

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE  
FACULTÉS DE SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

# THÈSE

pour obtenir le titre de

## Docteur en Sciences

de l'Université de Reims Champagne-Ardenne  
Mention : Électronique, Électrotechnique et  
Automatisme

Présentée et soutenue par

Romain DÉJARDIN

# Récepteurs itératifs dédiés à la correction de saturation pour les systèmes OFDM

Thèse dirigée, co-encadrée par Guillaume GELLÉ  
et co-encadrée par Maxime COLAS

préparée au laboratoire CReSTIC - SysCom

soutenue le 10 février 2010

**Jury :**

<i>Président :</i>	Michel TERRÉ	-	CNAM, Paris
<i>Rapporteurs :</i>	Inbar FIJALKOW	-	ENSEA, Cergy
	Jacques PALICOT	-	Supélec, Rennes
<i>Examineurs :</i>	Guillaume GELLÉ	-	URCA, Reims
	Maxime COLAS	-	URCA, Reims



*Page laissée vierge intentionnellement.*



*À Marcelle et Gaston.*



---

## Remerciements

Je tiens à remercier cordialement les membres du jury présents lors de ma soutenance. En premier lieu, Monsieur Michel TERRÉ, directeur de l'École d'Ingénieur du Conservatoire National des Arts et Métiers (EiCNAM), pour m'avoir fait l'honneur d'accepter le rôle de président. Merci également à Madame Inbar FIJALKOW, directrice du laboratoire de recherche ETIS de l'École Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications (ENSEA) de Cergy, pour la pertinence de ses propos et ses nombreuses critiques. Enfin merci à Monsieur Jacques PALICOT, directeur de l'équipe SCEE du laboratoire de recherche IETR de l'École Supérieure d'Électricité (Supélec) de Rennes, pour sa bienveillance et la justesse de ses remarques à propos du manuscrit et l'ensemble de ce travail.

Merci à Guillaume GELLÉ, directeur et co-encadrant, pour avoir fait en sorte que cette thèse soit possible et qu'elle se déroule, pour moi, dans les meilleures conditions possibles. Merci pour ta confiance.

Mes remerciements spéciaux vont à Maxime COLAS, co-encadrant, pour ses conseils avisés, son calme, sa patience, son honnêteté et pour ses qualités scientifiques. Merci également pour tous les efforts que tu as consenti et pour ta bonne humeur. Tu as ma plus profonde reconnaissance.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à David CARTON pour ses conseils et sa bienveillance en tant que Président du département EEA de la Faculté des Sciences de Reims et, plus personnellement, pour ses qualités humaines qui font de lui un individu rare.

Je ne saurais oublier de remercier et saluer Damien ZANDER pour sa bonhomie, sa confiture, son vin et pour tous les moments de franche camaraderie ; ainsi que les membres respectifs et respectés de la Shannon Award Team, Alban GOUPIL et Maximilien GADOULEAU.

Bonne chance pour tout ce que vous entreprendrez les gars.

J'adresse aussi mes plus affectueux remerciements à mes parents pour leur soutien constant et leurs encouragements. À Marianne, pour avoir supporté ces quelques années fastidieuses et les avoir rendues largement plus agréables.

Merci enfin à tous mes amis, qui se reconnaîtront.



"Genius might be the ability to say a profound thing in a simple way."

Charles Bukowski



*Page laissée vierge intentionnellement.*



---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Principes de la modulation OFDM</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	5
2.2	Historique . . . . .	6
2.3	Génération des signaux OFDM . . . . .	7
2.3.1	Transformée de Fourier . . . . .	7
2.3.2	Propriété d'orthogonalité . . . . .	10
2.3.2.1	Notion mathématique . . . . .	10
2.3.2.2	Orthogonalité des sous-porteuses en OFDM . . . . .	10
2.4	Notions d'IES, d'IEP et d'intervalle de garde . . . . .	11
2.4.1	Influence du canal de communication . . . . .	12
2.4.1.1	Modélisation des canaux de communication et convolution linéaire . . . . .	12
2.4.1.2	Convolution circulaire . . . . .	13
2.4.1.3	Interférences entre porteuses et symboles . . . . .	14
2.4.2	Intervalle de garde . . . . .	14
2.4.3	Préfixe cyclique et canal OFDM équivalent . . . . .	15
2.5	Émission et réception des signaux OFDM radio-fréquence et synchronisation . . . . .	18
2.5.1	Émission des signaux OFDM RF . . . . .	19
2.5.2	Réception des signaux OFDM RF . . . . .	20
2.5.3	Effets de la synchronisation en temps et en fréquence . . . . .	21
2.6	Techniques d'égalisation . . . . .	21
2.6.1	Estimation de canal par sous-porteuses pilotes . . . . .	22
2.6.2	Égalisation par structure ZF . . . . .	22
2.6.3	Égalisation par structure MMSE . . . . .	23
2.7	Performances théoriques des systèmes OFDM . . . . .	23
2.7.1	Capacité des systèmes OFDM . . . . .	23
2.7.2	Taux d'erreur théorique des transmissions OFDM . . . . .	24
2.8	Conclusion . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Influence et analyse du PAPR des signaux OFDM</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Dispositifs d'amplification en télécommunications . . . . .	30
3.2.1	Modèles d'amplificateurs sans-mémoire . . . . .	31
3.2.1.1	Modélisation des amplificateurs TWT . . . . .	32
3.2.1.2	Modélisation des amplificateurs SSP . . . . .	33
3.2.1.3	Modélisation par approche polynomiale . . . . .	34
3.2.2	Modèles d'amplificateurs à mémoire . . . . .	35
3.3	Statistique des signaux OFDM . . . . .	35
3.3.1	Peak-to-average power ratio . . . . .	37

3.3.2	Analyse de l'évolution du PAPR . . . . .	39
3.3.3	Cas du PAPR des signaux OFDM sur-échantillonnés . . . . .	41
3.4	Techniques de limitation du PAPR à l'émetteur . . . . .	43
3.4.1	Introduction . . . . .	43
3.4.2	Limitation d'amplitude du signal OFDM . . . . .	44
3.4.3	Codage . . . . .	45
3.4.4	Selected mapping . . . . .	46
3.4.5	Entrelacement . . . . .	47
3.4.6	Partial transmit sequence . . . . .	48
3.4.7	Manipulation de sous-porteuses . . . . .	49
3.4.7.1	Tone reservation . . . . .	49
3.4.7.2	Tone injection . . . . .	50
3.4.8	Active constellation extension . . . . .	50
3.5	Conclusion . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Systèmes OFDM soumis à l'écrêtement à l'émission et compensation en réception</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	53
4.2	Caractérisation des distorsions non-linéaires liées au clipping . . . . .	54
4.2.1	Théorème de Bussgang . . . . .	55
4.2.2	Extension du théorème de Bussgang . . . . .	55
4.2.3	Statistique des signaux OFDM avec clipping . . . . .	56
4.2.4	Effets du clipping sur le spectre des signaux OFDM . . . . .	59
4.2.5	PAPR des signaux OFDM soumis au clipping . . . . .	62
4.3	Influence du bruit de clipping sur la performance . . . . .	64
4.3.1	Hypothèse de gaussiannité du bruit de clipping . . . . .	64
4.3.2	Performance quant au taux d'erreur . . . . .	65
4.3.3	Influence du clipping sur la capacité du canal de transmission	68
4.3.3.1	Capacité de canal avec clipping à l'émission . . . . .	68
4.3.3.2	Capacité avec contrainte en entrée du canal et clipping	70
4.3.4	Conclusion . . . . .	72
4.4	Récepteurs itératifs pour les transmissions OFDM avec clipping . . . . .	73
4.4.1	Introduction . . . . .	73
4.4.2	Reconstruction de signal par technique DAR . . . . .	74
4.4.2.1	Récepteur par algorithme DAR . . . . .	74
4.4.2.2	Extension au principe <i>turbo</i> : récepteur turbo-DAR	76
4.4.2.3	Récepteur IAR . . . . .	77
4.4.3	Estimation et annulation directe du bruit de clipping . . . . .	78
4.4.3.1	Algorithme BNC . . . . .	78
4.4.3.2	Récepteur BNC pour transmissions OFDM codées . . . . .	79
4.4.4	Récepteur itératif à inférence bayésienne SEM-DA . . . . .	80
4.4.5	Détection sous-optimale de trame . . . . .	81
4.4.6	Inversion itérative de la fonction de clipping . . . . .	82
4.4.7	Turbo-égalisation adaptée au clipping . . . . .	82
4.5	Discussion et conclusion . . . . .	84

<b>5 Récepteurs itératifs pour transmissions OFDM avec clipping</b>	<b>87</b>
5.1 Introduction . . . . .	87
5.2 Reconstruction de signal DAR ou annulation du bruit de distorsion BNC pour les transmissions OFDM avec clipping? . . . . .	90
5.2.1 Introduction . . . . .	90
5.2.2 Récepteur soft-BNC à annulation directe du bruit de clipping	90
5.2.2.1 Description du récepteur . . . . .	90
5.2.2.2 Performance comparée des récepteurs BNC et soft- BNC . . . . .	91
5.2.3 Étude du comportement itératif des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR par analyse EXIT . . . . .	92
5.2.3.1 Mesure EXIT du décodeur SISO . . . . .	94
5.2.3.2 Mesure EXIT des boucles de correction DAR et BNC	95
5.2.3.3 Discussion . . . . .	95
5.2.4 Performance comparée des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR	96
5.2.5 Conclusion . . . . .	98
5.3 Récepteur sous-optimal à décision souple pour transmissions OFDM codées avec clipping . . . . .	99
5.3.1 Introduction et motivations . . . . .	99
5.3.2 L'approche d'Ochiai pour transmission codée . . . . .	100
5.3.3 Récepteur SML à décision souple aidée par détection sous- optimale à maximum de vraisemblance . . . . .	101
5.3.3.1 Détection optimale . . . . .	102
5.3.3.2 Décision sous-optimale souple à maximum de vrai- semblance . . . . .	103
5.3.4 Description du récepteur SML . . . . .	105
5.3.5 Performance du récepteur SML . . . . .	106
5.3.6 Discussion . . . . .	108
5.4 Conclusion . . . . .	109
<b>6 Conclusion et perspectives</b>	<b>111</b>
<b>A Convolution circulaire</b>	<b>113</b>
<b>B Performance théorique de modulations numériques choisies</b>	<b>115</b>
B.1 Performance d'un système OFDM avec modulation antipodale . . .	115
B.2 Performance d'une modulation 4-PAM . . . . .	116
B.3 Performance d'une modulation 4-PSK . . . . .	118
B.4 Performance de la modulation 16-QAM . . . . .	120
<b>C Capacité d'un canal blanc additif gaussien avec clipping discret et   sans-mémoire</b>	<b>123</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>



---

# Table des figures

2.1	Décomposition d'un signal OFDM : représentation des sous-porteuses constituantes, $N = 4$ , $T = 1$ s. . . . .	8
2.2	Spectre en fréquence d'une trame OFDM : représentation des sous-porteuses constituantes, $N = 4$ , $T = 1$ s. . . . .	11
2.3	Propagation des trames OFDM sans intervalle de garde : retards, trajets multiples et interférences. . . . .	14
2.4	Insertion d'un intervalle de garde en temps en OFDM. . . . .	15
2.5	Construction du préfixe cyclique : représentation des sous-porteuses constituantes, du signal OFDM résultant et du préfixe cyclique. Le temps symbole est $T = 1$ s, la durée du préfixe $T_g = 0.25$ s et celle de la trame $T_s = 1.25$ s, $N = 4$ . . . . .	16
2.6	Modélisation équivalente d'une réception OFDM sur canal sélectif en fréquences avec intervalle de garde de type préfixe cyclique. . . . .	17
2.7	Influence du préfixe cyclique sur la densité spectrale de puissance d'un signal OFDM modulé par une constellation 16-QAM. Comparaison avec le cas sans intervalle de garde, $N = 256$ porteuses et $G = 0.25$ . . . . .	17
2.8	Synoptique de la génération d'un signal OFDM numérique RF sur fréquence intermédiaire. . . . .	19
2.9	Diagramme d'un récepteur de signal OFDM à bande transposée. . . . .	20
2.10	Solution basée sur le principe de <i>water-filling</i> pour la maximisation de la capacité de canal de transmissions OFDM, équation (2.45). . . . .	24
2.11	Performance d'un système OFDM modulé par constellation antipodale à deux états sur canal BABG. Taux d'erreur binaire, équation (B.6). . . . .	25
2.12	Performance d'un système OFDM modulé par constellation 16-QAM avec étiquetage par code naturel sur canal BABG. Taux d'erreur symbole, équation (2.48). . . . .	26
2.13	Performance d'un système OFDM modulé par constellation 16-QAM avec étiquetage par code de Gray sur canal BABG. Comparaison des taux d'erreur binaire obtenus théoriquement par l'équation (2.49) et par simulation. . . . .	27
3.1	Caractéristique typique des amplificateurs utilisés en communications numériques. . . . .	30
3.2	Modélisation générique des amplificateurs sans-mémoire en bande de base. . . . .	32
3.3	Fonctions de distorsion AM/AM et AM/PM d'un amplificateur TWT. $\alpha_a = 2$ , $\beta_a = 1$ , $\alpha_\phi = \frac{\pi}{3}$ et $\beta_\phi = 1$ . Le niveau de saturation est $A = 1$ et le déphasage correspondant est $\Phi = \frac{\pi}{6}$ . . . . .	33
3.4	Fonction de transfert d'un amplificateur SSP pour diverses valeurs de $p$ . $\mathcal{K} = 2$ et $A = 1$ . . . . .	34

3.5	Modélisation de Wiener-Hammerstein des amplificateurs à mémoire en bande de base. . . . .	35
3.6	Densité de probabilité et histogramme comparés de la partie réelle d'un signal OFDM pour $N = 512$ sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM. . . . .	37
3.7	Densité de probabilité et histogramme comparés de l'enveloppe d'un signal OFDM pour $N = 512$ sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM. . . . .	38
3.8	Fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR d'un signal OFDM composé de $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ sous-porteuses, équation (3.29). Comparaison avec les résultats obtenus par simulation. . . . .	40
3.9	Illustration de la sous-estimation de la fonction de répartition complémentaire théorique du niveau de PAPR donnée à l'équation (3.29) dans le cas de signaux OFDM à $N = 64$ sous-porteuses sur-échantillonnés par un facteur $J = 1, 2, 4, 8, 16$ . . . . .	42
3.10	Comparaison des approximations théoriques de la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR par van Nee <i>et al.</i> (3.30), Ochiai <i>et al.</i> (3.32), la borne de Dinur (3.31) et par simulation pour signaux OFDM à temps continu, $N = 64$ sous-porteuses. . . . .	42
3.11	Densité spectrales de puissance comparées avant et après amplification non-linéaire mettant en évidence les produits d'intermodulation hors-bande. Le signal OFDM est modulé par une constellation 16-QAM, $N = 64$ porteuses, référence à la figure 3.12. Simulation selon le modèle de Saleh, équation (3.4). . . . .	43
3.12	Distorsion des symboles d'une constellation 16-QAM après amplification non-linéaire. Simulation selon le modèle de Saleh, équation (3.4). . . . .	44
3.13	Fonction de transfert de la méthode par clipping pour un seuil d'écrêtement $A = 1$ . . . . .	45
3.14	Synoptique de l'émetteur SML. . . . .	46
3.15	Diagramme de la méthode par entrelacement des sous-porteuses. . . . .	47
3.16	Synoptique de l'émetteur PTS. . . . .	48
3.17	Technique TR par sommation d'un signal de correction. . . . .	49
3.18	Illustration de la méthode TI par constellation étendue : exemple sur une 16-QAM et quatre projections candidates pour un symbole de la constellation. . . . .	50
3.19	Réduction du PAPR par méthode ACE : exemple sur le diagramme en constellation d'une modulation 16-QAM. . . . .	51
4.1	Évolution du coefficient d'atténuation $\alpha$ en fonction du taux d'écrêtement $\gamma$ , équation (4.7) . . . . .	57
4.2	Évolution de la puissance du signal en sortie de clipping et de la puissance du bruit de clipping en fonction de $TC$ pour un signal OFDM modulé par une constellation 16-QAM, équations (4.14) et (4.16). . . . .	58

4.3	Élévation du niveau de bruit hors-bande généré par le clipping pour un systèmes OFDM à $N = 64$ sous-porteuses et modulation 16-QAM pour différentes valeurs de taux de clipping $TC = 0, 1, 2, 3$ dB. . . .	59
4.4	Synoptique de la méthode clipping et filtrage par sur-échantillonnage d'un facteur $J$ [100]. . . . .	60
4.5	Diagramme en constellation de la dispersion des symboles d'une transmission OFDM modulée par une 16-QAM due au clipping, $TC = 1$ dB. . . . .	61
4.6	Fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM à temps de Nyquist soumis au clipping avec $N = 64$ sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM pour différents taux de clipping $TC = 0, 1, 2, 3$ dB. Comparaison avec la théorie pour $TC \rightarrow \infty$ , équation (3.29). . . . .	61
4.7	Influence du filtrage de bruit de clipping hors-bande sur la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM à temps de Nyquist soumis au clipping avec $N = 64$ sous-porteuses modulés par une constellation 16-QAM pour un taux de clipping $TC = 1$ dB et différents taux de sur-échantillonnage $J = 2, 4, 16$ . Comparaison avec la théorie pour $TC \rightarrow \infty$ , équation (3.29). . . . .	62
4.8	Influence du filtrage de bruit de clipping hors-bande sur la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM soumis au clipping avec $N = 64$ sous-porteuses modulés par une constellation 16-QAM pour différents taux de clipping $TC = 0, 1, 2, 3$ dB et taux d'échantillonnage $J = 4$ . Comparaison avec la théorie pour $TC \rightarrow \infty$ , équation (3.29). . . . .	63
4.9	Fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM à temps continu soumis au clipping, avec filtrage du bruit hors-bande, composés de $N = 64$ sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM pour différents taux de clipping $TC = 0, 1, 2, 3$ dB. Comparaison avec la théorie pour $TC \rightarrow \infty$ par l'approximation d'Ochiai <i>et al.</i> , équation (3.32). . . . .	64
4.10	Performance d'un système OFDM à $N = 64$ sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM sur canal BABG avec clipping pour un taux variable $TC = 0, 1, 2, 3, 5, 10$ dB. Taux d'erreur symbole, équation (4.29). . . . .	66
4.11	Performance d'un système OFDM avec clipping modulé par une constellation 16-QAM avec étiquetage par code de Gray sur canal BABG. Comparaison des taux d'erreur binaire obtenus théoriquement par l'équation (4.30) et par simulation. . . . .	67
4.12	Capacité théorique de canal des signaux OFDM avec clipping sur canal BABG pour des taux variables $TC = 0, 1, 3, 10$ dB, équation (4.33). Comparaison avec la simulation pour un système OFDM à $N = 64$ sous-porteuses dans les cas sans et avec filtrage du bruit hors-bande pour taux de sur-échantillonnage $J = 4$ [38]. . . . .	69

4.13	Capacité relative de canal des signaux OFDM avec clipping par rapport au cas linéaire sur canal BABG pour des taux variables $TC = 0, 1, 3$ dB. . . . .	70
4.14	Borne de la capacité de canal des signaux OFDM avec clipping sur canal à BABG pour $N = 64$ sous-porteuses, $TC = 1$ dB, différentes tailles de modulation QAM, équation (4.35), et avec filtrage du bruit hors-bande pour un taux de sur-échantillonnage $J = 4$ [38]. . . . .	71
4.15	Borne de la capacité de canal des signaux OFDM avec clipping sur canal à BABG pour un taux variable $TC = 0, 1$ dB, une transmission à $N = 64$ sous-porteuses et modulation 16-QAM, équation (4.35). Les courbes en traits discontinus sont le cas sans filtrage du bruit hors-bande [38]. . . . .	72
4.16	Synoptique générique des dispositifs de réception compensant les effets du clipping à la réception en OFDM. . . . .	74
4.17	Technique de reconstruction DAR [78] des pics de l'enveloppe d'un signal OFDM, dans l'hypothèse d'une reconstruction parfaite. . . . .	75
4.18	Synoptique du récepteur turbo-DAR [53] pour une transmission OFDM avec codage et clipping. . . . .	76
4.19	Récepteur IAR [81] pour communications OFDM avec codage et clipping. . . . .	77
4.20	Récepteur itératif BNC dédié à l'estimation et l'annulation du bruit de clipping [127]. . . . .	79
4.21	Récepteur itératif à détection sous-optimale pour transmissions OFDM non codées avec clipping [96]. . . . .	81
4.22	Méthode par inversion de clipping [3, 4, 5]. . . . .	82
4.23	Synoptique de la méthode par turbo-égalisation pour transmissions OFDM avec clipping [142]. . . . .	83
5.1	Émetteur OFDM avec codage par code convolutif et clipping. . . . .	89
5.2	Récepteur soft-BNC dédié à l'estimation et à l'annulation du bruit de clipping pour communications OFDM codées [38]. . . . .	91
5.3	Gain du récepteur soft-BNC [37] par rapport au récepteur à décision dure proposé dans [23]. Cas particulier sans filtrage du bruit hors-bande, $J = 1$ et $TC = 1$ dB. . . . .	92
5.4	Influence du filtrage du bruit hors-bande généré par le clipping sur la performance de restauration du récepteur soft-BNC pour les cas $J = 1$ et $J = 4$ , $TC = 1$ dB. . . . .	93
5.5	Modèle utilisé pour l'analyse EXIT des récepteurs turbo-DAR et soft-BNC. Découpage en deux blocs indépendants. . . . .	94
5.6	Comparaison des trajectoires EXIT du code convolutif $(1, \frac{5}{7})_8$ et des récepteurs turbo-DAR et soft-BNC, sur canal à BABG, $TC = 1$ dB et $E_b/N_0 = 12$ dB [38]. . . . .	96
5.7	Performance du récepteur soft-BNC pour transmissions OFDM sur canal BABG avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1 et 3, $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB [38]. . . . .	97

5.8	Performance du récepteur turbo-DAR pour transmissions OFDM sur canal BABG avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1,3 et 8. $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB [38]. . . . .	98
5.9	Performances comparées des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR pour transmissions OFDM sur canal sélectif STVFS avec clipping et modulation 16-QAM aux itérations respectives 3 et 8. $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB et $\beta = 2.5$ [38]. . . . .	99
5.10	Récepteur itératif à détection sous-optimale pour transmissions OFDM codées avec clipping. . . . .	100
5.11	Performance du récepteur par détection de trame proposé par Ochiai [96] pour transmissions OFDM non-codées sur canal BABG avec clipping et modulation QPSK avec étiquetage de Gray aux itérations 1 et 2. $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB, $\mathbf{d}^H = 1$ . . . . .	101
5.12	Performance du récepteur par détection de trame proposé par Ochiai [96] pour transmissions OFDM codées par code convolutif $(1, \frac{5}{7})_8$ sur canal BABG avec clipping et modulation QPSK avec étiquetage de Gray aux itérations 1 et 2. $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB, $\mathbf{d}^H = 1$ . . . . .	102
5.13	Construction des $Q$ mots voisins $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$ de l'a priori $\hat{\mathbf{C}}^\pi$ par <i>bit-flipping</i> , illustration pour $M = 4$ et $\mathbf{d}^H = \{1, 2\}$ . . . . .	104
5.14	Synoptique du récepteur itératif à décision souple SML [39]. . . . .	105
5.15	Performance du récepteur SML pour transmissions OFDM non-codées sur canal à BABG avec clipping et une modulation 16-QAM pour les itérations 1,3,5 et 8, $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB et $\mathbf{d}^H = 1$ [39]. . . . .	106
5.16	Performance du récepteur SML pour transmissions OFDM codées sur canal à BABG avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1,2 et 3, $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB et $\mathbf{d}^H = 1$ [39]. . . . .	107
5.17	Performance du récepteur SML pour transmissions OFDM codées sur canal sélectif STVFS avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1,2 et 3, $N = 64$ , $J = 4$ , $TC = 1$ dB, $\beta = 2.5$ et $\mathbf{d}^H = 1$ [39]. . . . .	108
B.1	Diagramme en constellation d'une modulation antipodale à deux états : modulation 2-PSK ou 2-PAM. . . . .	115
B.2	Diagramme en constellation d'une modulation 4-PAM. . . . .	117
B.3	Performance d'un système OFDM modulé par constellation 4-PAM sur canal BABG. Taux d'erreur symbole, équation (B.10). . . . .	118
B.4	Diagramme en constellation d'une modulation 4-PSK ou QPSK. . . . .	119
B.5	Performance d'un système OFDM modulé par constellation 4-PSK sur canal BABG. Taux d'erreur symbole, équation (B.16). . . . .	120
B.6	Représentation d'une modulation 16-QAM avec étiquetage par codage naturel et codage de Gray. . . . .	121



---

# Liste des tableaux

5.1	Paramètres de simulation. . . . .	89
5.2	Taux d'erreur binaire obtenu après une itération du récepteur SML en fonction de la taille de l'espace des mots utilisés lors de la re- simulation du clipping. . . . .	109



# Introduction générale

---

Comme tous les domaines scientifiques liés au développement du *numérique*, les télécommunications connaissent un développement très soutenu depuis la fin des années 1970, preuve en est la multitude de solutions communicantes aujourd’hui. À l’instar des sciences de l’informatique, les communications numériques sont touchées par l’obligation d’offrir une ressource toujours plus abondante et disponible. Les applications modernes sont en effet friandes de bande passante, de vitesse et de fiabilité, si bien que les normes de communications doivent dorénavant s’accommoder de ces exigences. Si la théorie de l’information [121] fixe et quantifie les limites de la diffusion de l’information sur un canal de communication, elle ne fournit malheureusement pas la solution idéale permettant d’y parvenir. La notion de ”haut-débit” pousse actuellement la recherche à atteindre, sinon s’approcher de ces bornes théoriques.

La technique de modulation OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) est représentative de cette nécessité constante de performance. Cette forme d’onde est aujourd’hui la base de nombreuses normes de communications. Nous pouvons citer, comme les plus représentatives, les liaisons filaires ADSL [69], WiFi [67, 68], HiperLAN2 [47] et WiMAX [135] pour les réseaux à moyennes et grandes portées sans-fil ou DAB [51] et DVB [45] pour la diffusion audio et vidéo terrestre. La grande force de l’OFDM réside en le multiplexage de l’information sur la bande passante disponible sans créer d’interférences. Il en résulte donc une augmentation substantielle du débit de la communication et on comprend alors facilement l’engouement pour cette technique depuis les années 90 ; bien qu’historiquement, le concept existe depuis 1960.

Le contexte du travail présenté dans ce manuscrit est directement lié à la génération des signaux OFDM. En effet, la difficulté de leur amplification, due à l’apparition de fortes amplitudes sur leur enveloppe, est une problématique bien connue. Le souci est que la non-linéarité des amplificateurs de puissance utilisés en télécommunications rend inenvisageable leur utilisation à haut rendement pour des signaux de forte dynamique. En conséquence, l’amplification non-linéaire assumée des signaux OFDM provoque des interférences considérables entre les différents sous-canaux et résulte en de graves dommages sur la fiabilité de la communication.

La communauté scientifique est particulièrement active sur le sujet et de nombreuses techniques ont été développées afin de limiter, à l’émission, ces pics en amplitude. Parmi toutes ces approches, le *clipping* est celle qui nécessite le moins d’aménagement à l’émetteur et n’entraîne donc pas de surcroît de complexité. Cependant, l’écrêtement délibéré de l’enveloppe des signaux OFDM mène à des perturbations relativement proches d’une amplification non-linéaire. L’avantage du clipping est, néanmoins, de préserver la consommation du système d’émission en limitant le fonc-

tionnement de l'amplificateur de puissance dans sa zone linéaire, pour laquelle le rendement est préservé. Toutefois, cette simplicité de l'émetteur se traduit par la nécessité de dispositifs adaptés en réception qui compensent les effets du clipping. La littérature fournit une abondance de techniques, parfois semblables, qui permettent de restaurer la performance d'un système OFDM avec clipping au cas à amplification linéaire supposé idéal.

Dans ce travail, nous étudions et proposons des techniques qui permettent de corriger le clipping d'un système OFDM à la réception. Le contexte d'application est directement tourné vers des systèmes à pouvoir de correction d'erreur mesurée, *i.e.* une stratégie de codage de canal simple, avec de fortes contraintes sur la complexité de l'émetteur ou à des systèmes existants de type communications sans-fil WiFi IEEE 802.11a, WiMAX IEEE 802.16e et DAB. Nous apporterons, tout au long de ce manuscrit, les éléments nécessaires à la proposition de solutions adaptées à ce scénario.

Au chapitre 2, nous rappellerons les principes fondamentaux de la modulation OFDM ainsi que les définitions utiles à la compréhension des travaux présentés. Le paragraphe 2.2 établira un historique rapide tandis que les éléments fondamentaux de ce type de communication seront expliqués aux sections 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6. Nous y aborderons notamment les notions de génération des signaux OFDM par transformée de Fourier, de propriété d'orthogonalité, d'interférences et de préfixe cyclique, de modélisation, de synchronisation et d'égalisation de canal. Au paragraphe 2.7, nous rappellerons la capacité de canal théorique des systèmes OFDM et établirons la performance théorique quant à leur taux d'erreur dans le cas d'un système à amplification supposée linéaire.

L'amplification des signaux OFDM sera abordée au chapitre 3 dans lequel nous présenterons les modélisations classiques des amplificateurs de puissance utilisés en télécommunications au paragraphe 3.2. La statistique des signaux OFDM sera abordée au paragraphe 3.3. Nous y définirons et étudierons la notion de *peak-to-average power ratio* (PAPR) qui permet de caractériser finement la dynamique des signaux OFDM. Les sections 3.3.2 et 3.3.3 donnerons une définition théorique de la probabilité d'apparition de forts niveaux de PAPR en OFDM et rappellerons les contributions remarquables de la littérature dans le cas particulier de signaux sur-échantillonnés. Enfin, une revue des techniques dédiées à la modération du niveau de PAPR à l'émission, dont le clipping, sera présentée au paragraphe 3.4.

Le chapitre 4 sera quant à lui dédié à l'étude de l'impact du PAPR sur les systèmes OFDM. Nous proposerons notamment, en accord avec le théorème de Busgang rappelé aux sections 4.2.1 et 4.2.2, une étude détaillée de la statistique des signaux OFDM avec clipping au paragraphe 4.2.3. La méthode de clipping et filtrage du bruit hors-bande sera présentée à la section 4.2.4 et nous analyserons son influence sur le PAPR des signaux OFDM ; tandis qu'au paragraphe 4.3, selon l'hypothèse de gaussiannité du bruit de clipping, nous proposerons une analyse de la dégradation théorique de la capacité de canal et de la performance quant au taux d'erreur du système. Enfin, le paragraphe 4.4 présentera une bibliographie détaillée des techniques de réception corrigeant le clipping. Nous nous attacherons à respecter un même formalisme et chacune des méthodes sera confrontée aux autres en matière de complexité et d'efficacité.

---

Les propositions de nouveaux récepteurs seront regroupées au chapitre 5. Après avoir défini plus précisément le contexte du mode de communication au paragraphe 5.1, nous présenterons un récepteur à correction souple basée sur l'estimation et l'annulation directe du bruit de clipping. Le paragraphe 5.2.2 donnera une présentation détaillée de la méthode. Aussi, les sections 5.2.3 et 5.2.4 établirons une comparaison avec un récepteur représentatif de la littérature et de même complexité, par le biais d'une analyse par EXIT charts et par taux d'erreur classique. Enfin, le paragraphe 5.3 fournira une étude détaillée d'un nouveau récepteur à décision souple aidée par une détection sous-optimale à maximum de vraisemblance. Cet algorithme est en fait le résultat de prospections qui ont permis de cerner les forces et faiblesses des techniques existantes. Il offre alors une solution originale quant à la correction du clipping des signaux OFDM au récepteur. Les paragraphes 5.3.3, 5.3.4 et 5.3.5 expliciterons l'idée de base du récepteur SML, son algorithme et un état de sa performance. Pour finir, une discussion sur la méthode sera proposée à la section 5.3.6.

Enfin, nous apporterons une conclusion sur l'ensemble de ces travaux et poserons les perspectives de prochaines études au chapitre 6.



# Principes de la modulation OFDM

---

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2.2</b>	<b>Historique</b>	<b>6</b>
<b>2.3</b>	<b>Génération des signaux OFDM</b>	<b>7</b>
2.3.1	Transformée de Fourier	7
2.3.2	Propriété d'orthogonalité	10
<b>2.4</b>	<b>Notions d'IES, d'IEP et d'intervalle de garde</b>	<b>11</b>
2.4.1	Influence du canal de communication	12
2.4.2	Intervalle de garde	14
2.4.3	Préfixe cyclique et canal OFDM équivalent	15
<b>2.5</b>	<b>Émission et réception des signaux OFDM radio-fréquence et synchronisation</b>	<b>18</b>
2.5.1	Émission des signaux OFDM RF	19
2.5.2	Réception des signaux OFDM RF	20
2.5.3	Effets de la synchronisation en temps et en fréquence	21
<b>2.6</b>	<b>Techniques d'égalisation</b>	<b>21</b>
2.6.1	Estimation de canal par sous-porteuses pilotes	22
2.6.2	Égalisation par structure ZF	22
2.6.3	Égalisation par structure MMSE	23
<b>2.7</b>	<b>Performances théoriques des systèmes OFDM</b>	<b>23</b>
2.7.1	Capacité des systèmes OFDM	23
2.7.2	Taux d'erreur théorique des transmissions OFDM	24
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>27</b>

---

## 2.1 Introduction

Les communications OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) sont un type particulier de transmission multi-porteuses dont l'originalité est de multiplexer l'information sur des sous-porteuses orthogonales. Dans l'hypothèse où les bandes passantes de ces sous-porteuses sont suffisamment étroites, les distorsions induites par un canal sélectif en fréquence sont alors limitées à une simple atténuation sur chacune d'elles. Cette caractéristique représente un avantage certain pour cette modulation face à une transmission à porteuse unique, du fait de la simplicité

du système d'égalisation nécessaire en réception. En outre, la condition d'orthogonalité des sous-porteuses permet leur recouvrement réciproque sans interférence de l'une sur l'autre et accorde donc une haute efficacité spectrale au système. Enfin, les interférences entre sous-porteuses et les interférences entre trames induites par le canal étant fortement limitées, l'OFDM est une modulation particulièrement appréciée pour les transmissions à hauts-débits sans-fil mobiles.

L'OFDM présente donc des avantages conséquents par rapport aux systèmes à porteuse unique. Leur robustesse, leur efficacité et leur facilité d'égalisation en font une forme d'onde particulièrement utilisée aujourd'hui. Néanmoins, l'emploi de sous-porteuses multiples apporte également quelques inconvénients. En effet, la modulation est particulièrement sensible aux défauts de synchronisation ainsi qu'aux décalages en fréquence des sous-porteuses tout comme aux interférences entre symboles. Les forts niveaux en amplitude de l'enveloppe des signaux OFDM viennent également compliquer leur amplification linéaire; et nécessite un recul important à l'entrée de l'amplificateur de puissance, à la défaveur de son rendement. Tous ces paramètres tendent à diminuer la performance de la transmission.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons un historique des communications OFDM, ainsi que les principes et particularités de ce mode de transmission aux paragraphes 2.3.1 et 2.3.2. Les notions d'interférences entre symbole et porteuse seront détaillées au paragraphe 2.4 tout comme les dispositifs d'égalisation de canal propres à l'OFDM à la section 2.6. Une modélisation du système sera également établie tout comme ses performances théoriques au paragraphe 2.7.

## 2.2 Historique

Depuis leur apparition, les communications OFDM et plus largement les systèmes multi-porteuses, connaissent un développement rapide dû au vif intérêt qui leur est porté, aussi bien par la communauté scientifique que par les industriels. L'idée d'utiliser des porteuses fréquentielles avec recouvrement FDM (Frequency Division Multiplexing) robustes aux canaux sélectifs et permettant une égalisation peu complexe a vu le jour dans les années 1960 [21, 116]. La difficulté majeure d'implantation de la modulation réside alors dans la nécessité de disposer d'une banque d'oscillateurs sinusoïdaux en émission pour générer les sous-porteuses et autant de démodulateurs cohérents en réception. Cette difficulté rend alors impossible l'exploitation des communications multi-porteuses et les transmissions OFDM ne suscitent alors qu'un intérêt académique. En 1971, Weinstein et Ebert [132] proposent l'utilisation de la transformée de Fourier discrète afin de générer la modulation et la démodulation des signaux multi-porteuses. Cette avancée est alors déterminante pour les communications OFDM puisque les avancées dans le domaine du traitement des signaux numériques éliminent peu à peu les contraintes matérielles liées à la modulation. L'implantation totalement numérique de la transformée de Fourier voit alors la démocratisation des communications OFDM.

Au cours des années 1980, l'OFDM est proposé pour des applications telles que des modems haute-vitesse pour les communications mobiles et pour des systèmes de sauvegarde à haute-densité. En 1980, Hirosaki [63] introduit un algorithme d'éga-

lisation permettant de s'affranchir des interférences entre porteuses et des interférences entre symboles causées par le canal ou par des erreurs de synchronisation en temps et en fréquence. La même année, il propose une implantation utilisant les travaux de Saltzberg [116], multiplexant orthogonalement des symboles QAM à l'aide d'une transformée de Fourier discrète [64]. Les bases du premier modem pour les réseaux téléphoniques sont alors posées dans [65]. Le système utilise des sous-porteuses pilotes permettant le rattrapage conjoint des erreurs de synchronisation en temps et en fréquence ainsi qu'un code correcteur d'erreur. Plusieurs modems OFDM se voient alors proposés [11, 76, 77]. Des solutions de stockage sur supports magnétiques sont également étudiées par Feig *et al.* dans [48, 49, 50].

A partir des années 90, les transmissions OFDM s'imposent graduellement dans un grand nombre de normes de communication. Cependant, Casas et Leung l'introduisent, sans succès, pour des communications à bande large sur les canaux FM mobiles [19]. En 1991, Chow *et al.* présentent l'OFDM comme particulièrement efficace pour les transmissions à haut-débit ADSL, HDSL [28] et VHDSL [27]. Enfin, les transmissions OFDM et COFDM ont été étudiées pour les normes de diffusion audio DAB [51, 61] et vidéo DVB [45]. Ces dernières années, l'OFDM est devenu incontournable et s'est vu normalisé aussi bien pour des communications filaires ou sans-fil mobiles. Nous citons les liaisons ADSL [69], les réseaux sans-fil IEEE 802.11a [67] jusque 802.11g [68] aux Etats-Unis ou HiperLAN 2 en Europe [47], les systèmes 3G UTRA [1], 4G [70] ainsi que les réseaux mobiles WiMAX [135].

## 2.3 Génération des signaux OFDM

### 2.3.1 Transformée de Fourier

Le principe de base des transmissions multi-porteuses est de construire un signal utile à partir de la somme de plusieurs autres signaux, appelés sous-porteuses. L'information sera ensuite multiplexée sur chacune d'elles, formant alors autant de canaux de communication.

DÉFINITION - Un signal OFDM est composé de  $N$  sous-porteuses sinusoïdales, notées  $p_n(t)$  avec  $n \in \{1, \dots, N\}$ , d'une durée  $T$ , à une fréquence porteuse intermédiaire  $f_I$ , tel que :

$$p_n(t) = \begin{cases} A_n(t) \sin\left(2\pi\left(\frac{n}{T} + f_I\right)t + \phi_n(t)\right) & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Le signal OFDM alors constitué est la somme de ces  $N$  signaux sinusoïdaux de fréquences respectives  $f_n = \frac{n}{T}$  et la durée d'émission d'une trame est  $T$ . La figure 2.1 illustre la composition d'une trame. Chaque sous-porteuse  $p_n(t)$  est modulée selon un espace de signaux  $\mathcal{S}$  qui constituent un diagramme en constellation figurant une modulation numérique [108] §4.3. Chaque signal de cette constellation fait correspondre un symbole issu d'un alphabet binaire  $\{0, 1\}$ . Nous considérons donc que pour un symbole binaire composé de  $M$  bits, il existe  $2^M$  signaux  $S_m(t)$  d'amplitude et déphasage respectifs  $A_m(t)$  et  $\phi_m(t)$  constitutifs de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Pour un signal choisi dans l'espace des signaux de la modulation numérique et étiqueté par

une séquence de  $M$  bits, chaque sous-porteuse est modulée selon les informations d'amplitude  $A_m(t)$  et de phase  $\phi_m(t)$ ,  $t \in [0, T]$  et  $m \in \{0, \dots, 2^M - 1\}$ , telle que :

$$S_m(t) = A_m(t)e^{j\phi_m(t)} \quad (2.2)$$

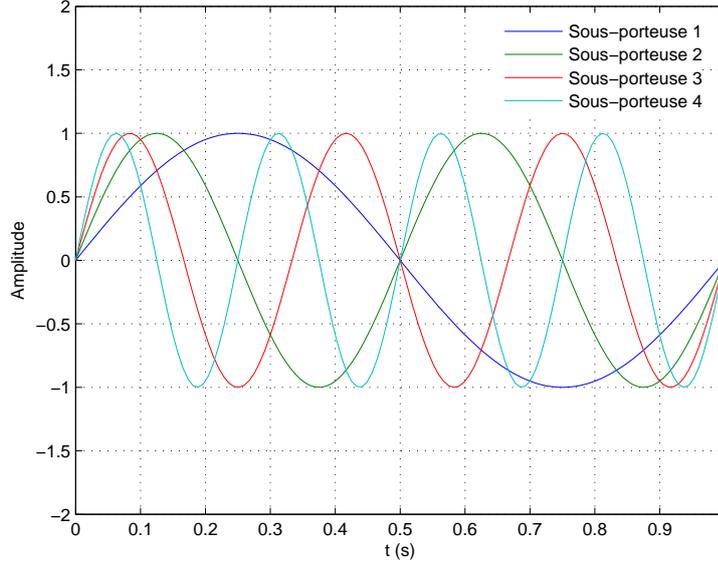


FIG. 2.1 – Décomposition d'un signal OFDM : représentation des sous-porteuses constituantes,  $N = 4$ ,  $T = 1$  s.

Il est usuellement convenu de représenter les modulations numériques comme des modulations en bande de base. Ceci nous autorise à réécrire l'équation (2.1) sans information de fréquence intermédiaire  $f_I$  et en considérant la modulation des sous-porteuses dans le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  comme :

$$p_n(t) = S_n(t)e^{2j\pi f_n t} \quad (2.3)$$

Dans l'équation (2.3),  $S_n$  est un des  $2^M$  signaux de la constellation complexe porté par la sous-porteuse  $n$  qu'il est possible de formuler comme :

$$\begin{aligned} S_n(t) &= S_{I_n}(t) + jS_{Q_n}(t) \\ &= A_n(t) \cos \phi_n(t) + jA_n(t) \sin \phi_n(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le signal OFDM complexe est donc la somme de toutes les  $N$  sous-porteuses définies par l'équation (2.3), soit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} p_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} S_n(t)e^{2j\pi f_n t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

À temps discret, le temps d'échantillonnage et la durée d'une trame OFDM entretiennent la relation  $T_e = \frac{T}{K}$ . À chaque instant, on a donc  $t = kT_e$ , avec  $k \in \{0, \dots, K-1\}$ . Les coefficients des symboles complexes  $S_n(t)$  restant constants sur la durée  $T$ , on a :

$$x(kT_e) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(kT_e) e^{2j\pi \frac{n}{T} kT_e}, \quad 0 \leq k < K \quad (2.6)$$

Ainsi :

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{2j\pi \frac{nk}{K}}, \quad 0 \leq k < K \quad (2.7)$$

Nous démontrons donc à l'équation (2.7) que la génération d'une trame OFDM à  $N$  sous-porteuses, en bande de base dans le domaine complexe et en temps discret par échantillonnage à taux de Nyquist tel que  $K = N$ , est la stricte application de la transformée de Fourier discrète inverse (TFDI) à un coefficient  $\frac{1}{N}$  près sur les symboles issus d'une modulation numérique complexe utilisée pour encoder l'information binaire.

Dans la suite de ce manuscrit nous poserons  $\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \dots, X_{N-1}\}$  comme les  $N$  sous-porteuses modulées constituantes du signal OFDM dans le domaine fréquentiel.

DÉFINITION - Un signal OFDM en bande de base complexe est obtenu par application d'une transformée de Fourier discrète inverse sur  $N$  échantillons :

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}_N^{-1}\{\mathbf{X}\} \quad (2.8)$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq k < N \quad (2.9)$$

La démodulation d'un signal OFDM est donc l'opération duale utilisant la transformée de Fourier discrète (TFD) telle que :

$$\mathbf{X} = \mathcal{F}_N\{\mathbf{x}\} \quad (2.10)$$

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n < N \quad (2.11)$$

Initialement proposée par Weinstein et Ebert [132], la possibilité d'utiliser l'opération de transformée de Fourier pour moduler et démoduler le signal d'une trame OFDM est incontestablement liée au succès de ce mode de transmission. Ainsi, les progrès des circuits DSP ont permis, grâce à l'utilisation d'algorithmes rapides de transformée de Fourier, de s'affranchir des bancs d'oscillateurs auparavant incontournables pour générer les signaux et qui pénalisaient lourdement l'implantation de l'OFDM.

### 2.3.2 Propriété d'orthogonalité

La propriété d'orthogonalité est fondamentale en OFDM puisqu'elle permet de conjuguer une grande efficacité spectrale avec une lutte efficace contre les interférences entre les sous-porteuses d'une trame. En effet, l'orthogonalité des sous-porteuses leur autorise un recouvrement réciproque partiel. L'OFDM utilise cette propriété dans le domaine fréquentiel en diffusant des informations indépendantes sur chacune d'elles. Durant la transmission d'une trame sur un quelconque canal de propagation, et à plus forte raison lors de communications sans-fil, il convient de protéger cette orthogonalité, condition essentielle au maintien des bonnes performances du système.

#### 2.3.2.1 Notion mathématique

DÉFINITION - On considère que des signaux sont orthogonaux les uns des autres s'ils sont mutuellement indépendants. Mathématiquement, cette condition est établie pour deux signaux  $a(t)$  et  $b(t)$  si :

$$\int_0^T a^*(t)b(t)dt = 0 \quad (2.12)$$

Les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  sont alors orthogonales sur l'intervalle d'intégration  $[0 T]$ .

#### 2.3.2.2 Orthogonalité des sous-porteuses en OFDM

En considérant la formalisation mathématique d'une trame OFDM en temps continu et en bande de base complexe, équation (2.3), il vient alors de l'équation (2.12) :

$$\begin{aligned} \int_0^T p_{n1}^*(t)p_{n2}(t)dt &= \int_0^T (e^{-2j\pi f_{n1}t})(e^{2j\pi f_{n2}t})dt \\ &= \int_0^T e^{2j\pi \frac{(n2-n1)}{T}t}dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) est donnée pour deux sous-porteuses  $n1$  et  $n2$  de fréquences  $f_{n1} = \frac{n1}{T}$  et  $f_{n2} = \frac{n2}{T}$  et en considérant les symboles complexes  $S_1 = S_2 = 1$ . On obtient ainsi que :

$$\int_0^T e^{2j\pi \frac{(n2-n1)}{T}t}dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n1 = n2 \\ 0 & \text{si } n1 \neq n2 \end{cases} \quad (2.14)$$

L'équation 2.14 démontre que l'ensemble des  $N$  sous-porteuses d'une trame OFDM sont orthogonales. D'un point de vue spectral, ce résultat est d'autant plus intéressant que le spectre en fréquence de chaque porteuse est centré sur la fréquence  $f_n = \frac{n}{T}$ . Ainsi, leur recouvrement partiel est autorisé à la condition que la somme des spectres à chaque fréquence  $f_n$  soit uniquement dépendante d'une sous-porteuse.

Chaque sous-porteuse sinusoïdale possède une réponse fréquentielle en sinus cardinal, due à leur fenêtrage temporel par une fonction porte de durée  $T$ . Comme le montre la figure 2.2, la réponse en sinus cardinal possède un lobe central de grande amplitude et de largeur  $\frac{1}{T}$  ainsi que de multiples lobes secondaires dont l'amplitude décroît avec l'éloignement à la fréquence centrale  $f_n$ . La propriété d'orthogonalité fait correspondre, à chaque fréquence centrale d'un lobe principal d'une sous-porteuse, une amplitude nulle pour les autres. Lors de la détection des signaux, et à condition que la synchronisation soit pleinement assurée, la décision se situe donc au sommet de ces lobes principaux. Les zones de recouvrement aux fréquences adjacentes n'étant pas considérées par le récepteur, l'efficacité spectrale de la modulation peut être ainsi maximisée en minimisant l'espace entre les sous-porteuses ce qui réduit, de fait, l'occupation de l'information sur la bande du signal.

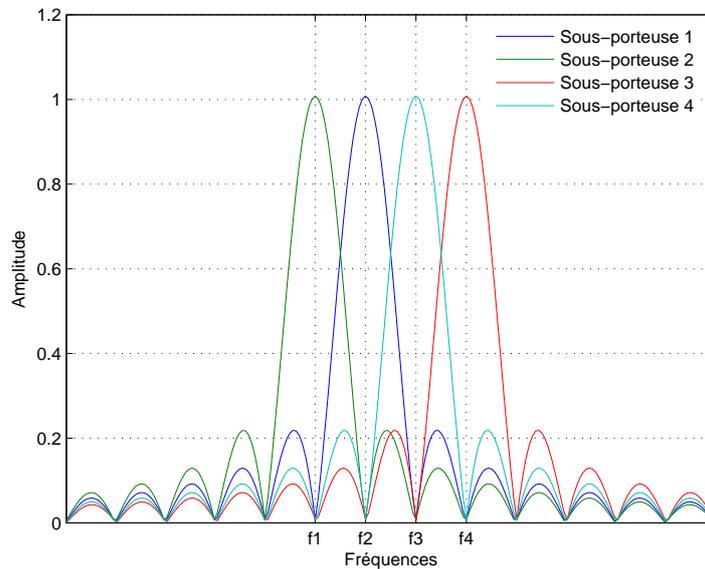


FIG. 2.2 – Spectre en fréquence d'une trame OFDM : représentation des sous-porteuses constituantes,  $N = 4$ ,  $T = 1$  s.

## 2.4 Notions d'IES, d'IEP et d'intervalle de garde

Par nature, les transmissions OFDM sont particulièrement sensibles aux défauts de synchronisation à la réception. Aussi, la composition du signal OFDM impose que l'amplitude et la phase de chaque sous-porteuse restent constantes pendant la durée de transmission afin de maintenir leur orthogonalité réciproque. La fluctuation d'au moins un de ces paramètres brise alors la répartition spectrale de la trame et entraîne des interférences entre porteuses (IEP) particulièrement néfastes pour la qualité de la communication. En outre, la transmission sur un canal de propagation, filaire ou non, mène également à des interférences entre symboles (IES), ce qui sous-entend l'influence de la dispersion temporelle d'une trame OFDM sur une autre.

Ces retards sont dus aux trajets multiples résultant d'échos lors la propagation du signal [108] §14.1.

### 2.4.1 Influence du canal de communication

L'influence du canal de propagation est formalisée par l'opération de convolution linéaire de sa réponse impulsionnelle avec le signal d'une trame OFDM. Celle-ci permet de caractériser les évanouissements en temps et en fréquence du canal, alors considéré comme un système linéaire invariant dans le temps (LIT).

#### 2.4.1.1 Modélisation des canaux de communication et convolution linéaire

Dans le cadre de transmissions pour lesquelles le canal de communication est figuré comme un système LIT, son influence est modélisée par l'opération de convolution linéaire avec sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  :

$$\begin{aligned} y(t) &= (x * h)(t) \\ &= \int_0^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cependant, pour un canal de communication sélectif en fréquence et variant dans le temps, soit le cas typique des canaux sans-fil, l'expression de sa réponse impulsionnelle est dépendante de la contribution des  $i$  trajets multiples retardés d'un temps  $\tau_i(t)$ . Le canal est alors exprimé comme un filtre non-stationnaire qui dépend des échos obtenus par réflexions :

$$h(t, \tau) = \sum_i h_i(t)\delta(\tau - \tau_i(t)) \quad (2.16)$$

D'après l'équation (2.16), le signal à la réception est :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t, \tau)x(t - \tau)d\tau = \sum_i h_i(t)x(t - \tau_i(t)) \quad (2.17)$$

L'étalement maximum  $T_m$  de la réponse impulsionnelle  $h(t, \tau)$ , dû à  $\tau$ , influe directement sur la bande de cohérence du canal  $B_c$ , soit une largeur de bande considérée constante. En OFDM, le nombre de sous-porteuses  $N$  est choisi, en respect à la durée de trame  $T$ , tel que  $\frac{1}{NT} < \frac{1}{T_m} \ll \frac{1}{T} = B$ . Ceci implique que la cohérence spectrale du canal est plus faible que la bande d'émission, résultant en une sélectivité en fréquence, et qu'elle est supérieure à la largeur d'une sous-porteuse.

D'après [108] §14.5.1, si  $x(t)$  est à bande limitée autour de  $\frac{B}{2}$ , il est possible d'écrire :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(t - \tau)d\tau \quad (2.18)$$

La discrétisation de ce résultat est considérée selon l'hypothèse d'un canal quasi-statique, dont la réponse impulsionnelle varie très lentement au court du temps et

ayant pour temps de cohérence  $T_c$  comme  $T < T_c$ . La modélisation de l'influence du canal prend la forme d'une convolution linéaire discrète [102] §1.2 :

$$y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{k-l}, \quad 0 \leq k < N \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) fait référence au modèle *tapped-delay-line* [108] §14.5.1 et nous permet d'envisager l'utilisation de canaux STVFS (Slow Time-Varying Frequency-Selective) sélectifs en fréquence mais très peu variants dans le temps et dont l'effet est caractérisé par la convolution de sa réponse impulsionnelle avec le signal d'émission en bande de base, comme proposé à l'équation (2.15).

#### 2.4.1.2 Convolution circulaire

Comme rappelé par (2.19), il existe entre le signal d'une trame OFDM et le canal une relation de convolution linéaire. Il est donc évident que la relation les liant dans le domaine fréquentiel n'est pas triviale. L'étape d'égalisation, qui consiste en réception à compenser l'effet du canal de communication sur le signal reçu, s'en trouve alors complexifiée.

L'idée selon laquelle il serait possible de ramener l'influence du canal à une relation simple dans le domaine fréquentiel, en bénéficiant de l'opération de TFD utilisée pour la démodulation, est alors séduisante. Elle l'est d'autant plus que l'opération de convolution circulaire, voisine de la convolution linéaire, dispose d'une propriété particulièrement intéressante puisque correspond à une opération purement multiplicative dans le domaine fréquentiel comme :

$$Y_n = H_n X_n, \quad 0 \leq n < N \quad (2.20)$$

Suivant le développement donné en annexe A, il vient de l'équation (A.7) que la relation de convolution circulaire dans le domaine temporel est :

$$y_k = \sum_{l=0}^{N-1} h_l x_{(k-l)_N}, \quad 0 \leq k < N \quad (2.21)$$

La relation multiplicative de l'équation (2.20) n'est envisageable que pour une opération de convolution circulaire définie par l'équation (2.21) dans le domaine temporel. Le passage de la convolution linéaire (2.19) vers la convolution circulaire n'est possible que pour certaines conditions de manipulation des signaux. Certaines délicatesses peuvent être trouvées dans la littérature faisant appartenir la propriété multiplicative de la convolution circulaire en fréquence à l'opération de convolution linéaire en temps, ce qui se révèle parfaitement inexact. Néanmoins, une méthode de circularisation du produit de convolution linéaire est utilisée en OFDM, ce qui mène souvent à cette confusion.

Cette différence à présent soulignée, nous reviendrons sur le cas particulier de la convolution circulaire et de son application aux transmissions OFDM au paragraphe 2.4.3.

### 2.4.1.3 Interférences entre porteuses et symboles

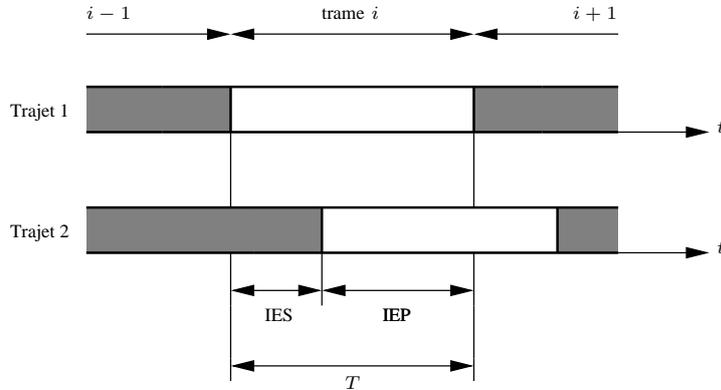


FIG. 2.3 – Propagation des trames OFDM sans intervalle de garde : retards, trajets multiples et interférences.

La figure 2.3 illustre les interférences liées aux trajets multiples provoquant des échos à la réception. Pour l'exemple, deux trajets sont considérés, un principal et un retardé. La réception de la trame  $i$  pendant le temps d'intégration  $T$  est la somme des différents signaux issus des différents trajets.

Deux observations peuvent être faites ici :

1. Le débordement de la trame retardée  $i-1$  sur la période d'intégration du signal issu du trajet principal est une interférence entre symboles qui provoque des distorsions sur les premiers échantillons du signal d'intérêt et dont l'effet est la perte d'orthogonalité des sous-porteuses. La conséquence directe est une réduction importante de la performance de la transmission.
2. Aussi, l'influence de l'écho de la trame  $i$  sur elle-même induit une interférence entre porteuses. Selon la phase des échantillons, il en résulte des ajouts constructifs ou destructifs sur le signal véhiculé par le trajet principal.

Les IES et IEP entretiennent une relation étroite. Du fait de la dispersion en temps des canaux de communication, il est évident que la condition d'orthogonalité est largement menacée. Afin de s'assurer de sa préservation, il convient d'utiliser un intervalle de garde en temps afin d'assurer que les avances ou retards de trames adjacentes n'influent pas en réception.

### 2.4.2 Intervalle de garde

L'intervalle de garde est inséré à chaque début de trame, prolongeant la durée d'un symbole OFDM à  $T_s = T + T_g$ . La période d'intégration reste néanmoins la même puisque l'intervalle est supprimé à la réception.

En choisissant un intervalle de garde au moins aussi long que le retard maximum induit par le canal de communication, comme montré à la figure 2.4, les trames adjacentes à  $i$  n'interfèrent plus pendant la période d'intégration  $T$  du symbole. Les IES sont alors évitées et toutes les composantes du signal sur  $T$  sont issues de la

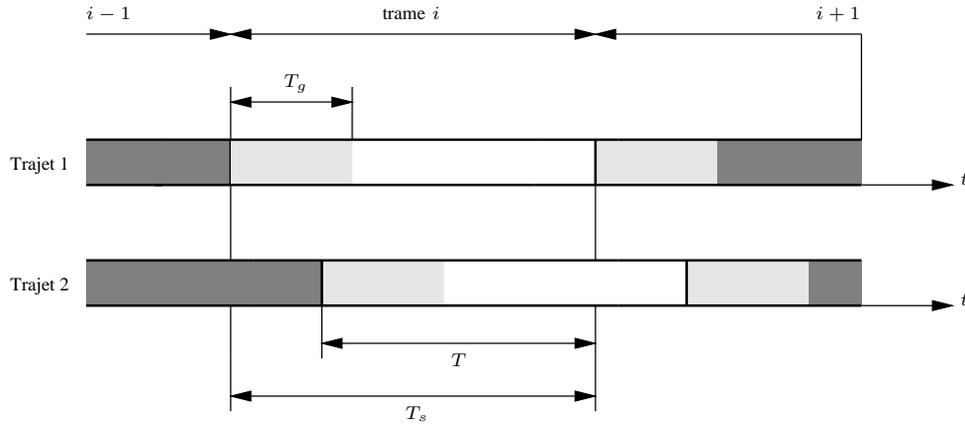


FIG. 2.4 – Insertion d'un intervalle de garde en temps en OFDM.

même trame en fonction des échos. L'intervalle de garde est donc élément essentiel des communications OFDM pour s'affranchir des IES mais les IEP subsistent néanmoins. En pratique, il convient de pouvoir aisément les compenser. Le paragraphe 2.4.3 montre que la nature de cet intervalle peut être judicieusement choisie pour simplifier la fonction d'égalisation de canal.

### 2.4.3 Préfixe cyclique et canal OFDM équivalent

L'idée de combiner les fonctions de lutte contre les IES d'un intervalle de garde à une égalisation simple des IEP a été proposée par Peled et Ruiz en 1980 dans [106]. La circularisation de l'opération de convolution linéaire ainsi obtenue, et rendant vraie la relation décrite par (2.20) dans le domaine fréquentiel, est certainement l'une des avancées qui a permis la démocratisation de l'OFDM. Cet intervalle de garde particulier, appelé préfixe cyclique (PC), tire en fait ses propriétés de la nature des éléments de signal dont il est composé. Comme le montre la figure 2.5, le préfixe cyclique est la recopie de  $G$  échantillons de la fin de la trame du signal OFDM. Au temps symbole  $T$  s'ajoute la durée du préfixe cyclique telle que  $T_g = GT$ .

L'insertion du type préfixe cyclique permet de conserver les propriétés d'un intervalle tout en disposant de deux avantages significatifs :

1. Il circularise l'opération de convolution linéaire entre le signal OFDM et la réponse impulsionnelle du canal de propagation en périodisant la trame OFDM. L'effet dispersif du canal est alors ramené à une simple atténuation sur chaque sous-porteuse dans le domaine spectral.
2. Il permet de conserver la propriété d'orthogonalité des sous-porteuses, en disposant d'un système d'égalisation rudimentaire.

Bien entendu, la condition sur la longueur du préfixe cyclique est qu'elle soit au moins supérieure à celle de la réponse impulsionnelle du canal. A temps discret, on traduit alors cette condition par  $GK \geq L$ , avec  $L$  le nombre de coefficients de la réponse du canal et  $K = N$  le nombre d'échantillons du signal OFDM.

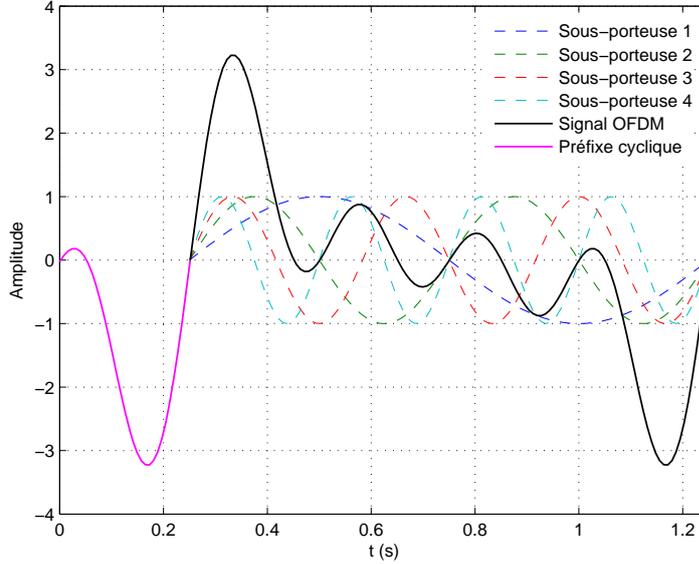


FIG. 2.5 – Construction du préfixe cyclique : représentation des sous-porteuses constituantes, du signal OFDM résultant et du préfixe cyclique. Le temps symbole est  $T = 1$  s, la durée du préfixe  $T_g = 0.25$  s et celle de la trame  $T_s = 1.25$  s,  $N = 4$ .

Soit  $\mathbf{x}^g$  la trame OFDM avec ajout du préfixe cyclique. Le signal en réception, soit à l'entrée du démodulateur OFDM, à temps discret est :

$$y_k^g = (x^g * h)_k + w_k, \quad 0 \leq k < N(1 + G) \quad (2.22)$$

Avec  $\mathbf{w}$  un bruit additif blanc gaussien (BABG) complexe de variance  $2\sigma_w^2$ . Avant quelque étape de démodulation au récepteur, les  $GN$  premiers échantillons de  $\mathbf{y}^g$  sont évincés. Il en résulte un signal d'observation issu du canal :

$$y_k = (x \otimes h)_k + w_k, \quad 0 \leq k < N \quad (2.23)$$

L'opérateur  $\otimes$  fait figurer l'opération de convolution circulaire de l'équation (2.21). La démodulation OFDM est ensuite assurée par TFD :

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} ((x \otimes h)_k + w_k) e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} \times \sum_{l=0}^{N-1} h_l e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} + \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Soit :

$$Y_n = X_n H_n + W_n, \quad 0 \leq n < N \quad (2.25)$$

La convolution circulaire en temps de l'équation (2.21) permet d'écrire que la trame OFDM en réception et après démodulation par TFD est, dans le domaine fréquentiel, le résultat du produit terme à terme des symboles émis et de la transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle du canal de propagation. Il est alors possible de modéliser le canal par la représentation équivalente illustrée par la figure 2.6. Les  $N$  sous-porteuses reçues composent alors un ensemble d'autant de transmissions parallèles dont chacune est uniquement affectée par un BABG.

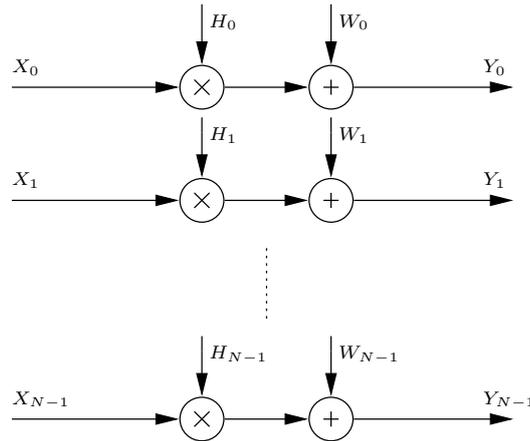


FIG. 2.6 – Modélisation équivalente d'une réception OFDM sur canal sélectif en fréquences avec intervalle de garde de type préfixe cyclique.

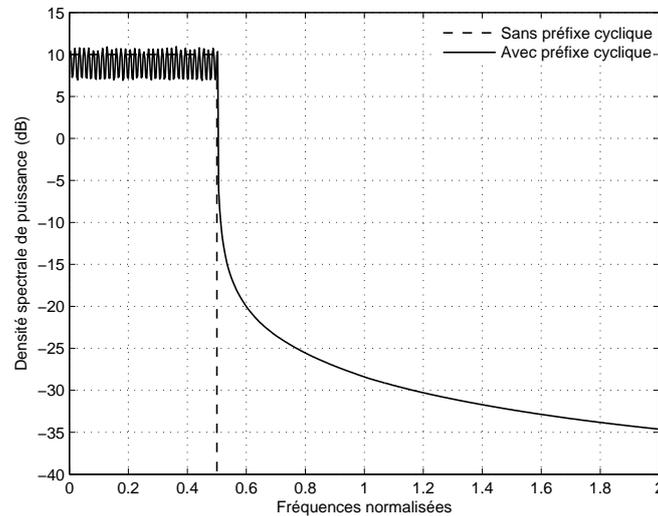


FIG. 2.7 – Influence du préfixe cyclique sur la densité spectrale de puissance d'un signal OFDM modulé par une constellation 16-QAM. Comparaison avec le cas sans intervalle de garde,  $N = 256$  porteuses et  $G = 0.25$ .

L'insertion du préfixe cyclique est aussi la source d'inconvénients. En effet, en allongeant sciemment la durée de la trame par une redondance ne portant aucune information, le débit binaire de la transmission s'en trouve réduit. Sa longueur doit être alors judicieusement déterminée. La figure 2.7 illustre également l'influence du préfixe cyclique sur le spectre du signal OFDM. L'élévation du niveau du signal hors-bande provoquée par l'insertion du préfixe est une problématique bien connue et doit être compensée par un filtre sur la bande du signal afin de satisfaire le masque d'émission imposé par les standards de communication. Nous verrons néanmoins au paragraphe 2.6 que la circularisation du produit de convolution autorise l'OFDM à ne disposer que de systèmes d'égalisation particulièrement simples.

### Cas particulier du zero-padding pour l'OFDM

Il est à préciser que d'autres types d'intervalles de garde ont été proposés pour les transmissions OFDM. Notamment les techniques *postfix* [89] qui produisent un intervalle de garde pseudo-aléatoire et *zero-padding* [130]. Hormis le préfixe cyclique, l'intervalle de garde le plus cité dans la littérature est sans aucun doute le zero-padding (ZP), aussi appelé *trailing-zero* (TZ) dans [86]. Cette approche propose de laisser un intervalle muet à chaque fin de trame. Ce type de transmissions, qualifiées de ZP-OFDM, ont connu un intérêt notoire dans le début des années 2000. En effet, elles se sont vus proposées comme candidates pour les communications en bande ultra-large UWB IEEE 802.15.3a [138] sous la dénomination MB-OFDM, dont la spécificité est de proposer une transmission OFDM multi-bandes [9] par saut de fréquence porteuse.

Le zero-padding est une technique qui présente quelques avantages face au préfixe cyclique comme de disposer de toute la puissance d'émission pour transmettre l'information, puisqu'aucune redondance n'est insérée dans la trame. De plus, les systèmes ZP-OFDM provoquent une répartition plus uniforme de l'information sur les sous-porteuses selon les auteurs de [86], ce qui s'avère avantageux lors de transmissions avec estimation de la réponse du canal. Cependant, l'égalisation du canal est autrement plus complexe et nécessite des approches du type *overlap-add* [54, 118, 119] qui alourdissent considérablement la charge du récepteur. Enfin, dans [91], les auteurs comparent les performances des transmissions OFDM avec préfixe cyclique et zero-padding et montrent que cette dernière introduit plus de distorsion sur le signal lors de son amplification non-linéaire.

## 2.5 Émission et réception des signaux OFDM radio-fréquence et synchronisation

Le modèle proposé par l'équation (2.25) formalise la réception d'un signal numérique OFDM en bande de base, donc sans information de fréquence porteuse. Afin d'être véhiculé jusqu'au récepteur, le signal produit par application de la TFDI à l'équation (2.9) doit être transposé sur une fréquence intermédiaire à l'aide d'une modulation radio-fréquence (RF). Après amplification, la forme d'onde résultante est alors physiquement véhiculable par un quelconque vecteur de diffusion.

### 2.5.1 Émission des signaux OFDM RF

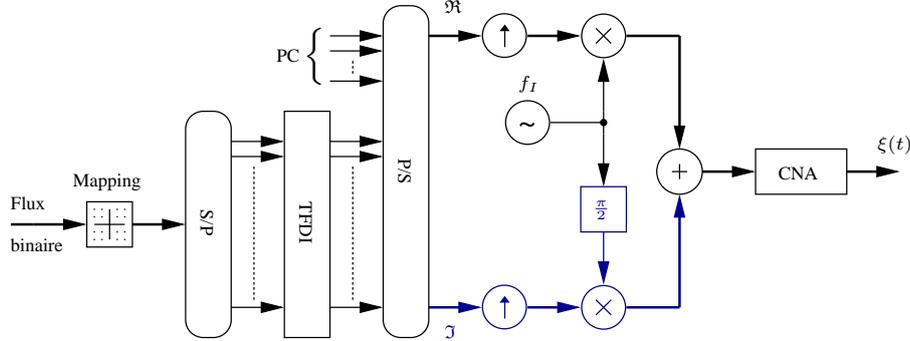


FIG. 2.8 – Synoptique de la génération d'un signal OFDM numérique RF sur fréquence intermédiaire.

Le fonctionnement de l'émetteur est illustré à la figure 2.8. Des symboles sont choisis dans une constellation figurant l'opération de modulation en bande de base, le choix des symboles étant fonction du flux d'information binaire. Ces symboles sont ensuite parallélisés (S/P) et forment un ensemble de  $N$  sous-porteuses à l'entrée de la TFDI. Par sur-échantillonnage d'un facteur  $J$ , le signal OFDM est considéré à temps continu. On établit alors que  $t \approx k/J$  pour  $J \rightarrow \infty$ . Une solution élégante utilise l'interpolation par transformée de Fourier. Il convient alors d'insérer des sous-porteuses nulles avant la TFDI tel que :

$$\mathbf{X}^J = \{X_0, X_1, \dots, X_{N/2-1}, \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{N(J-1)}, X_{N/2}, X_{N/2+1}, X_{N-1}\} \quad (2.26)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x_{k/J} &= \mathcal{F}_{JN}^{-1}\{\mathbf{X}^J\} \\ x(t) &\approx \frac{1}{JN} \sum_{n=0}^{JN-1} X_n^J e^{2j\pi \frac{kn}{JN}}, \quad 0 \leq k < JN \end{aligned} \quad (2.27)$$

Après insertion du préfixe cyclique, présenté au paragraphe 2.4.3, chaque composante en phase et en quadrature du signal  $x^g(t)$ , respectivement  $\Re\{x^g(t)\}$  et  $\Im\{x^g(t)\}$ , forme une voie transposée sur fréquence intermédiaire  $f_I$  par un modulateur numérique DDS (Direct Digital Synthesis) :

$$\xi(t) = \Re\{x^g(t)\} \cos(2\pi f_I t) - \Im\{x^g(t)\} \sin(2\pi f_I t) \quad (2.28)$$

En omettant le préfixe cyclique, l'équation (2.28) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \Re\left\{\frac{1}{JN} \sum_{n=0}^{N-1} X_n^J e^{2j\pi(f_n + f_I)t}\right\} \\ &= \Re\{x(t)e^{2j\pi f_I t}\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

## 2.5.2 Réception des signaux OFDM RF

En réception, le signal d'antenne vient des équations (2.15), (2.23) et (2.28) :

$$\tilde{\xi}(t) = (\xi * h)(t) + w(t) \quad (2.30)$$

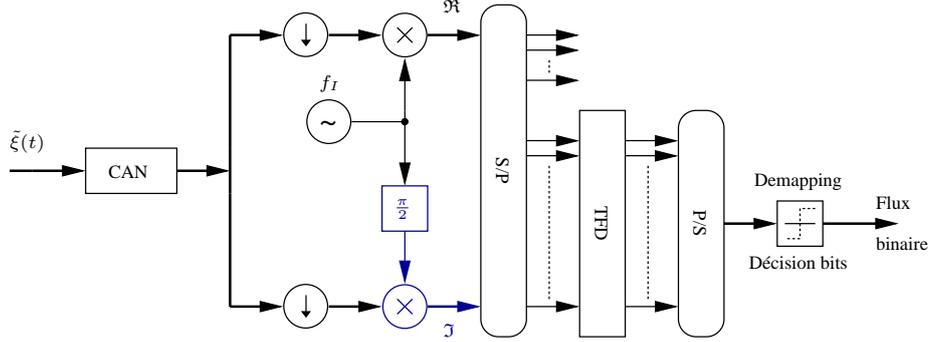


FIG. 2.9 – Diagramme d'un récepteur de signal OFDM à bande transposée.

Le récepteur, figure 2.9, exécute les opérations duales de l'émetteur afin que la démodulation RF apporte en entrée de la TFD le signal en bande de base :

$$y_k = \Re\{\tilde{\xi}_k\} + j\Im\{\tilde{\xi}_k\}, \quad 0 \leq k < N \quad (2.31)$$

Pour ce faire, le signal d'antenne est converti numériquement (CAN) et décimé d'un facteur  $J$ . En temps discret, la démodulation RF est alors menée par :

$$\begin{cases} \Re\{\tilde{\xi}_k\} &= \tilde{\xi}_k \cos(2\pi f_I \frac{k}{N}) \\ \Im\{\tilde{\xi}_k\} &= -\tilde{\xi}_k \sin(2\pi f_I \frac{k}{N}) \end{cases}, \quad 0 \leq k < N(1+G) \quad (2.32)$$

Le signal conservant la redondance apportée par le préfixe cyclique est :

$$y_k^g = \tilde{\xi}_k e^{-2j\pi f_I \frac{k}{N}}, \quad 0 \leq k < N(1+G) \quad (2.33)$$

Après suppression des  $G$  premiers échantillons dans l'équation (2.33) et par application de la transformée de Fourier discrète :

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2j\pi \frac{nk}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} ((x \otimes h)_k + w_k) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}, \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (2.34)$$

Soit le résultat précédemment avancé par l'équation (2.25). La modulation / démodulation de l'OFDM tire alors grandement partie du traitement numérique des signaux et permet une implantation efficace par DSP.

### 2.5.3 Effets de la synchronisation en temps et en fréquence

Malgré ses nombreuses qualités, l'OFDM est un mode de communication particulièrement sensible aux défauts de synchronisation. La bonne réception des signaux nécessite donc des systèmes adaptés sous peine de voir détruite l'orthogonalité des sous-porteuses. Le préfixe cyclique est généralement conservé et aide aux étapes de synchronisation [124].

En référence à la modélisation de l'équation (2.17) quant à l'influence du canal de communication sur le signal OFDM et en supposant un retard de  $n_\epsilon$  échantillons en réception, soit un décalage temporel  $\epsilon = n_\epsilon \frac{T}{N}$ , il est montré dans [123] que la désynchronisation temporelle de la détection des trames OFDM entraîne des phénomènes d'interférences et de modification de phase en sortie de démodulation par TFD comme :

$$Y_n = \alpha(n_\epsilon) e^{j2\pi \frac{n}{N} n_\epsilon} H_n X_n + W_n + \Upsilon_n, \quad 0 \leq n < N \quad (2.35)$$

Dans l'équation (2.35), l'atténuation  $\alpha(n_\epsilon)$  est négligée et les IEP et IES sont modélisées par un BABG  $\Upsilon_n$  de variance :

$$\sigma_\Upsilon^2 = \sum_i |h_i(t)|^2 \left( 2 \frac{\Delta_{\epsilon_i}}{N} - \left( \frac{\Delta_{\epsilon_i}}{N} \right)^2 \right) \quad (2.36)$$

Pour :

$$\Delta_{\epsilon_i} = \begin{cases} n_\epsilon - \frac{\tau_i}{T} N, & \text{si } \epsilon > \tau_i \\ \frac{\tau_i - T_g}{T} N - n_\epsilon & \text{si } 0 < \epsilon < -(T_g - \tau_i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.37)$$

La faible bande passante des sous-porteuses rend l'OFDM sensible aux décalages sur le temps d'échantillonnage du symbole OFDM. De même, la précision des fréquences des oscillateurs est un élément critique. Les travaux de Speth *et al.* [123] modélisent ces interférences de telle sorte à ce que pour un décalage de phase  $\phi_n$  de  $i$  trames :

$$Y_n = H_n X_n e^{2j\pi \frac{n}{N} n_\epsilon} e^{2j\pi i + 2G\pi n} + W_n + \Upsilon_n + \Omega_n, \quad 0 \leq n < N \quad (2.38)$$

Sachant les puissances du bruit pour chaque sous-porteuse  $\Omega_n$  sont :

$$\sigma_n^2 = \frac{\pi^2}{3} |H_n|^2 \phi_n^2 \quad (2.39)$$

Des techniques adaptées, permettant le rattrapage de ces désynchronisations, sont donc indispensables en réception mais se révèlent particulièrement complexes [124]. Il est néanmoins évident que la sensibilité particulière de l'OFDM aux effets de désynchronisation constituent une source de dégradation très dommageable quant à la performance de la transmission [123].

## 2.6 Techniques d'égalisation

L'utilisation du préfixe cyclique autorise les systèmes OFDM à ne disposer que de simples égaliseurs de canal à structure linéaire. L'annulation des interférences

entre les sous-porteuses est alors simplement insérée en cascade après la démodulation par TFD. Gageons que les approches présentées ici se restreignent volontairement à l'utilisation de sous-porteuses pilotes et d'égaliseurs opérant dans le domaine fréquentiel. Des approches semi-aveugles et aveugles d'estimation de canal ou d'égalisation dans le domaine temporel sont parfaitement envisageables et constituent un vaste pan de la littérature [60] §14 et §15.

### 2.6.1 Estimation de canal par sous-porteuses pilotes

Les coefficients du canal dans le domaine fréquentiel nécessitent d'être estimés pour effectuer l'égalisation. Cette estimation est déterminante pour les performances de la transmission. L'égalisation en fréquence exploite généralement des sous-porteuses pilotes qui, réservées à l'émission et connues en réception, permettent une estimation directe de certains coefficients du canal. La méthode la plus représentative de l'utilisation de sous-porteuses pilotes est la technique PSAM (Pilot Symbol-Assisted Modulation) [20]. Pour chaque sous-porteuse pilote, la réponse du canal est estimée en effectuant le quotient de la sous-porteuse par la valeur du pilote. L'estimation de la réponse du canal est alors :

$$\hat{H}_n = \frac{Y_n}{P}, \quad 0 \leq n^P \leq n_{N^P-1}^P \quad (2.40)$$

Avec  $\mathbf{N}^P = \{n_0^P, n_1^P, \dots, n_{N^P-1}^P\}$  les indices des sous-porteuses pilotes tels que  $n_{N^P-1}^P < N$  et  $P$  le symbole pilote utilisé. La répartition des symboles pilotes dans la trame OFDM ainsi que l'interpolation de la réponse du canal aux indices exclus de  $\mathbf{N}^P$  est l'objet de multiples travaux dont les méthodes les plus courantes et basiques ont été comparées dans [128].

### 2.6.2 Égalisation par structure ZF

La structure par zero-forcing (ZF) [73] utilise une technique rudimentaire d'inversion de l'affaiblissement subi par chaque sous-porteuse. L'égalisation est menée considérant  $G_n = \frac{1}{\hat{H}_n}$  et le signal après compensation est :

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n &= G_n Y_n \\ &= \frac{Y_n}{\hat{H}_n} \\ &= \frac{H_n X_n}{\hat{H}_n} + \frac{W_n}{\hat{H}_n}, \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le principal inconvénient de l'égalisation par ZF est que pour des affaiblissements significatifs, ce qui n'est pas un cas rare lors d'une propagation sans-fil, le rapport  $\frac{W_n}{\hat{H}_n}$  tend rapidement vers de grandes quantités, amplifiant artificiellement le bruit sur la sous-porteuse.

### 2.6.3 Égalisation par structure MMSE

Le principe de l'égaliseur MMSE [66] est au demeurant plus complexe que l'approche par ZF mais à l'avantage de limiter l'amplification du bruit sur la sous-porteuse. Il nécessite également l'estimation du bruit blanc additif gaussien qui impacte la transmission. La réponse fréquentielle de l'égaliseur MMSE est :

$$G_n = \frac{\hat{H}_n^*}{|\hat{H}_n|^2 + \frac{\hat{N}_0}{E_s}}, \quad 0 \leq n < N \quad (2.42)$$

Avec  $E_s$  l'énergie moyenne des symboles modulant les sous-porteuses, et  $\hat{N}_0$  l'estimation de la puissance du bruit thermique. L'égalisation est classiquement menée par :

$$\hat{Y}_n = G_n Y_n, \quad 0 \leq n < N \quad (2.43)$$

## 2.7 Performances théoriques des systèmes OFDM

### 2.7.1 Capacité des systèmes OFDM

Soit la capacité en bits/s d'un canal à BABG et à bande limitée  $B$  donnée par Shannon [121] pour une puissance d'émission  $\mathcal{P}$  constante :

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{\mathcal{P}}{BN_0} \right) \quad (2.44)$$

Pour une transmission OFDM avec préfixe cyclique, le canal de communication équivalent considéré est donné par la figure 2.6. En supposant que l'espacement respectif des sous-porteuses tende vers 0, il est montré dans [32] §10.4 que la capacité de canal pouvant être atteinte est limitée par :

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \log_2 \left( 1 + \frac{|H_n|^2 P_n}{N_0} \right) \quad (2.45)$$

Avec  $H_n$  les coefficients de la réponse fréquentielle du canal de communication et  $P_n$  la puissance allouée à chaque sous-porteuse. La contrainte sur la puissance totale d'émission est telle que :

$$\sum_{n=0}^{N-1} P_n \leq \mathcal{P}$$

Le problème de maximisation de la capacité de l'équation (2.45) sous contrainte de puissance est classiquement résolu par Lagrangien dont la solution est donnée par :

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_n|^2} & \text{si } \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_n|^2} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (2.46)$$

Les puissances allouées sont donc strictement positives telles que les conditions de Kuhn-Tucker soient vérifiées par la solution donnée à l'équation (2.46). La solution

est donc d'allouer uniquement la puissance pour les sous-porteuses pour lesquelles le bruit est le plus fort sachant le niveau  $\frac{1}{\lambda}$  :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_n|^2} \right)^+ = \mathcal{P} \quad (2.47)$$

La figure 2.10 illustre la technique *water-filling* décrite par l'équation (2.46).

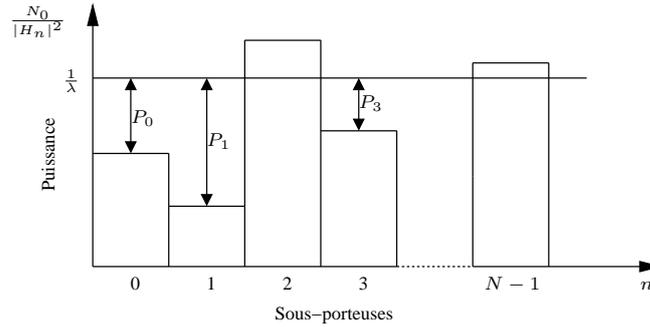


FIG. 2.10 – Solution basée sur le principe de *water-filling* pour la maximisation de la capacité de canal de transmissions OFDM, équation (2.45).

Il est intéressant de noter que le résultat de l'équation (2.45) révèle que pour un rapport de signal à bruit  $|H_n|^2/N_0$  et à puissance  $P_n$  constants, la capacité atteinte par le système OFDM est alors minimum. Elle peut néanmoins être maximisée sous condition d'allocation de la puissance de chaque sous-porteuse selon la solution de l'équation (2.46).

## 2.7.2 Taux d'erreur théorique des transmissions OFDM

La performance théorique des transmissions OFDM est, comme pour un système à porteuse unique, liée au choix de la constellation modulant les sous-porteuses. Considérant que chacune d'elles est un canal indépendant des autres et que le bruit  $y$  est distribué identiquement et à puissance constante, *i.e.* soit le cas d'un BABG, la performance sur chacun de ces canaux est identique. Le paragraphe B.1 montre que la performance d'un système OFDM à modulation antipodale est semblable à celle d'un système à porteuse unique [108] §5.2.2. Le taux d'erreur binaire (TEB) correspondant est montré à la figure 2.11. Considérant ce résultat, il est donc aisé de prévoir théoriquement la performance d'un système OFDM.

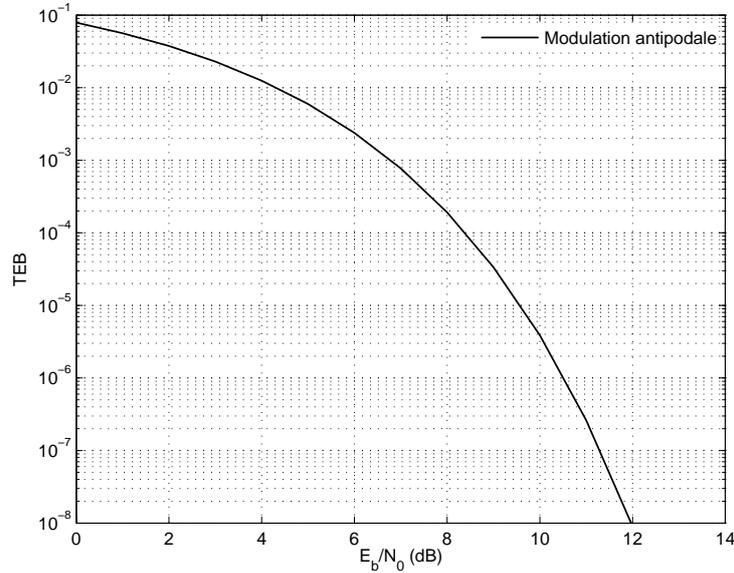


FIG. 2.11 – Performance d’un système OFDM modulé par constellation antipodale à deux états sur canal BABG. Taux d’erreur binaire, équation (B.6).

### Performance d’un système OFDM avec modulation 16-QAM

Pour les modulations d’ordres supérieurs, la performance est fortement dépendante de la manière dont les symboles constitutants sont distribués puis étiquetés sur le diagramme en constellation. Il est ici montré la performance d’un système OFDM modulée par une constellation 16-QAM qui est un paramètre de simulation utilisé fréquemment dans ce manuscrit. Pour ce faire, nous utilisons le taux d’erreur symbole (TES) des modulations 4-PAM et 4-PSK présentés aux paragraphes annexes B.2 et B.3.

La modulation QAM (Quadrature Amplitude Modulation) encode l’information par une variation conjointe de l’amplitude et de la phase des symboles de la constellation. Le diagramme en constellation d’une 16-QAM est présenté à la figure B.6 pour un étiquetage des symboles par code naturel et code de Gray. Ce dernier assure une erreur d’un seul bit pour une mauvaise détection d’un symbole. En effet, les voisins de chaque symbole de la constellation sont éloignés d’une distance de Hamming  $d^H = 1$ .

La performance quant au taux d’erreur symbole pour une constellation 16-QAM étiquetée par codage naturel est donnée à l’équation (B.25) de l’annexe B.4 par :

$$TES = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}\right) \quad (2.48)$$

La figure 2.12 montre la performance de la transmission pour le résultat de l’équation (2.48).

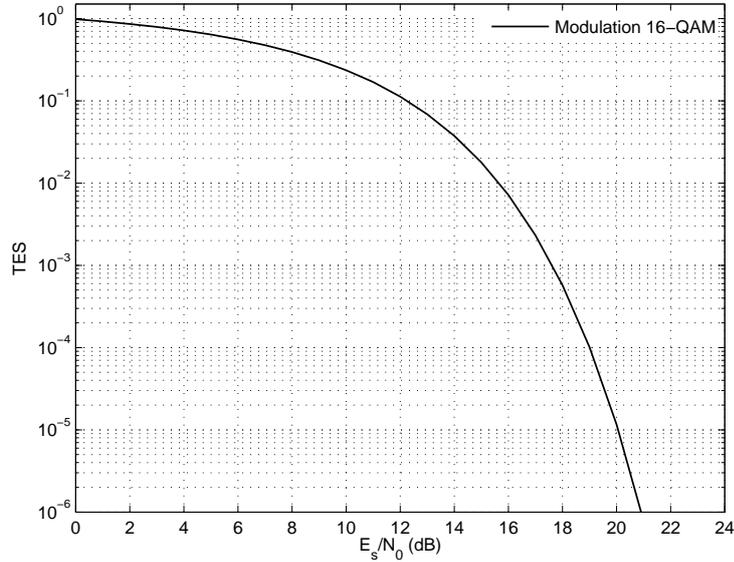


FIG. 2.12 – Performance d’un système OFDM modulé par constellation 16-QAM avec étiquetage par code naturel sur canal BABG. Taux d’erreur symbole, équation (2.48).

Soit, à présent, la modulation 16-QAM étiquetée par un code de Gray comme montré à la figure B.6. On peut décemment supposer que pour des valeurs de rapport signal à bruit modérées, la dispersion des symboles en réception ne provoque, au maximum, qu’une erreur d’un bit par symbole. Selon cette hypothèse, le taux erreur binaire peut donc être raisonnablement approximé en fonction du taux d’erreur symbole par  $TEB \approx TES/M$  pour un rapport signal à bruit pour un bit de  $E_b = E_s/M$ . Pour de forts rapports de signal à bruit, le  $TEB$  d’une transmission OFDM modulée par une constellation 16-QAM étiquetée par code de Gray est donné par l’équation (B.25) comme :

$$TEB = \frac{3}{8}Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{10N_0}}\right) \quad (2.49)$$

La simulation confirme ce résultat théorique à la figure 2.13.

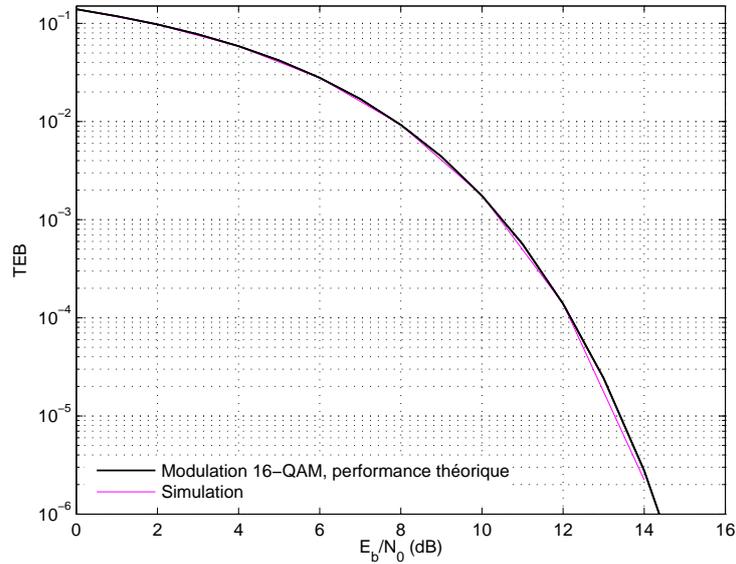


FIG. 2.13 – Performance d’un système OFDM modulé par constellation 16-QAM avec étiquetage par code de Gray sur canal BABG. Comparaison des taux d’erreur binaire obtenus théoriquement par l’équation (2.49) et par simulation.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre pose les principes essentiels à la compréhension des systèmes à porteuses multiples OFDM en introduisant le contexte dans lequel s’inscrit ce manuscrit. La popularité de l’OFDM dans les standards de communications récents sont liées à ses nombreux avantages.

En effet, l’utilisation élégante de la transformée de Fourier pour la génération et la démodulation des signaux autorise une diffusion diversifiée de l’information sur les sous-porteuses ainsi qu’une implantation efficace de la modulation. Associée à la propriété d’orthogonalité des sous-porteuses, l’OFDM se distingue par une très forte efficacité spectrale qui autorise des débits d’information élevés. Aussi, sa robustesse face aux dispersions des canaux de propagation, par utilisation d’un intervalle de garde, aide à lutter efficacement contre les interférences entre symboles. La détection et l’égalisation du canal se voit aussi simplifiée par l’utilisation du préfixe cyclique. Enfin, les performances théorique du système montrent qu’il est possible d’atteindre la capacité du canal par l’utilisation d’une allocation de puissance des sous-porteuses et qu’aucune perte quant aux taux d’erreur n’est à déplorer face à un système mono-porteuse.

Cependant, la modulation est particulièrement sensible aux défauts de synchronisations en temps et en fréquence qui peuvent mener à une dégradation rapide de la performance du système. En outre, des pertes en puissance d’émission et en débit sont dues au l’insertion de l’intervalle de garde, des porteuses pilotes et le récepteur doit pouvoir compenser efficacement les effets d’interférences entre les

sous-porteuses et les trames. Enfin, la dynamique des signaux OFDM rend difficile leur amplification linéaire et à haut rendement en raison des fortes amplitudes de leur enveloppe.

Ce dernier point, occulté jusqu'à présent, est abordé en détails au chapitre 3. Il est ainsi souvent cité comme l'inconvénient principal en ce qui concerne l'implantation des systèmes de communication OFDM et se trouve être la base de la problématique étudiée dans ce manuscrit.

# Influence et analyse du PAPR des signaux OFDM

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>29</b>
<b>3.2</b>	<b>Dispositifs d'amplification en télécommunications</b>	<b>30</b>
3.2.1	Modèles d'amplificateurs sans-mémoire	31
3.2.2	Modèles d'amplificateurs à mémoire	35
<b>3.3</b>	<b>Statistique des signaux OFDM</b>	<b>35</b>
3.3.1	Peak-to-average power ratio	37
3.3.2	Analyse de l'évolution du PAPR	39
3.3.3	Cas du PAPR des signaux OFDM sur-échantillonnés	41
<b>3.4</b>	<b>Techniques de limitation du PAPR à l'émetteur</b>	<b>43</b>
3.4.1	Introduction	43
3.4.2	Limitation d'amplitude du signal OFDM	44
3.4.3	Codage	45
3.4.4	Selected mapping	46
3.4.5	Entrelacement	47
3.4.6	Partial transmit sequence	48
3.4.7	Manipulation de sous-porteuses	49
3.4.8	Active constellation extension	50
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>

---

## 3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les qualités de l'OFDM lui ont permis de rapidement s'imposer comme modulation pour de nombreuses normes en télécommunication. Il est pourtant une propriété des signaux OFDM qui rend particulièrement délicate l'implantation de ce mode de transmission. En effet, et contrairement aux systèmes à porteuse unique, l'OFDM est composée à partir d'une somme de signaux modulés qui sont susceptibles, si sommés en cohérence et d'après le théorème central limite, de provoquer de forts niveaux d'amplitude. En sortie de la transformée de Fourier, l'enveloppe du signal montre alors une dynamique qui peut compromettre la linéarité de son amplification. Afin de quantifier cet effet, on étudie le niveau de PAPR (Peak-to-Average Power Ratio) du signal OFDM, soit le rapport du pic le plus haut de son enveloppe au niveau moyen du signal. L'évolution de cette

variable a été intensément étudiée et caractérisée dans la littérature puisqu'elle est directement liée à la qualité de la communication.

La réduction du PAPR en OFDM est alors un problème qui concentre un intérêt très vif de la part de la communauté scientifique. De nombreuses méthodes ont été proposées afin de limiter au mieux la dynamique des signaux avant leur amplification et l'émetteur procède à des manipulations sur le signal avant sa transposition sur la bande d'émission. Ces techniques se contentent donc essentiellement de travailler sur le signal en bande de base.

Après avoir introduit les notions relatives à l'amplification des signaux de communication, nous étudierons la dynamique des signaux OFDM par ses statistiques et analyserons leur PAPR au paragraphe 3.3.1 tandis que son évolution sera montrée aux paragraphes 3.3.2 et 3.3.3. Nous présenterons enfin un état de l'art des méthodes les plus représentatives permettant de réduire le niveau de PAPR à l'émission.

## 3.2 Dispositifs d'amplification en télécommunications

Dans cette section sont présentés les modèles d'amplificateurs de puissance (AP) les plus cités dans la littérature. L'amplification du signal d'émission est effectuée avant sa modulation par le dispositif RF. La réponse de l'amplificateur de puissance varie selon la technologie utilisée pour son implantation physique mais peut être facilement modélisée. D'une manière générale, des distorsions sont subies par le signal en sortie de l'amplificateur lorsqu'il est utilisé dans sa zone de réponse non-linéaire. Il en résulte naturellement des dégradations particulièrement dommageables pour la performance de la transmission.

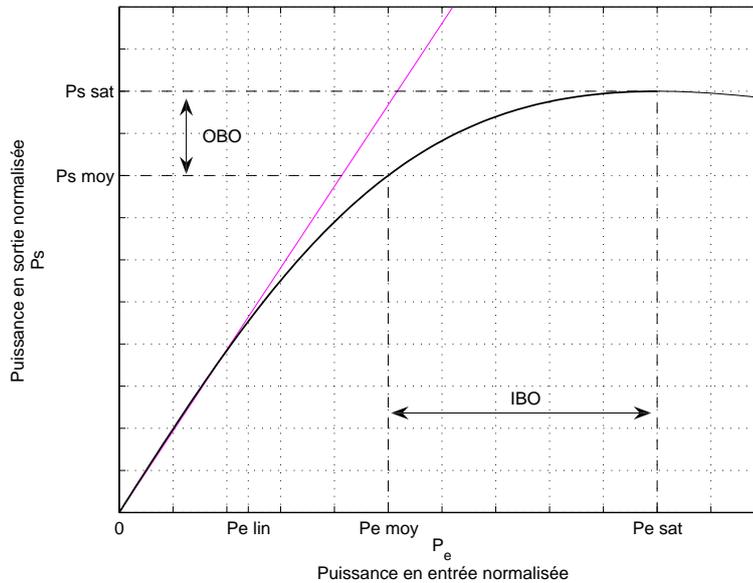


FIG. 3.1 – Caractéristique typique des amplificateurs utilisés en communications numériques.

La figure 3.1 illustre la fonction de transfert typique d'un amplificateur sous puissance d'alimentation  $P_a$ . La puissance d'entrée normalisée est notée  $P_e$ ,  $P_s$  étant respectivement la puissance du signal en sortie. Trois régions différentes peuvent être distinguées :

1. La première correspond au fonctionnement linéaire de l'amplificateur de puissance. Cette zone est bornée par  $0 < P_e \leq P_{e \text{ lin}}$  avec  $P_{e \text{ lin}}$  la puissance d'entrée limite pour laquelle la fonction de transfert reste linéaire. Dans ce cas de figure, l'amplificateur assure linéairement l'élévation de la puissance du signal.
2. Pour une puissance d'entrée comprise entre  $P_{e \text{ lin}} < P_e < P_{e \text{ sat}}$ , la réponse devient non-linéaire jusqu'à la zone de saturation indiquée par  $P_{e \text{ sat}}$ . Dans ce mode de fonctionnement, le gain  $\rho = \frac{P_s}{P_e}$  de l'amplificateur chute à mesure que  $P_e$  augmente.
3. Enfin pour  $P_e \geq P_{e \text{ sat}}$ , l'amplificateur fonctionne dans sa zone de saturation pour laquelle la puissance de sortie reste constante quelque soit la puissance en entrée.

Le point de fonctionnement d'un amplificateur est habituellement défini par son retrait en puissance, à l'entrée et à la sortie. Ces paramètres sont reportés respectivement par IBO (Input BackOff) et OBO (Output BackOff) sur la figure 3.1.

DÉFINITION - Le retrait en entrée d'un amplificateur de puissance est le rapport entre la puissance de saturation  $P_{e \text{ sat}}$  et la puissance moyenne du signal d'entrée  $P_{e \text{ moy}}$  tel que :

$$IBO = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{e \text{ sat}}}{P_{e \text{ moy}}} \right) \text{dB} \quad (3.1)$$

Le retrait en sortie est le rapport entre la puissance maximum en sortie  $P_{s \text{ sat}}$  et la puissance moyenne du signal amplifié  $P_{s \text{ moy}}$  :

$$OBO = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{s \text{ sat}}}{P_{s \text{ moy}}} \right) \text{dB} \quad (3.2)$$

Dans le cas de la figure 3.1, le retrait en entrée est de  $IBO = 3\text{dB}$ . Dans la pratique, il est nécessaire de restreindre l'utilisation de l'amplificateur dans une zone de quasi-linéarité et de profiter d'une efficacité d'amplification maximum à un rendement  $\eta = \frac{P_s}{P_e} \approx 1$ . Typiquement, ces conditions sur le gain et le rendement imposent que le recul en entrée soit le plus réduit possible et que la dynamique du signal soit mesurée, afin d'éviter les distorsions sur le signal de sortie. La suite de ce chapitre montrera que les signaux OFDM requièrent un recul en entrée important ou des techniques particulières qui garantissent leur amplification à haut rendement.

### 3.2.1 Modèles d'amplificateurs sans-mémoire

La plupart des modélisations d'amplificateur de puissance considèrent ces dispositifs comme sans-mémoire et disposant d'une réponse fréquentielle constante. La formalisation de la distorsion du signal est donnée à l'équation (3.3) pour laquelle

l'effet de la non-linéarité est figuré par la fonction  $\mathbf{g}(\cdot)$ . Celle-ci est dépendante de  $\mathbf{g}_a(\cdot)$  et  $\mathbf{g}_\phi(\cdot)$  agissant respectivement sur l'amplitude et la phase du signal comme :

$$\mathbf{g}(x_k) = \mathbf{g}_a(|x_k|) e^{j(\phi(x_k) + \mathbf{g}_\phi(|x_k|))}, \quad 0 \leq k < N \quad (3.3)$$

La non-linéarité de la fonction de transfert de l'amplificateur provoque alors une distorsion modélisée comme une contribution sur l'amplitude et sur la phase du signal OFDM complexe en bande de base. Ces contributions  $\mathbf{g}_a(\cdot)$  et  $\mathbf{g}_\phi(\cdot)$  sont exprimées en fonction du module  $|\cdot|$  de chaque échantillon  $x_k$  et sont respectivement appelées les fonctions de distorsion d'amplitude à amplitude (AM/AM) et d'amplitude à phase (AM/PM) [115].

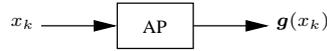


FIG. 3.2 – Modélisation générique des amplificateurs sans-mémoire en bande de base.

### 3.2.1.1 Modélisation des amplificateurs TWT

Le modèle proposé par Saleh dans [115] concerne les systèmes d'amplification de haute puissance à tube à ondes progressives TWT (Travelling-Wave Tube), couramment utilisés dans les communications satellitaires. La modélisation réside en une représentation statique de la non-linéarité pour telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a(|x_k|) &= \frac{\alpha_a |x_k|}{1 + \beta_a |x_k|^2} \\ \mathbf{g}_\phi(|x_k|) &= \frac{\alpha_\phi |x_k|^2}{1 + \beta_\phi |x_k|^2} \end{aligned}, \quad 0 \leq k < K \quad (3.4)$$

Les coefficients  $\alpha_a$ ,  $\alpha_\phi$ ,  $\beta_a$  et  $\beta_\phi$  sont des nombres réels et positifs définis dans [115]. Le couple  $\alpha_a$ ,  $\beta_a$  sont les paramètres décidant de la distorsion en amplitude et  $\alpha_\phi$ ,  $\beta_\phi$  en phase ;  $\alpha_a$  étant notamment le gain dans la zone de linéarité de l'amplificateur. Le niveau de saturation noté  $A$ , est alors :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\beta_a}} \quad (3.5)$$

Tandis que l'amplitude maximum de sortie est :

$$A_m = \frac{\alpha_a A}{2} \quad (3.6)$$

Le déphasage maximal en saturation est quant à lui donné par l'équation (3.4) comme :

$$\Phi = \mathbf{g}_\phi(A) \quad (3.7)$$

La figure 3.3 renseigne sur l'évolution des fonctions de distorsion en amplitude AM/AM et en phase AM/PM. Bien que ce modèle soit particulièrement utilisé dans la littérature, les amplificateurs TWT sont maintenant délaissés au profit des

amplificateurs à semi-conducteur SSP (Solid State Power), aussi bien pour des communications radio-terrestres que spatiales. En outre, la précision du modèle de Saleh n'est pas suffisante pour décrire la dynamique des amplificateurs SSP au-delà leur zone de linéarité.

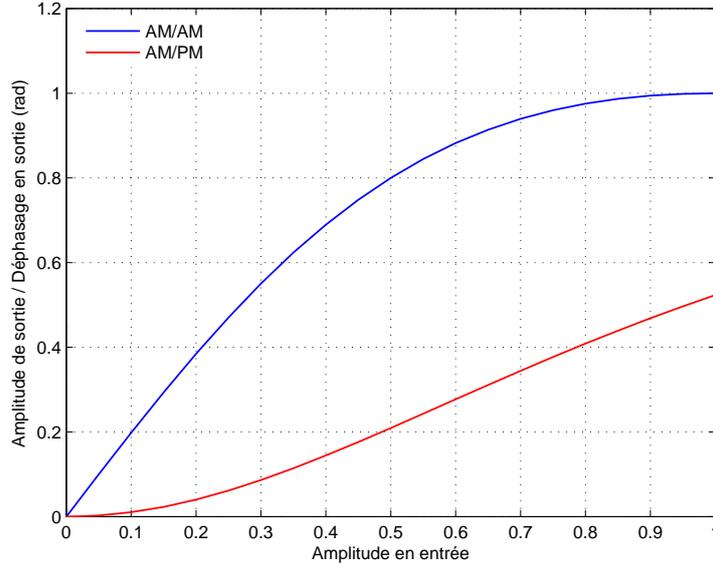


FIG. 3.3 – Fonctions de distortion AM/AM et AM/PM d'un amplificateur TWT.  $\alpha_a = 2$ ,  $\beta_a = 1$ ,  $\alpha_\phi = \frac{\pi}{3}$  et  $\beta_\phi = 1$ . Le niveau de saturation est  $A = 1$  et le déphasage correspondant est  $\Phi = \frac{\pi}{6}$ .

### 3.2.1.2 Modélisation des amplificateurs SSP

Les amplificateurs SSP utilisent une technologie à base de transistors de type GAA-FET et la non-linéarité induite par une utilisation limite ne provoque de distortion que sur l'amplitude du signal. Rapp [111] propose donc la modélisation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a(|x_k|) &= \frac{\mathcal{K}|x_k|}{\left(1 + \left(\frac{\mathcal{K}|x_k|}{A}\right)^{2p}\right)^{0.5/p}}, \quad 0 \leq k < K \\ \mathbf{g}_\phi(|x_k|) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dans l'équation (3.8), le paramètre  $p$  permet d'affiner au mieux la forme de la fonction de transfert de l'amplificateur en jouant sur la brutalité de la zone non-linéaire précédant la saturation et  $A$  est l'amplitude maximale en sortie de l'amplificateur.  $\mathcal{K}$  est le gain d'amplification et  $A$  le seuil de saturation.

Pour une amplification  $\mathcal{K} = 1$  comme montré à la figure 3.4, il est intéressant de constater que pour  $p \rightarrow \infty$ , la fonction de transfert d'un amplificateur SSP est similaire à la méthode d'écrêtement des signaux, ou *clipping*, qui est présentée au §3.4.2 et dont nous analyserons les effets sur les signaux OFDM au chapitre 4. Le limiteur d'enveloppe réalisé par l'amplificateur SSP dans ces conditions précises est

alors formalisé par la caractéristique :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a(|x_k|) &= \begin{cases} \mathcal{K}|x_k| & \text{si } \mathcal{K}|x_k| \leq A \\ A & \text{si } |x_k| > A \end{cases}, \quad 0 \leq k < K \\ \mathbf{g}_\phi(|x_k|) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

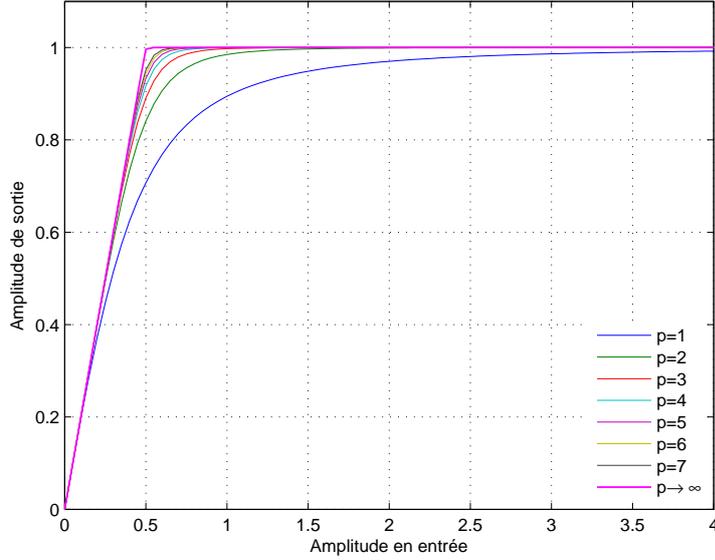


FIG. 3.4 – Fonction de transfert d’un amplificateur SSP pour diverses valeurs de  $p$ .  $\mathcal{K} = 2$  et  $A = 1$ .

### 3.2.1.3 Modélisation par approche polynomiale

Plutôt que de modéliser les fonctions AM/AM et AM/PM propres à l’amplificateur de puissance afin de caractériser la distorsion du signal en amplitude et en phase, il peut être considéré que la non-linéarité  $\mathbf{g}(\cdot)$  soit une fonction de polynomiale du signal en bande de base [25].

Les travaux de Zhou *et al.* [139] considèrent alors le développement en série de Taylor suivant :

$$\mathbf{g}(x_k) = x_k \sum_{g_\alpha=0}^{G_\alpha} \alpha_{2g_\alpha+1} |x_k|^{2g_\alpha}, \quad 0 \leq k < N \quad (3.10)$$

Dans l’équation (3.10),  $2G_\alpha$  est le degré du polynôme et les coefficients  $\alpha$  sont complexes. La détermination de ces coefficients est issue de l’algorithme présenté dans [139]. Cette fonction permet de simuler une conversion AM/AM et AM/PM en bande de base.

### 3.2.2 Modèles d'amplificateurs à mémoire

Lorsque le signal amplifié est à bande passante réduite par rapport à celle de la non-linéarité de l'amplificateur, l'hypothèse de distorsion sans-mémoire est valide. Néanmoins, cette condition n'est pas toujours acceptable et il convient d'établir des modèles dépendants de la fréquence. Le comportement non-linéaire dépend alors de l'échantillon à l'entrée de l'amplificateur mais aussi des précédents.

La méthode, appelée Wiener-Hammerstein [55], consiste à insérer un filtre avant et/ou après un système non-linéaire sans-mémoire comme ceux présentés au paragraphe 3.2.1. On obtient alors le diagramme équivalent de la figure 3.5.

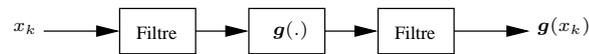


FIG. 3.5 – Modélisation de Wiener-Hammerstein des amplificateurs à mémoire en bande de base.

Le modèle de Hammerstein est établi en gardant uniquement le filtre à la sortie de la non-linéarité [2]. L'identification des éléments linéaires et non-linéaires du modèle de Hammerstein peut être menée itérativement [13] ou par corrélation [92].

Contrairement à la méthode de Hammerstein, la modélisation dite de Wiener [120] utilise un filtre à l'entrée du dispositif non-linéaire. L'identification est alors menée selon [133].

## 3.3 Statistique des signaux OFDM

La somme des sous-porteuses orthogonales constituant le signal OFDM, comme le montre l'équation (2.9), rend théoriquement possible l'apparition de pics de grandes amplitudes sur son enveloppe, résultant localement de la mise en cohérence des porteuses. Nous analysons dans ce paragraphe, la statistique des signaux OFDM.

Par une stratégie de codage de canal réfléchi, les symboles issus de la mise sous constellation des sous-porteuses sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Selon le théorème central limite, et sous condition d'un nombre  $N$  de sous-porteuses suffisant, les échantillons du signal en sortie de TFDI sont alors des valeurs particulières de la variable aléatoire  $\chi$  distribuée selon une loi normale complexe de moyenne  $\mu_\chi = 0$  et de variance théorique  $\sigma_\chi^2$ , ainsi :

$$\chi \sim \mathcal{N}_c(0, \sigma_\chi^2) \quad (3.11)$$

La fonction de densité de probabilité représentant la loi normale complexe de l'équation (3.11) est :

$$p_\chi(x_k) = \frac{1}{\pi\sigma_\chi^2} e^{-\frac{|x_k|^2}{\sigma_\chi^2}} \quad (3.12)$$

La variance de la densité de probabilité (3.12) est  $\sigma_\chi^2 = 2\sigma_x^2$ , soit la puissance

théorique du signal donnée par :

$$\begin{aligned} 2\sigma_x^2 &= \mathbb{E}\{|\mathbf{x}|^2\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x_k|^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

D'après le théorème de conservation des puissances de Parseval, la puissance du signal  $2\sigma_x^2$  dépend de l'énergie moyenne  $E_s$  des  $2^M$  symboles de la constellation modulant les sous-porteuses et en utilisant l'opération de TFDI définie à l'équation (2.9), il est possible d'écrire que :

$$\begin{aligned} 2\sigma_x^2 &= \frac{2}{N} \sigma_X^2 \\ &= \frac{1}{2^M N} \sum_{m=0}^{2^M-1} |S_m|^2 \\ &= \frac{E_s}{N} \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'enveloppe d'un signal OFDM est alors définie par le module de ses échantillons complexes :

$$|x_k| = \sqrt{\Re\{x_k\}^2 + \Im\{x_k\}^2}, \quad 0 \leq k < N \quad (3.15)$$

Les parties réelles  $\Re\{\mathbf{x}\}$  et imaginaires  $\Im\{\mathbf{x}\}$  du signal suivent respectivement une loi normale réelle de variance  $\sigma_x^2$ , comme l'illustre la figure 3.6.

La variable aléatoire  $|\chi|$  associée à  $|x_k|$  suit donc une loi de Rayleigh dont la fonction de répartition est :

$$p_{|\chi|}(|x_k|) = \frac{|x_k|}{\sigma_x^2} e^{-\frac{|x_k|^2}{2\sigma_x^2}} \quad (3.16)$$

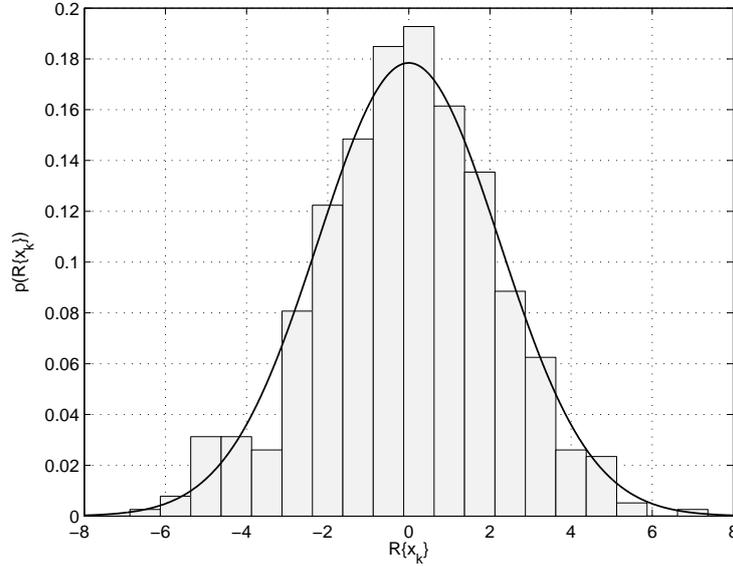


FIG. 3.6 – Densité de probabilité et histogramme comparés de la partie réelle d'un signal OFDM pour  $N = 512$  sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM.

La moyenne et la variance de la variable aléatoire  $|\chi|$  distribuée selon la densité de probabilité de l'équation (3.16) sont respectivement :

$$\mu_{|\chi|} = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.17)$$

$$\sigma_{|\chi|}^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_x^2 \quad (3.18)$$

Le fait que l'enveloppe des signaux OFDM soit distribuée selon une loi de Rayleigh, comme l'illustre la figure 3.7, suggère l'apparition de fortes amplitudes due aux importantes fluctuations de l'enveloppe.

### 3.3.1 Peak-to-average power ratio

DÉFINITION - Le peak-to-average power ratio (PAPR) est une variable qui mesure la puissance instantanée d'un signal par rapport à sa puissance moyenne. Le niveau de PAPR caractérise, en somme, la dynamique d'un signal et il est formalisé par le rapport :

$$PAPR(\mathbf{x}) = \frac{\max_{0 \leq k < N} |x_k|^2}{\mathbb{E}\{|\mathbf{x}|^2\}} \quad (3.19)$$

La définition de l'équation (3.19) est parfaitement analogue pour un signal à temps continu.

Pour un signal en bande transposée, tel que montré au paragraphe 2.5 à la figure 2.8, la définition précédente doit être considérée plus finement. En rappelant

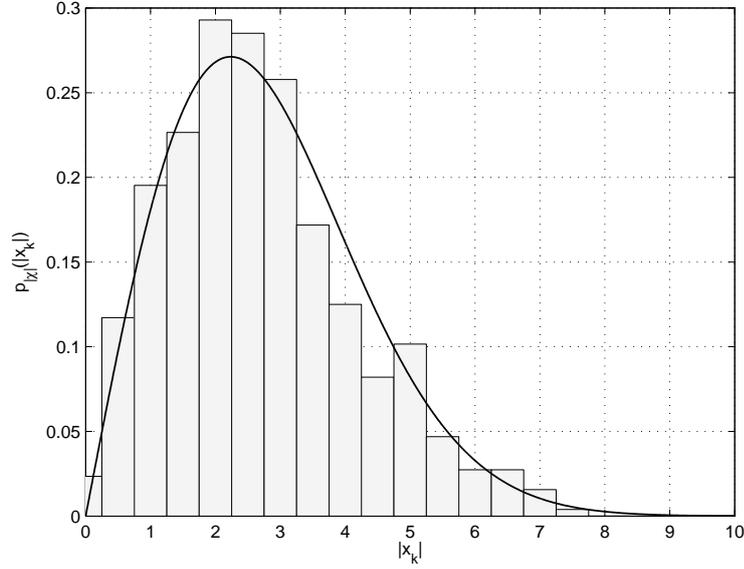


FIG. 3.7 – Densité de probabilité et histogramme comparés de l’enveloppe d’un signal OFDM pour  $N = 512$  sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM.

l’équation (2.28),  $\xi(t)$  est le signal en bande transposée. Si la fréquence porteuse  $f_p$  est supérieure à la bande passante du signal, on peut alors justifier l’approximation :

$$\max |x(t)|^2 \approx \max (\xi(t))^2 \quad (3.20)$$

On cherche maintenant à établir  $\mathbb{E}\{|\xi(t)|^2\}$  suivant la définition du PAPR donnée l’équation (3.19). On écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(\xi(t))^2\} &= \mathbb{E}\{|\Re\{x(t)e^{2j\pi f_p t}\}|^2\} \\ &= \mathbb{E}\{\Re\{x(t)\}^2 \cos^2(2\pi f_p t) + \Im\{x(t)\}^2 \sin^2(2\pi f_p t)\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En supposant uniquement l’emploi de constellations modulant les sous-porteuses de manière à ce que la puissance totale soit équitablement répartie sur les composantes en phase et en quadrature de  $x(t)$  telle que :

$$\mathbb{E}\{\Re\{x(t)\}^2\} = \mathbb{E}\{\Im\{x(t)\}^2\} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{|x(t)|^2\} \quad (3.22)$$

Il vient en remplaçant dans l’équation (3.21) que :

$$\mathbb{E}\{(\xi(t))^2\} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\{|x(t)|^2\} \quad (3.23)$$

On déduit alors du résultat de l’équation (3.23) que le PAPR d’un signal OFDM en bande transposée est équivalent à [125] :

$$PAPR(\xi(t)) = 2PAPR(x(t)) \quad (3.24)$$

La possibilité de grandes valeurs de PAPR impacte directement la complexité d'implantation de la chaîne de transmission. Puisque l'émission et la réception requièrent une numérisation du signal, comme le décrit le paragraphe 2.5, il est alors nécessaire de disposer d'une résolution suffisante des CAN et CNA pour l'échantillonnage des grandes amplitudes des pics du signal, ce qui réduit artificiellement le débit binaire maximum du système. Le second aspect est lié aux amplificateurs de puissance utilisés à l'émission. Comme montré au paragraphe 3.2, la forte amplitude des signaux OFDM force les amplificateurs de puissance à travailler dans leur zone de non-linéarité ou de saturation.

### 3.3.2 Analyse de l'évolution du PAPR

Les hauts niveaux de PAPR sont obtenus lorsque les sous-porteuses sont sommées localement de manière cohérente. Dans ce cas, le niveau maximum du signal OFDM peut atteindre  $N$  fois sa puissance moyenne. En pratique, un tel événement reste toutefois très improbable. Néanmoins, une connaissance précise de la probabilité d'apparition des pics en amplitude de l'enveloppe des signaux OFDM, que leur niveau soit modéré ou non, reste importante. Il devient possible en effet de caractériser le comportement du signal en fonction de différents paramètres de la transmission et d'évaluer l'efficacité d'un dispositif de réduction de PAPR. Ce paragraphe montre qu'il est théoriquement aisé, pour un signal OFDM, d'établir la probabilité de dépassement de son enveloppe à un seuil.

Soit  $A$  l'amplitude limite tolérée pour la variable aléatoire  $|\chi|$ , *i.e.* l'enveloppe d'un signal OFDM. À partir de l'équation (3.16), on établit alors que la probabilité de rester sous ce seuil est :

$$\begin{aligned} Pr(|x_k| \leq A) &= \int_0^A p_{|\chi|}(|x_k|) dx_k \\ Pr\left(\frac{|x_k|^2}{2\sigma_x^2} \leq \frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) &= 1 - e^{-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

On pose le rapport  $\gamma = \frac{A^2}{\sigma_x^2}$  comme le taux de dépassement relatif au seuil  $A$ , il vient ainsi le rapport :

$$TS = 10 \log_{10}(\gamma) \text{dB} \quad (3.26)$$

De l'équation (3.25), on établit que pour chaque échantillon du signal OFDM en bande de base, la probabilité de rester sous le seuil  $A$  pour un taux  $\gamma$  pour chaque échantillon  $|x_k|$  est :

$$Pr\left(\frac{|x_k|^2}{2\sigma_x^2} \leq \gamma\right) = 1 - e^{-\gamma}, \quad 0 \leq k < N \quad (3.27)$$

La probabilité de non-dépassement sur le signal entier est le produit des probabilités pour chaque échantillon et d'après les équations (3.19) et (3.27), il vient :

$$\begin{aligned} Pr(PAPR(\mathbf{x}) \leq \gamma) &= \prod_{k=0}^{N-1} (1 - e^{-\gamma}) \\ &= (1 - e^{-\gamma})^N \end{aligned} \quad (3.28)$$

DÉFINITION - La probabilité de dépassement en amplitude de l'enveloppe d'un signal OFDM de puissance  $2\sigma_x^2$  composé par  $N$  sous-porteuses à un seuil  $A$  est liée à son niveau de PAPR telle que le définit la fonction de répartition complémentaire :

$$Pr(PAPR(\mathbf{x}) > \gamma) = 1 - (1 - e^{-\gamma})^N \quad (3.29)$$

La figure 3.8 permet d'apprécier la probabilité d'apparition de forts niveaux de PAPR d'un signal OFDM à temps discret et en bande de base sachant le nombre de sous-porteuses constituantes. L'équation (3.29) théorique est confrontée aux résultats obtenus par simulation afin de confirmer sa bonne interprétation du phénomène. Comme le laisse présager le résultat théorique, la probabilité de forts niveaux de PAPR augmente rapidement avec le nombre de sous-porteuses utilisées.

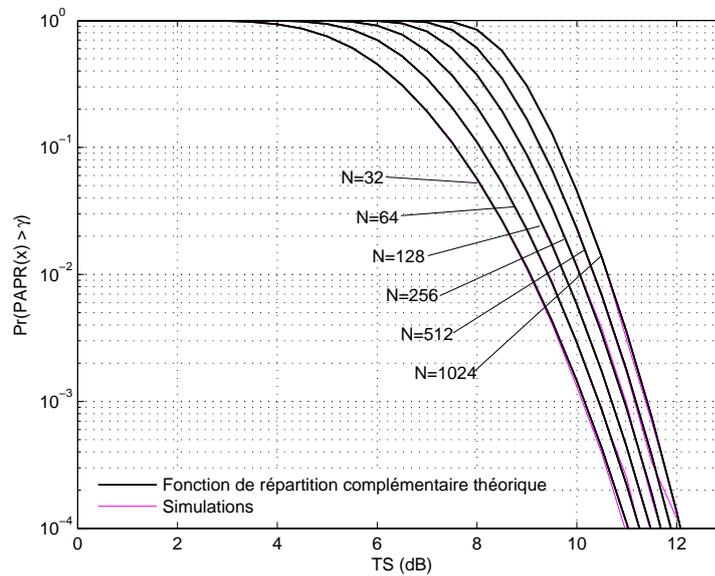


FIG. 3.8 – Fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR d'un signal OFDM composé de  $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$  sous-porteuses, équation (3.29). Comparaison avec les résultats obtenus par simulation.

### 3.3.3 Cas du PAPR des signaux OFDM sur-échantillonnés

La définition apportée par l'équation (3.29) est très largement considérée dans la littérature pour un signal OFDM discret à temps de Nyquist. Cependant, pour des signaux sur-échantillonnés, cette définition n'est plus valide et de nombreux travaux offrent une approximation plus fidèle de l'évolution du PAPR [122, 131, 136, 137]. Considérons qu'après sur-échantillonnage du signal OFDM discret composé de  $N$  échantillons  $x_k$  par un taux  $J \rightarrow \infty$ , il est obtenu le signal  $x(t)$  avec  $t \approx k/J$ . Une approximation très empirique du niveau de PAPR est obtenue d'après van Nee *et al.* dans [129] par :

$$Pr\left(PAPR(x(t)) > \gamma\right) \approx 1 - (1 - e^{-\gamma})^{2.8N} \quad (3.30)$$

Une formulation plus formelle est également développée par Dinur et Gusmao dans [42] qui proposent une borne maximale du PAPR comme :

$$Pr\left(PAPR(x(t)) > \gamma\right) \leq N \sqrt{\frac{\pi}{3}} \gamma e^{-\gamma} \quad (3.31)$$

Les différents travaux d'Ochiai *et al.* sur ce thème apportent aussi plusieurs résultats au travers de nombreuses contributions [97, 98, 99]. Notamment dans [99] qui propose la fonction de répartition complémentaire suivante :

$$Pr\left(PAPR(x(t)) > \gamma\right) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\gamma}}{\sqrt{\bar{\gamma}}e^{-\bar{\gamma}}}\right)^N \sqrt{\frac{\pi}{3}} \bar{\gamma} e^{-\bar{\gamma}} & \gamma > \bar{\gamma} \\ 0 & \gamma \leq \bar{\gamma} \end{cases} \quad (3.32)$$

$\bar{\gamma}$  est donné comme le taux de dépassement de  $x(t)$  pour  $\bar{\gamma} = \sqrt{\pi}$  [99]. Pour des grandes valeurs de niveau de PAPR, les auteurs donnent une approximation de l'équation (3.32) :

$$Pr\left(PAPR(x(t)) > \gamma\right) \approx 1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{3}} \gamma N e^{-\gamma}} \quad (3.33)$$

La figure 3.9 montre la limitation de l'équation (3.29) pour modéliser la probabilité d'apparition de forts niveaux de PAPR pour des signaux OFDM sur-échantillonnés. Il est évident que le modèle utilisé à  $J = 1$  sous-estime le PAPR des signaux à temps continu. On remarque également que pour des valeurs de  $J > 4$ , la probabilité de dépassement de PAPR ne présente plus d'évolution significative. Nous utiliserons donc un sur-échantillonnage de  $J = 4$  pour approximer des signaux OFDM à temps continu.

La figure 3.10 offre quant à elle une comparaison des différentes approximations vues précédemment aux équations (3.30), (3.31) et (3.32) pour des signaux OFDM à 64 sous-porteuses. Ces modélisations sont confrontées aux résultats obtenus par simulation considérant un facteur de sur-échantillonnage  $J = 4$  afin de modéliser le signal OFDM en temps continu  $x(t)$ .

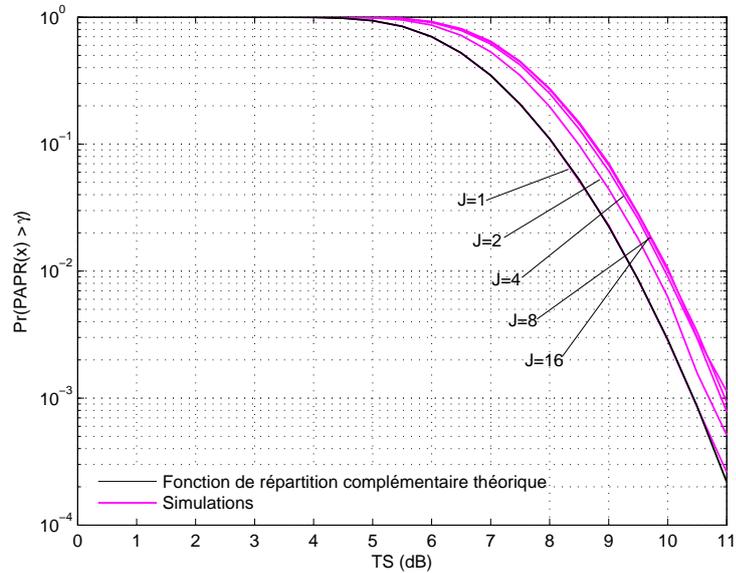


FIG. 3.9 – Illustration de la sous-estimation de la fonction de répartition complémentaire théorique du niveau de PAPR donnée à l'équation (3.29) dans le cas de signaux OFDM à  $N = 64$  sous-porteuses sur-échantillonnées par un facteur  $J = 1, 2, 4, 8, 16$ .

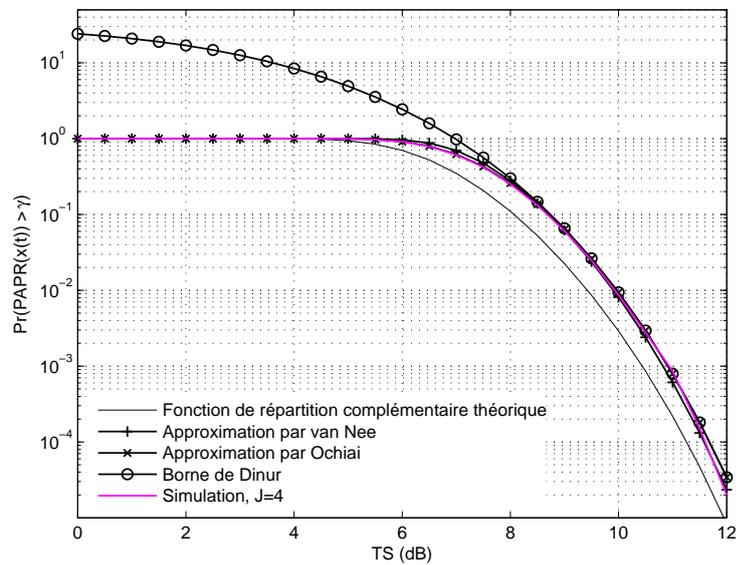


FIG. 3.10 – Comparaison des approximations théoriques de la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR par van Nee *et al.* (3.30), Ochiai *et al.* (3.32), la borne de Dinur (3.31) et par simulation pour signaux OFDM à temps continu,  $N = 64$  sous-porteuses.

## 3.4 Techniques de limitation du PAPR à l'émetteur

### 3.4.1 Introduction

Les non-linéarités dues aux forts niveaux de PAPR sont la source d'importantes dégradations de la performance d'une transmission OFDM. Nous avons montré, au paragraphe précédent, que le PAPR d'un signal OFDM, qui s'avère être une variable particulièrement utile pour caractériser sa dynamique, montre une fluctuation importante de son enveloppe qui tend à s'accroître avec l'augmentation du nombre de sous-porteuses. L'apparition de pics d'amplitude conséquente est alors un problème au regard des caractéristiques non-linéaires des amplificateurs. En effet, leur fonctionnement dans la zone de saturation fait apparaître à la fois des dégradations dans la bande du signal diminuant alors la performance en TEB mais produit également un bruit hors-bande non-négligeable qui nuit aux émissions radio-fréquence voisines, comme l'illustre la 3.11. À la réception, l'amplification non-linéaire résulte donc en la rotation et la dispersion des symboles de modulation, le diagramme en constellation de la figure 3.12 révèle ces effets.

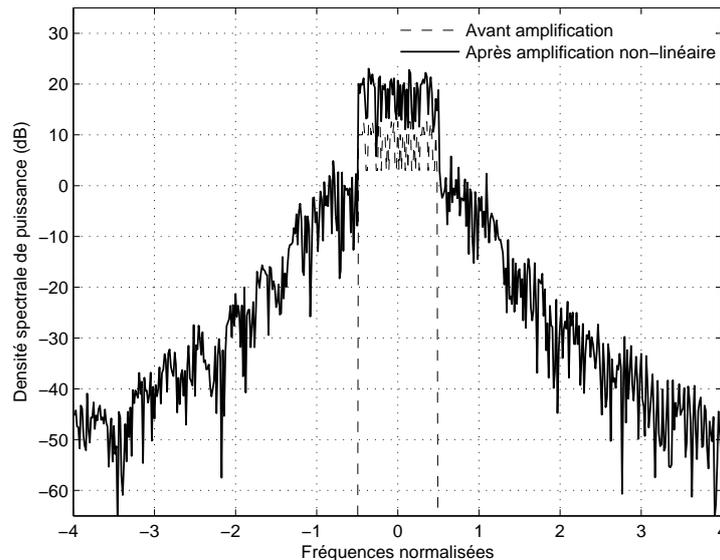


FIG. 3.11 – Densité spectrales de puissance comparées avant et après amplification non-linéaire mettant en évidence les produits d'intermodulation hors-bande. Le signal OFDM est modulé par une constellation 16-QAM,  $N = 64$  porteuses, référence à la figure 3.12. Simulation selon le modèle de Saleh, équation (3.4).

En admettant qu'il soit possible de s'accommoder du bruit hors-bande par filtrage, il en va autrement pour le bruit dans la bande du signal. Ce paragraphe présente les techniques utilisées à l'émetteur qui, potentiellement, permettent au signal OFDM de maintenir son niveau de PAPR au dessous du seuil de saturation de l'amplificateur. Ces méthodes ont donc toute l'avantage commun de préserver un rendement d'amplification acceptable.

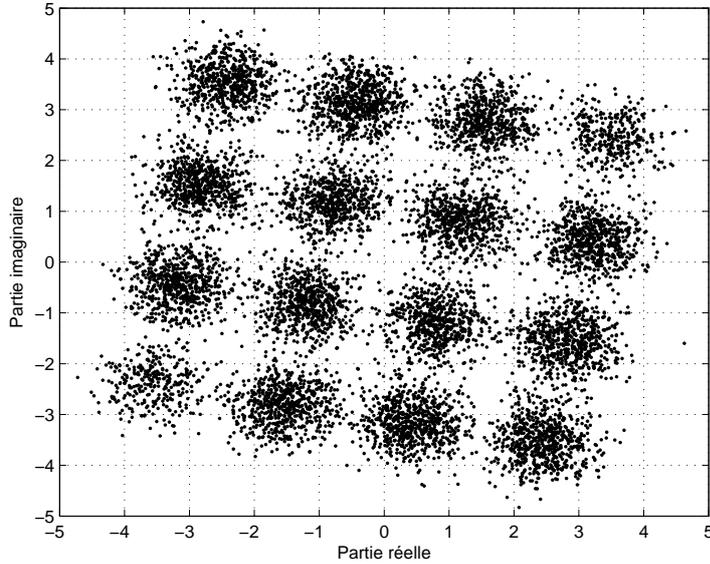


FIG. 3.12 – Distortion des symboles d’une constellation 16-QAM après amplification non-linéaire. Simulation selon le modèle de Saleh, équation (3.4).

Si le clipping [88] est la méthode de réduction du PAPR la plus triviale, elle provoque cependant des distorsions non négligeables sur le signal OFDM. Les autres techniques citées (codage [75], selective mapping [10], partial transmit sequence [90], manipulation de sous-porteuses [125]) sont exemptes de ces défauts. En contrepartie, réduisent le débit de la transmission ou nécessitent des procédés spécifiques en réception qui requièrent, dans certains cas, la connaissance d’un paramètre d’optimisation utilisé à l’émission. Ces méthodes doivent donc être comparées, considérant leur complexité et la perte de performance qu’elles engendrent sur la transmission [59].

### 3.4.2 Limitation d’amplitude du signal OFDM

Le *clipping* est certainement la plus ancienne des techniques de réduction de PAPR [56, 88, 101]. De plus, son approche est de plus particulièrement intuitive. La contrainte n’est pas la minimisation directe du PAPR mais la diminution de l’amplitude des pics du signal. En ce sens, leur écrêtement est la solution la plus intuitive.

La dynamique du signal OFDM dans le domaine temporel est alors réduite selon un seuil représentant le niveau maximum permissible pour son enveloppe. En notant ce seuil  $A$  et  $\phi(x_k)$  la phase de l’échantillon  $k$  du signal  $\mathbf{x}$ , le signal résultant est :

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} |x_k|e^{j\phi(x_k)} & \text{si } |x_k| \leq A \\ Ae^{j\phi(x_k)} & \text{si } |x_k| > A \end{cases}, \quad 0 \leq k < N \quad (3.34)$$

La figure 3.13 illustre la fonction de transfert liée à l’équation (3.34).

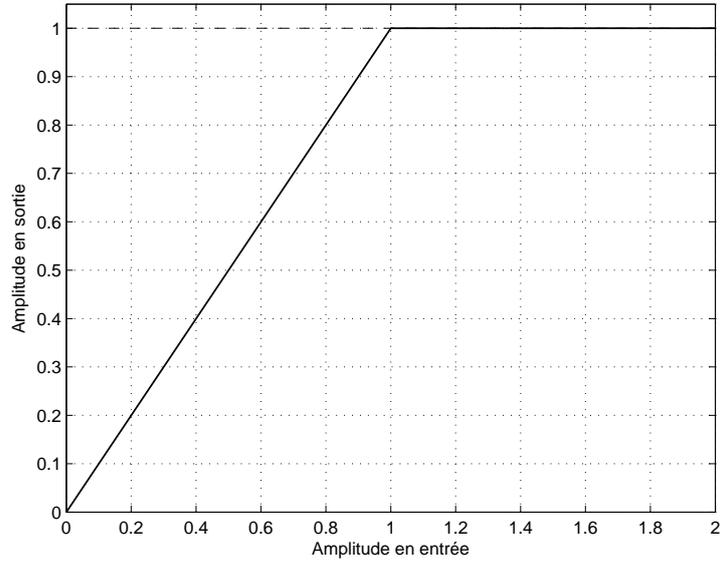


FIG. 3.13 – Fonction de transfert de la méthode par clipping pour un seuil d'écrêtement  $A = 1$ .

Si la méthode est simple, les distorsions subies par le signal entraînent des dégradations sur la performance du système ainsi qu'un bruit hors-bande parasite. Un filtrage par sur-échantillonnage du signal OFDM en bande de base [98] permet néanmoins un filtrage réduisant le bruit hors-bande. Cependant, il augmente le niveau dans la bande du signal en provoquant un effet de *peak-regrowth* qui relève artificiellement le niveau de PAPR du signal [83, 84]. Une méthode à base de répétition du clipping a été proposée pour compenser cet écueil [6]. Mais les dégradations successives subies par le signal engendrent des performances particulièrement mauvaises.

Le clipping<sup>1</sup> a donc l'avantage d'être simple à mettre en œuvre puisqu'il autorise une implantation directement numérique de son action sans surcharge de la complexité de l'émetteur. Les inconvénients principaux sont cependant assez handicapants puisque les non-linéarités dégradent fortement la performance de la transmission tandis que le *peak-regrowth* dû au filtrage du bruit hors-bande tend à relever le niveau de PAPR du signal écrêté.

### 3.4.3 Codage

L'idée d'utiliser le codage de canal comme méthode de réduction du PAPR a été initialement proposée par Jones *et al.* [75] et consiste à sélectionner les mots de codes qui minimisent le niveau de PAPR. Considérant un ensemble de possible de  $Q$  symboles OFDM en fréquence  $\mathbf{X}_q$ , il existe alors dans cet ensemble des symboles qui génèrent un signal en temps  $\mathbf{x}_q$  montrant un PAPR important. Réciproquement,

<sup>1</sup>Une étude détaillée des effets du clipping sur les signaux OFDM est dressée au chapitre 4.

certains symboles montrent un PAPR faible ou modéré. L'idée est d'utiliser un code de canal de type code bloc et de ne transmettre que les symboles OFDM ayant un PAPR faible pour le mot de code constitué. De ce fait, la technique nécessite l'estimation exhaustive de tous les niveaux de PAPR résultant des mots de codes possibles.

Une approche consiste à utiliser des codes de Reed-Muller générant des séquences de Golay comme stratégie de codage canal [34]. L'avantage de cette approche en OFDM est qu'il a été démontré que les séquences de Golay produisent des signaux dont le PAPR est limité à 3 dB [107] et qu'associé aux codes de Reed-Muller la bonne performance de la transmission est assurée avec un décodage canal simple. Malgré de nombreuses améliorations apportées à la méthode [26, 35, 104, 105, 114], sa complexité et la nécessité d'utiliser un nombre relativement faible de sous-porteuses afin de conserver un rendement de code acceptable font que son utilité pratique reste limitée.

Dans [74], Jones *et al.* proposent de modifier le code par application d'une pondération binaire sur tout ou partie du mot de code afin de réduire le PAPR du symbole correspondant. La méthode est relativement simple pour une modulation bipodale de type BPSK mais s'avère bien plus complexe pour des constellations d'ordres supérieurs.

La diminution du PAPR par codage est une méthode particulièrement développée et qui utilise des solutions de codage canal classiques. Le principal inconvénient est lié au rendement de la transmission qui chute considérablement et à la nécessité de transmettre au récepteur une information utile au décodage. Enfin, le PAPR espéré peut difficilement être inférieur à 3 dB.

#### 3.4.4 Selected mapping

La technique *selected mapping* (SLM) proposée dans [10] génère différents messages candidats représentant la même information mais présentant différents niveaux de PAPR. L'approche tire partie du fait que les signaux OFDM soient particulièrement sensibles au changement de phase dans le domaine fréquentiel. La réduction du PAPR est obtenue en appliquant indépendamment sur chaque sous-porteuse une modification de phase et en sélectionnant ensuite pour chaque combinaison le symbole obtenu montrant le PAPR le plus faible.

D'après l'illustration de la technique apportée par la figure 3.14, le symbole OFDM dans le domaine fréquentiel est parallélisé en  $Q$  voies. Sur chacune d'elles, une information de phase est apportée à la trame telle que :

$$\tilde{X}_{q,n} = X_{q,n} \Phi_{q,n}, \quad 0 \leq n < N \quad (3.35)$$

L'information de modification de phase est portée par :

$$\Phi_{q,n} = \{e^{\phi_{q,0}}, e^{\phi_{q,1}}, \dots, e^{\phi_{q,N-1}}\}, \quad 0 \leq n < N$$

Les signaux candidats sont alors triés et sélectionnés selon le critère :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_{0 \leq q < Q} (PAPR(\tilde{\mathbf{x}}_q)) \quad (3.36)$$

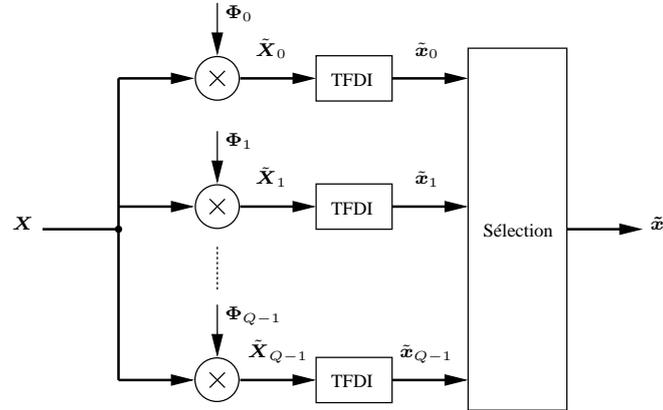


FIG. 3.14 – Synoptique de l'émetteur SML.

En réception, l'opération inverse de l'équation (3.35) est effectuée, nécessitant alors la transmission sans erreur d'une information complémentaire indiquant la modification de phase. Cet inconvénient a néanmoins trouvé solution dans [14]. Pourtant, le niveau de PAPR atteignable dépend du nombre de séquences de phase utilisées et donc autant d'opérations de TFDI, ce qui rend délicat la diminution effective du PAPR.

### 3.4.5 Entrelacement

L'entrelacement est un principe bien connu en codage de canal et permet de rendre indépendants les symboles binaires issus d'un même mot de code. Ce principe, appelé *adaptive symbole selection* (ASS), est ici transposé sur les sous-porteuses constituant le signal OFDM ou sur les bits de codes eux-même [44, 62, 72]. Le symbole original OFDM est alors parallélisé sur  $Q$  voies qui, pour chacune d'elles, utilise un entrelaceur  $\pi^q$  mélangeant l'ordre des sous-porteuses.  $Q$  symboles entrelacés sont alors obtenus tels que  $\tilde{X}_q^{\pi^q}$ . La figure 3.15 illustre la technique, s'apparentant fortement au SLM.

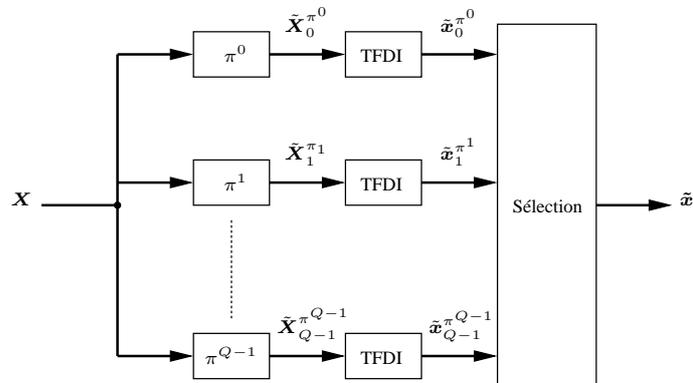


FIG. 3.15 – Diagramme de la méthode par entrelacement des sous-porteuses.

L'avantage principal de la technique est la simplicité du principe mais le niveau de PAPR atteignable est dépendant du nombre d'entrelaceurs. Aussi, il est nécessaire de transmettre une information sur l'entrelaceur candidat choisi et l'utilisation de nombreuses opérations de TFDI.

### 3.4.6 Partial transmit sequence

Dans la méthode *partial transmit sequence* (PTS) [90], l'idée est de diminuer le PAPR en divisant les  $N$  sous-porteuses en  $Q = N/D$  groupes de taille réduite  $D$ . Les  $Q$  séquences obtenues  $\mathbf{X}_q$  sont constituées telle sorte à ce que  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{Q-1}\}$ . La taille réduite de chaque séquence laisse entrevoir la possibilité d'un niveau de PAPR relativement faible. La phase des sous-porteuses de chaque groupe  $Q$  est ensuite modifié par un facteur  $e^{j\phi_q}$  où  $\phi_q \in [0, 2\pi]$ . L'information de phase est alors constituée comme  $\Phi = \{e^{j\phi_0}, e^{j\phi_1}, \dots, e^{j\phi_{Q-1}}\}$ . Une opération de TFDI de  $N$  points est effectuée sur chaque séquence  $\mathbf{X}_q e^{j\phi_q}$  donnant respectivement un signal  $\tilde{x}_q$ . La composition du signal dans le domaine temporel est obtenu par :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{q=0}^{Q-1} \mathcal{F}_N^{-1}\{\mathbf{X}_q\} e^{j\phi_q} \quad (3.37)$$

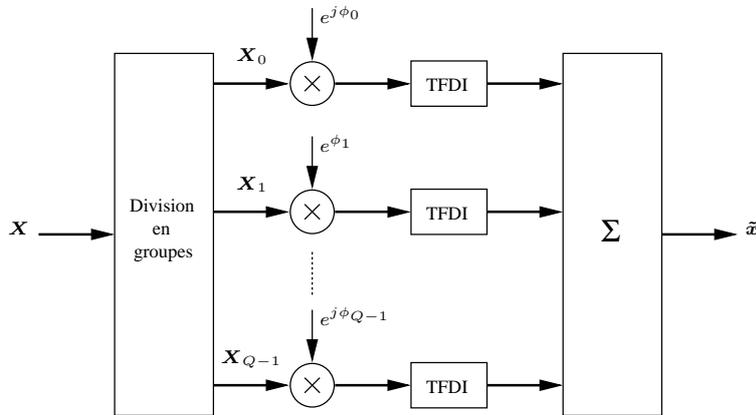


FIG. 3.16 – Synoptique de l'émetteur PTS.

Le synoptique de la méthode est présenté en figure 3.16. La recherche de l'information de phase  $\phi$  est effectuée sous la contrainte du niveau de PAPR de  $\tilde{\mathbf{x}}$ . En général, la sélection des facteurs de phase est limitée à un nombre fini d'éléments afin de restreindre la complexité de la méthode. Une condition d'arrêt simple, et qui présente l'avantage d'assurer un niveau de PAPR défini, a été alors proposée dans [71]. D'autres méthodes ont également été étudiées afin réduire le nombre d'itérations [29, 58].

La réduction efficace du PAPR est directement lié à la taille des groupes de sous-porteuses lors de la division de la trame et aux facteurs de phase possibles. La gestion de ces deux paramètres augmente d'autant plus le nombre d'itérations

faisant converger le PAPR vers de faibles niveaux. Aussi, l'inversion de la méthode nécessite la transmission de l'information au récepteur.

### 3.4.7 Manipulation de sous-porteuses

Les méthodes *tone reservation* (TR) et *tone injection* (TI) sont basées la modification des sous-porteuses. Elles ont été proposées d'après le travail de thèse de Tellado [125] et ont fait l'objet de multiples améliorations et optimisations. Le principal intérêt de ces techniques est la conservation des performances de la transmission en ce qui concerne le taux d'erreur binaire sans sacrifier l'efficacité spectrale.

#### 3.4.7.1 Tone reservation

L'objectif de cette technique est de déterminer une séquence dans le domaine temporel qui, par sommation avec le signal OFDM original, limitera le PAPR total.

Considérons les  $N$  sous-porteuses fréquentielles en supposant que dans celles-ci un nombre de  $Q$  soient réservées par un jeu d'indices  $\mathbf{q}^R = \{q_0^R, q_1^R, \dots, q_{Q-1}^R\}$  avec  $q_{Q-1}^R \leq N$ . Ces dernières forment un ensemble de symboles  $\mathbf{C}$  en fréquence. En choisissant judicieusement l'amplitude et la phase ces sous-porteuses, on peut espérer minimiser le PAPR par [125] :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \text{TFDI}_N\{\mathbf{X} + \mathbf{C}\} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{c}\end{aligned}\tag{3.38}$$

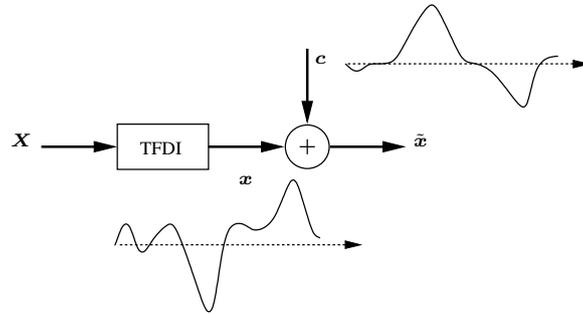


FIG. 3.17 – Technique TR par sommation d'un signal de correction.

En réception, après démodulation du signal par TFD, il suffit de supprimer les sous-porteuses aux positions indicées par  $\mathbf{q}^R$  pour recouvrer le symbole émis.

Si cette méthode est conceptuellement simple, elle nécessite la recherche optimale des sous-porteuses  $\mathbf{C}$  minimisant le PAPR. Divers algorithmes sous-optimaux de complexité réduite ont cependant été proposés, notamment dans [41, 57, 79]. Les principaux avantages de la technique TR sont qu'elle ne nuit pas à l'efficacité spectrale de l'OFDM tout en préservant la performance en quant au TEB de la transmission. Enfin, son dernier point fort est qu'il n'est pas nécessaire de transmettre une information d'inversion au récepteur. En contrepartie, la réservation de sous-porteuses entraîne inévitablement une perte de débit.

### 3.4.7.2 Tone injection

À la différence de la technique *tone reservation*, la méthode par *tone injection* (TI) ne consiste pas à agir directement sur l'enveloppe du signal par modification des sous-porteuses. Ici, c'est la topologie même de la constellation modulant les sous-porteuses qui est manipulée. La constellation ainsi modifiée est qualifiée d'étendue.

Soient  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_{2^M-1}\}$  les points d'une constellation complexe. A chaque symbole  $S_m$ ,  $m \in \{0, \dots, 2^M - 1\}$  est associée une zone de décision qui est dépendante de la distance  $q$  entre chacun d'eux. En choisissant d'étendre la constellation à un nouveau symbole ayant une distance  $Q > q$  de son symbole d'origine, il est démontré dans [125] que la probabilité d'erreur associée à la constellation étendue ainsi constituée reste inchangée. La décision sur le symbole est alors établie en connaissance de la distance  $Q$  choisie.

La figure 3.18 montre différentes modifications possibles d'un point d'une constellation 16-QAM respectant la condition de distance imposée par  $Q > q$ . Pour une minimisation optimale du PAPR, tous les points respectant la distance  $Q$  doivent être envisagés ce qui mène à une complexité importante. Un algorithme simplifié a cependant été présenté dans [125]. Enfin, la recherche des nouveaux symboles peut considérablement modifier l'énergie de la modulation, ce qui altère également l'énergie moyenne allouée à chaque bit. Les symboles candidats doivent donc être choisis en tenant compte de cet inconvénient. L'avantage certain est que le TEB de la transmission est préservé sans réduction du débit binaire.

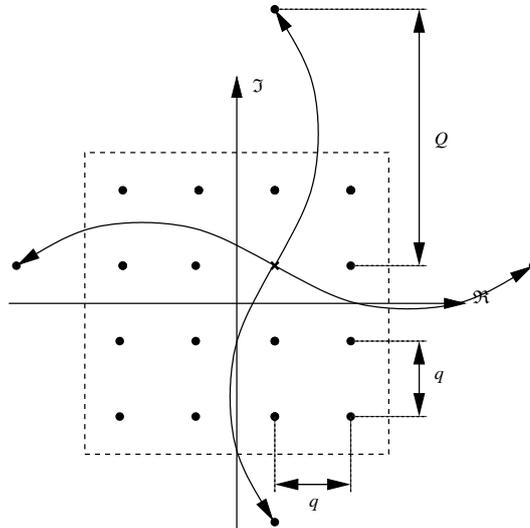


FIG. 3.18 – Illustration de la méthode TI par constellation étendue : exemple sur une 16-QAM et quatre projections candidates pour un symbole de la constellation.

### 3.4.8 Active constellation extension

La technique *active constellation extension* (ACE) proposée par [80] est une méthode similaire à la TI citée au paragraphe précédent. En effet, les points externes

de la constellation sont étendus dynamiquement afin de réduire le niveau de PAPR. Comme le montre la figure 3.19, cette méthode est adaptée pour des modulations de type carrées de par leur topologie.

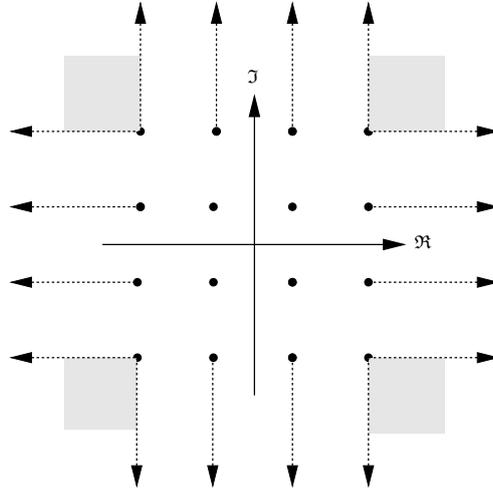


FIG. 3.19 – Réduction du PAPR par méthode ACE : exemple sur le diagramme en constellation d’une modulation 16-QAM.

La recherche sous-optimale de la constellation étendue est proposée dans [80] et une méthode combinée à l’approche par *tone injection* est également proposée comme extension de la méthode dans [79].

Si la méthode ACE préserve le TEB de la transmission et ne nécessite pas le passage d’une information au récepteur, la complexité de la recherche de la constellation étendue optimale est sans aucun doute l’inconvénient le plus fort. Aussi, la technique est uniquement applicable pour des constellations PSK et QAM. En outre, l’énergie moyenne allouée pour un bit est modifiée à l’instar de l’approche TI.

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre pose le problème des forts niveaux de PAPR auxquels est susceptible l’enveloppe des signaux OFDM. Hormis le surcroît de complexité que le phénomène engendre à l’émetteur, la principale difficulté réside en l’impossibilité d’une amplification du signal à haut rendement, due à la caractéristique des amplificateurs de puissance utilisés en télécommunication. Le paragraphe 3.2 s’attache à rappeler leurs principales modélisations.

L’analyse de la statistique des signaux OFDM prouve que leur niveau de PAPR est un phénomène qui peut être expliqué formellement et qu’il dépend essentiellement du nombre de sous-porteuses. L’évolution du PAPR est ainsi étudiée au paragraphe 3.3 et démontre la forte probabilité d’apparition de pics d’amplitude élevée sur l’enveloppe des signaux OFDM.

Finalement, le paragraphe 3.4 rappelle les principales techniques proposées dans la littérature qui, par manipulations sur le signal OFDM, permettent d’en réduire

le PAPR à l'émission. La plupart de ces approches sont basées sur des principes itératifs qui opèrent sous contraintes faisant également office de condition d'arrêt. La majorité d'entre elles, hormis le clipping et les approches de manipulation des sous-porteuses TR et TI, nécessitent la transmission parfaite d'une information vers le récepteur qui permet de retrouver le signal original. En ce sens, elles sont strictement dépendantes de la capacité du récepteur à inverser les opérations de l'émetteur. Les techniques par manipulation des sous-porteuses ont quant à elles pour avantage de préserver l'efficacité de la transmission sans partage d'une information commune à l'émetteur et au récepteur. Cependant, l'approche TI réduit l'efficacité spectrale de l'OFDM en réservant des sous-porteuses tandis que la méthode TR modifie l'énergie allouée aux signaux de la modulation numérique. Enfin, toutes ces méthodes tendent à augmenter considérablement la complexité de l'émetteur et nécessitent des dispositifs adaptés à la réception.

Le clipping est exempt de toutes ces considérations. En effet, la technique demeure très peu complexe et permet d'atteindre de faibles niveaux de PAPR. En outre, elle est rétro-compatible puisque son implantation peut-être gérée numériquement à l'émetteur. En contrepartie, la non-linéarité de la fonction de clipping entraîne de fortes dégradations de la performance de la transmission.

Le chapitre suivant propose d'analyser les effets du clipping et les moyens de compensation envisageables du côté récepteur.

# Systèmes OFDM soumis à l'écrêtement à l'émission et compensation en réception

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>53</b>
<b>4.2</b>	<b>Caractérisation des distorsions non-linéaires liées au clipping</b>	<b>54</b>
4.2.1	Théorème de Bussgang	55
4.2.2	Extension du théorème de Bussgang	55
4.2.3	Statistique des signaux OFDM avec clipping	56
4.2.4	Effets du clipping sur le spectre des signaux OFDM	59
4.2.5	PAPR des signaux OFDM soumis au clipping	62
<b>4.3</b>	<b>Influence du bruit de clipping sur la performance</b>	<b>64</b>
4.3.1	Hypothèse de gaussiannité du bruit de clipping	64
4.3.2	Performance quant au taux d'erreur	65
4.3.3	Influence du clipping sur la capacité du canal de transmission	68
4.3.4	Conclusion	72
<b>4.4</b>	<b>Récepteurs itératifs pour les transmissions OFDM avec clipping</b>	<b>73</b>
4.4.1	Introduction	73
4.4.2	Reconstruction de signal par technique DAR	74
4.4.3	Estimation et annulation directe du bruit de clipping	78
4.4.4	Récepteur itératif à inférence bayésienne SEM-DA	80
4.4.5	Détection sous-optimale de trame	81
4.4.6	Inversion itérative de la fonction de clipping	82
4.4.7	Turbo-égalisation adaptée au clipping	82
<b>4.5</b>	<b>Discussion et conclusion</b>	<b>84</b>

---

## 4.1 Introduction

La réduction du niveau de PAPR des signaux OFDM à l'émission est une technique très largement reconnue. Le paragraphe 3.4 en rappelle les principales méthodes. Le défaut majeur et inhérent à toutes ces techniques et qu'elles nécessitent une surcharge, plus ou moins prononcée, d'opérations à l'émetteur ou au récepteur, voire des deux. De plus, la plupart de ces techniques nécessitent la transmission

parfaite et continue d'une information permettant d'inverser les manipulations effectuées à l'émission.

Dans le suite de ce manuscrit, nous portons uniquement attention à la méthode du clipping, présentée au paragraphe 3.4.2. Approche simple à mettre en œuvre, elle utilise une prédistorsion stricte du signal d'émission dont le seuil d'écrêtement est déterminé avant la limite de saturation de l'amplificateur de puissance. L'avantage du clipping réside en la possibilité d'une implantation peu coûteuse, puisqu'elle peut être réalisée complètement numériquement sans surcroît de complexité. Malheureusement, limiter délibérément l'amplitude d'un signal mène à des dégradations néfastes pour la qualité de la communication et le clipping montre alors un comportement très similaire à un amplificateur opérant dans sa zone de saturation. Néanmoins, la différence majeure entre l'approche par clipping et une amplification non-linéaire assumée des signaux est qu'elle permet d'assurer à l'amplificateur de puissance de conserver un rendement acceptable car il est de fait toujours utilisé dans sa zone linéaire.

La contrepartie de cette simplicité coté émetteur se traduit inévitablement par un système adapté et complexe en réception. En effet, et contrairement aux autres approches citées au paragraphe 3.4, le comportement non-linéaire de la fonction de clipping n'autorise pas le récepteur à inverser directement ce traitement par la connaissance d'une information partagée avec l'émetteur. Le clipping requiert donc une approche particulière en réception orientée vers la compensation des effets accompagnant les non-linéarités subies par le signal à l'émission.

Dans ce chapitre, nous rappellerons en premier lieu les propriétés des signaux OFDM soumis au clipping ainsi que leur modélisation par le théorème de Bussgang. Leur statistique ainsi que leur sensibilité au PAPR seront étudiées aux paragraphes 4.2.3 et 4.2.5. L'influence du sur-échantillonnage des signaux, en vue de filtrer le bruit hors-bande, sera également montrée au paragraphe 4.2.4 et analysée par l'étude de la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR. Enfin, nous proposerons d'établir la performance théorique des systèmes OFDM avec clipping en ce qui concerne le taux d'erreur de la transmission mais également la capacité de canal, aux paragraphes 4.3.2 et 4.3.3.

Le paragraphe 4.4 introduira quant à lui le concept de correction de clipping au récepteur. Nous proposerons donc un état de l'art des techniques les plus représentatives de la littérature. Nous présenterons pour chaque méthode les détails de l'algorithme en s'attachant à respecter un même formalisme et établirons leur complexité ainsi qu'une discussion sur leurs avantages et inconvénients respectifs.

## 4.2 Caractérisation des distorsions non-linéaires liées au clipping

Le clipping est un procédé non-linéaire sans-mémoire dont le comportement est fortement lié aux amplificateurs de puissance. Malgré le comportement très rude de la fonction de clipping, établie à l'équation (3.34), la caractérisation des non-linéarités induites peut cependant être abordée d'une manière analytiquement rigoureuse. Le fait que les composantes en phase et en quadrature d'un signal OFDM

soient distribuées selon l'hypothèse d'une loi de normale aide grandement à la modélisation des transmissions OFDM soumises au clipping.

#### 4.2.1 Théorème de Bussgang

THÉORÈME - Soit  $g(\cdot)$  une fonction non-linéaire sans-mémoire provoquant une distorsion sur l'amplitude d'un signal d'entrée réel  $x(t)$  dont les échantillons successifs sont distribués selon une loi normale. La sortie de ce système est telle que :

$$\tilde{x}(t) = g(x(t)) \quad (4.1)$$

Le théorème de Bussgang [18], [103] §11.3, montre que l'inter-corrélation des signaux d'entrée et de sortie est liée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x\tilde{x}}(\tau) &= \mathbb{E}\{x(t)\tilde{x}(t+\tau)\} \\ &= \alpha\mathcal{R}_{xx}(\tau) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Un corollaire tend alors à modéliser linéairement la fonction  $g(\cdot)$ , telle que de l'équation (4.2) il vienne :

$$\tilde{x}(t) = \alpha x(t) + d(t) \quad (4.3)$$

Dans l'équation (4.3),  $\alpha$  est défini comme une constante et, quelque soit  $\tau$ , on a :

$$\alpha = \frac{\mathcal{R}_{x\tilde{x}}(\tau)}{\mathcal{R}_{xx}(\tau)} \quad (4.4)$$

#### 4.2.2 Extension du théorème de Bussgang

Considérons à présent que le signal d'entrée, jusqu'ici supposé comme quelconque mais distribué selon une loi normale lors de l'énonciation du théorème de Bussgang, comme un signal OFDM. Suivant cette hypothèse, Dardari *et al.* proposent dans [33] une étude très détaillée des effets d'une fonction non-linéaire sur ce type de signal et prouvent que la décomposition donnée par le corollaire de l'équation (4.3) est valide et que le bruit de distorsion  $d(t)$  est décorrélé de  $x(t)$ . Ils montrent également que le coefficient d'atténuation  $\alpha$  est en fait complexe lorsque le signal OFDM utilise un signal de mise en forme à bande limitée mais reste indépendant du temps au récepteur, en conséquence de la non-stationnarité du signal en entrée de la non-linéarité.

Dans le cas du clipping de l'enveloppe d'un signal OFDM avant sa mise en forme, il est possible de recourir à une extension du théorème de Bussgang [33] proposée par Dardari *et al.* dans le cas particulier de signaux OFDM dont la mise en forme est rectangulaire. Il est de fait établi que la non-linéarité affecte le signal en bande de base.

THÉORÈME - Extension du théorème de Busgang aux signaux OFDM avec clipping.

Soit un signal OFDM en bande de base, dont les échantillons sont distribués selon une loi normale complexe, à l'entrée d'un dispositif de distorsion d'amplitude non-linéaire et sans-mémoire  $\mathbf{g}(\cdot)$ . Sous l'hypothèse d'un niveau d'amplitude maximum  $A$  pour le signal de sortie, la fonction de clipping est alors :

$$\tilde{x}_k = \mathbf{g}(x_k) = \begin{cases} |x_k|e^{j\phi(x_k)} & \text{si } |x_k| \leq A \\ Ae^{j\phi(x_k)} & \text{si } |x_k| > A \end{cases}, \quad 0 \leq k < N \quad (4.5)$$

En référence à l'équation (4.1), il est possible de d'écrire que :

$$\tilde{x}_k = \alpha x_k + d_k, \quad 0 \leq k < N \quad (4.6)$$

D'après [33], le coefficient d'atténuation  $\alpha$  est, dans ce cas de figure, réel et son expression, identique au cas d'une fonction non-linéaire disposant d'un signal stationnaire à son entrée [113], s'écrit en connaissance du niveau maximum  $A$  du signal de sortie comme [33, 98, 113] :

$$\alpha = 1 - e^{-\gamma} + \frac{1}{2}\sqrt{\pi\gamma}Q(\sqrt{\gamma}) \quad (4.7)$$

À l'équation (4.7), le rapport  $\gamma$  est défini identiquement à (3.26) comme le taux de dépassement au seuil  $A$  :

$$\gamma = \frac{A^2}{2\sigma_x^2} \quad (4.8)$$

Le niveau de clipping est alors ajusté en fonction du seuil en amplitude  $A$  et de la puissance du signal. Considérant l'équation (4.8), il est donné comme :

$$TC = 10 \log_{10}\left(\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) \text{ dB} \quad (4.9)$$

### 4.2.3 Statistique des signaux OFDM avec clipping

D'après l'extension du théorème de Busgang évoquée précédemment, l'influence du clipping sur les signaux OFDM en bande de base est donc réduite à un affaiblissement homogène  $\alpha$  sur l'ensemble des échantillons du signal et à l'ajout d'un bruit de distorsion. L'évolution de l'affaiblissement par rapport au taux de clipping, définie par l'équation (4.7), est montrée à la figure 4.1. On remarque alors qu'il décroît très rapidement à mesure que le rapport de dépassement augmente et devient négligeable au-delà d'un taux de clipping de 3 dB.

L'équation (4.6) fait également apparaître un bruit de distortion qui affecte le signal OFDM. D'après [33], il est aisé de montrer que le bruit de clipping est décorrélié du signal d'entrée comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{xd}(\tau) &= \mathbb{E}\{x_k^* d_{k+\tau}\} \\ &= \mathbb{E}\{x_k^* (\tilde{x}_{k+\tau} - \alpha x_{k+\tau})\} \\ &= \mathcal{R}_{x\tilde{x}}(\tau) - \alpha \mathcal{R}_{xx}(\tau) \end{aligned} \quad (4.10)$$

DÉFINITION - La décorrélation du bruit de clipping et du signal d'entrée est donc démontrée en remplaçant l'équation (4.4) dans l'équation (4.10) :

$$\mathcal{R}_{xd}(\tau) = 0, \quad \tau \neq 0 \quad (4.11)$$

D'après le théorème de Bussgang énoncé à l'équation (4.2), Dardari *et al.* [33] ainsi que Ochiai et Imai [98] garantissent, en utilisant l'équation (4.6) et le caractère sans-mémoire du clipping, que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{d}\} &= \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}\} - \alpha\mathbb{E}\{\mathbf{x}\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

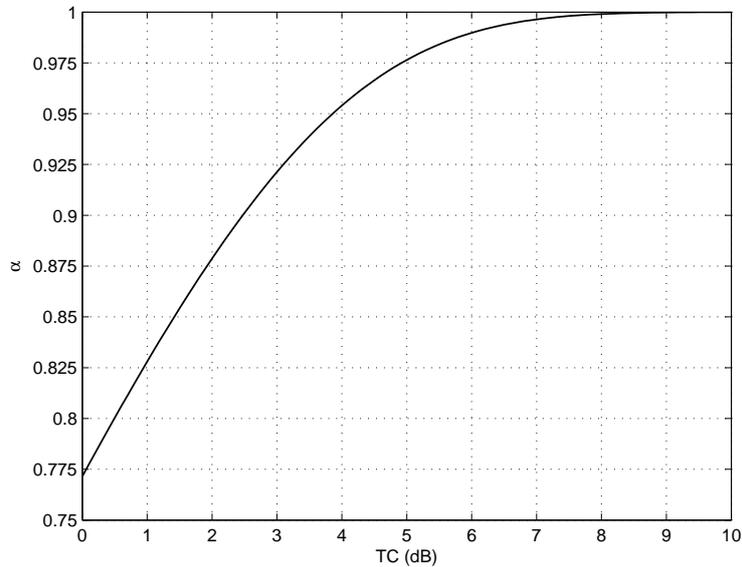


FIG. 4.1 – Évolution du coefficient d'atténuation  $\alpha$  en fonction du taux d'écrêtement  $\gamma$ , équation (4.7)

Les résultats des équations (4.11) et (4.12) permettent donc d'affirmer que le bruit de clipping est décorrélé du signal d'entrée et qu'il est de moyenne nulle. Bien que sa distribution exacte soit difficilement explicable en l'état, il est généralement admis qu'elle n'est pas gaussienne [98] et si les échantillons successifs du bruit de clipping sont distribués selon l'hypothèse d'une même loi de probabilité, ils sont aussi considérés comme des variables aléatoires réciproquement indépendantes. En effet, le caractère instantané du clipping implique qu'en sortie de la fonction non-linéaire  $\mathcal{R}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) = 0$  pour  $\tau \neq 0$ . Il vient alors par définition, en considérant encore une fois le théorème de Bussgang que :

$$\mathcal{R}_{dd}(\tau) = 0, \quad \tau \neq 0 \quad (4.13)$$

Il est également possible de caractériser formellement la puissance de ce bruit. Considérant que les échantillons d'un signal OFDM sont distribués selon une loi normale complexe dont la puissance est donnée par l'équation (3.14), en sortie du clipping, la puissance est réduite de telle sorte que [98, 113] :

$$2\sigma_{\tilde{x}}^2 = \frac{1}{N}(1 - e^{-\gamma})E_s \quad (4.14)$$

La puissance du bruit de clipping complexe peut alors être obtenue analytiquement en utilisant le développement suivant :

$$\begin{aligned} 2\sigma_d^2 &= \mathbb{E}\{|\mathbf{d}|^2\} \\ &= \mathbb{E}\{|\tilde{\mathbf{x}}|^2\} - \alpha^2\mathbb{E}\{|\mathbf{x}|^2\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

En remplaçant l'équation (4.14) dans le résultat apporté par (4.15), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\sigma_d^2 &= 2\sigma_{\tilde{x}}^2 - \frac{\alpha^2}{N}E_s \\ &= \frac{1}{N}(1 - e^{-\gamma} - \alpha^2)E_s \end{aligned} \quad (4.16)$$

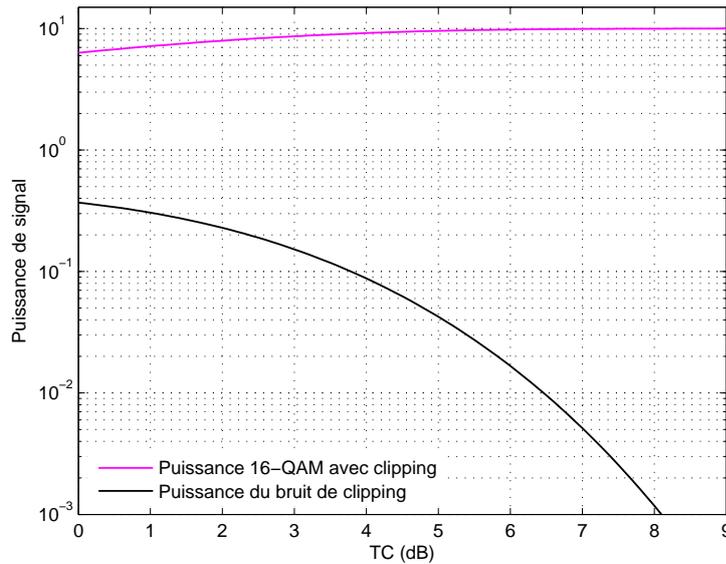


FIG. 4.2 – Évolution de la puissance du signal en sortie de clipping et de la puissance du bruit de clipping en fonction de  $TC$  pour un signal OFDM modulé par une constellation 16-QAM, équations (4.14) et (4.16).

La figure 4.2 montre l'évolution des paramètres  $2\sigma_{\tilde{x}}^2$  et  $2\sigma_d^2$  en fonction du taux de clipping  $TC$  et pour une modulation numérique de type 16-QAM. Pour un rapport  $TC$  supérieur à 3 dB, la puissance bruit de distorsion se voit fortement réduite. Ainsi, la compensation du clipping peut être envisagée en insérant simplement un coefficient  $1/\alpha$  à l'équation (4.6) afin de remettre à l'échelle les échantillons du signal écrété sans sur-amplification du bruit additif de clipping.

#### 4.2.4 Effets du clipping sur le spectre des signaux OFDM

Comme évoqué au paragraphe 3.4.2 et en introduction de ce chapitre, le clipping entraîne des distorsions qui mènent des effets proches d'une amplification non-linéaire du signal OFDM. En ce sens, la transmission est alors semblablement dégradée par l'apparition de bruits hors et dans la bande. La figure 4.3 illustre le phénomène d'étalement spectral dû au clipping des signaux OFDM. On remarque ici aussi que pour un taux de clipping supérieur à 3 dB, l'élévation du signal hors de la bande reste néanmoins modérée.

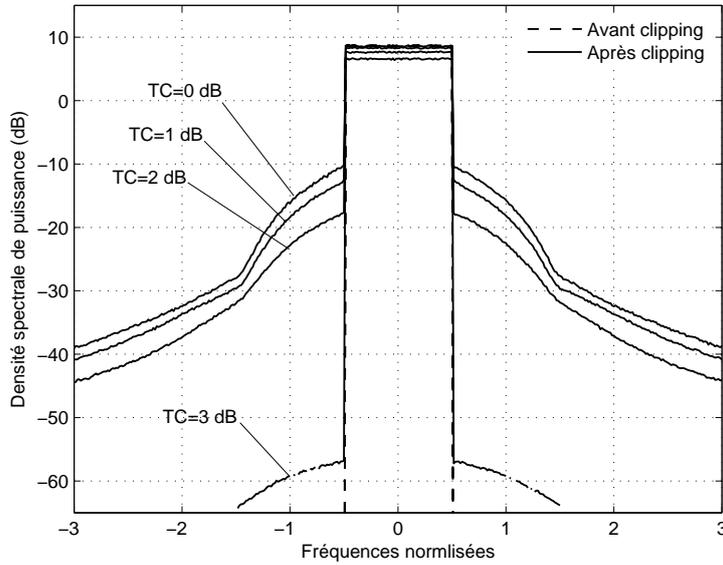


FIG. 4.3 – Élévation du niveau de bruit hors-bande généré par le clipping pour un systèmes OFDM à  $N = 64$  sous-porteuses et modulation 16-QAM pour différentes valeurs de taux de clipping  $TC = 0, 1, 2, 3$  dB.

Afin de réduire le bruit hors-bande provoqué par la technique du clipping, un filtrage lui est associé [43, 83, 101]. Il est en fait obtenu numériquement au moyen d'un sur-échantillonnage du signal OFDM en bande de base suivi de manipulations dans le domaine fréquentiel. Dans [100], les auteurs montrent qu'un filtrage efficace peut être obtenu en suffixant simplement un train de  $N(J-1)$  porteuses nulles aux porteuses d'information comme :

$$\mathbf{X}^J = \{X_0 \ X_1 \ \dots \ X_{N-1} \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}_{J(N-1)}\} \quad (4.17)$$

Le signal OFDM sur-échantillonné est alors classiquement obtenu par l'utilisation d'une TFDI sur  $JN$  échantillons et après clipping, il vient de l'équation (4.6) :

$$\tilde{x}_k^J = \alpha x_k^J + d_k^J, \quad 0 \leq k < JN \quad (4.18)$$

De par la propriété de linéarité des opérations de transformée de Fourier directe et inverse, il est possible d'écrire de que :

$$\tilde{\mathbf{X}}^J = \mathcal{F}_{JN}\{\tilde{\mathbf{x}}^J\} \quad (4.19)$$

Ainsi :

$$\tilde{X}_n^J = \alpha X_n^J + D_n^J, \quad 0 \leq n < JN \quad (4.20)$$

Le filtrage est alors effectué directement dans le domaine fréquentiel en ne retenant que les  $N$  premières sous-porteuses portées par  $\tilde{\mathbf{X}}^J$ , soit :

$$\tilde{\mathbf{X}}^J = \underbrace{\{\tilde{X}_0^J \tilde{X}_1^J \dots \tilde{X}_{N-1}^J\}}_{\tilde{\mathbf{X}}} \underbrace{\{\tilde{X}_N^J \tilde{X}_{N+1}^J \dots \tilde{X}_{JN-1}^J\}}_{\text{Bruit hors-bande}} \quad (4.21)$$

On note alors l'opération de clipping suivie d'un filtrage :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{C}\mathbf{F}_{TC}^J(\mathbf{X}) \quad (4.22)$$

L'illustration de la méthode par un schéma bloc est donnée à la figure 4.4.

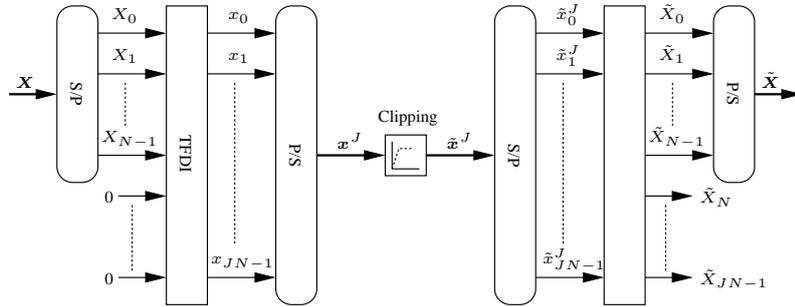


FIG. 4.4 – Synoptique de la méthode clipping et filtrage par sur-échantillonnage d'un facteur  $J$  [100].

En utilisant la propriété de linéarité de la transformée de Fourier, le théorème de Busgang conserve la même forme dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel, comme le montre l'équation (4.20). La dispersion des symboles après clipping est donc observable sur un diagramme en constellation, comme présenté à la figure 4.5, ici pour l'exemple à un taux de clipping  $TC = 1$  dB. Contrairement au diagramme présenté à la figure 3.12 pour une distorsion provoquée par un amplificateur TWTA, le clipping n'induit pas de changement de la phase des symboles de modulation, qui se traduit par une rotation de la constellation. La nature du coefficient d'atténuation  $\alpha$  étant réelle, son action se limite donc à une mise à l'échelle des symboles constituant la constellation. En outre, la dispersion des symboles due au bruit additif est aisément remarquable et son influence sur la performance est analysée au paragraphe 4.3.

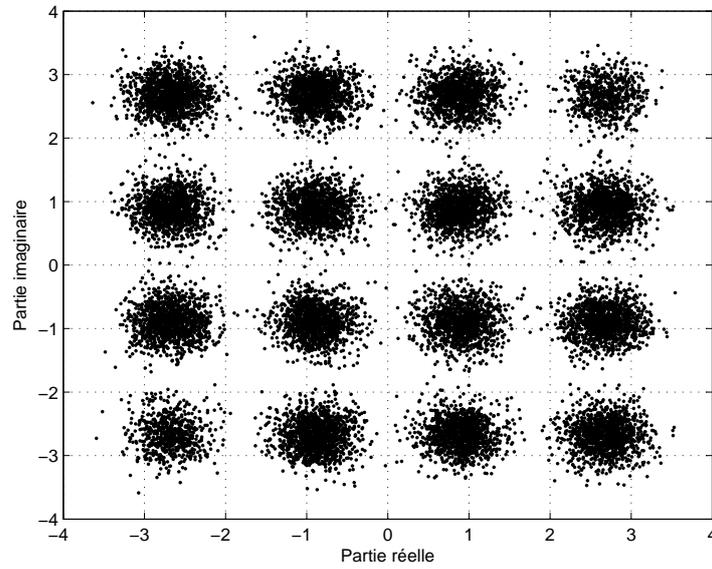


FIG. 4.5 – Diagramme en constellation de la dispersion des symboles d'une transmission OFDM modulée par une 16-QAM due au clipping,  $TC = 1\text{dB}$ .

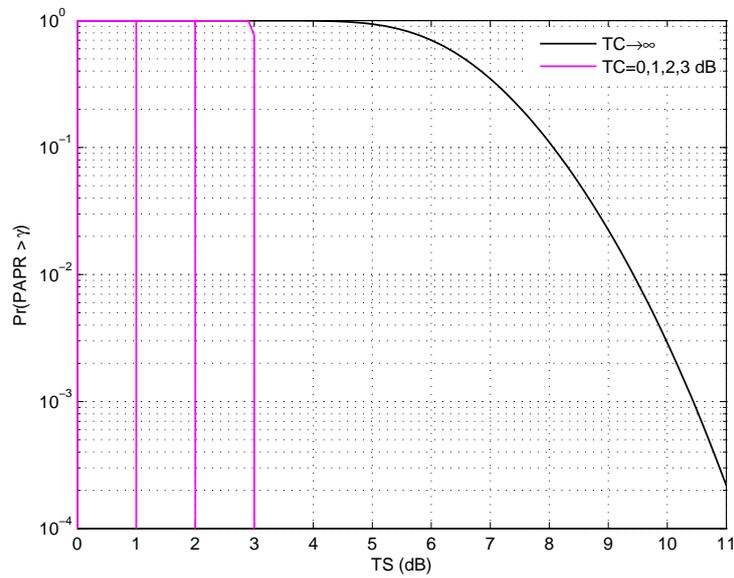


FIG. 4.6 – Fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM à temps de Nyquist soumis au clipping avec  $N = 64$  sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM pour différents taux de clipping  $TC = 0, 1, 2, 3$  dB. Comparaison avec la théorie pour  $TC \rightarrow \infty$ , équation (3.29).

#### 4.2.5 PAPR des signaux OFDM soumis au clipping

Le signal OFDM avec clipping et filtrage dans le domaine temporel est composé par TDFI sur les  $N$  premières sous-porteuses d'information portées par le résultat du sur-échantillonnage donné par l'équation (4.21), soit  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_N^{-1}\{\tilde{\mathbf{X}}\}$ . Nous montrons dans ce paragraphe l'influence de différents paramètres sur la diminution effective du PAPR des signaux OFDM par le clipping. Nous étudions donc la probabilité de dépassement  $Pr(PAPR(\tilde{\mathbf{x}}) > \gamma)$  à différents niveaux de seuil  $TS = 10 \log_{10}(\gamma)$  dB à taux de clipping fixe  $TC$ .

Précisons en préambule que pour un taux d'échantillonnage à temps de Nyquist, soit  $J = 1$  donc sans sur-échantillonnage ni filtrage, le bruit hors-bande retombe directement dans la bande du signal d'intérêt, s'ajoutant à la dégradation déjà présente par le bruit additif de clipping et diminue d'autant plus la performance de la transmission. Néanmoins, le PAPR du signal est alors strictement limité au taux de clipping souhaité, de telle sorte à ce que la probabilité  $Pr(PAPR(\tilde{\mathbf{x}}) > \gamma) = 0$  pour tout  $TS = TC$ . L'illustration de ce cas particulier est donnée à la page précédente par la figure 4.6.

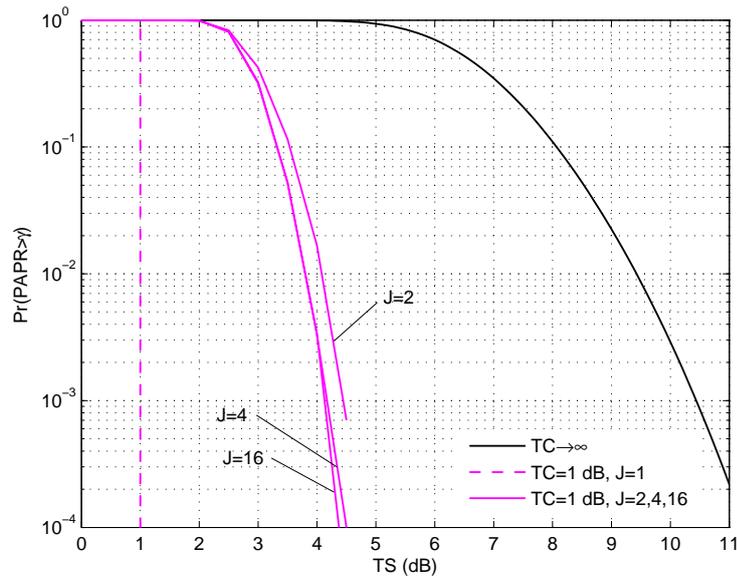


FIG. 4.7 – Influence du filtrage de bruit de clipping hors-bande sur la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM à temps de Nyquist soumis au clipping avec  $N = 64$  sous-porteuses modulés par une constellation 16-QAM pour un taux de clipping  $TC = 1$  dB et différents taux de sur-échantillonnage  $J = 2, 4, 16$ . Comparaison avec la théorie pour  $TC \rightarrow \infty$ , équation (3.29).

Analysons à présent le cas d'un sur-échantillonnage du signal en vue de filtrer le bruit hors-bande. L'influence de ce paramètre est montrée à la figure 4.7. Remarquons cependant qu'après filtrage par l'équation (4.21), le signal résultant est toujours échantillonné à temps de Nyquist. Ici le *peak-regrowth*, c'est-à-dire le ré-

haussement des pics de l'amplitude du signal, est particulièrement significatif. Il existe en effet une différence d'au moins 3 dB par rapport au cas sans filtrage vu précédemment. Le phénomène de *peak-regrowth* est en fait directement lié au filtrage du bruit hors-bande [83, 84] et représente le principal défaut de la méthode par clipping et filtrage. En effet, l'analyse du PAPR montre que le *peak-regrowth* ne permet pas de disposer d'un écrêtement franc au seuil  $TC$ , soit le cas envisagé par la limite en trait discontinu sur la figure 4.7. Néanmoins, il a tendance à s'amoinrir lorsque le taux de sur-échantillonnage augmente. Au delà de  $J > 4$ , la différence est très peu significative entre les différents sur-échantillonnages. Dans ce cas, la simulation montre que 99.9 % des signaux OFDM avec clipping affichent un PAPR de moins de 4.5 dB et 70% de 3 dB pour un niveau d'écrêtement souhaité à  $TC = 1$  dB.

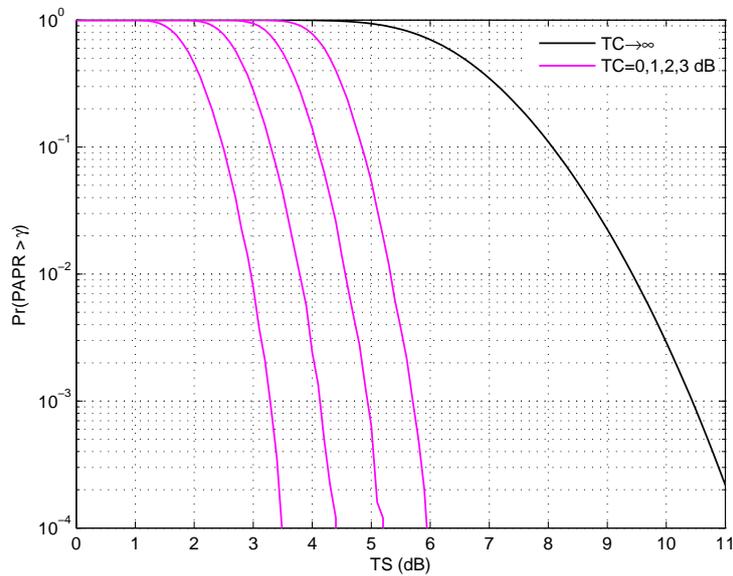


FIG. 4.8 – Influence du filtrage de bruit de clipping hors-bande sur la fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM soumis au clipping avec  $N = 64$  sous-porteuses modulés par une constellation 16-QAM pour différents taux de clipping  $TC = 0, 1, 2, 3$  dB et taux d'échantillonnage  $J = 4$ . Comparaison avec la théorie pour  $TC \rightarrow \infty$ , équation (3.29).

La figure 4.8 montre le phénomène de *peak-regrowth* pour différents taux de clipping, considérant le taux de sur-échantillonnage  $J = 4$ . On note que l'écart avec le cas  $J = 1$  tend à augmenter avec  $TS$  mais est relativement plus faible à mesure que le taux de clipping  $TC$  augmente. Il est néanmoins intéressant de considérer que la technique de clipping suivit d'un filtrage du bruit hors-bande permet de réduire efficacement le PAPR d'un signal OFDM sans pouvoir, cependant, se conformer strictement au taux de clipping souhaité.

La figure 4.9 montre les mêmes effets mais pour un signal OFDM à temps continu. En ce sens, un sur-échantillonnage est effectué après le filtrage. Comme

montré précédemment au paragraphe 3.3.3, le PAPR des signaux à temps continu diffère quelque peu de ceux à temps discret. Ici, nous montrons que cette différence est très peu significative après clipping. La contribution au réhaussement du PAPR est donc due essentiellement au *peak-regrowth* et des systèmes modélisés à temps discret peuvent tout à fait convenir pour juger des effets du clipping sur la probabilité d'apparition des hauts niveaux de PAPR.

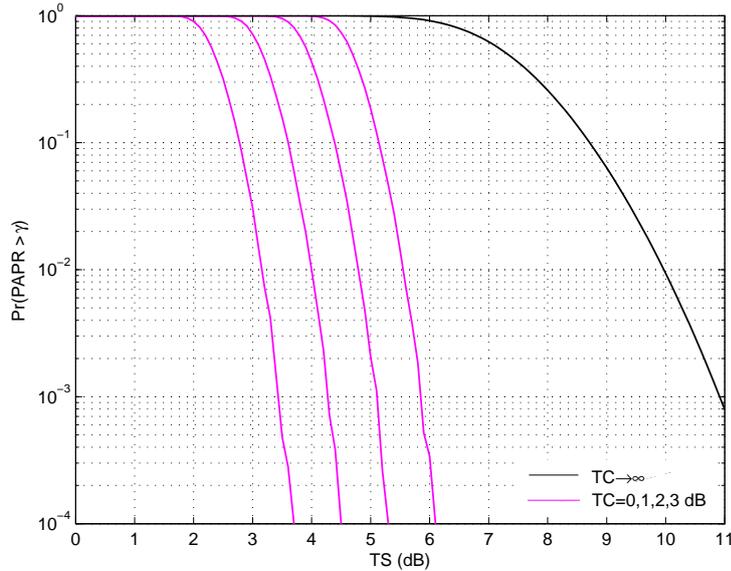


FIG. 4.9 – Fonction de répartition complémentaire du niveau de PAPR de signaux OFDM à temps continu soumis au clipping, avec filtrage du bruit hors-bande, composés de  $N = 64$  sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM pour différents taux de clipping  $TC = 0, 1, 2, 3$  dB. Comparaison avec la théorie pour  $TC \rightarrow \infty$  par l'approximation d'Ochiai *et al.*, équation (3.32).

## 4.3 Influence du bruit de clipping sur la performance

### 4.3.1 Hypothèse de gaussiannité du bruit de clipping

Dans ce paragraphe, nous souhaitons analyser les dégradations provoquées par le clipping sur la performance d'un système OFDM. Intéressons-nous d'abord au signal soumis au clipping à l'entrée du récepteur après sa propagation *via* un canal de communication. D'après l'équation (2.23) et en remplaçant par l'équation (4.6) :

$$y_k = (\tilde{x} \otimes h)_k + w_k, \quad 0 \leq k < N, \quad 0 \leq l < L \quad (4.23)$$

Et en utilisant les résultats des équations (2.25) et (4.22), il vient alors en sortie de la démodulation OFDM par TFD que :

$$Y_n = \tilde{X}_n H_n + W_n, \quad 0 \leq n < N \quad (4.24)$$

En faisant l'hypothèse d'une transmission sur un canal à BABG pur, afin de conserver un caractère généraliste au cas étudié, il nous est permis d'écrire :

$$\begin{aligned} Y_n &= \tilde{X}_n + W_n \\ &= \alpha X_n + D_n + W_n, \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (4.25)$$

L'analyse du rapport signal à bruit pour le cas particulier de l'équation (4.25) peut alors être menée facilement. Dans le domaine fréquentiel, le bruit additif blanc gaussien est :

$$W_n = \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{-2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n < N \quad (4.26)$$

Sachant que  $w$  est un BABG complexe i.i.d. de puissance  $2\sigma_w^2$ , comme montré en 2.4.3, et d'après le théorème central limite, les coefficients  $W_n$  de sa représentation dans le domaine fréquentiel issue de l'équation (4.26) sont également distribués selon une loi normale complexe dont la variance, considérant le théorème de Parseval et l'équation (2.11), est définie par  $N_0$  au paragraphe 2.7 comme  $N_0 = 2N\sigma_w^2$ .

Le bruit de clipping est, quant à lui, représenté de la même manière par :

$$D_n = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{-2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq n < N \quad (4.27)$$

La détermination de la distribution du bruit de clipping dans le domaine temporel à l'équation (4.6) est analytiquement compliquée. Dans le domaine fréquentiel cependant, exprimé à l'équation (4.27), il est très courant de le considérer comme gaussien. Mais la littérature ne fournit que peu de justification formelle. Si cette approximation de gaussiannité peut être acceptable, elle n'en reste non moins justifiable empiriquement en utilisant les propriétés définies au paragraphe 4.2.3 ainsi que le théorème de Bussgang. En effet, la décorrélation du bruit de clipping est démontrée aux équations (4.11) et (4.13) par application de l'extension du théorème de Bussgang et il peut raisonnablement être considéré qu'il est identiquement distribué pour chaque échantillon. Enfin, il est défini par l'équation (4.16) que la puissance de ce bruit est fonction du taux de clipping appliqué. Les conditions sont alors réunies pour valider l'application du théorème central limite. Ceci nous autorise à approximer le bruit de clipping dans le domaine fréquentiel comme une variable aléatoire distribuée selon une loi normale complexe dont la puissance est  $2\sigma_D^2 = 2N\sigma_d^2$ .

En conséquence, un rapport signal à bruit  $RSBd$  incluant le bruit induit par la distorsion en amplitude due au clipping pour chaque sous-porteuse en réception, comme montré à l'équation (4.25), est défini comme :

$$RSBd = \frac{\alpha^2 E_s}{N_0 + 2\sigma_D^2} \quad (4.28)$$

### 4.3.2 Performance quant au taux d'erreur

En utilisant le résultat de l'équation (4.28) et le fait que le bruit de clipping soit supposé gaussien en fréquence, il est théoriquement possible d'établir la performance

des systèmes OFDM utilisant le clipping en exploitant les résultats du paragraphe 2.7. En remplaçant l'équation (4.16) dans (4.28), le rapport signal à bruit de la transmission est alors dépendant du taux de clipping. En supposant un système OFDM utilisant une modulation numérique 16-QAM, il vient de l'équation B.25 que le taux d'erreur symbole est :

$$TES = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 E_s}{10(N_0 + 2\sigma_D^2)}}\right) \quad (4.29)$$

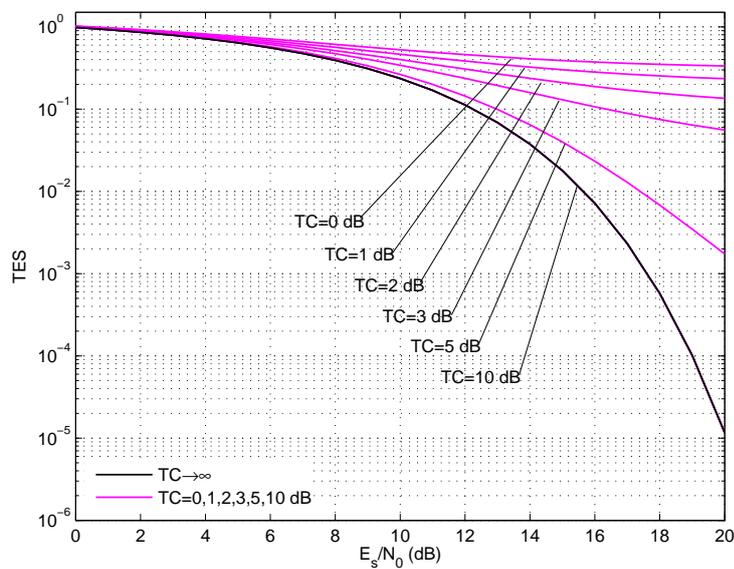


FIG. 4.10 – Performance d'un système OFDM à  $N = 64$  sous-porteuses modulées par une constellation 16-QAM sur canal BABG avec clipping pour un taux variable  $TC = 0, 1, 2, 3, 5, 10$  dB. Taux d'erreur symbole, équation (4.29).

La figure 4.10 montre le taux d'erreur symbole théorique d'un système OFDM utilisant une modulation 16-QAM avec clipping. La principale caractéristique de la performance d'un tel système est l'apparition d'un *error-floor*, soit un taux d'erreur qui reste constant quelque soit le rapport signal à bruit  $E_s/N_0$ . En effet, l'équation (4.16) montre que la puissance du bruit de clipping dépend uniquement du taux de clipping et qu'elle décroît à mesure que ce dernier augmente. Le bruit de clipping reste donc constant quelque soit le rapport signal à bruit de la transmission. En conséquence, le niveau de l'*error-floor* diminue à mesure que le taux de clipping augmente. En outre, lorsque le taux de clipping tend vers  $TC \rightarrow \infty$ , la performance se rapproche du cas linéaire sans clipping. Sur la figure 4.10, le cas illustré pour  $TC = 10$  dB.

D'après les équations (2.49) et (4.29), la performance théorique de ce même système quant au taux d'erreur binaire est établie par :

$$TEB = \frac{3}{8}Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 4E_b}{10(N_0 + 2\sigma_D^2)}}\right) \quad (4.30)$$

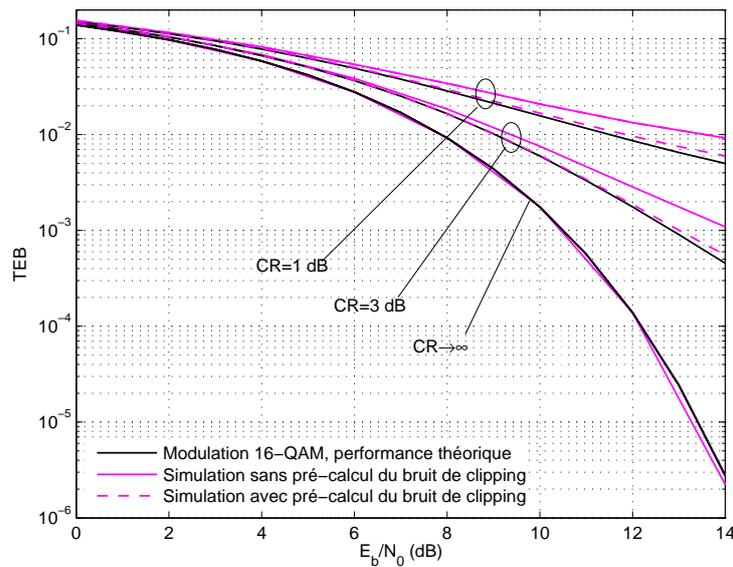


FIG. 4.11 – Performance d'un système OFDM avec clipping modulé par une constellation 16-QAM avec étiquetage par code de Gray sur canal BABG. Comparaison des taux d'erreur binaire obtenus théoriquement par l'équation (4.30) et par simulation.

La performance de l'équation (4.30) est considérée uniquement pour un étiquetage par code de Gray des symboles du diagramme en constellation, voir l'annexe B.4. La figure 4.11 illustre les effets du clipping sur le taux d'erreur binaire de la transmission. Le phénomène d'*error-floor* vu précédemment pour l'analyse quant au taux d'erreur symbole est bien entendu présent pour les raisons évoquées précédemment. Nous comparons ici les résultats théoriques à la simulation dans deux cas distincts. En effet, les résultats avec pré-calcul de la puissance du bruit de clipping sont considérés en connaissance du seuil l'écrêtement appliqué à l'émission. Il est donc possible de déterminer le surcroît de quantité de bruit dans la bande du signal et d'en user lors de l'estimation des données à la réception. Ce cas montre que les résultats de simulation sont très proches du cas théorique, spécialement à des niveaux de rapport signal à bruit modérés. Le scénario d'un récepteur n'ayant aucune connaissance sur le clipping à l'émission est également montré. Dans ce cas, la détection ne tient compte que de la connaissance du BABG et ignore celle du bruit de clipping. Pour cette configuration de simulation, le TEB est alors artificiellement augmenté par l'erreur ainsi faite sur la minimisation de la puissance effective de

bruit total dans la bande du signal. Il en résulte alors une dégradation d'au moins 2 dB avec les résultats obtenus par prise en compte du bruit de clipping.

### 4.3.3 Influence du clipping sur la capacité du canal de transmission

La dégradation de la capacité de canal pour un système OFDM avec clipping est un thème étudié mais peu développé dans la littérature [53, 100, 126] parce qu'il n'est pas aisé d'établir formellement la distribution du bruit de clipping. Dans les travaux précédemment cités, l'hypothèse de gaussiannité décrite au début de ce paragraphe est considérée et mène à une expression de capacité de canal exploitable. Si la simulation montre que cette hypothèse est uniquement valable pour des systèmes utilisant un nombre suffisant de sous-porteuses et à faible taux de clipping [93], elle reste néanmoins, selon la théorie de l'information, le cas le plus défavorable du point de vue de la capacité [52]. En ce sens, l'étude qui en découle représente la borne de capacité plus basse envisageable.

#### 4.3.3.1 Capacité de canal avec clipping à l'émission

Il est montré au paragraphe 2.7.1, et en respect avec [32] §10.4, que la capacité atteinte par un système multi-porteuses est potentiellement équivalente au cas à porteuse unique en utilisant une méthode d'allocation de puissance des sous-porteuses. Soit  $P_n$  la puissance allouée à chacune d'elles et  $\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{N-1} P_n$ . La capacité d'un système OFDM avec clipping se résume donc au cas sur bruit gaussien classique. En considérant le bruit de distorsion comme également gaussien et en tenant compte du fait que la puissance du bruit de clipping  $P_{d,n}$  est fonction de  $P_n$ , on écrit que pour chaque sous-porteuse :

$$\begin{aligned} C_n &= \max_{P_n} \{I(X_n; \tilde{X}_n)\} \\ &= h(\tilde{X}_n) - h(D_n + W_n) \\ &= \log_2 \left( 1 + \frac{\alpha^2 P_n}{P_{d,n} + N_0} \right), \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (4.31)$$

La capacité résultante est alors atteinte par :

$$C = \frac{1}{N} \max_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} C_n \right\} \quad (4.32)$$

Le paragraphe 2.7.1 rappelle que la maximisation de l'équation (4.32) est possible en utilisant le principe du *water-filling* [32] §10.4. Ochiai montre dans sa thèse de doctorat [95] que cette maximisation ne mène qu'à un gain de capacité extrêmement faible face à un système opérant à allocation de puissance d'émission constante. Ce faible écart est dû au fait que la puissance du bruit de clipping dépend directement de la puissance allouée à chaque sous-porteuse. Suivant ce résultat, il est donc raisonnable de considérer qu'une puissance  $P_n$  constante soit suffisante afin d'atteindre la capacité donnée par l'équation (4.32). En prenant  $P_n = E_s$  et en

considérant le rapport signal à bruit de l'équation (4.28), il vient alors que la capacité est simplement bornée par :

$$C \approx \log_2(1 + RSBd) \quad (4.33)$$

L'équation (4.33) montre, par le biais de la figure 4.12, que le clipping borne la capacité de canal ; contrairement au cas linéaire pour lequel  $TC \rightarrow \infty$ . Il existe en fait une valeur de capacité limite dépendante du taux de clipping et qui ne peut être dépassée. Elle se distingue notamment pour de forts rapports de signal à bruit. En considérant un taux de clipping  $TC = 1$  dB, la capacité est strictement limitée à 4.5 bits par sous-porteuse. L'indépendance de la puissance du bruit de clipping face au rapport signal à bruit montre ici encore qu'elle est le facteur limitant de la performance du système. Les résultats de simulation présentés sont utilisés afin de valider les approximations faites sur la capacité théorique. Elles montrent que pour un clipping sans filtrage du bruit hors-bande, l'équation (4.33) est tout à fait valide et corrobore les résultats obtenus dans [95]. Pour un clipping puis filtrage, la simulation montre que la capacité atteinte est légèrement plus élevée mais reste, elle aussi, strictement bornée à une valeur maximale.

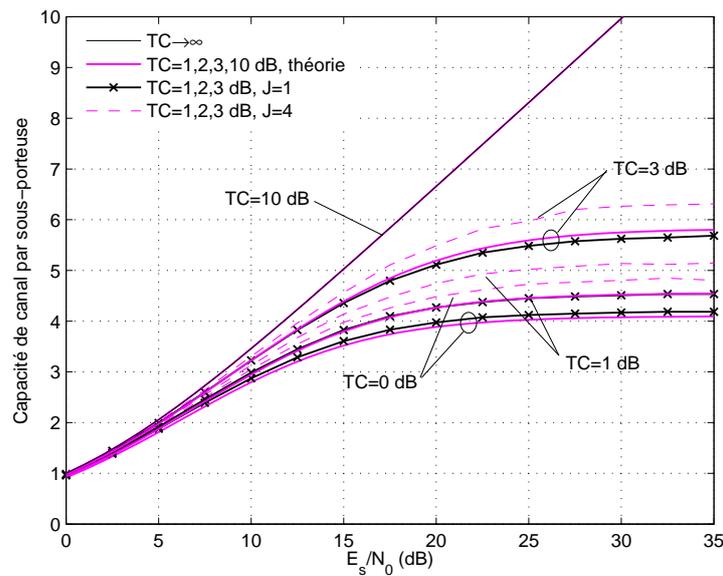


FIG. 4.12 – Capacité théorique de canal des signaux OFDM avec clipping sur canal BABG pour des taux variables  $TC = 0, 1, 3, 10$  dB, équation (4.33). Comparaison avec la simulation pour un système OFDM à  $N = 64$  sous-porteuses dans les cas sans et avec filtrage du bruit hors-bande pour taux de sur-échantillonnage  $J = 4$  [38].

La figure 4.13 illustre la perte de capacité relative du clipping par rapport au cas linéaire. Dans le cas d'un fort rapport signal à bruit, la majeure contribution du bruit est apportée par le clipping, la dégradation de la capacité est alors de plus de 60% pour un  $E_s/N_0 = 35$  dB et un taux de clipping  $TC = 1$  dB. Considérant que

la capacité se trouve bornée pour de fortes valeurs de  $E_s/N_0$ , la perte relative augmente rapidement avec l'accroissement du rapport signal à bruit. Réciproquement, la dégradation pour de faibles rapports de signal à bruit est relativement mesurée et reste en deçà des 20% pour  $E_s/N_0 < 10$  dB quelque soit le taux de clipping utilisé.

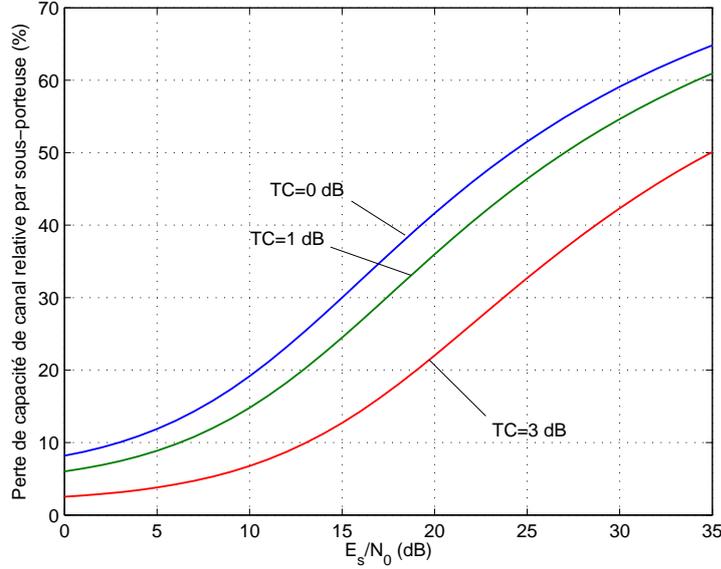


FIG. 4.13 – Capacité relative de canal des signaux OFDM avec clipping par rapport au cas linéaire sur canal BABG pour des taux variables  $TC = 0, 1, 3$  dB.

#### 4.3.3.2 Capacité avec contrainte en entrée du canal et clipping

Au paragraphe précédent, l'étude de l'influence du clipping sur la capacité de canal a été envisagée simplement sous contrainte de puissance à l'émission. Il est cependant utile d'entrevoir à présent le cas d'une contrainte à l'entrée du canal, soit un ensemble fini de symboles. Ils sont supposés ici comme les différents états de la constellation numérique utilisée pour moduler les sous-porteuses du système OFDM. Nous nous cantonnerons à l'étude de modulations dont le diagramme en constellation est de type carré. Dans [52] §7.3, Gallager montre que la capacité par sous-porteuses OFDM d'un canal sans-mémoire à entrée discrète et sortie continue est :

$$C = \max_{Pr(S)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i Pr(S_i) p(Y_n|S_i) \log_2 \left( \frac{p(Y_n|S_i)}{\sum_j Pr(S_j) p(Y_n|S_j)} \right) dY_n \quad (4.34)$$

Après manipulations, détaillées à l'annexe C, l'équation (4.34) est réduite à l'équation (C.8) comme :

$$C = \log_2 \left( \frac{M}{e} \right) - \mathbb{E}_{Y,S} \left\{ \log_2 \left( \sum_{j=0}^{2^M-1} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{N_0 + 2\sigma_D^2}} \right) \right\} \quad (4.35)$$

La borne de capacité donnée par l'équation (4.35) est alors résolue au moyen d'une intégration numérique.

La dégradation de la capacité de canal engendrée par le clipping est évaluée pour différentes tailles de modulation QAM carrées à son entrée. La figure 4.14 montre, considérant le résultat précédent donné à la figure 4.12, que la capacité de canal sans contrainte en entrée est bornée à environ 5 bits par sous-porteuses pour un taux de clipping  $TC = 1$  dB. En conséquence, les modulations dont le nombre de bits étiquetant un symbole est supérieur à 5 voient leur capacité fortement réduite. C'est ici le cas des modulations 64, 256 et 1024-QAM qui montrent une capacité stagnante sous les 5 bits par sous-porteuses. Les pertes relatives quant à la capacité de canal sans clipping s'établissent donc respectivement à 20, 40 et 58 %, là où une modulation 16-QAM n'est affectée que d'une perte de 2.5 % pour les rapports signal à bruit  $E_s/N_0 > 20$  dB. Considérant ce résultat, la modulation 16-QAM est, du point de vue de la dégradation de la capacité de canal provoquée par le clipping, plus efficace que les constellations d'ordres supérieurs citées comme exemple. En effet, la dégradation reste très mesurée même à haut rapport signal à bruit [38]. C'est sous cette hypothèse que la modulation est retenue dans le cadre des résultats proposés dans ce manuscrit. Une autre conséquence est qu'il est raisonnable, pour un système OFDM opérant à faible taux de clipping, de privilégier des stratégies de codage de canal ou de compensation du clipping efficaces tout en conservant un ordre de modulation réfléchi pour lequel la capacité est peu dégradée.

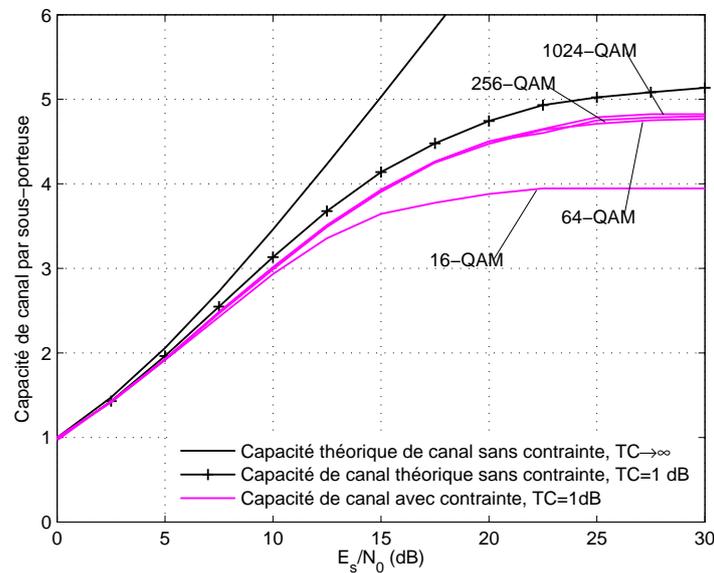


FIG. 4.14 – Borne de la capacité de canal des signaux OFDM avec clipping sur canal à BABG pour  $N = 64$  sous-porteuses,  $TC = 1$  dB, différentes tailles de modulation QAM, équation (4.35), et avec filtrage du bruit hors-bande pour un taux de sur-échantillonnage  $J = 4$  [38].

La figure 4.15 montre la capacité avec comme contrainte à l'entrée du canal les symboles issus d'une modulation 16-QAM pour un système OFDM à  $N = 64$  sous-porteuses. Le cas de référence est  $TC \rightarrow \infty$  pour lequel la capacité maximale atteinte est de 4 bits par sous-porteuse. Le clipping provoque donc une perte relativement peu élevée, comme montré précédemment, même à  $TC = 0$  dB. Ces résultats mettent également en avant l'effet bénéfique du filtrage du bruit hors-bande qui, lorsqu'il est présent, permet de réduire la dégradation de la capacité de canal. L'effet de ce filtrage prouve qu'il n'est pas à négliger, puisque la présence du bruit hors-bande dans le signal porte un abaissement de la capacité à près de 4 % du cas avec filtrage pour un taux de clipping  $TC = 1$  dB.

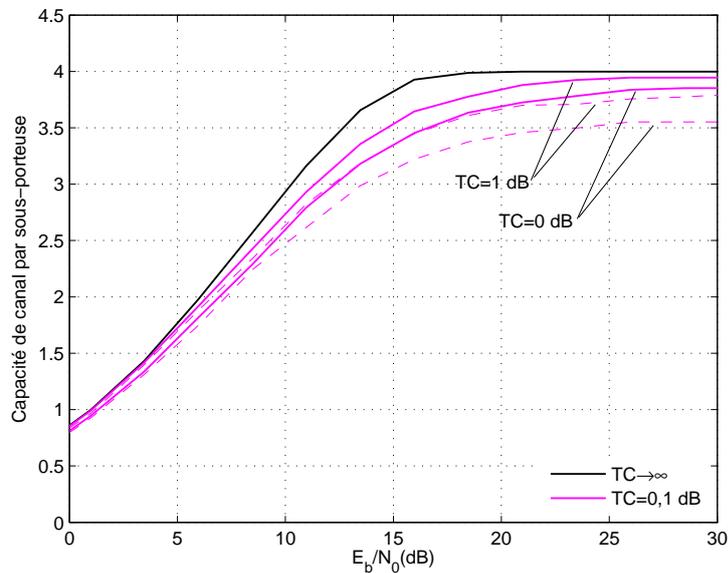


FIG. 4.15 – Borne de la capacité de canal des signaux OFDM avec clipping sur canal à BABG pour un taux variable  $TC = 0,1$  dB, une transmission à  $N = 64$  sous-porteuses et modulation 16-QAM, équation (4.35). Les courbes en traits discontinus sont le cas sans filtrage du bruit hors-bande [38].

#### 4.3.4 Conclusion

Dans cette étude, nous montrons que l'application du clipping à l'émission est un facteur limitant de la performance des systèmes OFDM. En matière d'erreur sur l'information transitant par le canal, l'effet du clipping est de borner sévèrement l'efficacité de la détection des observations issues du canal ; bien que la puissance du bruit de distorsion puisse être déterminée et utilisée à la réception, soient les deux cas supposés pour les résultats donnés à la figure 4.11. Les figures 4.12 et 4.15 montrent également que la capacité du canal est elle aussi particulièrement impactée, principalement pour de grandes valeurs de rapport signal à bruit. La figure 4.14 révèle également que l'utilisation de modulations d'ordres élevés doit

être envisagée en considérant la borne de capacité de canal avec clipping qui se révèle être particulièrement basse à faible taux d'écrêtement.

Considérant la gaussiannité du bruit de clipping dans le domaine fréquentiel, des stratégies de codage de canal opérant proches de la borne ont donc théoriquement de grandes chances de donner de très bons résultats. Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée par Ochiai dans [98, 117]. Pour des communications utilisant des stratégies de codage de canal moins complexes, il est néanmoins nécessaire d'utiliser des techniques adaptées en réception qui compensent les effets et tendent à restaurer la performance de la transmission.

## 4.4 Récepteurs itératifs pour les transmissions OFDM avec clipping

### 4.4.1 Introduction

Le développement des techniques de compensation du clipping sur les signaux OFDM au récepteur débute dès la fin des années 1990, soit en même temps que les méthodes de réduction de PAPR à l'émission. Si le clipping est la technique de limitation la plus simple et la moins coûteuse au regard de son implantation, le paragraphe précédent montre qu'elle est également la source de fortes dégradations sur la performance du système de communication.

La communauté scientifique s'est rapidement attachée à résoudre les problèmes liés au clipping et, la plupart du temps, les techniques proposées opèrent itérativement au récepteur. En effet, l'avènement alors récent de la technique de décodage collaborative et itérative apportée par Berrou et Glavieux avec les turbo-codes [12], dit principe *turbo*, s'étend rapidement à d'autres fonctions, dès le début des années 90. Notamment à la turbo-égalisation [82] et à la détection grâce à la technique BICM-ID [85].

L'idée d'une compensation itérative du clipping selon ce principe naît des travaux de Kim et Stüber [78] pour des systèmes non-codés. De leur contribution découle l'algorithme DAR (Decision Aided Reconstruction) qui opère par reconstruction itérative, dans le domaine temporel, des pics écrêtés en tête de récepteur. Parallèlement, une autre approche proposée par Tellado [126] estime et annule directement le bruit de clipping en considérant la décomposition du théorème de Bussgang ; soit la méthode BNC (Bussgang Noise Cancellation) [37]. Ces deux méthodes sont alors à l'initiative de nombreuses contributions de la part de la communauté scientifique, étendant ces principes à des systèmes codés où à l'utilisation de décisions souples pour la boucle de correction. Le principe fonctionnel de ces récepteurs est explicité par la figure 4.16.

Si de très nombreux travaux découlent des approches DAR [30, 31, 53, 81] et BNC [22, 23, 37, 38, 94, 112, 127, 141], les procédés itératifs dédiés à la correction de clipping ne s'arrêtent évidemment pas à ces deux seules familles et sont aujourd'hui encore l'objet de nombreuses contributions. Différentes techniques originales ont été successivement proposées, tentant de rétablir par diverses approches les performances des systèmes OFDM. En sus de la reconstruction en amplitude et l'annulation directe du bruit de clipping, il nous faut également citer les approches

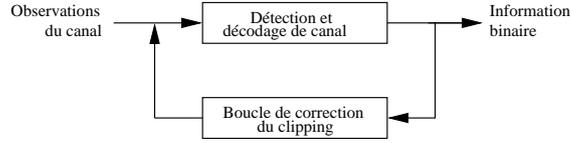


FIG. 4.16 – Synoptique générique des dispositifs de réception compensant les effets du clipping à la réception en OFDM.

par algorithme EM (Expectation-Maximization) modifié [36], par détection sous-optimale des trames [96] ou de reconstruction menée par interpolation [4, 5] et par turbo-égalisation adaptée [142].

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous attacherons à présenter chacune de ces techniques selon un même formalisme. La complexité de chaque algorithme sera évaluée et les avantages et inconvénients de chacun d'eux seront confrontés.

Bien que particulièrement représentée dans la littérature, la correction itérative du clipping en réception n'est pas le seul moyen d'en compenser les effets. Des détections par approches bayésiennes [8, 140] ou par clipping inversible [109, 110] sont également envisageables. Leur principal inconvénient, si comparées aux approches itératives, est que la compensation des dégradations est inefficace pour des niveaux de clipping faibles, c'est-à-dire inférieurs à 3 dB. Dans la suite de ce paragraphe, nous porterons notre attention sur les récepteurs itératifs jugés plus performants.

## 4.4.2 Reconstruction de signal par technique DAR

### 4.4.2.1 Récepteur par algorithme DAR

Historiquement, l'algorithme DAR proposé par Kim et Stüber [78] est le premier récepteur itératif dédié à la compensation du clipping. L'idée est ici de reconstruire les pics du signal émis par re-simulation de l'émetteur. Ce principe est d'ailleurs très souvent utilisé dans d'autres méthodes de compensation. L'algorithme tire sa force de l'utilisation d'une information disponible au récepteur, dans le cas proposé dans [78], il s'agit de la détection des symboles issus des observations du canal. En admettant que le système OFDM est modulé selon une constellation de  $2^M$  symboles  $S_m \in \mathcal{S}$ , le signal au récepteur en sortie de TFD est, suivant les équations (2.25), (4.22) et l'égalisation de canal donnée au paragraphe 2.6 :

$$Y_n = G_n \mathbf{C} \mathbf{F}_{TC}^J(\mathbf{X})_n + G_n W_n, \quad 0 \leq n < N \quad (4.36)$$

La détection des symboles émis est alors menée par :

$$\hat{X}_n = \min_{S_m \in \mathcal{S}} |Y_n - S_m|, \quad 0 \leq n < N \quad (4.37)$$

À partir de cette décision, l'algorithme DAR procède par re-simulation de l'émetteur, soit après utilisation d'une TFDI, une estimation signal émis dans le domaine temporel :

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{X}_n e^{2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq k < N \quad (4.38)$$

Sous condition que les symboles décidés par l'équation (4.37) soient proches de ceux émis et du fait de la linéarité des opérations de transformée de Fourier, le signal OFDM re-simulé à l'équation (4.38) approche celui à l'émetteur avant écrêtement. La fonction DAR reconstruit alors les pics de l'enveloppe, comme le montre la figure 4.17, par sa connaissance du taux de clipping  $TC$  utilisé à l'émission.

RECONSTRUCTION DAR - Le signal reconstruit en connaissance du seuil de limitation d'amplitude  $A$  est alors :

$$\hat{y}_k = \begin{cases} y_k & \text{si } |\hat{x}_k| \leq A \\ x_k & \text{si } |\hat{x}_k| > A \end{cases}, \quad 0 \leq k < N \quad (4.39)$$

Le comportement itératif du récepteur est assuré en remplaçant les observations issues du canal par le signal donné par l'équation (4.39) et en répétant les opérations de décision, de re-simulation et l'application de la fonction DAR.

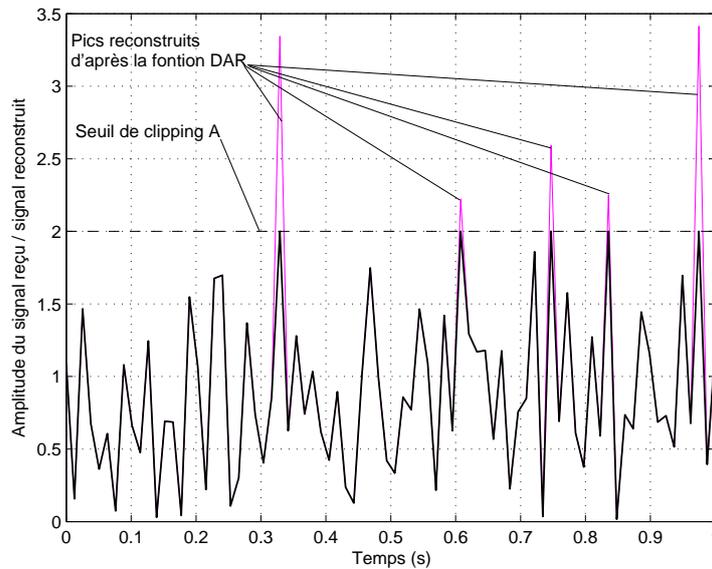


FIG. 4.17 – Technique de reconstruction DAR [78] des pics de l'enveloppe d'un signal OFDM, dans l'hypothèse d'une reconstruction parfaite.

Comme le montre Kim et Strüber dans [78], l'approche DAR autorise une très bonne compensation pour des taux de clipping modérés, et ce sans utiliser de codage de canal. La performance de l'algorithme est en fait directement liée à la pertinence des décisions prises par la détection sommaire de l'équation (4.37). Aussi, le récepteur nécessite une étape de pré-égalisation, comme le suggère l'équation (4.36). Nous verrons que les techniques basées sur le principe du maximum de vraisemblance, comme le récepteur BNC du paragraphe 4.4.3, ne le nécessitent pas et en tire un certain avantage. La complexité mesurée de l'algorithme, soit  $\mathcal{O}(iJN \log JN)$  pour  $i$  itérations de l'algorithme, est en outre un avantage certain. Enfin, les résultats

montrent également la sensibilité de l'approche au nombre de sous-porteuses utilisées. Cependant, d'après les auteurs eux-mêmes, la performance analytique du récepteur reste difficile à expliquer formellement au motif de la non-linéarité de la fonction de reconstruction DAR.

#### 4.4.2.2 Extension au principe *turbo* : récepteur turbo-DAR

La récepteur tire son préfixe *turbo* de l'utilisation d'un décodeur de canal SISO (Soft Input/Soft Output). La stratégie des auteurs [30, 31, 53] est de faire travailler conjointement le décodage canal et la méthode DAR afin d'améliorer la correction du clipping. C'est en fait l'information extrinsèque souple sur les bits du mot de code qui est utilisée, comme le montre le diagramme du récepteur à la figure 4.18.

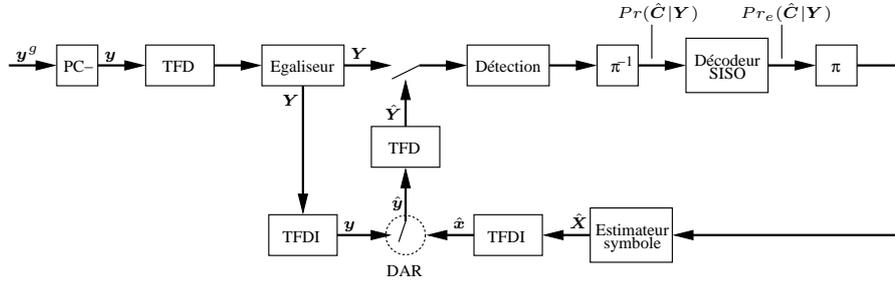


FIG. 4.18 – Synoptique du récepteur turbo-DAR [53] pour une transmission OFDM avec codage et clipping.

L'algorithme diffère quelque peu de la méthode DAR originale. Il est en fait basée sur l'exploitation de l'information extrinsèque [12] tirée du décodeur de canal SISO. En notant  $(\cdot)^\pi$  la fonction d'entrelacement des bits,  $Pr_e(\hat{C}_v = a|\mathbf{Y})$  la probabilité extrinsèque associée au bit  $v$  du mot de code estimé  $\hat{\mathbf{C}}$  de taille  $V$  bits et pour  $a \in \{0, 1\}$  sachant qu'il étiquette le symbole  $S_m$ , la décision sur les sous-porteuse est donnée à l'aide d'un estimateur de symbole moyen [31] :

$$\hat{X}_n = \sum_{m=0}^{2^M-1} S_m \prod_{\substack{v=0 \\ \hat{C}_{nM+v}^\pi = a|S_m}}^{M-1} Pr_e(\hat{C}_{nM+v}^\pi = a|\mathbf{Y}), \quad 0 \leq n < N \quad (4.40)$$

L'algorithme suit ensuite les mêmes étapes que pour l'application classique du récepteur DAR, à savoir la reconstruction de l'équation (4.39).

Dans [31], Colas *et al.* montrent le bon comportement du récepteur turbo-DAR pour un système utilisant un code de canal convolutif. Ils proposent aussi un récepteur turbo-DAR à décision dure en sortie du décodeur de canal. Bien entendu, l'exploitation d'une information extrinsèque souple amène des résultats bien plus significatifs quant au recouvrement de la performance et ce pour un taux clipping bien plus sévère que pour l'approche DAR classique, soit  $TC = 1$  dB. L'un des avantages du turbo-DAR est également la conservation de la complexité restreinte de l'approche DAR originale, en omettant celle apportée par le décodeur SISO. Enfin, les auteurs développent, également dans [31], l'implantation de leur méthode



Deux détections sont alors opérées selon l'itération  $i$  :

$$\begin{aligned} \hat{X}_n^d &= G_n^d Y_n \\ \hat{X}_n^r &= \begin{cases} \min_{S_m \in \mathcal{S}} |G_n^r Y_n - S_m| & \text{si } i = 0 \\ \min_{S_m \in \mathcal{S}} |\hat{Y}_n - S_m| & \text{si } i > 0 \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (4.42)$$

RECONSTRUCTION IAR - La fonction IAR compense le clipping dans le domaine temporel tel que :

$$\hat{y}_k = \begin{cases} \hat{x}_k^d & \text{si } |\hat{x}_k^r| \leq A \\ |\hat{x}_k^r| e^{j\phi(\hat{x}_k^d)} & \text{si } |\hat{x}_k^r| > A \end{cases}, \quad 0 \leq k < N \quad (4.43)$$

Dans l'équation (4.43), la conservation de la phase est dénotée par l'utilisation de l'information  $\phi(\hat{x}_k^d)$  issue de la re-simulation après détection dans  $\hat{y}_k = |\hat{x}_k^r| e^{j\phi(\hat{x}_k^d)}$ .

D'après [81], la reconstruction par IAR lié à l'égalisation adaptée lors de l'initialisation de l'algorithme permettent de surpasser la capacité de correction du récepteur DAR dans un contexte de transmission non-codée. Dans le cas contraire cependant, le récepteur ne tire aucun bénéfice de l'information apportée par le décodeur de canal et la performance montrée est comparable au récepteur turbo-DAR. Enfin, l'algorithme IAR nécessite des opérations de transformée de Fourier supplémentaires par rapport au DAR, ce qui augmente l'ordre de complexité de l'approche en sa défaveur.

### 4.4.3 Estimation et annulation directe du bruit de clipping

#### 4.4.3.1 Algorithme BNC

Le récepteur basé sur l'estimation et l'annulation directe du bruit de clipping a été présenté peu après la technique DAR par Tellado *et al.* [126] puis re-développée et complétée dans [127]. Elle est aussi re-découverte par Chen et Haimovich dans [22, 23] mais sans référence formelle aux travaux de Tellado. La méthode utilise la décomposition de l'extension du théorème de Bussgang et s'attache à diminuer itérativement le bruit additif de distortion. La dénomination BNC (Bussgang Noise Cancellation) est proposée dans [37] pour faire référence à ce récepteur. Le coeur du problème est présenté comme l'expression du maximum de vraisemblance (MV) suivant :

$$\hat{X}_n = \arg \min_{\tilde{\mathbf{Y}}} \sum_{n=0}^{N-1} \left( H_n(\alpha X_n + D_n) + W_n - H_n \tilde{Y}_n \right)^2 \quad (4.44)$$

Dans l'équation (4.44),  $\tilde{\mathbf{Y}}$  est l'ensemble des trames OFDM possibles avec clipping et filtrage. Il va de soit que que la complexité associé à cette recherche est rédhibitoire. Tellado *et al.* proposent alors de la restreindre fortement en utilisant une estimation du bruit de clipping, notée  $\hat{D}$ , et en l'incorporant directement dans l'équation (4.44). Il est possible de la réécrire comme une détection classique sachant les symboles modulant les sous-porteuses :

$$\hat{X}_n = \arg \min_{S_m \in \mathcal{S}} \left( H_n(\alpha X_n + D_n) + W_n - \alpha H_n S_m - H_n \hat{D}_n \right)^2, \quad 0 \leq n < N \quad (4.45)$$

En considérant que l'estimation du bruit de clipping est très proche de celui corrompant réellement la transmission, l'équation (4.45) est jugée quasi-optimale dans [126].

La difficulté réside néanmoins en une estimation du bruit de clipping. Elle est en fait établie avant la première itération par une *primo*-détection  $\hat{\mathbf{X}}$ .

ANNULATION DU BRUIT DE DISTORSTION BNC - L'estimation du bruit de clipping est donc, d'après le théorème de Bussgang, facilement obtenue dans le domaine fréquentiel par re-simulation du clipping par :

$$\hat{D}_n = \mathbf{C}\mathbf{F}_{YC}^J(\hat{\mathbf{X}})_n - \alpha\hat{X}_n, \quad 0 \leq n < N \quad (4.46)$$

L'annulation est effectuée en tête de récepteur sur les observations issues du canal après démodulation OFDM dans l'équation (4.45).

La performance du récepteur BNC est évalué par Tellado *et al.* pour des rapports des niveaux de clipping élevés, pour lesquels l'algorithme montre, évidemment, une bonne restauration de la performance. Nous verrons que le potentiel de l'approche BNC est bien plus grand et que le récepteur est efficace également pour des valeurs de  $TC$  plus faibles. En outre, la complexité est parfaitement égale à l'approche DAR.

#### 4.4.3.2 Récepteur BNC pour transmissions OFDM codées

Chen et Haimovich [22, 23] élargissent l'utilisation du BNC à des transmissions OFDM codées. Leur méthode, complètement analogue à celle de Tellado, se base sur un codage convolutif avec décodage par l'algorithme de Viterbi. Contrairement à l'approche turbo-DAR précédemment citée, la sortie du décodeur de canal est donc dure et le mot de code estimé à sa sortie est noté  $\hat{\mathbf{C}}$ .

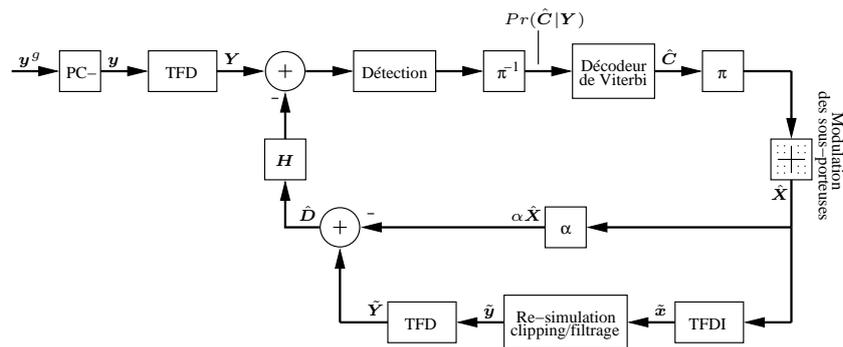


FIG. 4.20 – Récepteur itératif BNC dédié à l'estimation et l'annulation du bruit de clipping [127].

Comme le montre la figure 4.20, la re-simulation est réalisée par modulation du mot de code estimé et la répétition d'une étape de clipping. Le bruit de clipping est alors estimé par l'équation (4.46) puis soustrait en tête de récepteur.

Dans [23], les auteurs présentent en plus de cette approche une reconstruction du signal analogue à la technique DAR mais dans le domaine fréquentiel. Ils montrent cependant que l'approche BNC affiche une meilleure convergence. Il prouve aussi que le récepteur BNC pour transmissions codées est capable de travailler à de faibles niveaux de clipping aussi bien sur canal à BABG que sélectif en fréquence. La principale force de l'approche face aux techniques à base de correction DAR est que l'étape d'égalisation est prise en charge directement lors de la détection par maximum de vraisemblance. La dégradation de la performance est alors limitée à 1 dB pour un taux de clipping de 0 dB pour un code convolutif de paramètre (133, 171)<sub>8</sub> et pour une modulation 16-QAM.

#### 4.4.4 Récepteur itératif à inférence bayésienne SEM-DA

Issue des travaux de Declercq et Giannakis [36], l'algorithme SEM-DA (Stochastic Expectation Maximization for Data Augmentation) décrit une modélisation bayésienne des sous-porteuses OFDM soumises au clipping. La motivation des auteurs est de proposer une méthode qui, contrairement aux méthodes DAR et BNC, différencie parfaitement le bruit du canal de communication du bruit de clipping lors de la décision. La modélisation du problème se distingue du théorème de Bussgang. Il est décrit tel que :

$$\begin{aligned} y_k &= \tilde{x}_k + w_k \\ &= x_k(1 - z_k) + Ae^{j\phi(x_k)}z_k + w_k \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dans l'équation (4.47),  $z_k$  est un indicateur de clipping qui prend les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} z_k &= 0 & \text{si } x_k &\leq A \\ z_k &= 1 & \text{si } x_k &> A \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq k < N \quad (4.48)$$

L'intérêt principal de l'utilisation de cet indicateur est alors de transformer la non-linéarité de la fonction de clipping en problème linéaire sous condition [36]. Le modèle est alors pleinement défini par les densités de probabilités suivies par les variables aléatoires, soient :

$$p(z_k) = \frac{1}{2}\delta_{z_k} + \frac{1}{2}\delta_{z_k-1} \quad (4.49)$$

La densité des échantillons du signal OFDM est modélisée dans le domaine fréquentiel en établissant l'équiprobabilité de l'apparition des symboles modulant les sous-porteuses :

$$p(X_n = S_m) = \frac{1}{2^M} \quad (4.50)$$

La densité de probabilité du BABG  $\sigma_w^2$  est quant à elle définie par une loi gamma-inverse :

$$p(\sigma_w^2) = \mathcal{IG}(\lambda_p, \tau_p) \quad (4.51)$$

La maximisation de la densité *a posteriori*  $p(\mathbf{X}, \sigma_w^2 | \mathbf{Y})$  étant trop complexe du fait des nombreux paramètres dont elle dépend, un algorithme sous-optimal basé

sur le principe EM (Expectation Maximisation) est présenté dans [36] et une comparaison des algorithmes SEM-DA et DAR y est aussi établie. Les résultats obtenus tendent à prouver la supériorité du SEM-DA qui se démarque particulièrement pour des rapports de signal à bruit important et taux de clipping modérés pour des transmissions sans codage de canal, à moins de 0.5 dB du cas idéal. Le principal inconvénient de l'approche, et de l'aveu même des auteurs, est sa complexité bien supérieure au DAR, soit  $\mathcal{O}(i2^M(JN)^2)$ .

#### 4.4.5 Détection sous-optimale de trame

Comme pour le récepteur BNC, la méthode par détection sous-optimale de trame, présentée par Ochiai [96] en 2003 pour des transmissions OFDM sans codage de canal, utilise une détection par critère de maximum de vraisemblance. Soit :

$$\hat{\mathbf{C}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{C}}} \sum_{n=0}^{N-1} (Y_n - H_n \mathcal{CF}_{TC}^J(\tilde{\mathbf{C}})_n)^2 \quad (4.52)$$

Dans l'équation (4.52), la re-simulation du clipping, formalisée par la fonction  $\mathcal{CF}_{TC}^J(\cdot)$ , est effectuée à partir d'une trame binaire candidate  $\tilde{\mathbf{C}}$ . La complexité associée à cette détection rend néanmoins l'approche irréaliste. En effet, l'optimalité de l'équation (4.52) nécessite la construction de  $2^V$  trames binaires de taille  $V$  et autant d'opérations de clipping et de filtrage. Ochiai propose cependant de réduire cette complexité en établissant un ensemble limité de  $Q$  mots candidats  $\tilde{\mathbf{C}}_q$ . Considérant une séquence  $\hat{\mathbf{C}}$  obtenue par une *primo*-détection, les mots  $\tilde{\mathbf{C}}_q$  sont déterminés à une distance de Hamming  $d^H$  de  $\hat{\mathbf{C}}$ . En répétant ce principe pour différentes distances telles que  $d^H \rightarrow V$ , la détection (4.52) est alors optimale. Le schéma du récepteur est donné à la figure 4.21.

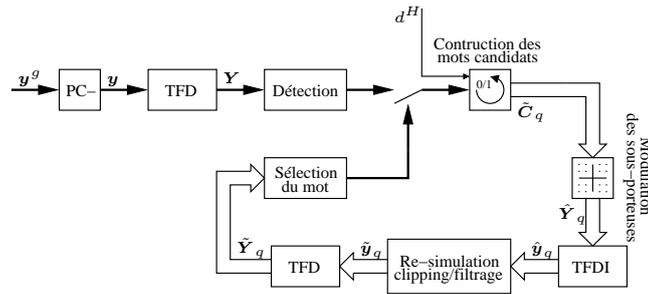


FIG. 4.21 – Récepteur itératif à détection sous-optimale pour transmissions OFDM non codées avec clipping [96].

Les résultats fournis par Ochiai dans [96] montrent le très bon comportement de l'algorithme qui après deux itérations est capable de restaurer complètement la performance d'un système non-codé pour une modulation QPSK,  $d^h = 1$  et un taux de clipping  $TC = 0.5$  dB sur canal à BABG.

Bien que ces résultats soient encourageants, l'approche se révèle extrêmement complexe pour de longues trames d'information binaire ou lorsque le jeu de distance

de Hamming augmente. Elle est en effet de l'ordre  $\mathcal{O}(1 + (i \sum_{d^H} \binom{NM}{d^H}))JN \log JN$ . Enfin, nous aborderons le fait, au paragraphe 5.3.2, que le récepteur montre un pouvoir de correction nul lorsqu'il est associé une stratégie de codage de canal. Cet aspect rend donc l'approche pratiquement inexploitable.

#### 4.4.6 Inversion itérative de la fonction de clipping

Plus récemment dans [4, 5], AliHemmati *et al.* proposent d'utiliser un procédé itératif originellement issu de [87] et dédiée à la compensation de distortion d'un signal suite à son interpolation. En supposant que la fonction de clipping  $g(\cdot)$  est monotone, cet algorithme permet d'en inverser les effets. Dans [3], l'algorithme est développé selon la méthode d'accélération de Chebyshev afin d'améliorer la convergence vers la solution optimale. L'algorithme d'inversion, montré à la figure 4.22, est pour l'itération  $i$  :

$$\hat{y}_k^i = \lambda g(y_k) + \hat{y}_k^{i-1} - \lambda g(\hat{y}_k^{i-1}), \quad 0 \leq k < N \quad (4.53)$$

Dans l'équation (4.53),  $\lambda$  est le coefficient de relaxation donné comme optimal pour  $\lambda = 1/\alpha$  dans [3] et l'étape de re-simulation est la fonction de clipping  $g(\cdot)$ .

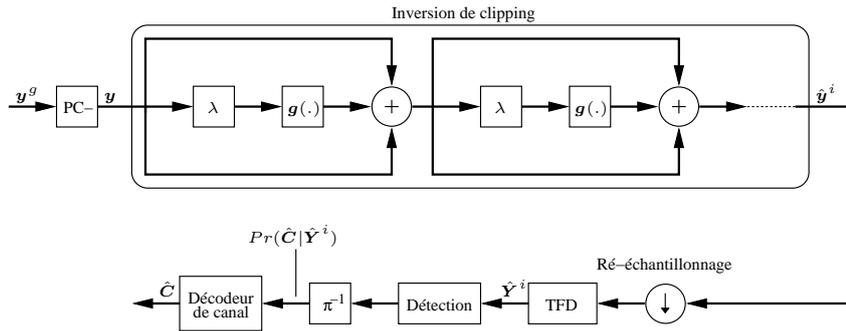


FIG. 4.22 – Méthode par inversion de clipping [3, 4, 5].

AliHemmati *et al.* montrent dans leurs travaux que le comportement itératif de leur algorithme autorise un bon recouvrement de performance pour un taux de clipping  $TC = 3$  dB sans technique de codage de canal. Aussi, la convergence rapide de l'algorithme est uniquement assurée par l'application de la méthode de Chebyshev, seulement envisageable partir de la deuxième itération et dont les paramètres d'optimisation sont définis de manière empirique [3]. Enfin, pour de hauts rapports de signal à bruit, la performance du récepteur est vite dégradée et la convergence de l'algorithme n'est plus assurée. En contrepartie, la complexité du récepteur mesurée puisque du même d'ordre que les méthodes DAR et BNC soit  $\mathcal{O}(iJN \log JN)$ .

#### 4.4.7 Turbo-égalisation adaptée au clipping

Présentée comme une approche par turbo-égalisation par Zillmann *et al.* dans [142], l'algorithme décrit ici est en fait une détection aidée par *a priori* et s'apparente à la détection sous-optimale de trame proposée par Ochiai et décrite au

paragraphe 4.4.5. La turbo-égalisation proposée ici en reprend notamment la stratégie de génération de mots candidats à la re-simulation du clipping mais l'étend au principe *turbo* en usant de l'information extrinsèque apportée par un décodeur de canal SISO. Le fonctionnement du récepteur est schématisé à la figure 4.23.

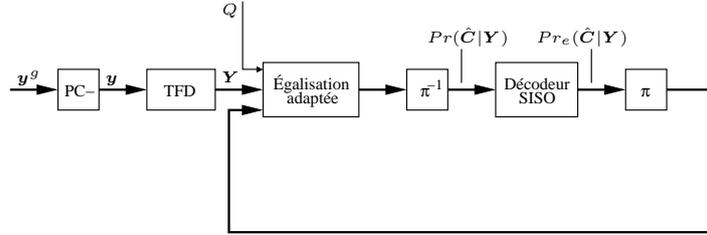


FIG. 4.23 – Synoptique de la méthode par turbo-égalisation pour transmissions OFDM avec clipping [142].

La détection par égaliseur SISO, en tête de récepteur, donne une information *a posteriori* en entrée du décodeur de canal telle que :

$$Pr(\hat{C}_v^\pi = a | \mathbf{Y}) = \sum_{\substack{q=0 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_q | a}}^{Q-1} Pr(\mathbf{Y} | \tilde{\mathbf{Y}}_q) Pr(\tilde{\mathbf{Y}}_q) \quad (4.54)$$

Dans l'équation (4.54), la trame OFDM  $\tilde{\mathbf{Y}}_q = \mathcal{CF}_{TC}^J(\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi)$  est assignée à la décision souple portée sur  $\hat{C}_v^\pi$  si  $\hat{C}_v^\pi = \tilde{C}_{q,v}^\pi$ . Cette détection nécessite alors la détermination des  $Q = 2^V$  mots de codes possibles  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$ .

L'information *a priori* sur la trame  $Pr(\tilde{\mathbf{Y}}_q)$  est établie à partir des probabilité extrinsèques des bits du mot de code comme :

$$P(\tilde{\mathbf{Y}}_q) = \prod_{v=0}^{V-1} Pr_e(\hat{C}_{q,v}^\pi = a | \mathbf{Y}) \quad (4.55)$$

Ainsi, la vraisemblance des observations du canal est donnée par :

$$Pr(\mathbf{Y} | \tilde{\mathbf{Y}}_q) \propto \prod_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{|\tilde{Y}_{q,n} - Y_n|^2}{N_0 + 2\sigma_D^2}} \quad (4.56)$$

Afin de restreindre la complexité prohibitive de la détection présentée à l'équation (4.54), l'ensemble des mots  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$  est volontairement limité. Les auteurs choisissent donc de construire cet ensemble en inversant un nombre fini de  $Q$  bits de la décision prise en sortie du décodeur SISO. Chacune de ces séquences est construite selon un critère sur la décision souple telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{C}_{q,v}^\pi = \overline{\hat{C}_v^\pi} \quad \text{si} \quad Pr_e(\hat{C}_v^\pi = 0 | \mathbf{Y}) \approx 0.5 \\ \tilde{C}_{q,v}^\pi = \hat{C}_v^\pi \quad \text{sinon} \end{array} \right\}, \quad 0 \leq v < V \quad (4.57)$$

La re-simulation du clipping s'effectue alors d'après ces mots de codes afin de construire les informations *a priori* et de vraisemblance des équations (4.55) et (4.56).

Dans [142], les auteurs considèrent un ensemble de  $Q = 256$  mots de code qui résulte du choix de 8 bits dans le mot de code décidé à la sortie du décodeur de canal SISO. La turbo-détection fournie par l'équation (4.54) montre une amélioration notable de la performance du récepteur à la première itération pour un taux de clipping  $TC = 0$  dB. Néanmoins, l'algorithme ne converge pas après cette première phase voyant la performance se dégrader à la deuxième itération. La compensation du clipping est alors inefficace. Enfin, la complexité d'ordre  $\mathcal{O}(iQJN \log JN)$  dépend du nombre de mots de code utilisés par la re-simulation du clipping, ce qui alourdi considérablement la charge du récepteur.

## 4.5 Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, il est montré que la fonction non-linéaire de clipping peut être analytiquement expliquée par le théorème de Bussgang et que son extension aux signaux OFDM, dont la définition est posée au paragraphe 4.2.2, nous autorise une étude des performances théoriques. Dans cette optique, la statistique des signaux OFDM avec clipping et du bruit de distorsion sont établies au paragraphe 4.2.3 tandis que la méthode du filtrage du bruit hors-bande est présentée au paragraphe 4.2.4. Notre analyse met en évidence le problème de *peak-regrowth* lié au filtrage et qui doit être pleinement considéré étant donné son impact sur la performance de réduction effective du clipping. Le paragraphe 4.2.5 propose une description du phénomène par le biais de l'étude de la fonction complémentaire du niveau de PAPR des signaux OFDM avec clipping et filtrage.

La dégradation de la performance des communications OFDM avec clipping est étudiée sous hypothèse de gaussianité du bruit de distorsion au paragraphe 4.3. Cette approximation communément admise et justifiable théoriquement, nous permet de quantifier analytiquement la dégradation du clipping quant au taux d'erreur et de capacité de canal, dont les résultats sont présentés aux sections 4.3.2 et 4.3.3. Ils nous permettent d'affirmer que la conception d'un système OFDM doit être pensée en tenant compte des limitations théoriques imposées par le clipping.

Enfin, les méthodes itératives représentatives des contributions de la communauté scientifique s'attachant au rétablissant la performance des transmissions OFDM avec clipping sont présentées au paragraphe 4.4. Bien qu'ils partagent de nombreux principes, les algorithmes rassemblés dans ce paragraphe montrent des aptitudes de correction et des complexités bien différentes. Il apparaît également que les techniques basées sur une détection à maximum de vraisemblance, soient les récepteurs BNC, à détection sous-optimale de trame et par turbo-égalisation, offrent des performances très contrastées. Elles ont cependant l'avantage de s'affranchir d'une étape d'égalisation de canal, contrairement aux approches par correction DAR. Les techniques par inversion de clipping et SEM-DA se distinguent par l'originalité de leurs algorithmes mais pèchent par une performance de correction mesurée ou une complexité d'ordre particulièrement élevée.

Aussi, il est clairement établi que les récepteurs turbo-DAR et BNC entrent en concurrence directe. En effet, leur complexité mesurée et leur performance de restauration sont très proches. Nous présenterons au chapitre suivant une comparaison équitable de leur performance respective et analyserons finement leur capacité de correction.

Enfin, nous proposerons une nouvelle approche, basée sur une détection sous-optimale de vraisemblance, qui comble les lacunes des récepteurs proposés par Ochiai et Zillmann *et al.* montrés aux paragraphes 4.4.5 et 4.4.7, et qui autorise une restauration de la performance très proche du cas sans clipping.



---

# Récepteurs itératifs pour transmissions OFDM avec clipping

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>87</b>
<b>5.2</b>	<b>Reconstruction de signal DAR ou annulation du bruit de distortion BNC pour les transmissions OFDM avec clipping ?</b>	<b>90</b>
5.2.1	Introduction	90
5.2.2	Récepteur soft-BNC à annulation directe du bruit de clipping	90
5.2.3	Étude du comportement itératif des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR par analyse EXIT	92
5.2.4	Performance comparée des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR	96
5.2.5	Conclusion	98
<b>5.3</b>	<b>Récepteur sous-optimal à décision souple pour transmissions OFDM codées avec clipping</b>	<b>99</b>
5.3.1	Introduction et motivations	99
5.3.2	L'approche d'Ochiai pour transmission codée	100
5.3.3	Récepteur SML à décision souple aidée par détection sous-optimale à maximum de vraisemblance	101
5.3.4	Description du récepteur SML	105
5.3.5	Performance du récepteur SML	106
5.3.6	Discussion	108
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous montrons que le clipping a une influence particulièrement dommageable sur la performance des communications OFDM. Cet effet se traduit par l'apparition d'un phénomène d'*error-floor*, quant aux taux d'erreur symbole et binaire, qui limite sévèrement l'efficacité du système. En contrepartie, la capacité de canal est relativement peu dégradée pour des rapports de signal à bruit modéré et des approches de codage de canal s'approchant de la capacité sont potentiellement capables de s'accommoder du bruit additif généré par le clipping [94, 100, 117]. Cependant, la présence d'un système adapté de correction de clipping

au récepteur est indispensable dans un scénario de codage de canal moins efficace. C'est dans cette configuration, détaillée au terme de cette introduction, que nous proposons l'étude suivante.

Dans ce chapitre, nous introduirons un récepteur BNC à décision souple au paragraphe 5.2.2, basée sur l'approche de Chen et Haimovich [22]. La correction BNC est ici associée à un décodeur de canal SISO ainsi qu'à une re-simulation du clipping qui s'appuie sur une information extrinsèque. La performance du récepteur soft-BNC [38] est établie et comparée à l'approche turbo-DAR [31] avec laquelle il partage de nombreux points communs. Suivant une même stratégie de code de canal et de clipping et filtrage, nous apporterons une comparaison impartiale et montrerons la supériorité du récepteur soft-BNC [37]. Aussi, les techniques de correction BNC et DAR seront analysées par le biais d'EXIT charts afin de formaliser leur convergence et confirmer les résultats de simulation présentés.

Enfin, un nouvel algorithme, appelé SML (Suboptimal Maximum Likelihood) [39] est proposé au paragraphe 5.3. Cette méthode originale et de complexité élevée profite d'une détection sous-optimale par re-simulation d'un espace de mots voisins d'une *primo*-détection. Elle offre alors une décision souple corrigée pour chacun des bits du mot de code, et ce sans manipulation sur le signal en tête du récepteur. L'échange d'information souple entre la boucle de correction et le décodeur de canal SISO est alors propagée itérativement et résulte en une restauration de la performance pratiquement complète du système.

## Contexte d'étude, modélisation de l'émetteur

Nous tournons le contexte de cette étude vers des applications utilisant des stratégies de codage canal peu complexes et dont les performances sont très dégradées vis à vis du clipping. Des exemples typiques sont les normes de communication WiFi IEEE 802.11a [68], WiMAX IEEE 802.16e [24, 134] ou DAB [46]. Ces différents standards ont tous comme point commun d'utiliser des codes de canal de type convolutif dont les performances sont insuffisantes pour assurer des communications fiables en cas de clipping sévère.

Le but de notre étude étant de garder un aspect généraliste quant aux résultats, nous considérons un système de communication générique s'apparentant aux standards normalisés WiFi et HiperLAN2. Aussi, et afin de mettre en avant le pouvoir de correction des récepteurs adaptés, le code de canal est réduit à code convolutif systématique récursif, modérément performant, à 4 états dont les polynômes générateurs sont  $(1, \frac{5}{7})_8$  pour un rendement  $R = \frac{1}{2}$ . Un entrelacement des bits du mot de code est effectué de manière à rendre indépendante l'information en entrée du canal. L'entrelaceur est aléatoirement défini à chaque émission d'un mot de code. Les sous-porteuses sont modulées par une modulation 16-QAM dont l'étiquetage des symboles est effectué pour  $M = 4$  bits selon un code de Gray. Le clipping est réalisé par un sur-échantillonnage de taux  $J = 4$  dédié au filtrage du bruit de distorsion hors de la bande du signal. Le taux de clipping est volontairement maintenu à un niveau particulièrement faible  $TC = 1$  dB, ce qui représente une contrainte sévère sur la performance du système.

Enfin, dans le cas de transmissions sur canal sélectif en fréquence, nous uti-

liserons un modèle STVFS (Slow Time-Varying Frequency-Selective) dont les  $L$  coefficients de sa réponse impulsionnelle normalisée sont décrits selon une loi normale  $\mathcal{N}(0, e^{-\beta l})$ . Dans le cadre de nos résultats, la longueur du préfixe cyclique est considérée comme supérieure à cette réponse.

Le mode de transmission OFDM est paramétré afin que les  $N = 64$  porteuses du système soient toutes dévolues au transport de l'information. La longueur d'un mot de code est choisie de telle sorte à ce que les  $V = 1024$  bits le composant soient émis sur quatre trames OFDM successives. Les paramètres de simulation sont rappelés dans le tableau 5.1.

Paramètre	Valeur
Code convolutif	$(1, \frac{5}{7})_8$
Rendement du code $R$	$\frac{1}{2}$
Modulation	16-QAM, $M = 4$
Nombre de sous-porteuses $N$	64
Sur-échantillonnage $J$	4
Taux de clipping $TC$	1 dB
Taille du mot de code $V$	1024 bits

TAB. 5.1 – Paramètres de simulation.

Enfin, le rapport signal à bruit résultant est défini selon :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{\sigma_{\tilde{x}}^2}{\sigma_w^2 R.M} \quad (5.1)$$

Le schéma en blocs de l'émetteur considéré est montré à la figure 5.1.

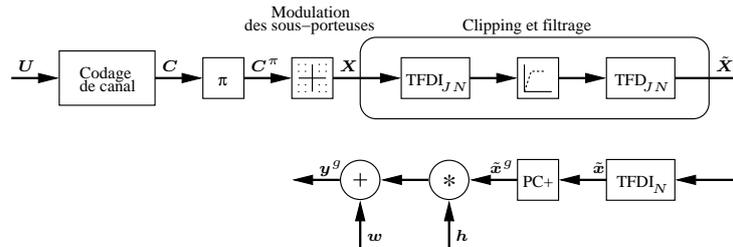


FIG. 5.1 – Émetteur OFDM avec codage par code convolutif et clipping.

## 5.2 Reconstruction de signal DAR ou annulation du bruit de distorsion BNC pour les transmissions OFDM avec clipping ?

### 5.2.1 Introduction

La comparaison des méthodes DAR et BNC est pertinente à plus d'un titre. En effet, les travaux de Tellado *et al.* [126] ainsi que ceux de Kim et Stüber [78] sont apparus au cours de la même période et se sont révélés comme fondateurs de nombreuses techniques actuelles de correction du clipping. Aussi, ces approches présentent de nombreux points communs comme l'utilisation d'un dispositif de re-simulation et une complexité réduite de l'ordre  $\mathcal{O}(JN \log JN)$ . Enfin, leur pouvoir de restauration de la performance du système est montrée comme très efficace, surtout au regard de leur complexité mesurée et du faible nombre d'itérations nécessaires à leur convergence.

En outre, leur principale différence tient en la reconstruction de l'enveloppe du signal pour la technique DAR alors que l'approche BNC estime et annule directement le bruit de clipping. Nous proposons donc d'évaluer exhaustivement la performance de chaque approche dans les mêmes conditions afin de déterminer la plus performante. Les deux techniques sont alors utilisées au sein de récepteurs parfaitement analogues et travaillant sur l'information extrinsèque apportée par un décodeur de canal SISO. En ce sens, un récepteur soft-BNC est proposé au paragraphe suivant afin d'établir une comparaison impartiale des deux approches.

### 5.2.2 Récepteur soft-BNC à annulation directe du bruit de clipping

#### 5.2.2.1 Description du récepteur

Notre motivation est ici de proposer un récepteur basé sur le principe BNC mais qui tire pleinement parti de la coopération avec le décodeur de canal. Le récepteur soft-BNC [37] fonctionne donc par estimation et annulation directe du bruit de clipping, comme proposé dans [23] et [127], mais bénéficie de l'information extrinsèque proposée par un décodeur de canal SISO. Le synoptique du récepteur est donné par la figure 5.2 [38].

L'information *a posteriori* à l'entrée du décodeur de canal est issue d'une *primo*-détection par maximum de vraisemblance telle que :

$$Pr^{(0)}(\hat{C}_v^\pi = a | \mathbf{Y}) \propto \sum_{S_m | \hat{C}_v^\pi = a} e^{-\frac{|Y_n - \alpha H_n S_m|^2}{N_0}}, \quad 0 \leq v < V \quad (5.2)$$

Dans l'équation (5.2), la puissance théorique du bruit de clipping  $2\sigma_D^2$  n'est pas considérée. Elle n'affecte en fait pas la convergence de l'algorithme. Aussi pour les itérations  $(.)^{(i)}$  suivantes, le bruit de clipping est successivement réduit par annulation, faisant tendre vers zéro la quantité  $2\sigma_D^2$ .

L'information extrinsèque issue du décodeur de canal SISO à l'itération  $i$  est alors constituée des probabilités sur les bits du mots de code notées  $Pr_e^{(i)}(\hat{C}_v = a | \mathbf{Y})$ .

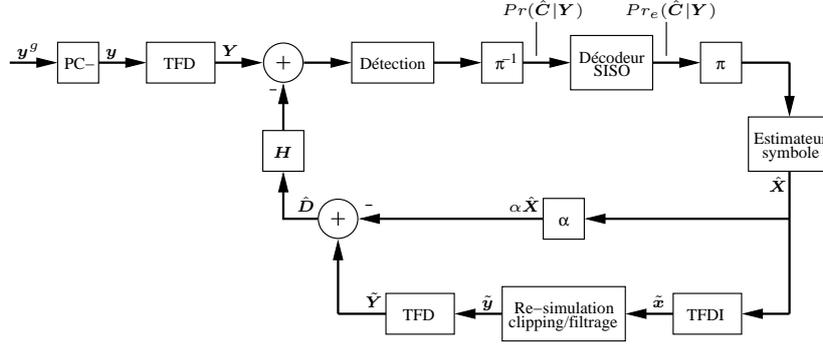


FIG. 5.2 – Récepteur soft-BNC dédié à l'estimation et à l'annulation du bruit de clipping pour communications OFDM codées [38].

La re-simulation des trames OFDM dans le domaine fréquentiel est effectuée selon l'estimation empruntée à [31] et rappelée par l'équation (5.3) :

$$\hat{X}_n = \sum_{m=0}^{2^M-1} S_m \prod_{\substack{v=0 \\ \hat{C}_{nM+v}^\pi = a|S_m}}^{M-1} Pr_e(\hat{C}_{nM+v}^\pi = a|\mathbf{Y}), \quad 0 \leq n < N \quad (5.3)$$

La fonction de clipping est appliquée d'après la connaissance du taux d'écrêtement utilisé à l'émission et l'estimation du bruit de clipping est donnée par :

$$\hat{D}_n = \mathbf{C}\mathbf{F}_{TC}^J(\hat{\mathbf{X}})_n - \alpha\hat{X}_n, \quad 0 \leq n < N \quad (5.4)$$

Finalement, la nouvelle détection à l'entrée du décodeur SISO est :

$$Pr^{(i+1)}(\hat{C}_v^\pi = a|\mathbf{Y}) \propto \sum_{S_m|\hat{C}_v^\pi = a} e^{-\frac{|Y_n - H_n\hat{D}_n - \alpha H_n S_m|^2}{N_0}}, \quad 0 \leq v < V \quad (5.5)$$

Le comportement itératif du récepteur est assuré en répétant successivement l'étape de décodage de canal suivie des équations (5.3), (5.4) et (5.5) jusqu'à obtenir la convergence totale de l'algorithme.

### 5.2.2.2 Performance comparée des récepteurs BNC et soft-BNC

La performance du récepteur soft-BNC est envisagée selon l'émetteur présenté au paragraphe 5.1. La figure 5.3 permet d'apprécier le gain apporté par l'utilisation de l'estimateur de l'équation (5.3) et illustre la comparaison entre la méthode décrite par Chen et Haimovich dans [23] et le récepteur soft-BNC proposé dans [37]. Dans ce cas particulier, le filtrage du bruit hors-bande n'est pas considéré. Dans ce contexte, le récepteur soft-BNC se distingue par un gain de plus 3 dB face à la méthode par décision dure. Cet aspect confirme donc fortement l'intérêt d'une telle approche. La performance du soft-BNC s'établit donc, après trois itérations, à moins de 1 dB du cas idéal sans clipping.

L'influence du filtrage du bruit hors-bande est examiné à la figure 5.4. Comme il a été évoqué précédemment, lorsque le bruit hors-bande n'est pas filtré, il se replie dans la bande d'intérêt du signal. La conséquence est que ce surcroît de bruit dégrade artificiellement la décision prise par le récepteur. S'il est difficilement quantifiable théoriquement, la simulation montre que cette dégradation s'établit autour de 0.5 dB.

Ces résultats prouvent l'efficacité de la méthode BNC couplée à une décision souple. Il est alors empiriquement admis que la convergence complète du récepteur est atteinte après trois itérations pour une performance à moins de 1 dB du cas sans clipping.

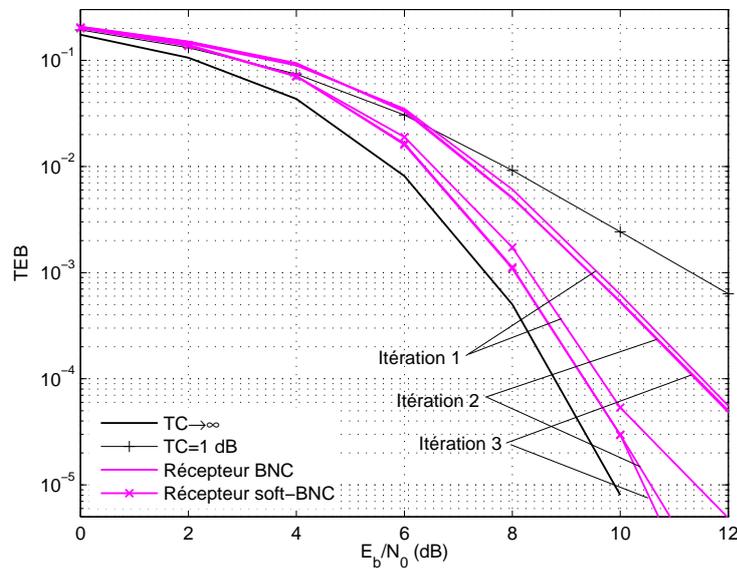


FIG. 5.3 – Gain du récepteur soft-BNC [37] par rapport au récepteur à décision dure proposé dans [23]. Cas particulier sans filtrage du bruit hors-bande,  $J = 1$  et  $TC = 1$  dB.

### 5.2.3 Étude du comportement itératif des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR par analyse EXIT

L'outil d'analyse EXIT charts (EXtrinsic Information Transfer) a été introduit par Ten Brink pour l'étude des systèmes itératifs, et ce dans différents contextes. C'est néanmoins l'étude du décodage des turbocodes parallèles [17] qui constitue sa contribution la plus importante. Dédiés à l'analyse des systèmes itératifs, les EXIT charts ont été ensuite développés pour aider à leur *design*, notamment pour les codes LDPC. Cependant, Ten Brink s'est intéressé à de nombreux procédés itératifs lors du développement de cette méthode, comme le décodage des turbocodes séries [15] et des systèmes BICM-ID [16]. La principale force de l'analyse EXIT est qu'elle permet de prédire la convergence d'un procédé itératif par la mesure de

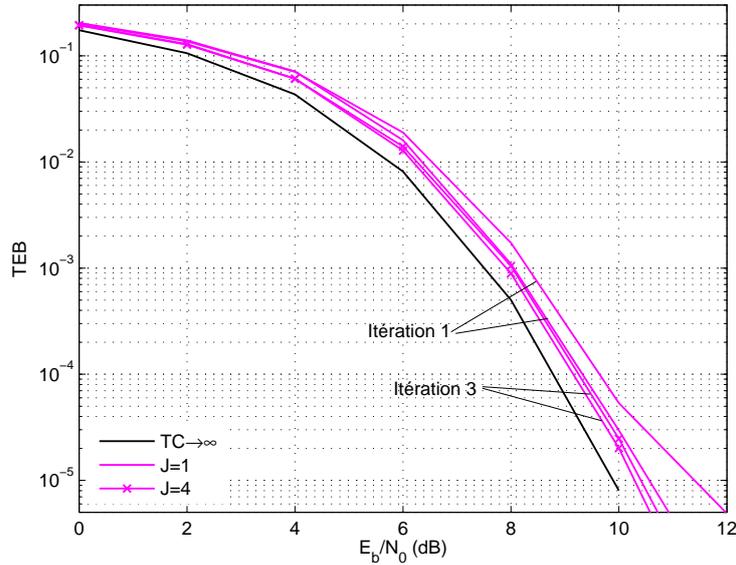


FIG. 5.4 – Influence du filtrage du bruit hors-bande généré par le clipping sur la performance de restauration du récepteur soft-BNC pour les cas  $J = 1$  et  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB.

l'information mutuelle en entrée et en sortie de chacun de ses composants. L'analyse est alors complémentaire voire substitutive à celle par taux d'erreur binaire ou symbole classique. Dans [30], les auteurs exploitent le travail de Ten Brink [16] afin d'analyser le potentiel de correction de l'approche DAR. Afin de confronter les récepteurs soft-BNC et turbo-DAR, l'analyse par courbes EXIT est développée ici pour ces deux récepteurs [38] et nous permet ainsi de comprendre finement leur comportement.

L'analyse est rendue possible par l'utilisation du décodeur SISO et le fait que les boucles de correction DAR ou BNC apportent une information souple à son entrée. Le principe de base de l'analyse EXIT effectuée ici est de mesurer l'information mutuelle sur les bits du mot de code à la sortie de chaque bloc en fonction d'un niveau connu d'information mutuelle à son entrée, la figure 5.5 fait référence à ce principe et la notation  $L^{(\cdot)}$  représente le log-rapport de vraisemblance ou LLR (Log-Likelihood Ratio). On définit alors classiquement le LLR par :

$$L = \frac{Pr(a = 0)}{Pr(a = 1)} \quad (5.6)$$

Les conditions suivantes sur la distribution des LLR sont supposées vraies :

1. Les densités de probabilités conditionnées par la valeur du bit sont symétriques, *i.e.* :

$$p(-L|a = 0) = p(L|a = 1) \quad (5.7)$$

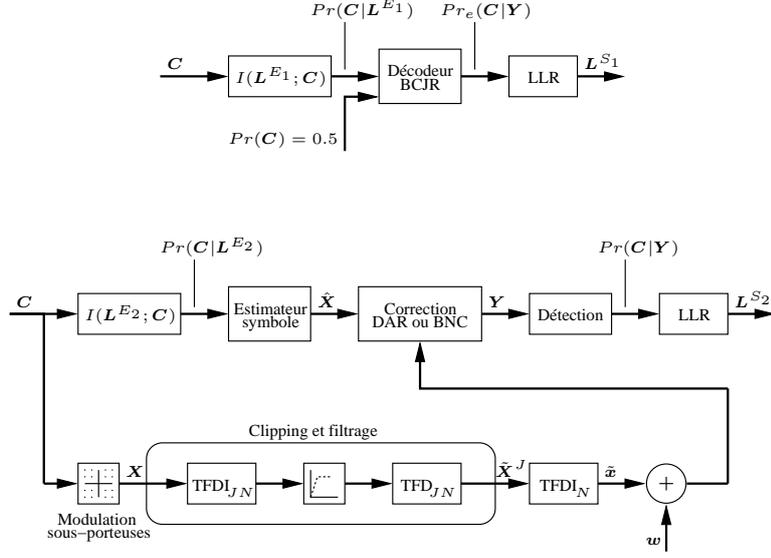


FIG. 5.5 – Modèle utilisé pour l’analyse EXIT des récepteurs turbo-DAR et soft-BNC. Découpage en deux blocs indépendants.

2. Les densités de probabilités des LLR satisfont la condition de consistance :

$$p(-L|a) = e^{(-1)^a L} p(L|a) \quad (5.8)$$

### 5.2.3.1 Mesure EXIT du décodeur SISO

Soit un mot de code  $\mathbf{C}$  à l’entrée du décodeur. L’information par log-rapport de vraisemblance  $\mathbf{L}^{E_1}$  est construite de telle sorte à ce que l’information mutuelle  $I(\mathbf{L}^{E_1}; \mathbf{C})$  atteigne une valeur définie en entrée du décodeur, Ten Brink définit une méthode basée sur l’hypothèse d’un canal gaussien dans [17]. En sortie, l’information mutuelle est mesurée en fonction des LLR  $\mathbf{L}^{S_1}$  par :

$$I(\mathbf{L}^{S_1}; \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi|C_v = a) \log_2 \frac{2p(\xi|C_v = a)}{p(\xi|C_v = 0) + p(\xi|C_v = 1)} d\xi \quad (5.9)$$

La densité de probabilité des LLR à la sortie du décodeur SISO approche d’une distribution gaussienne à mesure que les itérations augmentent [12, 17] si bien que l’équation (5.9) peut se réduire à :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{L}^{S_1}; \mathbf{C}) &= 1 - \mathbb{E}\{\log_2(1 + e^{-\mathbf{L}^{S_1}})\} \\ &= 1 - \frac{1}{V} \sum_{v=0}^{V-1} \log_2(1 + e^{(-1)^{C_v} \mathbf{L}_v^{S_1}}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Une mesure d’information mutuelle  $I(\mathbf{L}^{S_1}; \mathbf{C})$  en sortie du décodeur SISO est effectuée pour chaque valeur en entrée  $I(\mathbf{L}^{E_1}; \mathbf{C})$ . Étant donnée la configuration du récepteur, aucun *a priori* sur les bits du mot de code n’est utilisé. La courbe EXIT

résultant de l'analyse du procédé de décodage par méthode BCJR [7] pour le code convolutif  $(1, \frac{5}{7})_8$  est montrée à la figure 5.6.

L'étude analogue quant aux boucles de correction est présentée au paragraphe suivant.

### 5.2.3.2 Mesure EXIT des boucles de correction DAR et BNC

L'analyse est ici dépendante du canal, comme le montre la figure 5.5. L'hypothèse de gaussiannité du bruit de clipping est encore une fois considérée, le canal de communication est alors supposé comme un BABG. En conséquence, la courbe EXIT est fonction du niveau de bruit du canal. Cette hypothèse de gaussiannité nous autorise à considérer que de l'information LLR  $\mathbf{L}^{E_2}$ , à l'entrée de la boucle de correction, est également distribuée selon une densité de probabilité gaussienne. Cependant, cette affirmation n'est pas acceptable à sa sortie. En effet, le comportement des boucles de corrections DAR et BNC est fortement non-linéaire et il est difficilement concevable expérimentalement que la taille de l'information puisse être importante. De fait, il est préféré de mesurer l'information mutuelle en sortie par intégration numérique à l'aide d'une évaluation par Monte-Calro. Il est alors systématiquement approximé les densités de probabilité des LLR  $\mathbf{L}^{S_2}$   $p(\mathbf{L}^{S_2}|C_v = 0)$  et  $p(\mathbf{L}^{S_2}|C_v = 1)$  en vue de résoudre l'équation (5.9) en sortie de la boucle de correction.

Afin de permettre une comparaison efficace des récepteurs, le rapport signal à bruit du canal doit être choisi dans leur zone de convergence. Nous anticipons empiriquement le rapport signal à bruit adéquat à  $E_b/N_0 = 12$  dB. Le taux de clipping considéré est  $TC = 1$  dB. La modification d'au moins un de ces paramètres modifie la trajectoire EXIT de la boucle de correction. En superposant, la trajectoire du code convolutif donnée par l'équation 5.10, il vient l'EXIT chart de la figure 5.6.

### 5.2.3.3 Discussion

Comme le suggère la modélisation du système de la figure 5.5 utilisée pour établir les courbes EXIT de la figure 5.6, la détection des observations canal est le fait de la boucle de correction. L'interprétation des trajectoires montre que sans retour du décodeur de canal, soit le cas sans correction du clipping, l'information mutuelle à la sortie des boucles DAR et BNC est équivalente, s'établissant à 0.84.

Après une première correction de la détection, la trajectoire du soft-BNC montre un effet surprenant pour des valeurs d'information mutuelle en entrée comprises entre 0 et 0.35. En effet, l'information mutuelle de sortie se révèle dégradée de telle sorte à ce que  $I(\mathbf{L}^{S_2}; \mathbf{C})$  décroisse. Ce comportement montre qu'une information mutuelle d'entrée minimale soit nécessaire afin de permettre la convergence du récepteur. Étant donné que le point d'entrée de la trajectoire EXIT est suffisamment élevée, *i.e.* 0.84, il n'est pas possible d'infirmer ou confirmer formellement cette région de l'analyse EXIT par simulation. Cependant, la partie supérieure de la trajectoire est fidèle à l'analyse faite quant à la performance en taux d'erreur binaire présentée au paragraphe 5.2.4 et montre une capacité de recouvrement particulièrement efficace du soft-BNC. En comparaison, la trajectoire du récepteur turbo-DAR

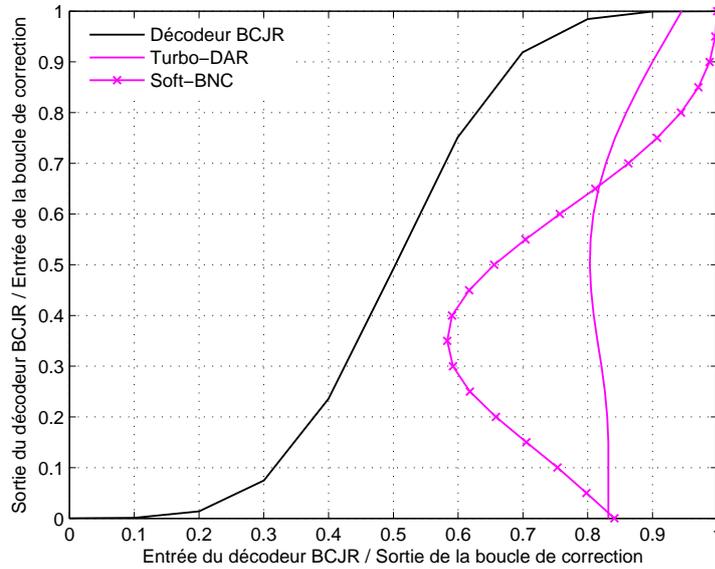


FIG. 5.6 – Comparaison des trajectoires EXIT du code convolutif  $(1, \frac{5}{7})_8$  et des récepteurs turbo-DAR et soft-BNC, sur canal à BABG,  $TC = 1$  dB et  $E_b/N_0 = 12$  dB [38].

montre une convergence limitée par une information mutuelle de sortie finale moins élevée. En effet, il ne semble pas pouvoir augmenter l'information mutuelle à sa sortie au-delà de 0.93 [38].

Néanmoins, les deux récepteurs montrent un comportement itératif analogue car ils sont très proches de leur convergence à la première itération. En d'autres termes, la première itération procure la plus grande part de la correction. Cependant, le récepteur turbo-DAR reste toujours en marge du soft-BNC, ce qui laisse présager d'une limitation contrastée de sa performance en ce qui concerne le taux d'erreur binaire.

#### 5.2.4 Performance comparée des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR

La performance des deux récepteurs est ici évaluée quant au taux d'erreur binaire et leur pouvoir de correction effectif est comparé. La configuration de transmission reste équivalente à celle utilisée pour l'établissement des trajectoires EXIT. Les deux récepteurs sont poussés à leur convergence respective, soient trois itérations pour le soft-BNC et huit itérations pour le turbo-DAR. Les figures 5.7 et 5.8 montrent les performances des deux approches sur canal à BABG.

Comme le suggère les trajectoires EXIT présentées à la figure 5.6, la performance du turbo-DAR est limitée par un effet d'*error-floor* qui apparaît au-delà d'un rapport signal à bruit  $E_b/N_0 \geq 12$  dB. La restauration de la performance est donc bornée à 2 dB du cas sans clipping à  $E_b/N_0 = 12$  dB à la huitième itéra-

tion. Le récepteur soft-BNC profite quant à lui pleinement sa coopération avec le décodeur de canal SISO et ne souffre pas de stagnation de sa performance, conformément à l'interprétation de sa trajectoire EXIT. Après la troisième itération, le récepteur approche le cas sans clipping à près de 0.5 dB pour taux d'erreur binaire considérés. L'algorithme se montre donc plus robuste à la propagation d'erreurs lors de la correction du signal. Le récepteur turbo-DAR est quant à lui limité dans sa correction mais se maintient à un niveau de d'erreur relativement faible de seulement  $10^{-6}$ . Enfin, tenant compte du fait que ces deux approches soient de complexité totalement équivalente, le soft-BNC montre que l'approche par annulation de bruit de clipping est à privilégier dans ce contexte de communications.

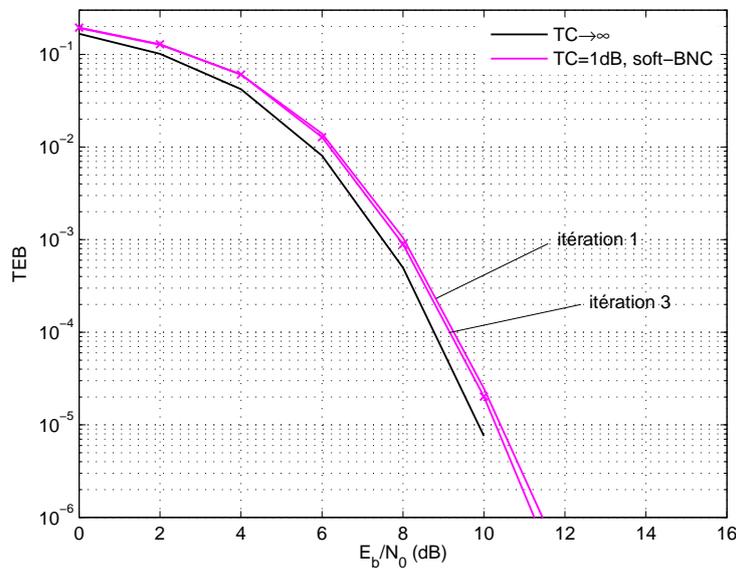


FIG. 5.7 – Performance du récepteur soft-BNC pour transmissions OFDM sur canal BABG avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1 et 3,  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB [38].

La figure 5.9 illustre quant à elle les performances comparées des deux approches sur canal sélectif en fréquence, dont le modèle est précisé au paragraphe 5.1. Au récepteur, l'hypothèse d'une connaissance parfaite de sa réponse impulsionnelle est retenue. Cette configuration permet de mettre en évidence un écart significatif de la performance des récepteurs pour ce scénario. En effet, il apparaît que le turbo-DAR y est très désavantagé. Ceci est dû à l'utilisation d'un égaliseur MMSE en tête de récepteur là où le soft-BNC en compense l'effet directement lors de la correction du clipping conjointement à la détection des bits du mot de code, comme le montre l'équation (5.5). La nécessité d'une étape d'égalisation menée en tête de récepteur avant correction, pour le récepteur turbo-DAR, est associée à la définition même de la correction DAR qui n'est pas basée sur le principe du maximum de vraisemblance (MV). L'information d'état du canal n'est pas utilisée lors de la correction du clipping, contrairement à l'approche BNC. Dans ce cas de figure, le soft-BNC montre

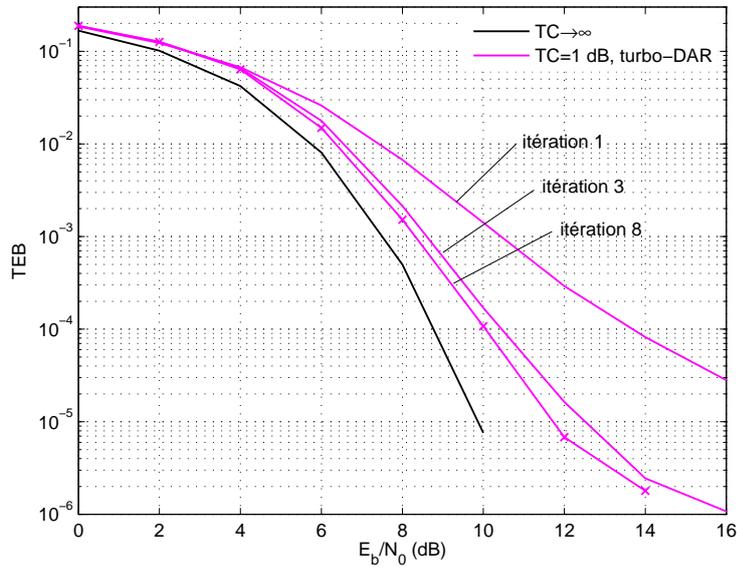


FIG. 5.8 – Performance du récepteur turbo-DAR pour transmissions OFDM sur canal BABG avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1,3 et 8.  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB [38].

une performance de restauration comparable au cas sur canal à BABG, soit à 0.5 dB du cas sans clipping grâce à l'efficacité de la détection conjointe à l'égalisation. Le turbo-DAR est quand à lui à plus de 3 dB de la performance sans clipping avec égalisation par MMSE, ce qui montre que l'approche est bien moins efficace sur un canal sélectif en fréquence.

### 5.2.5 Conclusion

Au paragraphe 5.2.2, nous proposons un récepteur soft-BNC pour transmissions OFDM codées travaillant à partir d'une décision souple sur les bits du mot de code. Basée sur la méthode d'estimation et d'annulation directe du bruit de clipping, sa complexité modérée le place au même niveau que le récepteur turbo-DAR [31]. La confrontation de la performance de ces deux techniques est proposée aux paragraphes 5.2.3 et 5.2.4. L'analyse par courbes EXIT nous autorise une étude fine de leur comportement respectif et confirme également la supériorité du soft-BNC pour tous les cas de figure envisagés lors de nos travaux. Le récepteur soft-BNC se pose comme une solution de faible complexité envisageable pour des communications OFDM avec clipping.

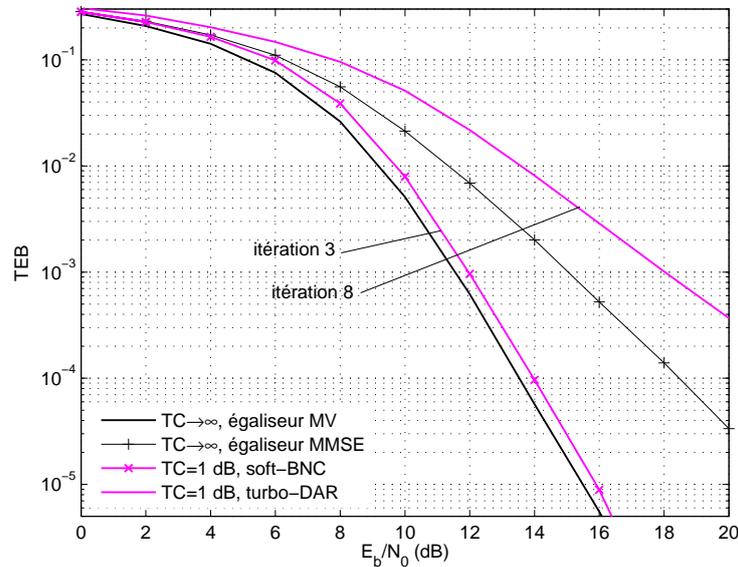


FIG. 5.9 – Performances comparées des récepteurs soft-BNC et turbo-DAR pour transmissions OFDM sur canal sélectif STVFS avec clipping et modulation 16-QAM aux itérations respectives 3 et 8.  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB et  $\beta = 2.5$  [38].

## 5.3 Récepteur sous-optimal à décision souple pour transmissions OFDM codées avec clipping

### 5.3.1 Introduction et motivations

Jusqu'à présent, cette étude a porté son attention sur les méthodes de restauration de la performance des transmissions OFDM avec clipping de complexité la plus faible. En l'occurrence, les récepteurs soft-BNC et turbo-DAR étudiés au paragraphe 5.2 sont les méthodes les plus efficaces à complexité  $\mathcal{O}(JN \log JN)$ . Cependant, d'autres méthodes, ayant un ordre de complexité certes plus élevé, montrent également des aptitudes de correction particulièrement intéressantes. Nous pouvons citer les techniques de détection de trame proposée par Ochiai dans [96] et de turbo-égalisation introduite par Zillmann *et al.* dans [142] dont les principes sont donnés aux paragraphes 4.4.5 et 4.4.7.

Le point commun de ces deux techniques est qu'elles ne proposent pas de compenser le clipping sur le signal issu du canal en tête de récepteur mais corrigent l'information binaire, soit directement le mot de code estimé. Aussi, cette décision corrigée n'est pas fondée sur une seule re-simulation du clipping mais sur un ensemble de taille  $Q$ , ce qui augmente la complexité liée à la technique à l'ordre  $\mathcal{O}(QJN \log JN)$ . Enfin, ces deux approches sont basées sur une détection par maximum de vraisemblance dont on a souligné l'avantage sur canal sélectif en fréquence au paragraphe 5.2.4.

Dans [142] cependant, les auteurs montrent que l'approche par turbo-égalisation ne converge pas et que le comportement erratique de l'algorithme apparaît dès la deuxième itération. Le problème est, sans nul doute, lié à la méthode de construction de l'ensemble des  $Q$  signaux re-simulés. Elle est en fait basée sur l'hypothèse que les bits du mot de code ayant l'information extrinsèque la moins décidée, c'est à dire une probabilité presque équiprobable d'être 0 ou 1 à la sortie du décodeur SISO, porterait moins d'information. La pertinence de cette approche est facilement discutable, surtout en considérant la capacité de correction de l'algorithme.

Ochiai propose quant à lui de générer les mots voisins d'une *primo*-détection obtenue au récepteur afin de constituer l'ensemble des signaux re-simulés aidant à la décision du mot de code [96]. La performance de correction du récepteur ainsi obtenu est alors particulièrement encourageante sans codage de canal. Étant donné qu'aucune référence dans la littérature ne mentionne l'étude ce récepteur pour des transmissions codées, nous proposons une brève étude de ce cas au paragraphe 5.3.2.

La médiocrité des résultats de cette analyse constitue en fait la source d'une réflexion nous amenant à proposer un nouveau récepteur, au paragraphe 5.3, basé sur le principe des deux méthodes précédemment citées et autorisant un recouvrement pratiquement complet de la performance d'un système de transmission OFDM codé avec clipping.

### 5.3.2 L'approche d'Ochiai pour transmission codée

Le principe du récepteur, présenté dans [96], est rappelé au paragraphe 4.4.5. Nous établissons au préalable la performance du récepteur pour un système non codé. La figure 5.11 corrobore les résultats avancés par l'auteur dans [96]. Les  $Q$  mots de code re-simulés utilisés par la détection de l'équation (4.52) sont construits en considérant une distance de Hamming  $d^H = 1$ .

À la seconde itération, l'algorithme permet un recouvrement de la performance particulièrement significatif. Il apparaît que les  $Q$  mots  $\tilde{C}_q^\pi$  construits à distance  $d^H$  de  $\hat{C}^\pi$  autorisent à l'équation (4.52) une forte efficacité de détection. Ochiai montre que la performance du récepteur peut encore être améliorée en augmentant la distance de Hamming à  $d^H = \{1, 2\}$ .

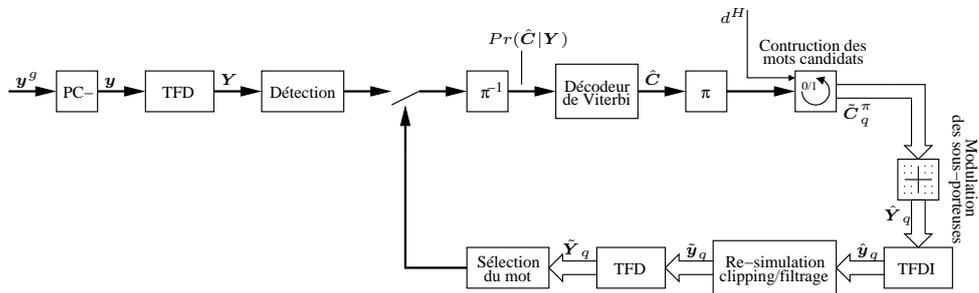


FIG. 5.10 – Récepteur itératif à détection sous-optimale pour transmissions OFDM codées avec clipping.

Le récepteur à détection de trame pour transmissions codées est illustré par la figure 5.10. La performance associée à ce récepteur est montrée à la figure 5.12.

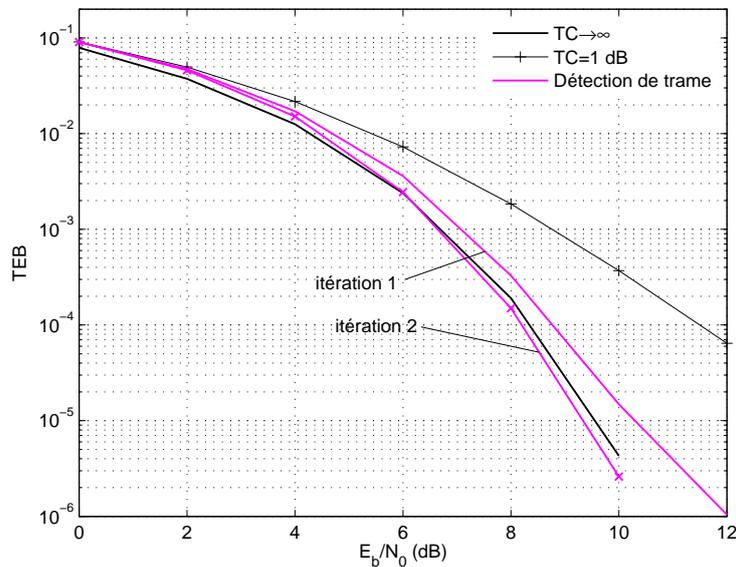


FIG. 5.11 – Performance du récepteur par détection de trame proposé par Ochiai [96] pour transmissions OFDM non-codées sur canal BABG avec clipping et modulation QPSK avec étiquetage de Gray aux itérations 1 et 2.  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB,  $d^H = 1$ .

Dans ce scénario, le récepteur montre un tout autre comportement en affichant une contre performance marquée. En effet, l’algorithme proposée par Ochiai ne converge pas en la présence d’une stratégie de codage de canal.

Nous pouvons expliquer ce résultat en interprétant la méthode. À chaque nouvelle correction, l’information à l’entrée du décodeur de canal ne diffère que de  $d^H$  bits de la décision précédente. En ce sens, le pouvoir de correction de la détection de trame est insuffisante pour influencer la nouvelle décision prise par le décodeur de canal, puisque inférieure à la distance minimale du code. Considérant la performance mesurée du code convolutif utilisé ici. Il semble que la correction apportée par la décision proposée par Ochiai interdise la convergence du récepteur. Les deux itérations effectuées montrent l’inefficacité de l’approche quand bien même de forts niveaux de rapport signal à bruit sont considérés.

Dans le paragraphe suivant, nous apportons la proposition d’un nouveau récepteur basé sur le principe du maximum de vraisemblance et de re-simulation mais qui soit en mesure d’apporter une correction suffisante afin de provoquer la convergence du récepteur.

### 5.3.3 Récepteur SML à décision souple aidée par détection sous-optimale à maximum de vraisemblance

L’idée principale de la méthode est inspirée des stratégies de re-simulation utilisées par Ochiai dans [96] et Zillmann *et al.* dans [142]. Cependant, ces deux récepteurs montrent une performance de restauration limitée, voire mauvaise, surtout en

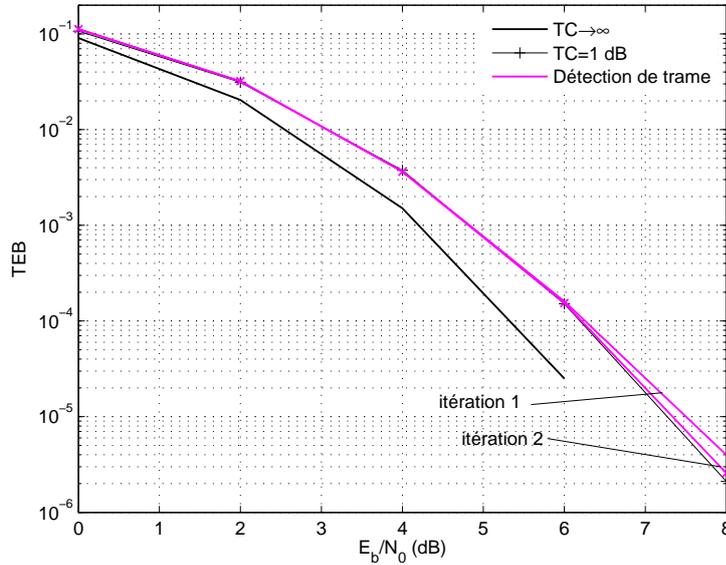


FIG. 5.12 – Performance du récepteur par détection de trame proposé par Ochiai [96] pour transmissions OFDM codées par code convolutif  $(1, \frac{5}{7})_8$  sur canal BABG avec clipping et modulation QPSK avec étiquetage de Gray aux itérations 1 et 2.  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB,  $\mathbf{d}^H = 1$ .

considérant leur complexité; références faites au paragraphe 5.3.2 et directement à [142]. Le récepteur SML se distingue par la correction de chaque bit du mot de code d'après l'information extrinsèque fournie par un décodeur de canal SISO. Nous proposons dans ce paragraphe une description détaillée de l'algorithme.

### 5.3.3.1 Détection optimale

Ce nouveau récepteur à décision souple est aidée par une détection sous-optimale à maximum de vraisemblance, qui contrairement aux approches DAR et BNC, ne corrige pas le signal en tête de récepteur. De plus, il échange, en collaboration avec un décodeur de canal de type SISO, une information souple à propos des bits de code. L'approche se différencie en traitant indépendamment chaque sous-porteuse du symbole OFDM. Le but est de pouvoir traiter parallèlement et indépendamment chaque bit du mot de code à chaque itération de l'algorithme. Le critère satisfaisant la détection optimale est tel que :

$$\hat{\mathbf{C}}_q^\pi = \arg \min_{\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi} \left( \sum_{n=0}^{N-1} |Y_n - H_n \tilde{Y}_{q,n}|^2 \right) \quad (5.11)$$

À l'équation (5.11), le signal dans le domaine fréquentiel  $\tilde{\mathbf{Y}}_q$  est issu de la re-simulation du clipping à partir du mot de code  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$  telle que  $\tilde{\mathbf{Y}}_q = \mathcal{CF}_{TC}^J(\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi)$ . L'optimalité de la détection du mot de code satisfaisant l'équation (5.11) nécessite

alors la construction d'un ensemble exhaustif de  $Q = 2^V$  mots  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$ . Ceci rend extrêmement difficile l'implantation d'une telle détection. Nous proposons donc une détection sous-optimale souple au prochain paragraphe.

### 5.3.3.2 Décision sous-optimale souple à maximum de vraisemblance

#### Information *a priori* et *bit-flipping*

Considérons qu'un décodeur de canal SISO offre une information souple extrinsèque à propos des bits d'un mot de code. Cette information peut être alors considérée comme un *a priori* et constituer un mot entrelacé selon une décision dure. Notant  $(\cdot)^\pi$  la fonction d'entrelacement, on a :

$$\hat{C}_v^\pi = \begin{cases} 0 & \text{si } Pr_e(\hat{C}_v^\pi = 0 | \mathbf{Y}) > 0.5 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leq v < V \quad (5.12)$$

À partir de ce mot *a priori*, un ensemble de taille  $Q$  mots est déterminé en son voisinage. Contrairement à [96], la stratégie de construction est ici orientée afin de fournir une décision souple à propos de chacun des bits du mot de code et non du mot de code entier. Considérant le fait qu'un entrelaceur aléatoire est utilisé, les nouveaux  $Q$  mots ne sont pas nécessairement des mots de code et il est donc possible de modifier chaque bit de  $\hat{\mathbf{C}}^\pi$  indépendamment les uns des autres. L'ensemble ainsi construit forme l'ensemble des  $Q$  mots  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$  candidats à la re-simulation du clipping.

Afin de restreindre la recherche de ces mots, une étape de *bit-flipping* est implantée. Cette dernière est pensée afin que chaque mot construit à partir de l'*a priori* permette de modifier le symbole modulant la sous-porteuse correspondante. En d'autres termes, le mot *a priori* est divisé en  $\frac{V}{M}$  groupes de  $M$  bits, chacun de ces groupes fait donc correspondre un symbole appartenant au diagramme en constellation de la modulation  $\mathcal{S}$  et étiqueté par  $M$  bits. En modifiant la valeur d'un ou plusieurs bits dans ces groupes sous la contrainte d'une distance de Hamming  $d^H$ , le symbole utilisé pour le moduler est modifié. Comme l'illustre la figure 5.13, à chaque permutation dans un groupe est associé un nouveau mot  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$ .

Si la construction de l'ensemble des mots voisins de l'*a priori*  $\hat{\mathbf{C}}^\pi$  est effectuée exhaustivement tous les symboles appartenant à  $\mathcal{S}$  sont adressés lors de la re-simulation du clipping et l'ensemble des mots  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$  ainsi construits est supposé suffisant pour maintenir l'optimalité de la détection donnée à l'équation (5.11). La complexité de l'algorithme est alors dépendante du nombre d'itérations effectuées et des  $Q$  mots construits selon le jeu de distances  $\mathbf{d}^H$  telle que  $\mathcal{O}(iQJN \log JN)$  avec :

$$Q = \frac{V}{M} \sum_{\mathbf{d}^H} \binom{M}{d^H} \quad (5.13)$$

Le jeu de distances de Hamming  $\mathbf{d}^H = \{1, \dots, M\}$  représente alors la solution générant le plus de mots  $\tilde{\mathbf{C}}_q^\pi$  au voisinage de l'*a priori*. En limitant sciemment les éléments de ce jeu de distances, il est alors possible de restreindre la complexité de l'algorithme.

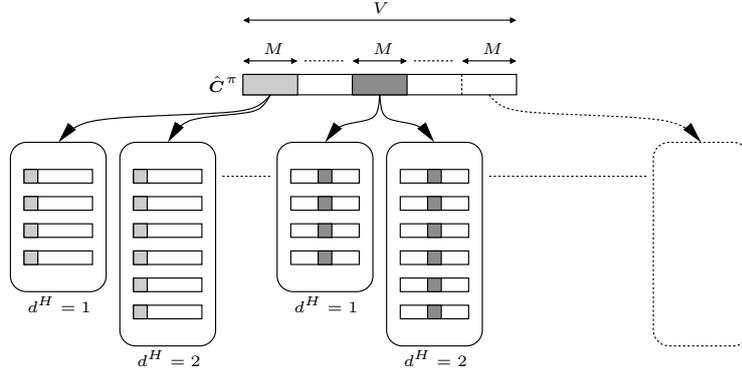


FIG. 5.13 – Construction des  $Q$  mots voisins  $\tilde{C}_q^\pi$  de l'*a priori*  $\hat{C}^\pi$  par *bit-flipping*, illustration pour  $M = 4$  et  $d^H = \{1, 2\}$ .

### Décision souple et sous-optimalité

Comme le montre le paragraphe 4.3.1 et en conséquence du théorème central limite, le bruit de clipping peut être vu comme gaussien dans le domaine fréquentiel à la condition que le taux de clipping soit suffisamment bas et pour un grand nombre de sous-porteuses OFDM. Enfin, considérant son indépendance et le fait que le canal avec clipping soit sans-mémoire, il est possible d'écrire la densité jointe des observations conditionnées par les sous-porteuses de la trame OFDM avec clipping à l'entrée du canal comme :

$$p(\mathbf{Y}|\tilde{\mathbf{X}}) = \prod_{n=0}^{N-1} p(Y_n|\tilde{X}_n) \quad (5.14)$$

Par application du théorème de Bayes, la probabilité *a posteriori* des bits du mot de code sur une trame OFDM sachant les observations issues du canal est :

$$\begin{aligned} Pr(\hat{C}_v^\pi = a|\mathbf{Y}) &\propto \sum_{n=0}^{N-1} p(\mathbf{Y}|\tilde{X}_n) Pr(\tilde{X}_n|\hat{C}_v^\pi = a) \\ &\propto \sum_{\tilde{X}_n|\hat{C}_v^\pi = a} p(\mathbf{Y}|\tilde{X}_n) \\ &\propto \sum_{\tilde{X}_n|\hat{C}_v^\pi = a} p(Y_n|\tilde{X}_n) \\ &\propto \sum_{\tilde{X}_n|\hat{C}_v^\pi = a} e^{-\frac{|Y_n - H_n \mathbf{C}_v^\pi J_{TC}(\mathbf{X})_n|^2}{N_0}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

La sous-optimalité de la détection proposée par l'équation (5.15) est obtenue en utilisant l'ensemble des  $Q$  mots  $\tilde{C}_q^\pi$  au voisinage de l'*a priori*  $\hat{C}^\pi$ . Il vient ainsi :

$$Pr(\hat{C}_v^\pi = a|\mathbf{Y}) \approx \sum_{\tilde{Y}_{q,n}|\hat{C}_v^\pi = \tilde{C}_{q,v}^\pi} e^{-\frac{|Y_n - H_n \tilde{Y}_{q,n}|^2}{N_0}}, \quad 0 \leq v < V \quad (5.16)$$

Dans l'équation (5.16), la condition  $\tilde{Y}_{q,n}|\hat{C}_v^\pi = \tilde{C}_{q,v}^\pi$  permet d'allouer la sous-porteuse  $\tilde{Y}_{q,n}$  issue de la re-simulation du clipping à partir du mot  $\tilde{C}_q^\pi$  à la condition que le bit détecté soit  $\hat{C}_v^\pi = \tilde{C}_{q,v}^\pi$ .

### 5.3.4 Description du récepteur SML

La décision de l'équation (5.16) est utilisée dans le récepteur SML (Suboptimal Maximum-Likelihood) afin de fournir itérativement une correction sur la décision souple des bits du mot de code transitant sur un canal avec clipping [39]. Le modèle de l'émetteur est donné à la figure 5.1 tandis que le récepteur SML est décrit par le synoptique de la figure 5.14. Le récepteur profite pleinement de l'information extrinsèque apportée par le décodeur SISO afin de fournir une information *a priori* à la détection souple de l'équation (5.16).

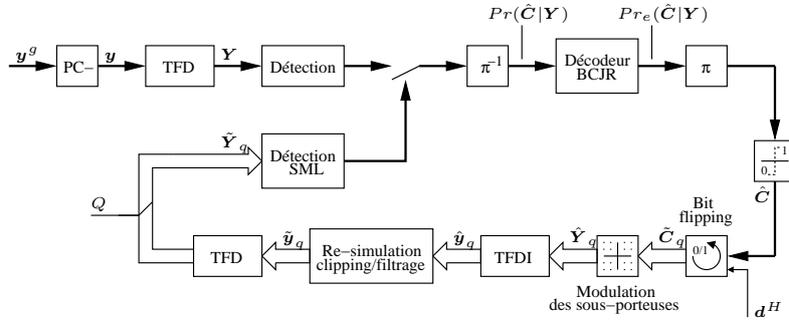


FIG. 5.14 – Synoptique du récepteur itératif à décision souple SML [39].

### Algorithme du récepteur SML

L'algorithme du récepteur SML est donné comme suit :

1. Initialiser le compteur d'itération  $i = 0$  ;
2. Donner une *primo*-détection *a posteriori* des bits du mot de code par un maximum de vraisemblance basé sur les symboles de la modulation utilisée telle que :

$$Pr^{(0)}(\hat{C}_v^\pi = a|\mathbf{Y}) \propto \sum_{S_m|\hat{C}_v^\pi=a} e^{-\frac{|Y_n - H_n \alpha S_m|^2}{N_0}}, \quad 0 \leq v < V \quad (5.17)$$

3. Procéder à une étape de décodage de canal utilisant l'information *a posteriori* dé-entrelacée  $Pr^{(i)}(\hat{C}_v = a|\mathbf{Y})$  et donner une information extrinsèque à propos de ces bits du mot de code  $Pr_e^{(i)}(\hat{C}_v = a|\mathbf{Y})$  ;

4. BIT-FLIPPING

Entrelacer l'information extrinsèque donnée par le décodeur de canal et déduire le mot de code *a priori*  $\hat{C}^\pi$ . Sachant le jeu de distance de Hamming sélectionnées  $\mathbf{d}^H$ , générer les  $Q$  mots  $\tilde{C}_q^\pi$  ;

### 5. DÉTECTION SML

Re-simuler le clipping tel que pour l'ensemble de taille  $Q$ , il existe  $\tilde{\mathbf{Y}}_q = \mathcal{CF}_{TC}^J(\mathbf{C}_q^\pi)$  et obtenir une nouvelle décision souple *a posteriori* à partir de l'équation (5.16) qui remplace dorénavant celle à l'étape 2, comme :

$$Pr^{(i)}(\hat{C}_v^\pi = a | \mathbf{Y}) \approx \sum_{\tilde{\mathbf{Y}}_{q,n} | \hat{C}_v^\pi = \tilde{C}_{q,v}^\pi} e^{-\frac{|Y_n - H_n \mathcal{CF}_{TC}^J(\tilde{C}_q^\pi)_n|^2}{N_0}}, \quad 0 \leq v < V \quad (5.18)$$

6. Incrémenter le compteur d'itérations  $i = i + 1$  et revenir à l'étape 3.

### 5.3.5 Performance du récepteur SML

La performance du récepteur est envisagée considérant l'hypothèse d'un étiquetage par code de Gray des symboles composant le diagramme en constellation d'une modulation numérique 16-QAM. La distance de Hamming entre chaque groupe de 4 bits étiquetant un symbole de la constellation est donc limitée à un seul bit. L'hypothèse retenue est que la dispersion des symboles à l'issue de la propagation du signal OFDM sur canal avec clipping ne provoque, au maximum, qu'une erreur d'un seul bit sur chaque sous-porteuse. Cette hypothèse permet de limiter la complexité de l'algorithme en réduisant le jeu de distances de Hamming à  $\mathbf{d}^H = 1$ . Le nombre de mots voisins de l'*a priori* est, d'après l'équation (5.13),  $Q = V$  et porte la complexité du récepteur à l'ordre  $\mathcal{O}(iVJN \log JN)$ .

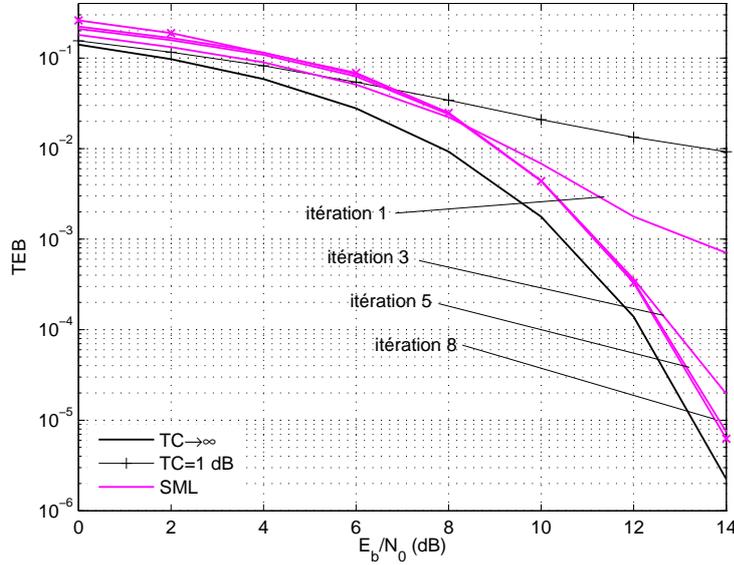


FIG. 5.15 – Performance du récepteur SML pour transmissions OFDM non-codées sur canal à BABG avec clipping et une modulation 16-QAM pour les itérations 1,3,5 et 8,  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB et  $\mathbf{d}^H = 1$  [39].

Dans un premier temps, la détection SML est appliquée directement à la *primodétection* prise par le récepteur sans codage de canal. Dans ce contexte de trans-

mission, le récepteur montre une efficacité remarquable pour un taux de clipping  $TC = 1$  dB, comme l'illustre la figure 5.15. La convergence de l'algorithme est obtenue à la huitième itération bien que la différence avec la cinquième soit à peine perceptible. Le récepteur établit donc une performance à 0.4 dB du cas sans clipping, ce qui reste en deçà de l'approche proposée par Ochiai dans [96] pour le même scénario et comme le montre la figure 5.11.

La figure 5.16 montre la performance du récepteur avec codage de canal. Pour comparaison avec les résultats précédents, l'émetteur du paragraphe 5.1 est considéré. La convergence du récepteur est obtenue après trois itérations et chacune d'elles montre une amélioration notable de la performance de la transmission. En outre, le récepteur SML atteint un recouvrement de la performance à 0.2 dB du cas sans clipping, surclassant alors les récepteurs turbo-DAR et soft-BNC. De surcroît, l'approche par décision indépendante des bits du mot de code montre alors son intérêt face à la détection de trame proposée dans [96].

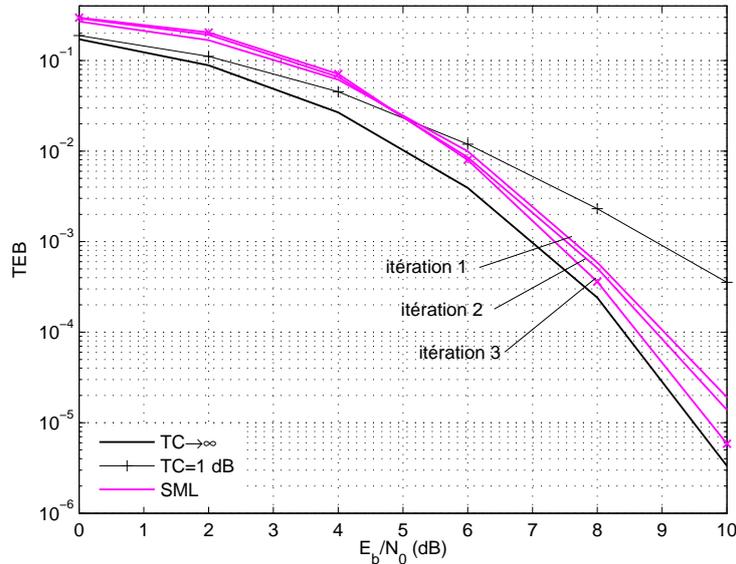


FIG. 5.16 – Performance du récepteur SML pour transmissions OFDM codées sur canal à BABG avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1,2 et 3,  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB et  $d^H = 1$  [39].

Sur canal sélectif en fréquence, nous utilisons le modèle de canal STVFS, le récepteur montre un comportement analogue au cas précédent. L'utilisation de la connaissance des coefficients du canal dans la détection par maximum de vraisemblance de l'équation (5.16) assure la convergence de l'algorithme comme pour le récepteur soft-BNC. Après trois itérations, le récepteur SML surpasse encore la performance du récepteur soft-BNC en étant à 0.2 dB du cas sans clipping, comme le montre la figure 5.17.

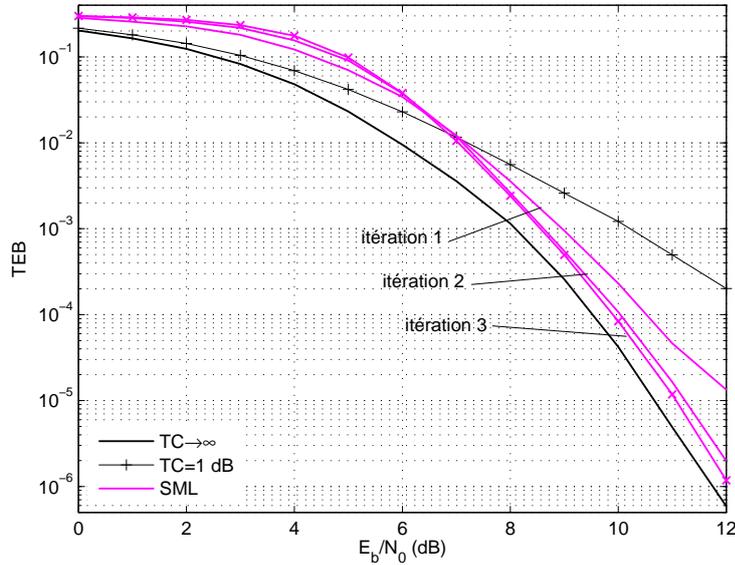


FIG. 5.17 – Performance du récepteur SML pour transmissions OFDM codées sur canal sélectif STVFS avec clipping et modulation 16-QAM pour les itérations 1,2 et 3,  $N = 64$ ,  $J = 4$ ,  $TC = 1$  dB,  $\beta = 2.5$  et  $d^H = 1$  [39].

### 5.3.6 Discussion

Le récepteur SML [40, 39] que nous proposons dans ces travaux est montré comme une technique itérative de correction de clipping très efficace. Elle surpasse notamment les récepteurs turbo-DAR [30] et soft-BNC [37]. En effet, la comparaison des approches SML et soft-BNC [40] montrent qu'une technique basée sur une détection à maximum de vraisemblance avec information *a priori* autorise un recouvrement de la performance du système supérieure à la manipulation du signal d'observation issu du canal en tête de récepteur.

Cependant, l'approche SML se révèle être d'un ordre de complexité bien plus élevé que les techniques basées sur les corrections DAR et BNC. Elle nécessite, en effet, la construction d'un ensemble de signaux re-simulés qui peut rendre difficile l'implantation du récepteur selon les paramètres de la transmission. En effet, l'équation (5.13) définissant  $Q$  fait tendre rapidement l'espace des mots voisins de l'*a priori* vers de très grandes tailles, ce qui réduit considérablement la pertinence de l'approche. La longueur du mot de code et la modulation utilisées peuvent également devenir des facteurs limitants au regard de la complexité et de la performance du récepteur SML. Enfin, le jeu des distances de Hamming considéré est ici défini empiriquement, en comptant sur la faible dispersion des symboles composant le diagramme en constellation de la modulation à la réception.

Néanmoins, dans le scénario de communication envisagé précédemment, la stratégie de correction s'attachant à traiter simultanément l'ensemble des bits du mot de code, permet au récepteur une excellente convergence. Enfin, l'utilisation d'une

détection par maximum de vraisemblance autorise à disposer d'une égalisation de canal performante qui maintient la performance de correction du SML sur canal sélectif en fréquence. Enfin, l'augmentation du nombre de distances de Hamming considérées montre une mesurée influence sur la performance du récepteur SML <sup>1</sup> :

$\mathbf{d}^H$	$Q$	$E_b/N_0(dB)$		
		0	5	10
{1}	1024	2.7e-1	2.5e-2	1.9e-5
{1, 2}	2560	2.9e-1	2.6e-2	1.0e-5
{1, 2, 3}	3584	3.0e-1	2.6e-2	2.0e-5

TAB. 5.2 – Taux d'erreur binaire obtenu après une itération du récepteur SML en fonction de la taille de l'espace des mots utilisés lors de la re-simulation du clipping.

Bien que cette influence soit peu significative sur la performance, elle est néanmoins avérée. Pour  $\mathbf{d}^H = \{1, 2, 3\}$ , la performance du récepteur s'en trouve d'ailleurs amoindrie. Étant donné la complexité liée à l'implantation de l'algorithme, la gestion des paramètres  $V$ ,  $M$  et  $\mathbf{d}^H$  ne peut malheureusement qu'être appréhendée de manière empirique, pénalisant l'étude formelle de leur influence.

Finalement, le récepteur montre un très bon comportement quant au recouvrement de la performance dans un scénario de mots code de longueur modérée, ce qui est habituellement le cas avec des codes convolutifs, et pour des modulations numériques étiquetées par code de Gray. Aussi, l'information souple corrigée itérativement profite directement à la décision du décodeur SISO. D'une manière générale, les résultats prouvent que le récepteur est capable de restaurer la performance de manière pratiquement complète.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la performance de différents récepteurs compensant le clipping est analysée. Le paragraphe 5.2 s'attache à la comparaison exhaustive de la performance des récepteurs basés sur des techniques de faible complexité, soit d'ordre  $\mathcal{O}(JN \log JN)$ . Nous proposons alors un récepteur à décision souple, au paragraphe 5.2.2, utilisant une boucle de correction BNC. Les techniques DAR et BNC sont ensuite confrontées et leur comportement itératif finement analysé grâce à l'étude par EXIT charts. Leur capacité effective de recouvrement de la performance du système est débattue et les différences entre chaque approche sont clairement identifiées. Nos travaux révèlent la supériorité de l'approche soft-BNC [37, 38], et plus généralement des techniques basées sur une détection par maximum de vraisemblance qui prouvent leur efficacité aussi bien sur canal à BABG que sélectif en fréquence.

Au paragraphe 5.3, un nouveau récepteur basé sur un procédé de détection sous-optimal des bits du mot de code par maximum de vraisemblance est présenté. Le récepteur SML [40, 39] tient son originalité par le traitement indépendant de chaque

<sup>1</sup>Pour des raisons de temps de calcul, le récepteur SML n'est pas poussé à convergence.

bit du mot de code et par la construction d'un espace de mots voisins d'une information *a priori* délivrée par un décodeur de canal SISO. Le fonctionnement conjoint de la décision SML et du décodeur de canal permet de recouvrir la performance d'un système OFDM avec clipping à 0.2 dB du cas linéaire. Le récepteur SML se montre comme l'approche la plus performante et surclasse les autres techniques trouvées dans la littérature. Néanmoins, l'algorithme de correction demeure très complexe et ses paramètres sont évalués empiriquement sans optimisation formelle. Cette technique démontre cependant que l'approche de re-simulation du clipping et *bit-flipping* est prometteuse ; là où les travaux proposés par Ochiai [96] et Zillmann *et al.* [142] s'accommodaient d'un gain en performance particulièrement limité.

---

# Conclusion et perspectives

---

Le travail présenté dans ce manuscrit s'est attaché à comprendre, analyser et proposer des solutions quant au problème du clipping des signaux de communication des systèmes OFDM codés. Le contexte d'application est tourné vers des liaisons sans-fil à ressources limitées à l'émetteur et ne disposant que de solutions de codage de canal peu performantes face aux effets d'un écrêtement volontaire des signaux OFDM à l'émission.

Au chapitre 2, nous avons rappelé les définitions et concepts basiques de la modulation OFDM. Ces éléments ont pour but de présenter les connaissances élémentaires mais nécessaires à la compréhension de la problématique du fort niveau de PAPR des signaux OFDM. Nous avons par ailleurs abordé la difficulté de leur amplification au chapitre 3 qui reste le problème principal de ce mode de communications. En effet, la dynamique des signaux à l'émission ne permet pas l'élévation de leur puissance à haut rendement par un amplificateur typique des télécommunications. Nous nous sommes alors attachés à présenter finement cette problématique par l'analyse de la statistique des signaux OFDM dans différents cas d'étude. Aussi, nous avons rappelé les différentes techniques permettant de maintenir la dynamique des signaux OFDM à des niveaux de PAPR modérés et avons émis un avis critique sur chacune d'elles.

Au chapitre 4, nous avons porté notre attention sur le *clipping* des signaux à l'émission. Cette méthode de limitation d'amplitude se distingue par sa très faible complexité et sa facilité d'implantation. Largement considérée dans la littérature, cette approche a cependant l'inconvénient, bien qu'elle autorise l'amplification efficace des signaux OFDM, de provoquer des distorsions très dommageables quant à la qualité de la communication. Nous avons alors proposé de caractériser ces dégradations en définissant la statistique propre des signaux OFDM avec clipping, au paragraphe 4.2. Cette analyse repose une extension du théorème de Bussnag pour les signaux OFDM en bande de base. L'analyse complète de l'évolution du PAPR de ces signaux nous a permis d'établir la performance théorique des systèmes OFDM avec clipping [38] quant au taux d'erreur et à la capacité de canal au paragraphe 4.3. Les résultats démontrent qu'un faible taux de clipping est un facteur particulièrement limitant de la performance des systèmes OFDM. Aussi, nous avons prouvé que la capacité de canal est relativement très dégradée pour des modulations d'ordres supérieurs.

Le chapitre 5 a regroupé nos propositions de nouveaux récepteurs corrigeant le clipping. Nous avons notamment donné, au paragraphe 5.2.2, l'extension d'une méthode par correction souple du signal en tête de récepteur [37]. L'algorithme soft-BNC montre de bonnes aptitudes de restauration, aussi bien sur canal à bruit additif blanc gaussien que sélectif en fréquence. Nous avons également apporté une

analyse fine de son comportement grâce aux EXIT charts et confronté le soft-BNC au récepteur turbo-DAR, faisant référence dans la littérature. Nous avons alors pu affirmer la suprématie de l'approche soft-BNC [37, 38] qui tire bénéfice d'une détection par maximum de vraisemblance, déterminante pour assurer son efficacité.

Au paragraphe 5.3, nous avons proposé un récepteur original autorisant la correction du clipping par décision souple aidée par une détection sous-optimale à maximum de vraisemblance [39, 40]. Le récepteur SML est basé sur des principes lui autorisant la correction indépendante des bits du mot de code et lui garantit une excellente performance de correction, comme l'a montré le paragraphe 5.3.5. La complexité associée au concept de re-simulation du clipping en réception peut cependant rendre délicate l'implantation du récepteur. La décision souple sous-optimale est néanmoins obtenue sans concession sur la performance et surpasse celle des méthodes pouvant être trouvées dans la littérature.

Après avoir établi une étude détaillée du clipping et de ses effets sur les communications OFDM, nous avons pu proposer des solutions quant à sa compensation par des récepteurs adaptés qui, pour un contexte de codage de canal à pouvoir de correction limitée face aux dégradations du clipping, sont à même de pratiquement restaurer la performance du système. Nous avons montré que les techniques de correction basées sur le principe du maximum de vraisemblance offrent des résultats particulièrement satisfaisants. L'analyse des effets du clipping sur les signaux OFDM montre que la nature du bruit additif associé, dont la distribution est difficile à obtenir formellement, peut très raisonnablement être considérée comme gaussienne, pour un taux de clipping faible et avec un nombre de sous-porteuses OFDM suffisant. Ce résultat est en fait essentiel. En effet, les normes de communication actuelles tendent à utiliser des techniques de codage de canal de nouvelle génération, *i.e.* les turbo-codes et LDPC en WiMAX, UMTS, DVB et ADSL2 notamment, qui offrent une performance approchant la capacité sur canal gaussien. Comme nous en avons déjà discuté aux paragraphes 4.3.4 et 5.1, ces techniques sont théoriquement capables de s'accommoder du bruit de clipping sous hypothèse de sa gaussiannité. Différents travaux viennent corroborer cette affirmation [94, 98, 100, 117]. De plus, la simulation montre que la performance des turbocodes, lorsque conjointement utilisés à l'OFDM avec clipping, ne souffre que d'une dégradation mesurée [100] et que des techniques de compensation de clipping n'autorisent qu'un très faible, voire aucun, effet de correction supplémentaire dans ce scénario.

Étant donné l'adoption de plus en plus courante de codes de canal de nouvelle génération ainsi que l'utilisation omniprésente de la modulation OFDM dans les normes de communications actuelles et futures, il est évident que les perspectives de prochains travaux doivent s'orienter vers l'étude et l'adaptation de la performance de ces types de codes au clipping. Pour le moment, très peu de contributions scientifiques traitent de ce cas particulier et il reste un champ de perspectives nouvelles à exploiter.

# Convolution circulaire

Supposons un signal d'entrée à temps discret  $\mathbf{x}$  de  $N$  échantillons et la réponse impulsionnelle d'un canal de communication  $\mathbf{h}$  de longueur  $L$ . La convolution circulaire permet d'établir, par définition, que leur réponse dans le domaine fréquentiel est la multiplication élément par élément de leur coefficients et le signal de sortie résultant est :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathcal{F}_N\{\mathbf{y}\} \\ Y_n &= H_n X_n, \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

En développant  $\mathbf{y} = \mathcal{F}_N^{-1}\{\mathbf{Y}\}$ , il vient de l'équation (2.9) :

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n H_n e^{2j\pi \frac{kn}{N}}, \quad 0 \leq k < N \quad (\text{A.2})$$

De l'équation (2.11), on peut réécrire les coefficients de la réponse du canal dans le domaine fréquentiel comme :

$$H_n = \sum_{l=0}^{N-1} h_l e^{-2j\pi \frac{ln}{N}}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{A.3})$$

Et en remplaçant (A.3) dans l'équation (A.2) :

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( X_n \left( \sum_{l=0}^{N-1} h_l e^{-2j\pi \frac{ln}{N}} \right) e^{2j\pi \frac{kn}{N}} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \left( h_l \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right), \quad 0 \leq k < N \quad (\text{A.5})$$

DÉFINITION - Soit le signal OFDM périodisé tel que :

$$x_{(k-l)_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2j\pi \frac{n(k-l)}{N}} \quad (\text{A.6})$$

L'opération de convolution circulaire [102] §3.6.4 est donc :

$$y_k = \sum_{l=0}^{N-1} h_l x_{(k-l)_N}, \quad 0 \leq k < N \quad (\text{A.7})$$



---

# Performance théorique de modulations numériques choisies

---

Ce chapitre présente les démonstrations nécessaires constituant les étapes menant à l'établissement de la performance théorique d'une modulation antipodale BPSK et 16-QAM en OFDM. Cette dernière est largement considérée dans les résultats de simulation et lors des exemples illustratifs tout au long de ce manuscrit. La démonstration de la performance théorique en taux d'erreur binaire de la modulation 16-QAM utilise les résultats successifs issus de l'étude de la performance des modulations 4-PAM et 4-PSK ; résultats apportés respectivement aux paragraphes B.2 et B.3.

## B.1 Performance d'un système OFDM avec modulation antipodale

Soit une modulation numérique à deux états  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1\}$ , faisant figurer les éléments binaires  $\mathbf{b}_0 = 1$  et  $\mathbf{b}_1 = 0$  tels que  $S_0 = -\sqrt{E_b}$  et  $S_1 = \sqrt{E_b}$ .

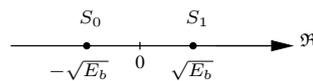


FIG. B.1 – Diagramme en constellation d'une modulation antipodale à deux états : modulation 2-PSK ou 2-PAM.

Supposons qu'ils soient équiprobablement distribués sur les  $N$  sous-porteuses d'un système OFDM, on obtient alors après démodulation à la réception pour un canal de communication à BABG :

$$Y_n = X_n + W_n, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.1})$$

On détermine donc les fonctions de densité de probabilité *a posteriori* des symboles  $S_0$  et  $S_1$  de  $\mathcal{S}$  pour chaque sous-porteuse :

$$p(\Re\{Y_n\} | S_{0,1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(\Re\{Y_n\} - S_{0,1})^2}{N_0}} \quad (\text{B.2})$$

$N_0$  étant la puissance de bruit. La règle de décision est établie considérant un seuil défini en 0. De ce fait :

$$\begin{cases} Y_n = S_0 & \text{si } \Re\{Y_n\} \leq 0 \\ Y_n = S_1 & \text{si } \Re\{Y_n\} > 0 \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.3})$$

La probabilité de décider  $S_0$  alors que symbole de modulation  $S_1$  fut transmis conditionnée par  $Y_n \leq 0$  est :

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon_n|S_1) &= \int_{-\infty}^0 p(\Re\{Y_n\}|S_1) dY_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\Re\{Y_n\} - \sqrt{E_b})^2}{N_0}} dY_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Avec  $\mathcal{Q}(\cdot)$  la fonction d'erreur :

$$\mathcal{Q}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (\text{B.5})$$

Pareillement, la probabilité de décider  $S_1$  pour  $S_0$  est  $Pr(\epsilon_n|S_0) = \frac{1}{2} \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$ .

Pour une modulation antipodale à deux états, chaque symbole de  $\mathcal{S}$  fait correspondre un bit dont la probabilité d'erreur moyenne, soit le taux d'erreur binaire, est équivalent au taux d'erreur symbole. En OFDM, le TEB est la moyenne des bits en erreur sur les  $N$  sous-porteuses du système, soit :

$$\begin{aligned} TEB &= \frac{1}{N} (NPr(\epsilon_n|S_0)Pr(S_0) + NPr(\epsilon_n|S_1)Pr(S_1)) \\ &= \frac{1}{2N} (NPr(\epsilon_n|S_0) + NPr(\epsilon_n|S_1)) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{Q}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Avec  $Pr(S_0) = Pr(S_1) = \frac{1}{2}$  puisque les symboles sont distribués de manière équiprobable.

## B.2 Performance d'une modulation 4-PAM

La modulation PAM (Pulse-Amplitude Modulation) encode un message binaire en faisant varier l'amplitude des symboles qui composent la constellation, voir figure B.2. Les régions de décision sur un symbole sont alors uniquement dépendantes de ce paramètre.

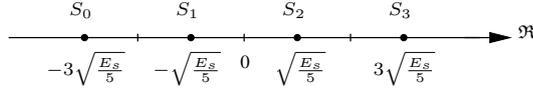


FIG. B.2 – Diagramme en constellation d'une modulation 4-PAM.

Une modulation 4-PAM est composée de quatre symboles  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$  faisant figurer autant de séquences de  $M = 2$  bits. L'énergie moyenne par symbole  $E_s$  est :

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} |S_m|^2 = 5$$

Chaque symbole est alors normalisé par  $S_0 = -3\sqrt{\frac{E_s}{5}}$ ,  $S_1 = -\sqrt{\frac{E_s}{5}}$ ,  $S_2 = \sqrt{\frac{E_s}{5}}$  et  $S_3 = 3\sqrt{\frac{E_s}{5}}$ , comme l'illustre la figure B.2.

On en déduit les seuils de décision suivants :

$$\begin{cases} Y_n = S_0 & \text{si } \Re\{Y_n\} < -2\sqrt{\frac{E_s}{5}} \\ Y_n = S_1 & \text{si } -2\sqrt{\frac{E_s}{5}} \leq \Re\{Y_n\} < 0 \\ Y_n = S_2 & \text{si } 0 \leq \Re\{Y_n\} \leq 2\sqrt{\frac{E_s}{5}} \\ Y_n = S_3 & \text{si } \Re\{Y_n\} > 2\sqrt{\frac{E_s}{5}} \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.7})$$

Considérons le symbole extérieur positif de la modulation. La probabilité d'erreur sachant que  $S_3$  fut transmis est :

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon_n|S_3) &= \int_{-\infty}^{2\sqrt{\frac{E_s}{5}}} p(\Re\{Y_n\}|S_3)dY_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{2\sqrt{\frac{E_s}{5}}} e^{-\frac{(\Re\{Y_n\}-3\sqrt{\frac{E_s}{5}})^2}{N_0}} dY_n \\ &= \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

On obtient par symétrie  $Pr(\epsilon_n|S_0) = Pr(\epsilon_n|S_3)$ .

Considérons à présent la probabilité d'erreur sachant la transmission du symbole  $S_2$  intérieur positif à la constellation :

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon_n|S_2) &= \int_{-\infty}^0 p(\Re\{Y_n\}|S_2)dY_n + \int_{2\sqrt{\frac{E_s}{5}}}^{\infty} p(\Re\{Y_n\}|S_2)dY_n \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De même pour  $S_1$ ,  $Pr(\epsilon_n|S_1) = Pr(\epsilon_n|S_2)$ .

Le taux d'erreur symbole d'une transmission OFDM à  $N$  sous-porteuses modulées par une constellation 4-PAM est alors [108] §5.2.6 :

$$\begin{aligned}
 TES &= \frac{1}{N} (NPr(\epsilon_n|S_0)Pr(S_0) + NPr(\epsilon_n|S_1)Pr(S_1) \\
 &+ NPr(\epsilon_n|S_2)Pr(S_2) + NPr(\epsilon_n|S_3)Pr(S_3)) \\
 &= \frac{1}{4N} (2NPr(\epsilon_n|S_1) + 2NPr(\epsilon_n|S_0)) \\
 &= \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

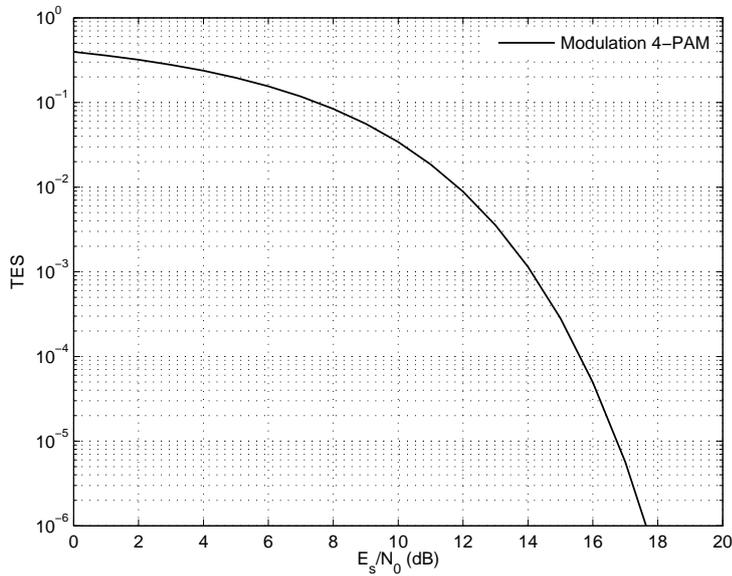


FIG. B.3 – Performance d'un système OFDM modulé par constellation 4-PAM sur canal BABG. Taux d'erreur symbole, équation (B.10).

### B.3 Performance d'une modulation 4-PSK

La modulation PSK (Phase-Shift Keying) encode l'information par variation de la phase des symboles constituant la modulation. Usuellement, les symboles sont donc représentés sur un cercle, comme disposés sur le diagramme en constellation de la figure B.4.

La modulation 4-PSK se compose de quatre symboles  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$  respectivement étiquetés par  $M = 2$  bits. L'énergie par symbole  $E_s = 2$ . La normalisation des symboles donne alors  $S_0 = (-1-j)\sqrt{\frac{E_s}{2}}$ ,  $S_1 = (1-j)\sqrt{\frac{E_s}{2}}$ ,  $S_2 = (1+j)\sqrt{\frac{E_s}{2}}$  et  $S_3 = (-1+j)\sqrt{\frac{E_s}{2}}$ .

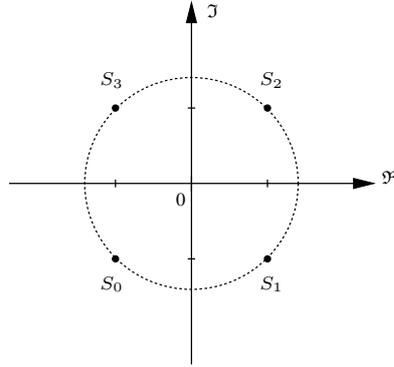


FIG. B.4 – Diagramme en constellation d'une modulation 4-PSK ou QPSK.

Les régions de décision sont définies par :

$$\begin{cases} Y_n = S_0 & \text{si } \Re\{Y_n\} < 0 \text{ et } \Im\{Y_n\} < 0 \\ Y_n = S_1 & \text{si } \Re\{Y_n\} > 0 \text{ et } \Im\{Y_n\} < 0 \\ Y_n = S_2 & \text{si } \Re\{Y_n\} > 0 \text{ et } \Im\{Y_n\} > 0 \\ Y_n = S_3 & \text{si } \Re\{Y_n\} < 0 \text{ et } \Im\{Y_n\} > 0 \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.11})$$

Afin de déterminer le *TES*, il est plus accommodant ici de l'exprimer en fonction la probabilité de bonne décision sur le symbole, car les régions de fausse décision se superposent. Prenons le cas du symbole  $S_2$  dont la région de décision correcte est donnée par le quart supérieur droit du plan complexe. La probabilité de décider en erreur sachant que  $S_2$  fut transmis est :

$$Pr(\epsilon_n|S_2) = 1 - Pr(\Re\{Y_n\} > 0|S_2)Pr(\Im\{Y_n\} > 0|S_2) \quad (\text{B.12})$$

Or :

$$\begin{aligned} Pr(\Re\{Y_n\} > 0|S_2) &= 1 - Pr(\Re\{Y_n\} < 0|S_2) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^0 p(\Re\{Y_n\} < 0|S_2) dY_n \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(\Re\{Y_n\} - \sqrt{\frac{E_s}{2}})^2}{N_0}} dY_n \\ &= 1 - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

La probabilité  $Pr(\Im\{Y_n\} > 0|S_2) = Pr(\Re\{Y_n\} > 0|S_2)$  et :

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon_n|S_2) &= 1 - \left(Pr(\Re\{Y_n\} > 0|S_2)\right)^2 \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)\right)^2 \\ &= 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) + \frac{1}{4} Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) - \frac{1}{4} Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Pour des valeurs de rapport signal à bruit  $\frac{E_s}{N_0} \rightarrow \infty$ ,  $Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}) \ll Q(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}})$  et on peut approximer :

$$Pr(\epsilon_n|S_2) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) \quad (\text{B.15})$$

Étant donné la symétrie de la constellation, on en déduit le taux d'erreur symbole [108] §5.2.7 :

$$\begin{aligned} TES &= \frac{1}{N} (NPr(\epsilon_n|S_0)Pr(S_0) + NPr(\epsilon_n|S_1)Pr(S_1) \\ &+ NPr(\epsilon_n|S_2)Pr(S_2) + NPr(\epsilon_n|S_3)Pr(S_3)) \\ &= \frac{1}{4N} (4NPr(\epsilon_n|S_0)) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

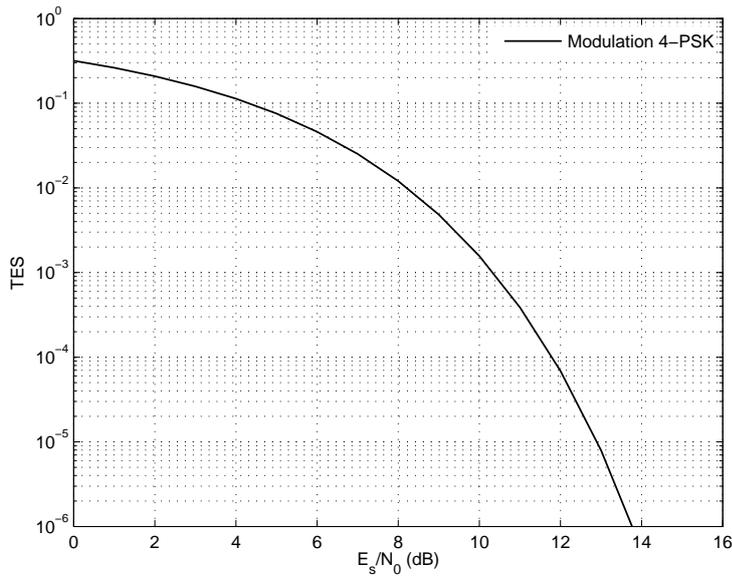


FIG. B.5 – Performance d'un système OFDM modulé par constellation 4-PSK sur canal BABG. Taux d'erreur symbole, équation (B.16).

## B.4 Performance de la modulation 16-QAM

La modulation, dont le diagramme en constellation est donnée à la figure B.6 se compose de seize signaux  $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_{15}\}$  respectivement étiquetés par  $M = 4$  bits. L'énergie par symbole est  $E_s = 10$  et leur normalisation est  $S_0 = (-3+3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}$ ,  $S_1 = (-1+3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}$ ,  $S_2 = (1+3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}$ ,  $S_3 = (3+3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}$ ,  $S_4 = (-3+j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}$ ,

$$\begin{aligned}
S_5 &= (-1 + j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_6 = (1 + j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_7 = (3 + j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_8 = (-3 - j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, \\
S_9 &= (-1 - j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_{10} = (1 - j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_{11} = (3 - j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_{12} = (-3 - 3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, \\
S_{13} &= (-1 - 3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}, S_{14} = (1 - 3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}} \text{ et } S_{15} = (3 - 3j)\sqrt{\frac{E_s}{10}}.
\end{aligned}$$

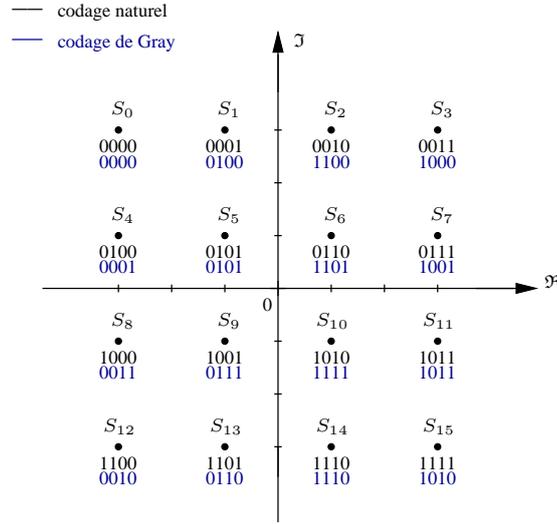


FIG. B.6 – Représentation d’une modulation 16-QAM avec étiquetage par codage naturel et codage de Gray.

Considérons le symbole  $S_5$ , situé à l’intérieur de la modulation. Nous allons déduire de sa région d’acceptation la probabilité d’erreur symbole. La région de bonne décision est bornée par :

$$Y_n = S_5 \quad \text{si} \quad \begin{cases} -2\sqrt{\frac{E_s}{10}} \leq \Re\{Y_n\} < 0 \\ 0 < \Im\{Y_n\} \leq 2\sqrt{\frac{E_s}{10}} \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.17})$$

La probabilité d’erreur associée sachant que  $S_5$  a été transmis est :

$$Pr(\epsilon_n|S_5) = 1 - Pr\left(-2\sqrt{\frac{E_s}{10}} \leq \Re\{Y_n\} < 0\right)Pr\left(0 < \Im\{Y_n\} \leq 2\sqrt{\frac{E_s}{10}}\right) \quad (\text{B.18})$$

On peut alors considérer que le symbole  $S_5$  est à l’intersection de deux constellations 4-PAM. La probabilité d’erreur des symboles intérieurs d’une 4-PAM est donnée par l’équation (B.9). En remplaçant (B.9) dans (B.18), on a :

$$\begin{aligned}
Pr(\epsilon_n|S_5) &= 1 - (1 - Q(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}))^2 \\
&= 2Q(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}) \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

Considérons à présent le symbole  $S_3$  situé dans le coin supérieur droit de la

constellation. La région de bonne décision est :

$$Y_n = S_3 \quad \text{si} \quad \begin{cases} \Re\{Y_n\} > 2\sqrt{\frac{E_s}{10}} \\ \Im\{Y_n\} > 2\sqrt{\frac{E_s}{10}} \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.20})$$

On peut alors considérer  $S_3$  comme étant un point d'une constellation 4-PSK. La probabilité d'erreur symbole est alors donné par l'équation (B.16). On a alors :

$$Pr(\epsilon_n|S_3) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}\right) \quad (\text{B.21})$$

Il reste maintenant à déduire le  $TES$  des symboles situés ni aux coins ni à l'intérieur de la modulation. Considérons le symbole  $S_{11}$ , la région de bonne décision est alors :

$$Y_n = S_{11} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \Re\{Y_n\} > 2\sqrt{\frac{E_s}{10}} \\ -2\sqrt{\frac{E_s}{10}} < \Im\{Y_n\} < 0 \end{cases}, \quad 0 \leq n < N \quad (\text{B.22})$$

On peut donc considérer que le symbole  $S_{11}$  est au croisement de symboles extérieur et intérieur de la modulation 4-PAM. La probabilité d'erreur associée est donc :

$$Pr(\epsilon_n|S_{11}) = 1 - Pr(\Re\{Y_n\} > 2\sqrt{\frac{E_s}{10}})Pr(-2\sqrt{\frac{E_s}{10}} < \Im\{Y_n\} < 0) \quad (\text{B.23})$$

En intégrant les équations (B.8) et (B.9) dans (B.23) on obtient :

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon_n|S_{11}) &= 1 - \left( \left(1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}\right)\right) \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}\right)\right) \right) \\ &= \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Compte tenu de la répartition des symboles de la modulation, on peut écrire le taux d'erreur symbole d'une 16-QAM par codage naturel pour une transmission OFDM à  $N$  sous-porteuses comme :

$$\begin{aligned} TES &= \frac{1}{N} (NPr(\epsilon_n|S_5)4Pr(S_5) + NPr(\epsilon_n|S_3)4Pr(S_3) + NPr(\epsilon_n|S_{11})8Pr(S_{11})) \\ TES &= \frac{1}{N} \left( \frac{4N}{16}Pr(\epsilon_n|S_5) + \frac{4N}{16}Pr(\epsilon_n|S_3) + \frac{8N}{16}Pr(\epsilon_n|S_{11}) \right) \\ &= \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{10N_0}}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

---

# Capacité d'un canal blanc additif gaussien avec clipping discret et sans-mémoire

---

Nous démontrons dans ce chapitre la relation de capacité d'un système OFDM avec clipping pour un BABG donnée au paragraphe 4.3.3.2. En considérant l'hypothèse de gaussiannité du bruit de clipping et le fait qu'il soit considéré comme une suite de variables aléatoires i.i.d., équations (4.11) et (4.13), il vient de l'équation (4.25) que :

$$\begin{aligned} W_n + D_n &= Y_n - \alpha X_n \\ Z_n &= Y_n - \alpha X_n, \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Sous les hypothèses d'indépendance du bruit de clipping dans le domaine fréquentiel justifiées au paragraphe 4.2.3, le canal à bruit additif blanc gaussien complexe total est alors distribué selon :

$$p_Z(Z_n) = \frac{1}{\pi(N_0 + 2\sigma_D^2)} e^{-\frac{|Z_n|^2}{N_0 + 2\sigma_D^2}} \quad (\text{C.2})$$

Nous souhaitons obtenir la capacité de ce canal discret avec contrainte à son entrée. Supposons que le système utilise uniquement des modulations numériques dont leurs représentations par le diagramme en constellation soient uniquement carrées. Les symboles modulant les sous-porteuses sont donc issus d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de  $2^M$  éléments indépendants. La détection des observations du canal est alors réalisée suivant cet ensemble. Sachant les symboles possibles à l'entrée du canal et que le bruit total perturbant la transmission est distribué selon une densité de probabilité normale complexe de puissance  $N_0 + 2\sigma_D^2$ , il vient de l'équation (C.2) :

$$\begin{aligned} p(Y_n|S_m) &= p_Z(Y_n - S_m) \\ &= \frac{1}{\pi(N_0 + 2\sigma_D^2)} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_m|^2}{N_0 + 2\sigma_D^2}}, \quad 0 \leq m < 2^M \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La capacité d'un canal DMC (Discrete Memoryless Channel) à entrée discrète et sortie continue est donnée par Gallager [52] §7.3 et on a ici :

$$C = \max_{Pr(S_i)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i Pr(S_i) p(Y_n|S_i) \log_2 \left( \frac{p(Y_n|S_i)}{\sum_j Pr(S_j) p(Y_n|S_j)} \right) dY_n \quad (\text{C.4})$$

L'équation (C.4) se voit maximisée lorsque les probabilités  $Pr(S_i)$  et  $Pr(S_j)$  sont équiprobables, ce qui est une hypothèse parfaitement envisageable considérant une stratégie de codage canal. Les symboles  $S_i$  et  $S_j$  ont alors des probabilités d'apparition équivalentes  $Pr(S_i) = Pr(S_j) = \frac{1}{2^M}$ . Les densités de probabilités de l'équation (C.4) s'écrivent en utilisant l'équation (C.3). En développant l'équation (C.4) :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i p(Y_n|S_i) \left( \log_2(p(Y_n|S_i)) - \log_2\left(\frac{1}{2^M} \sum_j p(Y_n|S_j)\right) \right) dY_n \\
&= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( p(Y_n|S_i) \log_2(p(Y_n|S_i)) - p(Y_n|S_i) \log_2\left(\frac{1}{2^M} \sum_j p(Y_n|S_j)\right) \right) dY_n \\
&= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( p(Y_n|S_i) \log_2(p(Y_n|S_i)) \right) dY_n \\
&\quad - \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( p(Y_n|S_i) \log_2\left(\frac{1}{2^M} \sum_j p(Y_n|S_j)\right) \right) dY_n \\
&= C^g - C^d
\end{aligned} \tag{C.5}$$

On pose alors la puissance de bruit de canal totale  $\sigma_Z^2 = N0 + 2\sigma_D^2$  et :

$$\begin{aligned}
C^g &= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} \log_2\left(\frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}}\right) \right) dY_n \\
&= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} \left( -\log_2(\pi\sigma_Z^2) - \log_2(e) \frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2} \right) \right) dY_n \\
&= \frac{1}{2^M} \sum_i \left( -\log_2(\pi\sigma_Z^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} dY_n \right) \\
&\quad - \frac{1}{2^M} \sum_i \left( -\frac{\log_2(e)}{\pi\sigma_Z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} dY_n \right) \\
&= -\log_2(\pi\sigma_Z^2) - \log_2(e)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Et :

$$\begin{aligned}
C^d &= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( \left( \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} \right) \left( \log_2\left(\frac{1}{2^M} \sum_j \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{\sigma_Z^2}}\right) \right) \right) dY_n \\
&= \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( \left( \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} \right) \left( -\log_2(2^M) + \log_2\left(\frac{1}{\pi\sigma_Z^2}\right) + \log_2\left(\sum_j e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{\sigma_Z^2}}\right) \right) \right) dY_n \\
&= -\log_2(2^M) - \log_2(\pi\sigma_Z^2) + \frac{1}{2^M} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \left( \frac{1}{\pi\sigma_Z^2} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_i|^2}{\sigma_Z^2}} \log_2\left(\sum_j e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{\sigma_Z^2}}\right) \right) dY_n \\
&= -\log_2(2^M) - \log_2(\pi\sigma_Z^2) + \mathbb{E}_{Y,S} \left\{ \log_2\left(\sum_{j=0}^{2^M-1} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{\sigma_Z^2}}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

En incluant les équations (C.6) et (C.7) dans l'équation (C.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
C &= C^g - C^d \\
&= \log_2(2^M) - \log_2(e) - \mathbb{E}_{Y,S} \left\{ \log_2 \left( \sum_{j=0}^{2^M-1} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{\sigma_Z^2}} \right) \right\} \\
&= \log_2\left(\frac{2^M}{e}\right) - \mathbb{E}_{Y,S} \left\{ \log_2 \left( \sum_{j=0}^{2^M-1} e^{-\frac{|Y_n - \alpha S_j|^2}{N_0 + 2\sigma_D^2}} \right) \right\} \tag{C.8}
\end{aligned}$$



---

# Bibliographie

- [1] 3GPP. Technical specification Group Radio Access Network. Physical layer aspect for evolved UTRA. *3GPP TR 25.814, R7*. 7
- [2] M. Abuelma'atti. Frequency-dependent nonlinear quadrature model for TWT amplifiers. *IEEE Trans. Commun.*, 32(8) :982–986, Aug. 1984. 35
- [3] M. A. Akhaee, A. ParandehGheibi, R. AliHemmati, and F. Marvasti. An efficient iterative method for OFDM clipping noise suppression. *Submitted in IEEE Trans. Commun. Lett.* xviii, 82
- [4] R. AliHemmati and P. Azmi. Iterative reconstruction-based method for clipping noise suppression in OFDM systems. *IEE Proc.-Commun.*, 152(4) :452–456, Aug. 2005. xviii, 74, 82
- [5] R. AliHemmati, P. Azmi, and F. Marvasti. OFDM clipping distortion compensation using an iterative method. In *IEEE VTC'05*, volume 1, pages 444–447, Sep. 2005. xviii, 74, 82
- [6] J. Armstrong. Peak-to-average power reduction for OFDM by repeated clipping and frequency domain filtering. *Electronics Letters*, 38(5) :246–247, Feb. 2002. 45
- [7] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 20(2) :284–287, Mar. 1974. 95
- [8] P. Banelli, G. Leus, and G. Giannakis. Bayesian estimation of clipped gaussian processes with application to OFDM. In *EUSIPCO'02*, pages 181–184, Sep. 2002. 74
- [9] A. Batra, J. Balakrishnan, G. R. Aiello, J. R. Foerster, and A. Dabak. Design of a multiband OFDM system for realistic UWB channel environments. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 52(9) :2123–2138, Sep. 2004. 18
- [10] R. W. Bauml, R. F. H. Fisher, and J. B. Huber. Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping. *Elect. Lett.*, 32(22) :2056–2057, Oct. 1996. 44, 46
- [11] S. P. Bernard. A low baud rate 9600 bps voice band modem employing frequency division multiplexing. In *Workshop on Communications, Commun. Res. Lab. McMaster Univ., Hamilton, Ont.*, 1982. 7
- [12] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding : turbo-codes. In *IEEE ICC'93, Geneva*, pages 1064–1070, 1993. 73, 76, 94
- [13] S. A. Billings and S. Y. Fakhouri. Identification of a class of nonlinear systems using correlation analysis. In *Institution of Electrical Engineers*, volume 125, pages 691–697, July 1978. 35
- [14] M. Breiling, S. H. Müller-Weinfurtner, and J. B. Huber. SLM peak-power reduction without explicit side information. *IEEE Commun. Lett.*, 5(6) :239–241, June 2001. 47

- [15] S. Ten Brink. Design of serially concatenated codes based on iterative decoding convergence. In *Int. Symp. on Turbo Codes and Rel. Topics, Brest, France*, pages 319–322, Sept. 2000. 92
- [16] S. Ten Brink. Designing iterative decoding schemes with the extrinsic information transfer chart. *AEÜ International Journal of Electronics and Communications*, 54(6) :389–398, Nov. 2000. 92, 93
- [17] S. Ten Brink. Coverage behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes. *IEEE Trans. Commun.*, 49(10) :1727–1737, Oct. 2001. 77, 92, 94
- [18] J. J. Bussgang. Crosscorrelation functions of amplitude-distorted gaussian signals. *Technical report (Massachusetts Institute of Technology. Research Laboratory of Electronics)*, 216, Mar. 1952. 55
- [19] E. F. Casas and C. Leung. OFDM for data communication over mobile radio FM channels - Part I : Analysis and experimental results. *IEEE Trans. Commun.*, 39(5) :783–793, May 1991. 7
- [20] J.K. Caver. An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels. *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 40(4) :686–693, 1991. 22
- [21] R. W. Chang. Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission. *Bell Syst. Tech.*, 45 :1775–1796, Dec. 1966. 6
- [22] H. Chen and A. M. Haimovich. An iterative method to restore the performance of clipped and filtered OFDM signals. In *IEEE ICC'03, Anchorage, AK*, volume 5, pages 3438–3442, May 2003. 73, 78, 79, 88
- [23] H. Chen and A.M. Haimovich. Iterative estimation and cancellation of clipping noise for OFDM signals. *IEEE Commun. Lett.*, 7 :305–307, July 2003. xviii, 73, 78, 79, 80, 90, 91, 92
- [24] T. T. Chen and S. H. Tsai. Improved tail-biting convolutional codes for 802.16e frame control header. In *14th European Wireless Conference, 2008, Prague.*, June 2008. 88
- [25] CH. H. Cheng and E.J. Powers. Optimal volterra kernel estimation algorithms for a nonlinear communication system for PSK and QAM inputs. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(1) :147–163, Jan. 2001. 34
- [26] C. V. Chong and V. Tarokh. A simple encodable/decodable OFDM QPSK code with low peak-to-mean envelope power ratio. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 47(7) :3025–3029, Nov. 2001. 46
- [27] P. S. Chow, J. C. Tu, and J. M. Cioffi. A discrete multitone transceiver system for HDSL applications. *IEEE Selected Area Commun.*, 9(6) :895–908, Aug. 1991. 7
- [28] P. S. Chow, J. C. Tu, and J. M. Cioffi. Performance evaluation of a multi-channel transceiver system for ADSL and VHDSL services. *IEEE Selected Area Commun.*, 9(6) :909–919, Aug. 1991. 7
- [29] L. J. Cimini and N. R. Sollenberger. Peak-to-average power ratio reduction of an OFDM signal using PTS. *IEEE Commun. Lett.*, 4(3) :86–88, Mar. 2000. 48

- [30] M. Colas, G. Gelle, and D. Declercq. Analysis of iterative receivers for clipped COFDM signaling based on soft Turbo-DAR. In *1st International Symposium on Wireless Communication Systems, ISWCS'04, Mauritius*, pages 110–114, Sep. 2004. 73, 76, 77, 93, 108
- [31] M. Colas, G. Gellé, and D. Declercq. Turbo decision aided receivers for clipping noise mitigation in coded OFDM. *EURASIP Journal of Wireless Communications and Networking*, 352597, 2008. 73, 76, 77, 88, 91, 98
- [32] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 1991. 23, 68
- [33] D. Dardari, V. Tralli, and A. Vaccari. A theoretical characterization of nonlinear distortion effects in OFDM systems. *IEEE Trans. Commun.*, 48(10) :1755–1764, Oct. 2000. 55, 56, 57
- [34] J. A. Davis and J. Jedwab. Peak-to-mean power control and error correction for OFDM transmissions using Golay sequences and Reed-Muller codes. *Elect. Lett.*, 33(4) :267–268, Feb. 1997. 46
- [35] J. A. Davis and J. Jedwab. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences and Reed-Muller codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(7) :2397–2417, Nov. 1999. 46
- [36] D. Declercq and G. B. Giannakis. Recovering clipped OFDM symbols with bayesian inference. In *ICASSP'00, Istanbul, Turkey*, 2000. 74, 80
- [37] R. Déjardin, M. Colas, and G. Gellé. Comparison of iterative receivers mitigating the clipping noise of ofdm based systems. In *13th European Wireless Conference, EW'07, Paris, France*, 2007. xviii, 73, 78, 88, 90, 91, 92, 108, 109, 111, 112
- [38] R. Déjardin, M. Colas, and G. Gellé. On the iterative mitigation of clipping noise for COFDM transmissions. *European Trans. Telecom.*, 19 :791–800, Sep. 2008. xvii, xviii, xix, 69, 71, 72, 73, 88, 90, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 109, 111, 112
- [39] R. Déjardin, M. Colas, and G. Gellé. Soft decision aided suboptimal ML detection receiver for clipped COFDM transmissions. In *IEEE GLOBECOM'09, Hawaii, USA*, Dec. 2009. xix, 88, 105, 106, 107, 108, 109, 112
- [40] R. Déjardin, M. Colas, and G. Gellé. Un récepteur itératif pour la correction de saturation dans les systèmes OFDM codés. In *22<sup>e</sup> colloque GRETSI, Dijon, France.*, Sep. 2009. 108, 109, 112
- [41] M. Deumal, A. Behravan, T. Eriksson, and J. L. Pijoan. Constrained clipping for peak power reduction of multicarrier systems by tone reservation. In *IEEE VTC Spring*, pages 2195–2199, Apr. 2007. 49
- [42] N. Dinur and D. Wulich. Peak-to-average power ratio in high-order ofdm. *IEEE Trans. Commun.*, 49 :1063–1072, June 2001. 41
- [43] R. Dinur and A. Gusamo. On the performance evaluation of OFDM transmission using clipping techniques. In *IEEE VTC'99, Amsterdam, Netherlands*, volume 5, pages 2923–2928, 1999. 59

- [44] P. V. Eetvelt, G. Wade, and M. Tomlinson. Peak to average power reduction for ofdm schemes by selective scrambling. *IEE Electronics Letters*, 32 :1963–1964, Oct. 1996. 47
- [45] ETSI. Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television. *ETS 300 744*, 1997. 1, 7
- [46] ETSI. Radio broadcasting systems; digital audio broadcasting (DAB) to mobile, portable and fixed receivers. *ETS 300 401*, 1997. 88
- [47] ETSI. Boardband radio access networks (bran); HIPERLAN type 2 physical (PHY) layer. *TS 101 475 V1.1.1*, 2000-2004. 1, 7
- [48] E. Feig. Linear models for high-density magnetic recording of data. *IEEE Trans. Magnetics*, 25(3), May 1989. 7
- [49] E. Feig and F. Mintzer. Sequence transmission : Coding in frequency domain. In *Advanced Workshop on Sequences, Positano, Italy*, June 1988. 7
- [50] E. Feig and A. Nádas. The performance of Fourier transform division multiplexing schemes on peak limited channels. In *IEEE GLOBECOM'88, Hollywood, FL*, volume 2, pages 1141–1144, Nov. 1988. 7
- [51] B. Le Floch, R. Lassalle, and D. Castelain. Digital sound broadcasting to mobile receivers. *IEEE Trans. Consumer Electronic*, 35(3) :493–503, Aug. 1989. 1, 7
- [52] R. G. Gallager. *Information theory and reliable communication*. John Wiley & Sons, 1969. 68, 70, 123
- [53] G. Gellé, M. Colas, and D. Declercq. Turbo decision aided reconstruction of clipping noise in coded OFDM. In *IEEE SPAWC'04, Lisbon, Portugal*, July 2004. xviii, 68, 73, 76
- [54] G. Giannakis. Filterbanks for blind channel identification and equalization. *IEEE Signal Processing Lett.*, 4(6) :184–187, June 1997. 18
- [55] P. Gilabert, G. Montoro, and E. Bertran. On the Wiener and Hammerstein models for power amplifier predistortion. In *APMC 2005*, Dec. 2005. 35
- [56] R. Gross and D. Veeneman. SNR and spectral properties for a clipped DMT ADSL signal. In *VTC'94*, pages 843–847, June 1994. 44
- [57] D. Guel and J. Palicot. FFT-IFFT pair based digital filtering for the transformation of adding signal papr reduction techniques in tone reservation techniques. In *International Conference on Wireless and Mobile Communications, ICWMC'09, Cannes, France*, Aug. 2009. 49
- [58] S. H. Han and J. H. Lee. PAPR reduction of OFDM signals using a reduced complexity PTS technique. *IEEE Signal Processing Lett.*, 11(11) :887–890, Nov. 2004. 48
- [59] S. H. Han and J. H. Lee. An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission. *IEEE Wireless Commun.*, pages 56–65, Apr. 2005. 44
- [60] L. Hanzo, M. Münster, B. J. Choi, and T. Keller. *OFDM and MC-CDMA for boardband multi-users communications, WLANs and broadcasting*. John Wiley & Sons, 2003. 22

- [61] J. F. Helard and B. Le Floch. Trellis-coded orthogonal frequency division multiplexing for digital audio transmissions. In *IEEE GLOBECOM'91*, volume 2, pages 785–791, Dec. 1991. 7
- [62] G. R. Hill, M. Faulkner, and J. Singh. Reducing the peak-to-average power ratio in OFDM by cyclically shifting partial transmit sequences. *Electronics Letters*, 36(6) :560–561, Mar. 2000. 47
- [63] B. Hirosaki. An analysis of automatic equalizers for orthogonally multiplexed QAM systems. *IEEE Trans. Commun.*, 28(1) :73–83, Jan. 1980. 6
- [64] B. Hirosaki. An orthogonally multiplexed QAM system using the discrete Fourier transform. *IEEE Trans. Commun.*, 29(7) :982–989, July 1981. 7
- [65] B. Hirosaki. A 19.2 kbits voiceband data modem based on orthogonally multiplexed QAM techniques. In *IEEE ICC'85*, pages 21.1.1–5, 1985. 7
- [66] A. Hutter and R. Hasholzner. Determination of intercarrier interference covariance matrices and their application to advanced equalization for mobile ofdm. In *5<sup>th</sup> International OFDM-Workshop 2000*, pages 1–5, Sep. 2000. 23
- [67] IEEE. Wireless LAN medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications : High speed physical layer in the 5 GHz band. *IEEE Std 802.11a-1999*, 1999. 1, 7
- [68] IEEE. Wireless LAN medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications. Further high-speed physical layer extension in the 2.4 GHz band. *IEEE Std 802.11g-2003*, 2003. 1, 7, 88
- [69] ITU. Asymmetrical digital subscriber line (ADSL) transceivers : Transmission media and system. *G.9992.1*, July 1998. 1, 7
- [70] F. Ivanek. Convergence and competition on the way toward 4G : Where are we going? In *IEEE Radio and Wireless Symposium, California, USA*, pages 265–268, Jan. 2007. 7
- [71] A. D. S. Jayalath and C. Tellambura. Adaptive PTS approach for reduction of peak-to-average power ratio of ofdm signal. *Elect. Lett.*, 36(14) :1226–1228, July 2000. 48
- [72] A. D. S. Jayalath and C. Tellambura. Reducing the peak-to-average power ratio of orthogonal frequency division multiplexing signal through bit or symbol interleaving. *IEE Electronics Letters*, 36(13) :1161–1163, June 2000. 47
- [73] W.G. Jeon, K.H. Chang, and Y. S. Cho. An equalization technique for orthogonal frequency-division multiplexing systems in time-variant multipath channels. *IEEE Trans. Commun.*, 47(1) :27–32, Jan. 1999. 22
- [74] A. E. Jones and T. A. Wilkinson. Combined coding for error control and increased robustness to system non-linearities in OFDM. In *IEEE VTC'96, Atlanta, GA*, pages 904–908, Apr. 1996. 46
- [75] A. E. Jones, T. A. Wilkinson, and S. K. Barton. Block coding scheme for reduction of peak to mean envelope power ratio of multicarrier transmission scheme. *Elect. Letters*, 30(22) :2098–2099, Dec. 1994. 44, 45
- [76] W. E. Kealser and D. L. Blitzer. High speed modem suitable for operating with a switched network. *U. S. patent No. 4,206,320*, June 1980. 7

- [77] T. Kelly. Digital modem packs onto 40 bauds for 9600 bps data comms over voice lines. *Canadian Datasyst.*, 11, Apr. 1982. 7
- [78] D. Kim and G. L. Stuber. Clipping noise mitigation for OFDM by decision aided reconstruction. *IEEE Commun. Lett.*, 3(1) :4–6, Jan. 1999. xviii, 73, 74, 75, 90
- [79] B. S. Krongold. An active-set approach for ofdm par reduction via tone reservation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(2) :495–509, Feb. 2004. 49, 51
- [80] B. S. Krongold and D. L. Jones. PAR reduction in OFDM via active constellation extension. *IEEE Trans. Broadcast.*, 49(3) :258–268, Sept. 2003. 50, 51
- [81] U. K. Kwon and G. H. Im. Iterative amplitude reconstruction of clipped OFDM signals with optimum equalization. *Electronics letters*, 42(20) :1189–1191, Sep. 2006. xviii, 73, 77, 78
- [82] C. Laot. *Égalisation autodidacte et turbo-égalisation. Application aux canaux sélectifs en fréquence*. PhD thesis, Université de Rennes I, France, 1997. 73
- [83] X. Li and L. J. Cimini. Effects of clipping and filtering on the performance of OFDM. In *VTC'97, Phoenix, AZ*, volume 3, pages 1634–1638, May 1997. 45, 59, 63
- [84] X. Li and L. J. Cimini. Effects of clipping and filtering on the performance of OFDM. *IEEE Commun. Lett.*, 2(5) :131–133, May 1998. 45, 63
- [85] X. Li and J.A. Ritcey. Bit-interleaved coded modulation with iterative decoding. In *ICC'99, Vancouver, Canada*, volume 2, pages 858–863, 1999. 73
- [86] J. H. Manton. An OFDM interpretation of zero padded block transmissions. *Systems & Control Lett.*, 47(5) :393–399, 2002. 18
- [87] F. A. Marvasti. An iterative method to compensate for the interpolation distortion. *IEEE Trans. Acoustic, Speech and Signal Processing*, 37(10) :1617–1621, Oct. 1989. 82
- [88] D. J. G. Mestdagh, P. M. P. Spruyt, and B. Biran. Effect of amplitude clipping in DMT-ADSL transceivers. *Elect. Lett.*, 29 :1354–1355, July 1993. 44
- [89] M. Muck, M. de Courville, M. Debbah, and P. Duhamel. A pseudo random postfix OFDM modulator and inherent channel estimation techniques. In *IEEE GLOBECOM'03*, 2003. 18
- [90] S. H. Muller and J. B. Huber. OFDM with reduced peak-to-average power ratio by optimum combination of partial transmit sequences. *Elect. Lett.*, 33(5) :369–369, Feb. 1997. 44, 48
- [91] B. Muquet, Z. Wang, G. B. Giannakis, M. de Courville, and P. Duhamel. Cyclic prefix or zero padding for wireless multicarrier transmissions? *IEEE Trans. Commun.*, 50(12) :2136–2148, Dec. 2002. 18
- [92] K. Narendra and P. Gallman. An iterative method for the identification of nonlinear systems using a hammerstein model. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(3) :546–550, July 1966. 35

- [93] H. Nikopour and S. H. Jamali. On the performance of OFDM systems over a cartesian clipping channel : A theoretical approach. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 3(6) :2083–2096, Nov. 2004. 68
- [94] H. Nikopour, A. K. Khandani, and S. H. Jamali. Turbo-coded OFDM transmission over a nonlinear channel. *IEEE Trans. Vehicul. Tech.*, 54(4) :1361–1371, July 2005. 73, 87, 112
- [95] H. Ochiai. *Analysis and reduction of peak-to-average power ratio in OFDM systems*. PhD thesis, University of Tokyo, 2001. 68, 69
- [96] H Ochiai. Performance of optimal and suboptimal detection for uncoded ofdm systems with deliberate clipping and filtering. In *IEEE GLOBECOM'03, San Fransico, CA, USA*, pages 1618–1622, Dec. 2003. xviii, xix, 74, 81, 99, 100, 101, 102, 103, 107, 110
- [97] H. Ochiai and H. Imai. On clipping for peak power reduction of OFDM signals. In *IEEE GLOBECOM'00*, volume 2, pages 731–735, Nov. 2000. 41
- [98] H. Ochiai and H. Imai. Performance of the deliberate clipping with adaptive symbol selection for strictly band-limited OFDM systems. *IEEE Selected Areas in Commun.*, 18(11) :2270–2277, Nov. 2000. 41, 45, 56, 57, 58, 73, 112
- [99] H. Ochiai and H. Imai. On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals. *IEEE Trans. Commun.*, 49(2) :282–289, Feb. 2001. 41
- [100] H. Ochiai and H. Imai. Performance analysis of deliberately clipped OFDM signals. *IEEE Trans. Commun.*, 50(1) :89–101, Jan. 2002. xvii, 59, 60, 68, 87, 112
- [101] R. O'Neill and L. B. Lopes. Envelope variations and spectral splatter in clipped multicarrier signals. In *IEEE PIMRC'95, Toronto, Canada*, pages 71–75, Sept. 1995. 44, 59
- [102] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete time signal processing*. Prentice Hall, 1989. 13, 113
- [103] A. Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processes, second edition*. Mc Graw Hill, 1984. 55
- [104] K. Paterson. Generalized Reed-Muller codes and power control in OFDM modulation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46(1) :104–120, Jan. 2000. 46
- [105] K. Paterson and V. Tarokh. On the existence and construction of good codes with low peak-to-average power ratios. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 46(6) :1974–1987, Sept. 2000. 46
- [106] A. Peled and A. Ruiz. Frequency domain data transmission using reduced computationally complexity algorithms. In *IEEE ICASSP'80, Denver, CO*, pages 964–967, Apr. 1980. 15
- [107] B. Popovic. Synthesis of power efficient multitone signals with flat amplitude spectrum. *IEEE Trans. Commun.*, 39(7) :1031–1033, July 1991. 46
- [108] J. G. Proakis. *Digital Communications*. Mc Graw Hill, 2001. 7, 12, 13, 24, 118, 120

- [109] S. Ragusa. *Ecrêtage inversible pour l'amplification non-linéaire des signaux OFDM dans les terminaux mobiles*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2006. 74
- [110] S. Ragusa, J. Palicot, and C. Lereau. OFDM power ratio reduction using invertible clipping. In *IEEE PIMRC'06, Helsinki, Finland*, Sept. 2006. 74
- [111] C. Rapp. Effect of HPA nonlinearity on a 4-DPSK/OFDM signal for a digital sound broadcasting system. In *Proc. European Conference on Satellite Communications, Belgium*, volume 1, pages 179–184, Oct. 1991. 33
- [112] W. Rave, P. Zillmann, and G. Fettweis. Iterative correction and decoding of OFDM signals affected by clipping. In *International Workshop on Multicarrier Spread Spectrum (MC-SS'05), Germany*, Sep. 2005. 73
- [113] H. E. Rowe. Memoryless nonlinearities with gaussian inputs : elementary results. *Bell Syst. Tech. Journal*, 61 :1519–1525, Sep. 1982. 56, 58
- [114] C. Rößing and V. Tarokh. A construction of OFDM 16-QAM sequences having low peak powers. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 5(47) :2091–2094, July 2001. 46
- [115] A. A. M. Saleh. Frequency-independent and frequency-dependent nonlinear models for twt amplifiers. *IEEE Trans. Commun.*, 29(11) :1715–1720, Nov. 1981. 32
- [116] B. R. Saltzberg. Performance of an efficient parallel data transmission system. *IEEE Trans. Comm. Technol.*, 15 :805–811, Dec. 1967. 6, 7
- [117] S. Sandberg, J. P. LeBlanc, and B. Vasic. Receiver-oriented clipping-effect mitigation in OFDM - a worthy approach? In *OFDM Workshop 2005, Hamburg, Germany*, Aug. 2005. 73, 87, 112
- [118] A. Scaglione, G. B. Giannakis, and S. Barbarossa. Redundant filterband precoders and equalizers, Part I : Unification and optimal designs. *IEEE Trans. Commun.*, 47(7) :1988–2006, July 1999. 18
- [119] A. Scaglione, G. B. Giannakis, and S. Barbarossa. Redundant filterband precoders and equalizers, Part II : Blind channel estimation, synchronization, and direct equalization. *IEEE Trans. Commun.*, 47(7) :2007–2022, July 1999. 18
- [120] M. Schetzen. Nonlinear system modeling based on the Wiener theory. *IEEE Trans. Commun.*, 69(12) :1557–1573, Dec. 1981. 35
- [121] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27 :379–423, Oct. 1948. 1, 23
- [122] M. Sharif, M. Gharavi-Alkhansari, and B. H. Khalaj. On the peak-to-average power of OFDM signal based on oversampling. *IEEE Trans. Commun.*, 51(1) :72–78, Jan. 2003. 41
- [123] M. Speth, S. A. Fechtel, G. Fock, and H. Meyr. Optimum receiver design for wireless broad-band systems systems using OFDM - Part I. *IEEE Trans. Commun.*, 47(11) :1668–1677, Nov. 1999. 21

- [124] M. Speth, S. A. Fechtel, G. Fock, and H. Meyr. Optimum receiver design for OFDM-based broadband transmission - Part II. *IEEE Trans. Commun.*, 49(4) :571–578, Apr. 2001. 21
- [125] J. Tellado. *Peak to average power reduction for multicarrier modulations*. PhD thesis, Stanford Univ., 2000. 38, 44, 49, 50
- [126] J. Tellado, L. M. C. Hoo, and J. M. Cioffi. Maximum likelihood detection of nonlinearly distorted multicarrier symbols by iterative decoding. In *GLOBECOM'99, CA, USA*, volume 5, pages 2493–2498, 1999. 68, 73, 78, 79, 90
- [127] J. Tellado, L. M. C. Hoo, and J. M. Cioffi. Maximum-likelihood detection of nonlinearity distorted multicarrier symbols by iterative decoding. *IEEE Trans. Commun.*, 51(2) :218–228, Feb. 2003. xviii, 73, 78, 79, 90
- [128] J.M. Torrance and L. Hanzo. Comparative study of pilot symbol assisted modem schemes. In *Sixth International Conference on Radio Receivers and Associated Systems*, pages 36–41, 1995. 22
- [129] R. van Nee and A. de Wild. Reducing the peak-to-average power ratio of ofdm. In *IEEE Vehicular Technology Conference*, volume 3, pages 2072–2076, 1998. 41
- [130] Z. Wang and G. B. Giannakis. Wireless multicarrier communications, when Fourier meets Shannon. *IEEE Signal Processing Mag.*, pages 29–48, May 2000. 18
- [131] S. Wei, D. L. Goeckel, and P. E. Kelly. A modern extreme value theory approach to calculating the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM systems. In *IEEE International Conference on Communications, New-York, NY*, volume 3, pages 1686–1690, May 2002. 41
- [132] S. B. Weinstein. Data transmission by frequency multiplexing using the discrete Fourier transform. *IEEE Trans. Comm. Technol.*, 19(5) :628–634, Oct. 71. 6, 9
- [133] T. Wigren. Convergence analysis of recursive identification algorithms based on the non-linear wiener model. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 39(11) :2191–2206, Nov. 1994. 35
- [134] WiMAX. Part 16 : Air interface for fixed and mobile broadband wireless access systems amendment for physical and medium access control layers for combined fixed operation in licenced bands. *IEEE 802.16e-2005*, Oct. 2005. 88
- [135] Mobile WiMAX. Part 1 : A technical overview and performance evaluation. *WiMAX Forum*, Aug. 2006. 1, 7
- [136] G. Wunder and H. Boche. Upper bounds on the statistical distribution of the crest-factor in OFDM transmission. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49(2) :488–494, Feb. 2003. 41
- [137] Biao Yan, Juan Yang, Hui Zhang, Yihuan Zhu, and Haiyang Wang. Distribution bound of PAPR in OFDM signals. In *ICCCAS'06*, volume 2, pages 1398–1401, June 2006. 41

- 
- [138] L. Yang and G. B. Giannakis. Ultra-wideband communications : an idea whose time has come. *IEEE Signal Processing Mag.*, 21(6), Nov. 2004. 18
  - [139] G. T. Zhou, H. Qian, L. Ding, and R. Raich. On the baseband representation of a bandpass nonlinearity. *IEEE Trans. Signal Processing*, 53(8) :2953–2957, Aug. 2005. 34
  - [140] P. Zillmann, H. Nuskowski, and G. Fettweis. A novel receive algorithm for clipped OFDM signals. In *WPMC'03, Japan.*, pages 380–384, Oct. 2003. 74
  - [141] P. Zillmann, W. Rave, and G. Fettweis. Soft detection and decoding of clipped and filtered COFDM signals. In *IEEE VTC'07*, pages 1598–1602, Apr. 2007. 73
  - [142] R. Zillmann, W. Rave, and G. Fettweis. Turbo equalization for clipped and filtered COFDM signals. In *IEEE ICC'07, Glasgow, UK*, June 2007. xviii, 74, 82, 83, 84, 99, 100, 101, 102, 110

*Page laissée vierge intentionnellement.*

## Résumé

Malgré la difficulté d'amplifier les systèmes multi-porteuses à haut rendement, étant donnée la dynamique des signaux concernés, la modulation orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) est aujourd'hui devenue incontournable dans les systèmes de communication. Elle est d'ailleurs de plus en plus utilisée dans les normes de transmission filaires ou non. Pourtant, le high peak-to-average power ratio (PAPR) reste le principal inconvénient de l'OFDM. Différentes techniques ont été proposées pour contraindre la dynamique des signaux à l'émission. Cependant, elles sont le plus souvent très compliquées à mettre en œuvre et nécessitent des procédés particuliers au récepteur et la transmission d'une information supplémentaire dédiée.

Contraindre volontairement l'amplitude du signal est une technique efficace et simple pour réduire le PAPR des signaux OFDM. Si le bruit hors-bande résultant peut être facilement réduit par filtrage, les dégradations subies au sein de la bande utile obligent le récepteur à adopter une stratégie de recouvrement de la performance de la transmission.

Cette thèse propose une revue complète du PAPR des signaux OFDM et de la méthode de clipping des signaux d'émission. Nous proposons également d'établir la performance analytique des systèmes OFDM avec clipping au regard de la capacité de canal et de la fiabilité de l'information binaire.

Aussi, les techniques au récepteur permettant de recouvrer la performance dégradée par le clipping sont étudiées. Nous portons particulièrement notre attention aux approches par annulation du bruit de clipping et reconstruction d'amplitude en proposant leur comparaison exhaustive ainsi qu'une méthode dérivée de la première.

Finalement, nous posons la description d'un nouveau récepteur proposant une information *a posteriori* corrigée des bits du mot de code. Cette information souple est en fait basée sur une décision sous-optimale par maximum de vraisemblance (SML). L'étude de l'algorithme montre son efficacité aussi bien sur canal blanc que sélectif en fréquence; scénarios pour lesquels il permet de s'approcher très près du cas sans clipping.

## Abstract

Despite the fact that multi-carrier signals amplification is practically difficult due to their Gaussian-like distribution and the non-linear behaviour of power amplifiers, the orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) modulation has been successfully brought in many communication standards for wired and wireless transmissions. However, the high peak-to-average power ratio (PAPR) of OFDM signals stands for the OFDM major drawback. Several strategies can be cited to manage the PAPR at transmitter side. However, most of them are computationally expensive and need a dedicated process at receiver relying on side information transmission.

The deliberate amplitude clipping and filtering before amplification is an easy way to restrain PAPR at a desired level. If the out-of-band noise caused by clipping can be easily discarded by filtering, the in-band distortion noise, also referred as clipping noise, must be mitigated at receiver side in order to restore the transmission performance.

In this Thesis, we propose a wide review of both PAPR and clipping. We also give an analytical performance analysis of OFDM systems running under clipping constraint. Channel capacity and bit error rate are derived and conclusions are given.

Afterwards, dedicated techniques mitigating clipping effects are studied. Clipping noise cancellation and decision aided reconstruction are especially reviewed. We also propose a complete comparison of these techniques and give an increased performance version of the first one.

Finally, we propose a new scheme dealing with code word bits *a posteriori* probability enhancement. This soft decision is based on a suboptimal maximum likelihood (SML) detection using a limited neighbour signals to perform the transmitted code word detection. Actually, the receiver performance study shows that the algorithm can operate under severe clipping ratio constraint and is able to perform close to the non-clipped transmission case over both AWGN and frequency-selective channels.