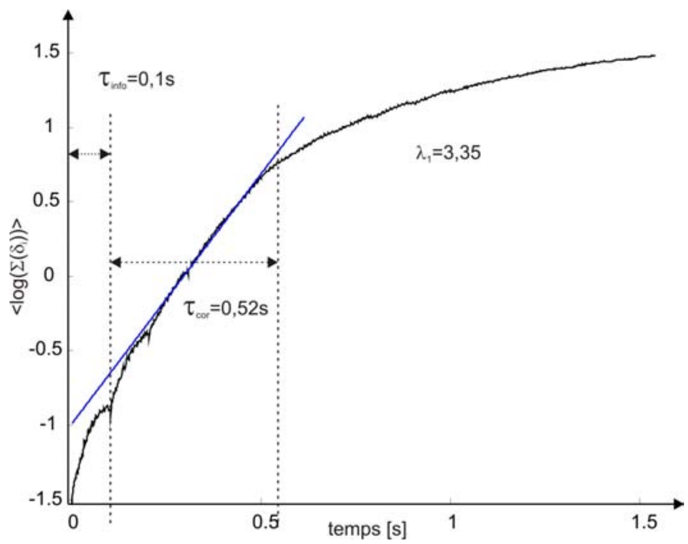


FIGURE 3.27 – Estimation de λ_1 à partir de la série de position repliée et plongée.

la position, grace à notre méthode de repliement.

-	τ_{info} [s]	D_2	λ_1 [bits/s]
Série de position	$0,1$	$2,49$	$3,35$
Série de vitesse	$0,1$	$2,7$	$3,3$

TABLE 3.7 – Comparaison des invariants

C'est le moment de faire une remarque importante. Il faut avoir conscience que le critère de choix du coefficient k qui fixe la largeur du repliement (équation 3.64) est la valeur qui aboutit à la région d'estimation de la dimension fractale la plus large avec l'erreur la plus petite. C'est dire qu'il est obtenu par une analyse itérative...

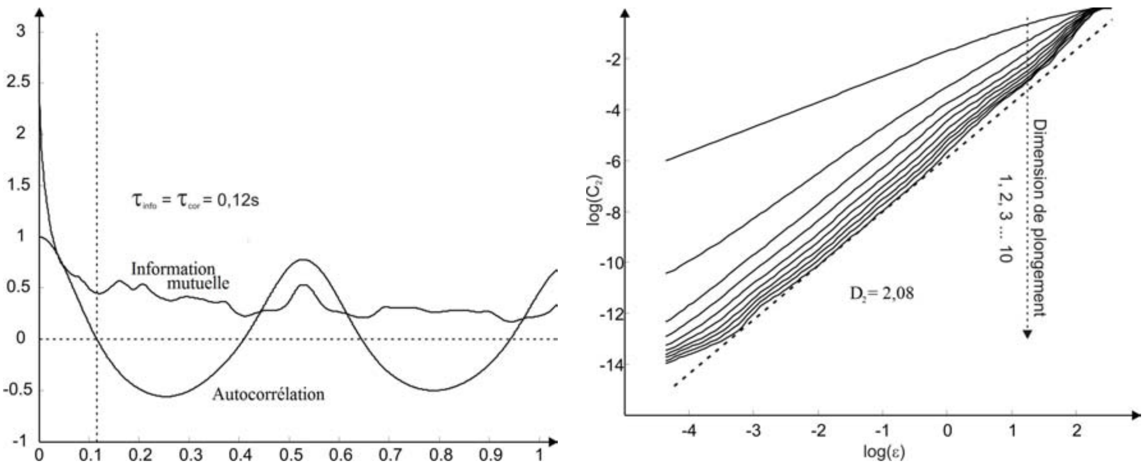
Comme on le verra au chapitre IV, cette méthode ne pourra finalement pas être appliquée aux données expérimentales. Les écarts d'inductance entre les trois phases ne posent pas de réel problèmes. En revanche, les fluctuations importantes de ces inductances le long du stator dégrade complètement l'efficacité du repliement. Comme indiqué plus haut, nous proposerons une autre approche basée sur l'ergodicité du processus.

3.4.3.2 Deuxième cas

a) Plongement

Le deuxième cas simulé considère une situation plus proche de la réalité de notre prototype. Les paramètres ont été modifiés, d'abord pour éviter la saturation du noyau magnétique observé dans la pratique, en utilisant un courant plus petit de 6 A. De plus, nous prenons en compte les frottements fluide et sec ainsi que les trois valeurs différentes pour les inductances des trois phases. Enfin, nous avons fixé la tension d'alimentation à $30V$ pour coïncider avec la valeur utilisée sur le banc d'essais.

Nous avons pu constater que les trois valeurs différentes d'inductance n'ont pas d'effet sur les paramètres de plongement. La figure 3.28(a) donne dans les deux cas (inductances égales au non) le retard de plongement $\tau_{info} = \tau_{cor} = 0,12\ s$ et les faux plus proches voisins la dimension de plongement $D_e = 5$. Dans les deux cas, la dimension fractale est égale à $D_2 = 2,08$, (figure 3.28(b)).



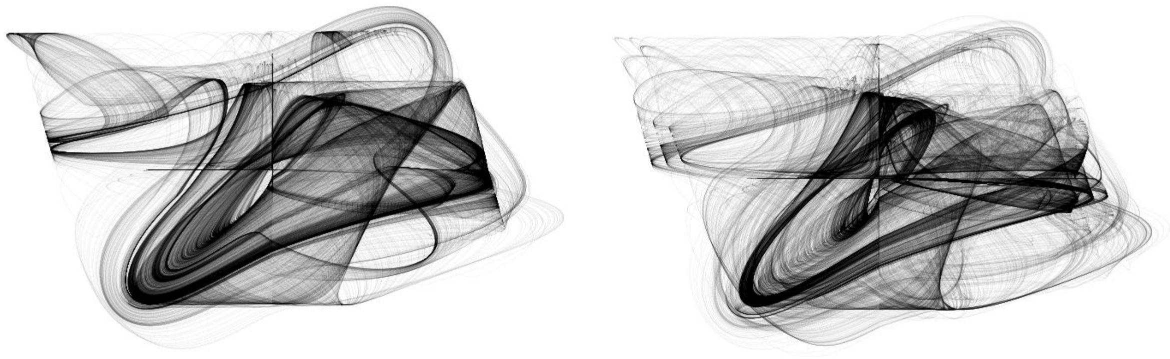
(a) Retard de plongement (b) Dimension de corrélation

FIGURE 3.28 – Estimation de D_2 à partir de la série de la vitesse.

La figure 3.29(a) présente le plongement de l'attracteur dans le cas où les trois inductances sont identiques tandis que la figure 3.29(b) montre ce que devient l'attracteur lorsque les inductances sont différentes. On observe très bien la manifestation du frottement sec qui annule fréquemment la vitesse instantanée. L'ensemble des échantillons acquis à vitesse nulle s'observe sous la forme des deux lignes perpendiculaires sécantes à l'origine.

b) Invariants

Nous avons utilisé la méthode HQR pour determiner les exposants de Lyapunov à partir du système variationnel. Les estimations sont regroupées dans le tableau 3.8.



(a) $L_1 = L_2 = L_3$ (b) $L_1 \neq L_2 \neq L_3$

FIGURE 3.29 – Reconstructions des attracteurs par plongement de la vitesse.

Inductances	τ_{info}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	D_L	D_2
$L_1 \neq L_2 \neq L_3$	0,12	2,40	0,0	-5,72	-368,55	-388,99	-439,92	2,42	2,08
$L_1 = L_2 = L_3$	0,12	4,05	0,0	-7,52	-356,69	-414,46	-469,3368	2,54	2,08

TABLE 3.8 – Spectre de Lyapunov et dimensions fractales

Á ce niveau nous constatons une forte variation de l'exposant positif qui passe de $\lambda_1 = 4,05$ dans le cas idéal à $\lambda_1 = 2,4$ avec des inductances dispersées. Cette diminution est essentiellement compensée, de manière algébrique, par l'augmentation du premier exposant négatif. En conséquence, on peut constater que la dimension de Lyapunov, estimée par la conjecture de Kaplan-Yorke, ne varie que très peu. Ce résultat est tout-à-fait cohérent avec les estimations de la dimension de corrélation que nous avons trouvées identiques dans les deux cas.

3.4.3.3 Troisième cas

Pour la dernière analyse nous présentons une série avec une forte composante périodique. Nous l'obtenons dans les mêmes conditions que la précédente mais à une fréquence légèrement inférieure $f = 3,77\ Hz$. Dans ce cas, la detection d'un régime chaotique ou quasi-périodique devient délicate. La figure 3.30 représente une projection de l'attracteur reconstruit par plongement de la vitesse. La figure 3.31 illustre les paramètres de plongement : $\tau_{info} = 0,1\ s$ et $D_e = 3$.

La périodicité des passages à zéro de l'autocorrélation et la symétrie de l'information mutuelle indiquent la présence de composantes périodiques. De plus, la coïncidence entre les passages à zéro de l'autocorrélation et les minimums locaux de l'information mutuelle indiquent une dépendance linéaire des échantillons de la série.

Il est habituel de chercher à lever l'indetermination entre chaos et quasi-périodicité en examinant le spectre de Fourier. La figure 3.32(a) rappelle le spectre de Fourier continu obtenu en regime chaotique dans le premier cas étudié. La figure 3.32(b) montre le spectre de l'attracteur qui nous analysons ici. On pourrait en conclure hâtivement qu'il s'agit d'un spectre de raies correspondant à un attracteur quasi-périodique. Cependant, on note que les fréquences ne sont pas linéairement indépendantes. Outre la fréquence de l'excitation, on remarque un verrouillage sous-harmonique trois vers $1,26\ Hz$ et le développement de ses harmoniques. Néanmoins, il ne s'agit en réalité que des prémices d'un verrouillage sous-harmonique, c'est-à-dire d'un fonctionnement périodique.

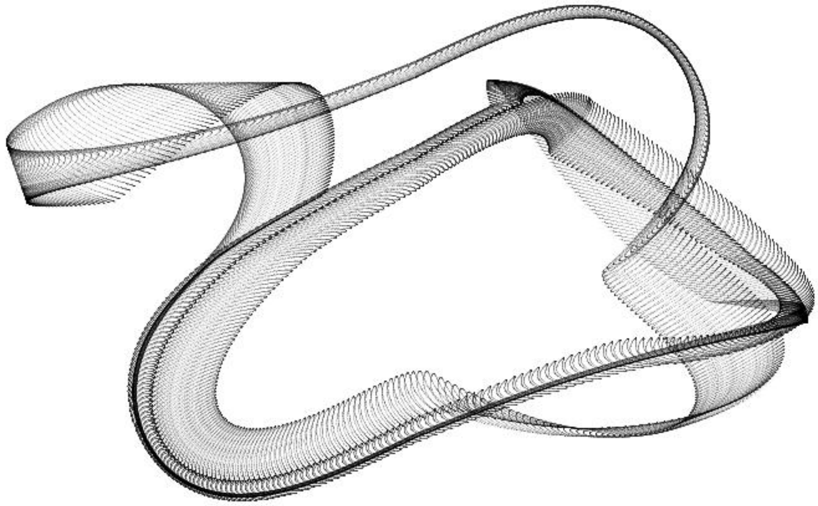
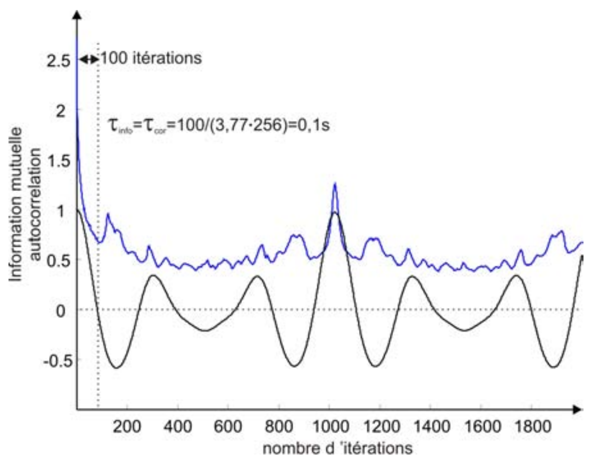
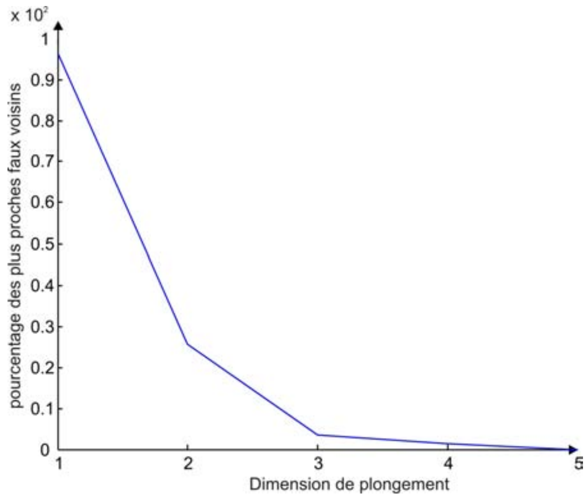


FIGURE 3.30 – Reconstruction de l'attracteur par plongement de la vitesse.



(a) Retard de plongement



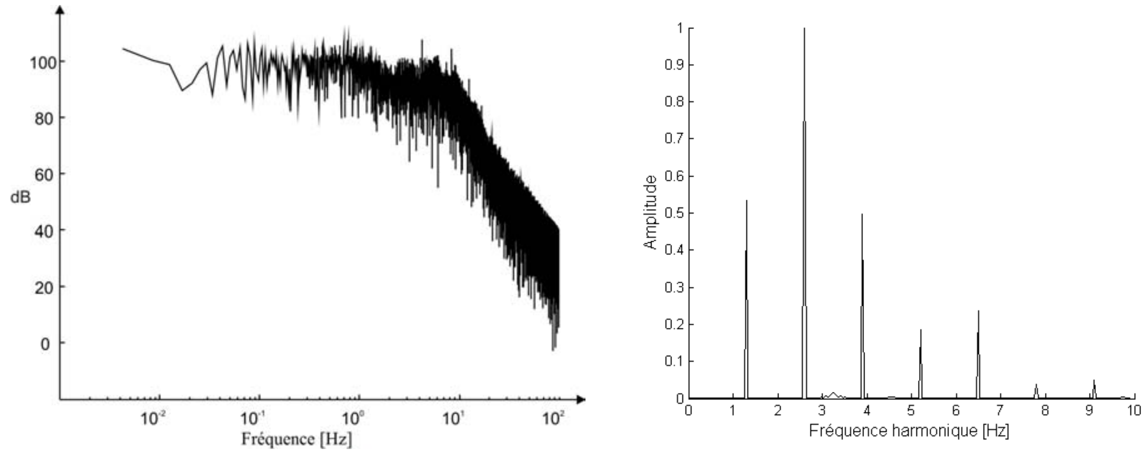
(b) Faux plus proches voisins

FIGURE 3.31 – Paramètres de plongement

En effet un indice important de périodicité ou de quasi-périodicité est fourni par la section de Poincaré. La section de Poincaré d'un attracteur périodique est constituée d'un ensemble fini de points. Celle d'un attracteur quasi-périodique est formée d'une ou plusieurs courbes fermées.

Or, la section de Poincaré projetée sur la figure 3.33 ne révèle pas de telles structures.

Bien sûr, l'indice le plus probant d'un régime quasi-périodique reste l'existence de deux exposants nuls dans le spectre de Lyapunov, accompagnés d'exposants négatifs. Or, le tableau 3.9 révèle un exposant positif et un seul exposant nul. Nous pouvons donc en déduire que, contrairement aux apparences, l'attracteur analysé est tout-à-fait chaotique. D'ailleurs, la dimension de Lyapunov estimée est non-entière. De fait, un examen minutieux du spectre de Fourier de la figure 3.32(b) aurait mis en évidence un spectre continue de faible amplitude très largement



(a) Transformée rapide de Fourier (b) Spectre de fréquence

FIGURE 3.32 – Analyse en fréquence de la variable vitesse

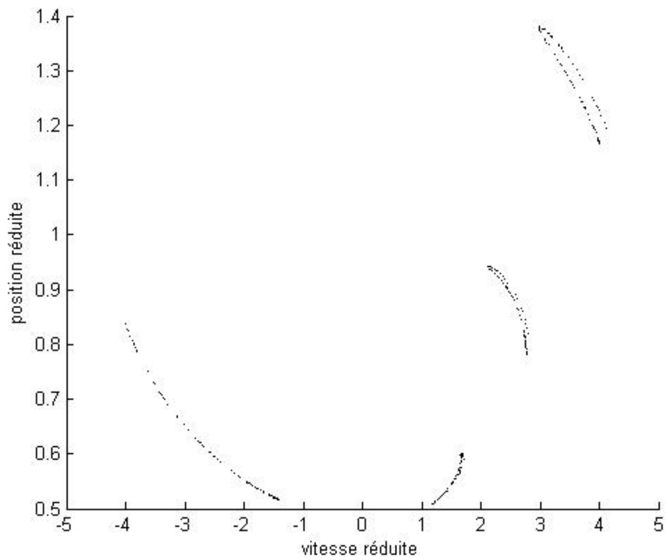


FIGURE 3.33 – Projection de la section de Poincaré

dominé par des raies de périodicité.

Cette analyse est complétée par l'évaluation de la dimension de corrélation illustrée sur les figures 3.34 et 3.35. Nous avons obtenu $D_2 = 1,8$, ce qui est cohérent avec la dimension de Lyapunov puisque $D_2 < D_L$.

Ce dernier cas d'étude nous aura permis de montrer avec quelle prudence il faut en venir aux conclusions en matière d'analyse des attracteurs. On ne doit jamais baser sa conclusion sur le fait d'un seul indicateur mais toujours s'assurer de la cohérence d'un ensemble d'indices avant de se determiner.

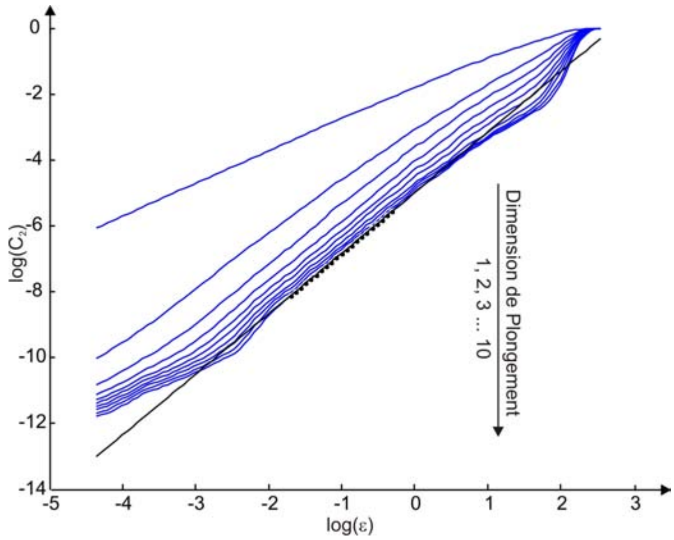


FIGURE 3.34 – Estimation de la dimension de corrélation

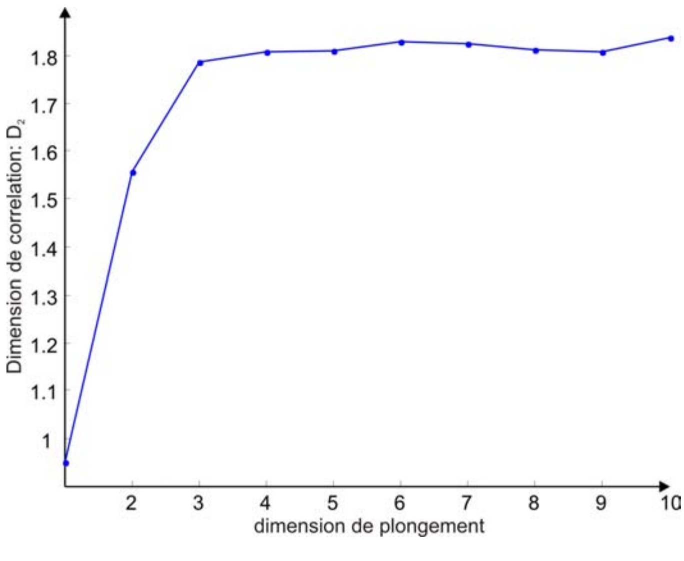


FIGURE 3.35 – Estimation de la dimension de corrélation

Inductances	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	D_L	D_2
$L_1 \neq L_2 \neq L_3$	1.19	0.0	-4.73	-355.86	-428.85	-460.23	$2,25$	$1,8$

TABLE 3.9 – Exposants de Lyapunov et dimension de Lyapunov

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré comment exploiter la simulation numérique d'un modèle simplifié du moteur pour paramétrer correctement les différents algorithmes d'estimation des dimensions fractales et des exposants de Lyapunov. Ces paramètres de calculs seront appliqués aux données expérimentales dans le chapitre suivant. Nous avons introduit dans la première partie les différentes notions et méthodes mises en œuvre pour analyser les comportements apériodiques et détecter le chaos. Parmi les méthodes d'estimation des exposants de Lyapunov basées sur le modèle différentiel, l'intégration du système variationnel associée à une orthonormalisation HQR discrète est apparue la plus pertinente. Cependant, l'othonormalisation QR continue a également produit de bons résultats.

Quelques développements sur l'estimation du spectre de Lyapunov et les méthodes d'orthonormalisation ont été faits pour introduire une contribution significative à l'amélioration de l'algorithme HQR discret que nous avons proposée dans cette partie. Basée sur une application originale du théorème d'ergodicité d'Oseledec, notre algorithme permet un gain de temps de l'ordre de 30% par rapport à l'algorithme de CHEN, à précision égale ou supérieure. Nous avons également programmé dans l'environnement C++ une boîte à outils performante permettant de simuler les trajectoires, de calculer les sections de Poincaré, les diagrammes de bifurcation uni et bi-dimensionnels, d'estimer les exposants de Lyapunov par les méthodes QRC, GSM, HQR et dans ce dernier en utilisant un développement en série ou un noyau intégrateur.

Dans la deuxième partie, les performances du modèle simplifié ont été appréciées par comparaison avec celles du modèle à tubes de flux. La grande similitude des résultats produits par les deux modèles a été montrée en comparant des diagrammes de Feigenbaum et des sections de Poincaré projetées en deux dimensions ou en trois. Cet ensemble de comparaisons nous a permis de justifier l'usage du modèle simplifié et sans dimension pour générer des séries temporelles simulées dans la troisième partie.

Le comportement dynamique global du moteur a été exploré, dans la troisième partie, en utilisant un diagramme de bifurcation bidimensionnel. Ce diagramme a permis d'expliquer pourquoi, au cours d'une translation du moteur, alimenté à fréquence constante, on observe parfois sur le prototype que le mouvement régulier bifurque vers un mouvement erratique. Cela a permis également de conclure quant à l'importance prépondérante de l'amplitude de l'inductance des phases comme paramètre de bifurcation et de souligner, une fois encore, que les phénomènes physiques secondaires, tels que le frottement ou la saturation, ne sont pas à l'origine du chaos dans ce type d'actionneur même s'ils exercent une certaine influence sur son aspect. Nous avons aussi montré sur la base d'un exemple qu'il faut se montrer très prudent dans l'interprétation des résultats de ce genre de diagramme.

Dans cette partie, nous avons aussi présenté trois exemples d'analyse d'attracteurs chaotiques. Avec le premier, qui détaille l'application des méthodes, nous avons montré que le réglage paramétrique des algorithmes est très délicat et qu'il ne peut être conduit sans une solide aptitude à interpréter les résultats et à les mettre en cohérence. Nous en avons conclu, de façon plus générale, que livrer un résultat sur un exposant de Lyapunov ou une dimension fractale sans rien préciser des algorithmes et de leurs réglages n'a pas grand sens. Le deuxième exemple, plus proche de la réalité expérimentale, a montré que la dispersion des valeurs des inductances sur les trois phases modifie sensiblement les premiers exposants de Lyapunov mais n'affecte pas la dimension fractale de l'attracteur. Enfin, l'étude d'un troisième cas litigieux, où un comportement chaotique est fortement dominé par des composantes périodiques, a mis en évidence toute l'importance de ne jamais se satisfaire d'un seul indicateur mais de toujours rechercher la cohérence d'un faisceau d'indices pour analyser un attracteur chaotique.

4

Analyses de données expérimentales

Sommaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on applique les méthodes d'analyse non-linéaire, présentées dans le chapitre 3, aux séries temporelles acquises. Deux genres de séries sont traitées : la position acquise par le codeur optique et la vitesse obtenue par dérivation numérique. L'idée est de détecter et caractériser le régime chaotique par les estimations d'une dimension fractale, d'une part, et du plus grand exposant de Lyapunov, d'autre part. Générer la série temporelle de vitesse est nécessaire pour réaliser ces estimations dans les meilleures conditions. D'un autre coté, l'objectif est aussi de valider l'estimation de la dimension fractale par comparaison des résultats obtenus indépendamment sur les deux séries.

Cependant, la variation de l'amplitude de l'inductance, sur une même phase, le long du parcours, en raison des imperfections de la réalisation mécanique, peut être considérée comme une variation de paramètre du système dynamique modélisant la machine. Par conséquent, le comportement dynamique peut subir des bifurcations au cours du déplacement. Dans ce cas, la série temporelle reflétant successivement ces dynamiques, les estimations précedentes dépendraient alors de la fenêtre temporelle étudiée. L'exposant de Lyapunov et le dimension fractale ne seraient donc plus invariants. Pour cette raison, on comprend aisément que la méthode d'acquisition elle-même est d'importance cruciale. Nous y reviendrons plus loin dans ce chapitre.

De plus, il est nécessaire de valider les estimations expérimentales des invariants, eu égard à l'influence que les bruits de mesures pourraient avoir sur ces résultats. Dans ce but, les séries temporelles expérimentales et les invariants estimés doivent être comparés précisément avec ceux obtenus par simulation du modèle dynamique simplifié (voir chapitre 2) évidemment dépourvu de bruit.

Enfin, on aura soins de discuter les résultats, de chaque estimation, en proposant une interprétation physique.

4.2 Séries temporelles expérimentales

4.2.1 Stratégie d'acquisition

Au chapitre 3, la figure 3.13 a montré l'existence de régimes chaotiques dans la zone comprise entre 3 Hz et 5 Hz, l'intervalle étant dépendant de l'amplitude de l'inductance considérée identique pour les trois phases. Expérimentalement, la zone de chaos est située dans l'intervalle allant de 4 Hz à 7 Hz. Ce décalage relativement modeste est aussi dû à deux défauts expérimentaux. Premièrement, comme cela a été mentionné en introduction de ce chapitre, l'amplitude de l'inductance, c'est à dire sa valeur sur les positions d'équilibre quand les dents sont alignées, n'est pas constante au cours du déplacement. En effet, la réalisation mécanique imparfaite du prototype introduit une variation non négligeable de la réluctance minimale de l'entrefer selon la zone de déplacement. Voir à ce sujet la figure 2.35 dans la section 2.4.2. Deuxièmement, il existe une disparité significative dans la construction des trois phases en sorte que, même alignées sur une même position statorique, les trois inductances de phase ne sont pas identiques, contrairement à ce qui a été supposé dans le modèle de simulation. Voir à ce sujet la figure 2.36 dans la section 2.4.2. Compte tenu de cet état de fait, nous avons pris soin de programmer les déplacements du moteur en aller/retour sur une région d'amplitude d'inductance approximativement égale. Cette approche convient bien pour les régimes de fonctionnement périodiques.

Cependant, dans le cas de régimes apériodiques, et surtout chaotiques, le mouvement est imprévisible. Dès lors, le déplacement du chariot n'a plus rien à voir avec les aller/retour espérés et programmés dans la séquence d'alimentation des phases. On constate alors que le chariot quitte inopinément la région souhaitée. En raison des variation du paramètre inductances maximales des phases, des points de bifurcations sont franchis et, en conséquence, les comportements dynamiques changent de nature au cours du temps comme cela est illustré sur la figure 4.1. Une telle bifurcation est facilement détectable visuellement sur le prototype ou sur un relevé d'acquisition quand il s'agit d'une bifurcation entre un régime périodique et un régime apériodique. En revanche, une bifurcation entre deux régimes apériodiques, correspondant par exemple à deux attracteurs chaotiques, n'est habituellement décelable qu'au moyen d'une analyse approfondie.

Afin d'éviter la superposition de plusieurs attracteurs sur une même série temporelle, il convient de limiter l'acquisition à la zone de fonctionnement voulue. Dans la pratique, et en restreignant le propos au mode chaotique, on poursuit les acquisitions tant qu'on ne quitte pas la zone chaotique. Lorsque la bifurcation se produit, par exemple au bout de 55 secondes environ sur la figure 4.1, on stoppe l'acquisition et on clôt le fichier. On réitère la procédure, en ayant soin de démarrer avec la même position initiale, autant de fois que nécessaire pour disposer d'un volume de données suffisant pour réaliser des estimations réalistes. L'ensemble de l'analyse présentée dans ce chapitre s'appuyant sur la théorie ergodique du chaos [Eckmann 85a], ce mode opératoire est tout à fait justifié. La troncature des fichiers individuels et la concaténation finale sont automatisées dans $MATLAB^{®}$. De fait, cette procédure s'impose assez naturellement puisqu'il s'agit d'un moteur linéaire dont l'excursion est naturellement limitée. Il n'est donc pas possible de réaliser de très longues acquisitions en continu comme cela avait été fait dans la thèse de monsieur François ALIN [Alain 05] à propos d'un moteur rotatif.

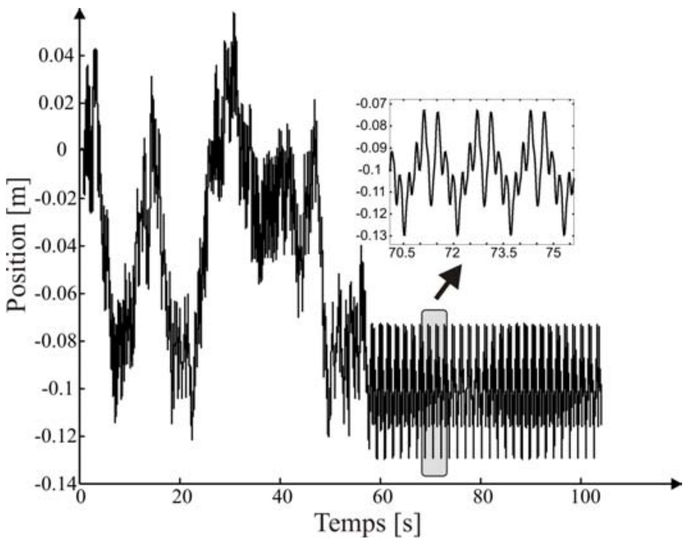


FIGURE 4.1 – Variation du comportement dynamique à 5 Hz.

4.2.2 Période d'échantillonnage

Au chapitre II, une estimation de la capacité de transfert de la liaison série RS232 a été présentée dans le cas d'un échantillonnage à chaque top du codeur. Il a été montré qu'en utilisant cette méthode, la transmission des trois séries (position, inductance, temps) est incompatible avec des vitesses instantanées supérieures à $0,2\ m/s$. La fréquence maximale des essais du moteur est fixée à 10 Hz. A cette fréquence, la vitesse moyenne est de $0,12\ m/s$ en sachant qu'un pas est égal à 12 mm. Cependant, en basse fréquence, les oscillations de la vitesse peuvent dépasser

$0,2\ m/s$ (voir par exemple la figure 2.16) et atteindre $0,5\ m/s$ selon la position et l'intensité du courant d'alimentation.

Pour éviter la perte de données occasionnée par le faible débit de la liaison série RS232 entre la carte commande et le PC, il faut tripler la vitesse maximale de la capacité de la liaison. Nous avons donc veillé à réduire le volume de données à enregistrer en ne conservant qu'une seule série de donnée au lieu de trois. Contrairement à ce qui a été réalisé et présenté dans la section 2.2.4, il n'est pas utile ici d'enregistrer les estimations de l'inductance pour réaliser l'analyse du chaos à partir de la série temporelle de position. De plus, l'analyse du chaos dans les séries temporelles requiert de disposer d'échantillons à intervalle de temps constant (voir la section 3.2.3 concernant le plongement). Par conséquent, au lieu de traiter tous les tops du codeur, nous avons opté pour un échantillonnage de la position réalisé à période constante. Il n'est donc plus nécessaire de coder et transférer les informations de temps des échantillons puisque les instants sont connus.

Le choix de la période d'échantillonnage résulte d'un compromis entre les besoins aux deux extrémités de la gamme de vitesse. Aux basses fréquences d'alimentation, les oscillations atteignant $0,5\ m/s$ donnent un top codeur tout les $200\ \mu s$ sachant que le codeur a une résolution de $0,1\ mm$. Toutefois, ces oscillations diminuent à mesure que la fréquence d'alimentation augmente et à l'autre extrémité, soit à $10\ Hz$, l'intervalle de temps entre tops codeur est d'environ $833\ \mu s$. Il n'est pas pertinent de retenir la période d'échantillonnage de $200\ \mu s$, bien qu'elle soit compatible avec la vitesse de transfert de la liaison série, car elle conduit à une forte redondance des mesures de position dès que l'on s'éloigne du régime d'oscillation. On choisit une période d'échantillonnage intermédiaire, $Te = 520\ \mu s$, qui élimine la redondance au-dela de $0,192\ m/s$.

Dans ces conditions d'échantillonnage, nous avons réalisé l'acquisition de six séries. Pour les besoins de l'analyse, une série temporelle doit comporter au minimum 20000 échantillons, 100000 étant très satisfaisant. Acquises à la fréquence d'alimentation de $6\ Hz$, les six séries, de 85 périodes chacune, comptent 320 échantillons par période soit 27243 échantillons. La reconstitution d'une série unique permet d'obtenir un attracteur de 163458 points au total.

4.2.3 Acquisition de la position

On souhaite obtenir un aperçu global de la localisation des différents régimes de fonctionnement du moteur au moyen d'un diagramme de Feigenbaum avant de procéder à l'analyse d'un mode chaotique. Le paramètre de bifurcation est la fréquence d'alimentation du moteur. Pour éviter les effets induits par la dérive de l'amplitude de l'inductance, nous appliquons une commande en aller/retour sur quatre pas seulement. Dans le cas des dynamiques périodiques, cette commande permet de prolonger les acquisitions sans avoir à recaler le chariot sur sa position initiale, ce qui reste nécessaire pour les modes apériodiques.

La figure 4.2 présente un diagramme de Feigenbaum couvrant la gamme de fréquences entre $2\ Hz$ et $10\ Hz$. Il apparaît que les comportements apériodiques se manifestent dans la région comprise entre $4\ Hz$ et $7\ Hz$. A $6\ Hz$, la stabilité de l'attracteur chaotique permet d'acquérir des séries de plus de 20000 points avant interruption et recalage sur la position initiale. Il existe toutefois une incertitude expérimentale sur la condition initiale. Une première source d'incertitude est due au frottement sec qui introduit une bande morte autour de la position d'équilibre théorique lorsque la force de traction devient faible. De plus, une seconde source d'incertitude est due à la différence de largeur des dents du stator et du translateur qui est à l'origine d'une zone de dérivée nulle de la réluctance autour des positions d'équilibre idéales (voir Chapitre I Section 1.4.1). Dans la pratique, on verra que cette région peut être estimée expérimentalement (voir section 4.5.2 dans ce chapitre). Dans cet intervalle, la force de traction est nulle ce qui ajoute encore à la bande morte du frottement. Dans ce domaine d'incertitude, la position d'équilibre n'est pas définie par un point mais par un intervalle sur lequel la force de traction est nulle ou plus faible que le frottement sec.

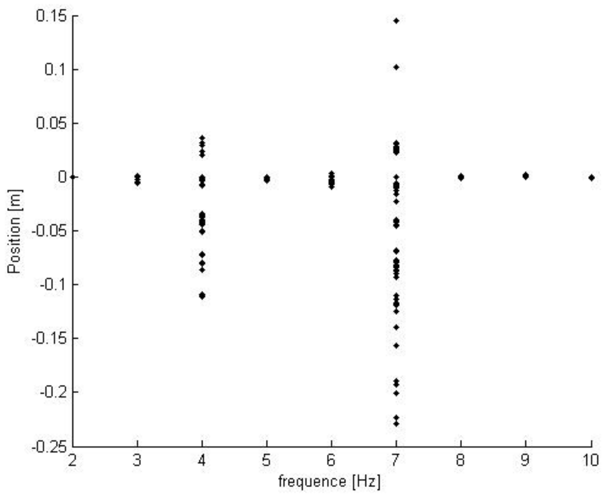
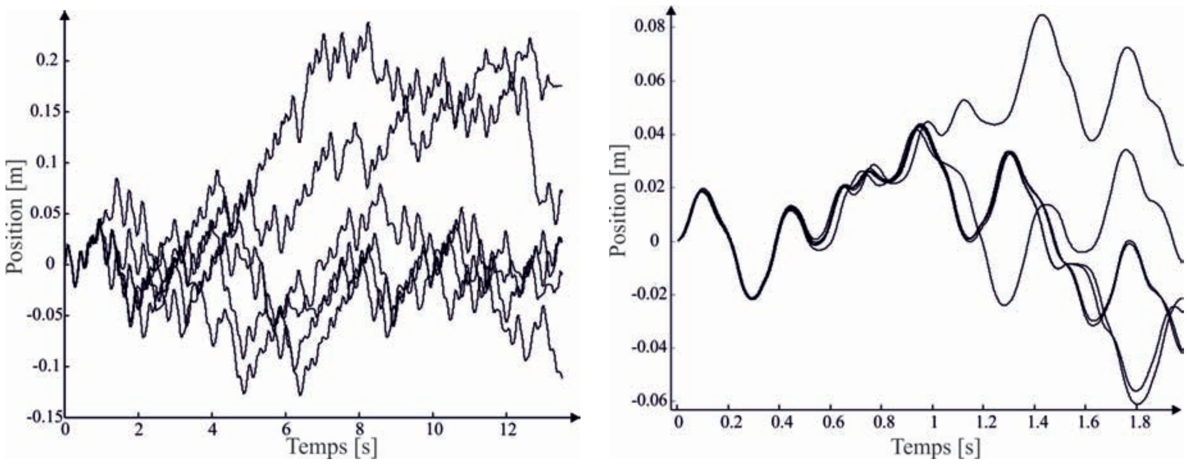


FIGURE 4.2 – Diagramme de Feigenbaum

La figure 4.3(a) représente en superposition les six acquisitions de position réalisées à 6 Hz et initialisées au même point, aux incertitudes mentionnées ci-dessus près. Sur le zoom de la figure 4.3(b), on observe que les trajectoires divergent rapidement les unes des autres au-delà de $0,9$ s environ. La sensibilité de la dynamique à la condition initiale constitue le premier indice d'un comportement réellement chaotique du moteur à cette fréquence.



(a) Acquisition de position à 6Hz (b) Zoom

FIGURE 4.3 – Acquisition de position à 6 Hz. Sensibilité aux conditions initiales.

4.2.4 Dérivation de la vitesse

Les séries temporelles de vitesse sont générées par dérivation numérique des séries de position. En procédant directement par differentiation d'un échantillon à l'autre, compte tenu de la résolution du codeur limitée à $0,1\ mm$ et de la période d'échantillonnage fixée à $520\ \mu s$, la figure 4.4 montre que la résolution en vitesse vaut $0,192\ m/s$, ce qui est inacceptable au regard de la gamme de vitesse à couvrir $(0 - 0,5\ m/s)$.

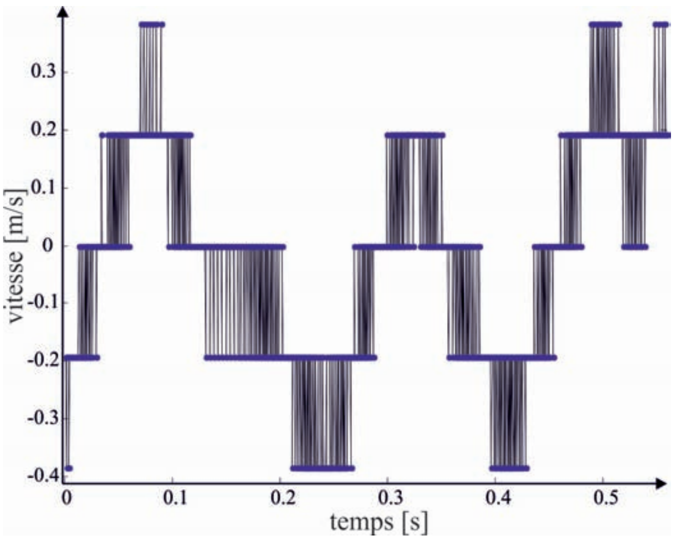


FIGURE 4.4 – Dérivée de la position : faible résolution sur la vitesse

On préfère appliquer à la position un filtre differentiateur agissant sur un horizon de temps plus long pour améliorer la résolution en vitesse. La figure 4.6(a) montre le résultat obtenu avec un filtre de réponse impulsionnelle $[-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$. La série obtenue est représentative de la vitesse car, les acquisitions étant réalisées à temps constant, la division $\frac{\delta x}{T_e}$ est inutile, surtout pour le calcul des dimensions fractales et des exposants de Lyapunov. Le choix de dix échantillons pour le calcul de la dérivé correspond à un intervalle de temps de 9 périodes soit $4,68ms$, ce qui demeure très inférieur à la pseudo-période de l'oscillation mécanique autour des positions d'équilibre ($0,18\ s$ environ, voir figure 4.5).

Les irrégularités restantes ont été éliminées en procédant à un sous-échantillonnage de la vitesse, de rapport 1/30, suivi de l'application d'un interpolateur cubique pour reconstituer les échantillons. De manière pratique, cela a été réalisé en utilisant la fonction ***spline*** implantée dans $MATLAB^{®}$. Voir B.5. La figure 4.6(b) montre l'amélioration obtenue par un effet de lissage.

Ce traitement est appliqué aux six séries de position représentées sur la figure 4.3(b). Les séries de vitesse ainsi obtenues sont représentées sur la figure 4.7.

4.3 Plongement et reconstruction

4.3.1 Estimation des paramètres de plongement

Les méthodes exposées dans le chapitre précédent sont maintenant appliquées aux séries expérimentales pour déterminer les paramètres de plongement : retard et dimension. Calculée sur la série de la position, la fonction d'information mutuelle est représentée sur la figure 4.8(a).

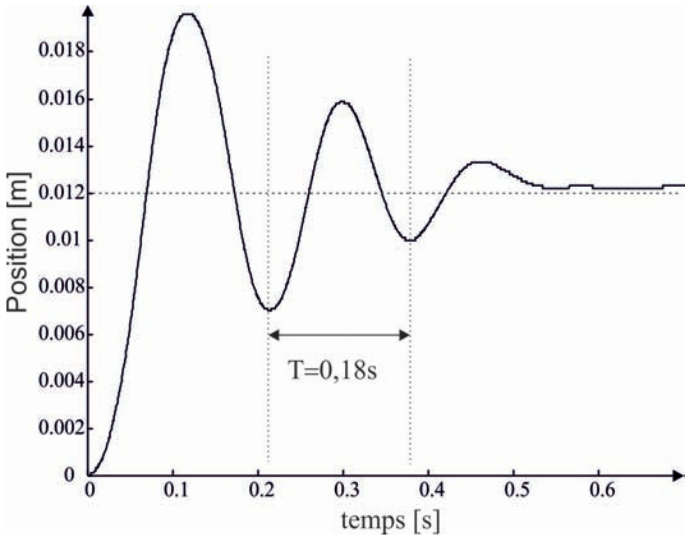
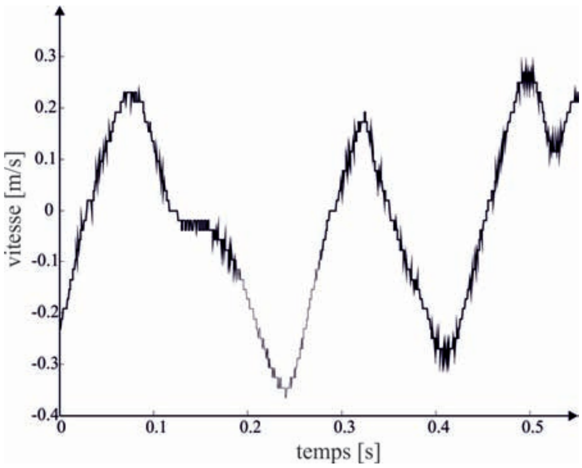
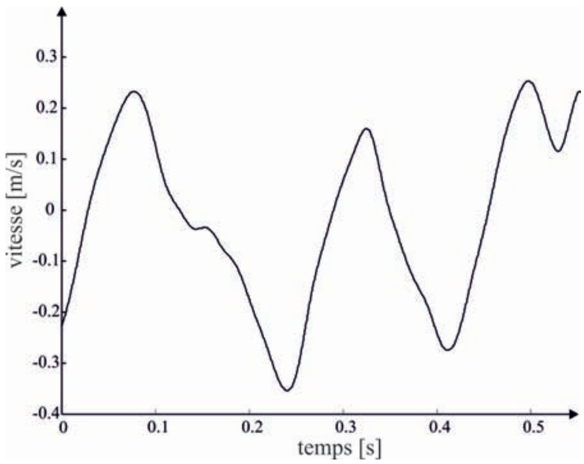


FIGURE 4.5 – Pseudo-période sur un pas mécanique



(a) Application du filtre différentiel



(b) Vitesse après lissage par interpolation cubique

FIGURE 4.6 – Génération de la vitesse à partir de la série de position.

Son premier minimum local indique qu'un retard de plongement approprié devrait être voisin de $\tau = 300$ itérations soit $\tau \approx 0,16\ s$. En remarquera que ce retard correspond à peu près à la période d'un pas. Appliquée à la même série, la méthode des faux plus proches voisins indique qu'une dimension de plongement $D_e = 3$ devrait être suffisante, comme on peut le constater sur la figure 4.15(a).

Les résultats précédents sont maintenant comparés à ceux que les mêmes méthodes produisent quand elles sont appliquées à la série de vitesse. Le premier minimum de l'information mutuelle qui apparaît sur la figure 4.9(a) montre que le retard de plongement devrait être environ deux fois plus court que le précédant : $\tau = 145$ itérations soit $\tau \approx 175\ ms$. De même en choisissant la vitesse comme variable de plongement, la méthode des faux plus proches voisins indique maintenant une dimension de plongement augmentée d'une unité par rapport à la précédente, soit $D_e = 4$. Voir

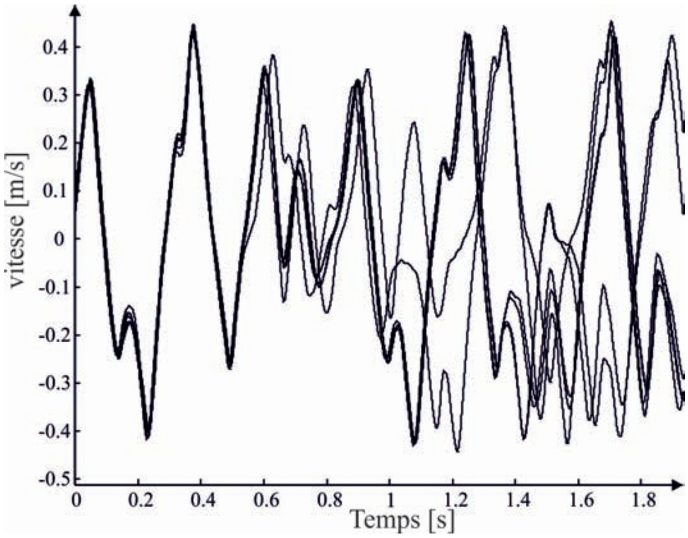
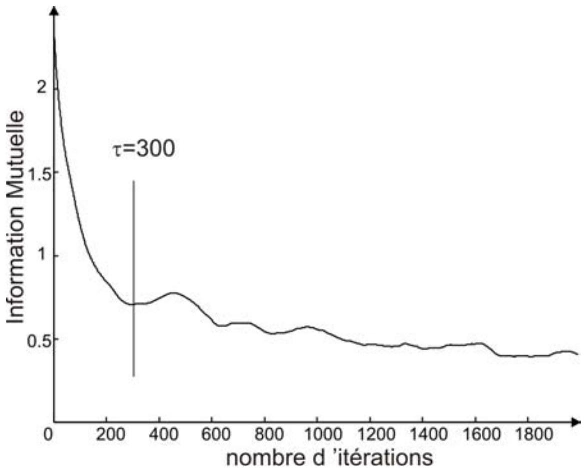
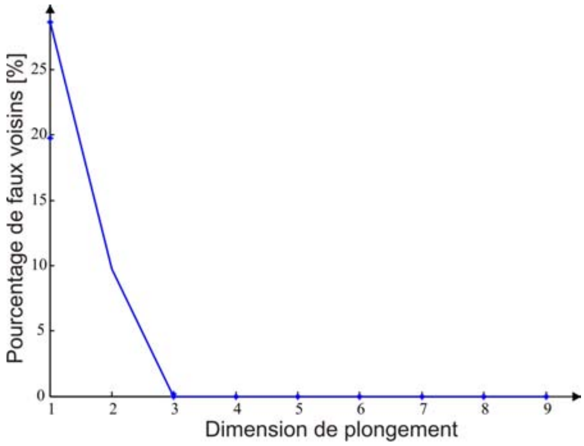


Figure 4.7 – Séries temporelles de vitesse générées à 6Hz.



(a) Information Mutuelle



(b) Faux plus proches voisins

Figure 4.8 – Paramètres de plongement de la série expérimentale de position.

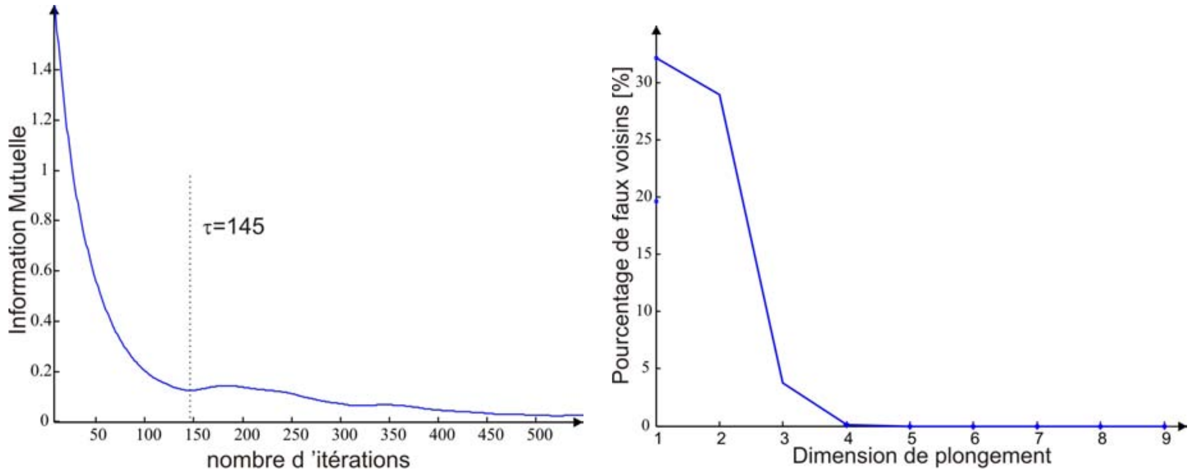
la figure 4.9(b).

Nous reviendrons sur l'interprétation de ces différences aux sections 4.3.2 et 4.3.3, ci-dessous.

4.3.2 Reconstruction d'attracteur

La reconstruction d'un attracteur à partir d'une série temporelle s'opère par la génération de D_e vecteurs, ou dimensions, composés des échantillons de la série. Chaque vecteur est retardé par, rapport au précédent, d'un temps fixe τ (comme vu dans le chapitre 3). Pour la série de position la dimension de plongement appliquée est égale à $D_e = 3$ et le retard de $\tau = 300$ échantillons.

La reconstruction de l'attracteur par plongement de la position est présentée sur la figure 4.10. Cette figure présente une projection de l'attracteur, reconstruit par plongement en trois



(a) Information Mutuelle (b) Faux plus proches voisins

Figure 4.9 – Paramètres de plongement de la série expérimentale de vitesse.

dimensions, sur le plan de ses deux premières coordonnées parallèlement à l'axe de la troisième. Il existe une région de l'attracteur à très forte densité de points située dans la zone délimitée entre les lignes pointillées. En dehors de cette région, la raréfaction des points sur l'attracteur empêche fréquemment de trouver, dans un voisinage suffisamment petit de tout point, les points nécessaires à la convergence des algorithmes d'évaluation des invariants caractéristiques. Par exemple, l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov, par la méthode de Kantz, serait entachée d'une erreur prohibitive et complètement perturbée par le bruit expérimental.

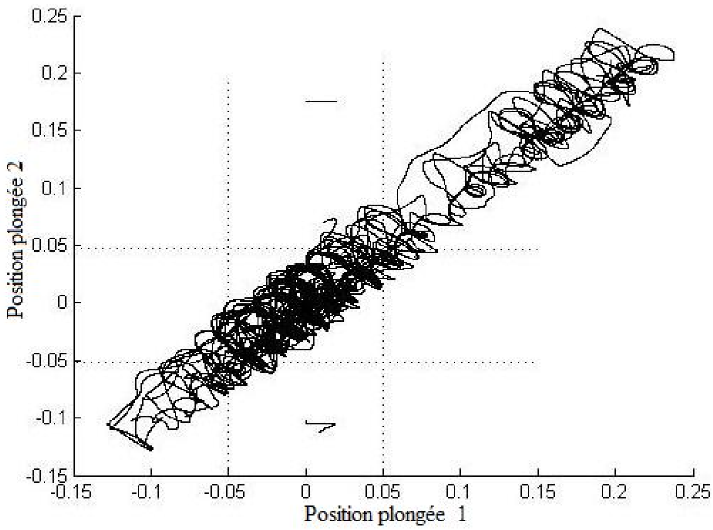


Figure 4.10 – Reconstruction de l'attracteur à partir de la série de position.

Dans le cas de la série de vitesse, l'attracteur a été plongé en quatre dimensions ($D_e = 4$). La figure 4.3.2 montre qu'en plongeant la vitesse on obtient une autre reconstruction de l'attracteur avec un dispersion des points beaucoup plus homogène. L'augmentation de la dimension de plongement, constatée au paragraphe précédent, pourrait dans ce cadre être interprétée comme une conséquence de l'amplification des dynamiques rapides, amplification introduite par la dérivation appliquée à la position. Fondamentalement, l'effort électrodynamique produit instantanément une accélération. Ce n'est qu'après une double intégration physique qu'on accède à la position. C'est dire que la dérivation aura permis de rehausser les dynamiques les plus rapides dont l'influence sur la méthode des faux plus proches voisins était masquée ou diluée dans la grandeur intégrale.

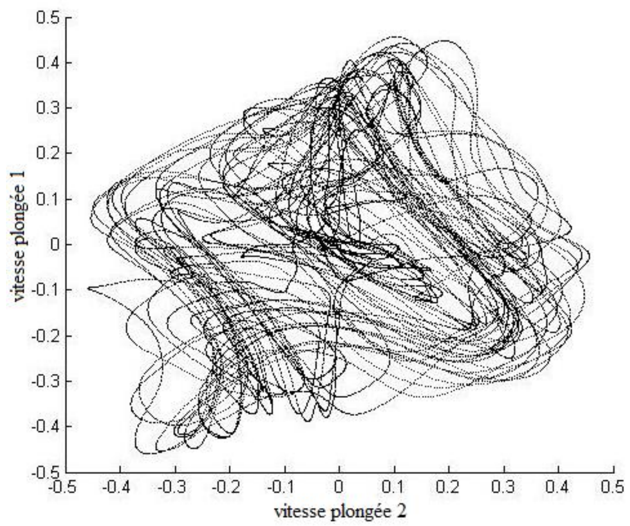


Figure 4.11 – Reconstruction de l'attracteur à partir de la série de vitesse.

4.3.3 Choix de la série

L'analyse précédente, développée au sujet des dynamiques rapides pour interpréter l'augmentation de la dimension de plongement, reste valable à propos du bruit expérimental dont les effets peuvent être amplifiés par la dérivation numérique. Il reste donc, à ce niveau de l'analyse, une ambiguïté sur l'origine réelle de l'accroissement de la dimension de plongement lorsqu'on l'évalue à partir de la série de vitesse au lieu de la série de position.

Certains travaux ont étudié la quantité d'information apporté par les variables d'un système dynamique en utilisant comme paramètre la matrice d'observabilité, voir par exemple [Letellier 05]. Toutefois, au vu des problèmes posés par la faible densité de l'attracteur reconstruit par plongement de la position, il apparaît nécessaire de poursuivre l'estimation des invariants en traitant préférentiellement l'attracteur reconstruit par plongement de la vitesse pour bénéficier d'une plus grande densité de points dans l'espace des trajectoires plongées.

Toutefois, ce choix doit encore être confirmé après avoir vérifié que la série de vitesse porte effectivement de l'information supplémentaire sur l'état du système et que l'on n'est pas en présence d'un artefact d'estimation dû seulement au bruit.

4.4 Dimension fractale

4.4.1 Méthodologie

Pour valider l'apport d'information par l'usage de la série de vitesse et lever l'indétermination quant à l'impact réel du bruit sur les estimations, nous procéderons de la manière suivante. Dans un premier temps, nous évaluerons les dimensions fractales des attracteurs reconstruits par plongement de la position puis de la vitesse. La différence entre les deux résultats sera interprétée en cohérence avec les dimensions de plongement respectives à des fins de validation des estimations. Dans un second temps, les mêmes estimations seront réalisées à partir de données simulées pour s'affranchir du bruit expérimental. Enfin, une comparaison qualitative, deux à deux, des estimations produites par une série simulée et une série expérimentale complétera l'analyse et validera le choix a priori de la vitesse.

Comme cela a été développé au chapitre 3 section 3.2.4, nous avons fait le choix d'évaluer la dimension de corrélation. Cette estimation a été réalisée au moyen de l'algorithme de Grassberger et Procaccia. Dans un premier temps, nous l'avons programmé dans l'environnement $MATLAB^{®}$ afin de conserver la maîtrise de tous ses paramètres. Le programme est reporté à l'annexe B.1. Dans un second temps, nous avons employé le logiciel "open source" $TISEAN^{®}$ développé par Mr. Hogger Kantz [Hegger 99b], [Olbrich 97]. Cela a permis de valider le réglage paramètrique de l'algorithme et de constater un gain de temps d'un facteur supérieur à 10 en faveur de $TISEAN^{®}$.

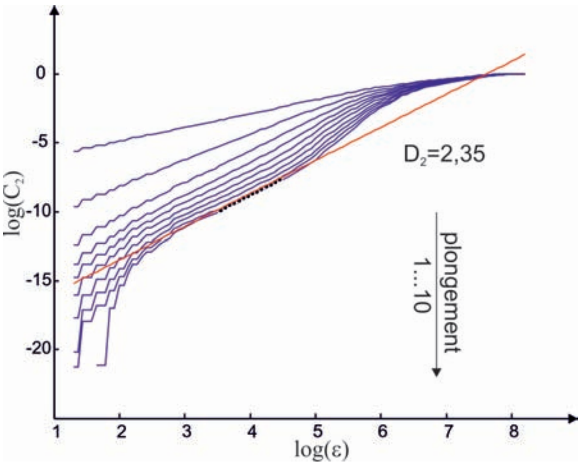
4.4.2 Estimation

L'algorithme de Grassberger et Procaccia est appliqué à la la série de position concaténée pour disposer d'un nombre d'échantillons suffisant, soit environ 163000. Les paramètres retenus sont 1) le retard de plongement évalué à la section 4.3.1, soit $\tau = 300$ et 2) la fenêtre de Theiler d'une largeur de 500 échantillons. La fenêtre de Theiler définit une zone de proximité temporelle des échantillons dans la série. Pour chaque point de la série, les calculs de distance avec les autres points de l'attracteur doivent être inhibés dans la fenêtre en raison de leur forte corrélation. Enfin, 3) la largeur maximale et la largeur minimale d'évaluation ϵ dans un rapport de 1 à 1/1000 sans normalisation de l'attracteur. A noter également que ce sont les valeurs numériques brutes du codeur qui ont été utilisées sans conversion de distance. L'excursion totale du chariot sur l'attracteur chaotique étant de $18cm$ environ, cela équivaut à une amplitude numérique de 1800 ou $e^{7,5}$.

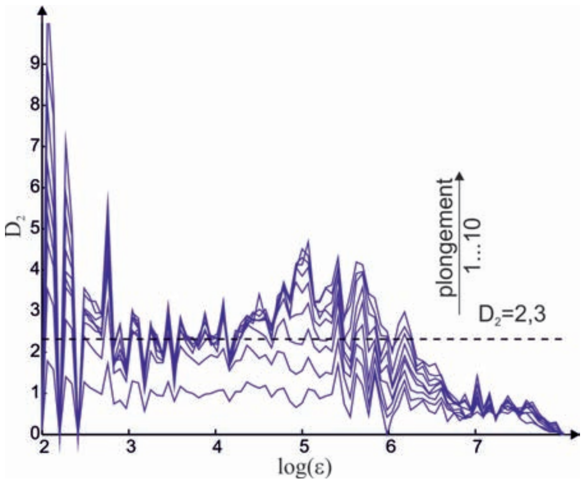
La figure 4.12(a) présente les résultats obtenus pour l'intégrale de corrélation évaluée par plongements successifs dans des dimensions variant de 1 à 10. La pente des courbes correspond à D_2. De manière similaire, la figure 4.12(b) indique directement l'évolution de la dimension de corrélation, estimée sur la zone de plateau, pour différentes valeurs de la dimension de plongement (Voir l'annexe B.1).

Sur la figure 4.13, on observe que l'estimation de la dimension de corrélation converge dès que l'on plonge dans un espace de dimension supérieure ou égale à 3, soit $D_2 = 2,35$. Ce résultat est en totale cohérence avec celui présenté figure 4.15(a) à propos de la méthode des faux plus proches voisins.

On exploite à présent la série de vitesse générée à partir de la série expérimentale de position. L'algorithme de Grassberger et Procaccia est paramétré de la manière suivante : 1) le retard de plongement évalué à la section 4.3.1, soit $\tau = 145$, 2) la fenêtre de Theiler inchangée (500 échantillons) et 3) le rapport $\epsilon_{max/min}$ est augmenté à 10000. Voir l'annexe B.1.



(a) Intégrale de corrélation C_2



(b) Dimension de corrélation D_2

Figure 4.12 – Estimation de la dimension de corrélation D_2 à partir des acquisitions de position

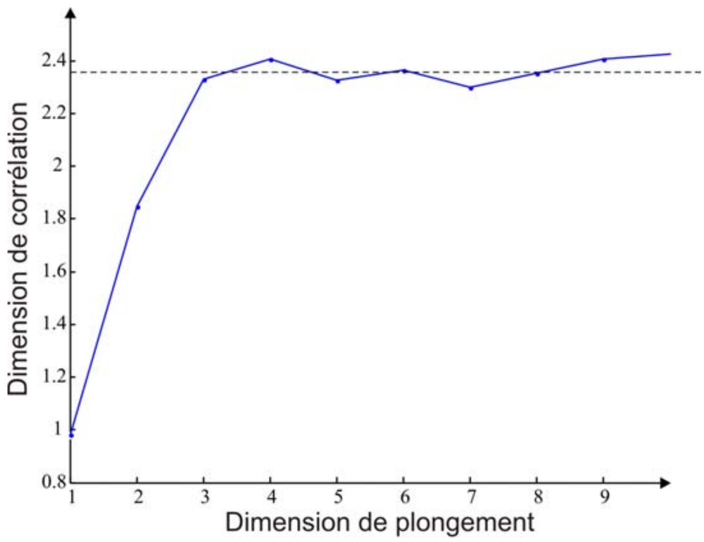
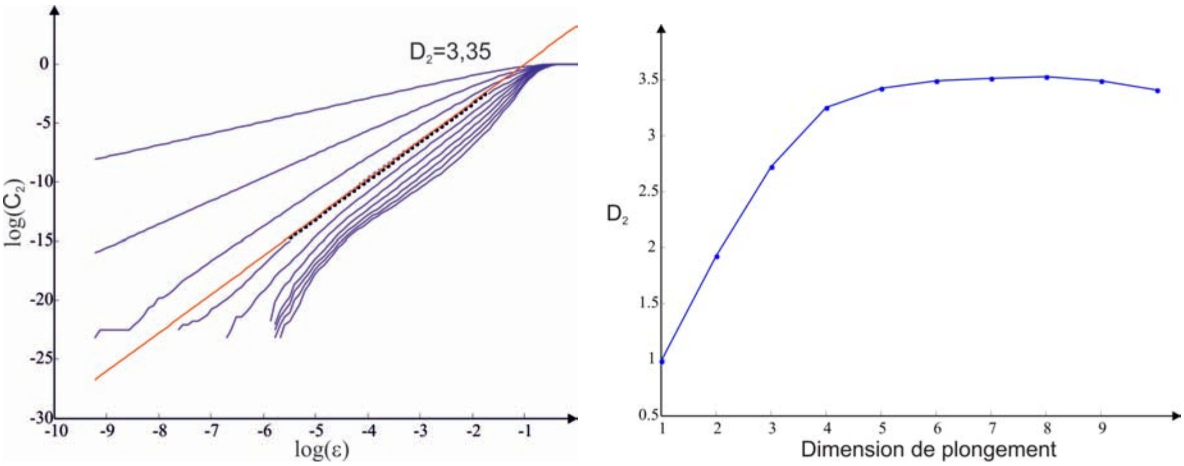


Figure 4.13 – Convergence vers la valeur de D_2

La figure 4.14 établit que la dimension fractale de l'attracteur reconstruit de cette façon est augmentée d'une unité : $D_2 = 3,35$. Cette augmentation de la dimension fractale explique de façon cohérente que la dimension de plongement nécessaire, évaluée par la méthode des faux plus proches voisins à la section 4.3.1, soit passée de $D_e = 3$ à $D_e = 4$. Le rehaussement des dynamiques rapide dans la série de vitesse avec l'amplification des bruits de mesure justifient une plus grande dimension topologique de l'attracteur et par conséquent un espace de représentation de plus grande dimension également. Pour plus de résultats à propos des séries expérimentales, voir [De Castro 10b].



(a) Intégrale de corrélation (b) Convergence vers la valeur de D_2

FIGURE 4.14 – Estimation de la dimension de corrélation D_2 à partir de la série de vitesse.

4.4.3 Comparaison avec la simulation

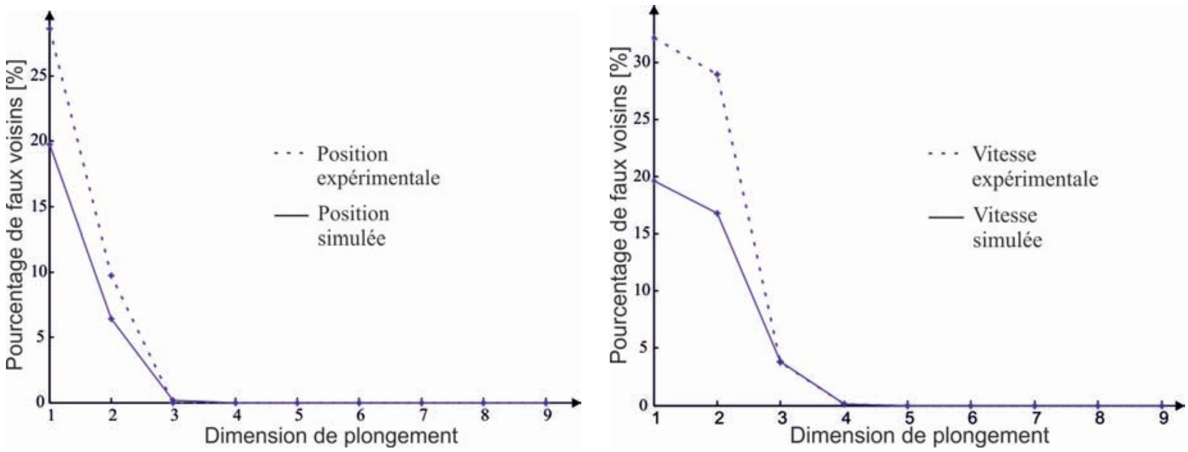
L'objectif principal de la simulation numérique est d'évaluer l'influence du bruit expérimental dans l'estimation de la dimension fractale à partir de la vitesse. Dans ce but, la même méthode d'évaluation est maintenant appliquée aux séries temporelles simulées.

La simulation numérique du modèle produit deux fois six séries de mêmes longueurs pour la position et la vitesse afin de suivre le protocole expérimental. Les paramètres de simulation sont donc : 256 pas par période et 85 périodes par série. Le retard de plongement de la position a été évalué à $\tau = 242$ itérations, soit 158 ms à 6 Hz. La dimension de plongement de la position est identique à celle déterminée avec la position expérimentale : $D_e = 3$. Voir la figure 4.15(a). En ce qui concerne la vitesse, le retard de plongement est trouvé à $\tau = 137$ itérations, soit 89 ms environ. Pour prendre en compte, l'incertitude sur les positions d'équilibre, les six séries ont été initialisées sur les positions suivantes $[mm]$: $x_0 = [0\ 0,1\ 0,2\ 0,3\ 0,4\ 0,5]$.

Les six séries simulées sont présentées sur la figure 4.16. Ces simulations mettent en évidence la divergence des trajectoires, très visible au-delà de $0,5$ s et la décorrélation semble être complète dès $0,7$ s.

Après plongement de la position, la figure 4.17 montre que la dimension de corrélation évaluée en l'absence de bruit expérimental est très similaire à celle détermminée à partir de la série expérimentale, soit $D_2 = 2,4$. On en déduit que, le bruit expérimental n'est pas de nature à perturber significativement l'estimation de la dimension fractale estimée à partir de la série de position.

Après plongement de la vitesse, la figure 4.18 montre que la dimension de corrélation évaluée en l'absence de bruit expérimental est inférieure à celle détermminée à partir de la série expérimentale, soit $D_2 = 2,7$ au lieu de $3,35$. Cependant, l'une et l'autre sont supérieures à la valeur trouvée à partir de la série de position qu'elle soit expérimentale ou simulée. Cela confirme que la série de vitesse est porteuse d'une information supplémentaire, relative aux dynamiques rapides, information masquée dans la variable intégrée. L'écart entre les estimations réalisées à partir des séries de vitesses simulées et expérimentales peut être imputé au procédé de génération de la série expérimentale de vitesse. D'une part, le bruit expérimental se trouve amplifié par le filtre dérivateur. D'autre part, le filtre interpolateur cubique mis en place augmente l'incertitude sur la série de vitesse.



(a) (b)

FIGURE 4.15 – Dimensions de plongement comparées.

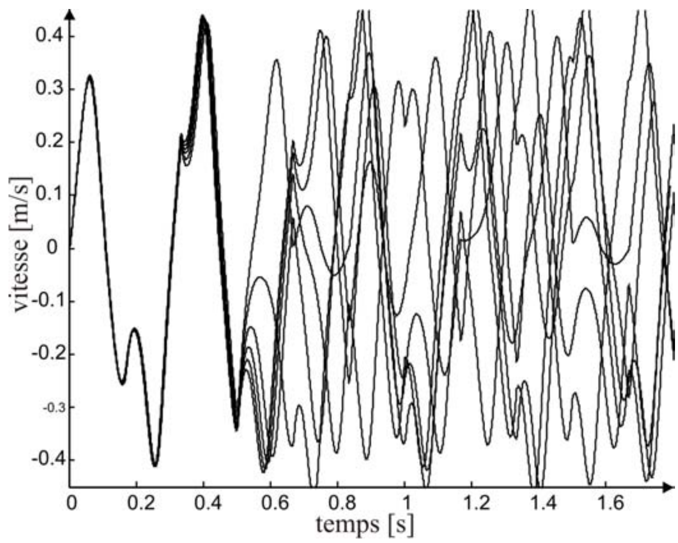
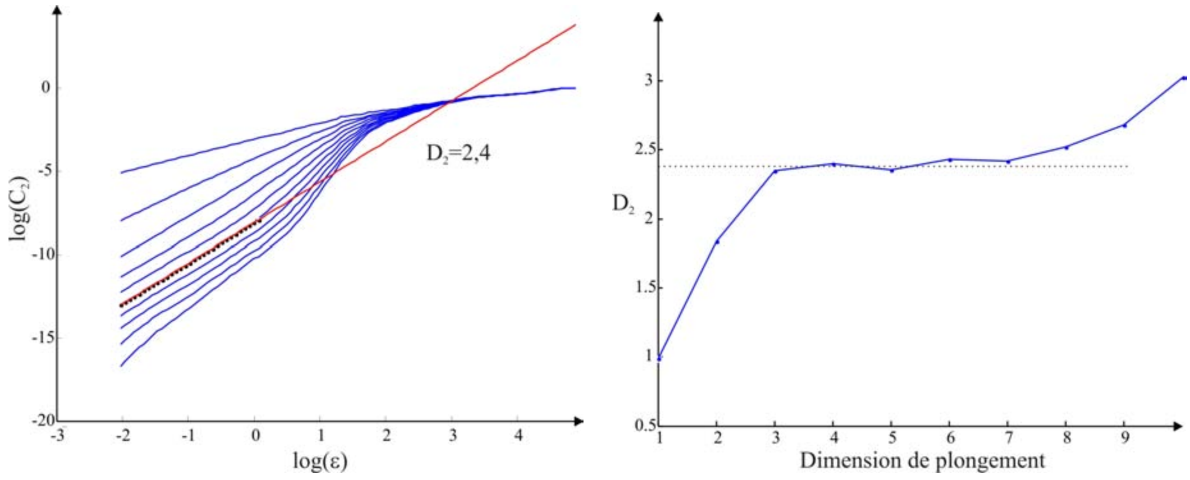


FIGURE 4.16 – Simulations de six séries de vitesse.

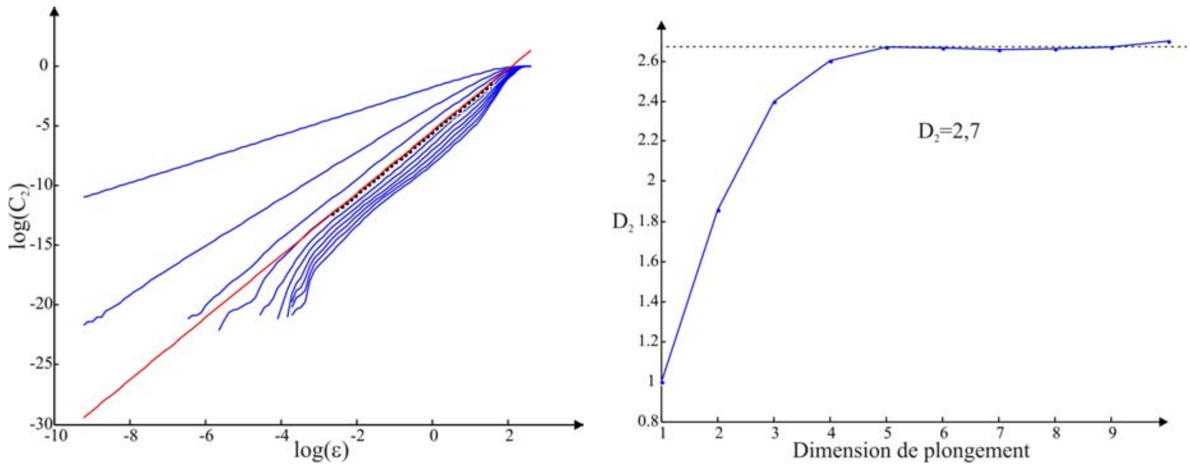
4.4.4 Interprétation physique

Il convient de conclure cette partie en interprétant l'origine de l'information supplémentaire mise en valeur dans la série de vitesse. Bien que les trois phases soient alimentées de manière indépendante et que les flux de mutuelle soient théoriquement nuls, il existe de brefs intervalles de temps au cours des commutations, durant lesquels deux phases adjacentes sont simultanément parcourues par des courants. L'effort électrodynamique sur le chariot, dû à cette superposition de courants, est instantané en terme d'accélération. Il est moins perceptible au niveau de la vitesse instantanée dont la dynamique est plus lente en raison d'une première intégration naturelle. Il devient pratiquement imperceptible à travers la position dont la dynamique est presque insensible aux perturbations induites par les commutations. D'autre façon on peut dire que ces effets sont filtré par la constante de temps mécanique.



(a) (b)

Figure 4.17 – Estimation de la dimension de corrélation D_2 à partir de la position simulée.



(a) Intégrale de corrélation (b) Convergence vers D_2

Figure 4.18 – Estimation de la dimension de corrélation D_2 à partir de la vitesse simulée.

Reconstruit à partir de la position, l'attracteur est donc complètement aplati dans deux directions et 3 dimensions suffisent à plonger les équivalents de la position, de la vitesse et d'un seul courant d'alimentation. Quand on reconstruit l'attracteur à partir de la vitesse, la perception de l'effet des commutations correspond à un dépliement de l'attracteur qui augmente sa dimension fractale. Le corollaire est qu'une quatrième dimension de l'espace de représentation devient nécessaire pour plonger, outre la position et la vitesse, non plus un courant d'alimentation mais deux.

Cette première hypothèse a été comparée avec les résultats simulés dès qu'on n'a pas de bruit dans ce genre de donnés. Ces résultats ont confirmé l'hypothèse de que la vitesse vraiment a un contenu d'information dynamique plus important que la série de position. Cependant, même avec la confirmation de l'existence de cette augmentation, les donnés expérimentales on présentées une dimension encore plus grande que la valeur simulée. Cette différence peut être expliquée par l'amplification du bruit de mesure qui s'ajoute à cette estimation. Ces bruits avec les redondances d'acquisition et la faible résolution nous ont obligé à l'utilisation d'une méthode de filtrage différentielle et d'interpolation appliqué sur les donnés de position afin d'obtenir la série de vitesse. Une autre raison également probable est le nombre de points qui sont assez insuffisantes pour cette série plongée (vitesse au lieu de la position) dès qu'on a trouvé une dimension de plongement plus grande, quatre au lieu de trois comme pour la série de position, les points sont beaucoup plus dispersés.

4.5 Exposants de Lyapunov

L'estimation du plus grand exposant de Lyapunov est réalisée en utilisant d'abord la série de position puis celle de vitesse. De la même façon que pour l'estimation de la dimension fractale, on comparera les estimations produites pour déterminer si l'une des deux séries est plus pertinente que l'autre ou si l'une et l'autre peuvent être utilisées indifféremment. Une comparaison avec l'estimation issue des données simulées viendra valider les conclusions précédentes en rapport l'influence du bruit.

4.5.1 Estimation

La méthode de Kantz [Hegger 99b] est d'abord appliquée à la série expérimentale de position. Là encore, la série de position longue a été obtenue par concaténation des six séries de 85 périodes. Le résultat est présenté sur la figure 4.19. Le début de la courbe n'est pas utilisable puisque la divergence des trajectoires (stretching) n'est pas significative sur un horizon de temps trop court. La fin de la courbe n'est pas significative non plus car l'effet du repliement des trajectoires (folding) se manifeste et nécessiterait un plus grand nombre de points pour l'éviter. L'estimation à partir de la pente de la courbe est donc réalisée dans la zone linéaire intermédiaire, soit $\lambda = 3,8\ bits/s$. Cette valeur positive confirme la réalité du chaos dans la dynamique du moteur à 6Hz.

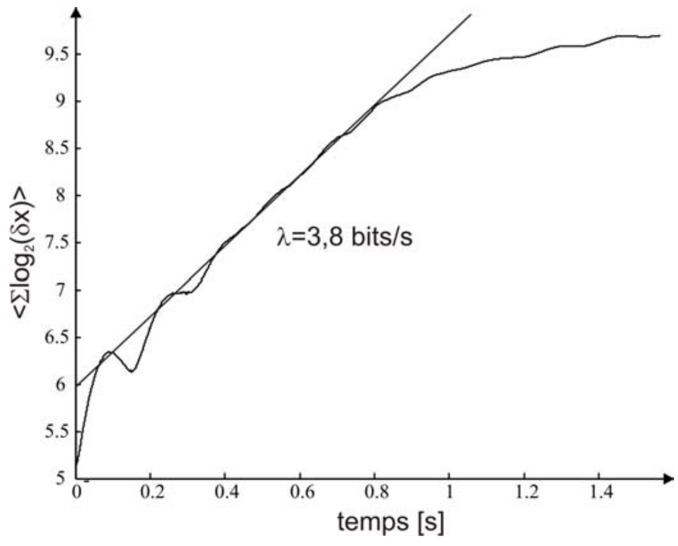


Figure 4.19 – Plus grand exposant de Lyapunov - série expérimentale de position.

De la même manière, la figure 4.20 montre qu'on obtient une estimation similaire du plus grand exposant de Lyapunov, soit $\lambda = 4\ bits/s$, en utilisant la série expérimentale de vitesse, générée à partir de la position comme cela est détaillé à la section 4.2.4. Contrairement à ce qui a été constaté au sujet de la dimension fractale avec une approche purement géométrique, il est ici indifférent d'utiliser la série de position ou de vitesse pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov. Ce qui importe principalement dans ce cas, c'est l'aspect temporel de la divergence des trajectoires. La représentativité augmentée des dynamiques rapides dans la série de vitesse ne semble pas être primordial dans le résultat de l'évaluation. On peut donc en conclure provisoirement que la sensibilité aux conditions initiales serait principalement le fait d'un phénomène mettant en jeu la position plutôt que la vitesse.

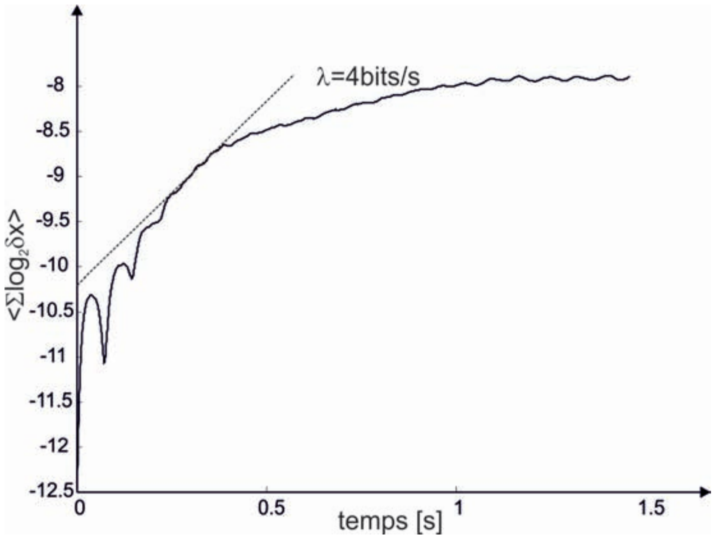


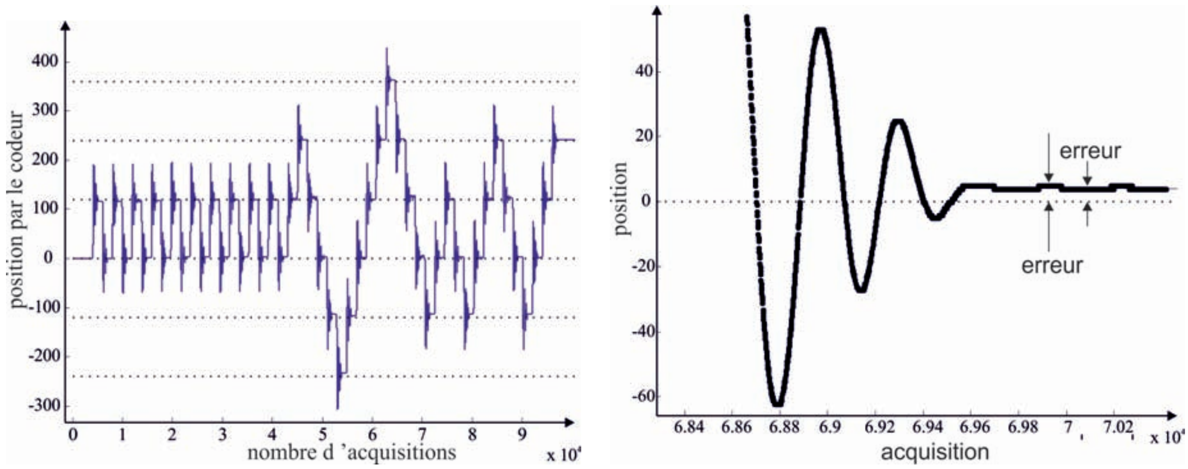
FIGURE 4.20 – Plus grand exposant de Lyapunov - série plongé de la vitesse obtenue à partir de la série de position

4.5.2 Interprétation physique

L'interprétation physique proposée dans ce paragraphe a pour objectif de valider la conclusion précédente quant à l'origine de la sensibilité aux conditions initiales. Il a été montré que les trois mécanismes du chaos - la contraction, l'étirement et le repliement - agissent de concert (principalement les deux derniers) pour décoreller rapidement les trajectoires. Lorsqu'il est positif, le plus grand exposant de Lyapunov constitue une mesure de l'étirement des trajectoires dans l'espace d'état [Robert 06] pages 133-136. Reste à interpréter le repliement en lien avec l'exposant de Lyapunov positif.

Théoriquement, en raison de l'aplatissement de la courbe d'inductance autour des positions d'équilibre figure 1.14, il existe une région d'incertitude de positionnement sur laquelle $f_x = 0$. Compte tenu de la géométrie des plots, cette région d'incertitude autour de la position d'équilibre serait de $1,5\ mm$. En prenant également en compte la résolution du codeur, on obtient une erreur maximale de $1,6\ mm$ sur la position d'équilibre, soit $\pm 0,8\ mm$. Étant donné que nous avons traité des séries expérimentales, on préfère s'en référer à une approche expérimentale pour estimer le domaine d'incertitude de la position initiale. Cette incertitude a été estimée à partir d'acquisitions réalisées en zone régulière à basse fréquence. A chaque pas on a mesuré l'erreur entre la position d'alignement réelle et la valeur théorique, c'est à dire un multiple de $12\ mm$ ou

120 tops codeur correspondant au nombre de pas. La méthode est illustrée sur la figure 4.21.



(a) Acquisitions en basse fréquence. (b) Comparaison entre la valeur théorique et réelle.

Figure 4.21 – Estimation d'erreur d'alignement.

Dans cette expérience, la figure 4.22 montre qu'on trouve une erreur maximale de positionnement égale à 12 tops-codeur. Compte tenu de la résolution du codeur, on admet que l'incertitude centrée sur la position d'alignement théorique est de $\pm 0,6$ mm. L'incertitude expérimentale sur les positions initiales se trouve donc être légèrement inférieure à celle attendue théoriquement, bien qu'elle prenne aussi en compte la bande morte introduite par le frottement sec. En effet, la zone théoriquement plate, à réluctance constante, ne l'est pas exactement ce qui permet de bénéficier d'une force $f(x) \neq 0$ aidant au centrage tant qu'elle est supérieure au frottement.

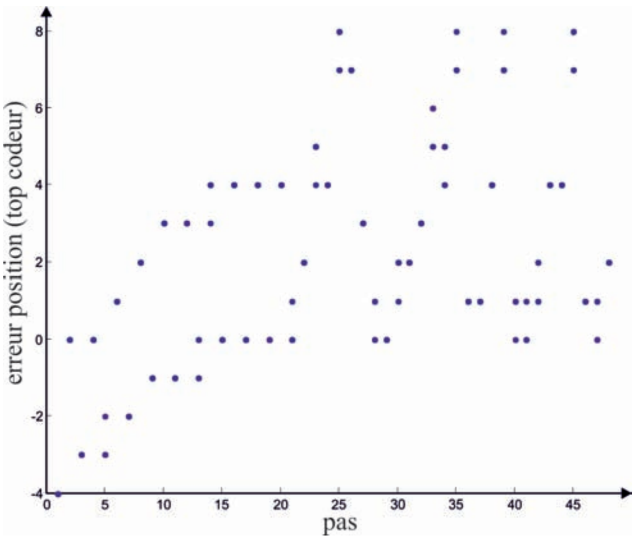


Figure 4.22 – Erreur de positionnement à chaque pas

L'évaluation de cette incertitude est particulièrement importante en régime chaotique. Sous l'effet de l'étirement, introduit par l'exposant de Lyapunov positif, cette erreur de positionnement aboutit rapidement à l'imprédictibilité de la position. En effet, l'estimation de la position au temps t est entachée d'une incertitude $\delta x = \epsilon \cdot (2^{\lambda_1 \cdot t} - 1)$. Dès que cette incertitude atteint la moitié d'un pas du moteur, on peut admettre que le mouvement devient complètement imprévisible car, au-delà d'un demi-pas, tout l'erreur de positionnement peut conduire à l'inversion du mouvement du chariot. Avec un exposant de Lyapunov $\lambda_1 \approx 4\ bits/s$ et une erreur maximale de $\epsilon = 0,6\ mm$ sur la position initiale, une incertitude de $6\ mm$ (demi-pas) est atteinte dès $0,625\ s$. Ce résultat s'harmonise avec la décorrélation des courbes observée sur la figure 4.7

4.5.3 Comparaison avec la simulation

Pour affiner les résultats de simulation, nous avons introduit la dispersion de réalisation constatée sur les trois phases du chariot : $L_1 = 21\ mH$ $L_2 = 17,85\ mH$ et $L_3 = 19,53\ mH$.La figure 4.23 établit la comparaison entre une série expérimentale de position et la même série simulée. Elle montre une excellente coïncidence entre les deux mais sur un horizon de temps court, c'est à dire avant la perte de prédictibilité.

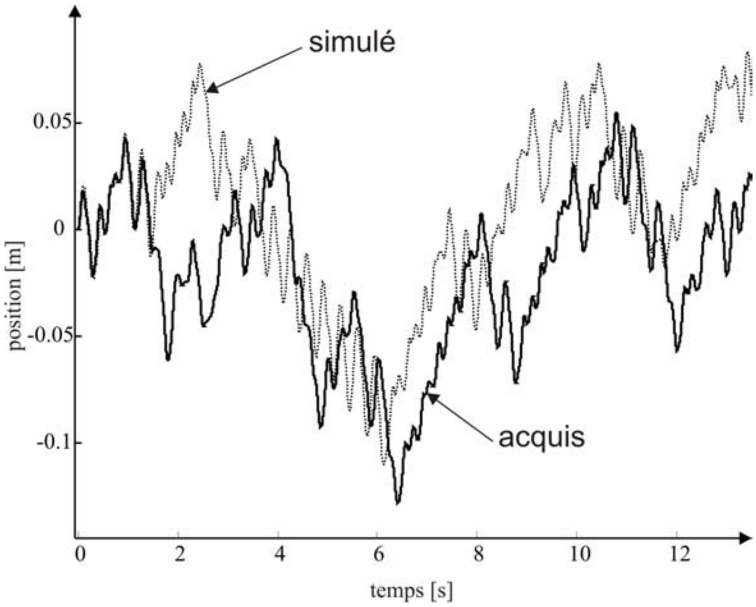


FIGURE 4.23 – Comparaison entre la position expérimentale et la position simulée.

Pour évaluer le plus grand exposant de Lyapunov, il est possible d'utiliser la méthode de Kantz et de l'appliquer à la série de position simulée. On pourrait aussi l'appliquer à la série de vitesse. Cependant il est avantageux d'utiliser la méthode avec orthonormalisation discrète présentée dans la section b) pour deux raisons. D'une part, il n'est pas nécessaire de passer par une étape intermédiaire de génération de la série puisque la méthode est appliquée directement au modèle différentiel. D'autre part, elle permet d'obtenir l'ensemble du spectre de Lyapunov et non pas seulement le plus grand exposant.

Le modèle étant un système différentiel non-autonome de dimension 5, nous évaluons les six exposants de Lyapunov. Le tableau 4.1 résume les résultats et la figure 4.24 montre la convergence des trois premiers exposants.

L'accès au spectre de Lyapunov complet, offre un moyen de validation supplémentaire du résultat. En effet, il est possible de vérifier que, outre l'exposant positif, le second est effectivement

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
4,4	0,0	-8,44	-428	-484	-537

TABLE 4.1 – Exposants de Lyapunov du système différentiel

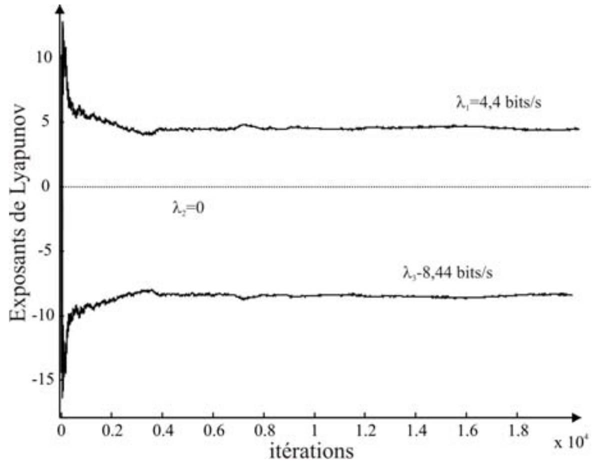


FIGURE 4.24 – Convergence des trois premiers exposants de Lyapunov.

nul et que la somme des exposants est négative. Un second point de vérification est possible à partir de la conjecture de Kaplan-Yorke en calculant la dimension de Lyapunov :

$$D_L = 2 + \frac{4,4}{8,44} = 2,53 \tag{4.1}$$

Cette conjecture stipule que la dimension de Lyapunov est une limite supérieure de la dimension de corrélation. Selon les méthodes employées, mais dans les mêmes conditions que l'estimation du spectre de Lyapunov, c'est à dire en absence de bruit sur données simulées, nous avons déterminé une dimension de corrélation $(2,4 \leq D_2 \leq 2,7)$. Compte tenu de l'ensemble des difficultés d'appréciation sur la convergence des algorithmes et l'interprétation des résultats, on peut convenir que la dimension de Lyapunov est tout-à-fait cohérente avec la dimension fractale et valide nos résultats.

Enfin, même si on remarque que l'exposant positif estimé par la méthode d'orthonormalisation discrète est légèrement supérieur à celui évalué à partir des séries, on constate que l'incidence sur la dynamique reste marginale. En effet, avec $\lambda_1 \approx 4,4\ bits/s$ et une erreur maximale de $\epsilon = 0,6\ mm$ sur la position initiale, le demi-pas d'incertitude est atteint dès $0,786\ s$. Cela reste très cohérent avec les figures 4.7 et 4.16

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé la détection et l'analyse du comportement irrégulier du prototype au moyen de séries temporelles expérimentales de position avec des méthodes spécifiquement utilisées pour ce genre de données. Dans le but d'obtenir un nombre suffisant de points pour cette analyse, nous avons établi une stratégie d'acquisition adaptée à ce type de machine linéaire. Cette stratégie a permis d'éviter d'obtenir différents comportements dynamiques sur une même série. L'hypothèse d'ergodicité a permis de reconstituer une série temporelle à partir d'une combinaison de plusieurs séries concaténées. L'acquisition de chaque série est toujours initialisée de la même façon mais la position initiale subit des incertitudes causées par le frottement sec et la géométrie du moteur. De plus, ces incertitudes ont permis de constater la réelle sensibilité aux conditions initiales à laquelle le système est soumis. Cette constatation expérimentale a fourni un premier indice d'occurrence d'un comportement chaotique, avant même de mener une analyse numérique plus approfondie.

Nous avons également présenté le choix de la période d'échantillonnage de la position dans le but d'obtenir une bonne précision d'acquisition tout en évitant une trop forte redondance de la vitesse sur la plage à couvrir.

Les séries temporelles produites sont des séries de position issues d'un codeur optique. Elles sont peu bruitées mais fortement redondantes. Après plongement, elles ont généré des attracteurs insuffisamment homogènes présentant à la fois des zones à forte densité de points et des zones très dépeuplées. Afin de procéder à l'analyse numérique sur des attracteurs ayant une densité de trajectoire plus homogène, nous avons proposé de mener l'analyse à partir de la série de vitesse comme cela a été fait dans le chapitre 3. Cependant, l'obtention d'une série de vitesse à partir d'une série de position nous a obligé à traiter les problèmes de redondances et de bruits par interpolation cubique ainsi que par filtrage.

Les traitements numériques appliqués à la série de position modifient la dynamique réelle de la série originale. L'operation de dérivation amplifie les dynamiques rapides et augmente les effets du bruit de mesure.

C'est donc par l'analyse des invariants que nous trouvons les informations pertinentes sur la dynamique du système. Tout d'abord la dimension fractale évaluée sur la série de vitesse ($D_2 = 3,35$) est toujours supérieure à celle trouvée à partir de la série de position ($D_2 = 2,35$). La comparaison avec l'estimation réalisée à partir des données simulées non bruitées a montré que cette augmentation résulte réellement des dynamiques rapides rehaussées par le processus de dérivation. Toutefois, l'estimation réalisée sur les données expérimentales ($D_2 = 2,7$) est supérieure à celle obtenue par simulation. Cette différence est attributable à la présence du bruit de mesure experimental et à son amplification.

L'augmentation de la dimension fractale a comme corollaire l'augmentation de la dimension de plongement. Ainsi, avec la série de position l'estimation des invariants est réalisée en plongeant en trois dimensions tandis que, avec la série de vitesse, le même invariant doit être estimé après un plongement en quatre dimensions.

Nos constatations sont différentes quand il s'agit d'estimer le plus grand exposant de Lyapunov. En effet, le principe sous-jacent est complètement différent puisqu'il s'agit de mesurer la vitesse de divergence des trajectoires. Par conséquent, les estimations obtenues à partir d'une série de vitesse ($\lambda_0 = 4,0 \; bits/s$) ou de position ($\lambda_0 = 3,8 \; bits/s$) n'ont plus guère de différence.

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons caractérisé les comportements irréguliers d'un prototype de machine linéaire à reluctance variable en utilisant des outils mathématiques spécifiques pour l'analyse des dynamiques non linéaires. Ce genre de comportements, bien connus des ingénieurs, est toujours qualifié d'instable. Pour cette raison, les zones de fonctionnement où ils apparaissent sont toujours soigneusement évitées lors de la conception d'une commande. Nous avons prouvé par l'estimation des dimensions fractales et des exposants de Lyapunov qu'il s'agit en fait de comportements chaotiques. En réalité, ce genre de dynamique n'est pas instable au sens de Lyapunov, les attracteurs chaotiques étant bornés par définition. Il s'agit plutôt de régimes très sensibles aux conditions initiales, prévisibles à court terme et pour lesquels il existe certainement des possibilités de contrôle.

Dans l'objectif d'analyser le comportement dynamique du prototype, la construction d'un banc d'essais adapté à nos besoins était impérative. Ce banc d'essais a été conçu et réalisé afin de nous permettre de tester différentes commandes et d'observer tous les comportements dynamiques nécessaires. En utilisant la technologie DSPic, des cartes capables de mesurer des grandeurs électriques en temps réel et de communiquer entre elles et avec un ordinateur PC, ont été confectionnées. Un système de mesure de la position avec un codeur optique a été prévu et adapté à notre prototype afin d'acquérir les séries temporelles nécessaires à ce genre d'analyse. Enfin, un système de stockage des données acquises, capable de communiquer par liaison série RS232 avec les cartes électroniques a été programmé. Ce système, développé dans l'environnement C++, permet d'envoyer vers les cartes de commande des paramètres d'initialisation et de commande ainsi que les ordres de démarrage. En sens inverse, il reçoit et stocke les données acquises en temps réel telles que position, vitesse, estimations d'inductance de phase, temps... A l'aide de l'enregistrement d'un pas moteur alimenté avec différentes valeurs de courant, nous avons réussi à modéliser notre système mécanique et à estimer les valeurs des frottements sec et fluide. Ainsi, nous avons prouvé que le frottement sec dépend de la composante de force perpendiculaire à la translation, c'est-à-dire de la force d'attraction entre les dents du chariot et les dents du stator, et donc du courant et de la position. En tenant compte de ce frottement sec variable, on est capable d'augmenter la précision de positionnement du chariot autour de la position d'équilibre.

Nous avons également équipé notre banc d'essais d'un système d'estimation des inductances incrémentales basé sur des mesures de temps réalisées sur des courants injectés par la carte hacheurs. Cela nous a permis de mettre en évidence le fait que les trois phases du moteur ne sont pas identiques et qu'à cause des imperfections de construction, il existe des variations d'entrefer le long du stator.

Pour l'analyse non linéaire du comportement dynamique du prototype, nous avons travaillé avec deux modèles mathématiques de l'inductance : un modèle complet basé sur l'analyse par tubes de flux et un modèle simplifié appelé modèle harmonique. Le modèle tubes de flux a été validé par une simulation par éléments finis dans laquelle la saturation magnétique est prise en compte. La limite de saturation a été mise en évidence ainsi qu'une valeur de courant au-delà de laquelle il est impossible d'estimer la position du chariot en utilisant les estimations d'inductances. On observe également une dégradation de la force de traction autour de la position d'équilibre à cause de la saturation. En possession de ces résultats, un modèle réduit, simplifié et sans dimension, basé sur l'approximation du premier harmonique, a été proposé. L'intérêt de ce modèle est, d'une part, de réduire le temps de simulation et, d'autre part, de prévenir les artefacts de calculs dus aux erreurs de quantification dans la simulation des attracteurs étranges.

En exploitant les performances de notre commande par DSPic, nous avons proposé une méthode d'estimation de la position par identification en temps réel des inductances incrémentales. Contrairement à ce qui est normalement décrit dans la littérature, notre technique élimine l'erreur due à la force contrélectromotrice. Cette méthode, appliquée à la phase alimentée, trouve ses limites lorsque le courant atteint 6 A à cause de la saturation. Une solution a été proposée et implantée avec succès : l'estimation de l'inductance sur une phase "non alimentée". En fait, la phase qu'on vient de couper, est réalimentée avec de faibles impulsions de courant. Cette technique nous a permis d'avoir toujours une estimation précise de l'inductance en s'affranchissant des effets de la saturation. La réalimentation de la phase qu'on vient de couper, nous a aussi permis de régler le problème de la variation de l'entrefer le long du stator. De cette façon, l'acquisition de l'inductance commence toujours à partir de sa valeur maximale. Il est donc possible de normer l'inductance de chaque phase, à chaque pas et le long du parcours, en faisant simplement une mise à l'échelle. L'estimation de la position du chariot à partir de l'identification de l'inductance de la phase normée est alors précise et fiable. Elle a été utilisée pout réaliser avec succès l'autopilotage de la machine.

Pour l'analyse des invariants et l'obtention des diagrammes de bifurcations ainsi que des sections de Poincaré, la boîte à outils développée en C++, nous a permis de comparer les différentes méthodes d'orthonormalisation et les algorithmes d'estimation des exposants de Lyapunov. Dans le cas des diagrammes de bifurcations en deux dimensions, vus le degré de complexité de notre système dynamique en temps continu et le pas de calcul nécessaire pour obtenir la convergence, nous avons préféré utiliser le super calculateur ROMEO II, programmé avec la bibliothèque de calcul parallèle MPI/C++. Ce genre de programmation nous a apporté plusieurs avantages comme la diminution du temps de calcul et l'augmentation de la précision des diagrammes de Feigenbaum. Il faut remarquer ici que, même avec la programmation en parallèle, l'obtention des diagrammes de Feigenbaum 2D et des exposants de Lyapunov en 3D ont demandé entre quatre et sept jours de temps de calcul, selon le nombre de points. Sur un ordinateur classique, ce temps serait absolument prohibitif.

Le modèle harmonique a été validé par comparaison avec le modèle précis à tubes de flux. En utilisant des diagrammes de Feigenbaum et des projections de sections de Poincaré, ces deux modèles ont été considérés comme qualitativement équivalents du point de vue des analyses non linéaires. Après cette validation nous avons estimé des dimensions fractales dans les régimes irréguliers. Afin de s'assurer des résultats et aussi pour valider les algorithmes développés, les estimations ont été programmées sur MATLAB et comparées avec les résultats obtenus par le logiciel TISEAN. Malgré un sous échantillonnage d'un facteur dix par rapport au package TISEAN développé en langage C, l'implémentation MATLAB qui est beaucoup plus lente, nous a donné des résultats proches de ceux de TISEAN. Dans cette partie, nous constatons bien l'importance du choix du retard de plongement évalué à partir de l'information mutuelle plutôt qu'à partir de la fonction de corrélation. Cependant, la fonction de corrélation nous a donné un ordre de grandeur pour la largeur de la fenêtre de Theiler afin d'éviter les points très corrélés lors des calculs des invariants.

Egalement dans le but de valider nos algorithmes d'estimations des invariants, cette fois-ci en rapport avec les exposants de Lyapunov, nous avons décidé de lancer d'abord une estimation sur le classique attracteur de Lorenz. Les résultats ont été suffisamment précis et l'algorithme s'est montré performant au niveau de la précision du calcul. Ensuite, une amélioration d'algorithme a été proposée afin de réduire le temps de calcul par rapport à la méthode proposée par [Cheng 00]. Les résultats de notre méthode ont abouti à un gain d'à peu près 30% sur le temps de calcul.

Nous avons réalisé trois études de cas en utilisant les algorithmes d'estimation des invariants. Afin de disposer d'une estimation des paramètres de plongement et de simulation nécessaires pour une évaluation correcte des invariants, avant l'application aux données expérimentales, nous avons étudié les résultats sur les invariants selon certains changements de paramètres. Quelques difficultés pour estimer les exposants de Lyapunov à partir de séries temporelles ont été traitées et la précision des estimations a été évaluée et comparée avec les résultats obtenus à partir du système variationnel. L'estimation des invariants en utilisant directement la série de position, au lieu de la vitesse, a été réalisée et validée. Cette possibilité a été envisagée afin d'éviter de générer la série de vitesse à partir de la dérivation d'une série de position soumise aux bruits de mesure. Evidemment la dérivation de la position pour obtenir la vitesse occasionne l'amplification du bruit, ce que nous souhaitons impérativement éviter.

Le principal problème avec la série de position est que le résultat du plongement est un attracteur insuffisamment dense. Ce fait est dû à la longueur limitée du stator, ce qui entraîne des séries assez courtes. Nous avons normalisé la série de position le long du déplacement en choisissant comme base un nombre entier de pas statoriques. Les résultats obtenus ont été très satisfaisants par rapport aux valeurs obtenues à partir du système différentiel, même en considérant la dispersion des inductances des trois phases. Malheureusement, au-delà de ces dispersions, notre prototype présente aussi une variation d'entrefer tout au long du stator. Dans la pratique donc, cette méthode n'a pas donné de résultats cohérents et une autre méthode a été appliquée afin d'obtenir un attracteur suffisamment dense pour les plongements réalisés à partir de la série de position. Cette méthode, justifiée par le théorème d'ergodicité, consiste à superposer plusieurs séries acquises afin d'imposer la quantité de points nécessaires aux estimations.

C'est dans le chapitre quatre que nous avons fait la comparaison entre les valeurs théoriques et celles obtenues à partir des séries expérimentales. Cette comparaison vient valider définitivement notre modèle harmonique par l'obtention du plus grand exposant de Lyapunov. Les valeurs trouvées pour les invariants, dans le cas simulé et le cas expérimental, sont assez proches. L'interprétation physique des exposants de Lyapunov a aussi été confirmée dans les deux cas. Un temps au-delà duquel le moteur devient imprévisible à été trouvé $\approx 0,786\ s$ par simulation et validé dans la pratique expérimentale par prédiction de la série temporelle acquise.

Perspectives

Les grande lignes de perspectives des suites à donner à cette thèse se déduisent du contexte scientifique et technologique dans lequel ces travaux s'inscrivent.

1. Les travaux qui avait été menés dans le cadre de la thèse de M. Alain [Alain 05] avaient permis d'identifier les problèmes technologiques spécifiques à la réalisation d'un banc d'essais produisant des données expérimentales chaotiques et d'y trouver les principaux remèdes. Ce savoir faire a été réinvesti et développé sur le banc d'essais du moteur linéaire à réluctance variable qui, de part sa nature, pose des contraintes supplémentaires. L'importance qu'il faut donner aux aspects expérimentaux et à la qualité des données

produites nous conduisent à formuler quelques suggestions technologiques à mettre en œuvre pour la suite de cette étude.
Il n'a pas été possible de faire fonctionner le banc de manière fiable jusqu'au niveau nominale de la tension d'alimentation. En effet, les perturbations rayonnées par les cartes hacheurs sur la liaison avec la carte de commande nous ont limité à une tension d'alimentation de 24 V au lieu de 48 V. Cette situation augmente les temps de commutation d'une phase à l'autre et de manière générale n'est pas favorable à la dynamique des courants. Pour le développement d'une prochaine version du banc d'essais, nous envisageons d'utiliser un microcontrôleur DSPic plus puissant afin d'implanter dans un seul et même composant le hachage et la commande, réglant ainsi le problème de la transmission entre DSPics en la supprimant. Une solution alternative que nous envisageons également consiste à réaliser cette liaison par fibre optique.
Nous avons aussi été limités dans la quantité de données pouvant être transmises au PC en temps réel. Au-delà d'une vitesse de translation de $0,28\ m/s$, la vitesse de transmission de la liaison RS232 avec le PC ne permet plus d'envoyer à la fois l'estimation de l'inductance et la mesure de la position. Ceci nous a contraint à choisir de transmettre soit l'inductance pour le contrôle en boucle fermée sans capteur, soit la position pour l'analyse des séries chaotiques. La solution que nous envisageons consisterait à communiquer entre le banc et le PC via une liaison USB. Cependant, les DSPic actuels sont dépourvus de ce type de liaison. Seuls certains pic en possèdent. Nous devrons sans doutes reprendre l'architecture commande/contrôle ou attendre le développement de nouvelles familles de produits.
Nous envisageons d'utiliser le banc d'essais instrumenté pour produire une banque de données expérimentales chaotiques de grande taille. Celle-ci pourrait permettre, entre autres, de rechercher des méthodes systématiques de détection de régimes de fonctionnement spéciaux, peut-être par des méthodes de classification. Cette banque de données pourrait aussi être partagée et mise à disposition pour d'autres études. Toutefois notre expérience dans ce domaine nous amène à estimer entre huit et neuf mois la durée nécessaire de la campagne d'acquisition en continu. Cela nécessite donc de prévoir d'automatiser complètement le banc, ce qui représente un travail conséquent.

2. L'objectif principal de cette thèse a consisté à mettre en place une méthodologie d'analyse de données expérimentales chaotiques et à développer des outils informatiques conviviaux, cette activité étant particulièrement gourmande en temps de travail. Si l'on peut dire que l'objectif a été atteint, l'exploitation actuelle de ces outils dans la thèse reste modeste au regard de leur potentiel.
   Nous prévoyons d'exploiter nos programmes de simulation développés avec la bibliothèque parallèle en utilisant un super calculateur. Notre but est d'approfondir notre connaissance des différents types de bifurcations qui prennent place sous les variations de différents paramètres de dimensionnement, voire de paramètres de commande. Outre les bifurcations standards, nous pourrions nous intéresser à d'autres types de bifurcations telles que les bifurcations par collision de frontière, le grazing, les bifurcations d'observabilité et de commandabilité. Ces simulations intensives nous permettront aussi d'étudier les bassins d'attraction de différents attracteurs étranges.
   Pour mieux analyser la nature des bifurcations, nous souhaitons également étudier numériquement les variétés stables et instables de certains points qui structurent les attracteurs. Cela doit nous amener à explorer quelques scénarios de crise par la connaissance des interactions entre ces variétés et les frontières des bassins d'attraction.

Nous aimerions également poursuivre le développement de la boite à outils pour en augmenter la flexibilité. Elle pourrait être plus ouverte de manière à accepter d'autres systèmes dynamiques. Ce serait une bonne façon de capitaliser le code que nous avons développé. Elle pourrait aussi inclure la recherche des équilibres instables et de leurs variétés par des méthodes de simulation en temps inverse ainsi que la recherche de trajectoires homocliniques et hétérocliniques. De plus, nous prévoyons de l'enrichir en y intégrant des méthodes d'estimation des invariants dédiés aux séries temporelles expérimentales.
Sur ce dernier point, de nombreux développements sont à prévoir puisque les séries expérimentales sont polluées par du bruit de mesure. Une importante extension de notre étude doit se faire en direction de l'analyse du bruit superposé aux séries chaotiques : l'un étant stochastique, l'autre deterministe mais ayant une apparence aléatoire. La question du débruitage des signaux chaotique retiendra notre attention puisqu'elle nécessite de mettre en œuvre des méthodes spécifiques que nous aimerions ajouter aux fonctionnalités de notre boite à outils.

3. Enfin on rappelle que les travaux précédents s'inscrivent dans la perspective de la mise en œuvre de méthodes de contrôle efficaces en zone chaotique. Dans l'immédiat, il faudrait commencer par réaliser et tester une commande en boucle fermée complète sans capteur. en effet, la commande actuelle est limitée à l'autopilotage des angles de commutation à force maximale. Il faudra aussi penser à asservir le courant en fonction de la position estimée à partir de l'identification de l'inductance en temps réel. De plus, on peux apporter une amélioration à l'estimation de l'inductance sur la phase non alimentée en utilisant une fréquence de hachage plus élevée pour la mesure que pour le contrôle du courant afin d'augmenter la quantité de points de mesure sur chaque pas même en haute vitesse.
   A moyen terme, notre objectif est d'experimenter des méthodes de contrôle non linéaires pour évaluer leus performances. Parmi les méthodes de commande hybrides, la commande par mode de glissement a l'avantege d'être robuste et simple à implanter. Certaines méthodes qui requièrent un modèle de connaissance sont tolérantes aux incertitudes paramètriques du modèle et pourraient être utiles pour stabiliser le fonctionnement périodique fondamental sur une plage de fréquences où le chaos apparaît. La synthèse d'un contrôle linéaire par le théorème de la stabilité absolue pourra être étudiée. Les méthodes qui retiendront tout particulièrement notre attention sont celles qui exploitent spécifiquement les propriétés topologiques du chaos. Parmi les méthodes de suivi (tracking) d'attracteur périodique la méthode OGY et ses dérivées (par exemple le contrôle occasionnel par retroaction proportionnelle) pourraient donner des résultats intéressants à condition de leur associer une méthode de ciblage efficace. D'autres méthodes seront expérimentées car elles ne requièrent pas de modèle mais uniquement des séries de données. Tout comme la méthode OGY, le contrôle de Pyragas utilise une contreréaction. Cette méthode, qui a déjà été testée en simulation pour un moteur pas-à-pas, ne nécessite même pas de connaître la trajectoire à stabiliser. Elle pourrait être très utile expérimentalement car, étant très économe en calcul, elle pourra être implantée dans un composant de type DSPic à bas coût.

A

Cartes et schemas

Cet annexe se rapport aux chapitres de présentations du moteur et du banc d'essais. Les principales cartes électroniques ainsi qu'une coupe transversale du moteur sont présentées.

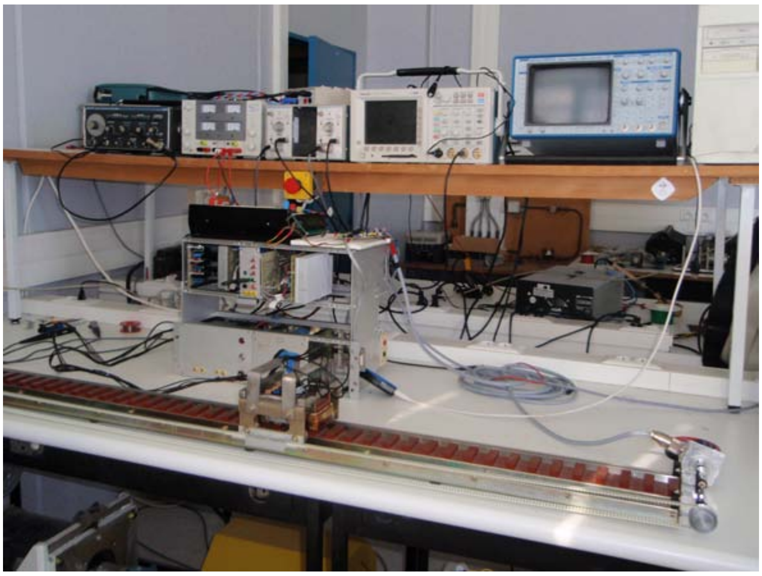


Figure A.1 – Banc d'essais

A.1 Cartes électroniques

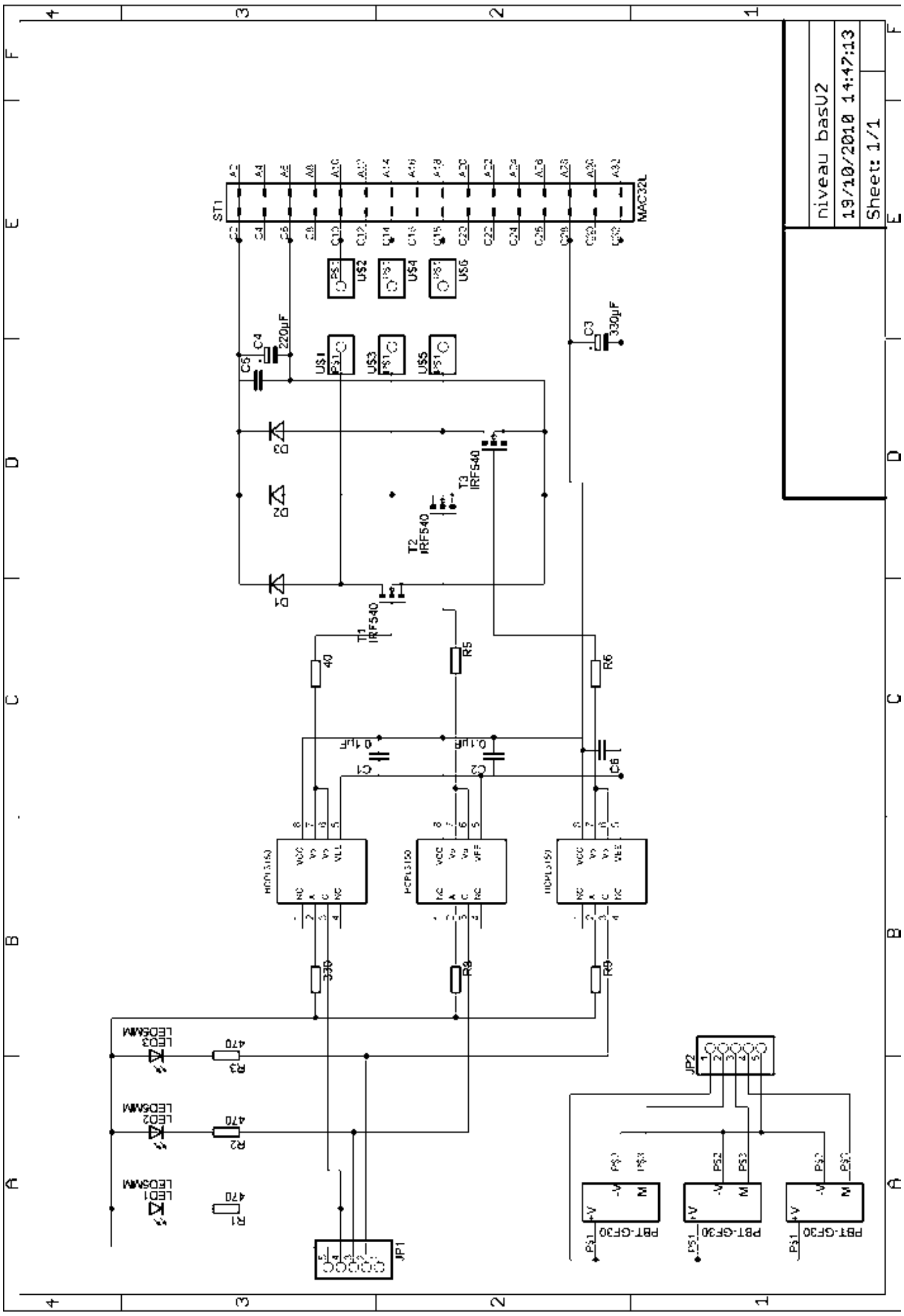


FIGURE A.2 – Schéma de la carte hacheur bas

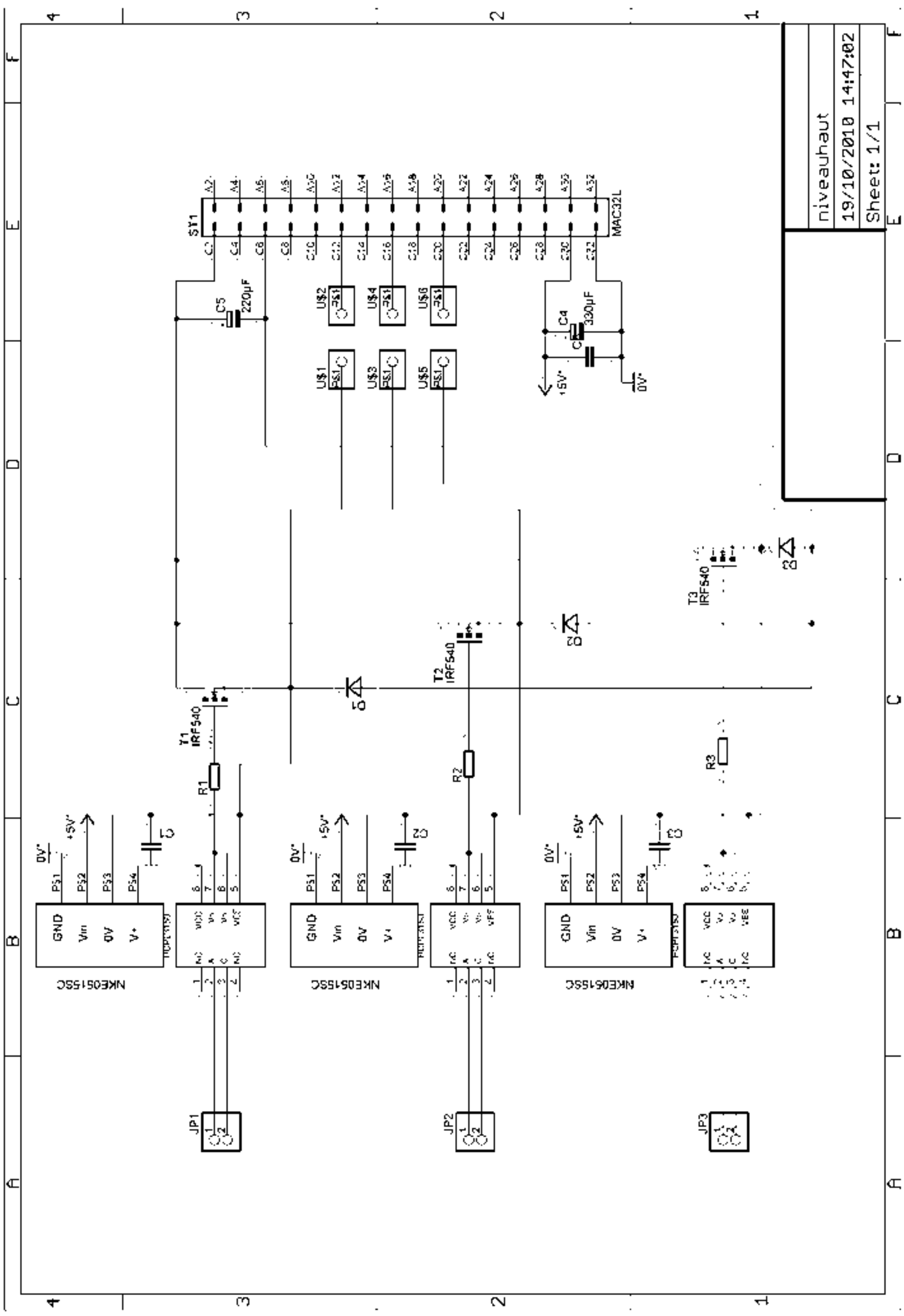
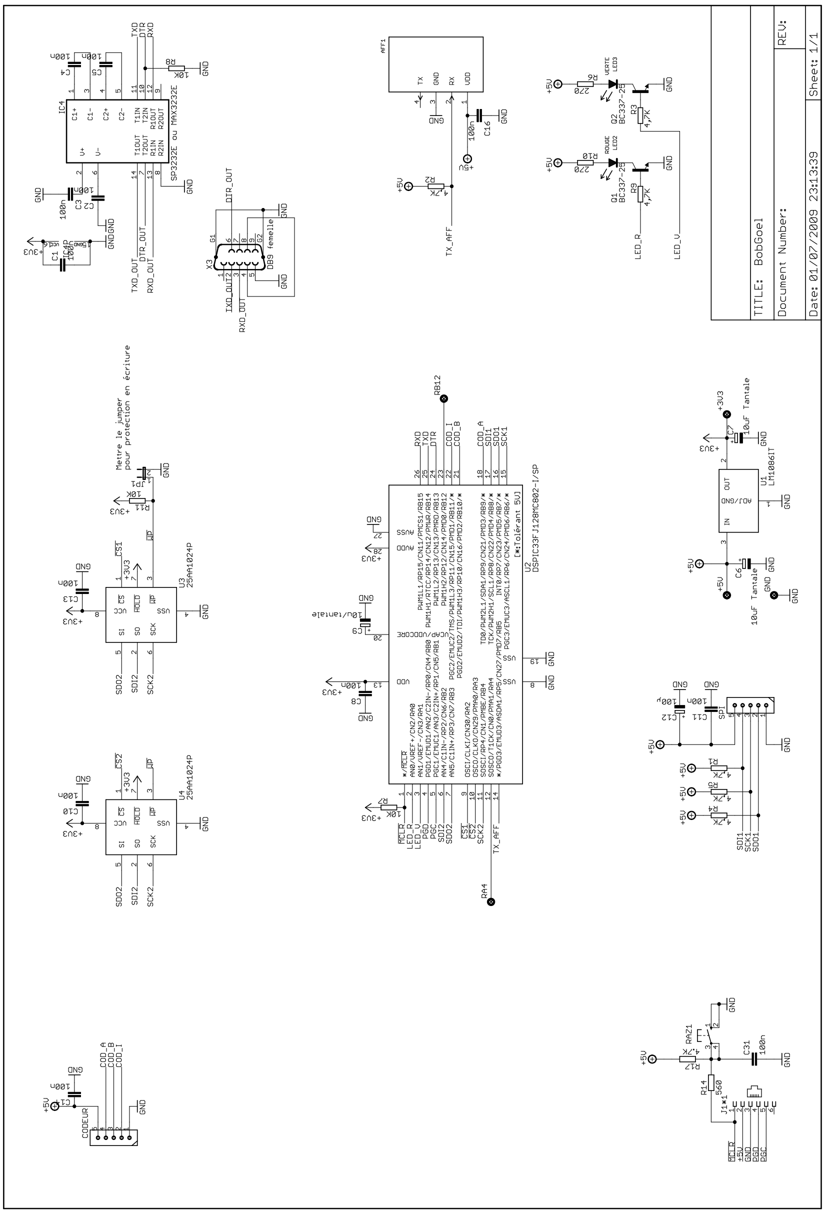


FIGURE A.3 – Schéma de la carte hacheur haut



01/07/2009 23:14:37 f=0.72 C:\Documents and Settings\michel\Mes documents\md_ens\maquettes\BobGoel\BobGoel.sch (S

FIGURE A.4 – Schéma de la carte de commande

.

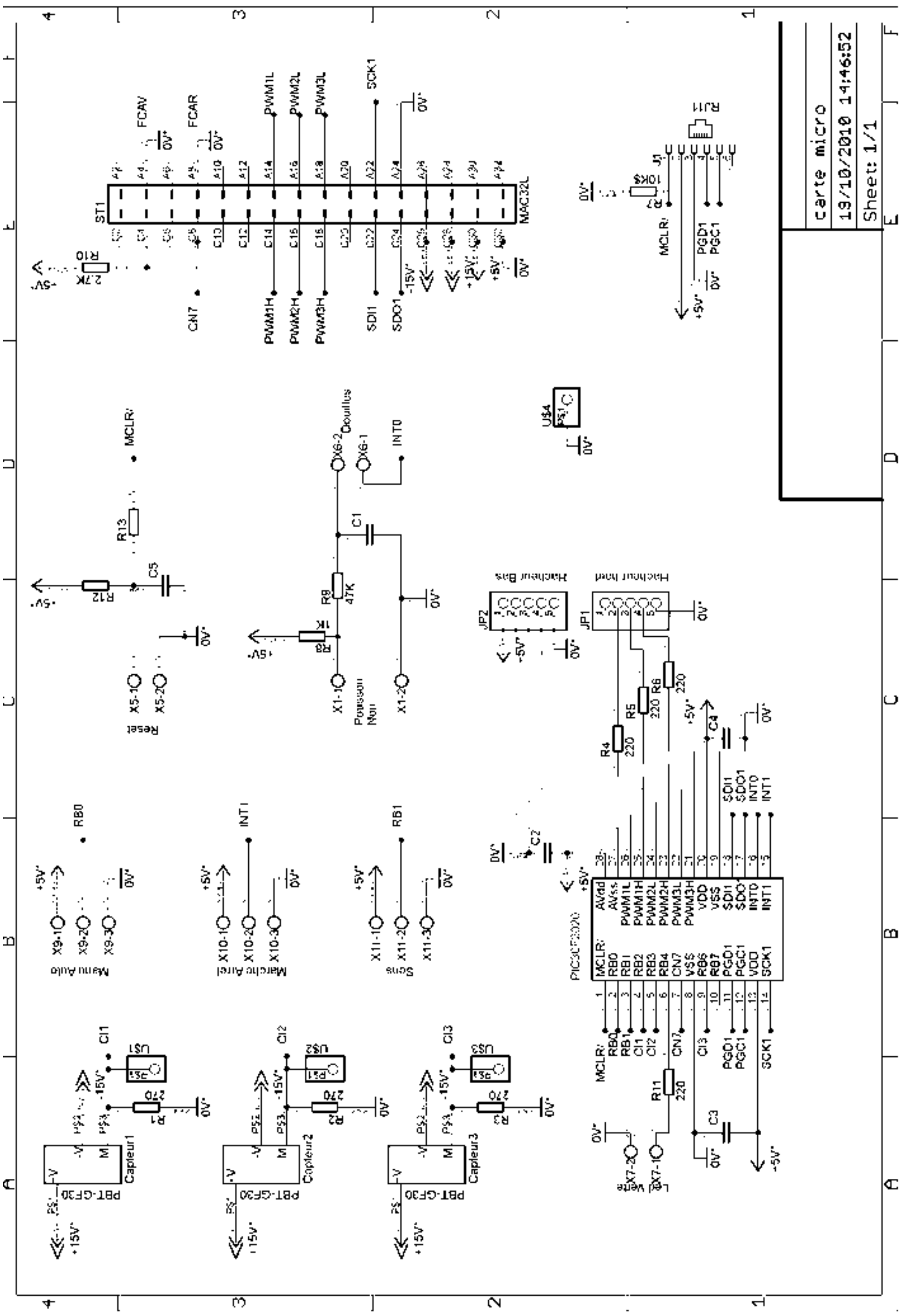


Figure A.5 – Schéma de la carte de commande rapprochée

A.2 Coupe transversale du moteur

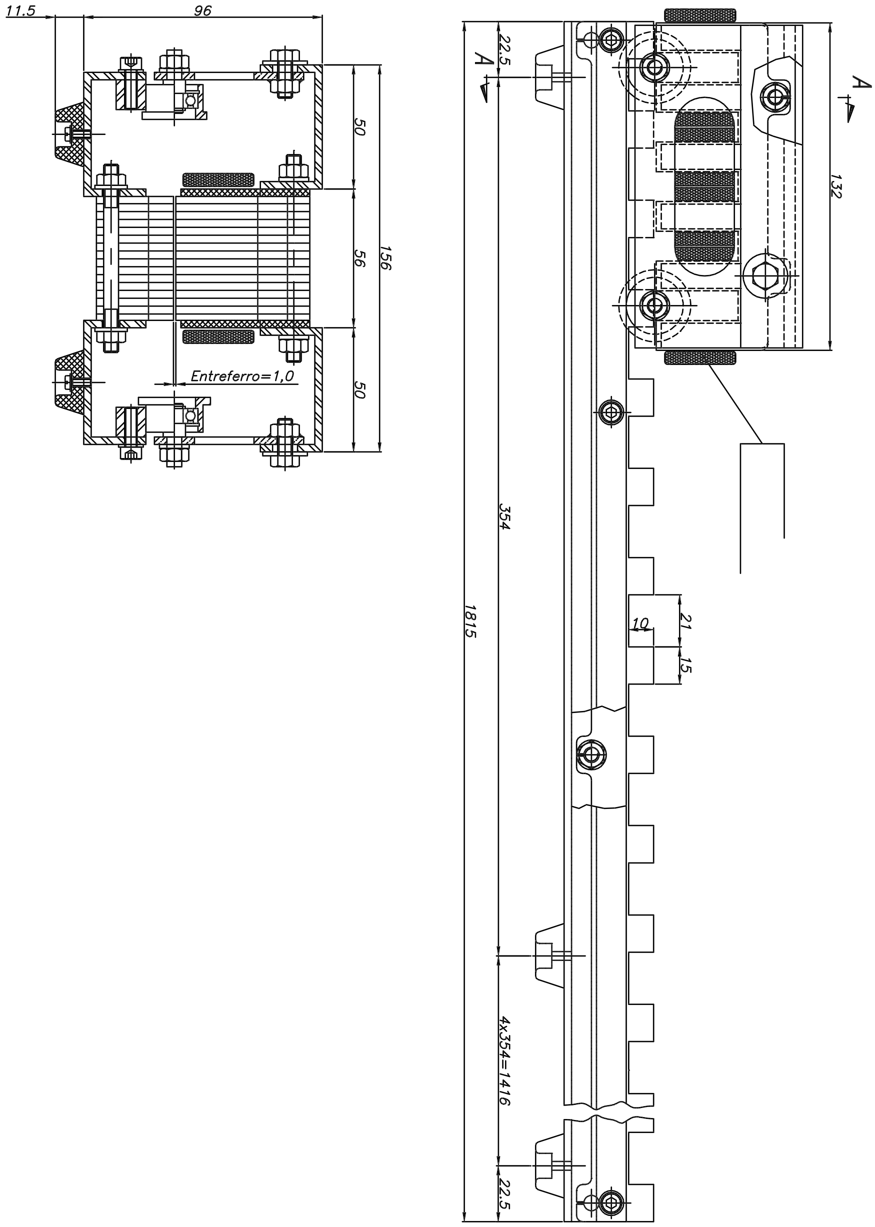


FIGURE A.6 – Coupe transversale du moteur

B

Algorithmes et programmes

Cette annexe présente les principaux éléments de programmes développés pendant ce travail de thèse pour mettre en œuvre l'analyse non linéaire des séries temporelles.

B.1 Dimension de corrélation

Le programme ***ProcGrass.m*** applique la méthode développée par Procaccia et Grasberger pour l'estimation de la dimension de correlation sur une série temporelle. Ce programme permet d'estimer D_2 à partir de la pente de la courbe représentée par le logarithme de la correlation intégrale $log(C(x, \epsilon))$ en fonction des distances $log(\epsilon)$. Comme ce programme a été développé dans l'environnement $MATLAB^{®}$, le temps de calcul pour les longues séries (N>50000) devient trop long. Pour cette raison, cette fonction analyse la dimension fractale en utilisant une certaine quantité de points (1000 dans notre cas) bien inférieure à la taille de la série.

Dans les cas où il a été nécessaire d'analyser sur la totalité des points de la série, le package $TISEAN^{®}$ a été utilisé. Cependant, nous avons constaté que, même en faisant l'analyse sur une quantité de points inférieure au total disponible, les résultats obtenus par notre programme sont très proches de ceux obtenus par $TISEAN^{®}$.

```
function C=Prograss(x,lag,dim)
    x=Plonge_ND(x,lag,dim);
    [NO dim]=size(x);
    MM=0;
    for i=1:dim
        minx=min(x(:,i));
        x(:,i)=x(:,i)-minx;
        maxx=max(x(:,i));
        if MM<maxx
                MM=maxx;
```

```
        end
    end
    x=x./MM;
    rmin=1e-4;
    R=0.5;
    k=0;
    tam=length(x)
    Iko=1:tam;
    Ik=Iko;
    PTS=1000;          %nombre de points sur la série
    Nr=100;            %nombre de epslons
    H= ceil(tam.*rand(PTS,1));
    C2=zeros(1,dim);
    for pas=0:Nr
            r=2^(log2(rmin)+pas*log2(R/rmin)/Nr)
        for a=1:PTS
                i=H(a);
                for n=1:dim
                    Iq=find(x(Ik,n)<x(i,n)+r);
                    Iq=Ik(Iq);
                    Ij=find(x(Iq,n)>x(i,n)-r);
                    Ik=Iq(Ij);
                    NV(n)=length(Ik);
                end
            2=C2+NV*2/(N0*(N0-1));
            Ik=i+1:length(x);
        end
        k=k+1
        Cr(k,:)=C2
        ri(k)=r;
        Ik=Iko;
        C2=0;
```

```
    end
    Cxx=log2(ri);
    Cyy=log2(Cr);
    C=Cyy;
    C(:,dim+1)=Cxx;
    if length(Cxx)>3
        B=robustfit(Cxx,Cyy(:,dim))
        figure(1)
        hold on
        for i=1:dim
            plot(Cxx,Cyy(:,i),'.k','MarkerSize',5);
        end
        plot(Cxx,B(1)+B(2)*Cxx);
    end
```

En utilisant $TISEAN^{®}$ la ligne de commande pour la série de position, par exemple, s'écrit :

```
>>!d2 data.dat -d300 -t500 -o DimCor
```

Le signe "!" est nécessaire pour appeler la fonction d2 (dimension de corrélation) à partir de l'environnement $MATLAB^{®}$. Dans cette ligne de commande on impose le retard de plongement égal à 300 itérations (-d), la fenêtre de Theiler (-t) égale à 500 itérations. Le fichier de données s'appelle "data.dat" et le fichier de sorti "DimCor.***" avec l'extension attribuée par $TISEAN^{®}$ (pour des informations plus détaillées, se rapporter à la documentation du package [R. Hegger 99].

B.2 Faux plus proches voisins - fichier : embeDim.m

```
function NN=embeDim(data,lag,Dim)
    q=1;
    NN=1;
    k=0;
    for D=1:Dim                    % Plongement
            k=k+1;
        C=length(dataX)-(Dim-1)*lag;
        CT=length(dataX);
        Y(:,k)=dataX((D-1)*lag+1:(D-1)*lag+C);
```

```
    end
    for n=1:Dim-1
        ind=FNNsearch(Y(:,1:n),q,NN)     % cherche les NN plus proches voisins
        tam=size(ind);
        for In=n:n+1
            for j=1:tam(1)
                    for i=1:tam(2)
                        Dist(j,i,In)=sum((Y(ind(j,i),1:In)-Y(j,1:In)).^2,2);
                    end
            end
        end
        R=(Dist(:,:,2)-Dist(:,:,1))./Dist(:,:,1);
        NN=length(find(R>10))
        plot(NN,'.')
        hold on
    end
```

B.3 Le plus grand exposant de Lyapunov - fichier : lyap.m

```
function lyap_M(X)
    freq=6.0;
    Num_amos=floor((1/freq)/(203.122e-9*2560));
    dim=3;                  %dimension de plongement
    d=300;                  %temps de retard
    t=2500;                 %fenetre de theiller
    NV=1;                   %nombre de voisins à chercher
    Num_Iter=20*d;
    ini=400;
    fin=700;
    eps0=(max(X)-min(X))/100;
    eps=max(eps0);
    Max_X=length(X);
    Taille_X=Max_X-(dim-1)*d-Num_Iter
```

```
Y=Plonge_NDim(X,d,dim);      %fonction de plongement "Plonge_NDim.m"
YY=Y;
    Lyap=zeros(Num_Iter,1);
    voisins=zeros(Num_Iter,1);
    n=100;
    point_suiv = floor(d/10);%ceil(n.*rand(length(X),1))+d;
    for act=1:point_suiv(s):Taille_X
    s=s+1;
        Y=YY;
        Q=1:length(Y);
        clear I;
        for i=1:dim
                Y(:,i)=Y(:,i)-Y(act,i);
        end
        viz=0;
        while viz<NV
        Q=1:length(Y);
        for n=1:dim
                    I=find(abs(Y(Q,n))<eps);
                    Q=Q(I);
            end
            clear I;
            I=find(abs(act-Q)>t);
            Q=Q(I);
            clear I;
            I=find(Q<Taille_X);
            Q=Q(I);
            clear I;
        I=find(Y(Q)~=Y(act));
        Q=Q(I);
        viz=length(Q);
        if viz<NV
```

```
                eps=eps*1.1;
        end
        dist=sum(Y(Q,:).^2,2);
            [A B C]=unique(dist);
            if length(B)>=NV
                I=find(A);
                B=B(I);
                Q=Q(B(1:NV));
            else
                Q=Q(B);
            end
            figure(1)
            plot(Y(:,1),Y(:,2),'.k','MarkerSize',2)
            hold on
            plot(Y(act,1),Y(act,2),'ob')
            plot(Y(Q,1),Y(Q,2),'.b')
            plot(Y(Q+Num_Iter,1),Y(Q+Num_Iter,2),'.r')
            plot(Y(act+Num_Iter,1),Y(act+Num_Iter,2),'*b')
            plot(Y(act:act+Num_Iter,1),Y(act:act+Num_Iter,2),'-m','MarkerSize',2)
            hold off
    end
        dx=zeros(length(Q),dim);
        dy=zeros(Num_Iter,1);
        R=length(find(Q~=act));
        H=find(Q~=act);
        if R>0
            Q=Q(H);
            for i=1:Num_Iter
                for k=1:dim
                    dx(:,k)=(Y(act+i-1,k)-Y(Q+i-1,k)).^2;
                end
                dy(i)=sum(sqrt(sum(dx,2)),1)/R;
```

```
                dx=dx*0;
            end
            for j=1:Num_Iter
                if dy(j)>0
                    Lyap(j)=(Lyap(j)+log2(dy(j)));
                    voisins(j)=voisins(j)+1;
                end
            end
        Desc=find(abs(dy>0.5));
        dy(Desc)=1;
        figure(2)
            t1=1:length(Lyap);
            plot(t1,Lyap./voisins*freq*Num_amos,'.k','MarkerSize',2)
            Ind=robustfit(t1(ini:fin),Lyap(ini:fin)./voisins(ini:fin)*freq*Num_amos)
            hold on
            plot(t1(1:fin),Ind(1)+Ind(2)*t1(1:fin))
            hold off
            dy=dy.*0;
        end
end
```

B.4 Algorithme de décomposition QR discret

Algorithm 1 Spectre de Lyapunov par la factorisation QR discrète

Entrées : $n, i, k, M, L \in \mathbb{N}$

Entrées : $y(t_0) = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,]^T; Q_{eq} = I_{n\times n}; H_0 = I_{n\times n};$

pour $i = 1$ to n **faire**

$\quad LCEvecteur_n = 0$

fin pour

$h = \frac{t}{M}$;

pour $i = 0$ to $M - 1$ **faire**

$\quad t_i = h \cdot i$;

$\quad$ ***define* SYSDYN :** $\dot{y}(t) = f(y, t) \leftarrow y(0) = y(t_i)$

$\quad y(t_{i+1}) = \textbf{Integrateur}(\textbf{SYSDYN}, h, [t_i, t_{i+1}])$;

fin pour

pour $k = 1$ to $\frac{M}{L}$ **faire**

$\quad$ ***define* SYSVAR :** $\dot{H}(t) = J(y(t)) \cdot H(t) \leftarrow H(0) = I_n$

$\quad H_k = \textbf{Integrateur}(\textbf{SYSVAR}, h, [t_{(k-1)\cdot L},\ t_{(k\cdot L-1)}])$;

$\quad B_k = Q_{eq}^T \cdot H_k \cdot Q_{eq}$;

$\quad$ ***Decomposition QR*** ▶ $Q_k \cdot R_k = B_k$

$\quad Q_{eq} = Q_{eq} \cdot Q_k$

$\quad LCEvecteur_n = LCEvecteur + \log(diag(R_k)_n)$

$\quad \lambda_n(k) = LCEvecteur/(k \cdot L)$

fin pour

B.5 Filtrage de la vitesse - fichier : velfilter.m

Afin d'obtenir les séries de vitesse à partir des séries de position expérimentales, comme expliqué au chapitre IV, nous avons utilisé un filtrage différentiel et une fonction d'interpolation cubique pour réduire l'effet des bruits de mesure et de la faible résolution des acquisitions.

La fonction ***velfilter.m*** a été développée sur environnement $MATLAB^{®}$.

```
function vv=vel_filter(X)
```

```
P=X;
P=P./1e4;
t1=1:length(P);
t1=t1*203.122e-9*2561;
y=diff(P)./diff(t1');
figure(1)
pas=10;
N=10;
vel=[1:length(P)]'*0;
for k=0:N-1
    I=k+1:pas:length(P)-(N-k);
    v1=diff(P(I))./diff(t1(I)');
    vel(I(1:length(I)-1))=v1;
end
plot(t1(1:length(vel)),vel,'b')
axis([0 0.55 -0.4 0.4])
hold on
Np=30;
max_t=floor(length(vel)/Np)*Np;
t=1:max_t;
I=1:Np:max_t;
tam=length(I);
vv=spline(I,vel(I),t);
plot(t1(1:length(vv)),vv,'k')
```

B.6 Algorithme de Gram Schmidt

B.6.0.1 Orthonormalisation par la méthode Classique de Gram Schmidt - CGS

Soit une matrice $A_{n\times k}$ (avec $n < k$) et en définissant les k colonnes de A comme $[a_1, a_2, \cdots, a_k]$ on peut trouver une matrice orthogonale $Q = [q_1, q_2, \cdots, q_k]$ qui représente les projections des colonnes de la matrice A sur une base orthonormale, à partir des formules suivantes :

$$p_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} q_i(q_i^T a_j), \quad q_j = \frac{p_j}{\|p_j\|_2}, \quad pour \;\; j = 1, 2 \cdots k. \tag{B.1}$$

B.6.0.2 Orthonormalisation par la méthode de Gram Schmidt Modifiée - MGS

La méthode classique de Gram Schmidt (CGS) est numériquement instable, (voir [Trefethen 97]), ce qui cause la perte d'orthogonalité. Pour cette raison la méthode de Gram Schmidt modifiée (MGS) est plus recommandée pour les applications numériques. L'algorithme de MGS est présenté ensuite.

Algorithm 2 GRAM SCHMIDT MODIFIÉE

pour $i = 1$ to n **faire**
    $v_i = a_i$
fin pour
pour $i = 1$ to n **faire**
    $r_{i\,i} = \|v_i\|_2$
    $q_i = \frac{v_i}{r_{ii}}$
    pour $j = i + 1$ to n **faire**
        $r_{i\,j} = q_i^t v_j$
        $v_j = v_j - r_{i\,j} q_i$
    fin pour
fin pour

B.6.0.3 Orthonormalisation par la méthode de Householder - THH

L'idée ici est de trouver les matrices $Q_1, \cdots, Q_n$, de telle façon que la matrice A est successivement transformée en une matrice triangulaire supérieure.

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow Q_1 \cdot A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

$$\rightarrow Q_2 \cdot Q_1 \cdot A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \rightarrow Q_3 \cdot Q_2 \cdot Q_1 \cdot A = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

On note que les matrices Q_k devront agir sur les lignes $k : m$ sans changer les premières $k-1$ lignes et colonnes. C'est-à-dire que Q_k doit avoir la forme :

$$Q_k = \begin{bmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

I_{k-1} est la matrice identité d'ordre $k-1$ et F est telle que :

$$Fx = \|x\| e_1 \tag{B.5}$$

soit capable d'introduire des zéros dans la partie inférieure de la colonne k. F est appelée "Householder reflector". Elle est définie comme :

$$Fx = \left(I - 2 \cdot \frac{vv^*}{v^*v}\right) x = x - 2 \underbrace{\frac{vv^*}{v^*v}}_{matrice} x = x - 2v \underbrace{\frac{v^*x}{v^*v}}_{scalaire} \tag{B.6}$$

Où,

$$v = x + sign(x(1))\|x\| e_1. \tag{B.7}$$

Algorithm 3 factorisation QR par réflexions de Householder

pour $k = 1$ to n **faire**
  $x = A(k:m, k)$ `Somme sur les colonnes`
  $v_x = x + sign(x(1))\|x\|_2 e_1$
  $v_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_2}$
  $A(k:m, k:n) = A(k:m, k:n) - 2v_k(v_k^* A(k:m, k:n))$
fin pour

B.7 Programmation parallèle avec la bibliothèque MPI

L'obtention des diagrammes de bifurcation, surtout en deux dimensions, demandent beaucoup de temps de simulation sur l'ordinateur. Pour cette raison, on a décidé d'utiliser des algorithmes en parallèle sur un super calculateur ROMEO II. Pour développer ces algorithmes, nous nous sommes approprié des méthodes avec la bibliothèque MPI (Message Passing Interface).

```
#include <math.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <sstream>
#include <string>

#include "mpi.h"
```

```
#define DIMENSION 5

using namespace std;

//---------------------------------------------------------------------------
int NPer,NTrans,NPoints,Ncol,Nlin_P1,Nlin_P2,NParam_L,NParam_F,P_Aqs;
double data[103];
int phase,Per;


class MLRVC
    {
    double M;              //mass du translateur
    int N;                 //Nombre de phases
    double wr;             //distance d'un pas
    double r;              //resistences des phases
    int sign;
    double MI;
    double Offset; //frotemment sec
    double Gain; //frotemment fluide

    public:

    MLRVC(void);

    double E,Lo,L1,fs,dLndx[3],dLn2d2x[3],Ln[3],Vin[3];
    double Lmax,Lmin; //Inductances

    void define_const(void);
    void Ln_Calc(double*);
    void dLndx_Calc(double*);
```

```
    void dLn2d2x_Calc(double*);
    void sinal(double*);
    void eq_diff(double,double*,double*);
    void RUNGE_KUTTA(double,double,double*);
    };

MLRVC::MLRVC(void)
    {
    M      =  4.5;
    wr     =  0.012*3.0;
    Lmax   =  0.021;
    Lmin   =  0.007;
    r      =  4.5;
    Gain   =  10.0;
    Offset =  2.0;
    N      =  3;
    }

void MLRVC::define_const(void)
    {
    Lo     =  (Lmax+Lmin)/2.0*fs/r;
    L1     =  (Lmax-Lmin)/2.0*fs/r;
    MI     =  (wr/3.0*fs)*(wr/3.0*fs)*M/(1/fs*(E*E/r));
    }

void MLRVC::Ln_Calc(double *x)
    {
    int i;

    for(i=0;i<N;i++)
        Ln[i]=(Lo+L1*cos(2.0*M_PI/3*x[3]-(i)*2.0*M_PI/N));
    }
```

```

void MLRVC::dLndx_Calc(double *x)
    {
    int i;

    for(i=0;i<N;i++)
        dLndx[i]=-L1*(2.0*M_PI/3.0)*sin(2.0*M_PI/3.0*x[3]-(i)*2.0*M_PI/N);
    }

void MLRVC::dLn2d2x_Calc(double *x)
    {
    int i;

    for(i=0;i<N;i++)
        dLn2d2x[i]=-L1*(2.0*M_PI/3.0)*(2.0*M_PI/3.0)*cos(2.0*M_PI/3.0*x[3]-(i)*2.0*M_PI
            /N);
    }

void MLRVC::sinal(double *x)
    {
    if(x[4]>0)
        sign=1;
    else
        if(x[4]<0)
                sign=-1;
            else
                sign=0;
    }

void MLRVC::eq_diff(double t, double *x, double *dxdt)
    {
    define_const();
```

```
    Ln_Calc(x);
    dLndx_Calc(x);
    sinal(x);

        Vin[0]=0;
        Vin[1]=0;
        Vin[2]=0;

        Vin[phase-1]=1;

    dxdt[0]=(1/Ln[0])*(Vin[0]-x[0]-x[0]*x[4]*dLndx[0]);
    dxdt[1]=(1/Ln[1])*(Vin[1]-x[1]-x[1]*x[4]*dLndx[1]);
    dxdt[2]=(1/Ln[2])*(Vin[2]-x[2]-x[2]*x[4]*dLndx[2]);
    dxdt[3]=x[4];
    dxdt[4]=1/(2.0*MI)*(x[0]*x[0]*dLndx[0]+x[1]*x[1]*dLndx[1]+x[2]*x[2]*dLndx[2]-sign
        *2*wr/3*fs*r/(E*E)*(Gain*sign*(x[4]*wr/3*fs)+Offset));
    }

void MLRVC::RUNGE_KUTTA(double t, double h, double *x)
    {
    double th,hh,h6,k1[5],k2[5],k3[5],k4[5],xt[5];
    int i;

    for(i=0;i<DIMENSION;i++)
        {
```

B.8 Traitement graphique des attracteurs

Le programme ci-dessous présente les fonctions utilisées dans le traitement graphique des attracteur.

```
main() {
.
```

```
.
.
DrawFrm->Plot(Cxa,Cya,Opcty);
.
.
.

}

//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TDrawFrm::Plot(int x, int y, double opacity) {
    this->Canvas->Pixels[x][y] = this->Translucent(this->Canvas->Pixels[x][y],
                                              this->Canvas->Pen->Color,
                                              opacity);}
//---------------------------------------------------------------------------

TColor __fastcall TDrawFrm::Translucent(TColor orig, TColor dest, double opacity) {

    union Decomp {
        TColor color;
        unsigned char PRGB[4]; // (P for Palette, after a look to the docs...)
    };

    Decomp o, d, ret;
    double tmp, tmp2, stmp,stmp2;

    o.color = orig;
    d.color = dest;
    ret.color = clBlack;

```

```
    for (unsigned char i = 0 ; i < 3 ; i++) {

        stmp = (double)(d.PRGB[i]);
        tmp = stmp * opacity;
        tmp2 = (double)(o.PRGB[i]);// * (1.0 - opacity);

        if (d.PRGB[i] < o.PRGB[i]) {
                tmp = tmp2-(tmp2-stmp)*opacity;
                    //tmp = (tmp2 - tmp);
            if (tmp < stmp) tmp = stmp;
        } else {
                tmp = tmp2+(stmp-tmp2)*opacity;
                     //tmp = (tmp2 + tmp);
            if (tmp > stmp) tmp = stmp;
        }
        ret.PRGB[i] = (unsigned char)tmp;
    }

    return ret.color;
}

//---------------------------------------------------------------------------
```

B.9 Démarrage du modèle simulink - fichier : MLRV.m

```
clear xf tf;
NumP=3;            % Nombre de périodes a simuler
k=1;
Fs=3;
Ff=14;
Iref=8.5;
```

```
E=20;
r=E/Iref;
M=4.5;

Lmax=21e-3;
Lmin=5.8e-3;

Lo=(Lmax+Lmin)/2;
L1=(Lmax-Lmin)/2;

wr=12e-3;
Z=2*pi/(3*wr);

Ph=[E 0 0
    0 E 0
    0 0 E];
B=2;
Phase=Ph(B,:);

f=4.203125;        % Fréquence du pas
T=1/f;          % Période
pas_temp=T/(2^8);
xo=[0 0 0 0 0];

for j=1:NumP
    j

tspn=[0 T];        % Temps de simulation
tspn=tspn';
myopts = simset('MaxStep',pas_temp,'InitialState',xo);
[t,x]=sim('mod_non_reduit_fv',tspn,myopts);
xo=x(length(x),:);
```

```
if j==1
    xf=x(1:length(x)-1,:);
    tf=t(1:length(x)-1);
else
xf=[xf;x(1:length(x)-1,:)];
tf=[tf;t(1:length(x)-1)+tf(length(tf))];
end
B=B+1-floor(B/3)*3;
Phase=Ph(B,:);
end

PosF=NumP*0.012*ones(length(tf),1);

% figure(1);
% hold on
% plot(tf,xf(:,1),'k');
% figure(3);
% hold on
% plot(tf,xf(:,2),'k');
% figure(2);
% hold on
% plot(tf,xf(:,3),'k');
% figure(4);
% hold on
% plot(tf,xf(:,4),'k');
figure(5);
hold on
plot(tf,xf(:,5),'k');
plot(tf,PosF)
```

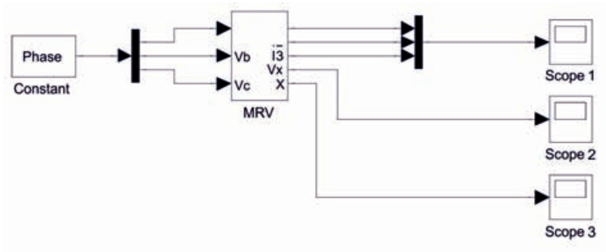


Figure B.1 – Modèle du moteur avec la commande

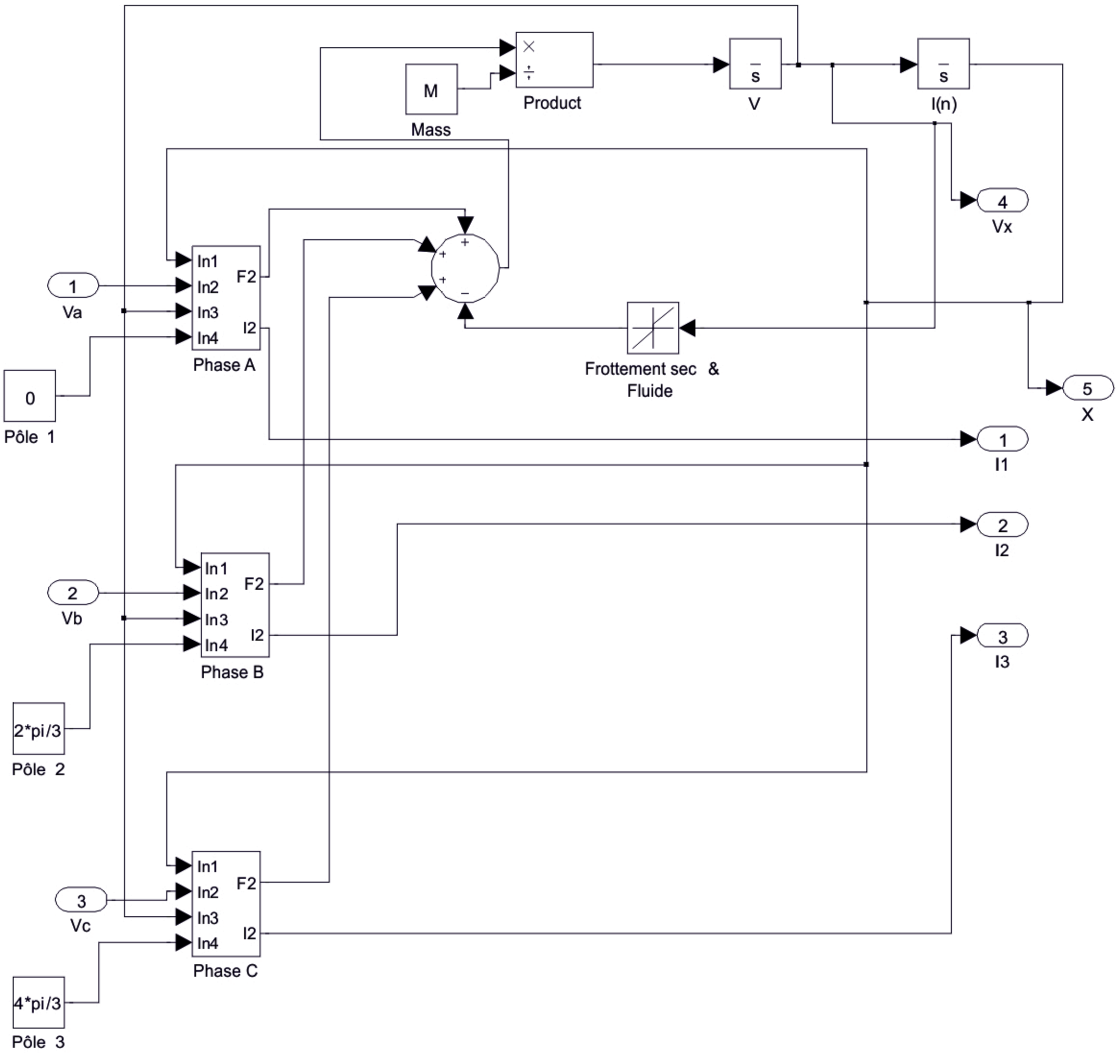


Figure B.2 – Modèle du moteur

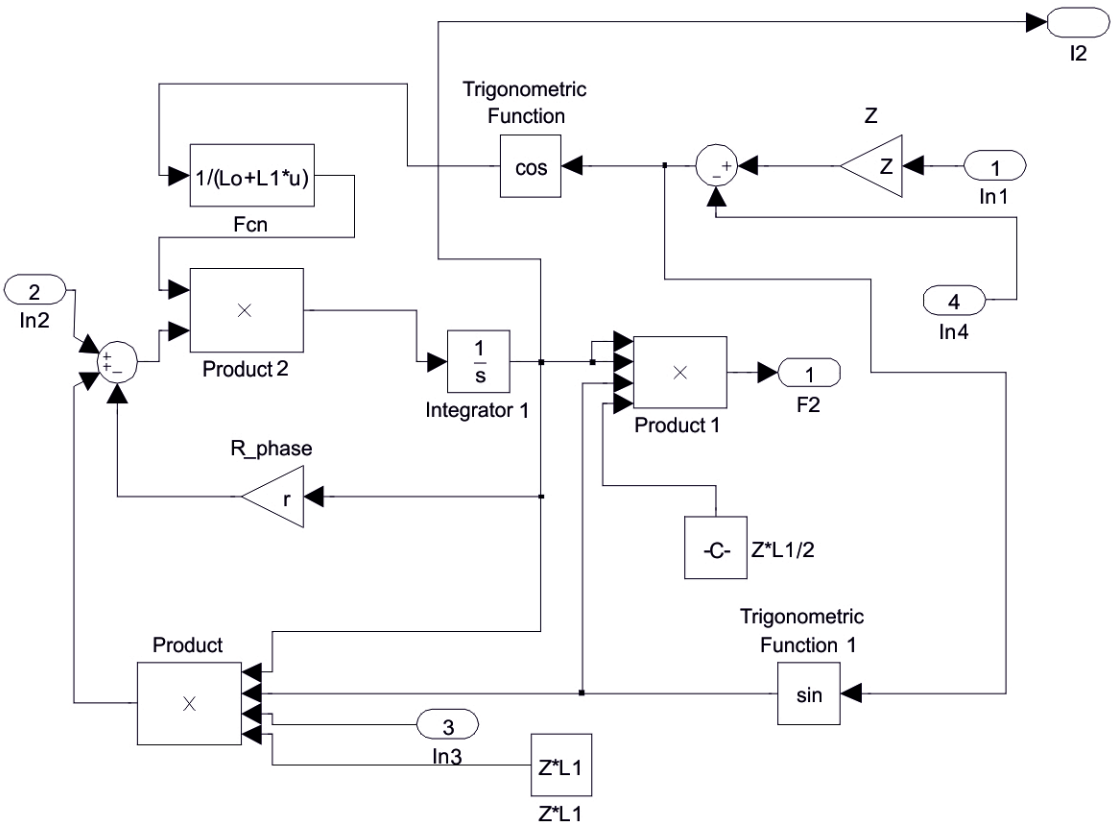


Figure B.3 – Modèle de la phase du moteur

C

Justifications mathématiques

C.1 Antisymétrie du produit $Q^T \cdot \dot{Q}$

Soit Q une matrice orthogonale, on souhaite montrer que le produit $Q^T \cdot \dot{Q}$ est une matrice antisymétrique.

En partant de la propriété des matrices orthogonales :

$$Q^T \cdot Q = I_n \Leftrightarrow Q^T = Q^{-1}, \tag{C.1}$$

la dérivée de ce produit par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{Q}^T \cdot Q + Q^T \cdot \dot{Q} = 0. \tag{C.2}$$

Par transposition :

$$\dot{Q}^T \cdot Q = (Q^T \cdot \dot{Q})^T. \tag{C.3}$$

En remplaçant dans l'équation C.2 :

$$[Q^T \cdot \dot{Q}]^T + Q^T \cdot \dot{Q} = 0. \tag{C.4}$$

Puisque $Q^T \cdot \dot{Q} = -[Q^T \cdot \dot{Q}]^T$, alors $Q^T \cdot \dot{Q}$ est une matrice antisymétrique.

C.2 Dimension système autonome équivalent

La transformation d'un système non-autonome en un système autonome équivalent est nécessaire pour appliquer certaines méthodes d'estimation des invariants à partir des équations différentielles. La discussion développée ici est en rapport avec la dimension que doit avoir ce nouveau système. D'habitude, y compris dans notre travail, cette transformation consiste à considérer la variable temps comme une nouvelle variable d'état en ajoutant une $(n+1)^{\text{ème}}$ équation différentielle au système dynamique :

$$\dot{t} = 1. \tag{C.5}$$

Cette procédure, qui ajoute une dimension au système original non autonome, semble en contradiction avec l'obligation faite à la dynamique chaotique d'être bornée dans l'espace d'état. En effet, la variable temps s'écoule indéfiniment. Toutefois, il faut souligner que la (les) fonction(s) d'excitation du système non autonome n'est (ne sont) pas quelconque(s) : elles sont périodiques. De ce fait, pour lever cette difficulté théorique, il est parfois suggéré de considérer une équivalence avec une entrée oscillante. La présence d'un oscillateur virtuel introduit de fait deux variables d'état supplémentaires. Cela conduit alors à une incrémentation de deux unités de la dimension du système.

Néanmoins, il faut comprendre que la périodicité issue de la dynamique naturelle d'une paire de variables est d'une nature très différente de la périodicité imposée aux entrées du système dynamique.

Au sujet du paradoxe $\dot{t} = 1$, remarquons que, par ailleurs, la variable angulaire d'un système rotatif est rarement bornée. Toutefois, il est d'usage de lui appliquer un modulo (2π) ou de considérer un angle électrique, lui aussi borné. Comme on le sait, cela ne contrevient pas à l'apparition du chaos. Quelle interprétation faut-il donner à cette constatation ?

Prenons par exemple, une dynamique chaotique se superposant à une vitesse de rotation moyenne non nulle et posons :

$$\dot{\theta}(t) = w(t); \qquad w(t) = w_o + \tilde{w}(t) \tag{C.6}$$

w_o étant la vitesse moyenne et $\tilde{w}$ la composante chaotique. Il est évident que la variable θ n'est pas bornée bien que la dynamique soit chaotique. L'application d'un modulo 2π est légitime du fait que nous avons la connaissance a priori de la fréquence d'excitation. C'est en cela précisément que la périodicité imposée est une notion différente de la périodicité d'un oscillateur sous-jacent.

Par changement de variable, posons : $\delta = 2\pi f t$. La fréquence étant fixée, l'application d'un modulo sur l'angle implique un module sur le temps. La fonction d'excitation étant périodique, elle est complètement définie sur une période. Cette remarque légitimise l'application du modulo au temps. Le modulo peut ainsi être considéré comme le repliement indispensable pour assurer la bornitude de l'attracteur.

La figure C.1 illustre l'évolution du temps replié et le fait qu'en tout point dérivable : $\dot{t} = 1$.

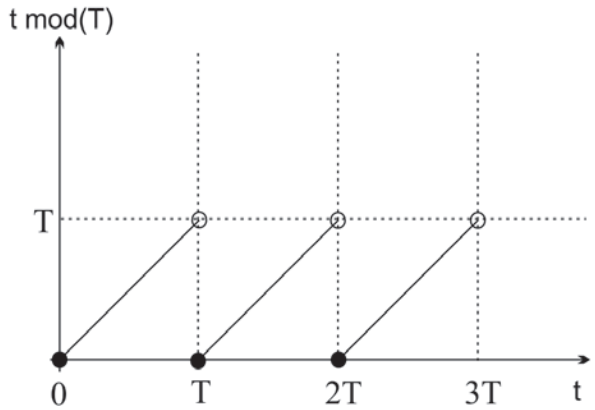


FIGURE C.1 – Evolution du temps avec l'application d'un modulo 2π.

Le paradoxe mentionné au début de cette annexe est levé en rompant artificiellement la continuité du temps. Resterait à débattre au sujets des points de non dérivabilité tout en sachant que les dérivées à droite et à gauche existent et sont égales à 1.

Références bibliographiques

[Abarbanel 91] H. D. I. Abarbanel, R. Brown & M. B. Kennel. *Variation of Lyapunov exponents on a strange attractor.* Journal of Nonlinear Science, vol. 1, no. 2, pages 175–199, 1991.

[Abarbanel 92] H. D. I. Abarbanel, R. Brown & M. B. Kennel. *Local Lyapunov exponents computed from observed data.* Journal of Nonlinear Science, vol. 2, no. 3, pages 343–365, 1992.

[Abarbanel 93] H. D. I. Abarbanel & M. B. Kennel. *Local false nearest neighbors and dynamical dimensions from observed chaotic data.* Physical Review E, vol. 47, no. 5, pages 3057–3068, 1993.

[Acarnley 85] Paul P. Acarnley, Roland J. Hill & Clive W. Hooper. *Detection of Rotor Position in Stepping and Switched Motors by Monitoring of Current Waveforms.* IEEE Transactions on Industrial Elctronics, vol. IE-32, pages 215–222, 1985.

[Alain 05] François Alain. *Contribution à la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécaniques. Application de la théorie du chaos.* PhD thesis, Université de Reims Champagne Ardenne, 2005.

[Alin 02] F. Alin, B. Robert & C. Goeldel. *On the Limits of Chaotic Simulations by Classic Software ? Application to the Step Motor.* In IEEE International conference on Industrial Technology ICIT'02, Bangkok, Thaïland, CD-ROM, 2002.

[Benettin 80] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli & J.M. Strelcyn. *Lyapunov Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems. A Method for Computing All of Them. Part 1 : Theory, and Part 2 : Numerical Applications.* Meccanica, vol. 15, pages 9–30, 1980.

[Berliner 92] L. Mark Berliner. *Statistics, Probability and Chaos.* Statistical Science, vol. 7, no. 1, pages pp. 69–90, 1992.

[Campo 02] Alexandre Campo & Felipe Pait. *Propulsion et levitation Control in a linear electrodynamic motor.* Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications, vol. 1, pages 94–99, 2002.

[Chayopitak 04] Nattapon Chayopitak & David G. Taylor. *Nonlinear Magnetic Circuit Model of a Linear Variable Reluctance Motor.* Symposium on system theory - Proceedings of the thirty-sixth southeastern, vol. -, no. -, pages 170–174, 2004.

[Chen 06] Z.-M. Chen, K. Djidjeli & W.G. Price. *Computing Lyapunov exponents based on the solution expression of the variational system.* Applied Mathematics and Computation, vol. 174, no. -, pages 982–996, 2006.

[Cheng 00] C. Cheng & X.J. Fan. *A Method For Calculating The Lyapunov Exponent Spectrum Of A Periodically Excited Non-Autonomous Dynamical System.* Acta Mechanica Solida Sinica, vol. 13, no. 3, pages 254–261, 2000.

[Chlouverakisa 05] Konstantinos E. Chlouverakisa & J.C. Sprottb. *A comparison of correlation and Lyapunov dimensions.* Physica D, vol. 200, pages 156–164, 2005.

[Christiansen 97] F. Christiansen & H. H. Rugh. *Computing Lyapunov spectra with continuous Gram-Schmidt orthonormalization.* Nonlinearity, vol. 10, no. 5, pages 1063–1072, 1997.

[Darbyshire 96] A. G. Darbyshire & D. S. Broomhead. *Robust estimation of tangent maps and Liapunov spectra.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 89, no. 3-4, pages 287–305, 1996.

[De Castro 08a] M.R. De Castro. *Analyse des Phénomènes non Linéaires dans la Région Arrêt/Démarrage d'un Moteur Linéaire Réluctance Variable.* In Huitième Conférence Jeunes Chercheurs Génie électrique 2008- JCGE'08, Lyon, France., sep 2008. IEEE.

[De Castro 08b] M.R. De Castro, B. Robert & C. Goeldel. *Bifurcations and Chaotic Dynamics in a Linear Switched Reluctance Motor.* In European Power Electronics & Power Electronics and Motion Control Conference, Poznan, Poland., sep 2008. IEEE.

[De Castro 09] M.R. De Castro, B. Robert & C. Goeldel. *Strange Attractor and Fractal Dimension in a Linear Switched Reluctance Motor.* In 6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, Djerba, Tunisia, 2009. IEEE.

[De Castro 10a] M.R. De Castro, B. Robert & C. Goeldel. *Analysis of non periodic and Chaotic Motions in a Switched Reluctance Linear Motor.* In IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2010 - ISCAS'10, Paris, France, 2010. IEEE.

[De Castro 10b] M.R. De Castro, B. Robert & C. Goeldel. *Experimental Chaos and Fractals in a Linear Switched Reluctance Motor.* In 14th International Power Electronics and Motion Control Conference EPE-PEMC, Ohrid, Macedonia, 2010. IEEE.

[Deihimi 02] A. Deihimi, S. Farhangi & G. Henneberger. *A general nonlinear model of switched reluctance motor with mutual coupling and multiphase excitation.* Electrical Engineering, vol. 84, no. 3, pages 143–158, 2002.

[Dieci 94] L. Dieci, R. Russell & E.V. Vleck. *Unitary integrators and application to continuous orthogonalization techniques.* SIAM J Numerical Analisys, vol. 31, pages 261–81, 1994.

[Dieci 95] L. Dieci & E. S. Van Vleck. *Computation of a few Lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems.* Applied Numerical Mathematics, vol. 17, no. 3, pages 275–291, 1995.

[Dieci 97] L. Dieci, R. D. Russell & E. S. Van Vleck. *On the computation of lyapunov exponents for continuous dynamical systems.* SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 34, no. 1, pages 402–403, 1997.

[Dieci 03] L. Dieci & E. S. Van Vleck. *Orthonormal integrators based on Householder and Givens transformations.* Future Generation Computer Systems, vol. 19, no. 3, pages 363–373, 2003.

[Dieci 05] L. Dieci & E. S. Van Vleck. *On the error in computing Lyapunov exponents by QR Methods.* Numerische Mathematik, vol. 101, no. 4, pages 619–642, 2005.

[Dieci 06] L. Dieci & E. S. Van Vleck. *Perturbation theory for approximation of Lyapunov exponents by QR methods.* Journal of Dynamics and Differential Equations, vol. 18, no. 3, pages 815–840, 2006.

[Ding 93] M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer & J. A. Yorke. *Plateau onset for corrélation dimension : When does it occur ?* Physical Review Letters, vol. 70, no. 25, pages 3872–3875, 1993. Cited By (since 1996) : 83.

[Eckmann 85a] J. . Eckmann & D. Ruelle. *Ergodic theory of chaos and strange attractors.* Reviews of Modern Physics, vol. 57, no. 3, pages 617–656, 1985.

[Eckmann 85b] J. . Eckmann & D. Ruelle. *Erratum : Ergodic theory of chaos and strange attractors (Reviews of Modern Physics (1985) 57, 4, (1115)).* Reviews of Modern Physics, vol. 57, no. 4, page 1115, 1985.

[Eckmann 86] J. . Eckmann, S. O. Kamphorst, D. Ruelle & S. Ciliberto. *Liapunov exponents from time series.* Physical Review A, vol. 34, no. 6, pages 4971–4979, 1986.

[Eckmann 92] J. . Eckmann & D. Ruelle. *Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 56, no. 2-3, pages 185–187, 1992.

[Foroutan-pour 99] K. Foroutan-pour, P. Dutilleul & D.L. Smith. *Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation.* Applied Mathematics and Computation, vol. 105, no. -, pages 195–201, 1999.

[Fraser 86] Andrew M. Fraser & Harry L. Swinney. *Independent coordenates for strange attractor from mutual information.* Physica Review A, vol. 33, no. 2, pages 1134–1140, 1986.

[Gao 04] H. Gao, F.R. Salmasi & M. Ehsani. *Inductance Model-based sensorless control of the switched reluctance motor drive at low speed.* Power electronics, IEEE transactions, vol. 19 - issue 6, pages 1568 – 1573, 2004.

[Grassberger 83a] P. Grassberger & I. Procaccia. *Characterization of strange attractors.* Physical Review Letters, vol. 50, no. 5, pages 346–349, 1983.

[Grassberger 83b] P. Grassberger & I. Procaccia. *Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal.* Physical Review A, vol. 28, no. 4, pages 2591–2593, 1983.

[Grassberger 83c] P. Grassberger & I. Procaccia. *Measuring the strangeness of strange attractors.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 9, no. 1-2, pages 189–208, 1983.

[Grassberger 84] P. Grassberger & I. Procaccia. *Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 13, no. 1-2, pages 34–54, 1984.

[Guégan 03] D. Guégan. Les chaos en finance : Approche statistique, economica,. Série Mathématique et Probabilité. 2003.

[Hausdorff 19] Felix Hausdorff. *Dimension und ausseres Mass.* Math. Annalen, vol. 79, no. -, page 157, 1919.

[Hegger 99a] R. Hegger & H. Kantz. *Improved false nearest neighbor method to detect determinism in time series data.* Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics, vol. 60, no. 4 B, pages 4970–4973, 1999.

[Hegger 99b] R. Hegger, H. Kantz & T. Schreiber. *Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package.* Chaos, vol. 9, no. 2, pages 413–435, 1999.

[J.H. Chen 00] Q. Jiang C .C. Chan J.H. Chen K.T. Chau & S.Z. Jiang. *Modeling and Analysis of Chaotic Behavior in Switched Reluctance Motor Drives.* 31st Annual Power Electronics Specialists Conference, PESC'00, vol. 3, no. -, pages 1551–1556, 2000.

[Jufer 04] Marcel Jufer. Traité d'électricité -volume ix - électromécanique - nouvelle édition revue et argumentée, volume 9 of *Traité d'électricité.* Presse polytechniques et universitaires romandes, 2004.

[Just 00] W. Just & H. Kantz. *Some considerations on Poincare maps for chaotic flows.* Journal of Physics A : Mathematical and General, vol. 33, no. 1, pages 163–170, 2000.

[Kaplan 79a] J. Kaplan & J. Yorke. *Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations.* Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 730, page 204, 1979.

[Kaplan 79b] J.L. Kaplan & J.A. Yorke. *Functional Diferential Equations and Approximations of Fixed Points.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 730, no. -, pages –, 1979.

[Kennel 92] M. B. Kennel, R. Brown & H. D. I. Abarbanel. *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction.* Physical Review A, vol. 45, no. 6, pages 3403–3411, 1992.

[Kennel 02] M. B. Kennel & H. D. I. Abarbanel. *False neighbors and false strands : A reliable minimum embedding dimension algorithm.* Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, vol. 66, no. 2, pages 026209/1–026209/18, 2002.

[Komatsuzaki 07] A. Komatsuzaki, T. Bamba & I. ; Miki. *A Position Sensorless Speed Control for Switched Reluctance Motor at Low Speeds.* Power Engineering Society General Meeting, IEEE, vol. 1, no. -, pages 1–7, 2007.

[Kruger 96] A. Kruger. *Implementation of a fast box-counting algorithm.* Computer Physics Communications, vol. 98, no. -, pages 224–234, 1996.

[K.T. Chau 99] C.C. Chan K.T. Chau J.H. Chen & Q. Jiang. *Subharmonics and Chaos in Switched Reluctance Motor Drives.* International Conference IEMD'99 Electrical Machines and Drives, vol. -, no. -, pages 661–663, 1999.

[Kuo 74] Benjamin C. Kuo. Theory and applications of step motors. West Pub. Co. St. Paul,, 1974.

[Ledrappier 81] F. Ledrappier. *Some relations between dimension and Lyapunov exponents.* Commun. Math. Phys., vol. 81, pages 229–238, 1981.

[Leibovitch 89] L.S. Leibovitch & T. Toth. *A fast algotithm to determine fractal dimensions by box-counting.* Phys. Lett. A, vol. 141, no. 545, pages 386–390, 1989.

[Letellier 05] Christophe Letellier, Luis A. Aguirre & Jean Maquet. *Relation between observability and differential embeddings for nonlinear dynamics.* Phys. Rev. E, vol. 71, no. 6, page 066213, Jun 2005.

[LI 75] T.Y. LI & J.A. YORKE. *Period three implies chaos.* Am. Math. Monthly, vol. 82, pages 985–992, 1975.

[Lin 08] D. Lin, P. Zhou, S. Stanton, W. N. Fu & Z. J. Cendes. *A Dynamic Analytical Model of Switched Reluctance Motors.* Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, pages 1–6, 2008.

[Liu 99] Pengtao Liu & Jianguo Zhu. *Analysis of a Linear Variable Reluctance Permanent Magnet Motor.* IEEE International Conference on Power Electronics and Drive Systems, PEDS'99, vol. 2, no. -, pages 734–739, 1999.

[Liu 00a] Cheng-Tsung Liu & Sheng-Yang Lin. *An Orthogonal Control Scheme of Linear Switched-Reluctance Motor for Magnetic Levitated Vehicle Applications.* Power Engineering Society Winter Meeting, IEEE, vol. 1, pages 249–252, 2000.

[Liu 00b] P.T. Liu & J.G Zhu. *Performance simulation of a linear variable reluctance permanent magnet motor with current control.* The Third International Power Electronics and Motion Control Conference, Proceedings. IPEMC 2000., vol. 2, pages 602 – 606, 2000.

[LORENZ 63] E. LORENZ. *Deterministic Nonperiodic Flow.* J. Atmos. Sci., vol. 20, pages 130–141, 1963.

[Lu 05] Jia Lu, Guolai Yang, Hyounkyun Oh & Albert C.J. Luo. *Computing Lyapunov exponents of continuous dynamical systems : method of Lyapunov vectors.* Chaos, Solitons and Fractals, vol. 23, no. -, pages 1879–1892, 2005.

[Lyapunov 47] A. M. Lyapunov. The general problem of the stability of motion. Numeéro 27. Princeton University Press, 1947.

[Mandelbrot 73] Benoît Mandelbrot. *Formes nouvelles du hasard dans les sciences.* Économie Appliquée, vol. 26, no. 1, pages 307–319, 1973.

[Müller 95] Peter C. Müller. *Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities.* Chaos, Solitons and Fractals, vol. 5, no. 9, pages 1671–1681, 1995.

[Nagel 98] N.J. Nagel & R.D. Lorenz. *Rotating vector methods for sensorless, smooth torque control of a switched reluctance motor drive.* Thirty-Third IAS Annual Meeting IEEE Industry Applications Conference, vol. 1, pages 723 – 730, 1998.

[Nagel 00] N.J. Nagel & R.D. Lorenz. *Rotating vector methods for smooth torque control of a switched reluctance motor drive.* IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 36, pages 540 – 548, 2000.

[Nayfeh 95] Ali H. Nayfeh & Balakumar Balachandran. Applied nonlinear dynamics - analytical, computational and experimental methods. Wiley-Interscience Publication / Jonh Wiley & Sons, Inc., pages 147 - 219, 1995.

[Olbrich 97] E. Olbrich & H. Kantz. *Inferring chaotic dynamics from time-series : On which length scale determinism becomes visible.* Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics, vol. 232, no. 1-2, pages 63–69, 1997.

[Oseledec 68] V.I. Oseledec. *A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic exponents for dynamical systems.* Trudy Moskov. Mat. Obshch, vol. 19, no. 1, pages 197–231, 1968.

[Parker 87] Leon O. Parker Thomas S.and CHUA. *CHAOS : A tutorial for engineers.* proceedings of IEEE, vol. 75, no. 8, pages 982–1008, 1987.

[Peitgen 92] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens & Dietmar Saupe. Chaos and fractals - new frontiers of science. -, 1992.

[R. Hegger 99] et T. Schreiber R. Hegger Kantz H. *mise en œuvre pratique des méthodes de séries temporelles non linéaires : Le forfait TISEAN.* CHAOS, vol. 9, page 413, 1999.

[Reiss 03] J. Reiss, B. Robert, F. Alin, M. Sandler & M. Flip. *Phenomena and Coexisting Attractors in an Incremental Actuator.* In IEEE International Conference on Industrial Technology, Maribor, Slovénie, dec 2003.

[Robert 00] B. Robert, M.-C. MArion-Pera & C. Goeldel. *Dynamiques apériodiques et chaotiques du moteur pas à pas.* Revue Internationale de Génie Electrique, vol. 3, pages 375–410, 2000.

[Robert 01] B. Robert, C. Alin & C. Goeldel. *Aperiodic and chaotic dynamics in hybrid step motor - New experimental results.* In IEEE International Symposium on Industrial Electronic, volume 3, pages 2136–2141, 2001.

[Robert 02] B. Robert, C. Alin & C. Goeldel. *On the Limits of Chaotic Simulations by Classic Software : Application to the Step Motor.* In IEEE International conference on Industrial Technology - ICIT'02, volume 2, pages 1067–1071, 2002.

[Robert 06] Bruno Robert. *Dynamiques complexes, bifurcations et chaos dans les systèmes électrotechniques non-linéaires. Modélisation, analyse et contrôle.* Hdr -l'habilitation à diriger recherches, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2006.

[Rosenstein 93] M. T. Rosenstein, J. J. Collins & C. J. De Luca. *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 65, no. 1-2, pages 117–134, 1993.

[Rosenstein 94] M. T. Rosenstein, J. J. Collins & C. J. De Luca. *Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 73, no. 1-2, pages 82–98, 1994.

[Russa 98] K. Russa, I. Husain & M. Elbuluk. *A self-tuning controller for switched reluctance machines.* 29th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, . PESC 98 Record., vol. 2, pages 1269 – 1275, 1998.

[Sauer 97] T. Sauer, C. Grebogi & J. A. Yorke. *How long do numerical chaotic solutions remain valid ?* Physical Review Letters, vol. 79, no. 1, pages 59–62, 1997.

[Sauer 98] T. D. Sauer, J. A. Tempkin & J. A. Yorke. *Spurious Lyapunov exponents in attractor reconstruction.* Physical Review Letters, vol. 81, no. 20, pages 4341–4344, 1998.

[Sauer 99] T. D. Sauer & J. A. Yorke. *Reconstructing the Jacobian from data with observational noise.* Physical Review Letters, vol. 83, no. 7, pages 1331–1334, 1999.

[Sproull 91] R. F. Sproull. *Refinements to nearest-neighbor searching in k-dimensional trees.* Algorithmica, vol. 6, no. 1, pages 579–589, 1991.

[Suresh 99] G. Suresh, B. Fahimi, K.M. Rahman & M. Ehsani. *Inductance based position encoding for sensorless SRM drives.* PESQ Records - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference, vol. 2, pages 832 – 837, 1999.

[Takens 85] F. Takens. Dynamical systems and bifurcations, volume 1125/1985 of *Lecture Notes in Mathematics.* 1985.

[Theiler 90] James Theiler. *Estimating fractal dimension.* J. Opt. Soc. Am. A, vol. 7, no. 6, pages 1055–1073, 1990.

[Trefethen 97] Lloyd N. Trefethen & David Bau. Numerical linear algebra. SIAM, 1997.

[Von Bremen 97] Hubertus F. Von Bremen, Firdaus E. Udwadia & Wlodek Proskurowski. *An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents.* Phisica D, vol. 101, no. -, pages 1–16, 1997.

[Von Bremen 01] Hubertus F. Von Bremen & Firdaus E. Udwadia. *Computation of Lyapunov characteristic exponents for continuous dynamical systems.* Zeitschrift f"ur angewandte Mathematik und Physik ZAMP, vol. 53, no. -, pages 123–146, 2001.

[Wolf 85] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney & J. A. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from a time series.* Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 16, no. 3, pages 285–317, 1985.

[Xu 09] Pengcheng Xu. *Differential phase space reconstructed for chaotic time series.* Applied mathematical modelling, vol. 33, no. 2, pages 999–1013, 2009.

[Zhong i 00] Bo Zhang Zhong i & Zongyuan Mao. *Analysis of the chaotic phenomena in Permanent-magnet Synchronous Motors Based on Poincare Map'.* Proceedings of the 3d World Congress on Intelligent Control and Automation, vol. 5, no. -, pages 3255–3258, 2000.

[Zhong Li 99] Lianfang Tian Zhong Li Bo Zhang & Zongyuan Mao. *Strange Attractors in Permanent-magnet Synchronous Motors.* Proceedings of IEEE 1999 International Conference on Power Electronics and Drives Systems, PEDS'99, vol. 1, no. -, pages 150–155, 1999.

Résumé

L'objet d'étude est un prototype de moteur linéaire à réluctance variable. Ce genre de machine est très utile dans beaucoup d'applications industrielles qui ont besoin d'une grande précision dans le contrôle de position. Le faible coût, la robustesse due à la technologie très simple, et l'aptitude à fonctionner en boucle ouverte par entraînement direct, y compris pour les déplacements précis sur de grandes longueurs, sont quelques avantages.

Un désavantage de cette machine est la grande oscillation du couple, en comparaison avec les machines conventionnelles, ce qui génère du bruit acoustique et des oscillations mécaniques. L'origine des oscillations du couple vient surtout de la nature fortement non linéaire de ce genre de machine ainsi que du principe de production de la force de propulsion sous forme discrète. La nature non linéaire de ce type de moteur peut être vue comme la forte dépendance qu'il y a entre la position de la partie mobile et la perméance de l'entrefer.

Aujourd'hui les algorithmes numériques et les moyens de calculs sont devenus de très importants et puissants outils dans le développement, la simulation et l'analyse des systèmes dynamiques en physique et en ingénierie. Dans les dernières décades, de nouveaux outils, comme la théorie ergodique des systèmes dynamiques, ont permis d'accéder plus facilement à l'analyse des systèmes chaotiques. L'application de ces méthodes a permis d'aborder sous un autre angle l'étude du contrôle non linéaire en même temps que d'ouvrir la porte à une nouvelle génération de drivers vitesse/position.

A propos d'un genre de machines similaire, quelques travaux développés sur les moteurs pas-a-pas, ont mis en évidence beaucoup de phénomènes non linéaires. Ces dynamiques très compliquées apparaissent également dans le moteur linéaire à réluctance variable et donne lieu en boucle ouverte aux différents comportements décrits dans cette étude.

Mots-clés: Chaos, Exposants de Lyapunov, Machine linéaire, Dimension fractale.

Abstract

This study deals with a prototype of a linear switched reluctance motor. This kind of machine is very useful in many industrial applications that require high precision in position control. The low cost, robustness due to the very simple technology, and ability to operate in open loop direct drive, including the precise positioning over longer distances, are a few advantages.

A disadvantage of this machine is the large traction force oscillation, compared with conventional machines, which generates acoustic noise and mechanical vibrations. This motor present a highly nonlinear dynamic because the discrete nature of torque production mechanism. The hard nonlinearity is mainly due to the strong dependence between translator position and air-gap permeance.

Today numerical algorithms and computing resources have become very important and powerful tools in the development, simulation and analysis of dynamical systems in physics and engineering. In recent decades, new tools, such as ergodic theory of dynamical systems, have allowed easier access to the analysis of chaotic systems. The application of these methods allowed

approaching from another angle the study of nonlinear control at the same time to open the door for a new driver speed/position generation.

About a similar kind of machinery, some work on engines developed step-by-step, showed a lot of nonlinear phenomena. These dynamics also appear very complicated in the variable reluctance linear motor and gives rise to various open-loop behaviors described in this study.