

# THÈSE

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne**

Spécialité : Génie informatique, Automatique et Traitement du Signal

Par

**Tahar BOUARAR**

**Contribution à la synthèse de lois de commande  
pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno  
incertains et perturbés**

Soutenue à l'Université de Reims Champagne Ardenne le 08 décembre 2009  
devant le jury composé de :

Rapporteurs :

**Pr. Thierry-Marie Guerra**  
**Pr. Ali Zolghadri**

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (LAMIH)  
Université de Bordeaux (IMS)

Examineurs :

**Pr. Patrice Billaudel**  
**Pr. François Delmotte**  
**Dr. Kevin Guelton**  
**Pr. Noureddine Manamanni**  
**Pr. Didier Maquin**

Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)  
Université d'Artois (LGI2A)  
Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)  
Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)  
Institut National Polytechnique de Lorraine (CRAN)



*A mes parents et mes proches*  
*A ma grand mère*  
*A mes frères et sœurs*  
*A ma nièce et mes neveux*  
*A mes amis d'enfance*  
*A KDS<sup>2</sup>*  
*Au groupe IAR 99*



# Remerciements

---

---

Ce travail a été mené au sein de l'équipe de recherche Auto du Centre de Recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (CReSTIC) de l'Université de Reims Champagne Ardenne.

Je remercie le directeur du CReSTIC Monsieur le Professeur Janan Zaytoon de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Le bon déroulement de ce travail de thèse a été possible grâce à mes co-encadreurs, Monsieur Nouredine Manamanni, Professeur à l'Université de Reims Champagne Ardenne, Monsieur Kevin Guelton, Maître de Conférences à l'Université de Reims Champagne Ardenne, et Monsieur Patrice Billaudel, Professeur à l'Université de Reims Champagne Ardenne. Je leur suis reconnaissant du soutien qu'ils m'ont apporté. Je leur exprime également ma profonde reconnaissance pour leurs précieux conseils et leurs qualités humaines.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Thierry-Marie Guerra, Professeur à l'Université de Valenciennes, et Monsieur Ali Zolghadri, Professeur à l'Université de Bordeaux, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de ce travail de thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur François Delmotte, Professeur à l'Université d'Artois d'avoir accepté d'examiner ce travail. Je tiens à remercier Monsieur Didier Maquin, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine d'avoir accepté d'examiner ce travail et de présider le jury de cette thèse

Je tiens particulièrement à remercier tous les membres du CReSTIC et tous les doctorants pour leurs sympathies.

Enfin, mes remerciements vont à tous ceux qui m'ont soutenu ou qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de ce travail.



*« Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs n'a jamais tenté d'innover ».*

*Albert Einstein*



# Table des matières

---

---

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Concepts élémentaires sur la modélisation et la commande des systèmes flous de type Takagi-Sugeno .....</b>	<b>5</b>
1.1. Introduction .....	6
1.2. Représentation d'état et systèmes non linéaires .....	6
1.3. Présentation des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) .....	7
1.4. Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S).....	9
1.5. Stabilité et stabilisation des modèles T-S standards .....	12
1.5.1. Stabilité des modèles T-S .....	12
1.5.2. Stabilisation par retour d'état des modèles T-S standards .....	14
1.5.2.1. Lois de commande PDC (Parallel distributed compensation) .....	14
1.5.3. Stabilisation par retour de sortie .....	15
1.5.3.1. Synthèse de lois de commande par retour de sortie dynamique .....	16
1.5.3.2. Synthèse de lois de commande par retour de sortie statique.....	18
1.6. Stabilité et stabilisation des systèmes descripteurs.....	19
1.6.1. Admissibilité des descripteurs linéaires.....	19
1.6.2. Classe des modèles descripteurs non linéaires de type Takagi-Sugeno.....	20
1.6.3. Stabilité des modèles descripteurs T-S .....	22
1.6.4. Stabilisation des modèles descripteurs T-S.....	23
1.7. Réduction du conservatisme des conditions LMI pour modèles T-S .....	26
1.8. Conclusion.....	28
<b>Stabilité et stabilisation quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés.....</b>	<b>30</b>
2.1. Introduction .....	31
2.2. Choix d'un représentant T-S sous forme descripteur .....	31
2.3. Définition des modèles Descripteurs T-S Incertains et Perturbés (DTSIP).....	33
2.4. Stabilité quadratique des descripteurs T-S incertains (DTSI) .....	35
2.5. Analyse des performances $H_\infty$ en boucle ouverte des descripteurs T-S incertains et perturbés ....	39
2.6. Stabilisation quadratique des modèles DTSIP.....	42
2.6.1. Formulation de la dynamique en boucle fermée et du problème de commande.....	42
2.6.2. Stabilisation des modèles DTSI.....	43
2.7. Synthèse $H_\infty$ de lois de commande pour la classe des descripteurs T-S incertains et perturbés .	45
2.8. Schéma de relaxation pour les descripteurs T-S.....	47
2.9. Exemple numérique et résultats de simulation .....	48
2.10. Conclusion.....	55
<b>Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés.....</b>	<b>56</b>
3.1. Introduction .....	57
3.2. Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés.....	57
3.2.1. Formulation de la boucle fermée dans le cadre non quadratique.....	57
3.2.2. Synthèse non quadratique de lois de commande pour les descripteurs T-S incertains et perturbés .....	59
3.2.3. Synthèse non quadratique de lois de commande pour les descripteurs incertains.....	61
3.2.4. Extension à la synthèse $H_\infty$ de lois de commande non quadratiques pour les descripteurs T-S incertains et perturbés.....	65

3.2.5. Discussion sur l'applicabilité des approches non quadratiques .....	68
3.2.6. Réduction des approches non quadratiques à un cadre quadratique étendu .....	70
3.3. Exemples numériques .....	72
3.4. Conclusion .....	77

**Approches redondantes pour la stabilisation non quadratique des modèles descripteurs T-S incertains et perturbés .....79**

4.1. Introduction .....	80
4.2. Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains : approche redondante .....	80
4.2.1. Rappels sur la boucle fermée « classique » et formulation de la boucle fermée « redondante » .....	80
4.2.2. Conditions LMI non quadratiques pour la stabilisation des descripteurs T-S incertains : approche redondante .....	83
4.2.3. Stabilisation non quadratique robuste des descripteurs T-S incertains et perturbés : approche redondante .....	89
4.3. Discussion et remarques sur le coût de calcul des approches redondantes .....	93
4.4. Exemples numériques et simulations .....	95
4.4.1. Exemple 1 : intérêt des approches redondantes .....	95
4.4.2. Exemple 2 : stabilisation robuste d'un DTSIP .....	97
4.5. Conclusion .....	100

**Stabilisation non quadratique par retour de sortie des modèles T-S standards incertains et perturbés – Approches redondantes .....102**

5.1. Introduction .....	103
5.2. Classe des systèmes considérée et formulation du problème de commande par retour de sortie .....	104
5.2.1. Formulation d'une boucle fermée redondante pour la synthèse de lois de commande .....	104
5.2.1.1. Retour de sortie dynamique .....	104
5.2.1.2. Retour de sortie statique .....	106
5.3. Approches non quadratiques de synthèse de contrôleurs par retour de sortie pour les systèmes T-S incertains .....	107
5.3.1. Synthèse non quadratique de contrôleurs par retour de sortie dynamique .....	107
5.3.2. Synthèse non quadratique de contrôleurs par retour de sortie statique .....	113
5.4. Extension à la synthèse de lois de commande robustes par retour de sortie pour les systèmes T-S incertains et perturbés .....	118
5.4.1. Synthèse de contrôleurs robustes par retour de sortie dynamique .....	118
5.4.2. Synthèse de contrôleurs robustes par retour de sortie statique .....	120
5.5. Exemples numériques et simulations .....	123
5.5.1. Exemple 1 : évaluation du conservatisme pour le retour de sortie dynamique – approches classiques vs redondantes .....	123
5.5.2. Exemple 2 : intérêt de l'approche non quadratique vs quadratique – cas du retour de sortie statique soumis à perturbations externes .....	124
5.5.3. Exemple 3 : stabilisation robuste par retour de sortie dynamique et statique .....	125
5.5.3.1. Résultats en retour de sortie dynamique .....	126
5.5.3.2. Résultats en retour de sortie statique .....	130
5.6. Conclusion .....	132

**Conclusion générale et perspectives .....134**

**Références bibliographiques .....137**

**Annexe A .....147**

**Annexe B .....150**



# Table des figures

---

Figure 1.1.	Structure et implémentation d'un modèle T-S Standard. ....	9
Figure 1.2.	Secteur non linéaire global. ....	10
Figure 2.1.	Domaines de solutions du théorème 2.3 sans relaxation et avec relaxation (lemme 2.1)..	52
Figure 2.2.	Réponses temporelles du système (2.68) sans perturbations externes et du signal de commande.....	53
Figure 2.3.	Stabilisation $H_\infty$ du système (2.68) soumis à des perturbations externes et évolution temporelle du signal de commande. ....	54
Figure 3.1.	Schéma de la loi de commande non-PDC. ....	58
Figure 3.2.	Domaines de solutions des théorèmes 3.1 (non quadratique) et 2.3 (quadratique) .....	74
Figure 3.3.	Evolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de $\dot{h}_1(x_1(t))$ .....	75
Figure 3.4.	Evolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de la dérivée du $h_1(x_1(t))$ du DTSIP (3.54) soumis à des perturbations externes.....	76
Figure 3.5.	Domaines de faisabilité du théorème 3.1 et du corollaire 3.1.....	77
Figure 4.1.	Domaines de solutions ; remarque 4.3 et du théorème 3.1 sans incertitudes. ....	96
Figure 4.2.	Domaines de solutions ; remarque 4.3 et du corollaire 4.1 sans incertitudes. ....	96
Figure 4.3.	Domaines de solutions des théorèmes 4.1 et 3.1. ....	98
Figure 4.4.	Evolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de $\dot{h}_1(x_1(t))$ .....	99
Figure 4.5.	Evolution temporelle du vecteur d'état perturbé, du signal de commande et de $\dot{h}_1(x_1(t))$ . .....	100
Figure 5.1.	Domaine de solutions du Théorème 5.1 ( $\times$ ) vs [Li et al., 2000] (théorème 2) ( $\circ$ ) .....	124
Figure 5.2.	Taux d'atténuation : approches non quadratiques (remarque 5.2) vs quadratiques étendues (Théorème 5.4 sans incertitudes avec $X_j^1 = X_1$ ). ....	125
Figure 5.3.	Evolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du vecteur d'état du contrôleur et du signal de commande. ....	127
Figure 5.4.	Evolution temporelle de $\dot{h}_1(x_1(t))$ . ....	128
Figure 5.5.	Evolution temporelle des vecteurs de sortie, du vecteur d'état du système perturbé, du vecteur d'état du contrôleur et du signal de commande. ....	129
Figure 5.6.	Evolution temporelle de $\dot{h}_1(x_1(t))$ . ....	129
Figure 5.7.	Evolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du signal de commande et de $\dot{h}_1(x_1(t))$ .....	130
Figure 5.8.	Evolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système perturbé, du signal de commande et de $\dot{h}_1(x_1(t))$ .....	131



# Notations

---

---

## Acronymes

BMI	Inégalité Matricielle Bilinéaire (Bilinear Matrix Inequality)
BFC	Boucle Fermée Classique
BFR	Boucle Fermée Redondante
DAE	Equation Algébro-Différentielle (Algebraic Differential Equation)
DPDC	Compensation Parallèle Distribuée Dynamique (Dynamic Parallel Distributed Compensation)
DOFC	Compensateur Dynamique par retour de sortie (Dynamic Output Feedback Compensator)
DTS	Descripteur Takagi-Sugeno
DTSI	Descripteur Takagi-Sugeno Incertain
DTSIP	Descripteur Takagi-Sugeno Incertain et Perturbé
FCQL	Fonction Candidate Quadratique de Lyapunov
FQL	Fonction Quadratique de Lyapunov
FLF	Fonction Floue de Lyapunov (Fuzzy Lyapunov Function)
LFT	Transformation Fractionnelle Linéaire (Linear Fractional Transformation)
LMI	Inégalité Linéaire Matricielle (Linear Matrix Inequality)
LPV	Linéaire à Paramètres Variant (Linear Parameter Variant)
LTI	Linéaire à Temps Invariant (Linear Time Invariant)
MFC	Modèle Flou Continu
MFD	Modèle Flou Discret
MTSC	Modèle Takagi-Sugeno Continu
MTSD	Modèle Takagi-Sugeno Discret
MTSS	Modèle Takagi-Sugeno Standard
ODE	Equation Différentielle Ordinaire (Ordinary Differential Equation)
PDC	Compensation Parallèle Distribuée (Parallel Distributed Compensation)
PLF	Fonction de Lyapunov continue par morceaux (Piecewise Lyapunov Functions)
PPDC	Compensation Parallèle Distribuée proportionnelle (Proportional Parallel Distributed Compensation)
SOF	Retour de Sortie Statique (Static Output Feedback)

## Ensembles, matrices et vecteurs

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^n$	Espace réel Euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times q}$	Ensemble des matrices à éléments réels de dimension $(n \times q)$
$\  \cdot \ _2^2$	Norme $L_2$ au carré d'une grandeur

## Notations

---

$I_n$	Matrice identité de dimension $n$
$X^{-1}$	Inverse de la matrice $X$
$X^T$	Transposée d'une matrice $X$
$\begin{bmatrix} A_{11} & (*) \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole $(*)$ désigne $A_{21}^T$
$X_{h\nu}$	Cette notation désigne $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i h_j v_k X_{ijk}$



# Références Personnelles

---

---

## Articles dans des revues internationales avec comités de lecture

K. Guelton, T.-M. Guerra, M. Bernal, **T. Bouarar** et N. Manamanni, “Comments on Fuzzy Control Systems Design via Fuzzy Lyapunov Functions,” *IEEE, Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B*, Digital Object Identifier: 10.1109/TSMCB.2009.2033807.

K. Guelton, **T. Bouarar** et N. Manamanni, “Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems - A descriptor redundancy approach,” Elsevier, *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19):2796-2811, October 2009.

## Revue soumise

**T. Bouarar**, K. Guelton, N. Manamanni, “Robust Fuzzy Lyapunov Stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno Descriptor Systems,” *ISA Transactions*.

## Communications internationales avec actes

**T. Bouarar**, K. Guelton et N. Manamanni, “Static Output Feedback Controller Design for Takagi-Sugeno Systems – A Fuzzy Lyapunov LMI Approach,” *48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'09)*. Shanghai, P.R. China, December 2009

L. Seddiki, K. Guelton, **T. Bouarar**, N. Manamanni et J. Zaytoon, “T-S Tracking Controller Design for Sys-Reeduc: a descriptor Approach,” *7th IFAC Symposium on Modelling and Control in Biomedical Systems (MCBMS'09)*. Aalborg, Denmark, August 2009.

**T. Bouarar**, K. Guelton et N. Manamanni, “Redundancy approach for fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno descriptors,” *IEEE Symposium Series on Computational Intelligence/Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation (IEEE SSCI/CICA 2009)*. Nashville, Tennessee, USA, March 2009.

K. Guelton, **T. Bouarar** et N. Manamanni, “Fuzzy Lyapunov LMI based output feedback stabilization of Takagi Sugeno systems using descriptor redundancy,” *IEEE World Congress on Computational Intelligence / International Conference on Fuzzy Systems (WCCI2008/FUZZ-IEEE)*. Hong Kong, June 2008.

**T. Bouarar**, K. Guelton, N. Manamanni et P. Billaudel, “Stabilization of uncertain Takagi-Sugeno descriptors: a fuzzy Lyapunov approach,” *16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'08)*. IEEE, Ajaccio, Corsica, France, June 2008.

**T. Bouarar**, K. Guelton et N. Manamanni, “LMI based H-infinity controller design for uncertain Takagi-Sugeno descriptors subject to external disturbances,” *3rd IFAC Workshop on Advanced Fuzzy/Neural Control*. Valenciennes, France, October 2007.

**T. Bouarar**, K. Guelton, B. Mansouri et N. Manamanni, “LMI Stability Conditions for Takagi-Sugeno Uncertain Descriptors,” *International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. London, UK, July 2007.

**Communications nationales avec actes**

**T. Bouarar**, K. Guelton et N. Manamanni, “Nouvelles conditions LMI de stabilisation non quadratique pour descripteurs flous de type T-S,” *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2008)*. Lens, Octobre 2008.

**T. Bouarar**, K. Guelton, N. Manamanni, “ Approches non-quadratiques pour la synthèse de commande robuste des descripteurs flous de type T-S,” 5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucarest, Roumanie, Septembre 3-5, 2008.

**T. Bouarar**, K. Guelton, B. Mansouri et N. Manamanni, “ Conditions de stabilité LMI pour la classe des systèmes descripteurs flous incertains de type T-S,” *2èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS (JD-JN MACS 2007)*. Reims, France, Juillet 2007.



# Introduction générale

---

---

La notion de système joue un rôle primordial en automatique. Un système physique peut-être considéré comme un ensemble de phénomènes liés entre eux et évoluant au cours du temps, modélisables théoriquement via des équations dynamiques et conduisant à un modèle de connaissance mathématique supposé représenter au mieux la réalité. Ces modèles mathématiques peuvent s'exprimer selon deux types de représentations d'état différentes. La première est dite explicite (standard) et la seconde, plus générale, est dite implicite. Ainsi, la grande majorité des travaux utilisant une représentation d'état font appel à une forme explicite offrant la possibilité de décrire les relations entre les variables du système par le biais d'Equations Différentielles Ordinaires (ODE). Ces dernières permettent de relier entre elles les grandeurs de sorties et d'entrées par le biais d'un vecteur d'état décrivant l'évolution du système. Néanmoins, de nombreux systèmes physiques ne peuvent-être réduits à une représentation sous forme explicite. Afin de contourner ce problème, les formes implicites sont décrites par un ensemble d'Equations Algébro-Différentielles (DAE). Celles-ci permettent notamment de prendre en compte simultanément des relations dynamiques et statiques entre les variables du système. Dès lors, les équations algébro-différentielles conduisent, lors de la modélisation, à une classe plus générique de systèmes. Celle-ci comprend les systèmes appelés systèmes descripteurs, systèmes singuliers, systèmes implicites ou encore systèmes à espace d'état généralisé [Luenberger, 1977][Dai, 1989]. Notons que ces systèmes permettent de représenter une large classe de systèmes physiques tels que les systèmes mécaniques à inertie variable, les systèmes électriques, les systèmes chimiques [Kumar et Daoutidis, 1995]....

L'un des enjeux de l'automatique est de proposer un contrôleur adapté au système à piloter garantissant la réalisation de la tâche souhaitée. De nombreuses approches, pour les systèmes continus, ont été proposées pour la synthèse de lois de commande et peuvent être classées en deux catégories dites « linéaires » où « non linéaire ».

- L'automatique linéaire considère le fonctionnement du système autour d'un point de fonctionnement donné. La synthèse d'une loi de commande linéaire se base alors sur une théorie bien maîtrisée mais ne garantit pas la stabilité du système sur tout l'espace d'état [Delarminat, 1993][Kuo, 1995].
- L'automatique non linéaire repose quant à elle sur des outils plus complexes et qui nécessitent parfois de nouveaux développements théoriques. L'objectif est de garantir la stabilité des systèmes pour lesquels le cas linéaire n'est pas adapté, notamment lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes de stabilité ou d'asservissement sur une plus large région de l'espace d'état [Khalil, 1996][Sastry, 1999].

Parmi les approches non linéaires, on distingue deux catégories :

- les approches non formelles, qui ne nécessitent pas la connaissance d'un modèle formalisé, telles que la commande floue de type Mamdani [Mamdani, 1974].

Ces approches fournissent des résultats souvent satisfaisants d'un point de vue performances mais leurs principaux inconvénients résident dans le fait qu'il s'avère difficile, dans certains cas, de garantir (ou de prouver) la stabilité mais aussi de tenir compte des capacités physiques du système à commander.

- Les approches formelles, qui nécessitent la connaissance a priori d'un modèle du système à commander, permettent quant à elles de garantir dans certains cas la stabilité du système sur tout ou une région compacte de l'espace d'état. Malheureusement, cette garantie s'avère difficile à obtenir à mesure que la taille du système augmente (nombre de variables d'état à contrôler) et/ou que la dynamique du système est fortement non linéaire (commutations franches, grand nombre de termes non linéaires...) [Khalil, 1996][Liberzon, 2003]. En d'autres termes, ces approches sont le plus souvent applicables aux seuls systèmes de petites tailles et faiblement non linéaires.

Une manière élégante de représenter un système non linéaire repose sur une représentation multi-modèle. Celle-ci consiste en une collection de systèmes linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires. Plusieurs catégories de multi-modèles existent dans la littérature, notamment les systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps (LPV) [Henrion et Garulli, 2004][Zerger et al., 2009] ou les systèmes quasi LPV, encore appelés systèmes Takagi-Sugeno (T-S) [Takagi et Sugeno, 1985]. Notons que ces derniers possèdent une propriété d'approximation universelle des systèmes affines en la commande et présentent l'avantage de pouvoir représenter de manière exacte un modèle de connaissance non linéaire sur un compact de l'espace d'état [Tanaka et Wang, 2001]. Ainsi, l'intérêt majeur de ce type d'approche est qu'elle permet d'étendre de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires.

Lors de l'étape de modélisation, le défi de l'automaticien est de proposer un modèle de connaissance capable de représenter fidèlement les phénomènes physiques rencontrés. Notons que cette modélisation suppose dans la majeure partie des cas des approximations susceptibles de dégrader les performances désirées pour le système réel [Dubuisson, 1990][Oustaloup et Mathieu, 1999]. Dans ce contexte, il peut être intéressant de tenir compte de ces imprécisions pour pouvoir assurer les performances désirées par le biais de la synthèse de lois de commande robustes [Zhou et Doyle, 1998]. Notons par ailleurs qu'un modèle trop simplifié est « faux » alors qu'un modèle trop détaillé peut être inexploitable avec les outils actuels d'analyse des systèmes. Ainsi, la prise en compte d'incertitudes pour la stabilisation robuste des systèmes non linéaires constitue un compromis entre complexité et validité de la solution et conduisent à une alternative intéressante pour la commande des systèmes complexes.

L'intérêt suscité par les méthodes de modélisation sous forme de multi-modèle T-S a été largement démontré. Par ailleurs, il apparaît clairement que la prise en compte d'incertitudes ainsi que l'extension à la classe des descripteurs conduirait à une généralisation des résultats applicables à une plus large classe de systèmes physiques. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de recherche de cette thèse visant aussi bien à proposer qu'à étendre des méthodologies de synthèse de lois de commande pour la stabilisation robuste des descripteurs T-S incertains et perturbés.

Ce mémoire, composé de cinq chapitres, est organisé de la façon suivante :

**Le premier chapitre** est constitué de deux grandes parties qui ont pour but d'introduire les concepts élémentaires de la commande des systèmes T-S. Au cours de la première partie, nous introduisons les différentes représentations d'état des systèmes non linéaires complexes. La classe des modèles T-S standards ainsi que leurs méthodes d'obtention sont alors présentées.

Puis, nous faisons un tour d'horizon sur les lois de commande floues fréquemment utilisées, et notamment le concept de compensation parallèle distribuée (PDC), ainsi que quelques résultats fondamentaux concernant la stabilité et la stabilisation par retour d'état et de sortie. La seconde partie est, quant à elle, consacrée aux modèles descripteurs. Dans un premier temps, nous donnons un bref aperçu des principaux résultats concernant les descripteurs linéaires et leurs conditions d'admissibilité. Ensuite, l'accent est mis sur les modèles descripteurs non linéaires sous forme T-S. L'intérêt des descripteurs T-S vs les modèles T-S standards est illustré à travers un exemple. Enfin, nous présentons les principales sources de conservatisme rencontrées lors de l'analyse ainsi que les solutions apportées avant de poser les problèmes traités dans la suite de cette thèse.

**Le second chapitre** constitue une première contribution de ce travail de thèse. En effet l'objectif est de proposer des approches de stabilité et de stabilisation exprimées en termes de  $\mathcal{LMI}$  pour les modèles descripteurs T-S incertains et /ou perturbés via une fonction candidate quadratique de Lyapunov. Ces conditions serviront alors de base aux approches proposées dans la suite de ce manuscrit. Dans un premier temps, nous dressons un bilan synthétique des travaux menés dans ce contexte. Ensuite, nous évoquons deux chemins conduisant aux représentations d'état des descripteurs T-S afin de justifier la classe des systèmes étudiée. Un bref rappel des différents types d'incertitudes pouvant affecter le système est présenté. Nous traitons ensuite le problème de la stabilité et de la stabilisation des modèles descripteurs T-S incertains puis l'analyse des performances  $H_\infty$  au regard des perturbations externes. Enfin, un premier schéma de relaxation typique pour les descripteurs T-S est proposé afin de réduire le conservatisme structurel des conditions  $\mathcal{LMI}$ . Un exemple numérique illustre alors la pertinence des résultats proposés.

**Le troisième chapitre** est consacré à la réduction du conservatisme des conditions présentées au chapitre précédent. Pour ce faire, une fonction non quadratique candidate de Lyapunov, dite fonction de Lyapunov floue (FLF), est employée ainsi qu'une loi de commande dérivée du principe PDC, appelée non-PDC. Dans ce cadre, des conditions de stabilisation robustes exprimées en termes de  $\mathcal{LMI}$  sont présentées. Les limites d'une telle approche sont ensuite discutées et plusieurs solutions ou compromis sont abordées afin de mettre en évidence l'applicabilité des approches proposées, notamment un compromis entre complexité de mise en œuvre et conservatisme des conditions de stabilisation en utilisant une fonction candidate quadratique étendue de Lyapunov. Enfin, des résultats de simulation sont présentés afin d'illustrer les approches développées au cours de ce chapitre.

**Le quatrième chapitre** est dédié à la réduction d'une autre source de conservatisme lors de la synthèse de lois de commande pour les modèles T-S. En effet, il s'agit ici de contourner le couplage engendré par les matrices d'entrées avec celles des gains de commande lors de la formulation de la dynamique de la boucle fermée et ainsi de faciliter l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  dépourvues de termes croisés. Pour ce faire, une propriété de redondance des descripteurs est utilisée. Celle-ci permet d'introduire une « dynamique virtuelle » dans l'expression de la boucle fermée via l'utilisation d'un vecteur d'état augmenté. Ainsi, le conservatisme introduit par les termes croisés sera réduit. On montre alors que les résultats obtenus dans les chapitres précédents sont inclus dans les approches proposées dans ce chapitre et des résultats de simulation confirment le bénéfice des conditions proposées au cours de ce chapitre.

**Le dernier chapitre** est consacré à l'étude de la stabilisation par retour de sortie dynamique et statique des modèles T-S standards incertains et perturbés. Dans un premier temps, nous adressons un bilan des divers travaux effectués dans ce contexte afin de positionner la

contribution apportée dans ce chapitre. Tirant parti de l'expertise acquise sur l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  pour les descripteurs T-S, la propriété de redondance est utilisée pour formuler la dynamique des boucles fermées en assurant le découplage entrées-sorties et conduisant, de manière élégante, à l'obtention de conditions de stabilisation  $\mathcal{LMI}$  pour une classe générique de systèmes T-S standards incertains et perturbés. Notons qu'ici, les conditions sont de plus, basées sur une fonction non quadratique de Lyapunov. Ceci constitue une contribution importante dans la mesure où de telles conditions n'existent pas, à notre connaissance, dans la littérature.

Enfin, une conclusion générale, suivie de la bibliographie et des annexes terminent ce manuscrit.



# Chapitre I

## Concepts élémentaires sur la modélisation et la commande des systèmes flous de type Takagi-Sugeno

---

---

1.1.	Introduction .....	6
1.2.	Représentation d'état et systèmes non linéaires .....	6
1.3.	Présentation des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) .....	7
1.4.	Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) .....	9
1.5.	Stabilité et stabilisation des modèles T-S standards .....	12
1.5.1.	Stabilité des modèles T-S .....	12
1.5.2.	Stabilisation par retour d'état des modèles T-S standards .....	14
1.5.2.1.	Lois de commande PDC (Parallel distributed compensation).....	14
1.5.3.	Stabilisation par retour de sortie .....	15
1.5.3.1.	Synthèse de lois de commande par retour de sortie dynamique.....	16
1.5.3.2.	Synthèse de lois de commande par retour de sortie statique.....	18
1.6.	Stabilité et stabilisation des systèmes descripteurs.....	19
1.6.1.	Admissibilité des descripteurs linéaires.....	19
1.6.2.	Classe des modèles descripteurs non linéaires de type Takagi-Sugeno .....	20
1.6.3.	Stabilité des modèles descripteurs T-S .....	22
1.6.4.	Stabilisation des modèles descripteurs T-S.....	23
1.7.	Réduction du conservatisme des conditions LMI pour modèles T-S .....	26
1.8.	Conclusion.....	28

## 1.1. Introduction

Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux sur la modélisation, la stabilité, et la stabilisation des modèles flous de type Takagi Sugeno (T-S) ainsi que leur extension à la classe des descripteurs du même type. En effet, la problématique de commande robuste des descripteurs flous T-S incertains et perturbés que nous abordons dans cette thèse, repose essentiellement sur les travaux et méthodes détaillés dans ce chapitre. Ainsi, ce dernier sera structuré comme suit. Nous présentons d'abord les différentes techniques d'obtention d'un modèle T-S et donnerons un exemple d'illustration sur la méthode la plus efficace pour y aboutir à partir d'un modèle dynamique non linéaire. Ensuite, les notions de stabilité et de stabilisation de ce type de modèles rencontrées dans la littérature seront abordées. Un recensement non exhaustif des lois de commande pour les modèles T-S sera présenté, notamment les lois de commande par retour d'état et retour de sortie. Ces méthodes de synthèse de lois de commande seront alors explicitées pour la classe des descripteurs T-S. Notons que la dernière section de ce chapitre sera consacrée à la présentation des principales méthodes de réduction du conservatisme lors de la synthèse de loi de commande pour les modèles T-S. L'ensemble des notions présentées au cours de ce chapitre permettra alors de positionner notre travail dans le domaine et de poser les problématiques abordées dans cette thèse.

## 1.2. Représentation d'état et systèmes non linéaires

Tout système physique à évolution continue peut s'écrire sous la forme d'une représentation d'état. Celle-ci permet de décrire des relations d'entrées sorties d'un système par le biais d'une modélisation sous la forme d'équations différentielles ordinaires (voir algébriques dans le cadre des systèmes implicites). La forme générale d'une représentation est donnée par :

$$\begin{cases} f(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x(t)$  est le vecteur d'état du système  $u(t)$  le vecteur d'entrée et  $y(t)$  le vecteur de sortie. La première équation est appelée « équation d'état » et la seconde, « équation de sortie ».

Notons que le système (1.1) est donné sous forme générale et inclut la classe des modèles écrit sous la forme d'une représentation d'état, dite « standard » affines en la commande donnée sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = s(x(t)) + m(x(t))u(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f(x(t))$  est la fonction d'état,  $g(x(t))$  la fonction d'entrée,  $s(x(t))$  la fonction de sortie et  $m(x(t))$  est la matrice de couplage entrée-sortie.

Ce type de systèmes, couramment rencontrés en automatique, fera l'objet de la première partie de ce chapitre.

D'autres systèmes affines en la commande permettent de prendre en compte la forme implicite d'un système ou encore les particularités structurelles de modélisation. Cette classe est appelée classe des « descripteurs » et permet de représenter les modèles non linéaires donnés par :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = s(x(t)) + m(x(t))u(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Ces systèmes seront étudiés par la suite et constitueront l'objet principal des contributions apportées au long de ce manuscrit.

### 1.3. Présentation des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S)

Les modèles flous de type Takagi-Sugeno sont représentés dans l'espace d'état par des règles floues de type « Si – Alors » [Takagi et Sugeno, 1985]. Les parties prémisses de ces règles floues sont représentatives de l'univers du discours sur lequel le modèle flou est valide et, les parties conclusions correspondent peut être à des modèles locaux invariants dans le temps (représentations d'état linéaires). A titre d'exemple, ce type de modèle flou s'avère utile pour la représentation des systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, chaotiques, etc. La  $i^{\text{ème}}$  règle floue d'un modèle T-S continu (en temps continu) (MFC) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} R^i : \quad & \mathbf{SI} \ z_1(t) \text{ est } F_1^i(z_1(t)) \ \mathbf{ET} \ z_2(t) \text{ est } F_2^i(z_2(t)) \ \dots\dots \ z_p(t) \text{ est } F_p^i(z_p(t)) \\ & \mathbf{ALORS} \ \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où  $R^i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  règle floue,  $i=1, \dots, r$ ,  $F_j^i(z_j(t))$  pour  $j=1, \dots, r$  sont les sous-ensembles flous,  $r$  le nombre de règles floues,  $z_j(t)$  sont les variables de prémisses qui dépendent de l'entrée et/ou de l'état du système,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande.  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$  sont des matrices décrivant la dynamique du système.

Notons qu'une discrétisation de tels modèles est possible par une représentation d'état en temps discret (MFD). Le temps  $t$  est alors congru à  $\kappa$  et le modèle est alors décrit par les équations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} R^i : \quad & \mathbf{SI} \ z_1(\kappa) \text{ est } F_1^i(z_1(\kappa)) \ \mathbf{ET} \ z_2(\kappa) \text{ est } F_2^i(z_2(\kappa)) \ \dots\dots \ z_p(\kappa) \text{ est } F_p^i(z_p(\kappa)) \\ & \mathbf{ALORS} \ \begin{cases} x_i(\kappa+1) = A_i x(\kappa) + B_i u(\kappa) \\ y_i(\kappa) = C_i x(\kappa) + D_i u(\kappa) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

A chaque règle  $R^i$  est attribuée un poids noté  $w_i(z(t))$ . Ce poids dépend du degré d'appartenance des variables de prémisses  $z_j(t)$  aux sous-ensembles flous  $F_j^i(z_j(t))$  et du connecteur « **ET** » reliant les prémisses choisi telles que :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)), \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.6)$$

$F_j^i(z_j(t))$  représente la valeur de la fonction d'appartenance  $z_j(t)$  à l'ensemble flou  $F_j^i$ . On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0, \forall t \end{cases} \quad (1.7)$$

On pose :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.8)$$

$h_i(z(t))$  représente donc la fonction d'activation de la  $i^{\text{ème}}$  règle du modèle flou. Pour  $i = 1, \dots, r$ , ces fonctions vérifient la propriété d'une somme convexe, c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$  et  $h_i(z(t)) \geq 0$ .

Finalement, la défuzzification du modèle flou permet d'obtenir la représentation d'état d'un modèle non linéaire par l'interconnexion de modèles locaux invariants dans le temps par des fonctions d'activation non linéaires. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (1.9)$$

Notons que de la même façon, pour un modèle flou discrétisé (MFD) on a:

$$\begin{cases} x(\kappa+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(\kappa))(A_i x(\kappa) + B_i u(\kappa)) \\ y(\kappa) = \sum_{i=1}^r h_i(z(\kappa))(C_i x(\kappa) + D_i u(\kappa)) \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans le cadre de la modélisation par modèles Takagi-Sugeno, on rencontre souvent les termes : variables de prémisses, fonctions d'appartenance ou d'activation, zones de fonctionnement (sous espaces) et règles floues. Ceux-ci sont précisés par les définitions suivantes :

**Règles floues** : dénombrées par  $r \in \mathbb{N}$  dans la représentation d'état d'un modèle flou T-S. Elles correspondent au nombre de modèles locaux LTI.

**Variables de prémisses** : notées  $z(t) \in \mathbb{R}^j$ . Grandeurs connues et accessibles permettent l'évaluation des fonctions d'appartenance. Elles dépendent éventuellement des variables d'état mesurables et/ou de la commande.

**Fonctions d'appartenance** : notées  $h_i(z(t)) : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$ , ce sont des fonctions non linéaires dépendant des variables de prémisses associées aux différentes zones de fonctionnement. Elles permettent de traduire la contribution d'un modèle local LTI correspondant à un point de fonctionnement par rapport à la zone de fonctionnement du système. Ainsi, elles assurent le passage progressif d'un modèle local LTI aux modèles locaux voisins.

**Les zones de fonctionnement** : représentées par des domaines  $\ell_i$  obtenus via la décomposition de l'espace de fonctionnement du système  $\ell$ , avec  $\ell = \bigcup_i \ell_i$ .

La figure 1 illustre le schéma détaillé d'un modèle T-S standard. Notons que les modèles flous de type Takagi-Sugeno sont dotés d'une structure mathématique intéressante de point de vue de l'automatique. En effet, ils permettent de diminuer la complexité d'un problème non linéaire à traiter (stabilité, stabilisation, observation, diagnostic,...etc.) en le décomposant en un ensemble de problèmes linéaires locaux. L'ensemble des solutions locales correspondant à ces derniers constitue alors la solution globale du problème non linéaire initial.

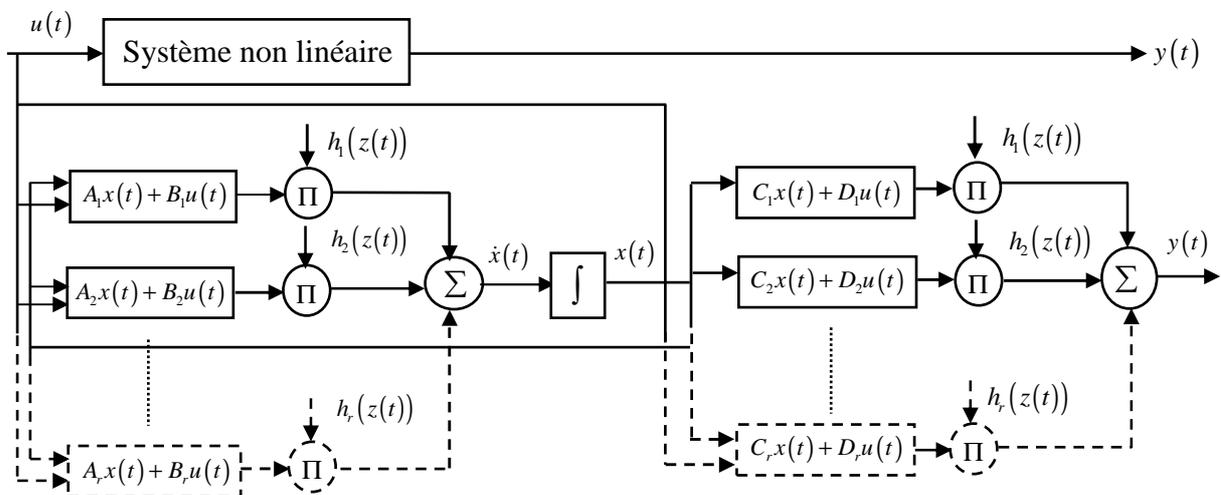


Figure 1.1. Structure et implémentation d'un modèle T-S Standard.

#### 1.4. Obtention des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S)

Dans la littérature, il existe trois approches permettant le passage d'un modèle non linéaire affine en la commande à un modèle T-S. Ces approches visent à représenter les systèmes non linéaires complexes sur un large domaine de fonctionnement. Ces différentes approches sont :

- approche par identification [Gasso et al., 1999][Gasso et al., 2000]. Les mesures acquises sur les entrées et les sorties du système permettent l'identification des paramètres des modèles locaux autour des différents points de fonctionnement préalablement définis. Dans ce cas, le problème d'identification du modèle non linéaire se réduit à l'identification des modèles locaux (sous-modèles) LTI. Notons que, cette méthode est souvent utilisée dans le cas des systèmes dotés d'une dynamique difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique.
- approche par linéarisation [Ma et al., 1998][Tanaka et Wang 2001]. Le principe de cette méthode consiste à linéariser le système non linéaire autour d'un ensemble fini de points de fonctionnement judicieusement choisis, conduisant à un nombre défini de modèles LTI. L'obtention d'un représentant T-S dans ce cas, est réalisé par l'interconnexion de ces modèles LTI à l'aide des fonctions d'appartenance non linéaires judicieusement choisies (gaussiennes, triangulaires, trapézoïdales,...etc.).
- approche par secteur non linéaire. Cette méthode a été initiée par [Kawamoto et al., 1992] et étendue par [Tanaka et Wang, 2001] et [Morère, 2001]. Le principe de celle-ci est basé sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires d'un système dynamique. Autrement dit, cette méthode consiste à trouver un secteur tel que  $a_1x \leq f(x(t), u(t)) \leq a_2x$  avec  $\dot{x} = f(x(t), u(t))$  représente un système non linéaire. Cette méthode garantit la construction d'un modèle T-S représentant exactement un modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état.

Dans la suite de ce manuscrit, l'intérêt est porté sur la troisième méthode, puisqu'elle présente des avantages du point de vue précision et connaissance des fonctions d'appartenance assurant l'interconnexion des modèles locaux LTI. En effet, l'approche par secteur non linéaire par rapport à l'approche par linéarisation permet, d'une part, de minimiser l'erreur lors du passage du modèle analytique non linéaire au modèle T-S, d'autre part d'optimiser le nombre de modèles locaux. Il convient de souligner qu'il peut s'avérer difficile de trouver un secteur global pour un système non linéaire quelconque. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer un secteur non linéaire local. Les figures 1.2 et 1.3 représentent respectivement les secteurs non linéaires global et local.

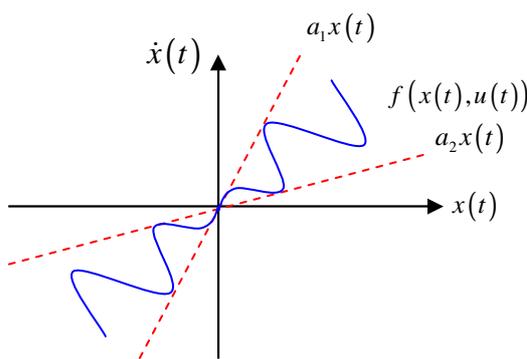


Figure 1.2. Secteur non linéaire global.

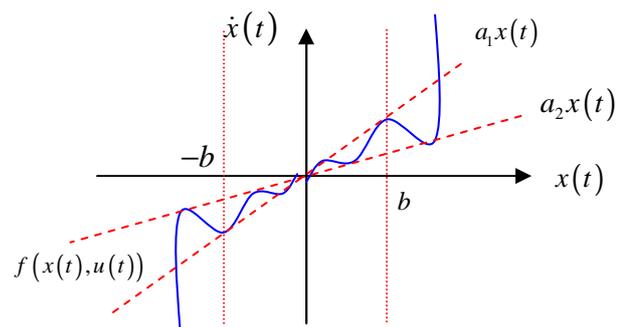


Figure 1.3. Secteur non linéaire local.

Notons que l'approche par secteur non linéaire permet d'associer une infinité de modèles T-S pour un système non linéaire suivant le découpage des non-linéarités réalisé. Une approche systématique de découpage en secteurs non linéaires repose sur le lemme suivant [Morère, 2001] :

**Lemme 1.1 :**

Soit  $f(x(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée, il existe toujours deux fonctions  $w_1(x(t))$  et  $w_2(x(t))$  ainsi que, deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta \times w_2(x(t))$$

avec :  $w_1(x(t)) + w_2(x(t)) = 1$ ,  $w_1(x(t)) \geq 0$  et  $w_2(x(t)) \geq 0$ .

**Preuve :**

Sous l'hypothèse que la fonction  $f(x(t))$  est bornée telle que  $\alpha \leq f(x(t)) \leq \beta$ , il est possible d'écrire :

$$f(x(t)) = \alpha \times w_1(x(t)) + \beta \times w_2(x(t)) \quad (1.11)$$

avec  $\alpha = \max(f(x(t)))$ ,  $\beta = \min(f(x(t)))$ ,  $w_1(x(t)) = \frac{f(x(t)) - \beta}{\alpha - \beta}$  et

$$w_2(x(t)) = \frac{\alpha - f(x(t))}{\alpha - \beta}.$$

■

**Remarque 1.1**

On considère le système non linéaire  $\dot{x} = f(x(t))$ , avec  $f(0) = 0$ . Selon les propriétés des termes non linéaires rencontrés dans le modèle mathématique non linéaire, nous distinguons deux types de représentant T-S, en effet :

- Si toutes les non-linéarités du système sont **continues** et **bornées** sur  $\mathbb{R}^n$ , alors le modèle T-S représente d'une manière exacte le système non linéaire sur l'intégralité de l'espace des variables d'état  $\mathbb{R}^n$ .
- Si toutes les non-linéarités du système sont uniquement **continues**, alors le modèle T-S représente de façon exacte le système non linéaire sur un sous-espace compact de l'espace des variables d'état  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.1**

Soit le système non linéaire autonome donné par :

$$\dot{x}(t) = x(t) \cos(x(t)) \quad (1.12)$$

Notons que  $f(x(t)) = \cos(x(t))$  est continu et borné par  $[-1 \ 1]$ , d'après le lemme 1, on peut écrire :

$$\cos(x(t)) = \underbrace{\frac{\cos(x(t)) + 1}{2}}_{h_1(x(t))} \times 1 + \underbrace{\frac{1 - \cos(x(t))}{2}}_{h_2(x(t))} \times (-1)$$

D'où un représentant T-S de (1.12) comportant deux règles floues données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x(t) \text{ est } F_1^1(h_1x(t)) \text{ alors } \dot{x}(t) = x(t) \\ \text{Si } x(t) \text{ est } F_1^2(h_1x(t)) \text{ alors } \dot{x}(t) = -x(t) \end{array} \right.$$

Ainsi le modèle T-S est donné sous sa forme compacte par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) a_i x(t) \quad (1.13)$$

où  $a_1 = 1$  et  $a_2 = -1$ .

### Remarque 1.2

Les modèles T-S obtenus via une transformation polytopique convexe dépendent directement du nombre des non-linéarités à découper. Ainsi, lorsque l'on a  $nl$  termes non linéaires, alors le modèle T-S est constitué de  $2^{nl}$  règles floues.

## 1.5. Stabilité et stabilisation des modèles T-S standards

L'étude de la stabilité et la synthèse des contrôleurs flous pour les modèles T-S standards (MTSS) (1.9) sont généralement basées sur la théorie de Lyapunov [Liapounoff, 1907]. Le principe de cette dernière est inspiré d'une réalité physique. En effet, si l'énergie d'un système est continûment dissipée, au final le système va atteindre un point d'équilibre. Un rappel sur la théorie de Lyapunov est donné dans l'annexe B. Dans la suite, sans perte de généralité, on suppose que le point d'équilibre est l'origine.

### 1.5.1. Stabilité des modèles T-S

L'étude de la stabilité d'un MTSS autonomes (1.9) permet d'établir si sa dynamique est intrinsèquement stable lorsqu'il n'est soumis à aucune excitation externe ( $u(t) = 0$ ). Dans cette section, afin de permettre au lecteur d'appréhender les résultats proposés dans la suite de ce manuscrit, on présente les résultats significatifs, à l'origine des nombreux travaux sur la stabilité des MTSS. Ceux-ci sont donnés sous forme d'Inégalités Matricielles Linéaires ( $\mathcal{LMI}$ ) [Boyd et al., 1994]. Notons que quelques rappels sur les  $\mathcal{LMI}$  sont présentés en annexe. Le résultat suivant traite de la stabilité des MTSS décrits en temps continu :

**Théorème 1.1 :** [Tanaka et Sugeno, 1992]

Le MTS continu autonome ( $u(t)=0$ ) (1.9) (respectivement (1.10) dans le cas discret) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$ , telles que les LMI suivantes sont vérifiées pour  $i = 1, \dots, r$  :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (\text{cas continu}) \quad (1.14)$$

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (\text{cas discret}) \quad (1.15)$$

**Preuve :** (cas continu)

En considérant la fonction candidate quadratique de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (1.16)$$

Le MTS autonome (1.9) ( $u(t)=0$ ) est stable si:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) < 0 \quad (1.17)$$

C'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i^T P + P A_i) \right) x(t) < 0 \quad (1.18)$$

qui est vérifiée si les conditions suffisantes du théorème 1 le sont. ■

**Remarque 1.3**

Notons qu'aucune information sur les fonctions d'appartenance  $h_i(z(t))$  n'est prise en compte dans le théorème 1.1. De ce fait, les conditions de stabilité LMI sont seulement suffisantes (et non nécessaires) et par conséquent conservatives. En effet, pour obtenir ces conditions, on cherche une solution à un problème d'optimisation en considérant que, pour qu'une somme soit négative, chacun des termes de cette somme doit être négatif. Or, il est évidemment possible de chercher des solutions aux conditions du théorème 1.1 qui autoriseraient certains termes de la somme (1.18) à être positifs alors que l'ensemble restera négatif. Dans ce cas, on obtient des conditions de stabilité dites « relâchées », c'est-à-dire moins conservatives.

Dans le cas où l'on peut établir que le système est stable, il peut être intéressant d'améliorer les performances. Dans le cas contraire, il s'avère nécessaire de synthétiser une loi de commande floue stabilisante pour pouvoir ramener le système vers le point d'équilibre.

## 1.5.2. Stabilisation par retour d'état des modèles T-S standards

Afin d'assurer la stabilité d'un MTSS en boucle fermée, on réalise la synthèse d'une loi de commande adéquate. Plusieurs lois de commande floues ont été proposées dans la littérature. Les plus répandues se basent sur des lois de commande de type compensation parallèle distribuée (PDC, *Parallel Distributed Compensation*) [Wang et al., 1996][Tanaka et al., 1998]. Notons, par ailleurs que, suivant la classe des modèles T-S considérés, des variantes de ce type de loi de commande ont été également proposées dans la littérature, par exemple la PDC proportionnelle (PPDC) [Lin et Er, 2001] ou encore la loi de commande de type compensation et division pour modèles flous [Guerra et al., 1999].

### 1.5.2.1. Lois de commande PDC (Parallel distributed compensation)

La loi de commande PDC [Wang et al., 1996][Tanaka et al., 1998] a l'avantage de considérer les mêmes prémisses que les règles floues contenues dans le modèle T-S à stabiliser. De ce fait, cela revient à considérer que, à chaque modèle local correspond une commande par retour d'état linéaire que l'on peut interpoler par les mêmes fonctions d'activation  $h_i(z(t))$  que celles du modèle T-S. Notons que dans ce cas, lorsque le modèle flou obtenu par découpage est exact, c'est-à-dire par transformation polytopique convexe, alors cette loi de commande est valable sur tout l'espace compact des variables d'état sur lequel a été effectué le découpage. Ainsi, cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (1.19)$$

avec  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  représentent les matrices des gains de retour d'état.

La synthèse d'un correcteur flou consiste alors à déterminer les matrices de gain de retour d'état notées  $F_i$ .

#### Stabilisation des MTSS continus

Dans le cas continu, pour obtenir l'expression du modèle flou T-S en boucle fermée, on substitue la loi de commande (1.19) dans (1.9), on obtient alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t) \quad (1.20)$$

Des conditions suffisantes de stabilisation sont présentées dans le théorème suivant.

**Théorème 1.2** [Wang et al., 1996]:

*Le MTSS continu (1.9) est asymptotiquement stabilisé via la loi de commande PDC (1.19) s'il existe des matrices  $X$  et  $K_j$ , telles que les LMI suivantes soient vérifiées.*

$$Y_{ii} < 0, \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.21)$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} < 0, \text{ pour } i, j = 1, \dots, r \text{ et } i < j \quad (1.22)$$

$$\text{avec } Y_{ij} = A_i X - B_i K_j + X A_i^T - K_j^T B_i^T < 0, \quad K_j = F_j X \text{ et } X = P^{-1}$$

**Preuve :**

En suivant la même démarche que pour la preuve du théorème 1.1 et en séparant les modèles dominants des modèles croisés, on obtient directement :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i^T P + P A_i - F_j^T B_i^T P - P B_i F_j) \right) x(t) < 0 \quad (1.23)$$

qui est vérifiée  $\forall x(t)$  en considérant  $X = P^{-1}$   $K_j = F_j X$  si les conditions du théorème 1.2 le sont. ■

### 1.5.3. Stabilisation par retour de sortie

Dans cette section, nous expliciterons quelques travaux traitant la commande par retour de sortie. Dans ce cadre, plusieurs approches sont possibles :

- **Retour de sortie à base d'observateur** [Tanaka et Wang, 2001][Yoneyama et al., 2001][Guerra et al., 2006]: un observateur permettant l'estimation du vecteur d'état sur la base des mesures des signaux d'entrée et de sortie, une loi de commande statique par retour d'état estimé permet alors la stabilisation d'un système dynamique. Notons que ce type de commande par retour de sortie pose certains problèmes tels que la mise sous forme  $\mathcal{LMI}$  du problème de synthèse de l'observateur et des gains de commande [Ma et al., 1998].
- **Retour de sortie dynamique** [Li et al., 2000][Yoneyama et al., 2001][Assawinchaichote et al., 2004][Yoneyama, 2006][Zerar et al., 2008] : ce type de contrôleurs permet d'améliorer les performances en boucle fermée d'un système dynamique et est souvent utilisé dans le cadre de la commande robuste par le biais de transformations linéaires fractionnelles (LFT) [Zhou et Doyle, 1996]. L'écriture de la boucle fermée pour le retour de sortie dynamique est généralement basée sur l'utilisation du produit de Redheffer [Redheffer, 1960]. Notons que celui-ci entraîne l'apparition de nombreux termes croisés (couplage entrées-sorties) et conduit donc à des conditions de stabilisation  $\mathcal{LMI}$  assez conservatives.
- **Retour de sortie statique** [Chadli et al., 2002][Huang et Nguang, 2006][Huang et Nguang, 2007][Dong et Yang, 2008][Nachidi et al., 2007][Kau et al., 2007] : ce type de lois de commande par retour de sortie s'avère particulièrement intéressant dans le cadre d'applications nécessitant un faible coût de calcul puisque, à l'instar des lois de

commande à base d'observateurs ou par retour de sortie dynamique, elles ne nécessitent pas la résolution d'équations différentielles en ligne.

Notons par ailleurs que l'ensemble des conditions de stabilisation par retour de sortie proposées dans la littérature, ont été obtenues dans le cadre quadratique et qu'elles sont souvent données en termes d'inégalités matricielles bilinéaires (*BM*). Lorsque des *LM* sont proposées, celles-ci sont obtenues au prix d'hypothèses restrictives, par exemple  $C_i = C$  commune, de rang plein en ligne et  $D_i = 0$  [Chadli et al., 2002]. Dans la suite, nous expliciterons les travaux relatifs au retour de sortie dynamique puis statique dans la mesure où ils feront l'objet d'un chapitre conduisant à leur application pour une plus large classe de systèmes T-S tout en réduisant le conservatisme des conditions existantes.

### 1.5.3.1. Synthèse de lois de commande par retour de sortie dynamique

Un contrôleur par retour de sortie dynamique est représenté par un système d'équations différentielles ordinaires. Dans le cadre de la stabilisation des modèles T-S, une loi de commande PDC dynamique (DPDC) peut-être donnée par [Li et al., 2000]:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))A_c^{ij}x_c(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_c^i y(t) \\ u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_c^i x_c(t) + D_c y(t) \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $x_c(t)$ ,  $y(t)$  et  $u(t)$  représentent respectivement le vecteur d'état du contrôleur, le vecteur de sortie du système et le signal de commande. Les matrices  $A_c^{ij}$ ,  $B_c^i$ ,  $C_c^i$  et  $D_c$  sont des matrices de gains de dimensions appropriées à synthétiser.

Notons que la classe des MTSS considérée par [Li et al., 2000] ne tient pas compte de la matrice de couplage entrées-sorties ( $D_i = 0$ ). Ainsi, en utilisant le produit de Redheffer [Redheffer, 1960], l'expression de la dynamique de la boucle fermée peut-être exprimée à l'aide du vecteur d'état  $x_{cl}(t) = [x^T(t) \quad x_c^T(t)]^T$  telle que :

$$\dot{x}_{cl}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + B_i D_c C_j & B_i C_c^j \\ B_c^i C_j & A_c^{ij} \end{bmatrix} x_{cl}(t) \quad (1.25)$$

En considérant la fonction candidate quadratique de Lyapunov :

$$V(x_{cl}(t)) = x_{cl}^T(t) P x_{cl}(t) \quad (1.26)$$

$$\text{avec } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix},$$

le théorème suivant peut être énoncé.

**Théorème 1.3 :** [Li et al., 2000]

Le MTSS continu (1.9) est globalement stable via la loi de commande DPDC (1.24) s'il existe les matrices  $Q_{11}$ ,  $P_{11}$ ,  $\Xi_{ij}$ ,  $\bar{A}_{ij}$ ,  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{C}_i$  et  $\bar{D}$ , telles que les LMI suivantes soient vérifiées pour  $i, j = 1, \dots, r$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & I \\ I & P_{11} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.27)$$

$$\Xi = \Xi^T = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \dots & \Xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_{1n} & \dots & \Xi_{nn} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.28)$$

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} Q_{11}A_i + (Q_{11}A_i)^T + Q_{11}A_j + (Q_{11}A_j)^T \\ + B_i\bar{C}_j + (B_i\bar{C}_j)^T + B_j\bar{C}_i + (B_j\bar{C}_i)^T \end{array} \right) & (*) \\ A_i + A_j + B_i\bar{D}C_j + B_j\bar{D}C_i + 2\bar{A}_{ij}^T & \left( \begin{array}{c} P_{11}A_i^T + (P_{11}A_i^T)^T + P_{11}A_j^T + (P_{11}A_j^T)^T \\ + B_i\bar{C}_j + (B_i\bar{C}_j)^T + B_j\bar{C}_i + (B_j\bar{C}_i)^T \end{array} \right) \end{bmatrix} < \Xi_{ij} \quad (1.29)$$

avec les matrices de contrôleur données par :

$$\bar{A}_c^{ij} = \frac{(A_c^{ij} + A_c^{ji})}{2} = \frac{1}{2} P_{12}^{-1} \left( \begin{array}{c} 2\bar{A}_{ij} - P_{12}B_c^iC_jQ_{11} - P_{12}B_c^jC_iQ_{11} - P_{11}B_iC_c^jQ_{12}^T - P_{11}B_jC_c^iQ_{12}^T \\ -P_{11}(A_i + B_iD_cC_j)Q_{11} - P_{11}(A_j + B_jD_cC_i)Q_{11} \end{array} \right) Q_{12}^{-1} \quad (1.30)$$

$$\bar{B}_c^i = B_c^i = P_{12}^{-1} (\bar{B}_i - P_{11}B_iD_c) \quad (1.31)$$

$$\bar{C}_c^i = C_c^i = (\bar{C}_i - D_cC_iQ_{11})(Q_{12}^{-1})^T \quad (1.32)$$

$$\bar{D}_c = D_c = \bar{D} \quad (1.33)$$

Tels que,  $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$  et les matrices  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $Q_{11}$  et  $Q_{12}$  vérifient la condition :

$$P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{11}^T = I \quad (1.34)$$

Dès lors, la synthèse d'un contrôleur flou consiste à résoudre les contraintes LMI (1.27)-(1.29) et la solution apportée doit vérifier la condition (1.34) issue d'une décomposition en valeur singulière, voir [Li et al., 2000] pour plus de détails.

Notons que, dans le cas de la commande par le retour de sortie dynamique des MTSS, des conditions quadratiques de stabilisation robustes ont été proposées pour des systèmes incertains [Han et al., 2000], perturbés [Assawinchaichote et al., 2004], avec retard [Lee et al., 2000] ou dans le cas discret [Tanaka et al., 2006][Dong et Yang, 2009].

### 1.5.3.2. Synthèse de lois de commande par retour de sortie statique

La commande par retour de sortie dynamique nécessite la résolution en ligne d'un système d'équations différentielles ordinaires. Celui-ci entraîne donc une augmentation considérable du coût de calcul lors de son implantation. Une alternative consiste en la synthèse et l'implémentation d'une loi de commande par retour de sortie statique. Dans le cadre des systèmes T-S, celle-ci est donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i y(t) \quad (1.35)$$

où  $y(t)$  et  $u(t)$  représentent respectivement la sortie du système (1.35) et le signal de commande.  $K_i$  sont les matrices de gains de commande de dimensions appropriées à synthétiser.

Dans [Chadli et al., 2002], des conditions *LMI* sont obtenues en considérant la matrice de couplage entrée-sortie nulle ( $D_i = 0$ ) et la matrice de sortie constante ( $C_i = C$ ) et de rang plein en ligne. La dynamique de la boucle fermée est exprimée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i + B_i K_j C) x(t) \quad (1.36)$$

et ses conditions de stabilité sont résumées dans le théorème suivant.

**Théorème 1.4** [Chadli et al., 2002]:

Le MTSS continu (1.9), avec  $D_i = 0$  et  $C_i = C$  de rang plein en ligne, est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (1.35) s'il existe les matrices  $X > 0$ ,  $M$  et  $N$ , telles que les *LMI* suivantes soient vérifiées :

$$A_i X + (A_i X)^T + B_i N_i C + (B_i N_i C)^T < 0, \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} & (A_i + A_j) X + ((A_i + A_j) X)^T + (B_i N_j + B_j N_i) C + ((B_i N_j + B_j N_i) C)^T < 0, \text{ pour } i, j = 1, \dots, r \text{ et} \\ & i \neq j \end{aligned} \quad (1.38)$$

avec  $CX = MC$  et  $K_i = N_i C C^T (C X C^T)^{-1}$ .

Notons que d'autres conditions quadratiques ont été exprimées en termes de  $BMI$  pour les MTSS [Huang et Nguang, 2007], avec retard [Nachidi et al., 2007] ou dans le cas incertain et perturbé [Kau et al., 2007]. D'autre part, ce n'est que récemment que des conditions non quadratiques  $LMI$  ont été proposées par [Wu, 2008] mais uniquement dans le cas discret. Le cas continu constitue un des résultats apportés par ces travaux de thèse [Bouarar et al., 2009c].

## 1.6. Stabilité et stabilisation des systèmes descripteurs

Les systèmes descripteurs permettent de décrire les systèmes singuliers [Dai, 1989] mais aussi de représenter de nombreux modèles de connaissances physiques écrits sous forme ordinaire et dont l'exploitation nécessite l'ajout de contraintes statiques [Luenberger, 1977]. C'est le cas par exemple des mécanismes poly-articulés comportant des parallélismes structurels et dont les équations du mouvement (Euler-Newton) doivent être enrichies par un ensemble de contraintes non holonomes afin d'en décrire l'évolution [Khalil et Dombre, 1999][Merlet, 1997]. Dans cette section, nous rappellerons quelques résultats sur l'admissibilité des descripteurs linéaires avant de nous intéresser aux conditions de stabilité et de stabilisation des descripteurs T-S qui feront l'objet des contributions apportés le long de cette thèse.

### 1.6.1. Admissibilité des descripteurs linéaires

Soit le système descripteur linéaire [Luenberger, 1977] :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  sont des matrices réelles,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le signal de commande. Notons que la matrice  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  peut être dans le cas échéant singulière, c'est-à-dire  $\text{rang}(E) = \alpha < n$ .

Dans le cadre des modèles descripteurs, il est plus juste de parler d'admissibilité plutôt que de stabilité [Dai, 1989]. En effet, la notion de stabilité connue dans le cas des systèmes standards (explicites) s'avère insuffisante. Par conséquent, il est nécessaire de considérer les propriétés de régularité et de non impulsivité « *impulse free* » données par les définitions suivantes pour les descripteurs (1.39) autonomes ( $u(t) = 0$ ).

**Définitions 1.2 :** [Dai, 1989].

- Le couple  $(E, A)$  est régulier si  $\det(sE - A) \neq 0$  où  $s$  désigne l'opérateur de Laplace.
- Le couple  $(E, A)$  est dit non impulsif si  $\deg(\det(sE - A)) = \text{rang}(E)$ .

- Le couple  $(E, A)$  est dit stable si les pôles de  $\det(sE - A) = 0$  sont à partie réelle négative.
- Le couple  $(E, A)$  est dit admissible s'il est régulier, non impulsif et stable.

#### Remarque 1.4

Dans le cadre des systèmes standards, la notion de régularité est toujours vérifiée dans la mesure où pour toute condition initiale  $x(0)$  et une commande  $u(t)$  connue sur un intervalle  $[0, t]$ , la sortie  $y(t)$  du système existe et est unique. En revanche, dans le cadre des systèmes descripteurs, la sortie est unique pour une condition initiale définie et une loi de commande connue si le couple  $(E, A)$  est régulier. De plus, l'impulsivité des systèmes physiques représente un phénomène indésirable et soulève un problème lors de l'étude de la stabilité et de la stabilisation. En effet, il est important de vérifier a priori si le système à étudier n'est pas impulsif. De ce fait, un système est dit non impulsif « *impulse free* » si sa réponse temporelle reste continue pour toute condition initiale et quelque soit le signal de commande  $u(t)$ .

Notons que des travaux existent dans la littérature traitant de la stabilité, la stabilisation et l'observation des descripteurs linéaires. Par exemple, le problème de synthèse de lois de commande par placement de pôles ainsi que celui de la commande optimale ont été traités par [Cobb, 1981] et [Cobb, 1983], la commande  $H_\infty$  par le retour de sortie dynamique a été l'objet de l'étude menée par [Masubushi et al., 1997] ou encore la commande de descripteur linéaires incertains [Lin, 1999]. D'autre part, des conditions d'admissibilité des descripteurs linéaires incertains en temps discret exprimées en terme de  $\mathcal{LMI}$  ont été proposées par [Rejichi et al., 2008]. Ces dernières ont été étendues au cas des descripteurs incertains à retard par [Wu et al., 2008].

### 1.6.2. Classe des modèles descripteurs non linéaires de type Takagi-Sugeno

Soit le modèle descripteur non linéaire affine en la commande appartenant à la classe décrite par (1.3) suivant :

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))u(t) \end{cases} \quad (1.40)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  respectivement les vecteurs d'état, de sortie et de commande.

$E(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(x(t)) \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $D(x(t)) \in \mathbb{R}^{q \times m}$  sont des matrices de fonctions non linéaires.

L'obtention d'un modèle flou de type T-S sous la forme descripteur se fait de la même façon que pour une représentation d'état standard. En effet, le découpage des non-linéarités contenues

dans le modèle non linéaire (1.40) permet d'avoir une représentation exacte sous forme de descripteur flou sur un domaine compact de l'espace d'état [Tanaka et al., 1998][Morère, 2001]. Ainsi, un modèle descripteur flou de type T-S (DTS) a été proposé par [Taniguchi et al., 2000] et est donné par :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (1.41)$$

où  $l$  et  $r$  représentent respectivement le nombre de règles floues dans les parties gauche et droite.  $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$  sont des matrices constantes. De la même manière que pour les MTSS, les fonctions d'appartenance  $v_k(z(t)) \geq 0$  et  $h_i(z(t)) \geq 0$  vérifient les propriétés de sommes convexes  $\sum_{k=1}^l v_k(z(t)) = 1$  et  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ .

### Remarque 1.5

- 1) Un descripteur peut-être réécrit sous la forme d'une représentation d'état standard que s'il n'existe pas un point de l'espace d'état où  $E(x(t))$  est singulière.
- 2) L'idée n'est pas d'utiliser les formes implicites ( $E(x(t))$  singulière) mais d'utiliser la forme descripteur dans le souci de représenter des modèles non linéaires de façon exacte dans un domaine de l'espace des variables d'état afin de réduire le nombre de règles d'un modèle T-S associé [Taniguchi et al., 2000][Guelton, 2003][Guelton et al., 2008b].

Dans la suite, par souci de clarté et pour alléger les expressions mathématiques, on définit les notations suivantes qui seront conservées le long de ce manuscrit.

### Notations :

Pour  $i, j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$  les fonctions scalaires  $h_i(z(t))$  et  $v_k(z(t))$ , les matrices de dimensions appropriés  $Y_k$ ,  $G_i$ ,  $T_{ik}$  et  $L_{ijk}$ , on note :

$$Y_v = \sum_{k=1}^l v_k(z(t)) Y_k, \quad G_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) G_i, \quad T_{hv} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) T_{ik} \quad \text{et}$$

$$L_{hhv} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) L_{ijk}.$$

Par ailleurs, de manière usuelle,  $(*)$  indique une quantité transposée au sein d'une matrice. Enfin, le temps  $t$  est omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

### 1.6.3. Stabilité des modèles descripteurs T-S

L'étude de la stabilité et de la stabilisation des modèles DTS ont été initiées par [Yoneyama et Ichikawa, 1999][Taniguchi et al., 1999a][Taniguchi et al., 2000]. Les conditions de stabilité proposées sont basées sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov.

De manière usuelle pour les systèmes descripteurs, on considère le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T$  et (1.41) peut être réécrit tel que :

$$\begin{cases} \bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{iw}\bar{x}(t) + \bar{B}_h u(t) \\ y(t) = \bar{C}_h \bar{x}(t) + \bar{D}_h u(t) \end{cases} \quad (1.42)$$

avec  $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}$ ,  $\bar{C}_i = [C_i \quad 0]$  et  $\bar{D}_i = D_i$ .

Des conditions suffisantes de stabilité quadratique pour les modèles DTS continus en régime autonome ont été proposées par [Taniguchi et al., 2000] et sont résumées dans le théorème suivant.

**Théorème 1.5 :** [Taniguchi et al., 2000]

Le modèle DTS continu autonome ( $u(t) = 0$ ) (1.42) est asymptotiquement stable s'il existe les matrices  $P_1 = P_1^T > 0$ ,  $P_3$  et  $P_4$  telles que les LMI suivantes sont vérifiées pour  $i = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$  :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_3 + P_3^T A_i & (*) \\ P_1 - E_k^T P_3 + P_4^T A_i & -E_k^T P_4 - P_4^T E_k \end{bmatrix} < 0 \quad (1.43)$$

**Preuve :**

On considère la fonction quadratique candidate de Lyapunov donnée par :

$$V(x(t)) = x^T(t) \bar{E} \bar{P} x(t) \quad (1.44)$$

avec la condition de symétrie :

$$\bar{E} \bar{P} = \bar{P}^T \bar{E} > 0 \quad (1.45)$$

On pose  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$ , la condition (1.45) conduit à  $P_1 = P_1^T > 0$  et  $P_2 = 0$ .

Le descripteur T-S autonome (1.42) est stable si :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) \overline{E} \overline{P} x(t) + x^T(t) \underbrace{\overline{E} \overline{P}}_{\overline{P}^T \overline{E}} \dot{x}(t) < 0 \quad (1.46)$$

C'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) (\overline{A}_{ik}^T \overline{P} + \overline{P}^T \overline{A}_{ik}) x(t) < 0 \quad (1.47)$$

En considérant les matrices définies en (1.42), on aboutit facilement aux conditions (1.43) ■

### 1.6.4. Stabilisation des modèles descripteurs T-S

L'obtention de la loi de commande PDC appliquée au descripteur s'effectue exactement de la même manière que pour les modèles flous T-S standards. Les structures de découpage peuvent être conservées lors de la synthèse pour que la commande reste valable sur l'ensemble des points de fonctionnement appartenant à un domaine compact de l'espace d'état. Une loi de commande de type PDC modifiée a été proposée par [Taniguchi et al., 2000]. Celle-ci est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) K_{ik} x(t) \quad (1.48)$$

avec  $K_{jk} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  les matrices des gains de retour d'état.

La synthèse d'un contrôleur flou par retour d'état consiste alors à trouver les matrices des gains de retour d'état. Soulignons que, dans le cadre de la stabilisation des modèles DTS, la loi de commande PDC modifiée employée introduit une nouvelle structure d'interconnexion en  $v_k(z(t))$  relative à la partie gauche du descripteur à commander. Celle-ci offre la possibilité de compenser la dynamique globale (1.41).

En utilisant les notations définies et le vecteur d'état définis précédemment, (1.48) peut être réécrite telle que :

$$u(t) = -\overline{K}_{hv} \overline{x}(t) \quad (1.49)$$

avec  $\overline{K}_{hv} = \begin{bmatrix} K_{jk} & 0 \end{bmatrix}$ .

En substituant la loi de commande (1.49) dans (1.42), le descripteur T-S continu (1.42) en boucle fermée est donné par :

$$\overline{E} \dot{\overline{x}}(t) = (\overline{A}_{hv} - \overline{B}_h \overline{K}_{hv}) \overline{x}(t) \quad (1.50)$$

Le résultat est résumé dans le théorème suivant.

**Théorème 1.6 :** [Taniguchi et al., 2000]

Le modèle DTS continu (1.42) est asymptotiquement stable via la loi de commande PDC modifiée (1.48), s'il existe les matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ , et  $Y_{jk}$ , telles que les LMI suivantes sont vérifiées pour  $i, j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$  :

$$\begin{bmatrix} -X_3 - X_3^T & (*) \\ X_4^T + A_i X_1 - B_i Y_{ik} + E_k X_3 & -E_k X_4 - (E_k X_4)^T \end{bmatrix} < 0, \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.51)$$

$$\begin{bmatrix} -2X_3 - 2X_3^T & (*) \\ 2X_4^T + A_i X_1 + A_j X_1 - B_i Y_{jk} - B_j Y_{ik} + 2E_k X_3 & -2E_k X_4 - (2E_k X_4)^T \end{bmatrix} < 0, \text{ pour } 1 \leq i < j \leq r \quad (1.52)$$

avec  $Y_{jk} = K_{jk} X_1$ , alors les matrices des gains de retour d'état sont obtenues par  $K_{jk} = Y_{jk} X_1^{-1}$ .

**Preuve :**

Soit la Fonction Candidate Quadratique de Lyapunov (FCQL) (1.44) et sa condition de symétrie (1.45) on pose  $X = P^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$  avec  $P_1 = P_1^T > 0$ .

En suivant le même cheminement que pour la preuve du théorème 1.5, la dynamique de la boucle fermée (1.50) est asymptotiquement stable si :

$$P^T (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{K}_{hv}) + (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{K}_{hv})^T P < 0 \quad (1.53)$$

En multipliant (1.53) à gauche et à droite respectivement par  $X^T$  et  $X$  on obtient :

$$\bar{A}_{hv} X + X^T \bar{A}_{hv}^T - \bar{B}_h \bar{K}_{hv} X - X^T \bar{K}_{hv}^T \bar{B}_h^T < 0 \quad (1.54)$$

En considérant les matrices définies en (1.42) et le changement de variable bijectif  $Y_{hv} = K_{hv} X_1$ , on obtient les conditions du théorème 1.6 après avoir séparé les termes diagonaux des termes anti-diagonaux. ■

Notons qu'afin de faciliter l'obtention de conditions LMI, d'autres auteurs considèrent la classe des systèmes (1.41) réduite aux descripteurs constitués d'un membre gauche constant ( $E_i = E$  commune). Ainsi, les conditions de stabilité ont été étendues à la commande des systèmes à retards [Wang et al., 2004][Ren, 2005][Lin et al., 2006][Tian et Zhang, 2007][Tian et al., 2007], en temps discret [Huang, 2005][Xu et al., 2007] ou encore la synthèse  $H_\infty$  de contrôleurs flous [Yoneyama et Ichikawa, 1999].

### Remarque 1.6

Notons que la recherche de conditions de non impulsivité reste un problème ouvert en ce qui concerne les descripteurs de type T-S. Celle-ci a toutefois été abordée dans [Marx et Ragot, 2006][Marx et Ragot, 2008]. Cependant, ces conditions ne tiennent pas compte de l'évolution des fonctions d'appartenance et par conséquent ne peuvent être vérifiées sur l'ensemble de l'univers du discours et en particulier lorsque deux valeurs d'appartenance sont égales. Supposons l'exemple suivant :

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (1.55)$$

$$\text{où } E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \text{ et } h_2(z(t)) = 1 - h_1(z(t)).$$

Les conditions locales [Dai,1989] mènent à  $\deg(\det(sE - A_1)) = \text{rang}(E) = 1$  et  $\deg(\det(sE - A_2)) = \text{rang}(E) = 1$  et le descripteur (1.55) serait non impulsif. Or, à cause de la nature des fonctions d'appartenance, il existe un ou plusieurs points de l'espace d'état où  $h_1(z(t)) = h_2(z(t)) = 0.5$ , le descripteur (1.55) s'écrit alors :

$$E\dot{x}(t) = \left( 0.5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \right) x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (1.56)$$

dans ce cas,  $\deg\left(\det\left(sE - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \neq \text{rang}(E)$ , d'où la non impulsivité ne peut-être garantie.

### Hypothèse 1.1

Dans la suite de ce mémoire, nous supposons que les modèles descripteurs T-S étudiés sont réguliers et non impulsifs « *impulse free* ».

### Remarque 1.7

Il est intéressant de noter que l'approche où la représentation des systèmes descripteurs peut conduire, lorsqu'il s'agit de systèmes non singuliers, à une réduction du nombre de contraintes  $\mathcal{LMI}$  à vérifier pour en assurer la stabilité. Afin d'illustrer ce propos, on considère le modèle descripteur non linéaire donné par [Guelton, 2003] :

$$E(x(t))\dot{x}(t) = Ax(t) + B(x_2)u(t) \quad (1.57)$$

$$\text{avec } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, E(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x_1^2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{1+x_2^2} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -4,7 & -4,7 \\ 0,2 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ et } B(x_2) = \begin{bmatrix} \cos(x_2) + 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rappelons que le nombre de règles issues du découpage flou est fonction du nombre de non-linéarités découpées du modèle non linéaire, c'est-à-dire  $2^{nl}$  tel que  $nl$  est le nombre de non-linéarités à découper.

- $E(x(t))$  contient les termes non linéaires  $\frac{1}{1+x_1^2}$  et  $\frac{1}{1+x_2^2}$  qui conduit à 4 règles floues pour le membre gauche du descripteur, d'où  $l = 4$ .
- $B(x_2)$  contient la non linéarité  $\cos(x_2) + 3$  qui conduit à 2 règles floues, soit  $r = 2$ .

Pour les descripteurs flous T-S, le nombre de conditions  $\mathcal{LMI}$  à vérifier au théorème 1.6 est  $l \times r \times (r+1)/2$ , c'est-à-dire dans le cadre de l'exemple proposé, **12 contraintes  $\mathcal{LMI}$** .

Le modèle (1.57) étant non singulier, il peut être réécrit sous la forme d'un modèle T-S standard en multipliant à gauche et à droite par  $E(x(t))^{-1}$ , on obtient donc :

$$\dot{x}(t) = A^*(x(t))x(t) + B^*(x_2)u(t) \quad (1.58)$$

Avec  $A^*(x(t)) = E(x(t))^{-1}A$ ,  $B^*(x(t)) = E(x(t))^{-1}B(x_2)$

$$\text{et } E(x(t))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1+x_1^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} & -\frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} \\ \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} & \frac{(1+x_2^2)}{2+x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2} \end{bmatrix}.$$

Le nombre de non-linéarités à prendre en compte dans  $E(x(t))^{-1}$  est de trois et une non-linéarité dans  $B^*(x_2)$ . Le modèle flou (1.58) sera donc composé de  $r^* = 16$  règles floues, et il y aura  $r^* \times (r^* + 1)/2$   $\mathcal{LMI}$  à vérifier au théorème 1.2, c'est-à-dire **136  $\mathcal{LMI}$ !!!**

A partir de cet exemple, on peut conclure que la forme descripteur permet de réduire le nombre de contraintes  $\mathcal{LMI}$  par rapport à la forme T-S standard.

## 1.7. Réduction du conservatisme des conditions $\mathcal{LMI}$ pour modèles T-S

Les résultats présentés précédemment sur la stabilité et la stabilisation des systèmes T-S sont conservatifs. En effet, ceux-ci ne constituent que des conditions suffisantes mais non nécessaires. Dans cette section, des solutions significatives pour réduire le conservatisme des approches T-S sont présentées. Notons que ces solutions dépendent principalement de la source de conservatisme à laquelle elle s'attaque [Sala et Ariño, 2009][Sala, 2009], par exemple : la non unicité d'un modèle T-S, le choix de la fonction candidate de Lyapunov, l'indépendance des fonctions d'appartenance et structure d'interconnexion des conditions  $\mathcal{LMI}$ , coût de calcul élevé... Dans la suite nous expliciterons quelques unes de ces sources de conservatisme et nous présenterons les principaux résultats de la littérature permettant de les réduire.

Considérons, dans un premier temps, le choix d'une fonction candidate de Lyapunov. Pour les systèmes T-S, ce choix s'est très largement porté sur l'utilisation d'une fonction candidate quadratique de Lyapunov. Néanmoins, celui-ci nécessite la recherche d'une matrice commune à un ensemble de contraintes  $\mathcal{LMI}$ . De ce fait, les conditions de stabilité proposées sont conservatives d'un point de vue synthèse de contrôleur.

Une autre approche a été proposée par [Johansson, 1999][Johansson et al., 1999][Feng et Wang, 2001][Feng, 2004]. Celle-ci considère l'utilisation de fonctions de Lyapunov continue par morceaux (*piecewise Lyapunov functions*). Néanmoins, cette approche s'avère peu efficace lorsqu'un représentant T-S est obtenu par découpage en secteur non linéaire. En effet, ce type de fonction de Lyapunov ne tient pas compte de la structure d'interconnexion non linéaire entre sous-modèles composant le système global.

Une alternative, efficace lorsque le modèle T-S est obtenu sur la base d'un modèle de connaissance non linéaire, consiste en l'utilisation d'une fonction candidate non quadratique de Lyapunov [Jadbabaie, 1999][Tanaka et al., 2003][Guerra et Vermeiren, 2004][Rhee et Won, 2006][Feng, 2006]. Parmi celles-ci, on distingue l'approche considérant l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov dite « floue » (FLF) dans la mesure où les variables de décision de cette fonction sont basées sur la même structure d'interconnexion que le système T-S étudié [Jadbabaie, 1999][Tanaka et al., 2001a][Tanaka et al., 2001b][Liu et al., 2004][Tanaka et al., 2003][Feng, 2004][Feng, 2006]. Ainsi le système, la FLF et la loi de commande étant basés sur cette même structure, on comprend bien qu'une compensation parallèle entre ces parties facilite la recherche d'une solution aux problèmes  $\mathcal{LMI}$  et conduit à une réduction du conservatisme.

Par ailleurs, une autre source de conservatisme peut provenir de l'interaction engendrée par les modèles croisés dans les conditions de stabilité  $\mathcal{LMI}$ . Plusieurs solutions ont été proposées afin de réduire cette source de conservatisme. Celles-ci sont communément appelées « schémas de relaxation » [Tanaka et Sano, 1994][Tanaka et al., 1998][Kim et Lee, 2000][Tuan et al., 2001][Xiaodong et Qingling, 2003]. Parmi ceux-ci, nous présenterons les résultats les plus utilisés à travers les lemmes suivants :

**Lemme 1.2 :** [Tanaka et Sano, 1994]

Pour  $i=1, \dots, r$ ,  $j=1, \dots, r$ ,  $\forall h_i > 0$ ,  $\forall h_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} < 0$  est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\Upsilon_{ii} < 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.59)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 \text{ pour } i, j = 1, \dots, r \text{ et } i < j \quad (1.60)$$

**Lemme 1.3 :** [Tuan et al., 2001]

Pour  $i=1, \dots, r$ ,  $j=1, \dots, r$ ,  $\forall h_i > 0$ ,  $\forall h_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} < 0$  est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\Upsilon_{ii} < 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.61)$$

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 \text{ pour } i, j = 1, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (1.62)$$

**Lemme 1.4 :** [Xiaodong et Qingling, 2003]

Pour  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $\forall h_i > 0$ ,  $\forall h_j > 0$ , la condition  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Upsilon_{ij} < 0$  est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\Upsilon_{ii} > \Xi_{ii} \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (1.63)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > \Xi_{ij} + \Xi_{ji} \text{ pour } i, j = 1, \dots, r \text{ et } i < j \quad (1.64)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \dots & \Xi_{1r} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & \dots & \Xi_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Xi_{r1} & \Xi_{r2} & \dots & \Xi_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.65)$$

Parmi les schémas de relaxation présentés ci dessus, le lemme 1.4 [Xiaodong et Qingling, 2003] fournit les résultats les moins conservatifs mais, du fait de l'augmentation du nombre de variables de décision à déterminer, le coût de calcul s'en trouve fortement accru. Un bon compromis entre conservatisme et coût de calcul est proposé au lemme 1.3 qui mène à des résultats satisfaisants en terme de conservatisme sans introduire de nouvelles variables à rechercher [Tuan et al., 2001].

## 1.8. Conclusion

Ce premier chapitre a permis de présenter les concepts de base relatifs à la stabilité et la stabilisation des modèles flous de type T-S. Ainsi, des conditions suffisantes de stabilité ont été présentées. Celle-ci se basent sur la seconde méthode de Lyapunov et sont, si possible, écrites sous la forme de *LMI* afin d'être résolues pas les outils classiques de l'optimisation convexe. Dans un premier temps, la classe des systèmes représentés par une représentation d'état standard non linéaire affine en la commande a été abordée. Cette forme classique de la représentation d'état est l'une des plus utilisée en automatique mais ne correspond pas à la forme la plus générale des représentations d'état que l'on peut rencontrer. Cette forme plus générale, appelée descripteur, fera l'objet des études proposées dans la suite de ce mémoire. Ainsi, nous avons présenté les principaux résultats de la littérature concernant la stabilité des systèmes non linéaires représentés par des modèles flous T-S sous forme descripteurs. Ceux-ci se basent sur une réécriture matricielle du modèle descripteur permettant l'écriture aisée de la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov. Enfin, les principales techniques permettant l'obtention de conditions de stabilité moins conservatives ont été présentées, notamment

l'emploi de fonctions de Lyapunov non quadratiques ainsi que les schémas de relaxation les plus communément employés dans la littérature.

Notons que les résultats présentés dans ce chapitre ne tiennent pas compte des incertitudes de modélisation et des perturbations externes lors de la synthèse de la loi de commande. Ce point sera abordé au chapitre suivant par l'élaboration de conditions de stabilité pour la classe des modèles flous T-S sous forme descripteurs incertains et perturbés. Puis, dans le but de réduire le conservatisme des conditions proposées, plusieurs approches non quadratiques seront successivement proposées aux chapitres 3 et 4. Enfin, en utilisant une propriété intéressante des systèmes descripteurs, des conditions de stabilité et de stabilisation seront proposées afin de soulever des verrous relatifs à la synthèse de lois de commande par retour de sortie des systèmes T-S standards.



# Stabilité et stabilisation quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés

---

---

2.1. Introduction .....	31
2.2. Choix d'un représentant T-S sous forme descripteur .....	31
2.3. Définition des modèles Descripteurs T-S Incertains et Perturbés (DTSIP).....	33
2.4. Stabilité quadratique des descripteurs T-S incertains (DTSI) .....	35
2.5. Analyse des performances $H^\infty$ en boucle ouverte des descripteurs T-S incertains et perturbés ....	39
2.6. Stabilisation quadratique des modèles DTSIP.....	42
2.6.1. Formulation de la dynamique en boucle fermée et du problème de commande .....	42
2.6.2. Stabilisation des modèles DTSI.....	43
2.7. Synthèse $H^\infty$ de lois de commande pour la classe des descripteurs T-S incertains et perturbés .	45
2.8. Schéma de relaxation pour les descripteurs T-S.....	47
2.9. Exemple numérique et résultats de simulation .....	48
2.10. Conclusion.....	55

## 2.1. Introduction

Le chapitre précédent est consacré à la présentation des concepts élémentaires relatifs à la stabilité et de la stabilisation des modèles T-S sous forme standard et sous forme descripteur. Notons que ces résultats ne tiennent pas compte des incertitudes de modélisation et des perturbations externes lors de la synthèse de la loi de commande. De plus, dans le cadre de la commande des descripteurs T-S, peu de travaux de la littérature tiennent compte des exigences en termes de robustesse. En effet, la prise en compte d'incertitudes permet de réduire les erreurs de modélisation d'un système physique à commander mais aussi de tenir compte de perturbations externes (bruits de mesures...). Ainsi, des premiers travaux ont été exprimés en terme d'inégalité bilinéaires matricielles (*BMI*) pour la classe des descripteurs T-S incertains (DTSI) [Ma et Sun, 2004]. D'autre part, une approche de synthèse de contrôleur  $H_\infty$  a été développée afin d'atténuer les perturbations externes dans [Yoneyama et Ichikawa, 1999]. Néanmoins, cette dernière n'est valable que pour une classe particulière de descripteurs ( $E$  constante). L'objectif de ce chapitre est de proposer des conditions quadratiques pour la synthèse de lois de commande robustes stabilisant la classe des descripteurs T-S incertains et perturbés.

Dans un premier temps, une forme générique des DTSIP sera présentée. Ensuite, les familles d'incertitudes affectant la dynamique d'un système seront rappelées. L'étude de la stabilité et l'analyse de la performance  $H_\infty$  pour le modèle considéré seront proposées et étendues pour aboutir à des conditions *LMI* de stabilisation basées sur une loi de commande PDC modifiée. Par ailleurs, afin de réduire le conservatisme des approches proposées, un schéma de relaxation pour les modèles descripteurs sera développé. Finalement, un exemple numérique sera considéré pour illustrer l'efficacité des différentes approches étudiées ainsi que l'intérêt du schéma de relaxation.

## 2.2. Choix d'un représentant T-S sous forme descripteur

Comme il a été présenté dans le chapitre précédent, il existe plusieurs techniques permettant l'obtention d'un représentant T-S à partir d'un système dynamique non linéaire. Parmi celles-ci, la méthode du découpage en secteur non linéaire est retenue puisqu'elle permet d'aboutir à un représentant exact d'un système non linéaire sur un compact de l'espace d'état [Tanaka et Wang, 2001]. Pour les systèmes descripteurs T-S obtenus via cette technique, deux chemins sont possibles et conduisent à deux représentations. Celles-ci sont équivalentes au système d'origine mais peuvent conduire à un nombre différent de contraintes à vérifier pour en étudier la stabilité. Notons que l'obtention d'un représentant T-S conduisant à un nombre minimal de contraintes à vérifier permet de réduire le pessimisme lors de l'étude ultérieure de son comportement dynamique [Taniguchi et al., 2001][Delmotte et al., 2007][Delmotte et al., 2008]. Afin d'illustrer ce point, on considère le descripteur non linéaire suivant :

$$E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \quad (2.1)$$

où  $E(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices décrivant la dynamique du système (2.1).  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de commande.

**1<sup>er</sup> cas :** [Yoneyama et Ichikawa, 1999]

Soit le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T$ , le système (2.1) peut être réécrit tel que :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = G(x(t))\bar{x}(t) + \bar{B}(x(t))u(t) \quad (2.2)$$

$$\text{avec } \bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A(x(t)) & -E(x(t)) \end{bmatrix} \text{ et } \bar{B}(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ B(x(t)) \end{bmatrix}.$$

Ensuite, en procédant au découpage par secteur non linéaire des  $d$  termes non linéaires figurant dans le système (2.2) dans sa globalité, nous obtenons le représentant T-S suivant :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^s h_i(z(t))(G_i\bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t)) \quad (2.3)$$

où  $s$  est le nombre de modèles locaux représentés par les matrices constantes  $\bar{E} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  et  $\bar{B}_i \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ ,  $z(t)$  est le vecteur des variables de prémisses,  $h_i(z(t))$  sont les fonctions d'appartenance vérifiant les propriétés d'une somme convexe (cf. chapitre 1, équation (1.8)).

Notons que dans ce cas, le nombre de règles du représentant T-S (2.3) est donné par  $s = 2^d$ . Le nombre  $Q_1$  de contraintes (inégalité matricielles) à vérifier lors de la synthèse d'une loi de commande stabilisante est donné par la relation  $Q_1 = s(s+1)/2$  (cf. chapitre 1, théorème 1.2).

### Remarque 2.1

L'utilisation du vecteur d'état augmenté dans les systèmes descripteurs permet d'aboutir à l'étude de la stabilité ou de la stabilisation à l'aide de la théorie de Lyapunov (cf. chapitre 1).

**2<sup>ème</sup> cas :** [Taniguchi et al., 2001]

A l'inverse du cas précédent, il est également possible d'effectuer séparément le découpage en secteur non linéaire pour chacune des parties gauche et droite du descripteur non linéaire (2.1). Dans ce cas, on considère  $p$  et  $q$  les nombres respectifs de termes non linéaires à gauche et à droite de l'équation d'état. On obtient alors le représentant T-S suivant :

$$\sum_{k=1}^l v_k(z(t))E_k\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.4)$$

où  $l$  et  $r$  sont les nombres de règles floues respectivement à gauche et à droite de l'équation d'état,  $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont les matrices des modèles locaux LTI,  $v_k(z(t))$

et  $h_i(z(t))$  sont les fonctions d'appartenance associées respectivement au membre gauche et droit du système descripteur et vérifient les propriétés d'une somme convexe.

Enfin, en considérant le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ , le descripteur (2.4) peut-être réécrit sous la forme :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^r v_k(z(t)) h_i(z(t)) (\bar{A}_{ik} \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t)) \quad (2.5)$$

avec  $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -E_k \end{bmatrix}$  et  $\bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}$ .

Notons que, dans ce cas, les nombres de règles du représentant T-S (2.5) respectivement à gauche et à droite sont donnés par  $l = 2^p$  et  $r = 2^q$ . Ainsi, le nombre  $Q_2$  de contraintes (inégalités matricielles) à vérifier lors de la synthèse d'une loi de commande stabilisante est donné par la relation  $Q_2 = l \times r (r + 1) / 2$ , (cf. chapitre 1, théorème 1.6).

### *Exemple illustratif des deux cas présentés*

Afin de mettre en évidence la démarche menant au représentant T-S conduisant au nombre de contraintes à vérifier le moins élevé, on propose d'étudier l'exemple suivant :

Supposons que le système (2.1) contient  $p = 2$  et  $q = 2$  termes non linéaires respectivement dans ses parties gauche et droite. Le premier modèle conduit à un représentant T-S comportant  $s = 2^{(p+q)} = 16$  règles, soit  $Q_1 = s(s+1)/2 = 136$  contraintes et le second à un représentant T-S comportant  $l = 4$  et  $r = 4$  règles, soit  $Q_2 = l \cdot r (r + 1) / 2 = 40$  contraintes.

Dès lors, dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéresserons à la classe des descripteurs T-S représentés par (2.4). En effet, il apparaît que les résultats peuvent s'avérer moins pessimistes lorsque le représentant T-S descripteur comporte une structure d'interconnexion floue dans son membre gauche.

## **2.3. Définition des modèles Descripteurs T-S Incertains et Perturbés (DTSIP)**

Dans toutes les disciplines, la modélisation joue un rôle important pour connaître et améliorer le fonctionnement d'un système. Dans la majorité des cas, les modèles mathématiques issus de la modélisation ne représentent pas parfaitement les systèmes physiques. En effet, il existe toujours des incertitudes, dites de modélisation, qui ne permettent pas de décrire parfaitement la dynamique d'un système réel. Néanmoins, lors de la modélisation il est possible de compléter le modèle mathématique nominal par une partie supplémentaire englobant les incertitudes de modélisation. Parmi ces incertitudes, il existe deux formes pouvant influencer la dynamique d'un système. Afin d'illustrer ce propos, on considère le descripteur non linéaire incertain et perturbé suivant :

$$\left(E(x(t)) + \Delta E(t)\right) \dot{x}(t) = \left(A(x(t)) + \Delta A(t)\right) x(t) + \left(B(x(t)) + \Delta B(t)\right) u(t) + W(x(t)) \varphi(t) \quad (2.6)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrées,  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des perturbations externes,  $E(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices décrivant la partie nominale du système non linéaire considéré,  $\Delta E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Delta B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices représentant la partie incertaine du système considéré,  $W(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est une matrice de liaison entre les perturbations externes et la dynamique du système.

### *Incertitudes non structurées*

Ces incertitudes sont dites également non paramétriques dans la mesure où on ne connaît rien de leur influence sur la dynamique du modèle nominal. Ainsi, d'après [Dubuisson, 1990][Oustaloup et Mathieu, 1999], la seule information dont on dispose est que ces incertitudes sont bornées en norme et qu'elles représentent des dynamiques externes inconnues (bruits de mesures, perturbations externes, etc.). Dans le cas du système (2.6), les incertitudes non structurées sont représentées par les perturbations externes  $\varphi(t)$ , bornées telles que leur

énergie est donnée par la norme  $L_2$  c'est-à-dire  $\|\varphi(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \varphi^T(t) \varphi(t) dt < \infty$ .

### *Incertitudes structurées*

Les incertitudes structurées ou bien paramétriques concernent quant à elles la partie modélisée de la dynamique du modèle et non les dynamiques externes au système. Elles sont généralement dues à des erreurs de modélisation ou encore aux approximations et simplifications nécessaires pour l'obtention d'un modèle exploitable respectant au mieux la réalité d'un système physique [Dubuisson, 1990][Oustaloup et Mathieu, 1999]. Ce type d'incertitudes est représenté dans le modèle non linéaire (2.6) par les matrices variables dans le temps  $\Delta E(t)$ ,  $\Delta A(t)$  et  $\Delta B(t)$  et permettent d'enrichir en informations la dynamique globale du système considéré. Dès lors, elles peuvent être réécrites telles que [Zhou et Khargonekar, 1988] :

$$\Delta E(t) = H_e f_e(t) N_e \quad (2.7)$$

$$\Delta A(t) = H_a f_a(t) N_a \quad (2.8)$$

$$\Delta B(t) = H_b f_b(t) N_b \quad (2.9)$$

où  $H_e$ ,  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $N_e$ ,  $N_a$  et  $N_b$  sont des matrices connues, constantes et de dimensions appropriées.  $f_e(t)$ ,  $f_a(t)$  et  $f_b(t)$  sont des matrices inconnues dites Lebesgue mesurables vérifiant les propriétés,  $\forall t \geq 0$  :

$$f_e^T(t) f_e(t) \leq I \quad (2.10)$$

$$f_a^T(t) f_a(t) \leq I \quad (2.11)$$

$$f_b^T(t) f_b(t) \leq I \quad (2.12)$$

Dès lors, la classe des représentants T-S du descripteur non linéaire (2.6), que nous appellerons « classe des Descripteurs T-S Incertains et Perturbés » (DTSIP) comportant les deux types d'incertitudes présentées précédemment est décrite par :

$$\sum_{k=1}^l v_k(z(t)) (E_k + \Delta E_k(t)) \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + W_i \varphi(t)) \quad (2.13)$$

où  $l$  et  $r$  sont les nombres de règles floues respectivement à gauche et à droite de la représentation d'état.  $W_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont les matrices qui assurent la liaison entre les perturbations externes et la dynamique de chaque modèle LTI incertain.  $E_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices de la partie nominale du modèle descripteur T-S.  $\Delta E_k(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Delta B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  représentent la partie incertaine et peuvent être réécrites, pour  $i = 1, 2, \dots, r$  et  $l = 1, 2, \dots, k$ , tels que :

$$\Delta E_k(t) = H_e^k f_e^k(t) N_e^k \quad (2.14)$$

$$\Delta A_i(t) = H_a^i f_a^i(t) N_a^i \quad (2.15)$$

$$\Delta B_i(t) = H_b^i f_b^i(t) N_b^i \quad (2.16)$$

où  $H_e^k$ ,  $H_a^i$ ,  $H_b^i$ ,  $N_e^k$ ,  $N_a^i$  et  $N_b^i$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées.  $f_e^k(t)$ ,  $f_a^i(t)$  et  $f_b^i(t)$  sont des matrices contenant des termes Lebesgue mesurables variant dans le temps et vérifient (2.10), (2.11) et (2.12) respectivement.

Notons que, peu de travaux de la littérature ont porté sur la stabilité et la stabilisation robustes des DTSIP décrits par (2.13). Ceci sera le propos des sections suivantes.

## 2.4. Stabilité quadratique des descripteurs T-S incertains (DTSI)

L'étude de la stabilité joue un rôle important dans la compréhension du comportement dynamique d'un système. En effet, celle-ci permet d'établir si un système est intrinsèquement stable, c'est-à-dire sans sollicitations extérieures en régime autonome. Ainsi, s'il peut être établi qu'un système est de nature instable en régime autonome, alors la synthèse d'une loi de commande stabilisante s'avère nécessaire. D'autre part, même si, un système est réputé stable, l'étude de sa stabilité permet de juger de ses performances dynamiques en régime autonome et

donc, le cas échéant, de décider de la synthèse d'une loi de commande afin d'en améliorer les performances en boucle fermée. Dans le cadre de modèle T-S standard, le problème de l'étude de la stabilité a été traité initialement par [Tanaka et Sugeno, 1992]. Ces résultat on été étendus à la classe des modèles descripteurs T-S par [Taniguchi et al., 1999 a,b][Taniguchi et al., 2000]. Dans cette section, afin de faciliter l'étude et la compréhension de la démarche, nous nous intéressons d'abord aux Descripteurs T-S Incertains (DTSI), issues de la classe représentée par (2.13), en boucle ouverte ( $u(t)=0$ ) et sans perturbations externes  $\varphi(t)=0$ . Ceux-ci sont représentés par :

$$\sum_{k=1}^l v_k(z(t))(E_k + \Delta E_k(t))\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i + \Delta A_i(t))x(t) \quad (2.17)$$

En utilisant les notations définies dans le chapitre précédent et en considérant le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ , le DTSI (2.17) peut être réécrit dans sa forme étendue :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t))\bar{x}(t) \quad (2.18)$$

$$\text{où } \bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h & -E_v \end{bmatrix} \text{ et } \Delta\bar{A}_{hv}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A_h(t) & -\Delta E_v(t) \end{bmatrix}.$$

Afin d'étudier la stabilité des modèles (2.18), on considère la Fonction Candidate Quadratique de Lyapunov (FCQL) suivante :

$$V(x(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E}^T (\bar{X})^{-1} \bar{x}(t) \quad (2.19)$$

avec la condition de symétrie :

$$\bar{E}^T (\bar{X})^{-1} = \left( (\bar{X})^{-1} \right)^T \bar{E} > 0 \quad (2.20)$$

que l'on peut réécrire après congruence par  $\bar{X}^T$  et  $\bar{X}$  telle que :

$$\bar{X}^T \bar{E}^T = \bar{E} \bar{X} > 0 \quad (2.21)$$

Ainsi, on remarque que la FCQL (2.19) ne dépend que du vecteur d'état  $x(t)$  de (2.13) et non pas du vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t)$ . En effet, en posant :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

d'après la condition de symétrie (2.21), on obtient :

$$\begin{bmatrix} X_1^T & X_3^T \\ X_2^T & X_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.23)$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^T & 0 \\ X_2^T & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (2.24)$$

De ce fait, le conditionnement de la matrice de Lyapunov (2.22) est donné  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_2 = 0$  et où  $X_3$  et  $X_4$  sont des matrices de décision libres de choix.

### Remarque 2.2

Notons qu'en considérant le conditionnement de la matrice de Lyapunov décrit ci-dessus, la FCQL (2.19) peut-être réécrite sous la forme :

$$V(x(t)) = x^T(t)(X_1)^{-1}x(t) \quad (2.25)$$

Il apparaît que, si (2.19) est décroissante, elle garantit la stabilité du DTSIP. La FCQL (2.19) sera alors dite Fonction Quadratique de Lyapunov (FLQ) et il sera établi que la matrice  $(\bar{X})^{-1} > 0$  existe et est non singulière. Le résultat est énoncé au théorème suivant.

### Théorème 2.1

Le DTSI autonome (2.17) (non forcé et non perturbé) est globalement asymptotiquement stable s'il existe, pour tout  $i=1,\dots,r$  et  $k=1,\dots,l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  et des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_k^2$  et  $\tau_k^3$  tels que les conditions LMI suivantes sont vérifiées :

$$Y_{ik} < 0, \text{ pour } k=1,2,\dots,l \text{ et } i=1,2,\dots,r \quad (2.26)$$

avec

$$Y_{ik} = \begin{bmatrix} X_3 + X_3^T & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_a^i X_1 & -\tau_i^1 I & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_3 & 0 & -\tau_k^2 I & 0 & 0 \\ X_4^T + A_i X_1 - E_k X_3 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} -E_k X_4 - X_3^T E_k^T + \tau_i^1 H_a^i (H_a^i)^T \\ + (\tau_k^2 + \tau_k^3) H_e^k (H_e^k)^T \end{pmatrix} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & N_e^k X_4 & -\tau_k^3 I \end{bmatrix} < 0$$

### Preuve :

Le DTSI autonome (2.17) est stable si la dérivée de la FCQL (2.19) le long des trajectoires du système est négative, c'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{\bar{x}}^T(t) \bar{E}^T (\bar{X})^{-1} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{E}^T (\bar{X})^{-1} \dot{\bar{x}}(t) < 0 \quad (2.27)$$

C'est-à-dire, en substituant (2.18) dans (2.27), si :

$$\dot{V}(x(t)) = \bar{x}^T(t) \left( (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T (\bar{X})^{-1} + ((\bar{X})^{-1})^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) \right) \bar{x}(t) < 0 \quad (2.28)$$

Ainsi,  $\forall x(t)$ , la négativité de (2.28) est garantie si:

$$(\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T (\bar{X})^{-1} + ((\bar{X})^{-1})^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) < 0 \quad (2.29)$$

En multipliant (2.29) à gauche et à droite respectivement par  $\bar{X}^T$  et  $\bar{X}$ , on obtient :

$$\bar{X}^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T + (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) \bar{X} < 0 \quad (2.30)$$

Soit, sous sa forme étendue, avec les matrices définies dans l'équation (2.18) :

$$\left[ \begin{array}{cc} X_3 + X_3^T & (*) \\ X_4^T + A_h X_1 + \Delta A_h(t) X_1 - E_v X_3 - \Delta E_v(t) X_3 & -E_v X_4 - X_4^T E_v^T - \Delta E_v(t) X_4 - X_4^T \Delta E_v^T(t) \end{array} \right] < 0 \quad (2.31)$$

que l'on peut réécrire à l'aide de (2.14), (2.15) et (2.16) sous la forme :

$$\left[ \begin{array}{cc} X_3 + X_3^T & (*) \\ \left( \begin{array}{c} X_4^T + A_h X_1 + H_a^h f_a^h(t) N_a^h X_1 \\ -E_v X_3 - H_e^v f_e^v(t) N_e^v X_3 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} -E_v X_4 - X_4^T E_v^T - H_e^v f_e^v(t) N_e^v X_4 \\ -X_4^T (H_e^v f_e^v(t) N_e^v X_4)^T \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \quad (2.32)$$

L'inégalité (2.32) peut être majorée, à l'aide du lemme 2 (annexe A), par :

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} X_3 + X_3^T + (\tau_h^1)^{-1} X_1^T (N_a^h)^T N_a^h X_1 \\ + (\tau_v^2)^{-1} X_3^T (N_e^v)^T N_e^v X_3 \end{array} \right) & (*) \\ X_4^T + A_h X_1 - E_v X_3 & \left( \begin{array}{c} -E_v X_4 - X_4^T E_v^T + (\tau_v^2 + \tau_v^3) H_e^v (H_e^v)^T \\ + \tau_h^1 H_a^h (H_a^h)^T + (\tau_v^3)^{-1} X_4^T (N_e^v)^T N_e^v X_4 \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \quad (2.33)$$

En appliquant le complément de Schur, l'inégalité (2.33) devient :

$$Y_{hv} = \begin{bmatrix} X_3 + X_3^T & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_a^h X_1 & -\tau_h^1 I & 0 & 0 & 0 \\ N_e^v X_3 & 0 & -\tau_v^2 I & 0 & 0 \\ X_4^T + A_h X_1 - E_v X_3 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} -E_v X_4 - X_4^T E_v^T + \tau_h^1 H_a^h (H_a^h)^T \\ + (\tau_v^2 + \tau_v^3) H_e^v (H_e^v)^T \end{pmatrix} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & N_e^v X_4 & -\tau_v^3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

D'où les conditions (2.26) présentées au théorème 2.1. ■

### Remarque 2.3

Dans le cadre de l'étude de la stabilité, l'opération de congruence réalisée entre les inégalités (2.29) et (2.31) n'est pas nécessaire. Néanmoins, celle-ci a été effectuée dans le but d'homogénéiser les résultats avec ceux qui seront développés par la suite et permettront de faciliter les démonstrations dans le cas de la stabilisation.

## 2.5. Analyse des performances $H_\infty$ en boucle ouverte des descripteurs T-S incertains et perturbés

Dans cette section, on s'intéresse à l'analyse des performances  $H_\infty$  des modèles DTSIP non forcés ( $u(t)=0$ ) décrits par (2.13). Ainsi, l'objectif est d'évaluer, par le biais d'un critère quadratique minimisant un taux d'atténuation, l'influence des perturbations externes  $\varphi(t)$  sur la dynamique du DTSI considéré et par conséquent sur l'évolution de son vecteur d'état  $x(t)$ .

Afin d'analyser l'influence des perturbations externes agissant sur le modèle DTSIP (2.13) non forcé ( $u(t)=0$ ), on considère les définitions suivantes :

**Définition 2.1** : [Boyd et al., 1994]

On appelle norme  $H_\infty$  du transfert  $T_{\xi\varphi}$  entre les grandeurs variables  $\varphi(t)$  et  $\xi(t)$  la quantité :

$$\|T_{\xi\varphi}\|_\infty = \sup_{\|\varphi(t)\|_2 \neq 0} \frac{\|\xi(t)\|_2}{\|\varphi(t)\|_2} \quad (2.35)$$

où  $\|\sigma(t)\|_2^2 = \int_0^\infty \sigma^T(t) \sigma(t) dt$  représente la norme  $L_2$  (au carré) d'une grandeur variable  $\sigma(t)$ .

**Définition 2.2 :** [Boyd et al., 1994]

On appelle *taux d'atténuation* ou *taux de performance*  $H_\infty$  du transfert  $T_{\xi\varphi}$  le scalaire positif  $\gamma$  minimisant l'inégalité :

$$\|\xi(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|\varphi(t)\|_2^2 \quad (2.36)$$

Dans la présente étude, on considère les perturbations externes  $\varphi(t)$  affectant le vecteur d'état  $x(t)$ . De ce fait, à travers la définition de la norme  $L_2$  et la définition 2.2, un critère  $H_\infty$  permettant de minimiser les perturbations externes peut-être ramené à :

$$\int_0^T x^T(t)x(t)dt < \gamma^2 \int_0^T \varphi^T(t)\varphi(t)dt \quad (2.37)$$

où  $T$  représente la valeur finale du temps d'étude de la performance  $H_\infty$ .

En utilisant le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ , l'inégalité (2.37) peut être réécrite sous la forme :

$$\int_0^T \bar{x}^T(t) \bar{E} \bar{x}(t) dt < \gamma^2 \int_0^T \varphi^T(t)\varphi(t)dt \quad (2.38)$$

Dans le cadre de l'analyse des performances  $H_\infty$  des descripteurs T-S, un premier résultat a été proposé par [Yoneyama et Ichikawa, 1999]. Notons que ce résultat est restrictif dans la mesure où il concerne les systèmes descripteurs dont la partie gauche de leur représentation d'état est décrite par une matrice constante. L'extension de ces résultats à la classe des DTSIP (2.13) non forcés ( $u(t) = 0$ ) est résumée par le théorème suivant.

**Théorème 2.2**

Le DTSI non forcé ( $u(t) = 0$ ) (2.4) est globalement asymptotiquement stable et admet une performance  $H_\infty$   $\gamma = \sqrt{\eta}$  au regard des perturbations externes, s'il existe, pour tout  $i = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ , des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_k^2$ ,  $\tau_k^3$  et un scalaire  $\eta > 0$  à minimiser telles que les conditions LMI suivantes sont vérifiées :

$$\left[ \begin{array}{ccccc|cc} & & & & & (*) & 0 \\ & & & & & 0 & (*) \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ \hline X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta I \end{array} \right] < 0 \quad (2.39)$$

avec  $Y_{ik}$  défini dans le théorème 2.1.

**Preuve :**

On considère la fonction candidate quadratique de Lyapunov (2.19), le DTSI non forcé ( $u(t)=0$ ) en temps continu (2.4) est globalement asymptotiquement stable sous le critère  $H_\infty$  (2.38) si :

$$\dot{V}(x(t)) + \bar{x}^T(t) \bar{E} \bar{x}(t) - \gamma^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \quad (2.40)$$

c'est-à-dire si:

$$\begin{aligned} & \bar{x}^T(t) \left( (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T (\bar{X})^{-1} + ((\bar{X})^{-1})^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) + \bar{E} \right) \bar{x}(t) \\ & + \varphi^T(t) \bar{W}_h^T (\bar{X})^{-1} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) ((\bar{X})^{-1})^T \bar{W}_h \varphi(t) - \gamma^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

La réécriture sous forme matricielle de (2.41) est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^T(t) \\ \varphi^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left( (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T (\bar{X})^{-1} + ((\bar{X})^{-1})^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) + \bar{E} \right) & (*) \\ \bar{W}_h^T (\bar{X})^{-1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

$\forall x(t), \forall \varphi(t)$ , la négativité de l'inégalité (2.42) est vérifiée si :

$$\begin{bmatrix} \left( (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T (\bar{X})^{-1} + ((\bar{X})^{-1})^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) + \bar{E} \right) & (*) \\ \bar{W}_h^T (\bar{X})^{-1} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.43)$$

En multipliant (2.43) respectivement à gauche et à droite par  $\begin{bmatrix} \bar{X}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \bar{X} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \bar{X} (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T + (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) \bar{X}^T + \bar{X}^T \bar{E} \bar{X} & (*) \\ \bar{W}_h^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

Notons que, le terme  $(\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)) \bar{X} + \bar{X}^T (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t))^T$  représente la condition de stabilité intrinsèque sans perturbations traitée à la section précédente (équation (2.30)). Son développement suit donc un chemin identique à celui emprunté pour la preuve du théorème 2.1.

Il reste donc à traiter le terme  $\bar{X}^T \bar{E} \bar{X} = \begin{bmatrix} X_1^T X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . En appliquant le complément de Schur et

en effectuant le changement de variable  $\eta = \gamma^2$ , l'inégalité (2.44) conduit aux résultats présentés par le théorème 2.3. ■

## 2.6. Stabilisation quadratique des modèles DTSIP

Au cours des deux précédentes sections, nous avons abordé le problème concernant l'étude de la stabilité des modèles DTSI autonome sans et avec perturbations externes. Des conditions de stabilité ont été proposées en termes de *LMI* par les théorèmes 2.1 et 2.2. Il convient maintenant de proposer des conditions pour la stabilisation, c'est-à-dire pour la synthèse de loi de commande stabilisante pour la classe des DTSIP (2.13). En effet, en Automatique, la stabilisation offre divers avantages. D'une part, elle permet, lorsqu'une solution est possible, de synthétiser des contrôleurs garantissant la stabilité en boucle fermée des systèmes qui, de manière autonome, sont instables. D'autre part, dans le cas où la synthèse de la loi de commande s'applique à des systèmes stables autonomes, elle permet d'améliorer leurs performances (robustesse, rapidité, etc.).

### 2.6.1. Formulation de la dynamique en boucle fermée et du problème de commande

Dans le cadre des modèles T-S standards, le problème de la stabilisation est largement traité. Dans la littérature les premiers travaux effectués dans ce contexte ont été développés par [Tanaka et Sugeno, 1992] dans les cas continu et discret. Notons que, la majorité des travaux existant et traitant de la stabilisation des modèles descripteurs T-S sont basés sur la loi de commande PDC [Tanaka et Sugeno, 1992][Wang et al., 1996]. Dans [Taniguchi et al., 2000] une nouvelle loi de commande, nommée PDC modifiée, a été proposée afin de favoriser la stabilisation des descripteurs de type T-S. En effet, celle-ci tient compte à la fois de la structure d'interconnexion du membre gauche et du membre droit de l'équation d'état (2.13). Elle est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) K_{ik} x(t) \quad (2.45)$$

où, pour  $i=1,\dots,r$  et  $k=1,\dots,l$ ,  $K_{ik} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sont les gains de retour d'état et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le signal de commande.

La loi de commande (2.45) peut être réécrite sous sa forme étendue en considérant  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$  telle que :

$$u(t) = -\bar{K}_{hv} \bar{x}(t) \quad (2.46)$$

avec  $\bar{K}_{hv} = [K_{hv} \quad 0]$ .

En considérant le DTSIP continu (2.13) et la loi de commande PDC modifiée (2.46), la dynamique de la boucle fermée peut être exprimée par :

$$\bar{E} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{hv}) \bar{x}(t) + \bar{W}_h \varphi(t) \quad (2.47)$$

$$\text{avec } \bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h & -E_v \end{bmatrix}, \bar{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h \end{bmatrix} \text{ et } \bar{W}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ W_h \end{bmatrix}.$$

Dès lors, le problème de la synthèse d'un contrôleur flou consiste à trouver les matrices des gains de retour d'état  $K_{ik}$ , pour  $i=1,\dots,r$  et  $k=1,\dots,l$  garantissant la stabilité de la boucle fermée (2.47).

## 2.6.2. Stabilisation des modèles DTSI

Dans cette section, on s'intéresse tout d'abord au problème de la stabilisation de la classe des descripteurs en boucle fermée décrite par (2.47) sans perturbations externes ( $\varphi(t)=0$ ). La solution apportée à ce problème est présentée sous forme de conditions  $\mathcal{LMI}$  dans le théorème suivant.

### **Théorème 2.3** [Bouarar et al., 2007a]

Le DTSI en boucle fermée (2.47) est globalement asymptotiquement stable s'il existe, pour tout  $i=1,\dots,r$ ,  $j=1,\dots,r$  et  $k=1,\dots,l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  et  $M_{jk}$  ainsi que, des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_k^3$  et  $\tau_k^4$  tels que les conditions  $\mathcal{LMI}$  suivantes sont vérifiées :

$$\Psi_{ijk} < 0 \quad (2.48)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} X_3 + X_3^T & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_a^i X_3 & -\tau_i^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^i M_{jk} & 0 & -\tau_{ijk}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_3 & 0 & 0 & -\tau_k^3 I & 0 & 0 \\ X_4^T + A_i X_1 - E_k X_3 - B_i M_{jk} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{ijk}^{(5,5)} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_4 & -\tau_k^4 I \end{bmatrix}$$

et  $\Psi_{ijk}^{(5,5)} = -E_k X_4 - X_4^T E_k^T + \tau_{ijk}^2 H_b^i (H_b^i)^T + \tau_i^1 H_a^i (H_a^i)^T + (\tau_k^3 + \tau_k^4) H_e^k (H_e^k)^T$ .

Dans ce cas, les gains de la loi de commande PDC modifiée (2.46) s'obtiennent à travers le changement de variable bijectif suivant :

$$K_{jk} = M_{jk} X_1^{-1} \tag{2.49}$$

**Preuve :**

En suivant un raisonnement identique à celui de la preuve du théorème 2.1, en remplaçant les termes  $\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t)$  par  $\bar{A}_{hv} + \Delta \bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{hv}$  dans les équations de (2.19) à (2.30), on obtient directement la condition de stabilité de la boucle fermée (2.47) donnée par :

$$\left[ \begin{array}{c} X_3 + X_3^T \quad (*) \\ \left( \begin{array}{c} X_4^T + A_h X_1 - E_v X_3 - B_h K_{hv} X_1 \\ + \Delta A_h(t) X_1 - \Delta E_v(t) X_3 - \Delta B_h(t) K_{hv} X_1 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} -E_v X_4 - X_4^T E_v^T - \Delta E_v(t) X_4 - (*) \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \tag{2.50}$$

Afin d'aboutir à des conditions  $\mathcal{LMI}$ , on réalise le changement de variable bijectif  $M_{hv} = K_{hv} X_1$ , (2.50) s'écrit alors :

$$\left[ \begin{array}{c} X_3^T + X_3 \quad (*) \\ \left( \begin{array}{c} X_4^T + A_h X_1 - E_v X_3 - B_h M_{hv} \\ + \Delta A_h(t) X_1 - \Delta E_v(t) X_3 - \Delta B_h(t) M_{hv} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} -E_v X_4 - X_4^T E_v^T \\ -\Delta E_v(t) X_4 - X_4^T \Delta E_v^T(t) \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \tag{2.51}$$

que l'on peut majorer à l'aide du lemme 2 (annexe A) par :

$$\left[ \begin{array}{c} \Lambda_{hhv}^{(1,1)} \quad (*) \\ X_4^T + A_h X_1 - E_v X_3 - B_h M_{hv} \quad \Lambda_{hhv}^{(2,2)} \end{array} \right] < 0 \tag{2.52}$$

avec

$$\Lambda_{hhv}^{(1,1)} = X_3 + X_3^T + (\tau_h^1)^{-1} X_3^T (N_a^h)^T N_a^h X_3 + (\tau_{hhv}^2)^{-1} M_{hv}^T (N_b^h)^T N_b^h M_{hv} + (\tau_v^3)^{-1} X_3^T (N_e^v)^T N_e^v X_3 \text{ et}$$

$$\Lambda_{hhv}^{(2,2)} = -E_v X_4 - X_4^T E_v^T + \tau_h^1 H_a^h (H_a^h)^T + \tau_{hhv}^2 H_b^h (H_b^h)^T + (\tau_v^3 + \tau_v^4) H_e^v (H_e^v)^T + (\tau_v^4)^{-1} X_4^T (N_e^v)^T N_e^v X_4$$

En utilisant le complément de Schur, on obtient les conditions  $\mathcal{LMI}$  présentées au théorème 2.3. ■

Dans cette section, nous avons proposé des conditions  $\mathcal{LMI}$  pour la stabilisation de la classe des modèles DTSI (2.13) sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ). L'approche proposée est basée sur la FCQL (2.19) ainsi que sur la loi de commande PDC modifiée (2.45). Notons qu'en présence de perturbations externes (incertitudes non structurées), une loi de commande synthétisée à l'aide des conditions proposées au théorème 2.3 serait fragilisée. Il est donc intéressant de proposer une approche de synthèse de loi de commande robuste qui permettrait de tenir compte, simultanément, des incertitudes de modélisation (paramétriques) et des perturbations externes.

## 2.7. Synthèse $H_\infty$ de lois de commande pour la classe des descripteurs T-S incertains et perturbés

Notre but dans cette section est d'étendre les conditions de stabilisation proposées dans le théorème 2.3 à la classe des descripteurs T-S incertains soumis à des perturbations externes (2.13). Le théorème proposé donnera les conditions  $\mathcal{LMI}$  permettant à la fois de garantir la stabilité de (2.47) et d'atténuer l'effet des perturbations externes qui affectent le vecteur d'état.

De plus, afin de pouvoir spécifier par le biais de paramètres additionnels la performance souhaitée, il est possible d'introduire au sein du critère  $H_\infty$  décrit par l'inégalité (2.37) une pondération [Chen et al., 2000]. Par conséquent, on considère le critère  $H_\infty$  suivant :

$$\int_0^T x^T(t) Q x(t) dt < \gamma^2 \int_0^T \varphi^T(t) \varphi(t) dt \quad (2.53)$$

où  $Q = Q^T > 0$  est une matrice de pondération.  $T$  est le temps final,  $\gamma$  désigne le taux d'atténuation. En utilisant le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ , (2.53) peut être réécrite :

$$\int_0^T \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt < \gamma^2 \int_0^T \varphi^T(t) \varphi(t) dt \quad (2.54)$$

avec  $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Le résultat est présenté par le théorème suivant.

**Théorème 2.4** [Bouarar et al., 2007b]

Le DTSIP en boucle fermée (2.47) est globalement asymptotiquement stable et admet un taux d'atténuation  $\gamma = \sqrt{\eta}$  au regard des perturbations externes s'il existe, pour tout  $i=1, \dots, r$ ,  $j=1, \dots, r$  et  $k=1, \dots, l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  et  $M_{jk}$  ainsi que des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_k^3$ ,  $\tau_k^4$  et un scalaire  $\eta > 0$  à minimiser tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées :

$$\Xi_{ijk} < 0 \tag{2.55}$$

avec  $\Xi_{ijk} =$  
$$\left[ \begin{array}{cccccc|cc} & & & & & & (*) & 0 \\ & & & & & & 0 & (*) \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ \hline X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta I \end{array} \right]$$
 et  $\Psi_{ijk}$  défini dans le théorème 2.3

Dans ce cas, les gains de la loi de commande PDC modifiée (2.46) s'obtiennent en réalisant le changement de variable bijectif suivant :

$$K_{jk} = M_{jk} X_1^{-1} \tag{2.56}$$

**Preuve :**

Triviale en suivant le chemin établi dans les preuves des théorèmes 2.2 et 2.3. ■

A ce stade, le problème de la stabilité et de la stabilisation des modèles DTSIP a été traité dans le cadre quadratique. Les approches, formulées en terme de LMI, sont basées sur la FCQL (2.19) et peuvent être résolues à l'aide d'outils classiques de l'optimisation convexe [Boyd et al., 1994]. Ainsi, la stabilité et/ou la stabilisation des DTSI ou DTSIP est garantie s'il existe une solution aux conditions présentées dans les théorèmes précédents et donc, si l'existence d'une matrice  $X > 0$  peut-être établie. Néanmoins, la recherche d'une matrice  $X$  commune à un ensemble de contrainte LMI soulève un problème de conservatisme des conditions proposées. Ce problème s'avère de plus en plus compliqué à résoudre à mesure que le nombre de règles floues constituant le système de la classe (2.13) à étudier est important. Dans la suite, une première approche de relaxation pour les descripteurs T-S est proposée afin de réduire ce conservatisme.

## 2.8. Schéma de relaxation pour les descripteurs T-S

Dans le cadre des modèles T-S standards, l'étude de la stabilisation à l'aide de la théorie de Lyapunov conduit à des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité dépendant des fonctions d'appartenance fournies sous forme d'une double somme mathématique du type :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Gamma_{ij} < 0 \quad (2.57)$$

Une première approche permettant de s'affranchir des fonctions d'appartenance consiste alors à essayer de trouver une solution où chacun des termes de la somme (2.57) est négatif [Tanaka et al., 1992], d'où la condition suffisante :

$$\forall i = 1, \dots, r, \forall j = 1, \dots, r, \Gamma_{ij} < 0 \quad (2.58)$$

Evidemment, ces résultats sont conservatifs et, plusieurs travaux ont été proposés afin de relâcher ce problème [Tanaka et Sano, 1994][Kim et Lee, 2000][Tuan et al., 2001] [Xiaodong et Qingling, 2003]. Notons que ces derniers ne permettent pas de relâcher fidèlement les conditions de stabilité des descripteurs T-S puisque leurs conditions de stabilité en boucle fermée sont obtenues sous la forme d'une triple somme mathématique qui, par ailleurs, ne possède pas toutes le même nombre de règles. En effet, on constate lors des preuves des théorèmes 2.3 et 2.4 que les contraintes  $\mathcal{LMI}$  (2.48) et (2.55) sont obtenues sur la base de conditions nécessaires et suffisantes de la forme :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) h_j(z) v_k(z) \Phi_{ijk} < 0 \quad (2.59)$$

Dans la suite, nous proposons un schéma de relaxation pour réduire le conservatisme des conditions des théorèmes 2.3 et 2.4. Ce premier résultat est une extension à la classe des descripteurs T-S du schéma de relaxation développé pour la classe des modèles T-S standards par [Tanaka et Sano, 1994]. Le résultat est donné par le lemme suivant.

**Lemme 2.1 :** [Bouarar et al., 2008a]

Soit  $q = \min\{r, l\}$  où  $\{r, l \text{ et } q\} \in \mathbb{N}$  et où  $r$  et  $l$  représentent le nombre de règles floues respectivement à droite et à gauche de la représentation d'état du descripteur T-S (2.4) L'inégalité (2.59) est vérifiée si :

$$\Phi_{iii} < 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \quad (2.60)$$

$$\Phi_{iik} < 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, l \text{ et } k \neq i \quad (2.61)$$

$$\Phi_{iji} + \Phi_{jii} < 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } j < i \quad (2.62)$$

$$\Phi_{ijk} + \Phi_{jik} < 0 \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, l, j < i \text{ et } k \neq i \quad (2.63)$$

**Preuve :**

On considère les propriétés suivantes :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \Gamma_{ij} = \sum_{i=1}^r (h_i(z))^2 \Gamma_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^r h_i(z) h_j(z) (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \quad (2.64)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) v_k(z) \Omega_{ik} = \sum_{i=1}^q h_i(z) v_i(z) \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l h_i(z) v_k(z) \Omega_{ik} \quad (2.65)$$

où  $\Omega_{ij}$  et  $\Gamma_{ij}$  sont des matrices de dimensions appropriées et  $q = \min\{r, l\}$ .

En utilisant la propriété (2.64), le développement de (2.59) mène à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) \Phi_{ijk} &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l (h_i(z(t)))^2 v_k(z(t)) \Phi_{iik} \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) (\Phi_{ijk} + \Phi_{jik}) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Ensuite, en utilisant la propriété (2.65), le développement de (2.66) conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) h_j(z) v_k(z) \Phi_{ijk} &= \sum_{i=1}^q (h_i(z))^2 v_i(z) \Phi_{iii} \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l (h_i(z))^2 v_k(z) \Phi_{iik} \\ &+ \sum_{i=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^r h_i(z) v_i(z) h_j(z) (\Phi_{iji} + \Phi_{jii}) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^r \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l h_i(z) h_j(z) v_k(z) (\Phi_{ijk} + \Phi_{jik}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Enfin, à partir de (2.67), la négativité de l'inégalité (2.59) est vérifiée si les inégalités (2.60), (2.61), (2.62) et (2.63) sont satisfaites. ■

Le schéma de relaxation développé dans cette section sera utilisé pour relâcher toutes les approches que nous proposons dans la suite de ce manuscrit.

## 2.9. Exemple numérique et résultats de simulation

Dans cette section, on propose d'illustrer l'efficacité des approches quadratiques proposées aux théorèmes 2.3 et 2.4 ainsi que l'intérêt du schéma de relaxation, développé et présenté dans le

lemme 2.1. Par ailleurs, afin de montrer l'intérêt que peut avoir dans certains cas la réécriture d'un modèle strict sous forme incertaine, on considère l'exemple numérique décrit par le descripteur non linéaire suivant :

$$E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) + W\varphi(t) \quad (2.68)$$

où  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t)$  et  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de perturbations externes et où

$$E(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \cos^2(x_2(t)) \end{bmatrix}, B(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{1+x_1^2(t)} \\ a \cos^2(x_2(t)) - 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{et } A(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & \cos^2(x_2(t)) - \frac{1}{1+x_1^2(t)} \\ -\frac{3}{2} & -3 + b \left( 1 + \frac{1}{1+x_1^2(t)} \right) \frac{\sin(x_2(t))}{x_2(t)} \end{bmatrix}.$$

sont des matrices décrivant la dynamique du système (2.68).  $W = [-0.25 \ -0.25]^T$  est la matrice de liaison entre les perturbations externes et la dynamique de système. Enfin,  $a$  et  $b$  sont deux paramètres du système destinés à étudier les domaines de faisabilité des conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées.

La partie gauche de (2.68) contient un terme non linéaire  $\sigma_e(x_2) = \cos^2(x_2)$  et la partie droite contient trois non linéarités  $\sigma_a^1(x_2) = \cos^2(x_2)$ ,  $\sigma_a^2(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2}$  et  $\sigma_a^3(x_2) = \frac{\sin(x_2)}{x_2}$ . En utilisant l'approche par secteur non linéaire [Tanaka et Wang, 2001], le découpage de ces non linéarités est donné, pour  $x_1(t) \in \mathbb{R}$  et  $x_2(t) \in \mathbb{R}$ , par

$$\cos^2(x_2) = (1 - \cos^2(x_2)) \times 0 + \cos^2(x_2) \times 1 = \xi_{10} \times 0 + \xi_{11} \times 1 \quad (2.69)$$

$$\frac{1}{1+x_1^2(t)} = \left( 1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)} \right) \times 0 + \frac{1}{1+x_1^2(t)} \times 1 = \xi_{20} \times 0 + \xi_{21} \times 1 \quad (2.70)$$

$$\frac{\sin(x_2)}{x_2} = \frac{1 - \frac{\sin(x_2)}{x_2}}{1 - \delta} \times \delta + \frac{\frac{\sin(x_2)}{x_2} - \delta}{1 - \delta} \times 1 = \xi_{30} \times \delta + \xi_{31} \times 1 \quad (2.71)$$

où  $\delta = -0.2172$  représente la valeur minimale du terme non linéaire  $\frac{\sin(x_2)}{x_2}$ .

D'où l'obtention des fonctions d'appartenance données par :

$$v_1(x_2) = 1 - v_2(x_2) = \xi_{10} \quad (2.72)$$

$$h_1(x_1, x_2) = \xi_{10} \times \xi_{20} \times \xi_{30} \quad (2.73)$$

$$h_2(x_1, x_2) = \xi_{10} \times \xi_{20} \times \xi_{31} \quad (2.74)$$

$$h_3(x_1, x_2) = \xi_{10} \times \xi_{21} \times \xi_{30} \quad (2.75)$$

$$h_4(x_1, x_2) = \xi_{10} \times \xi_{21} \times \xi_{31} \quad (2.76)$$

$$h_5(x_1, x_2) = \xi_{11} \times \xi_{20} \times \xi_{30} \quad (2.77)$$

$$h_6(x_1, x_2) = \xi_{11} \times \xi_{20} \times \xi_{31} \quad (2.78)$$

$$h_7(x_1, x_2) = \xi_{11} \times \xi_{21} \times \xi_{30} \quad (2.79)$$

$$h_8(x_1, x_2) = \xi_{11} \times \xi_{21} \times \xi_{31} \quad (2.80)$$

Notons que, dans ce cas, un représentant T-S exact (sans incertitudes) du descripteur non linéaire (2.68) contient respectivement  $l = 2$  et  $r = 8$  règles floues à droite et à gauche. Celui-ci est donné par :

$$\sum_{k=1}^2 v_k(z) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^8 h_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)) + W \varphi(t) \quad (2.81)$$

avec les matrices  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3+b\delta \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3+b \end{bmatrix}$ ,

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3+2b\delta \end{bmatrix}$ ,  $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -3+2b \end{bmatrix}$ ,  $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -3+b\delta \end{bmatrix}$ ,  $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -3+b \end{bmatrix}$ ,

$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3+2b\delta \end{bmatrix}$ ,  $A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -3+2b \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,

$B_5 = B_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ a-2 \end{bmatrix}$  et  $B_7 = B_8 = \begin{bmatrix} 2 \\ a-2 \end{bmatrix}$ .

En considérant les conditions de stabilité proposées dans le théorème 2.3 réduites au cas où les matrices d'incertitudes sont nulles, la synthèse du contrôleur flou nécessite la vérification de  $(l \times r \times r) + 1 = 129$  contraintes  $\mathcal{LMI}$ . Il convient cependant de souligner que la résolution d'un nombre important de contraintes  $\mathcal{LMI}$  conduit à un coût de calcul élevé. Ainsi, à l'aide des solveurs et des ordinateurs actuels, aucune solution n'a pu être obtenue pour ce problème.

Une autre alternative menant à la réduction du coût de calcul et, par conséquent, une réduction du pessimisme lié au matériel est de diminuer artificiellement le nombre de règles floues qui

composent le représentant T-S. En effet, il est possible de considérer certains termes non linéaires dont l'influence sur la dynamique globale du système est faible comme des incertitudes paramétriques à majorer. Dans ce cas, le problème de stabilisation revient à la synthèse d'une loi de commande robuste tenant compte de ces approximations avec un nombre réduit de règles floues [Bouarar et al., 2007b]. Ainsi, afin de réécrire le modèle descripteur non linéaire (2.68) sous la forme d'un DTSIP, on considère, par exemple, les termes non linéaires dépendant de la variable d'état  $x_2$  comme étant des incertitudes bornées. Le terme non linéaire à prendre en compte est, dans ce cas,  $\sigma_a^2(x_1)$  dont le découpage est décrit en (2.70). Un représentant DTSIP de (2.68) est ainsi donné par :

$$(E + \Delta E(t))\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \left( (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) \right) + W\varphi(t) \quad (2.82)$$

$$\text{où } h_1(x_1) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)}, \quad h_2(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2(t)}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + \frac{b}{2}(1-\delta) \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + b(1-\delta) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta E(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}f_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}f_1(t) \\ 0 & b\frac{1+\delta}{2}f_2(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}f_1(t) \\ 0 & b(1+\delta)f_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } \Delta B_1(t) = \Delta B_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{2}f_1(t) \end{bmatrix}.$$

Afin d'appliquer sur le DTSIP (2.82) les approches proposées aux théorèmes 2.3 et 2.4, les matrices d'incertitudes  $\Delta E(t)$ ,  $\Delta A_i(t)$ ,  $\Delta B_i(t)$  peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\Delta E(t) = H_e f_e(t) N_e, \quad \Delta A_i(t) = H_a^i f_a^i(t) N_a^i \text{ et } \Delta B_i(t) = H_b^i f_b(t) N_b^i \quad (2.83)$$

$$\text{où } H_e = H_a^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad N_a^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b\frac{1+\delta}{2} \end{bmatrix}, \quad N_a^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b(1+\delta) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$N_b^1 = N_b^2 = \frac{1}{2}a.$$

Notons qu'en considérant le DTSIP (2.82), nous avons après découpage  $l=1$  et  $r=2$  règles floues. De ce fait, le nombre de contraintes à vérifier en considérant les conditions proposées dans le théorème 2.3 est  $2(r \times r \times l) + 2l + r + 1 = 13$  ce qui réduit la complexité lors de la résolution en termes de coût de calcul.

**Remarque 2.4**

A partir des équations (2.69) et (2.71), on constate que, bien que faisant appel à des termes incertains, le DTSIP (2.82) constitue paradoxalement une écriture exacte du descripteur non linéaire (2.68) dans la mesure où les non-linéarités de ce dernier sont parfaitement connues. Ainsi, les non-linéarités considérées comme incertaines pour la synthèse d'un contrôleur robuste sont en réalité connues puisque:

$$f_1(t) = 2 \cos^2(x_2(t)) - 1 \tag{2.84}$$

$$\text{et } f_2(t) = \frac{1}{1+\delta} \left( \delta - 1 + 2 \frac{\sin x_2(t)}{x_2(t)} \right) \tag{2.85}$$

De ce fait, les fonctions incertaines contenues dans (2.82) sont données par:

$$f_e(t) = f_b^i(t) = f_1(t) \tag{2.86}$$

$$\text{et } f_a^i(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & 0 \\ 0 & f_2(t) \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

Ces fonctions sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et,  $\forall t \ f_1^2(t) \leq 1$  et  $(f_a^i(t))^T f_a^i(t) \leq I$ . Par conséquent, lorsqu'une solution aux théorèmes 2.3 et 2.4 peut être trouvée, la loi de commande synthétisée permettra une stabilisation au sens strict du descripteur non linéaire (2.68).

On rappelle que la relaxation joue un rôle vital lors de la résolution des contraintes  $\mathcal{LMI}$ . Pour montrer l'efficacité du schéma de relaxation proposé au lemme 2.1 par rapport aux conditions données dans le théorème 2.3 (sans relaxation), la Figure 2.1 illustre les domaines de solutions des conditions de stabilité obtenus par ces deux approches pour  $a \in [-2.5 \ 1]$  et  $b \in [-8 \ 8]$ .

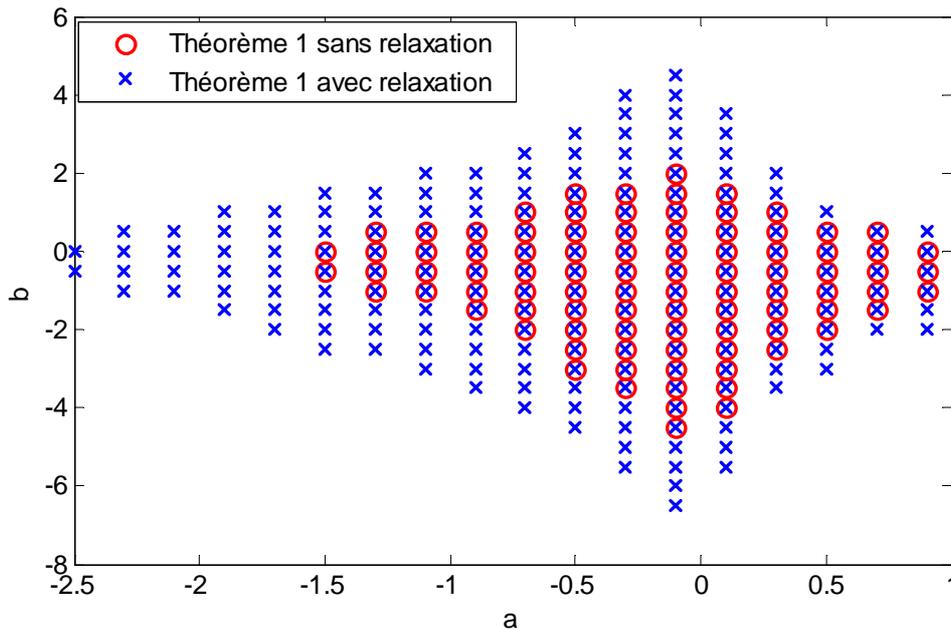


Figure 2.1. Domaines de solutions du théorème 2.3 sans relaxation et avec relaxation (lemme 2.1).

Prenons par exemple le cas où  $a = -1.7$  et  $b = -0.4$ , aucune solution n'est envisageable à l'aide des conditions du théorème 2.3 non relâchées. En revanche, un contrôleur adéquat, garantissant la stabilité de (2.68), sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ), peut être synthétisé à l'aide des conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées dans le théorème 2.3. La résolution de celles-ci est réalisée à l'aide de la boîte à outils Matlab  $\mathcal{LMI}$  Toolbox [Gahinet et al., 1995] et conduit aux résultats donnés par :

$$K_{11} = [2.9412 \quad -2.0018], \quad K_{21} = [2.7928 \quad -1.7911], \quad \tau_1^1 = 1.0693, \quad \tau_2^1 = 0.3037, \quad \tau_{111}^2 = 1.5388, \\ \tau_{121}^2 = 2.2334, \quad \tau_{211}^2 = 2.2334, \quad \tau_{221}^2 = 2.869, \quad \tau_1^3 = 0.2902, \quad \tau_1^4 = 1.111 \quad \text{et} \\ X = \begin{bmatrix} 1.328 & 0.5056 & 0 & 0 \\ 0.5056 & 0.8868 & 0 & 0 \\ 2.8111 & -0.4067 & 2.5619 & -2.3359 \\ -0.2153 & 0.3778 & -0.5619 & 3.8357 \end{bmatrix}.$$

La Figure 2.2 montre respectivement l'évolution temporelle du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$  ainsi que celle du signal de commande  $u(t)$  pour la condition initiale  $x(0)^T = [1 \quad -1]^T$ .

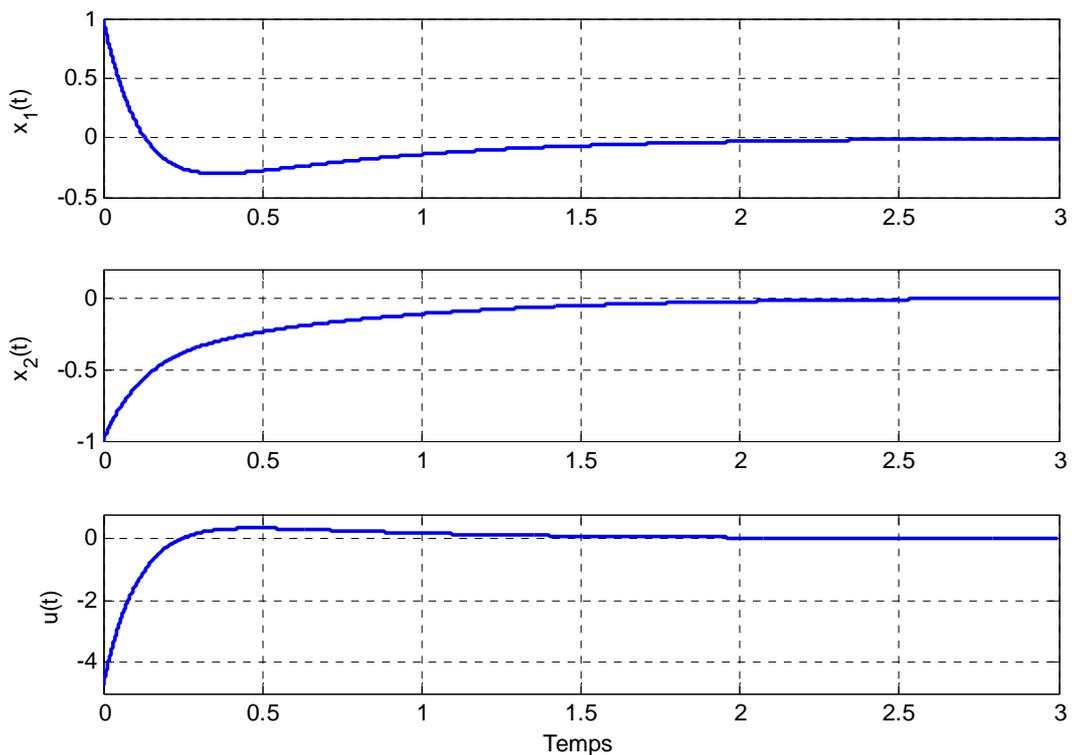


Figure 2.2. Réponses temporelles du système (2.68) sans perturbations externes et du signal de commande.

Les simulations précédentes ne tiennent pas compte de l'effet des perturbations externes sur le système (2.68). L'emploi des théorèmes 2.4 permet la synthèse  $H_\infty$  de contrôleur garantissant

la stabilité intrinsèque de (2.68) tout en atténuant les effets de la perturbation externe  $\varphi(t)$  sur la dynamique du système. Les résultats de simulation suivants sont obtenus pour  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  :

$$K_{11} = [96.504 \quad -133.2069], \quad K_{21} = [56.9544 \quad -78.4049], \quad \tau_1^1 = 0.1686, \quad \tau_2^1 = 0.0786, \\ \tau_{111}^2 = 0.2342, \quad \tau_{121}^2 = 0.3389, \quad \tau_{211}^2 = 0.3389, \quad \tau_{221}^2 = 0.4545, \quad \tau_1^3 = 0.0204, \quad \tau_1^4 = 0.1099, \\ X = \begin{bmatrix} 0.1672 & 0.1156 & 0 & 0 \\ 0.1156 & 0.0846 & 0 & 0 \\ 24.5017 & -0.0795 & 24.362 & -24.4135 \\ -0.0553 & 0.0499 & -0.1062 & 0.5411 \end{bmatrix} \text{ et le taux d'atténuation } \eta = 1.6255.$$

Afin de réaliser une simulation du descripteur (2.68) en boucle fermée, ce dernier est soumis à une perturbation externe considérée comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire. La Figure 2.3 montre l'évolution temporelle du vecteur d'état  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$  et du signal de commande  $u(t)$  pour la condition initiale  $x(0)^T = [1 \quad -0.5]^T$ . Notons qu'ici, la synthèse  $H_\infty$  permet d'atténuer les effets des perturbations externes dont les compensations peuvent être remarquées au niveau des signaux de commande.

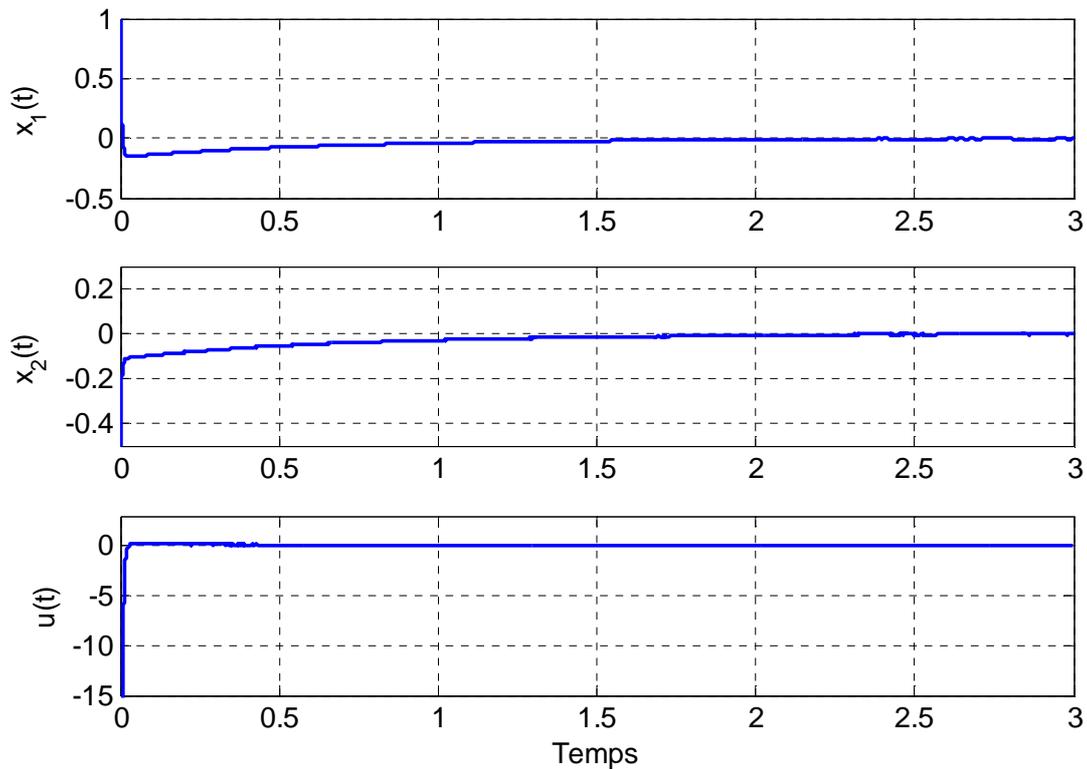


Figure 2.3. Stabilisation  $H_\infty$  du système (2.68) soumis à des perturbations externes et évolution temporelle du signal de commande.

## 2.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de la stabilité et de la stabilisation quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés. Des conditions de stabilité basées sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov ont été proposées. Ensuite, l'extension de ces conditions à la synthèse de lois de commande robustes de type PDC modifiées ont été proposées. L'emploi d'un critère  $H_\infty$  a par ailleurs, permis d'aboutir à des conditions visant à minimiser l'influence des perturbations externes sur la dynamique du DTSI considéré. Les résultats proposés sont fournis en termes de  $LMI$  afin de permettre une résolution à l'aide des outils de l'optimisation convexe. D'autre part, afin de relâcher (réduire le conservatisme) les approches quadratiques proposées, un schéma de relaxation typique pour la classe des systèmes descripteurs a été développé. Cependant, il convient de souligner que la synthèse de contrôleurs flous à l'aide des conditions proposées dans les théorèmes 2.3 et 2.4 sont quadratiques. Par conséquent, ces approches nécessitent la recherche d'une matrice de Lyapunov unique  $X$ , c'est-à-dire commune à l'ensemble de la structure d'interconnexion des DTSIP considérés. Ceci introduit bien entendu du conservatisme lors de la résolution des conditions de stabilité proposées. Une manière de réduire ce conservatisme est d'utiliser un autre type de fonction candidate de Lyapunov conduisant à des résultats relâchés. Ainsi, dans le prochain chapitre, des approches non quadratiques seront établies pour l'analyse et la synthèse de lois de commande stabilisantes pour la classe des DTSIP.



# Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés

---

---

3.1. Introduction .....	57
3.2. Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés.....	57
3.2.1. Formulation de la boucle fermée dans le cadre non quadratique.....	57
3.2.2. Synthèse non quadratique de lois de commande pour les descripteurs T-S incertains et perturbés .....	59
3.2.3. Synthèse non quadratique de lois de commande pour les descripteurs incertains.....	61
3.2.4. Extension à la synthèse $H^\infty$ de lois de commande non quadratiques pour les descripteurs T-S incertains et perturbés .....	65
3.2.5. Discussion sur l'applicabilité des approches non quadratiques.....	68
3.2.6. Réduction des approches non quadratiques à un cadre quadratique étendu .....	70
3.3. Exemples numériques.....	72
3.4. Conclusion.....	77

### 3.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, les problèmes de stabilité et de stabilisation quadratiques des modèles descripteurs T-S incertains et perturbés (DTSIP) ont été traités. Ceux-ci sont basés sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov nécessitant la recherche d'une matrice commune à un ensemble de contraintes  $\mathcal{LMI}$ . De ce fait, comme on pouvait s'y attendre, les conditions de stabilité proposées sont conservatives d'un point de vue synthèse de contrôleur. Dans ce cadre, plusieurs travaux ont été proposés pour les études de stabilité et de stabilisation des modèles T-S standards afin de fournir des conditions moins conservatives basées sur l'emploi d'autres fonctions de Lyapunov. Ainsi, des approches basées sur la fonction de Lyapunov continue par morceaux (*piecewise Lyapunov functions*) PLF ont été proposées par [Johansson et al., 1999][Feng et Harris, 2001][Feng et Sun, 2002][Othake et al., 2003][Feng, 2004][Feng, 2006][Ji et al., 2007][Wu et al., 2007]. Néanmoins, ces approches s'avèrent peu efficaces lorsqu'un représentant T-S est obtenu par découpage en secteur non linéaire. En effet, ce type de fonction de Lyapunov ne tient pas compte de la structure d'interconnexion non linéaire entre sous-modèles composant le système global. Une autre approche, adaptée au cas non linéaire, consiste en l'utilisation d'une fonction candidate non quadratique de Lyapunov [Blanco et al., 2001][Guerra et Vermeiren, 2004][Rhee et Won, 2006]. Parmi celles-ci, on distingue l'approche considérant l'emploi d'une fonction candidate de Lyapunov dite « floue » (FLF) dans la mesure où les variables de décision de cette fonction sont basées sur la même structure d'interconnexion que le système T-S étudié [Jadbabaie, 1999][Tanaka et al., 2001a][Tanaka et al., 2001b][Tanaka et al., 2001c][Tanaka et al., 2003][Feng, 2004][Feng, 2006]. Ainsi le système, la FLF et la loi de commande étant basés sur cette même structure, on comprend bien qu'une compensation parallèle entre ces parties facilite la recherche d'une solution aux problèmes  $\mathcal{LMI}$  et conduit à une réduction du conservatisme.

L'objectif de ce chapitre est donc d'étendre au cadre non quadratique les conditions de stabilisation des descripteurs T-S incertains et perturbés (DTSIP) présentées au chapitre 2 de ce manuscrit. Tout d'abord, nous rappellerons la classe des modèles DTSIP étudiés. Puis l'extension de la loi de commande PDC, dite non-PDC dans le cadre non quadratique, ainsi que la FLF considérée seront présentées. Ensuite, les conditions pour la synthèse d'une loi de commande non-PDC seront proposées dans le cas de perturbations externes nulles. Ces résultats seront par la suite étendus au cas des DTSI soumis à des perturbations externes par le biais d'un critère  $H_\infty$ . Par ailleurs, un bilan théorique sur l'applicabilité des approches proposées sera présenté sous forme d'une discussion et les limites des approches non quadratiques seront discutées. Afin de faciliter la mise en œuvre des conditions de stabilité proposées, un compromis conduisant à une approche quadratique étendue sera étudié. Enfin, dans la dernière section, deux exemples seront étudiés pour illustrer l'intérêt et l'efficacité des approches proposées.

### 3.2. Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains et perturbés

#### 3.2.1. Formulation de la boucle fermée dans le cadre non quadratique

On rappelle la classe générique des DTSIP présentée dans le chapitre précédent. Celle-ci représente les descripteurs décrits par l'équation d'état suivante :

$$\sum_{k=1}^l v_k(z) (E_k + \Delta E_k(t)) \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) ((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + W_i \varphi(t)) \quad (3.1)$$

Avec les grandeurs et matrices déjà définies au chapitre 2, équation (2.13).

Rappelons que dans le chapitre précédent, une loi de commande PDC modifiée a été utilisée pour la stabilisation quadratique des DTSIP [Taniguchi et al., 2000]. Notons que, dans ce cadre, le changement de variable bijectif  $M_{jk} = K_{jk} X_1$  a été réalisé (cf. théorème 2.3) pour fournir des conditions de stabilisation exprimées en termes de  $\mathcal{LMI}$ . Dans le présent chapitre, on s'intéresse à la stabilisation non quadratique des DTSIP. De ce fait, une structure d'interconnexion variable dans le temps doit être associée à la variable de décision  $X_1$ , c'est-à-

dire  $X_{hv}^1 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) v_k(z) X_{ik}^1$ . Par conséquent, étant donné le couplage de la matrice de

Lyapunov et des gains de commande, ce changement de variable ne pourra plus être bijectif. De plus, s'il est effectué dans le cadre non quadratique, la synthèse ne pourra pas se faire par le biais de  $\mathcal{LMI}$ . Afin de palier ce problème, une loi de commande, dite non-PDC, a été proposée pour la stabilisation non quadratique des modèles T-S standards, aussi bien dans le cas continu [Tanaka et al., 2003][Lam et Leung, 2006] que dans le cas discret [Guerra et Vermeiren, 2004][Ding et Huang, 2008]. Ramenée au cas des systèmes descripteurs, une loi de commande non-PDC a été proposée [Bouarar et al., 2008a]. Celle-ci est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) v_k(z) K_{ik} \left( \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) v_k(z) X_{ik}^1 \right)^{-1} x(t) \quad (3.2)$$

où  $K_{ik}$  et  $X_{ik}^1 > 0$  sont des matrices de dimensions appropriées à rechercher. La loi de commande (3.2), est illustrée par le schéma suivant.

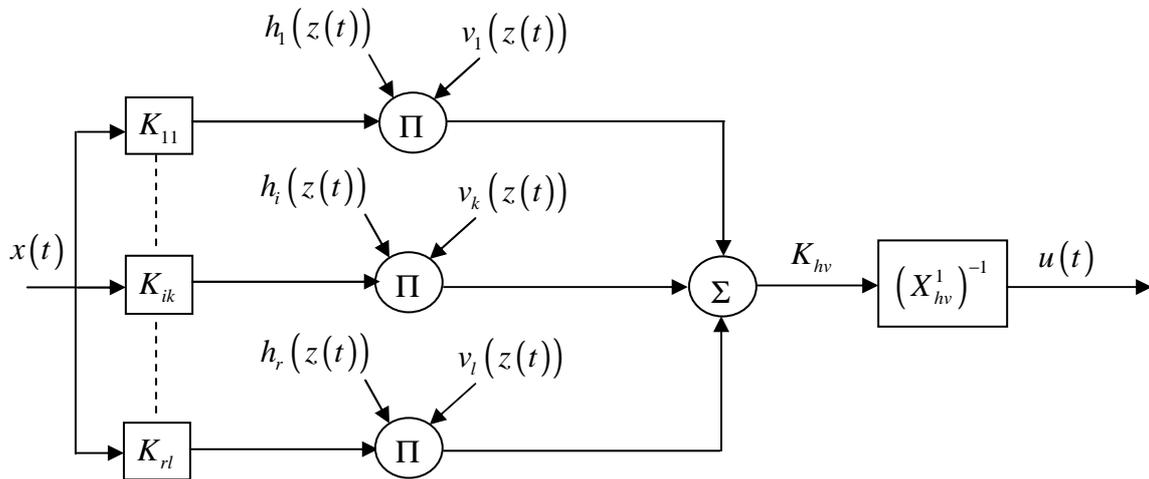


Figure 3.1. Schéma de la loi de commande non-PDC.

### Remarque 3.1

La loi de commande (3.2) est dite non-PDC, car elle contient le terme  $\left( \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) v_k(z) X_{ik}^1 \right)^{-1}$ .

Par conséquent, (3.2) ne constitue plus, au sens strict du terme, une compensation parallèle distribuée de la loi de commande vis-à-vis du descripteur T-S à stabiliser.

En considérant le vecteur d'état augmenté  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$  et les notations décrites au chapitre 1, le modèle DTSIP (3.1) et la loi de commande non-PDC (3.2) dans leur forme étendue sont donnés par :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t))\bar{x}(t) + (\bar{B}_h + \Delta\bar{B}_h(t))u(t) + \bar{W}_h\varphi(t) \quad (3.3)$$

$$\text{avec } \bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h & -E_v \end{bmatrix}, \quad \Delta\bar{A}_{hv}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta A_h(t) & -\Delta E_v(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h \end{bmatrix}, \quad \bar{W}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ W_h \end{bmatrix},$$

$$\Delta\bar{B}_h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B_h(t) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$u(t) = -\bar{K}_{hv}\bar{x}(t) \quad (3.4)$$

$$\text{avec } \bar{K}_{hv} = \begin{bmatrix} K_{hv}(X_{hv}^1)^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

La substitution de la loi de commande non-PDC (3.4) dans (3.3) permet d'obtenir l'expression de la dynamique de la boucle fermée qui sera donnée par :

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta\bar{B}_h(t))\bar{K}_{hv})\bar{x}(t) + \bar{W}_h\varphi(t) \quad (3.5)$$

Dès lors, la synthèse d'une loi de commande non-PDC représentée par (3.2), stabilisant le DTSIP (3.1), consiste en l'obtention des matrices de gain  $K_{ik}$  et  $X_{ik}^1$ , pour  $i=1, \dots, r$  et  $k=1, \dots, l$ , assurant la stabilité de la boucle fermée (3.5).

### 3.2.2. Synthèse non quadratique de lois de commande pour les descripteurs T-S incertains et perturbés

Il est évident que les approches proposées dans le chapitre 2 sont conservatives. En effet, elles nécessitent d'une part la recherche des matrices des gains de retour d'état et d'autre part une matrice  $X$  commune à toutes les contraintes  $\mathcal{LMI}$ . Afin de contourner ce problème de conservatisme, les approches proposées par la suite seront basées sur la FLF donnée par :

$$V(x(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E} \left( \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z) h_j(z) v_k(z) \bar{X}_{ijk} \right)^{-1} \bar{x}(t) \quad (3.6)$$

où  $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$  et la condition de symétrie :

$$\bar{E}(\bar{X}_{h_{hv}})^{-1} = \left( (\bar{X}_{h_{hv}})^{-1} \right)^T \bar{E}^T > 0 \quad (3.7)$$

Notons que la fonction non quadratique (3.6) est dite FLF car la matrice variable dans le temps  $\bar{X}_{h_{hv}}$  à rechercher pour garantir la stabilité d'un système repose sur la même structure d'interconnexion floue  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z)h_j(z)v_k(z)\dots$  que la boucle fermée (3.5) dont on souhaite étudier la dynamique.

En tenant compte des notations définies dans le chapitre 1, (3.6) peut être réécrite telle que :

$$V(x(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E}(\bar{X}_{h_{hv}})^{-1} \bar{x}(t) \quad (3.8)$$

En multipliant (3.7) à gauche et à droite respectivement par  $X_{h_{hv}}^T$  et  $X_{h_{hv}}$ , on obtient :

$$\bar{X}_{h_{hv}}^T \bar{E} = \bar{E}^T \bar{X}_{h_{hv}} > 0 \quad (3.9)$$

De manière usuelle pour les systèmes descripteurs, on pose  $\bar{X}_{h_{hv}} = \begin{bmatrix} X_{hv}^1 & X_{(\cdot)}^2 \\ X_{hh}^3 & X_{hh}^4 \end{bmatrix}$ . D'après la condition de symétrie (3.9), on obtient directement  $X_{hv}^1 = (X_{hv}^1)^T > 0$ ,  $X_{(\cdot)}^2 = 0$ .

Notons que, des structures d'interconnexions floues ont été attribuées aux variables de décision  $X_{hv}^1$ ,  $X_{hh}^3$  et  $X_{hh}^4$ . Bien entendu, ce choix n'est pas arbitraire et sera justifié dans la preuve du théorème développée dans la suite de ce chapitre (cf. remarque 3.2). Par ailleurs, afin de garantir l'inversibilité de  $\bar{X}_{h_{hv}}$ , la matrice  $X_{hh}^4$  doit être inversible.

L'étude de la stabilité et de la stabilisation de la classe des modèles descripteurs T-S à l'aide de la FLF (3.8) conduit à la dérivation des fonctions d'appartenance  $h_i(z)$ ,  $v_k(z)$ . De ce fait, les approches proposées par la suite sont obtenues sous l'hypothèse suivante :

### Hypothèse 3.1

Les fonctions d'appartenance  $h_i(z)$  et  $v_k(z)$ , pour  $i=1,\dots,r$  et  $k=1,\dots,l$ , doivent être de classe  $C^1$ , c'est-à-dire continûment dérivables. Cette hypothèse est vérifiée dans le cas des modèles T-S obtenus par le découpage en secteur non linéaire de termes continus et dérivables sur un espace compact de l'espace d'état [Tanaka et Wang, 2001].

### Propriété 3.1

Pour tout  $i=1,2,\dots,r$  et  $k=1,2,\dots,l$ , sous l'hypothèse 3.1,  $\dot{h}_i(z)$  et  $\dot{v}_k(z)$  admettent respectivement des bornes inférieures  $\phi_i$  et  $\theta_k$ .

### 3.2.3. Synthèse non quadratique de lois de commande pour les descripteurs incertains

Dans cette section, on s'intéresse tout d'abord au problème de la stabilisation de la classe des DTSI décrite par (3.1) sans perturbations externes ( $\varphi(t)=0$ ). La solution apportée à ce problème est présentée en termes de  $\mathcal{LMI}$  dans le théorème suivant.

**Théorème 3.1 :** [Bouarar et al., 2008a]

Soient  $q = \min\{r, l\}$  et  $\forall z(t), \xi \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \psi \in \{1, 2, \dots, l-1\}, \dot{h}_\xi(z(t)) \geq \phi_\xi$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$ . Le DTSI (3.1) avec ( $\varphi(t)=0$ ) est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande non-PDC (3.2) s'il existe des matrices  $X_{jk}^1 = (X_{jk}^1)^T > 0, X_{ij}^3, X_{ij}^4, K_{jk}$  et des scalaires positifs  $\tau_{ijk}^1, \tau_{ijk}^2, \tau_{ijk}^3$  et  $\tau_{ijk}^4$ , tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\Psi_{iii} < 0, \text{ pour } i=1, 2, \dots, q \quad (3.10)$$

$$\Psi_{iik} < 0, \text{ pour } k=1, 2, \dots, l, i=1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \quad (3.11)$$

$$\Psi_{iji} + \Psi_{jii} < 0, \text{ pour } j=1, 2, \dots, r, i=1, 2, \dots, q \text{ et } j < i \quad (3.12)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi_{jik} < 0, \text{ pour } i, j=1, 2, \dots, r, k=1, 2, \dots, l, j < i \text{ et } k \neq i \quad (3.13)$$

$$X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0, \text{ pour } k=1, 2, \dots, l \text{ et } \xi=1, 2, \dots, r-1 \quad (3.14)$$

$$X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1 \geq 0, \text{ pour } j=1, 2, \dots, r \text{ et } \psi=1, 2, \dots, l-1 \quad (3.15)$$

$$\text{avec } \Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} \Theta_{ijk}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_a^i X_{jk}^1 & -\tau_{ijk}^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^i K_{jk} & 0 & -\tau_{ijk}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_{ij}^3 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^3 I & 0 & 0 \\ (X_{ij}^4)^T + A_i X_{jk}^1 - E_k X_{ij}^3 - B_i K_{jk} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{ijk}^{(5,5)} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_{ij}^4 & -\tau_{ijk}^4 I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{ijk}^{(1,1)} = X_{ij}^3 + (X_{ij}^3)^T - \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_\xi (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_\psi (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right)$$

$$\text{et } \Theta_{ijk}^{(5,5)} = -E_k X_{ij}^4 - (X_{ij}^4)^T E_k^T + \tau_{ijk}^1 H_a^i (H_a^i)^T + \tau_{ijk}^2 H_b^i (H_b^i)^T + (\tau_{ijk}^3 + \tau_{ijk}^4) H_e^k (H_e^k)^T.$$

**Preuve :**

La boucle fermée (3.5) est globalement asymptotiquement stable si la dérivée de (3.6) le long des trajectoires du système est négative, c'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x) = \dot{\bar{x}}^T \bar{E} (\bar{X}_{h hv})^{-1} \bar{x} + \bar{x}^T \bar{E} (\bar{X}_{h hv})^{-1} \dot{\bar{x}} + \bar{x}^T \overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) \bar{x} < 0 \quad (3.16)$$

En considérant (3.7) et (3.5), l'inégalité (3.16), conduit à :

$$\begin{aligned} & (\bar{A}_{h v} + \Delta \bar{A}_{h v}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{h v})^T (\bar{X}_{h hv})^{-1} \\ & + \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right)^T (\bar{A}_{h v} + \Delta \bar{A}_{h v}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{h v}) + \overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

La multiplication à gauche et à droite de (3.17) respectivement par  $\bar{X}_{h hv}^T$  et  $\bar{X}_{h hv}$  mène à :

$$\begin{aligned} & \bar{X}_{h hv}^T (\bar{A}_{h v} + \Delta \bar{A}_{h v}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{h v})^T \\ & + (\bar{A}_{h v} + \Delta \bar{A}_{h v}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{h v}) \bar{X}_{h hv} + \bar{E}^T \bar{X}_{h hv} \overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) \bar{X}_{h hv} < 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'inégalité (3.18) contient la dérivée de l'inverse de la matrice de Lyapunov. Celle-ci peut être réécrite telle que :

$$\begin{aligned} -\overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ (\bar{X}_{h hv})^{-1} \bar{X}_{h hv} \right\} (\bar{X}_{h hv})^{-1} - \overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) \\ &= \overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) \bar{X}_{h hv} (\bar{X}_{h hv})^{-1} + (\bar{X}_{h hv})^{-1} \dot{\bar{X}}_{h hv} (\bar{X}_{h hv})^{-1} - \overline{\dot{E}} \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right) \\ &= (\bar{X}_{h hv})^{-1} \dot{\bar{X}}_{h hv} (\bar{X}_{h hv})^{-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

D'où, (3.18) devient :

$$\begin{aligned} & \bar{X}_{h hv}^T (\bar{A}_{h v} + \Delta \bar{A}_{h v}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{h v})^T \\ & + (\bar{A}_{h v} + \Delta \bar{A}_{h v}(t) - (\bar{B}_h + \Delta \bar{B}_h(t)) \bar{K}_{h v}) \bar{X}_{h hv} - \bar{E}^T \dot{\bar{X}}_{h hv} < 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

En développant l'inégalité (3.20) à l'aide des matrices définies en (3.3), et (3.4), on obtient :

$$\left[ \begin{array}{c} X_{hh}^3 + (X_{hh}^3)^T - \dot{X}_{hv}^1 \quad (*) \\ \left( \begin{array}{c} (X_{hh}^4)^T + A_h X_{hv}^1 - E_v X_{hh}^3 \\ -B_h K_{hv} + H_a^h f_a^h(t) N_a^h X_{hv}^1 \\ -H_e^v f_e^v(t) N_e^v X_{hh}^3 - H_b^h f_b^h(t) N_b^h K_{hv} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -E_v X_{hh}^4 - (X_{hh}^4)^T E_v^T \\ -(X_{hh}^4)^T (N_e^v)^T (f_e^v(t))^T (H_e^v)^T \\ -H_e^v f_e^v(t) N_e^v X_{hh}^4 \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \quad (3.21)$$

Les matrices des fonctions  $f_a^h(t)$ ,  $f_b^h(t)$  et  $f_e^h(t)$  dans l'inégalité (3.21) peuvent être majorées en utilisant le lemme 2 (annexe A). Ce qui mène à:

$$\left[ \begin{array}{c} X_{hh}^3 + (X_{hh}^3)^T - \dot{X}_{hv}^1 + \Xi_{hhv}^{(1,1)} \quad (*) \\ \left( \begin{array}{c} (X_{hh}^4)^T + A_h X_{hv}^1 \\ -E_v X_{hh}^3 - B_h K_{hv} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} -E_v X_{hh}^4 - (X_{hh}^4)^T E_v^T + \tau_{hhv}^1 H_a^h (H_a^h)^T \\ + \tau_{hhv}^2 H_b^h (H_b^h)^T + (\tau_{hhv}^3 + \tau_{hhv}^4) H_e^v (H_e^v)^T + \Xi_{hhv}^{(2,2)} \end{array} \right) \end{array} \right] < 0 \quad (3.22)$$

avec

$$\Xi_{hhv}^{(1,1)} = (\tau_{hhv}^1)^{-1} (X_{hv}^1)^T (N_a^h)^T N_a^h X_{hv}^1 + (\tau_{hhv}^2)^{-1} K_{hv}^T (N_b^h)^T N_b^h K_{hv} + (\tau_{hhv}^3)^{-1} (X_{hh}^3)^T (N_e^v)^T N_e^v X_{hh}^3 \text{ et}$$

$$\Xi_{hhv}^{(2,2)} = (\tau_{hhv}^4)^{-1} (X_{hh}^4)^T (N_e^v)^T N_e^v X_{hh}^4.$$

En appliquant le complément de Schur [Boyd et al., 1994] sur les termes  $\Xi_{hhv}^{(1,1)}$  et  $\Xi_{hhv}^{(2,2)}$ , on obtient :

$$\left[ \begin{array}{cccccc} X_{hh}^3 + (X_{hh}^3)^T - \dot{X}_{hv}^1 & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_a^h X_{hv}^1 & -\tau_{hhv}^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^h K_{hv} & 0 & -\tau_{hhv}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ N_e^v X_{hh}^3 & 0 & 0 & -\tau_{hhv}^3 I & 0 & 0 \\ (X_{hh}^4)^T + A_h X_{hv}^1 - E_v X_{hh}^3 - B_h K_{hv} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{hhv}^{(5,5)} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^v X_{hh}^4 & -\tau_{hhv}^4 I \end{array} \right] < 0 \quad (3.23)$$

$$\text{où } \Xi_{hhv}^{(5,5)} = -E_v X_{hh}^4 - (X_{hh}^4)^T E_v^T + \tau_{hhv}^1 H_a^h (H_a^h)^T + \tau_{hhv}^2 H_b^h (H_b^h)^T + (\tau_{hhv}^3 + \tau_{hhv}^4) H_e^v (H_e^v)^T.$$

La dérivée  $\dot{X}_{hv}^1$  de la matrice  $X_{hv}^1$  figurant dans l'inégalité (3.23) conduit à la dérivation des fonctions d'appartenance  $h_i(z)$  et  $v_k(z)$ . Notons qu'à ce stade les conditions de stabilité fournies sont exprimées en termes de  $\mathcal{BMI}$ . Pour palier ce problème et proposer des résultats exprimés en termes de  $\mathcal{LMI}$ , l'hypothèse 3.1 doit être vérifiée.

Puisque les fonctions d'appartenance vérifient les propriétés des sommes convexes  $\sum_{k=1}^l v_k(z) = 1$  et  $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$ , alors  $\dot{X}_{hv}^1$  présentée dans (3.23), peut être développée tel que :

$$\begin{aligned}\dot{X}_{hv}^1 &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l \dot{h}_j(z) v_k(z) X_{jk}^1 + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_j(z) \dot{v}_k(z) X_{jk}^1 \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j(z) v_k(z) \left( \sum_{\xi=1}^r \dot{h}_\xi(z) X_{\xi k}^1 + \sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi(z) X_{j\psi}^1 \right)\end{aligned}\quad (3.24)$$

De plus, on peut écrire :

$$\dot{h}_r(z(t)) = -\sum_{\xi=1}^{r-1} \dot{h}_\xi(z(t)) \quad \text{et} \quad \dot{v}_l(z(t)) = -\sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi(z(t)) \quad (3.25)$$

d'où, l'égalité (3.24) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{X}_{hv}^1 &= \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j(z) v_k(z) \left( \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \dot{h}_\xi(z) X_{\xi k}^1 \right) + \dot{h}_r(z) X_{rk}^1 + \left( \sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi(z) X_{j\psi}^1 \right) + \dot{v}_l(z) X_{jl}^1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j(z) v_k(z) \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \dot{h}_\xi(z) (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \dot{v}_\psi(z) (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right)\end{aligned}\quad (3.26)$$

D'après la propriété 3.1, pour  $k=1,2,\dots,l$  et  $i=1,2,\dots,r$ ,  $\dot{v}_k(z(t)) \geq \theta_k$  et  $\dot{h}_i(z(t)) \geq \phi_i$ , tels que  $\phi_i$  et  $\theta_k$  sont deux scalaires négatifs. D'où, (3.26) peut être majorée par :

$$\dot{X}_{hv}^1 \geq \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j(z) v_k(z) \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_\xi (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_\psi (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right) \quad (3.27)$$

sous les conditions :

$$X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0, \quad \text{pour } k=1,2,\dots,l \quad \text{et} \quad \xi=1,2,\dots,r-1 \quad (3.28)$$

$$\text{et } X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1 \geq 0, \quad \text{pour } j=1,2,\dots,r \quad \text{et} \quad \psi=1,2,\dots,l-1 \quad (3.29)$$

Ainsi, en considérant (3.23), (3.27), (3.28) et (3.29), on obtient directement les conditions de stabilité proposées dans le théorème 3.1 relâchées à l'aide du lemme 2.1 (chapitre 2). ■

### Remarque 3.2

La structure d'interconnexion floue pour (3.23) est une triple somme ( $h_h v$ ). Afin de tirer parti de la relaxation introduite par les variables de décision incluses dans la FLF (3.6), l'examen détaillé des indices et des produits de sommes contenues à l'intérieur de (3.23) permet de justifier l'affectation des structures d'interconnexion de  $X_{hv}^1$ ,  $X_{hh}^3$  et  $X_{hh}^4$ .

### Remarque 3.3

La réécriture de la dérivée de la matrice de Lyapunov  $\dot{X}_{hv}^1$  sous la forme (3.27) avec les conditions (3.28) et (3.29) permet :

- D'une part, de garantir que le théorème 3.1 inclut toujours les conditions quadratiques du théorème 2.3 (chapitre 2). En effet, si l'on considère la matrice de Lyapunov constante, c'est-à-dire  $X_{hv}^1 = X_1$ ,  $X_{hh}^3 = X_3$  et  $X_{hh}^4 = X_4$ , on retrouve alors directement les conditions quadratiques présentées au chapitre précédent (au changement de variable  $M_{jk} = K_{jk} X_1$  près).
- D'autre part, de réduire le pessimisme dû à la nécessité de connaître, a priori, les bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance. En effet, on constate ici que seules  $(l-1)$  et  $(r-1)$  au lieu de  $l$  et  $r$  de ces quantités doivent être connues à l'avance.
- Enfin, à cause de la nature des fonctions d'appartenance, les bornes inférieures de leurs dérivées temporelles ne peuvent être que négatives. Ainsi, les quantités  $-\left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_{\xi} (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_{\psi} (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right)$ , présente dans les premiers blocs diagonaux des inégalités (3.10) à (3.15) sont toujours positives ou nulles et conduisent à une réduction du conservatisme. Notons que ce type de relaxation a été introduit dans [Tanaka et al., 2007].

#### 3.2.4. Extension à la synthèse $H_{\infty}$ de lois de commande non quadratiques pour les descripteurs T-S incertains et perturbés

Tout comme le cas quadratique (chapitre 2), en plus des incertitudes paramétriques, il est possible de considérer que le descripteur (3.1) est soumis à des perturbations externes ( $\varphi(t) \neq 0$ ). Dans ce cadre, une approche robuste peut être proposée dans le cadre non quadratique par la minimisation d'un critère  $H_{\infty}$  permettant de garantir l'atténuation des perturbations externes selon un taux  $\gamma > 0$ . On rappelle le critère  $H_{\infty}$  présenté au chapitre précédent :

$$\int_0^T \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt < \gamma^2 \int_0^T \varphi^T(t) \varphi(t) dt \quad (3.30)$$

où  $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $Q = Q^T > 0$  est une matrice de pondération.

Le résultat conduisant à la synthèse  $H_{\infty}$  d'un contrôleur robuste pour les DTSIP est donné par le théorème suivant.



$$\left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta\bar{B}_h(t))\bar{K}_{hv})^T (\bar{X}_{h hv})^{-1} - \bar{E} \left( \overline{(\bar{X}_{h hv})^{-1}} \right) + \\ \left( (\bar{X}_{h hv})^{-1} \right)^T (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta\bar{B}_h(t))\bar{K}_{hv}) + \bar{Q} \end{array} \right) \quad (*) \\ \bar{W}_h^T (\bar{X}_{h hv})^{-1} \quad -\gamma^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (3.38)$$

La multiplication de (3.38) respectivement à gauche et à droite par  $\begin{bmatrix} \bar{X}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \bar{X} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  mène à :

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta\bar{B}_h(t))\bar{K}_{hv})\bar{X}_{h hv} \\ + \bar{X}_{h hv}^T (\bar{A}_{hv} + \Delta\bar{A}_{hv}(t) - (\bar{B}_h + \Delta\bar{B}_h(t))\bar{K}_{hv})^T \\ - (\bar{X}_{h hv})^T \bar{E} \left( \overline{(\bar{X}_{h hv})^{-1}} \right) \bar{X}_{h hv} + (\bar{X}_{h hv})^T \bar{Q} \bar{X}_{h hv} \end{array} \right) \quad (*) \\ \bar{W}_h^T \quad -\gamma^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (3.39)$$

De la même manière que la preuve du théorème 3.1 (à partir de (3.20)), on obtient :

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \Pi_{h hv}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & (*) & 0 \\ N_a^h X_{hv}^1 & -\tau_{h hv}^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^h K_{hv} & 0 & -\tau_{h hv}^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_e^v X_{hh}^3 & 0 & 0 & -\tau_{h hv}^3 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{h hv}^{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & \Pi_{h hv}^{(5,5)} & (*) & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^v X_{hh}^4 & -\tau_{h hv}^4 I & 0 & 0 \\ X_{hv}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_h^T & 0 & 0 & -\eta I \end{array} \right] < 0 \quad (3.40)$$

$$\text{où } \Pi_{h hv}^{(1,1)} = X_{hh}^3 + (X_{hh}^3)^T - \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_{\xi} (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_{\psi} (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right) + (X_{hv}^1)^T Q X_{hv}^1,$$

$$\Pi_{h hv}^{(5,1)} = (X_{hh}^4)^T + A_h X_{hv}^1 - E_v X_{hh}^3 - B_h K_{hv} \text{ et}$$

$$\Pi_{h hv}^{(5,5)} = -E_v X_{hh}^4 - (X_{hh}^4)^T E_v^T + \tau_{h hv}^1 H_a^h (H_a^h)^T + \tau_{h hv}^2 H_b^h (H_b^h)^T + (\tau_{h hv}^3 + \tau_{h hv}^4) H_e^v (H_e^v)^T$$

Enfin, en appliquant le complément de Schur [Boyd et al., 1994] sur le terme  $(X_{hv}^1)^T Q X_{hv}^1$ , on obtient directement les conditions données par le théorème 3.2 avec  $\eta = \gamma^2$ . ■

### 3.2.5. Discussion sur l'applicabilité des approches non quadratiques

La mise en œuvre des conditions  $\mathcal{LMI}$  de stabilité proposées dans les théorèmes précédents nécessite la connaissance a priori des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance [Jadbabaie, 1999][Tanaka et al., 2003][Tanaka et al., 2007]. Ce point constitue une des principales critiques des approches non quadratiques dans le cadre de l'analyse des systèmes flous de type T-S. En effet, la connaissance a priori de ces paramètres revient à supposer, avant résolution des problèmes  $\mathcal{LMI}$ , une borne hypothétique à la dynamique du système à étudier.

Dans [Jadbabaie, 1999], la résolution de ce problème se fait en deux étapes :

- La première porte sur la recherche des bornes supérieures des dérivées des fonctions d'appartenance par rapport aux variables d'état dont elles dépendent, c'est-à-dire  $\frac{\partial h_i(z)}{\partial z}$ . Notons que cette étape est toujours réalisable dans le cas des systèmes T-S.
- La deuxième étape consiste à calculer les bornes des dérivées des variables de prémisses  $\dot{z}(t)$  qui constituent les arguments des fonctions d'appartenance.

La méthode proposée par [Tanaka et al., 2003] est inspirée de celle proposée par [Jadbabaie, 1999]. Celle-ci repose sur la réécriture de la dérivée d'une fonction d'appartenance sous la forme d'une somme de deux fonctions multipliées par des scalaires. Ces dernières seront à rechercher de telle sorte que ces fonctions satisfassent les propriétés d'une somme convexe. Autrement dit, pour chaque fonction d'appartenance  $h_\alpha(\cdot)$ , la dérivée est calculée telle que

$\dot{h}_\alpha(\cdot) = \sum_{n=1}^2 w_{\alpha n}(\cdot) \delta_{\alpha n}$  avec  $\sum_{n=1}^2 w_{\alpha n}(\cdot) = 1$  et  $w_{\alpha n}(\cdot) \geq 0$ . Dans ce cas, les scalaires à rechercher sont donnés par  $\delta_{\alpha 1} = \max(\dot{h}_\alpha(\cdot))$  et  $\delta_{\alpha 2} = \min(\dot{h}_\alpha(\cdot))$ . De ce fait, l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  nécessitent à la fois la recherche de  $\delta_{\alpha 1}$  et  $\delta_{\alpha 2}$ .

L'applicabilité des méthodes proposées par [Jadbabaie, 1999][Tanaka et al., 2003] reste toutefois limitée au cas des systèmes autonomes. En effet, le calcul de ces bornes s'avère difficile et parfois impossible, en particulier lorsque l'on se place dans le cas de la stabilisation puisque l'on ne connaît pas a priori la dynamique de la boucle fermée. De ce fait, dans la plupart des cas, ces méthodes n'offrent pas d'autre choix que de supposer la valeur de ces bornes. Néanmoins, dans le cas particulier où l'une au moins des composantes du vecteur d'entrée est nulle, le calcul des valeurs exactes des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance devient possible [Tanaka et al., 2003]. Cependant, dans le cas des systèmes descripteurs autonomes ou forcés, la méthode précédente reste inapplicable.

Notons que d'autres méthodes, basées sur une fonction de Lyapunov candidate écrite sous la forme d'une intégrale curviligne, permettent de s'affranchir de la connaissance a priori de paramètres pour l'étude de la stabilité des systèmes T-S standards. Ainsi, dans [Rhee et Won, 2006] des conditions de stabilité ont été proposées sous forme de  $\mathcal{LMI}$ . Toutefois, dans le cadre de la stabilisation, le problème reste sous forme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires ( $\mathcal{BMI}$ ). Il est à souligner que ces approches ne peuvent être appliquées que dans un cadre non quadratique contraignant du point de vue du choix de la fonction de Lyapunov. Ainsi, une

extension de celle-ci a été proposée dans [Li et al., 2008], mais cette étude ne tient pas compte de la condition d'indépendance vis-à-vis du chemin nécessaire pour qu'une intégrale curviligne puisse être considérée comme une fonction candidate de Lyapunov. Ce point a été mis en évidence et une solution a été apportée dans un cas particulier très simple [Guelton et al., 2010]. Là encore, il est possible de conclure qu'une généralisation de cette approche à des systèmes plus complexes, par exemple les descripteurs, est peu judicieuse voire impossible.

Enfin, plus récemment une nouvelle approche a été proposée afin de s'affranchir de la recherche des bornes des dérivées des fonctions d'appartenance dans le cadre de l'étude de la stabilité locale des systèmes T-S standards [Guerra et Bernal, 2009] et incertains [Bernal et Guerra, 2009]. Celle-ci se base sur la réécriture développée des dérivées des matrices de Lyapunov incluses dans les conditions suffisantes de stabilité, voir par exemple le premier bloc de l'inégalité (3.21). Bien que très prometteuse, cette approche conduit à des résultats  $\mathcal{LMI}$  dans le cadre de la stabilité mais n'est, pour l'heure, pas applicable au cas de la synthèse de loi de commande et son extension aux cas des descripteurs reste un champ ouvert.

Au terme de cette discussion, on comprend bien que la recherche de ces valeurs exactes constitue un verrou à lever pour les prochaines études sur la stabilisation non quadratique des systèmes T-S. Ceci dit, même si un calcul exact ne peut être effectué, il est possible, dans la mesure où la résolution des théorèmes 3.1 et 3.2 est réalisée « hors ligne », de proposer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée relativement fiable de ces bornes. Cette méthode repose sur l'algorithme suivant :

1. **Choisir**  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  pour  $\xi=1,2,\dots,r-1$  et  $\psi=1,2,\dots,l-1$  avec des valeurs « suffisamment » négatives vis-à-vis de la dynamique attendue du système en boucle fermée et **choisir**  $\Delta\theta_\xi$  et  $\Delta\phi_\psi$  **les précisions souhaitées** pour les valeurs approchées de  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$ .
2. **Résoudre les conditions  $\mathcal{LMI}$**  données par les théorèmes 3.1 ou 3.2.
  - **Si** une solution est obtenue alors, aller à l'étape 3.
  - **Sinon recommencer à l'étape 2** en **augmentant** respectivement les valeurs absolues de  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  de  $\Delta\theta_\xi$  et  $\Delta\phi_\psi$ .
3. **Vérifier en simulation** si les hypothèses  $\dot{h}_\xi(z(t)) \geq \phi_\xi$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$  pour  $\xi=1,2,\dots,r-1$  et  $\psi=1,2,\dots,l-1$  sont vérifiées.
  - **Si oui** alors, aller à l'étape 4.
  - **Sinon** :
    - **Lors du premier passage dans l'étape 3, recommencer à l'étape 2** en **augmentant** respectivement les valeurs absolues de  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  de  $\Delta\theta_\xi$  et  $\Delta\phi_\psi$ .
    - **Si l'étape 4 a déjà été franchie alors** les valeurs optimales de  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  sont celles **mémorisées** au cycle précédent : **Fin de l'algorithme**.
4. **Mémoriser** les valeurs de  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  et retourner à l'étape 2 en **augmentant** respectivement les valeurs absolues de  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  de  $\Delta\theta_\xi$  et  $\Delta\phi_\psi$ .

### Remarque 3.4

Les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme précédent dépendent des conditions initiales choisies. De ce fait, ils constituent des solutions locales pour les problèmes de stabilité et de stabilisation.

### 3.2.6. Réduction des approches non quadratiques à un cadre quadratique étendu

Dans la section précédente, les limites des approches non quadratiques ont été discutées en termes d'applicabilité. En effet, celle-ci nécessitent la connaissance a priori ou la recherche des valeurs approchées des bornes inférieures  $\theta_\xi$  et  $\phi_\psi$  pour  $\xi = 1, 2, \dots, r-1$  et  $\psi = 1, 2, \dots, l-1$ , des dérivées des fonctions d'appartenance  $\dot{h}_\xi(z(t)) \geq \phi_\xi$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$ . Rappelons que les approches quadratiques proposées au chapitre 2 ne tiennent pas compte de ces variables puisque la matrice de Lyapunov à rechercher est constante et que, par conséquent, les conditions de stabilité  $\mathcal{LMI}$  ne dépendent pas de sa dérivée. En revanche, il est évident que l'approche non quadratique apporte une réduction du conservatisme des conditions  $\mathcal{LMI}$  puisqu'elle permet d'introduire de nouvelles variables de décision relatives à chacun des sous-systèmes qui composent le système T-S à étudier. La question qui se pose donc maintenant est de savoir si un compromis ne peut être trouvé afin de réduire le conservatisme de l'approche quadratique présentée au chapitre 2 et l'applicabilité des approches non quadratiques présentées ci-dessus ?

Une réponse à cette question a été apportée dans le cadre de la commande des descripteurs [Guerra et al., 2007] et peut-être appliquée au cas des DTSIP traités au cours de ce travail.

Afin d'illustrer ce propos, on rappelle la FQL employée au chapitre 2 :

$$V(x(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E} \bar{X}^{-1} \bar{x}(t) \quad (3.41)$$

$$\text{avec } \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \text{ constante et } \bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

et la FLF employée dans le cadre non quadratique considérée ci-dessus :

$$V(x(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E} (\bar{X}_{hvv})^{-1} \bar{x}(t) \quad (3.42)$$

$$\text{avec cette fois-ci } \bar{X}_{hvv} = \begin{bmatrix} X_{hv}^1 & 0 \\ X_{hh}^3 & X_{hh}^4 \end{bmatrix}.$$

Dès lors, on s'aperçoit au cours de la démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2 que seule la dérivée  $\dot{X}_{hv}^1$  du premier bloc de la matrice de Lyapunov non quadratique intervient dans l'obtention des conditions de stabilité. Ainsi, un compromis entre (3.41) et (3.42) consiste à choisir une fonction candidate de Lyapunov où  $X_1$  est constante tout en tirant parti de la

relaxation apportée par les variables de décision libres  $X_{hh}^3$  et  $X_{hh}^4$ . Dans ce cas, la fonction candidate de Lyapunov devient :

$$V(x(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E}(\bar{X}_{hh})^{-1} \bar{x}(t) \quad (3.43)$$

$$\text{avec } \bar{X}_{hhv} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_{hh}^3 & X_{hh}^4 \end{bmatrix}.$$

Notons par ailleurs que (3.43) est une fonction de Lyapunov quadratique dite « étendue » dans la mesure où elle permet d'introduire des variables de décision floues réduisant le conservatisme de l'approche quadratique proposée au chapitre 2. En effet, en développant (3.43) on obtient la fonction quadratique :

$$V(x(t)) = x^T(t) X_1^{-1} x(t) \quad (3.44)$$

En revanche, il reste toutefois acquis que l'approche non quadratique utilisant (3.41) reste la moins conservatrice puisque (3.43) n'en est qu'un cas particulier.

Ainsi, un corollaire « quadratique étendu » issu du théorème 3.1 peut être aisément obtenu dans le cadre de la stabilisation des DTSI et est donné par :

### Corollaire 3.1

Soient  $q = \min\{r, l\}$ . Le DTSI (3.1) avec  $(\varphi(t) = 0)$  est globalement asymptotiquement stabilisé via la loi de commande non-PDC (3.2) s'il existe des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_{ij}^3$ ,  $X_{ij}^4$ ,  $K_{jk}$  et des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_{ijk}^3$  et  $\tau_{ijk}^4$ , tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour :

$$Y_{iii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \quad (3.45)$$

$$Y_{iik} < 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \quad (3.46)$$

$$Y_{iji} + Y_{jii} < 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, q \text{ et } j < i \quad (3.47)$$

$$Y_{ijk} + Y_{jik} < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, l, j < i \text{ et } k \neq i \quad (3.48)$$

$$\text{avec } Y_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{ij}^3 + (X_{ij}^3)^T & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ N_a^i X_1 & -\tau_i^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^i K_{jk} & 0 & -\tau_{ijk}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_{ij}^3 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^3 I & 0 & 0 \\ (X_{ij}^4)^T + A_i X_1 - E_k X_{ij}^3 - B_i K_{jk} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{ijk}^{(5,5)} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_{ij}^4 & -\tau_{ijk}^4 I \end{bmatrix},$$

$$et \Theta_{ijk}^{(5,5)} = -E_k X_{ij}^4 - (X_{ij}^4)^T E_k^T + \tau_i^1 H_a^i (H_a^i)^T + \tau_{ijk}^2 H_b^i (H_b^i)^T + (\tau_{ijk}^3 + \tau_{ijk}^4) H_e^k (H_e^k)^T.$$

De même, un corollaire « quadratique étendu » du théorème 3.2 peut être aisément obtenu pour la synthèse de loi de commande  $H_\infty$  des DTSIP. Celui-ci est donné par :

**Corollaire 3.2**

Soit  $q = \min\{r, l\}$ . Le DTSIP en boucle fermée (3.5) est globalement asymptotiquement stable et admet un taux d'atténuation  $\gamma = \sqrt{\eta}$  au regard des perturbations externes s'il existe, pour tout  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_{ij}^3$ ,  $X_{ij}^4$ ,  $K_{jk}$  ainsi que des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_{ijk}^3$ ,  $\tau_{ijk}^4$  et un scalaire  $\eta > 0$  à minimiser tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées pour :

$$\Gamma_{iii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \tag{3.49}$$

$$\Gamma_{iik} < 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \tag{3.50}$$

$$\Gamma_{iji} + \Gamma_{jii} < 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, q \text{ et } j < i \tag{3.51}$$

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, l, j < i \text{ et } k \neq i \tag{3.52}$$

$$\text{où } \Gamma_{ijk} = \left[ \begin{array}{cccccc|c} \Upsilon_{ijk} & & & & & & (*) \\ \hline X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^T & 0 \\ & & & & & & -\eta I \end{array} \right] \tag{3.53}$$

avec  $\Upsilon_{ijk}$  définies dans le corollaire 3.1.

**3.3. Exemples numériques**

Afin de montrer l'intérêt des approches non quadratiques proposées dans ce chapitre, nous considérerons dans un premier temps l'exemple présenté au chapitre précédent à titre d'illustration de la réduction du conservatisme apporté. Puis, un second exemple sera proposé afin de comparer les approches non quadratiques et quadratiques étendues proposées au cours de ce chapitre.

**Exemple 3.1**

On rappelle le DTSIP étudié à titre d'exemple dans le cadre quadratique au chapitre 2. Celui-ci est donné par :

$$(E + \Delta E(t))\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \left( (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) \right) + W\varphi(t) \quad (3.54)$$

$$\text{où } h_1(x_1) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)}, \quad h_2(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2(t)}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + \frac{b}{2}(1-\delta) \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + b(1-\delta) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \Delta E(t) = H_e f_e(t) N_e,$$

$$\Delta A_i(t) = H_a^i f_a^i(t) N_a^i, \quad \Delta B_i(t) = H_b^i f_b^i(t) N_b^i \quad \text{avec } H_e = H_a^1 = H_a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b^1 = H_b^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$N_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad N_a^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b \frac{1+\delta}{2} \end{bmatrix}, \quad N_a^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b(1+\delta) \end{bmatrix} \quad \text{et } N_b^1 = N_b^2 = \frac{1}{2}a. \quad \delta = 0.2172$$

Afin d'appliquer les théorèmes 3.1 et 3.2 pour la synthèse non quadratique d'une loi de commande non-PDC, la connaissance a priori de la borne inférieure  $\phi_1$  de  $\dot{h}_1(z(t))$  est nécessaire. Notons que le descripteur (3.54) comporte des dynamiques inconnues (incertitudes paramétriques et perturbations externes). Il n'est par conséquent pas possible de déterminer avant la résolution des conditions  $\mathcal{LMI}$  la valeur exacte de cette borne puisque la dynamique de la boucle fermée ne peut-être connue à l'avance. Afin de contourner ce problème, on suppose arbitrairement  $\phi_1 = -1$ . Cette hypothèse devra alors être vérifiée a posteriori en simulation. Afin d'illustrer la réduction du conservatisme apportée par l'approche non quadratique (Théorème 3.1) vis-à-vis de l'approche quadratique (Théorème 2.3, chapitre 2), la faisabilité des conditions  $\mathcal{LMI}$  est étudiée pour différentes valeurs des paramètres du modèle  $a \in [-2.5 \ 1.2]$  et  $b \in [-10 \ 10]$ . Le résultat, présenté à la figure 3.2, est obtenu à l'aide de Matlab LMI Toolbox [Gahinet et al., 1995]. Celui-ci confirme que l'approche non quadratique est moins conservative que l'approche quadratique puisque le domaine de solution du théorème 2.3 est englobé dans celui du théorème 3.1.

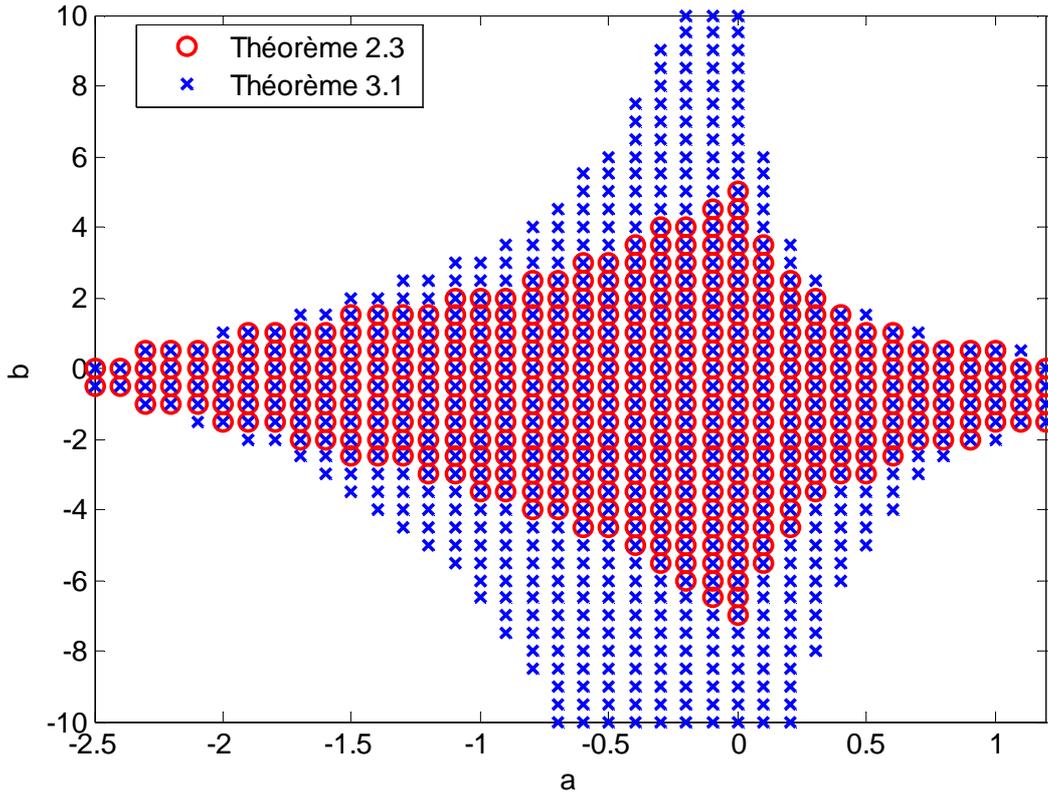


Figure 3.2. Domaines de solutions des théorèmes 3.1 (non quadratique) et 2.3 (quadratique).

Notons que pour  $a = -0.5$  et  $b = -6$  aucune solution ne peut-être apportée par l'approche quadratique. En revanche, un contrôleur adéquat garantissant la stabilité en boucle fermée de (3.5) (sans perturbations externes  $\varphi(t) = 0$ ) peut être synthétisé à l'aide des conditions du théorème 3.1. Le résultat est donné par les matrices et les scalaires suivants:

$$\begin{aligned}
 &K_{11} = [1336.7 \quad -297.1], \quad K_{21} = [1210 \quad -239], \quad \tau_{111}^1 = 86.5029, \quad \tau_{121}^1 = 172.2293, \quad \tau_{211}^1 = 172.2293, \\
 &\tau_{221}^1 = 276.1312, \quad \tau_{111}^2 = 124.1002, \quad \tau_{121}^2 = 153.8203, \quad \tau_{211}^2 = 153.8203, \quad \tau_{221}^2 = 200.0237, \\
 &\tau_{111}^3 = 86.5029, \quad \tau_{121}^3 = 93.669, \quad \tau_{211}^3 = 93.669, \quad \tau_{221}^3 = 51.009, \quad \tau_{111}^4 = 119.6498, \quad \tau_{121}^4 = 196.4902, \\
 &\tau_{211}^4 = 196.4902, \quad \tau_{221}^4 = 190.3497, \quad X_{11}^1 = \begin{bmatrix} 688.3091 & 76.5416 \\ 76.5416 & 33.9422 \end{bmatrix} \text{ et } X_{21}^1 = \begin{bmatrix} 659.1445 & 70.5973 \\ 70.5973 & 25.1796 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

La figure 3.3, montre l'évolution temporelle en boucle fermée du vecteur d'état, du signal de commande et de la dérivée de la fonction d'appartenance  $h_1(x_1(t))$  pour la condition initiale  $x(0)^T = [-3 \quad -0.5]^T$ .

De plus, la valeur minimale de la dérivée de la fonction d'appartenance  $h_1(x_1(t))$  trouvée après simulation est  $\min(\dot{h}_1(x_1(t))) = -0.6846$ . Ceci permet de vérifier l'hypothèse réalisée puisque  $\min(\dot{h}_1(x_1(t))) = -0.6846 > \phi_1 = -1$  en simulation.

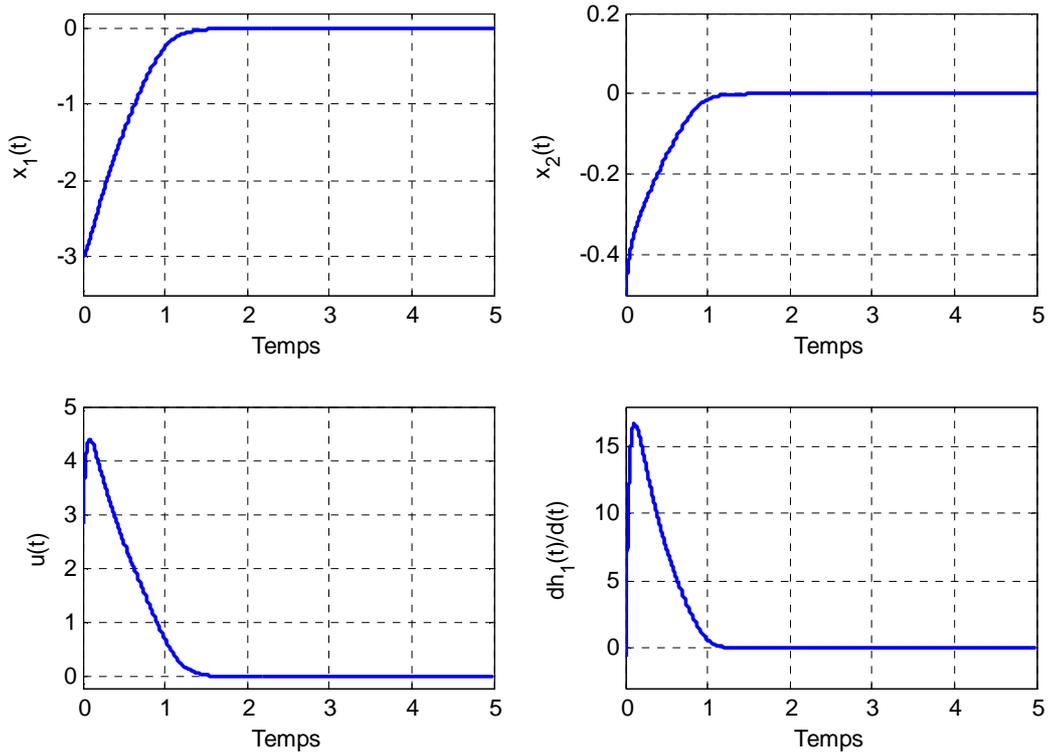


Figure 3.3. Evolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

Rappelons que le théorème 3.1 concerne la stabilisation des DTSI sans perturbation externe ( $\varphi(t)=0$ ). La synthèse  $H_\infty$  d'une loi de commande non-PDC pour les DTSIP ( $\varphi(t) \neq 0$ ) garantissant l'atténuation des perturbations peut-être réalisée via le théorème 3.2. La résolution des conditions de stabilité  $\mathcal{LMI}$  proposées dans le théorème 3.2 conduit aux résultats suivants

avec  $a = -1$ ,  $b = -4$ , la matrice de pondération  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $\phi_1 = -1$  :

$K_{11} = [0.8567 \quad -0.0784]$ ,  $K_{21} = [0.5537 \quad -0.1531]$ ,  $\tau_{111}^1 = 0.0096$ ,  $\tau_{121}^1 = 0.0324$ ,  
 $\tau_{211}^1 = 0.0324$ ,  $\tau_{221}^1 = 0.0797$ ,  $\tau_{111}^2 = 0.0857$ ,  $\tau_{121}^2 = 0.1072$ ,  $\tau_{211}^2 = 0.1072$ ,  $\tau_{221}^2 = 0.1958$ ,  
 $\tau_{111}^3 = 0.0096$ ,  $\tau_{121}^3 = 0.011$ ,  $\tau_{211}^3 = 0.011$ ,  $\tau_{221}^3 = 0.0093$ ,  $\tau_{111}^4 = 0.034$ ,  $\tau_{121}^4 = 0.0373$ ,  
 $\tau_{211}^4 = 0.0373$ ,  $\tau_{221}^4 = 0.061$ ,  $X_{11}^1 = \begin{bmatrix} 0.2736 & 0.0368 \\ 0.0368 & 0.0057 \end{bmatrix}$ ,  $X_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0.2736 & 0.0368 \\ 0.0368 & 0.0057 \end{bmatrix}$  et le taux  
d'atténuation  $\eta = 3.144$ .

A des fins de simulation, on considère une perturbation externe donnée par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unitaire. La figure 3.4, montre l'évolution temporelle en boucle fermée du vecteur d'état, du signal de commande et de la dérivée de la fonction d'appartenance  $h_1(x_1(t))$  pour la condition initiale  $x(0) = [1.4 \quad 0.2]^T$ .

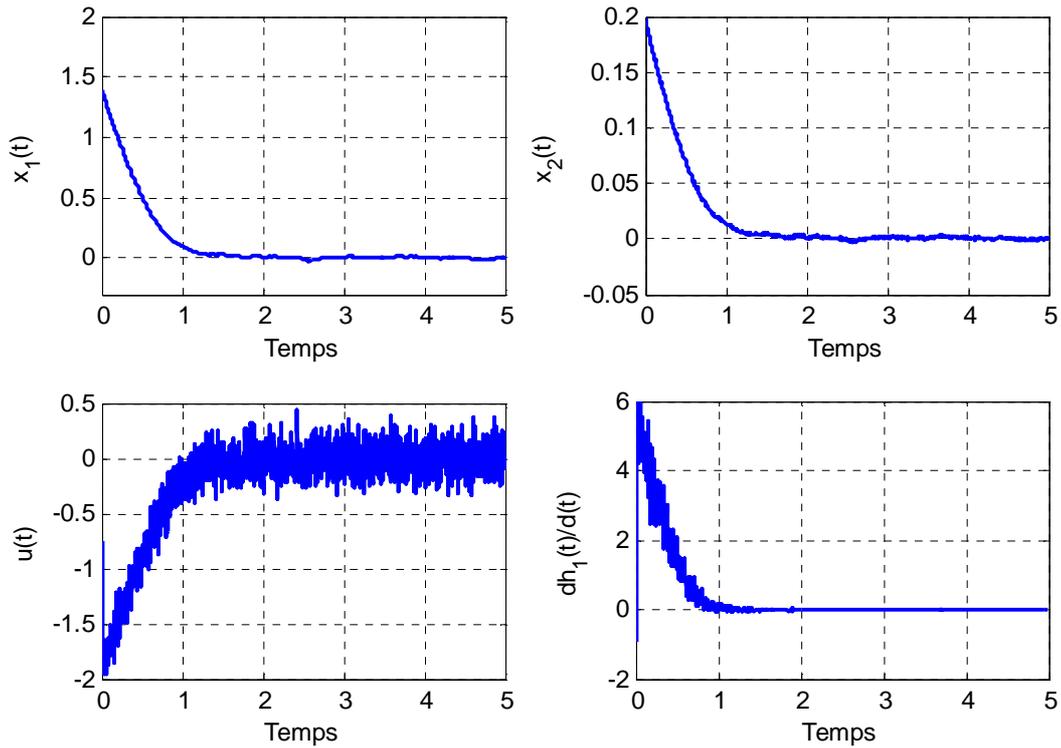


Figure 3.4. Evolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de la dérivée du  $h_1(x_1(t))$  du DTSIP (3.54) soumis à des perturbations externes.

Notons qu'une fois de plus, cette simulation permet de vérifier l'hypothèse réalisée puisque  $\min(\dot{h}_1(x_1(t))) = -0.9527 > \phi_1 = -1$ .

### Exemple 3.2

La résolution des conditions de stabilité non quadratiques nécessite de choisir arbitrairement des bornes de variables dont on ne peut objectivement pas connaître l'exactitude avant d'avoir réalisé la synthèse d'une loi de commande et, par conséquent, de connaître la dynamique finale du système en boucle fermée. Ce point constitue la principale critique des approches non quadratiques émises dans la littérature. Afin de contourner ce problème, des approches quadratiques étendues ont été proposées aux corollaires 3.1 et 3.2. Afin d'illustrer la perte de conservatisme apportée par la réduction des conditions non quadratiques au cas quadratique étendu, on considère l'exemple numérique suivant :

$$\sum_{k=1}^2 v_k(z(t))(E_k + \Delta E_k(t))\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + W_i\varphi(t)) \quad (3.55)$$

où  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ , avec  $a$  et  $b$  sont deux paramètres du modèle et les matrices d'incertitudes données par

$\Delta E_k(t) = H_e^k f_e^k(t) N_e^k$ ,  $\Delta A_i(t) = H_a^i f_a^i(t) N_a^i$  et  $\Delta B_i(t) = H_b^i f_b^i(t) N_b^i$  avec  $H_a^1 = H_a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  
 $N_a^1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$ ,  $N_a^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $H_e^1 = H_e^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $N_e^1 = [0.2 \ 0.1]$ ,  $N_e^2 = [0.25 \ 0.15]$ ,  
 $H_b^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $H_b^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $N_b^1 = 0.1$ ,  $N_b^2 = 0.15$  et les fonctions scalaires d'incertitudes bornées  
telles que  $(f_{\xi=\{a,b,e\}}^{\vartheta=\{i,ou,k\}}(t))^2 \leq 1$ .

La figure 3.5 montre les domaines de faisabilité obtenus à partir du théorème 3.1 et du corollaire 3.1 pour  $a \in [-6.3 \ 6]$ ,  $b \in [88 \ 95]$  et  $Q=I$ . Bien entendu, on constate une réduction du conservatisme dans le cadre non quadratique.

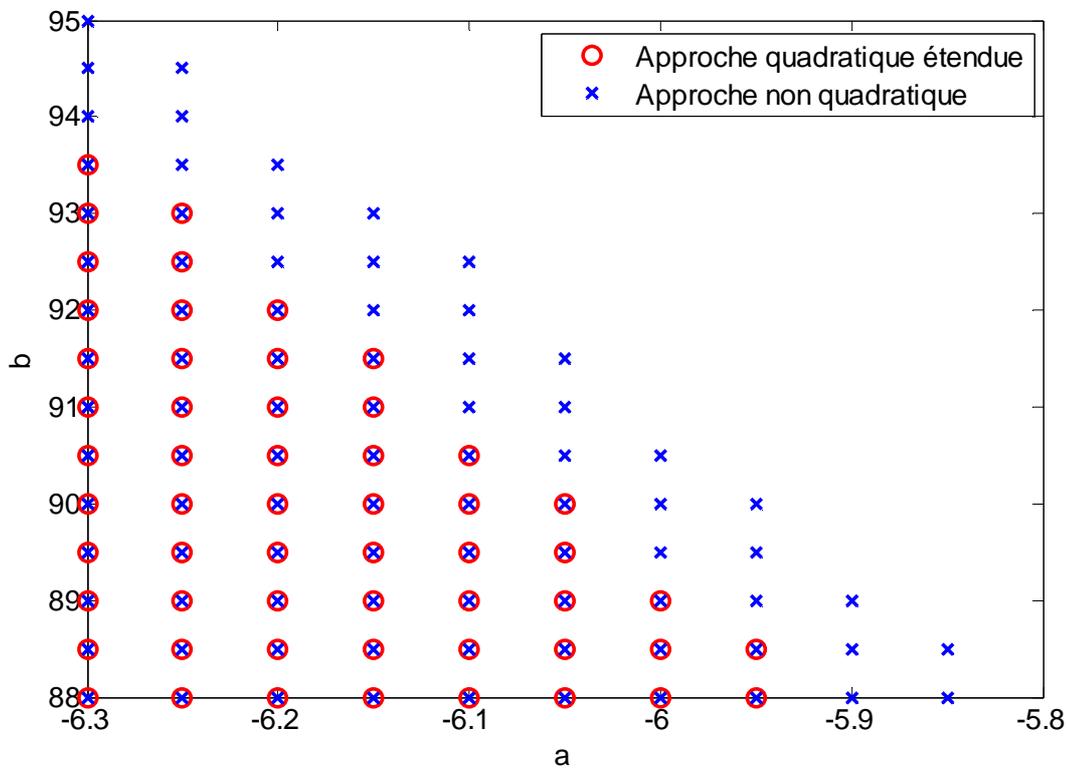


Figure 3.5. Domaines de faisabilité du théorème 3.1 et du corollaire 3.1.

### 3.4. Conclusion

Au cours de ce chapitre des conditions de stabilisation non quadratiques ont été proposées pour la classe des DTSIP permettant la synthèse de lois de commande non-PDC. Au travers d'un premier exemple la pertinence en termes de conservatisme a été démontrée vis-à-vis des conditions  $\mathcal{LMI}$  exprimées dans au chapitre 2. Toutefois, les limites des approches non quadratiques ont été discutées et concernent notamment leur applicabilité pour la résolution des  $\mathcal{LMI}$  lorsqu'il n'est pas possible de connaître par avance la dynamique attendue de la boucle fermée. En effet, l'étude de la stabilité et de la stabilisation non quadratique des systèmes T-S

nécessite la connaissance a priori des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance qu'il n'est pas toujours aisé de déterminer en pratique. Néanmoins, la synthèse de loi de commande s'effectuant hors ligne, il est toujours possible de supposer ces valeurs avant la résolution des conditions  $\mathcal{LMI}$  puis de vérifier a posteriori les hypothèses réalisées en simulation. Afin de pallier la recherche de ces paramètres en pratique, un compromis entre les approches non quadratiques et quadratiques a été étudié sur la base des travaux de [Guerra et al., 2007]. Ce compromis permet d'obtenir des conditions de stabilité dites quadratiques étendues. Evidemment, l'emploi de ce compromis reste plus conservatif que l'approche non quadratique. Ceci dit, il s'agit là du « prix à payer » pour une meilleure applicabilité lorsqu'il n'est pas possible de vérifier les hypothèses réalisées en simulation.

A ce stade, dans le but de réduire le conservatisme des conditions de stabilité des DTSIP, une première approche structurelle a été proposée au chapitre 2 sous la forme d'un lemme de relaxation. Ensuite, l'extension de ces conditions de stabilité au cadre non quadratique a été proposée au cours de ce chapitre. Notons qu'une autre source de conservatisme des conditions  $\mathcal{LMI}$  réside dans le couplage entre les gains de commande et les matrices du système à commander résultant de l'écriture de la dynamique de la boucle fermée. Afin de contourner ce problème de nouvelles approches, basées sur une réécriture redondante de la boucle fermée [Chen, 2004][Peaucelle, 2007][Tanaka et al., 2007], seront proposées dans le chapitre suivant.



# Approches redondantes pour la stabilisation non quadratique des modèles descripteurs T-S incertains et perturbés

---

---

4.1. Introduction .....	80
4.2. Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains : approche redondante .....	80
4.2.1. Rappels sur la boucle fermée « classique » et formulation de la boucle fermée « redondante » .....	80
4.2.2. Conditions LMI non quadratiques pour la stabilisation des descripteurs T-S incertains : approche redondante .....	83
4.2.3. Stabilisation non quadratique robuste des descripteurs T-S incertains et perturbés : approche redondante .....	89
4.3. Discussion et remarques sur le coût de calcul des approches redondantes.....	93
4.4. Exemples numériques et simulations.....	95
4.4.1. Exemple 1 : intérêt des approches redondantes.....	95
4.4.2. Exemple 2 : stabilisation robuste d'un DTSIP .....	97
4.5. Conclusion.....	100

## 4.1. Introduction

A ce stade les problèmes de la stabilité et de la stabilisation ont été traités. Dans un premier temps, des conditions quadratiques ont été proposées (chapitre 2). Puis, une extension au cadre non quadratique a été étudiée au chapitre 3 afin de fournir des conditions moins conservatives. Pour ce faire, par le biais d'une fonction candidate non quadratique de Lyapunov, encore appelée fonction de Lyapunov floue (FLF), une méthodologie de synthèse de lois de commande robustes non-PDC modifiée a été proposée pour la classe des DTSIP. Par ailleurs, les limites des approches non quadratiques ont été discutées et des corollaires, conduisant à un compromis en termes de conservatisme, ont été établis afin de faciliter la résolution des conditions  $\mathcal{LMI}$  lorsqu'il n'est pas possible de connaître par avance la dynamique de la boucle fermée attendue. Notons que, toutes ces approches sont basées sur une écriture de la dynamique de la boucle fermée faisant intervenir des termes croisés entre les matrices de gains de commande et les matrices d'entrées du système considéré ( $\bar{B}_h \bar{K}_{hv}$  et  $\Delta \bar{B}_h(t) \bar{K}_{hv}$ ). Bien que rencontré dans la plupart des études concernant la stabilisation des modèles flous de type T-S [Tanaka et Wang, 2001], ce type de couplage reste une source de conservatisme lors de la résolution des problèmes  $\mathcal{LMI}$  [Sala, 2009]. L'objectif de ce chapitre est d'étendre les conditions non quadratiques proposées au chapitre précédent afin de réduire le conservatisme lié au couplage des matrices d'entrées et de gains de commande. Pour ce faire, une propriété de redondance analytique des systèmes descripteurs sera utilisée [Peaucelle, 2007]. Dans le contexte de la commande des modèles T-S, cette propriété a été utilisée par [Chen, 2004][Tanaka et al., 2007] afin de fournir des conditions de stabilité non quadratiques pour les modèles T-S standards. En effet, celle-ci permet de faciliter l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  dans le cadre non quadratique ainsi que de réduire le coût de calcul dans le cadre quadratique [Tanaka et al., 2007].

Dans un premier temps, la dynamique de la boucle fermée sera proposée sous forme redondante. Ensuite, des conditions  $\mathcal{LMI}$  seront établies afin de permettre la synthèse de lois de commande pour la classe des descripteurs T-S incertains (DTSI). Puis, ces conditions seront étendues à la classe des descripteurs incertains et perturbés par l'emploi d'un critère  $H_\infty$ . Enfin, deux exemples numériques seront considérés pour montrer l'efficacité des approches proposées.

## 4.2. Stabilisation non quadratique des descripteurs T-S incertains : approche redondante

### 4.2.1. Rappels sur la boucle fermée « classique » et formulation de la boucle fermée « redondante »

On rappelle la classe générique des DTSIP présentée dans le chapitre précédent. Celle-ci représente les descripteurs décrits par l'équation d'état suivante :

$$\sum_{k=1}^l v_k(z) (E_k + \Delta E_k(t)) \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) \left( (A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + (B_i + \Delta B_i(t)) u(t) + W_i \varphi(t) \right) \quad (4.1)$$

Avec les grandeurs et matrices définies au chapitre 2 (voir équation (2.13)).

De plus, dans le chapitre précédent, une loi de commande non-PDC modifiée a été proposée pour la stabilisation non quadratique des DTSIP. Celle-ci est donnée par [Bouarar et al., 2008a]:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) K_{ik} \left( \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) X_{ik}^1 \right)^{-1} x(t) \quad (4.2)$$

où  $K_{ik}$  et  $X_{ik}^1 > 0$  sont des matrices de dimensions appropriées à rechercher.

Ainsi, en substituant la loi de commande non-PDC (4.2) dans (4.1) les conditions proposées aux théorèmes 3.1, 3.2 et leurs corollaires 3.1 et 3.2 ont été obtenus sur la base de l'écriture de la dynamique de la boucle fermée dite « classique » (BFC) donnée avec les notations définies au chapitre 2 sous la forme :

$$(E_v + \Delta E_v(t)) \dot{x}(t) = \left( (A_h + \Delta A_h(t)) - (B_h + \Delta B_h(t)) K_{hv} (X_{hv}^1)^{-1} \right) x(t) + W_h \varphi(t) \quad (4.3)$$

Dès lors, on constate qu'il existe un couplage au sein de la boucle fermée (4.3) entre les entrées et l'état matérialisé par le produit  $(B_h + \Delta B_h(t)) K_{hv}$  que l'on retrouve dans les conditions  $\mathcal{LM}$  proposées aux théorèmes 3.1, 3.2 et leurs corollaires 3.1 et 3.2. Notons, par ailleurs, que ce couplage conduit à une structure d'interconnexion floue de la boucle fermée exprimée sous la forme d'une triple somme  $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) \dots$ . Celle-ci constitue donc une source de conservatisme lors de la résolution des problèmes  $\mathcal{LM}$ . De ce fait, le découplage des termes croisés  $(B_h + \Delta B_h(t)) K_{hv}$  au sein de l'expression de la boucle fermée permettrait de réduire le conservatisme des conditions de stabilisation non quadratique proposées au chapitre précédent. Afin de résoudre ce problème, nous nous baserons dans la suite sur la propriété de redondance des systèmes descripteurs.

On rappelle que la classe des systèmes descripteurs, représentés par un ensemble d'équations différentielles algébriques, est plus générale que la classe des systèmes dynamiques standards représentés par un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Ainsi, les descripteurs permettent, outre leur faculté de décrire les systèmes singuliers [Dai, 1989], de décrire de nombreux modèles de connaissances physiques écrits sous forme ordinaire et dont l'exploitation nécessite l'ajout de contraintes statiques [Luenberger, 1977]. C'est le cas par exemple des mécanismes poly-articulés comportant des parallélismes structurels et dont les équations du mouvement (Euler-Newton) doivent être enrichies par un ensemble de contraintes non holonomes afin d'en décrire l'évolution [Khalil et Dombre, 1999][Merlet, 1997]. Ainsi, c'est cette propriété que l'on appelle « redondance des descripteurs ». En effet, l'enrichissement d'un système par des contraintes statiques (contraintes non holonomes...) ou par l'addition de degrés de liberté virtuels ou réels (capteurs multiples, structures mécaniques parallèles...) constitue une redondance d'information vis-à-vis des modèles de connaissance issus des principes fondamentaux de la physique.

Dans le cadre de la commande par retour d'état des systèmes T-S standards, des conditions de stabilisation non quadratiques, basées sur une réécriture redondante de la boucle fermée, ont été proposées [Tanaka et al., 2007]. Celles-ci permettent notamment de réduire le conservatisme ainsi que le coût de calcul (diminution du nombre de contraintes) des conditions  $\mathcal{LM}$  classiques [Tanaka et al., 2003] par le biais du découplage des matrices d'entrées et de sorties. Dans la suite, nous proposons d'étendre cette technique à la commande robuste des DTSIP représentés par (4.1).

On constate que l'étude de la stabilisation des DTSIP fait intervenir, à la fois un ensemble d'équations différentielles représentées par le descripteur en boucle ouverte (4.1) et une loi de commande par retour d'état non-PDC donnée par (4.2). Notons que cette dernière constitue une équation statique en  $u(t)$ , c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la dynamique  $\dot{u}(t)$  du signal d'entrée. De ce fait, il est possible de réécrire (4.2) en introduisant artificiellement une « dynamique virtuelle » telle que :

$$0\dot{u}(t) = u(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) K_{ik} \left( \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) X_{ik}^1 \right)^{-1} x(t) \quad (4.4)$$

où  $0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est une matrice nulle.

Afin de réécrire la dynamique de la boucle fermée sous forme redondante, on considère le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad u^T(t)]^T$ . Notons que celui-ci introduit un degré de liberté supplémentaire (signal de commande), dit redondant, par rapport au vecteur d'état augmenté utilisé pour l'écriture de la BFC (4.3). Ainsi, la dynamique de la boucle fermée sous forme redondante (BFR) peut-être exprimée, avec les notations définies au chapitre 2, par :

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{G}_{hv} + \Delta\tilde{G}_{hv}(t))\tilde{x}(t) + \tilde{W}_h\varphi(t) \quad (4.5)$$

$$\text{où } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{G}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ A_h & -E_v & B_h \\ K_{hv}(X_{hv}^1)^{-1} & 0 & I \end{bmatrix}, \Delta\tilde{G}_{hv}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta A_h(t) & -\Delta E_v(t) & \Delta B_h(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\tilde{W}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ W_h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### Remarque 4.1

S'il peut-être établi que le descripteur (4.5) est stable, c'est-à-dire  $x(t)$  et  $u(t)$  convergent vers zéro, alors  $K_{hv}$  et  $(X_{hv}^1)^{-1}$  existent et le DTSIP (4.1) est stabilisé par la loi de commande non-

PDC modifiée (4.2). De ce fait, la commande  $u(t)$  est bornée et sa première dérivée  $\dot{u}(t)$  existe et est également bornée.

### Remarque 4.2

L'écriture redondante de la boucle fermée permet de s'affranchir du couplage entre les gains de commande et les matrices d'entrées. En effet, on constate que dans (4.5) le produit  $(B_h + \Delta B_h(t))K_{lv}$  présent dans la BFC (4.3) n'est plus. Cette particularité permet également de constater que l'expression mathématique de la BFR (4.5) est exprimée par une double somme  $\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t))v_k(z(t))\dots$  contrairement à la BFC (4.3) qui en comporte trois. De ce fait, la BFR peut conduire à des conditions de stabilisation  $\mathcal{LMI}$  (indépendantes des fonctions d'appartenance) moins conservatives que dans le cadre de la stabilisation via la BFC (voir la preuve du lemme 4.1).

### 4.2.2. Conditions $\mathcal{LMI}$ non quadratiques pour la stabilisation des descripteurs T-S incertains : approche redondante

En gardant la même logique de présentation que dans les chapitres précédents, dans cette section, on s'intéresse tout d'abord au problème de la stabilisation de la classe des DTSI décrite par (4.1) sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ). La solution apportée à ce problème, sur la base de l'écriture de la BFR (4.5), est présentée en termes de  $\mathcal{LMI}$  dans le théorème suivant. Notons que ces conditions  $\mathcal{LMI}$  constituent une généralisation à la synthèse de commande robuste des conditions redondantes pour la classe des descripteurs T-S proposée dans [Bouarar et al. 2009 a,b].

#### ***Théorème 4.1 :***

*Soient  $q = \min\{r, l\}$  et  $\forall z(t), \xi \in \{1, 2, \dots, r-1\}, \psi \in \{1, 2, \dots, l-1\}, \dot{h}_\xi(z(t)) \geq \phi_\xi$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$ . Le DTSI (4.1) avec ( $\varphi(t) = 0$ ) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC modifiée (4.2) s'il existe des matrices  $X_{jk}^1 = (X_{jk}^1)^T > 0, X_{ij}^4, X_{ij}^5, X_{ij}^6, X_{jk}^7, X_{jk}^8, X_{jk}^9, K_{ik}$  ainsi que des scalaires positifs  $\tau_{ijk}^1, \tau_{ijk}^2, \tau_{ijk}^3, \tau_{ijk}^4, \tau_{ijk}^5, \tau_{ijk}^6$  et  $\tau_{ijk}^7$ , tels que les conditions  $\mathcal{LMI}$  suivantes soient vérifiées :*

$$Y_{iii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \quad (4.6)$$

$$Y_{iik} < 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \quad (4.7)$$

$$Y_{iji} + Y_{jii} < 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, q \text{ et } j < i \quad (4.8)$$

$$Y_{ijk} + Y_{jik} < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r, \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad j < i \text{ et } k \neq i \quad (4.9)$$

$$X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l \text{ et } \xi = 1, 2, \dots, r-1 \quad (4.10)$$

$$X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1 \geq 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r \text{ et } \psi = 1, 2, \dots, l-1 \quad (4.11)$$

avec

$$Y_{ijk} = \begin{bmatrix} \Xi_{ijk}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_a^i X_{jk}^1 & -\tau_{ijk}^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_{ij}^4 & 0 & -\tau_{ijk}^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^i X_{jk}^7 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{ijk}^{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{ijk}^{(5,5)} & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_{ij}^5 & -\tau_{ijk}^4 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^i X_{jk}^8 & 0 & -\tau_{ijk}^5 I & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{ijk}^{(8,1)} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{ijk}^{(8,5)} & 0 & 0 & X_{jk}^9 + (X_{jk}^9)^T & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_{ij}^6 & -\tau_{ijk}^6 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^i X_{jk}^9 & 0 & -\tau_{ijk}^7 I \end{bmatrix}$$

où  $\Xi_{ijk}^{(1,1)} = X_{ij}^4 + (X_{ij}^4)^T - \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_{\xi} (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_{\psi} (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right)$ ,  $\Xi_{ijk}^{(8,1)} = (X_{ij}^6)^T + K_{ik} + X_{jk}^7$ ,

$\Xi_{ijk}^{(5,1)} = A_i X_{jk}^1 - E_k X_{ij}^4 + (X_{ij}^5)^T + B_i X_{jk}^7$ ,  $\Xi_{ijk}^{(8,5)} = -(X_{ij}^6)^T E_k^T + (X_{jk}^9)^T B_i^T + X_{jk}^8$  et

$\Xi_{ijk}^{(5,5)} = -E_k X_{ij}^5 - (X_{ij}^5)^T E_k^T + B_i X_{jk}^8 + (X_{jk}^8)^T B_i^T + \tau_{ijk}^1 H_a^i (H_a^i)^T + (\tau_{ijk}^2 + \tau_{ijk}^4) H_e^k (H_e^k)^T$   
 $+ (\tau_{ijk}^3 + \tau_{ijk}^5) H_b^i (H_b^i)^T + \tau_{ijk}^6 (H_e^k)^T H_e^k + \tau_{ijk}^7 (H_b^i)^T H_b^i$

**Preuve :**

Pour étudier la stabilité de la dynamique de la BFR (4.5) on considère la FLF suivante :

$$V(x(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_{hvh})^{-1} \tilde{x}(t) \quad (4.12)$$

avec la condition de symétrie :

$$\tilde{E} (\tilde{X}_{hvh})^{-1} = \left( (\tilde{X}_{hvh})^{-1} \right)^T \tilde{E} > 0 \quad (4.13)$$

Dans la suite de cette preuve, afin d'alléger les expressions mathématiques, on considère la

$$\text{notation } \tilde{X}_{h hv} = \begin{bmatrix} X_{hv}^1 & X_{(\cdot)}^2 & X_{(\cdot)}^3 \\ X_{hh}^4 & X_{hh}^5 & X_{hh}^6 \\ X_{hv}^7 & X_{hv}^8 & X_{hv}^9 \end{bmatrix} \text{ avec } X_{hv}^1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, X_{(\cdot)}^2 \in \mathbb{R}^{n \times n}, X_{(\cdot)}^3 \in \mathbb{R}^{n \times m}, X_{hh}^4 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ X_{hh}^5 \in \mathbb{R}^{n \times n}, X_{hh}^6 \in \mathbb{R}^{n \times m}, X_{hv}^7 \in \mathbb{R}^{m \times n}, X_{hv}^8 \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } X_{hv}^9 \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

D'après la condition de symétrie (4.13) et après congruence par les matrices  $\tilde{X}_{h hv}^T$  et  $\tilde{X}_{h hv}$ , on obtient  $X_{hv}^1 = (X_{hv}^1)^T > 0$ ,  $X_{(\cdot)}^2 = 0$ ,  $X_{(\cdot)}^3 = 0$  et,  $X_{hh}^4 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{hh}^5 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X_{hh}^6 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $X_{hv}^7 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X_{hv}^8 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $X_{hv}^9 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  des variables de décision libres, d'où :

$$\tilde{X}_{h hv} = \begin{bmatrix} X_{hv}^1 & 0 & 0 \\ X_{hh}^4 & X_{hh}^5 & X_{hh}^6 \\ X_{hv}^7 & X_{hv}^8 & X_{hv}^9 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Notons qu'une fois de plus des structures d'interconnexions floues ont été attribuées aux variables de décision constituant la matrice de Lyapunov au sein de la FLF (4.12). Bien entendu, ce choix n'est pas arbitraire et sera justifié dans la suite de cette preuve. Par ailleurs, afin de garantir l'inversibilité de  $\tilde{X}_{h hv}$ , la matrice bloc  $\begin{bmatrix} X_{hh}^5 & X_{hh}^6 \\ X_{hv}^8 & X_{hv}^9 \end{bmatrix}$  doit être inversible.

La dynamique de la BFR (4.5) est globalement asymptotiquement stable si la dérivée de (4.12) le long des trajectoires du système est négative, c'est-à-dire si :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_{h hv})^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_{h hv})^{-1} \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{E} \left( \overline{(\tilde{X}_{h hv})^{-1}} \right) \tilde{x}(t) < 0 \quad (4.15)$$

En considérant (4.5), l'inégalité (4.15) est vérifiée pour tout  $\tilde{x}(t)$  si :

$$\left( \tilde{G}_{hv} + \Delta \tilde{G}_{hv}(t) \right)^T (\tilde{X}_{h hv})^{-1} + \left( (\tilde{X}_{h hv})^{-1} \right)^T \left( \tilde{G}_{hv} + \Delta \tilde{G}_{hv}(t) \right) + \tilde{E} \left( \overline{(\tilde{X}_{h hv})^{-1}} \right) < 0 \quad (4.16)$$

Soit, après multiplication à gauche et à droite respectivement par  $\tilde{X}_{h hv}^T$  et  $\tilde{X}_{h hv}$  si :

$$\tilde{X}_{h hv}^T \left( \tilde{G}_{hv} + \Delta \tilde{G}_{hv}(t) \right)^T + \left( \tilde{G}_{hv} + \Delta \tilde{G}_{hv}(t) \right) \tilde{X}_{h hv} + \tilde{E}^T \tilde{X}_{h hv} \left( \overline{(\tilde{X}_{h hv})^{-1}} \right) \tilde{X}_{h hv} < 0 \quad (4.17)$$

On rappelle que  $-\left( \overline{(\tilde{X}_{h hv})^{-1}} \right) = (\tilde{X}_{h hv})^{-1} \dot{\tilde{X}}_{h hv} (\tilde{X}_{h hv})^{-1}$ , voir chapitre 3 équation (3.19), (4.17) devient :

$$\tilde{X}_{h hv}^T \left( \tilde{G}_{hv} + \Delta \tilde{G}_{hv}(t) \right)^T + \left( \tilde{G}_{hv} + \Delta \tilde{G}_{hv}(t) \right) \tilde{X}_{h hv} - \tilde{E}^T \dot{\tilde{X}}_{h hv} < 0 \quad (4.18)$$

Soit, en considérant les matrices définies en (4.5) et (4.14) :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X_{hv}^1 & 0 & 0 \\ X_{hh}^4 & X_{hh}^5 & X_{hh}^6 \\ X_{hv}^7 & X_{hv}^8 & X_{hv}^9 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ A_h + \Delta A_h(t) & -E_v - \Delta E_v(t) & B_h + \Delta B_h(t) \\ K_{hv} (X_{hv}^1)^{-1} & 0 & I \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ A_h + \Delta A_h(t) & -E_v - \Delta E_v(t) & B_h + \Delta B_h(t) \\ K_{hv} (X_{hv}^1)^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{hv}^1 & 0 & 0 \\ X_{hh}^4 & X_{hh}^5 & X_{hh}^6 \\ X_{hv}^7 & X_{hv}^8 & X_{hv}^9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{X}_{hv}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

D'après la définition des incertitudes structurelles (chapitre 2),  $\Delta E_k(t) = H_e^k f_e^k(t) N_e^k$ ,  $\Delta A_i(t) = H_a^i f_a^i(t) N_a^i$  et  $\Delta B_i(t) = H_b^i f_b^i(t) N_b^i$  avec  $(f_e^k(t))^T f_e^k(t) \leq I$ ,  $(f_a^i(t))^T f_a^i(t) \leq I$  et  $(f_b^i(t))^T f_b^i(t) \leq I$ . De ce fait, l'inégalité (4.19) peut-être majorée à l'aide du lemme 2 (annexe A) par :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{(1,1)} & (*) & (*) \\ A_h X_{hv}^1 - E_v X_{hh}^4 + (X_{hh}^5)^T + B_h X_{hv}^7 & \Gamma_{(2,2)} & (*) \\ (X_{hh}^6)^T + K_{hv} + X_{hv}^7 & -(X_{hh}^6)^T E_v^T + (X_{hv}^9)^T B_h^T + X_{hv}^8 & \Gamma_{(3,3)} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{(1,1)} &= X_{hh}^4 + (X_{hh}^4)^T - \dot{X}_{hv}^1 + (\tau_{hhv}^1)^{-1} (X_{hv}^1)^T (N_a^h)^T N_a^h X_{hv}^1 \\ &+ (\tau_{hhv}^2)^{-1} (X_{hh}^4)^T (N_e^v)^T N_e^v X_{hh}^4 + (\tau_{hhv}^3)^{-1} (X_{hv}^7)^T (N_b^h)^T N_b^h X_{hv}^7, \\ \Gamma_{(2,2)} &= -E_v X_{hh}^5 - (X_{hh}^5)^T E_v^T + B_h X_{hv}^8 + (X_{hv}^8)^T B_h^T + \tau_{hhv}^1 H_a^h (H_a^h)^T \\ &+ (\tau_{hhv}^2 + \tau_{hhv}^4) H_e^v (H_e^v)^T + (\tau_{hhv}^3 + \tau_{hhv}^5) H_b^h (H_b^h)^T + \tau_{hhv}^{-4} (X_{hh}^5)^T (N_e^v)^T N_e^v X_{hh}^5 \\ &+ (\tau_{hhv}^5)^{-1} (X_{hv}^8)^T (N_b^h)^T N_b^h X_{hv}^8 + \tau_{hhv}^6 (H_e^v)^T H_e^v + \tau_{hhv}^7 (H_b^h)^T H_b^h \end{aligned}$$

$$\text{et } \Gamma_{(3,3)} = X_{hv}^9 + (X_{hv}^9)^T + (\tau_{hhv}^6)^{-1} (X_{hh}^6)^T (N_e^v)^T N_e^v X_{hh}^6 + (\tau_{hhv}^7)^{-1} (X_{hv}^9)^T (N_b^h)^T N_b^h X_{hv}^9.$$

En appliquant le complément de Schur sur (4.20), on obtient :

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc}
 \Theta_{hhv}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 N_a^h X_{hv}^1 & -\tau_{hhv}^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 N_e^v X_{hh}^4 & 0 & -\tau_{hhv}^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 N_b^h X_{hv}^7 & 0 & 0 & -\tau_{hhv}^3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \Theta_{hhv}^{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{hhv}^{(5,5)} & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^v X_{hh}^5 & -\tau_{hhv}^4 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^h X_{hv}^8 & 0 & -\tau_{hhv}^5 I & 0 & 0 & 0 \\
 \Theta_{hhv}^{(8,1)} & 0 & 0 & 0 & \Theta_{hhv}^{(8,5)} & 0 & 0 & X_{hv}^9 + (X_{hv}^9)^T & (*) & (*) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^v X_{hh}^6 & -\tau_{hhv}^6 I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^h X_{hv}^9 & 0 & -\tau_{hhv}^7 I
 \end{array} \right] < 0 \quad (4.21)$$

où  $\Theta_{hhv}^{(1,1)} = X_{hh}^4 + (X_{hh}^4)^T - \dot{X}_{hv}^1$ ,  $\Theta_{hhv}^{(5,1)} = A_h X_{hv}^1 - E_v X_{hh}^4 + (X_{hh}^5)^T + B_h X_{hv}^7$ ,  
 $\Theta_{hhv}^{(8,1)} = (X_{hh}^6)^T + K_{hv} + X_{hv}^7$ ,  $\Theta_{hhv}^{(8,5)} = -(X_{hh}^6)^T E_v^T + (X_{hv}^9)^T B_h^T + X_{hv}^8$  et  
 $\Theta_{hhv}^{(5,5)} = -E_v X_{hh}^5 - (X_{hh}^5)^T E_v^T + B_h X_{hv}^8 + (X_{hv}^8)^T B_h^T + \tau_{hhv}^1 H_a^h (H_a^h)^T + \tau_{hhv}^7 (H_b^h)^T H_b^h$   
 $+ (\tau_{hhv}^2 + \tau_{hhv}^4) H_e^v (H_e^v)^T + (\tau_{hhv}^3 + \tau_{hhv}^5) H_b^h (H_b^h)^T + \tau_{hhv}^6 (H_e^v)^T H_e^v$ .

Soit, pour  $k = 1, 2, \dots, l$  et  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $\dot{v}_k(z(t)) \geq \theta_k$  et  $\dot{h}_i(z(t)) \geq \phi_i$ , tels que  $\phi_i$  et  $\theta_k$  sont deux scalaires négatifs. On rappelle que (cf. preuve du théorème 3.1) :

$$\dot{X}_{hv}^1 \geq \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^r h_j(z) v_k(z) \left( \sum_{\xi=1}^{r-1} \phi_\xi (X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1) + \sum_{\psi=1}^{l-1} \theta_\psi (X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1) \right) \quad (4.22)$$

sous les conditions :

$$X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l \text{ et } \xi = 1, 2, \dots, r-1 \quad (4.23)$$

$$\text{et } X_{j\psi}^1 - X_{jl}^1 \geq 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r \text{ et } \psi = 1, 2, \dots, l-1 \quad (4.24)$$

Ainsi, en considérant (4.21), (4.22), (4.23) et (4.24), on obtient directement les conditions de stabilité proposées dans le théorème 4.1 relâchées à l'aide du lemme 2.1 (chapitre 2). ■

**Lemme 4.1 :**

*Les conditions du théorème 3.1 sont incluses, en termes de conservatisme, dans les conditions LMI du théorème 4.1. Autrement dit, l'approche redondante contient l'approche classique basée sur la BFC*

**Preuve :**

D'après la FLF (4.12) ainsi que la condition de symétrie (4.13), les matrices  $X_{ij}^4$ ,  $X_{ij}^5$ ,  $X_{ij}^6$ ,  $X_{jk}^7$ ,  $X_{jk}^8$  et  $X_{jk}^9$  pour  $i, j=1,2,\dots,r$  et  $k=1,2,\dots,l$  sont des variables de décision libres en choix (*slack variables*). En effet, la seule contrainte imposée pour que (4.12), avec (4.14), soit une fonction candidate de Lyapunov est  $X_{jk}^1 = (X_{jk}^1)^T > 0$  pour  $j=1,2,\dots,r$  et  $k=1,2,\dots,l$ . Ainsi, en remplaçant les matrices  $X_{ij}^4$ ,  $X_{ij}^5$  et  $X_{jk}^7$  respectivement par  $X_{ij}^3$ ,  $X_{ij}^4$  et  $(-K_{jk})$ , puis en considérant les matrices  $X_{ij}^6=0$ ,  $X_{jk}^8=0$  et  $X_{jk}^9=0$  dans les  $\mathcal{LMI}$  du théorème 4.1, on obtient les conditions proposées dans le théorème 3.1. Par conséquent, le théorème 3.1 est un cas particulier du théorème 4.1 et, ce dernier, conduit à des conditions moins conservatives. ■

**Remarque 4.3**

Il est évident qu'en considérant les incertitudes paramétriques nulles, c'est-à-dire  $\Delta E_k(t)$ ,  $\Delta A_i(t)$  et  $\Delta B_i(t)$  au sein du théorème 4.1, on retrouve les conditions de stabilisation pour la classe des descripteurs T-S (sans incertitudes). Celles-ci ont été proposées dans [Bouarar et al., 2009 a,b].

**Remarque 4.4**

Les conditions  $\mathcal{LMI}$  présentées au théorème 4.1 ont été obtenues via la FLF (4.12) et constituent donc une approche non quadratique à la synthèse de loi de commande pour les DTSI. Ces conditions nécessitent la connaissance a priori des bornes inférieures des fonctions d'appartenance  $\dot{h}_\xi(z(t)) \geq \phi_\xi$  et  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$  pour  $\xi \in \{1,2,\dots,r-1\}$ , et  $\psi \in \{1,2,\dots,l-1\}$ . Ces paramètres peuvent toutefois être difficiles à obtenir en pratique (voir la section discussion au chapitre 3). Néanmoins, tout comme cela a été précisé auparavant, des conditions quadratiques étendues peuvent être aisément obtenues. Celles-ci sont résumées dans le corollaire suivant du théorème 4.1.

**Corollaire 4.1 :**

Soient  $q = \min\{r,l\}$ . Le DTSI (4.1) avec  $(\varphi(t)=0)$  est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC modifiée (4.2) s'il existe des matrices  $X_1 = (X_1)^T > 0$ ,  $X_{ij}^4$ ,  $X_{ij}^5$ ,  $X_{ij}^6$ ,  $X_{jk}^7$ ,  $X_{jk}^8$ ,  $X_{jk}^9$ ,  $K_{ik}$  ainsi que, les scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_{ijk}^3$ ,  $\tau_{ijk}^4$ ,  $\tau_{ijk}^5$ ,  $\tau_{ijk}^6$  et  $\tau_{ijk}^7$ , tels que les conditions  $\mathcal{LMI}$  suivantes soient vérifiées :

$$\Phi_{iii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \tag{4.25}$$

$$\Phi_{iik} < 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \tag{4.26}$$

$$\Phi_{ij} + \Phi_{ji} < 0, \text{ pour } j=1,2,\dots,r, \quad i=1,2,\dots,q \text{ et } j < i \quad (4.27)$$

$$\Phi_{ijk} + \Phi_{jik} < 0, \text{ pour } i,j=1,2,\dots,r, \quad k=1,2,\dots,l, \quad j < i \text{ et } k \neq i \quad (4.28)$$

avec

$$\Phi_{ijk} = \begin{bmatrix} \Xi_{ijk}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_a^i X_1 & -\tau_i^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_{ij}^4 & 0 & -\tau_{ijk}^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^i X_{jk}^7 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{ijk}^{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{ijk}^{(5,5)} & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_{ij}^5 & -\tau_{ijk}^4 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^i X_{jk}^8 & 0 & -\tau_{ijk}^5 I & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{ijk}^{(8,1)} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{ijk}^{(8,5)} & 0 & 0 & X_{jk}^9 + (X_{jk}^9)^T & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_{ij}^6 & -\tau_{ijk}^6 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^i X_{jk}^9 & 0 & -\tau_{ijk}^7 I \end{bmatrix}$$

où  $\Xi_{ijk}^{(1,1)} = X_{ij}^4 + (X_{ij}^4)^T$ ,  $\Xi_{ijk}^{(8,1)} = (X_{ij}^6)^T + K_{ik} + X_{jk}^7$ ,  $\Xi_{ijk}^{(5,1)} = A_i X_1 - E_k X_{ij}^4 + (X_{ij}^5)^T + B_i X_{jk}^7$ ,  
 $\Xi_{ijk}^{(8,5)} = -(X_{ij}^6)^T E_k^T + (X_{jk}^9)^T B_i^T + X_{jk}^8$  et  
 $\Xi_{ijk}^{(5,5)} = -E_k X_{ij}^5 - (X_{ij}^5)^T E_k^T + B_i X_{jk}^8 + (X_{jk}^8)^T B_i^T + \tau_i^1 H_a^i (H_a^i)^T$   
 $+ (\tau_{ijk}^2 + \tau_{ijk}^4) H_e^k (H_e^k)^T + (\tau_{ijk}^3 + \tau_{ijk}^5) H_b^i (H_b^i)^T + \tau_{ijk}^6 (H_e^k)^T H_e^k + \tau_{ijk}^7 (H_b^i)^T H_b^i$ .

**Preuve :**

Triviale en fixant  $X_{jk}^1 = X_1$  commune dans les conditions du théorème 4.1. ■

### 4.2.3. Stabilisation non quadratique robuste des descripteurs T-S incertains et perturbés : approche redondante

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilisation robuste des DTSIP (4.1). En effet, si la dynamique de (4.1) est affectée par des perturbations externes ( $\varphi(t) \neq 0$ ) alors la convergence en boucle fermée des états du système n'est pas assurée par les conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées au théorème 4.1 (section précédente). Ainsi, afin d'atténuer l'effet des perturbations externes sur l'état du système, on considère le critère  $H_\infty$  présenté dans le chapitre 2 (équation(2.53)). En

tenant compte du nouveau vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t) \quad u^T(t)]^T$ , ce critère  $H_\infty$  peut être réécrit tel que :

$$\int_0^T \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) - \mu^2 \int_0^T \varphi^T(t) \varphi(t) \leq 0 \quad (4.29)$$

où  $T$  représente le temps final,  $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0$  avec  $Q = Q^T > 0$  une matrice de

pondération de dimensions appropriées et  $\mu$  un scalaire positif désignant le taux d'atténuation. Une solution au problème de synthèse non quadratique de contrôleurs  $H_\infty$  est résumée par le théorème suivant.

**Théorème 4.2 :**

Soient  $q = \min\{r, l\}$ ,  $\forall z(t)$ ,  $\xi \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ ,  $\psi \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ ,  $\dot{h}_\xi(z(t)) \geq \phi_\xi$ ,  $\dot{v}_\psi(z(t)) \geq \theta_\psi$  et  $Q$  une matrice de pondération. Le DTSIP (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC modifiée (4.2) et admet un taux d'atténuation  $\gamma = \sqrt{\eta}$  au regard des perturbations externes s'il existe, pour tout  $i=1, \dots, r$ ,  $j=1, \dots, r$  et  $k=1, \dots, l$ , des matrices  $X_{jk}^1 = (X_{jk}^1)^T > 0$ ,  $X_{ij}^4$ ,  $X_{ij}^5$ ,  $X_{ij}^6$ ,  $X_{jk}^7$ ,  $X_{jk}^8$ ,  $X_{jk}^9$  et  $K_{ik}$ , ainsi que des scalaires positifs  $\tau_{ijk}^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_{ijk}^3$ ,  $\tau_{ijk}^4$ ,  $\tau_{ijk}^5$ ,  $\tau_{ijk}^6$ ,  $\tau_{ijk}^7$  et un scalaire  $\eta > 0$  à minimiser tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées pour :

$$\Psi_{iii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \quad (4.30)$$

$$\Psi_{iik} < 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \quad (4.31)$$

$$\Psi_{iji} + \Psi_{jii} < 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, q \text{ et } j < i \quad (4.32)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi_{jik} < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, l, j < i \text{ et } k \neq i \quad (4.33)$$

$$X_{\xi k}^1 - X_{rk}^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l \text{ et } \xi = 1, 2, \dots, r-1 \quad (4.34)$$

$$X_{j\psi}^1 - X_{j\psi}^1 \geq 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r \text{ et } \psi = 1, 2, \dots, l-1 \quad (4.35)$$

avec  $\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} & & & & & \Upsilon_{ijk} & & & & & & (*) & (*) \\ X_{jk}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta I \end{bmatrix}$  ainsi que  $\Upsilon_{ijk}$  définie dans

le théorème 4.1.



**Lemme 4.2 :**

Les conditions du théorème 3.2 sont incluses, en termes de conservatisme, dans les conditions LMI du théorème 4.2. Autrement dit, la synthèse  $H_\infty$  d'une loi de commande via la BFR (4.5) est moins conservatrice que l'approche utilisant la BFC (4.3).

**Preuve :**

Identique à la preuve du lemme 4.1. ■

**Remarque 4.6 :**

Il est évidemment qu'en considérant les incertitudes paramétriques nulles, c'est-à-dire  $\Delta E_k(t) = 0$ ,  $\Delta A_i(t) = 0$  et  $\Delta B_i(t) = 0$  au sein du théorème 4.2, on retrouve les conditions de stabilisation  $H_\infty$  pour la classe des descripteurs T-S (sans incertitudes) proposées dans [Bouarar et al., 2009 a,b].

**Remarque 4.7**

De même que pour la stabilisation des DTSI, un corollaire « quadratique étendu » du théorème 4.2 peut être directement obtenu en considérant  $X_{jk}^1 = X_1$  commune. Ce corollaire permet, au prix d'une augmentation du conservatisme par rapport à l'approche non quadratique redondante, de s'affranchir de la connaissance a priori des paramètres  $\phi_\xi$  et  $\theta_\psi$ . Le résultat est résumé ci-dessous.

**Corollaire 4.2**

Soient  $q = \min\{r, l\}$  et  $Q$  une matrice de pondération. Le DTSIP (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC modifiée (4.2) et admet un taux d'atténuation  $\gamma = \sqrt{\eta}$  au regard des perturbations externes s'il existe, pour tout  $i = 1, \dots, r$ ,  $j = 1, \dots, r$  et  $k = 1, \dots, l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_{ij}^4$ ,  $X_{ij}^5$ ,  $X_{ij}^6$ ,  $X_{jk}^7$ ,  $X_{jk}^8$ ,  $X_{jk}^9$  et  $K_{ik}$ , ainsi que des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ijk}^2$ ,  $\tau_{ijk}^3$ ,  $\tau_{ijk}^4$ ,  $\tau_{ijk}^5$ ,  $\tau_{ijk}^6$ ,  $\tau_{ijk}^7$  et un scalaire  $\eta > 0$  à minimiser tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées pour :

$$\Pi_{iii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, q \tag{4.41}$$

$$\Pi_{iik} < 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, r \text{ et } k \neq i \tag{4.42}$$

$$\Pi_{ijj} + \Pi_{jii} < 0, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, r, i = 1, 2, \dots, q \text{ et } j < i \tag{4.43}$$

$$\Pi_{ijk} + \Pi_{jik} < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r, \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad j < i \text{ et } k \neq i \quad (4.44)$$

$$\text{avec } \Pi_{ijk} = \left[ \begin{array}{cccccc|cc} & & & & & \Phi_{ijk} & & (*) & (*) \\ \hline X_{jk}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta I \end{array} \right] \text{ ainsi que } \Phi_{ijk} \text{ définie}$$

dans le corollaire 4.1.

### 4.3. Discussion et remarques sur le coût de calcul des approches redondantes

A ce stade, nous avons évoqué le problème de la synthèse de loi de commande des descripteurs T-S incertains et perturbés. Dans le second chapitre, des conditions quadratiques ont été présentées. Puis, dans le troisième chapitre ces conditions ont été étendues dans le cadre non quadratique. Enfin, une approche non quadratique sur la base d'une écriture redondante de la boucle fermée a été présentée. Notons que l'ensemble des approches proposées jusqu'à présent font intervenir une structure d'interconnexion, des conditions suffisantes de stabilité, dépendantes des fonctions d'appartenance sous la forme d'une triple somme

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) \Upsilon_{ijk} < 0. \text{ Le coût de calcul relatif à la résolution des}$$

conditions proposées au cours des théorèmes et corollaires présentés précédemment est directement lié à cette structure en triple somme puisque celle-ci permet de définir le nombre de contrainte  $\mathcal{LMI}$  à satisfaire simultanément. Par ailleurs, on constate également que, malgré la réduction de conservatisme apportée, les approches successivement présentées au cours de ces trois chapitres font intervenir un nombre croissant de variables de décision dont il faut vérifier l'existence. Ceci contribue alors également à l'augmentation du coût de calcul lors de la résolution des différents théorèmes. Un constat s'impose alors, les approches non quadratiques redondantes proposées aux théorèmes 4.1 et 4.2 et leurs corollaires fournissent des conditions moins conservatives mais, en revanche, elles entraînent également un coût de calcul le plus important. De ce fait, pour des systèmes complexes, bien que moins conservatives, des solutions aux problèmes  $\mathcal{LMI}$  peuvent ne pas être obtenues par manque de puissance des solveurs et ordinateurs actuels.

La question qui se pose alors est de savoir s'il n'existe pas de compromis entre conservatisme et coût de calcul ?

Une réponse possible à cette question repose sur la propriété de redondance elle-même. En effet, d'après les expressions de la BFC (4.3) et de la BFR (4.5) on constate que le découplage des matrices de gains vis-à-vis des matrices d'entrées conduit à une structure d'interconnexion de la BFR en double somme. De ce fait, il est possible d'obtenir des conditions de stabilité dans

$$\text{le cadre redondant ne faisant intervenir que deux sommes du type } \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^l h_i(z(t)) v_k(z(t)) \Upsilon_{ik}$$

réduisant ainsi le nombre de contraintes  $\mathcal{LMI}$  à satisfaire.

A titre d'exemple, on considère la fonction candidate quadratique de Lyapunov donnée par :

$$V(x(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{E}(\tilde{X}_{hv})^{-1} \tilde{x}(t) \quad (4.45)$$

$$\text{avec } \tilde{X}_{hv} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ X_h^4 & X_h^5 & X_h^6 \\ X_v^7 & X_v^8 & X_v^9 \end{bmatrix} \text{ et } X_1 = X_1^T > 0.$$

Celle-ci conduit à une structure d'interconnexion des  $\mathcal{LMI}$  en double somme, donc à la diminution des contraintes à vérifier et, par conséquent, à la réduction du coût de calcul. Sur la base de (4.45), un corollaire quadratique redondant au théorème 4.2 constitue un compromis entre coût de calcul et conservatisme. Celui-ci est donné par

### Corollaire 4.3

Soient  $q = \min\{r, l\}$  et  $Q$  une matrice de pondération. Le DTSIP (4.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par la loi de commande non-PDC modifiée (4.2) et admet un taux d'atténuation  $\gamma = \sqrt{\eta}$  au regard des perturbations externes s'il existe, pour tout  $i=1, \dots, r$ ,  $j=1, \dots, r$  et  $k=1, \dots, l$ , des matrices  $X_1 = X_1^T > 0$ ,  $X_i^4$ ,  $X_i^5$ ,  $X_i^6$ ,  $X_i^7$ ,  $X_k^8$ ,  $X_k^9$  et  $K_{ik}$ , ainsi que des scalaires positifs  $\tau_i^1$ ,  $\tau_{ik}^2$ ,  $\tau_{ik}^3$ ,  $\tau_{ik}^4$ ,  $\tau_{ik}^5$ ,  $\tau_{ik}^6$ ,  $\tau_{ik}^7$  et un scalaire  $\eta > 0$  à minimiser tels que les conditions  $\mathcal{LMI}$  suivantes soient vérifiées :

$$\Psi_{ik} = \left[ \begin{array}{cccccc|cc} & & & & & \Upsilon_{ik} & & (*) & (*) \\ \hline X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & W_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta I \end{array} \right] < 0 \quad (4.46)$$

$$\text{avec } \Upsilon_{ik} = \begin{bmatrix} \Xi_i^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_a^i X_1 & -\tau_i^1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_e^k X_i^4 & 0 & -\tau_{ik}^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_b^i X_k^7 & 0 & 0 & -\tau_{ik}^3 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{ik}^{(5,1)} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{ik}^{(5,5)} & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_i^5 & -\tau_{ik}^4 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^i X_k^8 & 0 & -\tau_{ik}^5 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi_{ik}^{(8,1)} & 0 & 0 & 0 & \Xi_{ik}^{(8,5)} & 0 & 0 & X_k^9 + (X_k^9)^T & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_e^k X_i^6 & -\tau_{ik}^6 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_b^i X_k^9 & 0 & -\tau_{ik}^7 I & 0 \end{bmatrix}$$

et où  $\Xi_i^{(1,1)} = X_i^4 + (X_i^4)^T$ ,  $\Xi_{ik}^{(8,1)} = (X_i^6)^T + K_{ik} + X_k^7$ ,  $\Xi_{ik}^{(5,1)} = A_i X_1 - E_k X_i^4 + (X_i^5)^T + B_i X_k^7$ ,  $\Xi_{ik}^{(8,5)} = -(X_i^6)^T E_k^T + (X_k^9)^T B_i^T + X_k^8$  et

$$\begin{aligned} \Xi_{ik}^{(5,5)} = & -E_k X_i^5 - (X_i^5)^T E_k^T + B_i X_k^8 + (X_k^8)^T B_i^T + \tau_i^1 H_a^i (H_a^i)^T \\ & + (\tau_{ik}^2 + \tau_{ik}^4) H_e^k (H_e^k)^T + (\tau_{ik}^3 + \tau_{ik}^5) H_b^i (H_b^i)^T + \tau_{ik}^6 (H_e^k)^T H_e^k + \tau_{ik}^7 (H_b^i)^T H_b^i. \end{aligned}$$

## 4.4. Exemples numériques et simulations

Pour montrer l'intérêt en termes de conservatisme des approches redondantes proposées dans ce chapitre par rapport à celles proposées dans le chapitre 3, on considère dans cette section deux exemples numériques.

### 4.4.1. Exemple 1 : intérêt des approches redondantes

Dans un premier temps, l'objectif est d'illustrer l'intérêt des conditions  $\mathcal{LMI}$  issues de l'écriture de la BFR (théorème 4.1) par rapport celles issues de la BFC (Théorème 3.1). Ainsi, afin de s'affranchir d'autres sources potentielles de réduction du conservatisme, telles que celles que pourrait introduire l'étude d'un modèle incertain (voir exemple chapitre 2), on propose d'étudier la stabilisation d'un descripteur T-S sans incertitudes paramétriques et n'étant pas sujet à des perturbations externes. Soit le descripteur T-S donné sous la forme nominale suivante :

$$\sum_{k=1}^2 v_k(z) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (4.47)$$

$$\text{où } E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix},$$

et où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres destinés à scruter les domaines de faisabilité des conditions  $\mathcal{LMI}$ .

On rappelle que les théorèmes 4.1 et 3.1 nécessitent la connaissance a priori des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance  $\dot{v}_1(z) \geq \theta_1$  et  $h_1(z) \geq \phi_1$ . Ces dernières ne peuvent être obtenues de manière exacte avant la résolution des  $\mathcal{LMI}$  puisque la dynamique finale de la boucle fermée reste inconnue à ce stade. Afin de mettre en œuvre les conditions des théorèmes 4.1 et 3.1 nous supposons alors  $\phi_1 = -3$  et  $\theta_1 = -3$ .

La figure 4.1 présente les domaines de faisabilité d'une synthèse de loi de commande pour le descripteur (4.47) au travers des conditions exprimées aux remarque 4.3 et le théorème 3.1 sans incertitudes pour  $a = [-1 \ 27]$  et  $b = [-8 \ 10]$ . Celle-ci confirme alors que les approches issues de la BFR proposées dans ce chapitre sont moins conservatives que celles issues de la BFC proposées au chapitre 3.

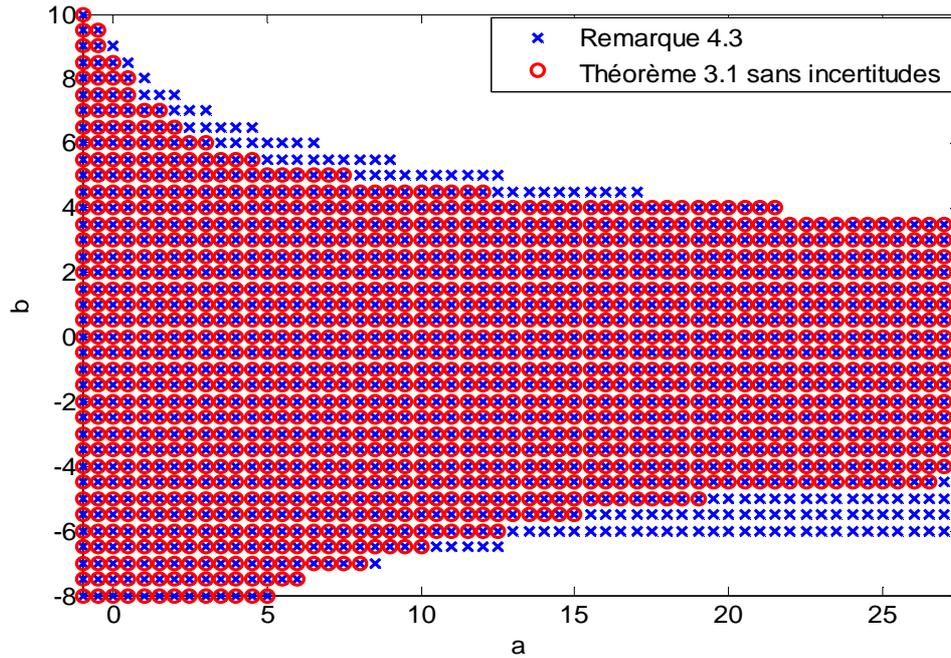


Figure 4.1. Domaines de solutions ; remarque 4.3 et du théorème 3.1 sans incertitudes.

La figure 4.2 présente quant à elle la comparaison des domaines de faisabilité issus de la remarque 4.3, avec  $\phi_1 = -3$  et  $\theta_1 = -3$ , et de le corollaire 4.1 « quadratique étendu » sans incertitudes ( $X_{hv}^1 = X_1$ ). Bien entendu, les conditions non quadratiques de la remarque 4.3 restent moins conservatives. Par ailleurs, il est intéressant de noter que, dans le cadre de cet exemple, en comparant les domaines de solutions proposés aux figures 4.1 et 4.2, on constate que les approches non quadratiques basées sur la BFC (théorème 3.1 sans incertitudes) ne contiennent pas l'ensemble du domaine de faisabilité obtenu via l'approche quadratique étendue issue de la BFR (corollaire 4.1 sans incertitudes).

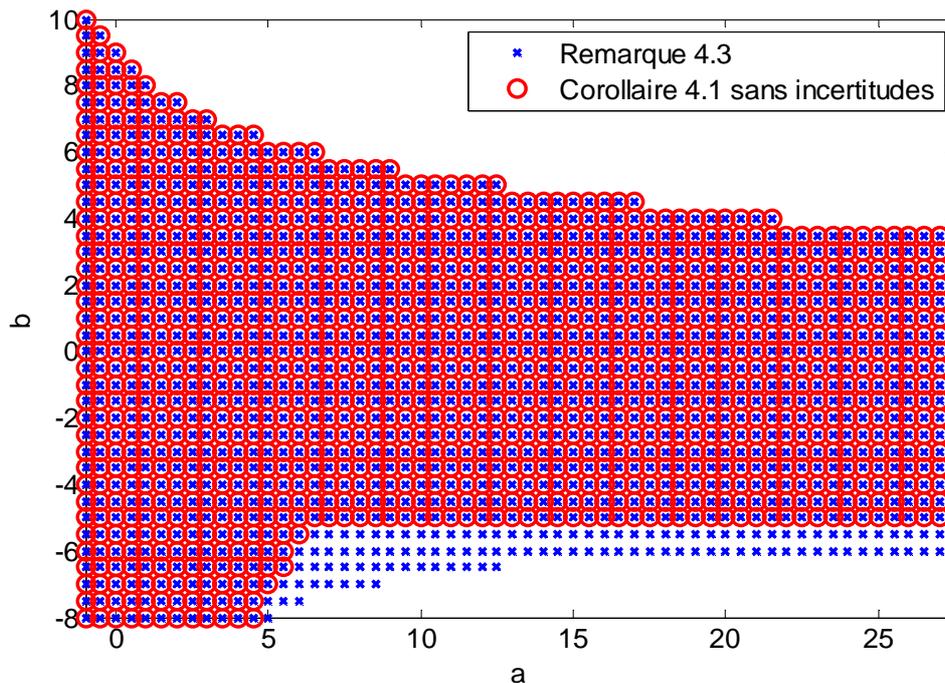


Figure 4.2. Domaines de solutions ; remarque 4.3 et du corollaire 4.1 sans incertitudes.

#### 4.4.2. Exemple 2 : stabilisation robuste d'un DTSIP

Dans cet exemple, l'objectif est de montrer l'efficacité des approches issues de l'écriture redondante de la boucle fermée (théorèmes 4.1 et 4.2) vis-à-vis de celles issues de la boucle fermée classique (théorèmes 3.1 et 3.2) dans le cadre de la stabilisation robuste. Afin d'uniformiser les résultats entre les différents chapitres, nous reprenons ici le DTSIP étudié à titre d'exemple dans le cadre quadratique au chapitre 2 et dans le cadre non quadratique au chapitre 3. Nous rappelons que celui-ci est donné par :

$$(E + \Delta E(t)) \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \left( (A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + (B_i + \Delta B_i(t)) u(t) \right) + W \varphi(t) \quad (4.48)$$

$$\text{où } h_1(x_1) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)}, \quad h_2(x_1) = \frac{1}{1+x_1^2(t)}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + \frac{b}{2}(1-\delta) \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 + b(1-\delta) \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}, \quad \Delta E(t) = H_e f_e(t) N_e,$$

$$\Delta A_i(t) = H_a^i f_a^i(t) N_a^i, \quad \Delta B_i(t) = H_b^i f_b^i(t) N_b^i$$

$$\text{avec } H_e = H_a^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad N_a^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b \frac{1+\delta}{2} \end{bmatrix}, \quad N_a^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & b(1+\delta) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$N_b^1 = N_b^2 = \frac{1}{2} a. \quad \delta = 0.2172.$$

Rappelons que les résultats basés sur la BFR incluent ceux basés sur la BFC, ceci a été montré mathématiquement par les lemmes 4.1 et 4.2 ainsi qu'en simulation au travers de l'exemple précédent. Bien entendu, ces constatations restent valables dans le cadre de la stabilisation robuste. Ainsi, la figure 4.3 montre l'intérêt en termes de conservatisme de la BFR (théorème 4.1) par rapport à la BFC (théorème 3.1) à travers leurs domaines de solutions obtenus pour  $a = [0.5 \quad 4]$ ,  $b = [-3.5 \quad 1]$  et  $\phi_1 = -1$ . Cette réduction de conservatisme est notamment due à l'utilisation du vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t)$  contenant un degré de liberté supplémentaire incarné par le signal de commande  $u(t)$ . Ainsi, l'extension du vecteur d'état permet, d'une part, de découpler les matrices des gains de commande et les matrices d'entrées (couplage présent dans la formulation de la BFC), d'autre part de relâcher les conditions de stabilité issues de la BFR en introduisant des variables de décision supplémentaires libres dans la FLF.

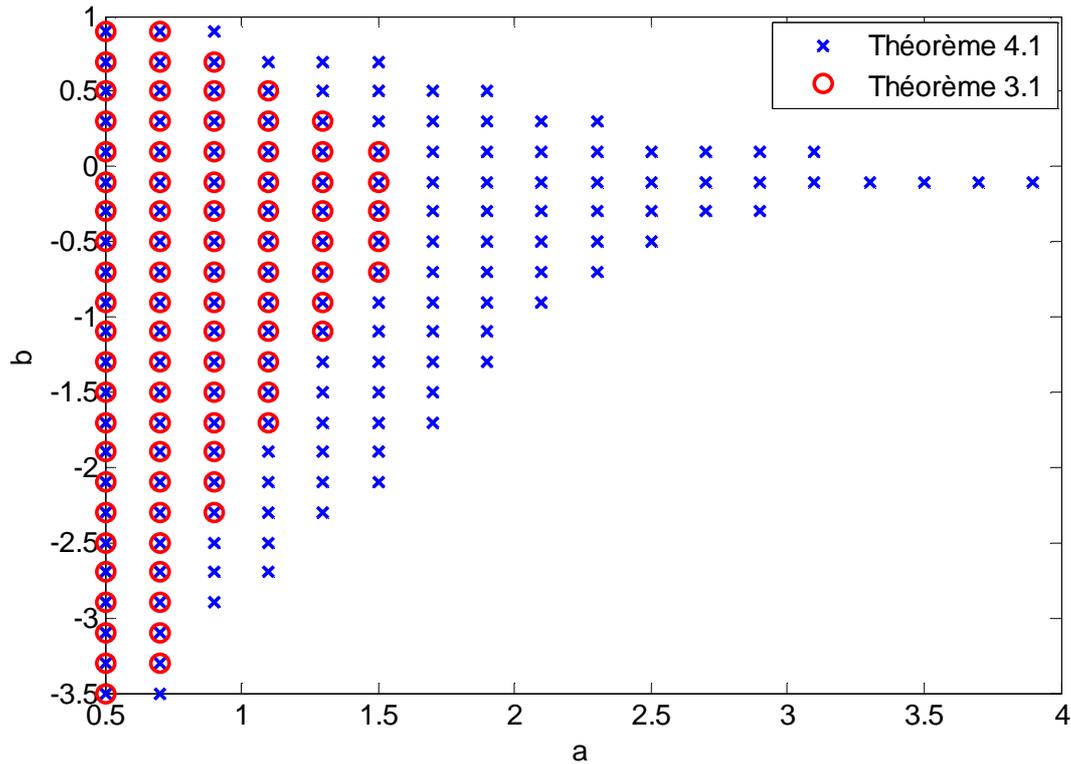


Figure 4.3. Domaines de solutions des théorèmes 4.1 et 3.1.

A partir de la figure 4.3, nous remarquons que, pour  $a = 2.5$  et  $b = 0$ , aucun contrôleur flou ne peut être synthétisé à l'aide de l'approche non quadratique donnée par le théorème 3.1 (chapitre 3). En revanche, la synthèse de loi de commande est possible en utilisant l'approche non quadratique redondante (théorème 4.1) pour le DTSI (4.48) sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ). Les résultats, obtenus à l'aide de Matlab *LMI* Toolbox pour  $\phi_1 = -1$ , sont donnés par :

$$K_{11} = [9.3388 \quad 3.4864], \quad K_{21} = [4.461 \quad 4.5251], \quad X_{11}^1 = \begin{bmatrix} 14.0456 & -11.4301 \\ -11.4301 & 14.3633 \end{bmatrix},$$

$$X_{21}^1 = \begin{bmatrix} 12.7685 & -10.7148 \\ -10.7148 & 13.8299 \end{bmatrix}, \quad \tau_{111}^1 = 0.4352, \quad \tau_{121}^1 = 1.4552, \quad \tau_{211}^1 = 1.4552, \quad \tau_{221}^1 = 1.635,$$

$$\tau_{111}^2 = 0.9969, \quad \tau_{121}^2 = 2.1313, \quad \tau_{211}^2 = 2.1313, \quad \tau_{221}^2 = 2.7343, \quad \tau_{111}^3 = 15.7429, \quad \tau_{121}^3 = 8.716,$$

$$\tau_{211}^3 = 8.716, \quad \tau_{221}^3 = 7.6267, \quad \tau_{111}^4 = 5.6514, \quad \tau_{121}^4 = 6.2849, \quad \tau_{211}^4 = 6.2849, \quad \tau_{221}^4 = 6.8922,$$

$$\tau_{111}^5 = 6.2832, \quad \tau_{121}^5 = 5.246, \quad \tau_{211}^5 = 5.246, \quad \tau_{221}^5 = 5.6435, \quad \tau_{111}^6 = 0.7137, \quad \tau_{121}^6 = 1.7868,$$

$$\tau_{211}^6 = 1.7868, \quad \tau_{221}^6 = 2.4952, \quad \tau_{111}^7 = 0.6507, \quad \tau_{121}^7 = 1.7297, \quad \tau_{211}^7 = 1.7297 \text{ et } \tau_{221}^7 = 2.2901.$$

La figure 4.4 montre l'évolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de la dérivée de la fonction d'appartenance  $\dot{h}_1(x_1(t))$  pour la condition initiale  $x(0) = [-2.9 \quad -0.5]^T$ . On constate alors que l'hypothèse sur la borne inférieure de la dérivée de la fonction d'appartenance est vérifiée en simulation puisque  $\min(\dot{h}_1(x_1(t))) = -0.9131 > -1$ .

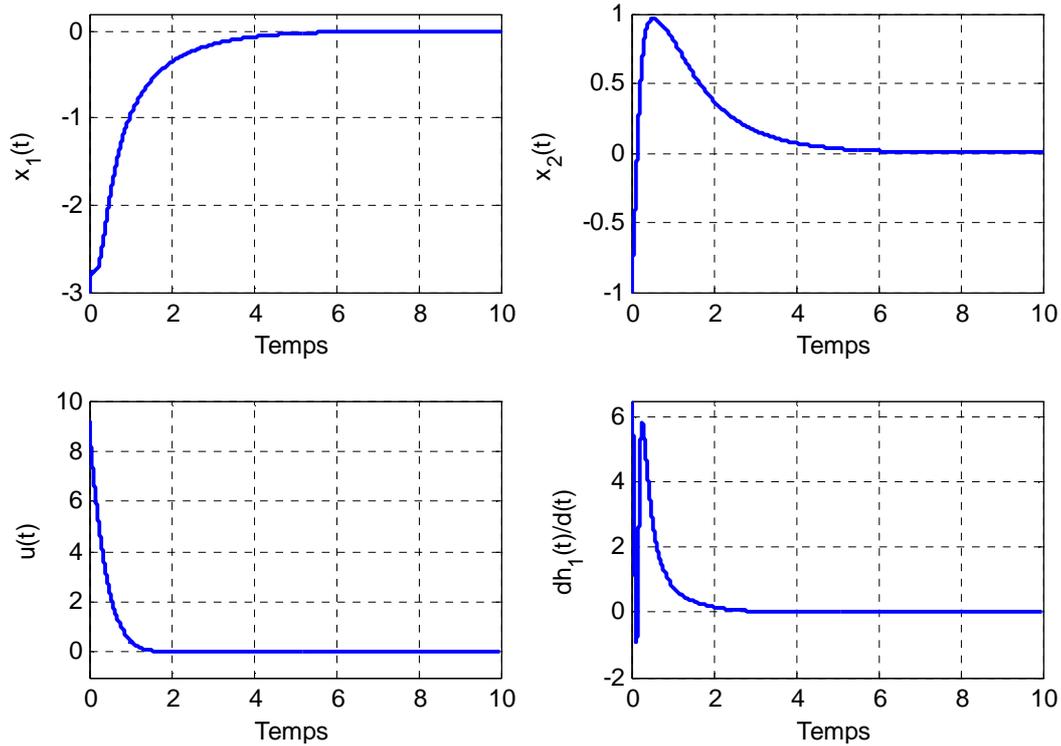


Figure 4.4. Evolution temporelle du vecteur d'état, du signal de commande et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

La simulation précédente, issue des résultats obtenus via le théorème 4.1, ne garantit pas la stabilisation du DTSIP (4.48) lorsque celui-ci est soumis à des perturbations externes ( $\varphi(t) \neq 0$ ). Les résultats suivants sont obtenus à l'aide du théorème 4.2. Ils permettent de réaliser la synthèse d'une loi de commande non-PDC robuste garantissant un taux d'atténuation  $\mu = 1.3639$  des perturbations externes pour  $\phi_1 = -1$ ,  $a = -2$ ,  $b = 0$  et la matrice de pondération  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Les matrices et les scalaires suivants sont issus de la résolution des conditions du théorème 4.2 :

$$K_{11} = [0.6203 \quad -0.1296], \quad K_{21} = [0.6204 \quad -0.1296], \quad X_{11}^1 = \begin{bmatrix} 0.3314 & 0.0763 \\ 0.0763 & 0.1375 \end{bmatrix},$$

$$X_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0.3314 & 0.0763 \\ 0.0763 & 0.1375 \end{bmatrix}, \quad \tau_{111}^1 = 9.5559 \times 10^{-7}, \quad \tau_{121}^1 = 9.6178 \times 10^{-7}, \quad \tau_{211}^1 = 0.0183,$$

$$\tau_{221}^1 = 0.0168, \quad \tau_{111}^2 = 0.0111, \quad \tau_{121}^2 = 0.0111, \quad \tau_{211}^2 = 0.0473, \quad \tau_{221}^2 = 0.0463, \quad \tau_{111}^3 = 0.5022,$$

$$\tau_{121}^3 = 0.5022, \quad \tau_{211}^3 = 0.1814, \quad \tau_{221}^3 = 0.1905, \quad \tau_{111}^4 = 0.1193, \quad \tau_{121}^4 = 0.1193, \quad \tau_{211}^4 = 0.1963,$$

$$\tau_{221}^4 = 0.192, \quad \tau_{111}^5 = 7.9193 \times 10^{-5}, \quad \tau_{121}^5 = 7.8301 \times 10^{-5}, \quad \tau_{211}^5 = 0.0358, \quad \tau_{221}^5 = 0.0329,$$

$$\tau_{111}^6 = 3.1173 \times 10^{-6}, \quad \tau_{121}^6 = 4.3204 \times 10^{-6}, \quad \tau_{211}^6 = 0.0306, \quad \tau_{221}^6 = 0.0281, \quad \tau_{111}^7 = 2.0631 \times 10^{-6},$$

$$\tau_{121}^7 = 2.9918 \times 10^{-6}, \quad \tau_{211}^7 = 0.0183, \quad \tau_{221}^7 = 0.0168 \text{ et } \eta = 1.8603.$$

La figure 4.5 présente l'évolution du vecteur d'état, du signal de commande et de la dérivée de la fonction d'appartenance  $\dot{h}_1(x_1(t))$  pour la condition initiale  $x(0) = [1 \quad -1]^T$  ainsi que la perturbation externe  $\varphi(t)$ .

Cette dernière est un bruit aléatoire normalement distribué de moyenne nulle et de dispersion égale à un. La valeur minimale de  $\dot{h}_1(x_1(t))$  trouvée a posteriori en simulation est  $\min(\dot{h}_1(x_1(t))) = -0.5109 > -1$  et permet de valider l'hypothèse réalisée ( $\phi_1 = -1$ ) pour la résolution des conditions du théorème 4.2.

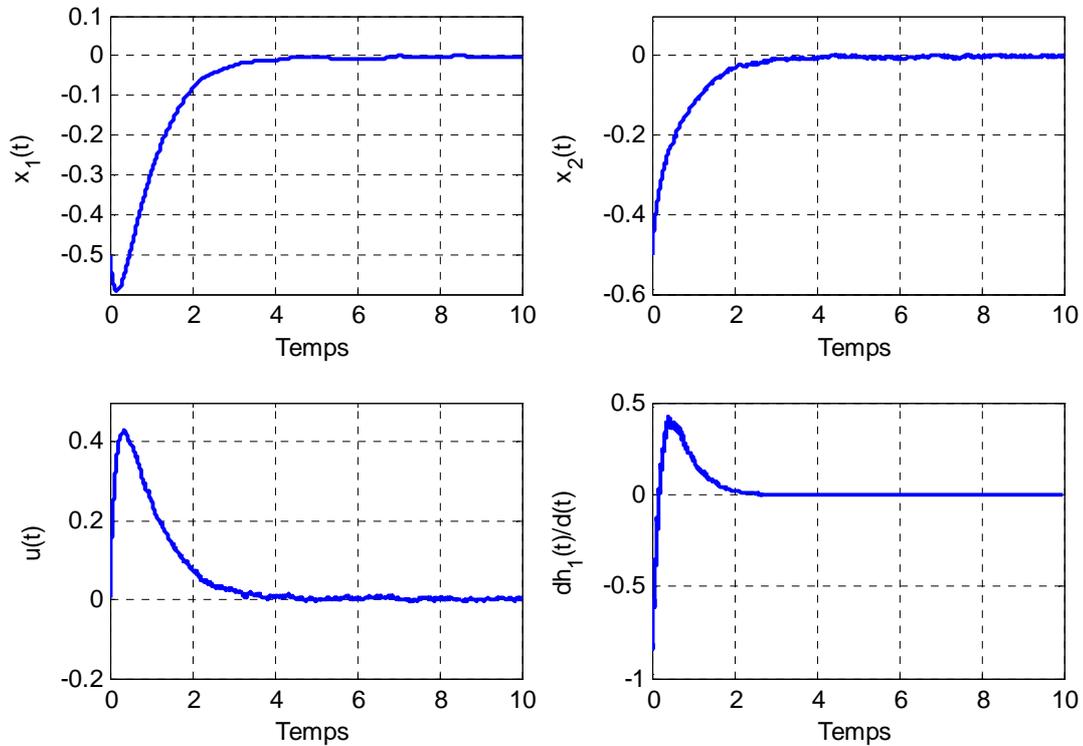


Figure 4.5. Evolution temporelle du vecteur d'état perturbé, du signal de commande et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

## 4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, la réduction du conservatisme des conditions  $\mathcal{LMI}$  pour la stabilisation non quadratique des DTSIP a été abordée via la réécriture de la dynamique de la boucle fermée sous forme redondante. Celle-ci permet de découpler les matrices de gains de commande et les matrices d'entrées au sein de la boucle fermée. En effet, la propriété de redondance des descripteurs permet d'associer au sein d'un même système Algèbro-différentiel des équations dynamiques (représentation d'état) avec des équations statiques telles que la loi de commande non-PDC modifiée proposée. L'avantage inhérent à cette transformation résulte dans la facilité d'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  (aucun changement de variables nécessaire) et conduit à une réduction du conservatisme par l'introduction de nouvelles variables de décision libres. D'autre part, deux lemmes ont été proposés afin de prouver que les approches non quadratiques classiques proposées au second chapitre constituent des cas particuliers des approches redondantes proposées au cours de ce chapitre. Ce point permet alors de prouver formellement que les approches redondantes sont les moins conservatives. Cependant, l'augmentation du

nombre de variables à rechercher entraîne inévitablement une augmentation du coût de calcul. Notons que cet inconvénient reste toutefois marginal puisque la méthodologie proposée implique une synthèse de loi de commande réalisée hors ligne. Toutefois, au cours de la discussion il a été souligné qu'en se ramenant à un cadre quadratique contraignant en terme de conservatisme, il est possible d'obtenir des conditions conduisant à un coût de calcul moindre vis-à-vis des conditions basées sur l'écriture classique de la boucle fermée présentées au chapitre 2. En effet, l'écriture redondante permet, dans ce cas, de réduire la structure d'interconnexion des  $\mathcal{LMI}$  à une double somme (au lieu d'un triple somme dans le cas classique) et, de ce fait, de conduire à une diminution considérable des contraintes à vérifier.



# Stabilisation non quadratique par retour de sortie des modèles T-S standards incertains et perturbés – Approches redondantes

---

---

5.1. Introduction .....	103
5.2. Classe des systèmes considérée et formulation du problème de commande par retour de sortie.....	104
5.2.1. Formulation d'une boucle fermée redondante pour la synthèse de lois de commande .....	104
5.2.1.1. Retour de sortie dynamique .....	104
5.2.1.2. Retour de sortie statique.....	106
5.3. Approches non quadratiques de synthèse de contrôleurs par retour de sortie pour les systèmes T-S incertains .....	107
5.3.1. Synthèse non quadratique de contrôleurs par retour de sortie dynamique.....	107
5.3.2. Synthèse non quadratique de contrôleurs par retour de sortie statique.....	113
5.4. Extension à la synthèse de lois de commande robustes par retour de sortie pour les systèmes T-S incertains et perturbés.....	118
5.4.1. Synthèse de contrôleurs robustes par retour de sortie dynamique .....	118
5.4.2. Synthèse de contrôleurs robustes par retour de sortie statique .....	120
5.5. Exemples numériques et simulations.....	123
5.5.1. Exemple 1 : évaluation du conservatisme pour le retour de sortie dynamique – approches classiques vs redondantes .....	123
5.5.2. Exemple 2 : intérêt de l'approche non quadratique vs quadratique – cas du retour de sortie statique soumis à perturbations externes .....	124
5.5.3. Exemple 3 : stabilisation robuste par retour de sortie dynamique et statique.....	125
5.5.3.1. Résultats en retour de sortie dynamique .....	126
5.5.3.2. Résultats en retour de sortie statique.....	130
5.6. Conclusion.....	132

## 5.1. Introduction

La synthèse de contrôleurs flous robustes par retour d'état pour la classe des descripteurs T-S incertains et perturbés a été abordée dans les chapitres précédents. Partant de conditions quadratiques, plusieurs approches ont été proposées successivement afin de réduire le conservatisme des conditions  $\mathcal{LMI}$ . Parmi celles-ci, sur la base de la propriété de redondance des systèmes descripteurs, des conditions menant à d'autres exemptes de termes croisés entre gains de commande et matrices d'entrées ont été obtenues. Fort de cette constatation sur la redondance des systèmes descripteurs, nous proposons dans le présent chapitre d'appliquer cette technique à la synthèse de lois de commande pour lesquelles l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  est réputée complexe, cette complexité étant due à leur couplage avec les matrices du système à commander au sein de l'écriture de la boucle fermée.

Ainsi, ce présent chapitre est consacré à l'étude de la stabilisation non quadratique des modèles T-S standards par retour de sortie. Plusieurs approches de commande par retour de sortie sont alors possibles. Tout d'abord, certaines études traitent ce problème par l'ajout d'un observateur permettant l'estimation du vecteur d'état sur la base des mesures du signal d'entrée et de sortie, une loi de commande statique par retour d'état estimé permet alors la stabilisation d'un système dynamique [Tanaka et Wang, 2001][Yoneyama et al., 2001][Guerra et al., 2006]. Notons que, ce type de commande par retour de sortie pose certains problèmes tels que la mise sous forme  $\mathcal{LMI}$  du problème de synthèse de l'observateur et des gains de commande [Ma et al., 1998]. D'autres travaux portent sur la synthèse de loi de commande par retour de sortie dynamique [Li et al., 2001][Yoneyama et al., 2001][Assawinchaichote et al., 2004][Yoneyama, 2006][Zerar et al., 2008]. Ce type de contrôleurs permet notamment d'améliorer les performances en boucle fermée d'un système dynamique et sont souvent utilisés dans le cadre de la commande robuste par le biais de transformations linéaires fractionnelles (LFT) [Zhou et Doyle, 1996]. L'écriture de la boucle fermée pour le retour de sortie dynamique est généralement basée sur l'utilisation du produit de Redheffer [Redheffer, 1960]. Notons que celui-ci entraîne l'apparition de nombreux termes croisés (couplage entrées-sorties) et conduit donc à des conditions de stabilisation  $\mathcal{LMI}$  pour le moins conservatives. Enfin, certains travaux traitent de la synthèse de lois de commande par retour de sortie statique [Chadli et al., 2002][Huang et Nguang, 2006][Huang et Nguang, 2007][Dong et Yang, 2008][Nachidi et al., 2007][Kau et al., 2007]. Ce type de lois de commande par retour de sortie s'avère particulièrement intéressant dans le cadre d'applications nécessitant un faible coût de calcul puisque, à l'instar des lois de commande à base d'observateurs ou par retour de sortie dynamique, elles ne nécessitent pas la résolution d'équations différentielles en ligne. Notons par ailleurs que l'ensemble des conditions de stabilisation par retour de sortie proposées dans la littérature ont été obtenues dans le cadre quadratique et qu'elles sont souvent données en termes d'inégalités matricielles bilinéaires ( $\mathcal{BMI}$ ) et que, lorsque des  $\mathcal{LMI}$  sont proposées, celles-ci sont obtenues au prix d'hypothèses restrictives  $C_i = C$  commune, de rang plein en ligne et  $D_i = 0$  [Chadli et al., 2002].

Dans la suite, nous proposons la formulation de conditions non quadratiques robustes, basées sur des approches redondantes, pour le cas des retours de sorties dynamiques et statiques. Celles-ci seront exprimées en termes de  $\mathcal{LMI}$  et concerneront la classe générique des systèmes T-S standards incertains et perturbés ne nécessitant aucune hypothèse restrictive.

## 5.2. Classe des systèmes considérée et formulation du problème de commande par retour de sortie

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la stabilisation par retour de sortie de la classe des modèles standards (explicités) incertains et perturbés représentés par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( (A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + F_i\varphi(t) \right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left( (C_i + \Delta C_i(t))x(t) + (D_i + \Delta D_i(t))u(t) + G_i\varphi(t) \right) \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $r$  représente le nombre de règles floues.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  et  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{d \leq n}$  représentent respectivement le vecteur d'état, le signal de commande, le vecteur de sortie et le vecteur des perturbations externes.  $h_i(z(t))$  sont des fonctions d'appartenance qui satisfont les propriétés d'une somme convexe  $0 \leq h_i(z(t)) \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ .  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $D_i \in \mathbb{R}^{q \times m}$ ,  $F_i \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{d \times q}$  sont des matrices constantes définissant la partie nominale de (5.1).  $\Delta A_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta B_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\Delta C_i(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$  et  $\Delta D_i(t) \in \mathbb{R}^{q \times m}$  sont des matrices d'incertitudes paramétriques bornées en norme qui peuvent être réécrites sous la forme [Zhou et Khargonekar, 1988] :

$$\Delta A_i(t) = H_i^a f_i^a(t) N_i^a, \Delta B_i(t) = H_i^b f_i^b(t) N_i^b, \Delta C_i(t) = H_i^c f_i^c(t) N_i^c \text{ et } \Delta D_i(t) = H_i^d f_i^d(t) N_i^d,$$

avec pour  $s = a, b, c$  ou  $d$ , les matrices  $H_i^s$  et  $N_i^s$  constantes et de dimensions appropriées.  $f_i^s(t)$  sont des fonctions matricielles d'incertitudes majorées telles que  $(f_i^s(t))^T f_i^s(t) \leq I$ .

Par la suite, deux cas seront considérés. Le premier concerne la synthèse de lois de commande par retour de sortie dynamique et le second la synthèse de lois de commande par retour de sortie statique.

### 5.2.1. Formulation d'une boucle fermée redondante pour la synthèse de lois de commande

#### 5.2.1.1. Retour de sortie dynamique

Afin de stabiliser (5.1), on considère le compensateur dynamique par retour de sortie (Dynamic Output Fuzzy Compensator) (DOFC) de type non-PDC donné par l'expression mathématique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{A}_i \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i^6 \right)^{-1} \bar{x}(t) + \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{B}_i \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i^{11} \right)^{-1} y(t) \\ u(t) = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{C}_i \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i^6 \right)^{-1} \bar{x}(t) + \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{D}_i \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i^{11} \right)^{-1} y(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $\bar{x}(t)$  est le vecteur d'état du DOFC,  $\bar{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\bar{C}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $\bar{D}_i \in \mathbb{R}^{m \times q}$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées décrivant la dynamique du DOFC qu'il convient de synthétiser.  $X_i^6 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X_i^{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  sont des matrices non singulières dépendantes de la Fonction de Lyapunov (voir preuve du théorème 5.1 dans la suite de ce chapitre).

Tenant compte de la propriété de la redondance des systèmes descripteurs [Chen, 2004][Tanaka et al., 2005][Tanaka et al., 2007] permettant l'association d'équations dynamiques et statiques au sein d'un même système Algèbro-différentiel, le système (5.1) peut être réécrit à l'aide des notations définies dans le chapitre 1 tel que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h(t))x(t) + (B_h + \Delta B_h(t))u(t) + F_h \varphi(t) \\ 0 \dot{y}(t) = -y(t) + (C_h + \Delta C_h(t))x(t) + (D_h + \Delta D_h(t))u(t) + G_h \varphi(t) \end{cases} \quad (5.3)$$

De même, le DOFC (5.2) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_h (X_h^6)^{-1} \bar{x}(t) + \bar{B}_h (X_h^{11})^{-1} y(t) \\ 0 \dot{u}(t) = -u(t) + \bar{C}_h (X_h^6)^{-1} \bar{x}(t) + \bar{D}_h (X_h^{11})^{-1} y(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

En considérant alors le vecteur augmenté  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \bar{x}^T(t) \quad y^T(t) \quad u^T(t)]^T$ , la dynamique de la boucle fermée redondante (BFR) est donnée par le descripteur :

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{A}_{hh} + \Delta \tilde{A}_{hh}(t)) \tilde{x}(t) + \tilde{F}_h \varphi(t) \quad (5.5)$$

$$\text{où } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h & 0 & 0 & B_h \\ 0 & \bar{A}_h (X_h^6)^{-1} & \bar{B}_h (X_h^{11})^{-1} & 0 \\ C_h & 0 & -I & D_h \\ 0 & \bar{C}_h (X_h^6)^{-1} & \bar{D}_h (X_h^{11})^{-1} & -I \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_h = \begin{bmatrix} F_h \\ 0 \\ G_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta \tilde{A}_{hh}(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_h(t) & 0 & 0 & \Delta B_h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta C_h(t) & 0 & 0 & \Delta D_h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De ce fait, le modèle T-S standard incertain et perturbé (5.1) est stabilisé par la loi de commande (5.2) s'il existe les matrices  $\bar{A}_h$ ,  $\bar{B}_h$ ,  $\bar{C}_h$ ,  $\bar{D}_h$ ,  $X_h^6$  et  $X_h^{11}$  de telle sorte que le descripteur (5.5) décrivant la dynamique de la BFR soit stable.

Notons que la boucle fermée (5.5) est dite redondante puisqu'elle possède deux dynamiques « virtuelles »  $\dot{y}(t)$  et  $\dot{u}(t)$ . Par ailleurs, Nous constatons qu'au sein de la BFR aucun terme croisé n'apparaît entre les matrices du DOFC (5.2) et du système (5.1). De ce fait, l'obtention de conditions LMI sera facilitée dans le cas général en faisant intervenir une équation de sortie quelconque ( $C_i$  et  $D_i$  quelconques).

### 5.2.1.2. Retour de sortie statique

Dans la section 5.2.1.1, la dynamique de la boucle fermée redondante a été exprimée via l'utilisation d'un DOFC. Dans cette partie, nous nous intéressons au problème de synthèse de contrôleurs flous non-PDC par retour de sortie statique « *Static Output Feedback* » (SOF). Celui-ci a l'avantage de ne nécessiter aucune résolution numérique lors de son implémentation. Le faible coût de calcul lors de l'utilisation en ligne d'un SOF en fait l'une des lois de commande les plus faciles à mettre en œuvre lors d'une utilisation sur un système réel. Ainsi, on considère la loi de commande par retour de sortie statique non-PDC donnée par :

$$u(t) = \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i \right) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) X_i^5 \right)^{-1} y(t) \quad (5.6)$$

où  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times q}$  et  $X_i^5 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  sont des matrices réelles à synthétiser.

Dès lors, afin de tirer parti de la propriété de redondance des descripteurs, la loi de commande SOF non-PDC (5.6) peut être réécrite telle que :

$$0\dot{u}(t) = -u(t) + K_h (X_h^5)^{-1} y(t) \quad (5.7)$$

En considérant (5.1) réécrit sous la forme redondante (5.3) ainsi que (5.6) et le vecteur d'état augmenté  $x^*(t) = [x^T(t) \ y^T(t) \ u^T(t)]^T$ , la dynamique de la boucle fermée peut être exprimée par le descripteur :

$$E^* \dot{x}^*(t) = (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t)) x^*(t) + F_h^* \varphi(t) \quad (5.8)$$

$$\text{avec } E^* = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{hh}^* = \begin{bmatrix} A_h & 0 & B_h \\ C_h & -I & D_h \\ 0 & K_h (X_h^5)^{-1} & -I \end{bmatrix}, \Delta A_h^*(t) = \begin{bmatrix} \Delta A_h(t) & 0 & \Delta B_h(t) \\ \Delta C_h(t) & 0 & \Delta D_h(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$F_h^* = \begin{bmatrix} F_h \\ G_h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Notons qu'une fois de plus, deux dynamiques « *virtuelles* » ( $\dot{y}(t)$  et  $\dot{u}(t)$ ) ont été introduites pour formuler la BFR (5.8). Par conséquent, le problème de stabilisation du système (5.1) par retour de sortie statique (Static Output Feedback) (SOF) de type non-PDC (5.6) revient à vérifier la stabilité de la BFR décrite par le descripteur (5.8). De plus, l'approche redondante permettant de s'affranchir du couplage entrée-sortie, l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  sera également facilitée dans le cas général faisant intervenir une équation de sortie quelconque ( $C_i$  et  $D_i$  quelconques).

### 5.3. Approches non quadratiques de synthèse de contrôleurs par retour de sortie pour les systèmes T-S incertains

Dans cette section, notre objectif est de proposer des approches non quadratiques exprimées en terme de  $\mathcal{LMI}$  pour la stabilisation par retour de sortie des modèles T-S incertains standards (5.1) sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ). Dans un premier temps, nous traiterons le cas de la synthèse d'un compensateur dynamique par un contrôleur par retour de sortie puis par un retour de sortie statique.

#### 5.3.1. Synthèse non quadratique de contrôleurs par retour de sortie dynamique

Dans cette section, nous traitons le cas de synthèse de DOFC (5.2) pour la classe des systèmes T-S (5.1) sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ). Le résultat, fourni en termes de  $\mathcal{LMI}$ , est résumé par le théorème suivant.

**Théorème 5.1 :** [Guelton et al., 2009]

Soient  $\forall z(t)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ ,  $\dot{h}_k(z(t)) \geq \phi_k$ . Le modèle T-S (5.1) avec ( $\varphi(t) = 0$ ) est globalement asymptotiquement stable via le DOFC non-PDC (5.2) s'il existe, pour  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , des matrices  $X_j^1 = (X_j^1)^T > 0$ ,  $X_j^6 = (X_j^6)^T > 0$ ,  $X_j^{11}$ ,  $X_j^{13}$ ,  $X_j^{14}$ ,  $X_j^{15}$ ,  $X_j^{16}$ ,  $\bar{A}_i$ ,  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{C}_i$  et  $\bar{D}_i$ , ainsi que des scalaires positifs  $\epsilon_{ij}^{1a}$ ,  $\epsilon_{ij}^{6a}$ ,  $\epsilon_{ij}^{13b}$ ,  $\epsilon_{ij}^{14b}$ ,  $\epsilon_{ij}^{15b}$ ,  $\epsilon_{ij}^{16b}$ ,  $\epsilon_{ij}^{1c}$ ,  $\epsilon_{ij}^{6c}$ ,  $\epsilon_{ij}^{13d}$ ,  $\epsilon_{ij}^{14d}$ ,  $\epsilon_{ij}^{15d}$  et  $\epsilon_{ij}^{16d}$ , tels que les conditions  $\mathcal{LMI}$  suivantes soient vérifiées :

$$\Gamma_{ii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{r-1}\Gamma_{ii} + \frac{1}{2}(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (5.10)$$

$$X_k^1 - X_r^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.11)$$

$$X_k^6 - X_r^6 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.12)$$

où

$$\Gamma_{ij} = \left[ \begin{array}{cccc|c} \Gamma_{ij}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) & \\ \Gamma_{ij}^{(2,1)} & \Gamma_{ij}^{(2,2)} & (*) & (*) & (*) \\ \Gamma_{ij}^{(3,1)} & C_i X_j^6 + D_i X_j^{14} + \bar{B}_i^T & \Gamma_{ij}^{(3,3)} & (*) & \\ \hline \bar{C}_i - X_j^{13} + (X_j^{16})^T B_i^T & \bar{C}_i - X_j^{14} & \bar{D}_i + (X_j^{16})^T D_i^T - X_j^{15} & -X_j^{16} - (X_j^{16})^T & \chi_{ij} \end{array} \right]$$

$$\Gamma_{ij}^{(1,1)} = A_i X_j^1 + (X_j^1)^T A_i^T + B_i X_j^{13} + (X_j^{13})^T B_i^T - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (X_k^1 - X_r^1) + (\varepsilon_{ij}^{1a} + \varepsilon_{ij}^{6a}) H_i^a (H_i^a)^T +$$

$$(\varepsilon_{ij}^{13b} + \varepsilon_{ij}^{14b} + \varepsilon_{ij}^{15b} + \varepsilon_{ij}^{16b}) H_i^b (H_i^b)^T + \varepsilon_{ij}^{1c} H_i^c (H_i^c)^T + \varepsilon_{ij}^{13d} H_i^d (H_i^d)^T,$$

$$\Gamma_{ij}^{(2,1)} = \bar{A}_i + X_j^6 A_i^T + (X_j^{14})^T B_i^T - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (X_k^6 - X_r^6), \quad \Gamma_{ij}^{(3,1)} = C_i X_j^1 + D_i X_j^{13} + (X_j^{15})^T B_i^T,$$

$$\Gamma_{ij}^{(2,2)} = \bar{A}_i + \bar{A}_i^T - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (X_k^6 - X_r^6) + \varepsilon_{ij}^{6c} H_i^c (H_i^c)^T + \varepsilon_{ij}^{14d} H_i^d (H_i^d)^T,$$

$$\Gamma_{ij}^{(3,3)} = D_i X_j^{15} + (X_j^{15})^T D_i^T - X_j^{11} - (X_j^{11})^T + (\varepsilon_{ij}^{15d} + \varepsilon_{ij}^{16d}) H_i^d (H_i^d)^T,$$

$$\chi_{ij} = -diag[\varepsilon_{ij}^{1a} I \quad \varepsilon_{ij}^{13b} I \quad \varepsilon_{ij}^{6a} I \quad \varepsilon_{ij}^{14b} I \quad \varepsilon_{ij}^{15d} I \quad \varepsilon_{ij}^{15b} I \quad \varepsilon_{ij}^{1c} I \quad \varepsilon_{ij}^{13d} I \quad \varepsilon_{ij}^{6c} I \quad \varepsilon_{ij}^{14d} I \quad \varepsilon_{ij}^{16b} I \quad \varepsilon_{ij}^{16d} I] \text{ et}$$

$$\Omega_{ij} = \left[ \begin{array}{cccc} N_i^a X_j^1 & 0 & 0 & 0 \\ N_i^b X_j^{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^a X_j^6 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^b X_j^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^d X_j^{15} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^b X_j^{15} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^c X_j^1 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^d X_j^{13} & 0 \\ 0 & 0 & N_i^c X_j^6 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^d X_j^{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i^b X_j^{16} \\ 0 & 0 & 0 & N_i^d X_j^{16} \end{array} \right].$$

**Preuve :**

Pour étudier la stabilité de la dynamique de la BFR (5.5), on considère la FLF suivante :

$$V(x(t), \bar{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_h)^{-1} \tilde{x}(t) \quad (5.13)$$

avec la condition de symétrie :

$$\tilde{E} (\tilde{X}_h)^{-1} = \left( (\tilde{X}_h)^{-1} \right)^T \tilde{E} > 0 \quad (5.14)$$

On considère la matrice de la fonction candidate non quadratique de Lyapunov de la forme suivante :

$$\tilde{X}_h = \begin{bmatrix} X_h^1 & X_h^2 & X_h^3 & X_h^4 \\ X_h^5 & X_h^6 & X_h^7 & X_h^8 \\ X_h^9 & X_h^{10} & X_h^{11} & X_h^{12} \\ X_h^{13} & X_h^{14} & X_h^{15} & X_h^{16} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

En multipliant à gauche et à droite (5.14) respectivement par  $\tilde{X}_h^T$  et  $\tilde{X}_h$ , on obtient :

$$\tilde{X}_h^T \tilde{E} = \tilde{E} \tilde{X}_h > 0 \quad (5.16)$$

A partir de (5.5), (5.15) et (5.16), on obtient  $X_h^1 = (X_h^1)^T > 0$ ,  $X_h^6 = (X_h^6)^T > 0$ ,  $X_h^2 = (X_h^5)^T$  et  $X_h^3 = X_h^4 = X_h^7 = X_h^8 = 0$ .

La dynamique de la BFR (5.5) est stable si :

$$\dot{V}(x(t), \bar{x}(t)) = \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_h)^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{E} (\tilde{X}_h)^{-1} \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{x}^T(t) \overline{\tilde{E} (\tilde{X}_h)^{-1}} \tilde{x}(t) < 0 \quad (5.17)$$

En considérant (5.16) et (5.5), (5.17) est vérifiée  $\forall \tilde{x}(t)$  si :

$$\left( \tilde{A}_{hh}^T + \Delta \tilde{A}_h^T(t) \right) (\tilde{X}_h)^{-1} + (\tilde{X}_h)^{-T} \left( \tilde{A}_{hh} + \Delta \tilde{A}_h(t) \right) + \overline{\tilde{E} (\tilde{X}_h)^{-1}} < 0 \quad (5.18)$$

En multipliant (5.18) respectivement à gauche et à droite par  $\tilde{X}_h^T$  et  $\tilde{X}_h$ , on obtient :

$$\tilde{X}_h^T \left( \tilde{A}_{hh}^T + \Delta \tilde{A}_h^T(t) \right) + \left( \tilde{A}_{hh} + \Delta \tilde{A}_h(t) \right) \tilde{X}_h + \tilde{E} \tilde{X}_h^T \overline{(\tilde{X}_h)^{-1}} \tilde{X}_h < 0 \quad (5.19)$$

On rappelle que  $\tilde{X}_h \overline{(\dot{\tilde{X}}_h)^{-1}} \tilde{X}_h = -\dot{\tilde{X}}_h$ , (5.19) peut être réécrite sous la forme :

$$\Psi_{hhh} + \Delta\Psi_{hh}(t) - \tilde{E}\tilde{X}_h < 0 \quad (5.20)$$

avec  $\Psi_{hhh} = \tilde{X}_h^T \tilde{A}_{hh}^T + \tilde{A}_{hh} \tilde{X}_h$  et  $\Delta\Psi_{hh}(t) = \tilde{X}_h^T \Delta\tilde{A}_h^T(t) + \Delta\tilde{A}_h(t) \tilde{X}_h$

En se basant sur les matrices définies dans (5.5) et (5.15), le développement mathématique de (5.20) mène à :

$$\Psi_{hhh} = \begin{bmatrix} \Psi_{hh}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ \Psi_{hhh}^{(2,1)} & \Psi_{hhh}^{(2,2)} & (*) & (*) \\ \Psi_{hh}^{(3,1)} & \Psi_{hh}^{(3,2)} & \Psi_{hh}^{(3,3)} & (*) \\ \Psi_{hhh}^{(4,1)} & \Psi_{hhh}^{(4,2)} & \Psi_{hh}^{(4,3)} & \Psi_{hhh}^{(4,4)} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

où  $\Psi_{hh}^{(1,1)} = A_h X_h^1 + (X_h^1)^T A_h^T + B_h X_h^{13} + (X_h^{13})^T B_h^T$ ,  $\Psi_{hh}^{(3,1)} = C_h X_h^1 - X_h^9 + D_h X_h^{13} + (X_h^{15})^T B_h^T$ ,

$\Psi_{hhh}^{(2,1)} = \bar{A}_h (X_h^6)^{-1} (X_h^2)^T + (X_h^2)^T A_h^T + \bar{B}_h (X_h^{11})^{-1} X_h^9 + (X_h^{14})^T B_h^T$ ,

$\Psi_{hh}^{(3,3)} = D_h X_h^{15} + (X_h^{15})^T D_h^T - X_h^{11} - (X_h^{11})^T$ ,  $\Psi_{hh}^{(3,2)} = C_h X_h^2 - X_h^{10} + D_h X_h^{14} + \bar{B}_h^T$ ,

$\Psi_{hhh}^{(4,1)} = \bar{C}_h (X_h^6)^{-1} (X_h^2)^T + \bar{D}_h (X_h^{11})^{-1} X_h^9 - X_h^{13} + (X_h^{16})^T B_h^T$ ,

$\Psi_{hhh}^{(2,2)} = \bar{A}_h + \bar{A}_h^T + \bar{B}_h (X_h^{11})^{-1} X_h^{10} + (X_h^{10})^T \left( (X_h^{11})^{-1} \right)^T \bar{B}_h^T$ ,

$\Psi_{hh}^{(4,3)} = \bar{D}_h + (X_h^{16})^T D_h^T - X_h^{15} - (X_h^{12})^T$ ,

$\Psi_{hhh}^{(4,2)} = \bar{C}_h - X_h^{14} + \bar{D}_h (X_h^{11})^{-1} X_h^{10} + (X_h^{12})^T \left( (X_h^{11})^{-1} \right)^T \bar{B}_h^T$

et  $\Psi_{hhh}^{(4,4)} = \bar{D}_h (X_h^{11})^{-1} X_h^{12} + (X_h^{12})^T \left( (X_h^{11})^{-1} \right)^T \bar{D}_h^T - X_h^{16} - (X_h^{16})^T$ .

Rappelons qu'ici, la fonction candidate de Lyapunov utilisée pour étudier la stabilité de (5.5) est non quadratique. Ainsi, à partir de (5.16), on constate que les variables de décisions  $X_h^9$ ,  $X_h^{10}$ ,  $X_h^{11}$ ,  $X_h^{12}$ ,  $X_h^{13}$ ,  $X_h^{14}$ ,  $X_h^{15}$  et  $X_h^{16}$  sont libres en choix. Considérant (5.21), une solution pour proposer les conditions de stabilisation en termes de  $\mathcal{LMI}$  serait de choisir ces matrices  $X_h^9 \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $X_h^{10} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $X_h^{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  et  $X_h^{12} \in \mathbb{R}^{q \times m}$  de cette façon  $X_h^6 = X_h^2$ ,  $X_h^9 = X_h^{10} = 0$  et  $X_h^{12} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\tilde{X}_h = \begin{bmatrix} X_h^1 & X_h^6 & 0 & 0 \\ X_h^6 & X_h^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_h^{11} & 0 \\ X_h^{13} & X_h^{14} & X_h^{15} & X_h^{16} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Afin de garantir l'inversibilité de  $\tilde{X}_h$ , la matrice bloc  $\begin{bmatrix} X_h^{11} & 0 \\ X_h^{15} & X_h^{16} \end{bmatrix}$  doit être inversible, ce qui implique que les matrices  $X_h^{11}$  et  $X_h^{16}$  doivent être inversibles.

En se basant sur (5.22), l'inégalité (5.21) devient :

$$\Psi_{hh} = \begin{bmatrix} \Psi_{hh}^{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}_h + X_h^6 A_h^T + (X_h^{14})^T B_h^T & \bar{A}_h + (\bar{A}_h)^T & (*) & (*) \\ \begin{pmatrix} C_h X_h^1 + D_h X_h^{13} \\ + (X_h^{15})^T B_h^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_h X_h^6 + \bar{B}_h^T \\ + D_h X_h^{14} \end{pmatrix} & \Psi_{hh}^{(3,3)} & (*) \\ \bar{C}_h - X_h^{13} + (X_h^{16})^T B_h^T & \bar{C}_h - X_h^{14} & \bar{D}_h + (X_h^{16})^T D_h^T - X_h^{15} & -X_h^{16} - (X_h^{16})^T \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

D'autre part, en considérant les matrices d'incertitudes présentées dans (5.1) et (5.22), le développement mathématique de  $\Delta\Psi_{hh}(t)$  défini dans (5.20) conduit à :

$$\Delta\Psi_{hh}(t) = \begin{bmatrix} \Delta\Psi_{hh}^{(1,1)}(t) & (*) & (*) & (*) \\ \Delta\Psi_{hh}^{(2,1)}(t) & 0 & (*) & 0 \\ \Delta\Psi_{hh}^{(3,1)}(t) & \Delta\Psi_{hh}^{(3,2)}(t) & \Delta\Psi_{hh}^{(3,3)}(t) & (*) \\ (X_h^{16})^T (N_h^b)^T (f_h^b(t))^T (H_h^b)^T & 0 & (X_h^{16})^T (N_h^d)^T (f_h^d(t))^T (H_h^d)^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

avec

$$\Delta\Psi_{hh}^{(1,1)}(t) = H_h^a f_h^a(t) N_h^a X_h^1 + (X_h^1)^T (H_h^a f_h^a(t) N_h^a)^T + H_h^b f_h^b(t) N_h^b X_h^{13} + (X_h^{13})^T (H_h^b f_h^b(t) N_h^b)^T$$

$$\Delta\Psi_{hh}^{(2,1)}(t) = X_h^6 (N_h^a)^T (f_h^a(t))^T (H_h^a)^T + (X_h^{14})^T (N_h^b)^T (f_h^b(t))^T (H_h^b)^T,$$

$$\Delta\Psi_{hh}^{(3,1)}(t) = (X_h^{15})^T (N_h^b)^T (f_h^b(t))^T (H_h^b)^T + H_h^c f_h^c(t) N_h^c X_h^1 + H_h^d f_h^d(t) N_h^d X_h^{13},$$

$$\Delta\Psi_{hh}^{(3,2)}(t) = H_h^c f_h^c(t) N_h^c X_h^6 + H_h^d f_h^d(t) N_h^d X_h^{14} \quad \text{et}$$

$$\Delta\Psi_{hh}^{(3,3)}(t) = H_h^a f_h^d(t) N_h^a X_h^{15} + (X_h^{15})^T (H_h^a f_h^d(t) N_h^a)^T.$$

Rappelons que  $f_h^a(t)(f_h^a(t))^T \leq I$ ,  $(f_h^b(t))(f_h^b(t))^T \leq I$ ,  $(f_h^c(t))(f_h^c(t))^T \leq I$  et  $(f_h^d(t))(f_h^d(t))^T \leq I$ , en utilisant le lemme 2 (annexe A), (5.24) peut être majorée par :

$$\Delta\Psi_{hh}(t) \leq \Delta\bar{\Psi}_{hh}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{hh}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Psi}_{hh}^{(2,2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Psi}_{hh}^{(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Psi}_{hh}^{(4,4)} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

avec

$$\bar{\Psi}_{hh}^{(1,1)} = \left( \begin{array}{l} \left( \varepsilon_{hh}^{1a} + \varepsilon_{hh}^{6a} \right) H_h^a \left( H_h^a \right)^T + \left( \varepsilon_{hh}^{13b} + \varepsilon_{hh}^{14b} + \varepsilon_{hh}^{15b} + \varepsilon_{hh}^{16b} \right) H_h^b \left( H_h^b \right)^T + \varepsilon_{hh}^{1c} H_h^c \left( H_h^c \right)^T \\ + \varepsilon_{hh}^{13d} H_h^d \left( H_h^d \right)^T + \left( \varepsilon_{hh}^{1a} \right)^{-1} X_h^1 \left( N_h^a \right)^T N_h^a X_h^1 + \left( \varepsilon_{hh}^{13b} \right)^{-1} \left( X_h^{13} \right)^T \left( N_h^b \right)^T N_h^b X_h^{13} \end{array} \right),$$

$$\bar{\Psi}_{hh}^{(2,2)} = \varepsilon_{hh}^{6c} H_h^c \left( H_h^c \right)^T + \varepsilon_{hh}^{14d} H_h^d \left( H_h^d \right)^T + \left( \varepsilon_{hh}^{6a} \right)^{-1} X_h^6 \left( N_h^a \right)^T N_h^a X_h^6 + \left( \varepsilon_{hh}^{14b} \right)^{-1} \left( X_h^{14} \right)^T \left( N_h^b \right)^T N_h^b X_h^{14}$$

$$\bar{\Psi}_{hh}^{(3,3)} = \left( \begin{array}{l} \left( \varepsilon_{hh}^{15d} + \varepsilon_{hh}^{16d} \right) H_h^d \left( H_h^d \right)^T + \left( \varepsilon_{hh}^{15d} \right)^{-1} \left( X_h^{15} \right)^T \left( N_h^d \right)^T N_h^d X_h^{15} + \left( \varepsilon_{hh}^{15b} \right)^{-1} \left( X_h^{15} \right)^T \left( N_h^b \right)^T N_h^b X_h^{15} \\ + \left( \varepsilon_{hh}^{1c} \right)^{-1} X_h^1 \left( N_h^c \right)^T N_h^c X_h^1 + \left( \varepsilon_{hh}^{13d} \right)^{-1} \left( X_h^{13} \right)^T \left( N_h^d \right)^T N_h^d X_h^{13} + \left( \varepsilon_{hh}^{6c} \right)^{-1} X_h^6 \left( N_h^c \right)^T N_h^c X_h^6 \\ + \left( \varepsilon_{hh}^{14d} \right)^{-1} \left( X_h^{14} \right)^T \left( N_h^d \right)^T N_h^d X_h^{14} \end{array} \right)$$

et  $\bar{\Psi}_{hh}^{(4,4)} = \left( \varepsilon_{hh}^{16b} \right)^{-1} \left( X_h^{16} \right)^T \left( N_h^b \right)^T N_h^b X_h^{16} + \left( \varepsilon_{hh}^{16d} \right)^{-1} \left( X_h^{16} \right)^T \left( N_h^d \right)^T N_h^d X_h^{16}.$

En appliquant le complément de Schur, (5.25) peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta \bar{\Psi}_{hh}(t) = \Lambda_{hh} - \Omega_{hh}^T \chi_{hh}^{-1} \Omega_{hh} \quad (5.26)$$

$$\text{avec } \Lambda_{hh} = \begin{bmatrix} \Lambda_{hh}^{(1,1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{hh}^{6c} H_h^c \left( H_h^c \right)^T + \varepsilon_{hh}^{14d} H_h^d \left( H_h^d \right)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \varepsilon_{hh}^{15d} + \varepsilon_{hh}^{16d} \right) H_h^d \left( H_h^d \right)^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{hh}^{(1,1)} = \left( \varepsilon_{hh}^{1a} + \varepsilon_{hh}^{6a} \right) H_h^a \left( H_h^a \right)^T + \left( \varepsilon_{hh}^{13b} + \varepsilon_{hh}^{14b} + \varepsilon_{hh}^{15b} + \varepsilon_{hh}^{16b} \right) H_h^b \left( H_h^b \right)^T + \varepsilon_{hh}^{1c} H_h^c \left( H_h^c \right)^T + \varepsilon_{hh}^{13d} H_h^d \left( H_h^d \right)^T$$

$$\chi_{hh} = -\text{diag} \left[ \varepsilon_{hh}^{1a} I \quad \varepsilon_{hh}^{13b} I \quad \varepsilon_{hh}^{6a} I \quad \varepsilon_{hh}^{14b} I \quad \varepsilon_{hh}^{15d} I \quad \varepsilon_{hh}^{15b} I \quad \varepsilon_{hh}^{1c} I \quad \varepsilon_{hh}^{13d} I \quad \varepsilon_{hh}^{6c} I \quad \varepsilon_{hh}^{14d} I \quad \varepsilon_{hh}^{16b} I \quad \varepsilon_{hh}^{16d} I \right]$$

$$\text{et } \Omega_{hh} = \begin{bmatrix} N_h^a X_h^1 & 0 & 0 & 0 \\ N_h^b X_h^{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_h^a X_h^6 & 0 & 0 \\ 0 & N_h^b X_h^{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_h^d X_h^{15} & 0 \\ 0 & 0 & N_h^b X_h^{15} & 0 \\ 0 & 0 & N_h^c X_h^1 & 0 \\ 0 & 0 & N_h^d X_h^{13} & 0 \\ 0 & 0 & N_h^c X_h^6 & 0 \\ 0 & 0 & N_h^d X_h^{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_h^b X_h^{16} \\ 0 & 0 & 0 & N_h^d X_h^{16} \end{bmatrix}.$$

D'autre part, en supposant  $\dot{h}(z(t)) \geq \phi_k$  avec  $\phi_k < 0$ , on peut écrire (voir preuve du théorème 3.1 pour plus de détails) :

$$\dot{\tilde{E}\tilde{X}}_h \geq \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (\tilde{E}\tilde{X}_k - \tilde{E}\tilde{X}_r) \quad (5.27)$$

sous la condition:

$$\tilde{E}\tilde{X}_k - \tilde{E}\tilde{X}_r \geq 0 \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1.$$

En considérant (5.23), (5.26) et (5.27), l'inégalité (5.20) est majorée par :

$$\Psi_{hh} + \Lambda_{hh} - \Omega_{hh}^T \chi_{hh}^{-1} \Omega_{hh} - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (\tilde{E}\tilde{X}_k - \tilde{E}\tilde{X}_r) < 0 \quad (5.28)$$

En appliquant le complément de Schur, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{hh} + \Lambda_{hh} - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (\tilde{E}\tilde{X}_k - \tilde{E}\tilde{X}_r) & (*) \\ \Omega_{hh} & \chi_{hh}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.29)$$

En développant (5.29) à l'aide des matrices définies en (5.23), (5.26) et (5.5), puis en appliquant le schéma de relaxation donné par le lemme 3.1 (chapitre 1) [Tuan et al., 2001], on obtient les conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées au théorème 5.1. ■

### Remarque 5.1

A partir de l'expression (5.2), nous remarquons que la synthèse d'une loi de commande par le retour de sortie dynamique impose une condition de non singularité sur les matrices  $X_h^6$  et  $X_h^{11}$ . Celle-ci est vérifiée si  $X_j^6$ , pour  $j = 1, 2, \dots, r$ , sont des solutions du théorème 5.1. En effet,  $X_j^6 = (X_j^6)^T > 0$  est imposée par (5.16), de ce fait  $X_h^6$  est une matrice non singulière. Par ailleurs, si les conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées dans le théorème 5.1 sont vérifiées alors (5.13) est une fonction de Lyapunov et  $\tilde{X}_h$  est une matrice non singulière vérifiant l'inégalité (5.17). Par conséquent, d'après (5.22),  $X_h^{11}$  existe est non singulière.

### 5.3.2. Synthèse non quadratique de contrôleurs par retour de sortie statique

Nous évoquons dans cette partie le problème de la synthèse de lois de commande en retour de sortie statique non-PDC pour les modèles T-S standards (5.1) avec  $(\varphi(t) \neq 0)$ . Les conditions de stabilité exprimées en termes de  $\mathcal{LMI}$  sont résumées par le théorème suivant.

**Théorème 5.2 :**

Soient  $\forall z(t)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ ,  $\dot{h}(z(t)) \geq \phi_k$ . Le modèle T-S (5.1) non perturbé ( $\varphi(t) \neq 0$ ) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande non-PDC par retour de sortie statique (5.6) s'il existe, pour  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , des matrices  $X_j^1 = (X_j^1)^T > 0$ ,  $X_j^5 = (X_j^5)^T > 0$ ,  $X_j^7$ ,  $X_j^8$ ,  $X_j^9$ ,  $K_i$ , ainsi que des scalaires positifs  $\varepsilon_{ij}^{1a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{1c}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{7b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{7d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{8b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{8d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{9b}$  et  $\varepsilon_{ij}^{9d}$ , tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées :

$$\Pi_{ii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{r-1} \Pi_{ii} + \frac{1}{2} (\Pi_{ij} + \Pi_{ji}) < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (5.31)$$

$$X_k^1 - X_r^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.32)$$

où  $\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} \xi_{ij} + \mathbf{T}_{ij} & (*) \\ \varpi_{ij} & -\vartheta_{ij} \end{bmatrix}$ ,

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} A_i X_j^1 + (X_j^1)^T A_i^T + B_i X_j^7 \\ + (X_j^7)^T B_i^T - \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (X_1^k - X_1^r) \end{array} \right) & (*) & (*) \\ (X_j^8)^T B_i^T + C_i X_j^1 + D_i X_j^7 & -X_j^5 - (X_j^5)^T + D_i X_j^8 + (X_j^8)^T D_i^T & (*) \\ (X_j^9)^T B_i^T - X_j^7 & (X_j^9)^T D_i^T + K_i - X_j^8 & -X_j^9 - (X_j^9)^T \end{bmatrix},$$

$$\varpi_{ij} = \begin{bmatrix} N_i^a X_j^1 & 0 & 0 \\ N_i^b X_j^7 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^c X_j^1 & 0 \\ 0 & N_i^b X_j^8 & 0 \\ 0 & N_i^d X_j^7 & 0 \\ 0 & N_i^d X_j^8 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^b X_j^9 \\ 0 & 0 & N_i^d X_j^9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij}^{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_{ij}^{8d} + \varepsilon_{ij}^{9d}) H_i^d (H_i^d)^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{(1,1)} = \varepsilon_{ij}^{1a} H_i^a (H_i^a)^T + (\varepsilon_{ij}^{7b} + \varepsilon_{ij}^{8b} + \varepsilon_{ij}^{9b}) H_i^b (H_i^b)^T + \varepsilon_{ij}^{1c} H_i^c (H_i^c)^T + \varepsilon_{ij}^{7d} H_i^d (H_i^d)^T$$

et  $\vartheta_{ij} = \text{diag} [\varepsilon_{ij}^{1a} I \quad \varepsilon_{ij}^{7b} I \quad \varepsilon_{ij}^{1c} I \quad \varepsilon_{ij}^{8b} I \quad \varepsilon_{ij}^{7d} I \quad \varepsilon_{ij}^{8d} I \quad \varepsilon_{ij}^{9b} I \quad \varepsilon_{ij}^{9d} I]$ .

**Preuve :**

On considère la FLF donnée par :

$$V(x(t)) = (x^*(t))^T E^* (X_h^*)^{-1} x^*(t) \quad (5.33)$$

avec la condition de symétrie suivante :

$$E^* (X_h^*)^{-1} = \left( (X_h^*)^{-1} \right)^T E^* > 0 \quad (5.34)$$

Notons que la matrice  $X_h^*$  n'est pas identique à celle de la preuve du théorème 5.1 (équation (5.15)). Dans le cas du retour statique et par adéquation à la dimension du vecteur d'état

augmenté  $x^*(t)$ , nous considérons  $X_h^* = \begin{bmatrix} X_h^1 & X_h^2 & X_h^3 \\ X_h^4 & X_h^5 & X_h^6 \\ X_h^7 & X_h^8 & X_h^9 \end{bmatrix}$ . En multipliant (5.34) à gauche et à

droite respectivement par  $(X_h^*)^T$  et  $X_h^*$ , on obtient :

$$(X_h^*)^T E^* = E^* X_h^* > 0 \quad (5.35)$$

Le développement de la condition de symétrie (5.35), mène à  $X_h^1 = (X_h^1)^T > 0$ ,  $X_h^2 = 0$  et  $X_h^3 = 0$ .

La dynamique de la BFR (5.8) est globalement asymptotiquement stable si :

$$\dot{V}(x(t)) = (\dot{x}^*(t))^T E^* (X_h^*)^{-1} x^*(t) + (x^*(t))^T E^* (X_h^*)^{-1} \dot{x}^*(t) + (x^*(t))^T E^* \overline{(X_h^*)^{-1}} \dot{x}^*(t) \quad (5.36)$$

En considérant (5.8) et (5.35), (5.36) est vérifiée  $\forall x^*(t)$  si :

$$(A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t))^T (X_h^*)^{-1} + (X_h^*)^{-T} (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t)) + E^* \overline{(X_h^*)^{-1}} < 0 \quad (5.37)$$

En multipliant (5.37) respectivement à gauche et à droite par  $(X_h^*)^T$  et  $X_h^*$ , et en considérant (5.37), on obtient :

$$(X_h^*)^T (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t))^T + (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t)) X_h^* + E^* (X_h^*)^T \overline{(X_h^*)^{-1}} X_h^* < 0 \quad (5.38)$$

Rappelons que  $X_h^* \overline{(X_h^*)^{-1}} X_h^* = -\dot{X}_h^*$ , (5.38) peut être réécrite sous la forme :

$$\gamma_{hhh} + \Delta \gamma_{hh}(t) - E^* \dot{X}_h^* < 0 \quad (5.39)$$

avec  $\gamma_{hhh} = (X_h^*)^T (A_{hh}^*)^T + \tilde{A}_{hh}^* X_h^*$  et  $\Delta \gamma_{hh}(t) = X_h^* (\Delta A_h^*(t))^T + \Delta A_h^*(t) X_h^*$

Le développement mathématique du terme  $\gamma_{hhh}$  contenu dans la partie nominale de la BFR (5.8), mène à :

$$\mathcal{Y}_{hhh} = \begin{bmatrix} A_h X_h^1 + (X_h^1)^T A_h^T + B_h X_h^7 + (X_h^7)^T B_h^T - \dot{X}_h^1 & (*) & (*) \\ (X_h^8)^T B_h^T + C_h X_h^1 - X_h^4 + D_h X_h^7 & -X_h^5 - (X_h^5)^T + D_h X_h^8 + (X_h^8)^T D_h^T & (*) \\ (X_h^9)^T B_h^T + K_h (X_h^5)^{-1} X_h^4 - X_h^7 & (X_h^9)^T D_h^T + K_h - (X_h^6)^T - X_h^8 & \mathcal{Y}_{hh}^{(3,3)} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\text{où } \mathcal{Y}_{hhh}^{(3,3)} = K_h (X_h^5)^{-1} X_h^6 + (X_h^6)^T \left( (X_h^5)^{-1} \right)^T K_h^T - X_h^9 - (X_h^9)^T$$

D'après la FLF (5.33) et la condition de symétrie (5.35), les variables de décision  $X_h^4$ ,  $X_h^5$ ,  $X_h^6$ ,  $X_h^8$  et  $X_h^9$  sont des matrices libres de choix. Une manière de conduire à des conditions de stabilisation en termes de  $\mathcal{LMI}$  est de choisir les matrices  $X_h^4 = 0$  et  $X_h^6 = 0$ . Afin de garantir l'inversibilité de  $X_h^*$  (équation (5.33)), les matrices  $X_h^5$  et  $X_h^9$  doivent être inversibles. De ce fait, (5.40) devient :

$$\mathcal{Y}_{hh} = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} A_h X_h^1 + (X_h^1)^T A_h^T \\ + B_h X_h^7 + (X_h^7)^T B_h^T - \dot{X}_h^1 \end{array} \right) & (*) & (*) \\ (X_h^8)^T B_h^T + C_h X_h^1 + D_h X_h^7 & -X_h^5 - (X_h^5)^T + D_h X_h^8 + (X_h^8)^T D_h^T & (*) \\ (X_h^9)^T B_h^T - X_h^7 & (X_h^9)^T D_h^T + K_h - X_h^8 & -X_h^9 - (X_h^9)^T \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

En tenant compte de (5.41), la matrice d'incertitudes (5.39) peut être développée telle que :

$$\Delta \mathcal{Y}_{hh}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{Y}_{hh}^{(1,1)}(t) & (*) & (*) \\ \Delta \mathcal{Y}_{hh}^{(2,1)}(t) & H_h^d f_h^d(t) N_h^d X_h^8 + (X_h^8)^T (H_h^d f_h^d(t) N_h^d)^T & (*) \\ (X_h^9)^T (H_h^b f_h^b(t) N_h^b)^T & (X_h^9)^T (H_h^d f_h^d(t) N_h^d)^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\text{où } \Delta \mathcal{Y}_{hh}^{(1,1)}(t) = H_h^a f_h^a(t) N_h^a X_h^1 + (X_h^1)^T (H_h^a f_h^a(t) N_h^a)^T + H_h^b f_h^b(t) N_h^b X_h^7 + (X_h^7)^T (H_h^b f_h^b(t) N_h^b)^T$$

$$\text{et } \Delta \mathcal{Y}_{hh}^{(2,1)}(t) = (X_h^8)^T (N_h^b)^T (f_h^b(t))^T (H_h^b)^T + H_h^c f_h^c(t) N_h^c X_h^1 + H_h^d f_h^d(t) N_h^d X_h^7.$$

En utilisant le lemme 2 (annexe A), (5.42) peut être majorée par :

$$\Delta \mathcal{Y}_{hh}(t) \leq \Delta \bar{\mathcal{Y}}_{hh}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathcal{Y}}_{hh}^{(1,1)}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta \bar{\mathcal{Y}}_{hh}^{(2,2)}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \bar{\mathcal{Y}}_{hh}^{(3,3)}(t) \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\gamma}_{hh}^{(1,1)} &= \varepsilon_{hh}^{1a} H_h^a (H_h^a)^T + (\varepsilon_{hh}^{7b} + \varepsilon_{hh}^{8b} + \varepsilon_{hh}^{9b}) H_h^b (H_h^b)^T + \varepsilon_{hh}^{1c} H_h^c (H_h^c)^T \\ \text{où} \quad &+ \varepsilon_{hh}^{7d} H_h^d (H_h^d)^T + (\varepsilon_{hh}^{1a})^{-1} X_h^1 (N_h^a)^T N_h^a X_h^1 + (\varepsilon_{hh}^{7b})^{-1} (X_h^7)^T (N_h^b)^T N_h^b X_h^7, \\ \Delta \bar{\gamma}_{hh}^{(2,2)} &= (\varepsilon_{hh}^{8d} + \varepsilon_{hh}^{9d}) H_h^d (H_h^d)^T + (\varepsilon_{hh}^{1c})^{-1} (X_h^1)^T (N_h^c)^T N_h^c X_h^1 + (\varepsilon_{hh}^{8b})^{-1} (X_h^8)^T (N_h^b)^T N_h^b X_h^8 \\ &+ (\varepsilon_{hh}^{7d})^{-1} (X_h^7)^T (N_h^d)^T N_h^d X_h^7 + (\varepsilon_{hh}^{8d})^{-1} (X_h^8)^T (N_h^d)^T N_h^d X_h^8 \\ \text{et } \Delta \bar{\gamma}_{hh}^{(3,3)}(t) &= (\varepsilon_{hh}^{9b})^{-1} (X_h^9)^T (N_h^b)^T N_h^b X_h^9 + (\varepsilon_{hh}^{9d})^{-1} (X_h^9)^T (N_h^d)^T N_h^d X_h^9. \end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur, (5.43) peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta \gamma_{hh} = H_{hh} + Z_{hh}^T (M_{hh})^{-1} Z_{hh} \quad (5.44)$$

$$\text{avec } H_{hh} = \begin{bmatrix} H_{hh}^{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_{hh}^{8d} + \varepsilon_{hh}^{9d}) H_h^d (H_h^d)^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_{hh}^{(1,1)} = \varepsilon_{hh}^{1a} H_h^a (H_h^a)^T + (\varepsilon_{hh}^{7b} + \varepsilon_{hh}^{8b} + \varepsilon_{hh}^{9b}) H_h^b (H_h^b)^T + \varepsilon_{hh}^{1c} H_h^c (H_h^c)^T + \varepsilon_{hh}^{7d} H_h^d (H_h^d)^T,$$

$$Z_{hh} = \begin{bmatrix} N_h^a X_h^1 & 0 & 0 \\ N_h^b X_h^7 & 0 & 0 \\ 0 & N_h^c X_h^1 & 0 \\ 0 & N_h^b X_h^8 & 0 \\ 0 & N_h^d X_h^7 & 0 \\ 0 & N_h^d X_h^8 & 0 \\ 0 & 0 & N_h^b X_h^9 \\ 0 & 0 & N_h^d X_h^9 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } M_{hh} = \text{diag} \left[ \varepsilon_{hh}^{1a} I \quad \varepsilon_{hh}^{7b} I \quad \varepsilon_{hh}^{1c} I \quad \varepsilon_{hh}^{8b} I \quad \varepsilon_{hh}^{7d} I \quad \varepsilon_{hh}^{8d} I \quad \varepsilon_{hh}^{9b} I \quad \varepsilon_{hh}^{9d} I \right].$$

A partir de (5.41) et (5.44), en appliquant le complément de Schur sur le terme  $Z_{hh}^T (M_{hh})^{-1} Z_{hh}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{hh} + H_{hh} & (*) \\ Z_{hh} & -M_{hh} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.45)$$

Afin de fournir des conditions de stabilisation  $\mathcal{LMI}$ , le terme  $\dot{X}_h^1$  sera borné de la même manière que dans la preuve du théorème 5.1 (équation (5.27)). C'est-à-dire :

$$\dot{X}_h^1 = \sum_{k=1}^{r-1} \dot{h}_k(z) (X_k^1 - X_r^1) \geq \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (X_k^1 - X_r^1) \quad (5.46)$$

avec, pour  $k = 1, 2, \dots, r-1$ ,  $X_k^1 - X_r^1 \geq 0$  et  $\phi_k$  est la borne inférieure de  $\dot{h}_k(z)$ .

Enfin, à partir de (5.45), (5.46) et après application de schéma de relaxation donné par le lemme 3.1 (chapitre 1) [Tuan et al., 2001], on obtient les conditions de stabilisation  $\mathcal{LMI}$  proposées dans le théorème 5.2. ■

## 5.4. Extension à la synthèse de lois de commande robustes par retour de sortie pour les systèmes T-S incertains et perturbés

Dans cette section, afin de généraliser les résultats précédents à la classe des systèmes T-S incertains et perturbés représentée par (5.1), on considère le critère  $H_\infty$  suivant :

$$\int_0^T (y^T(t)y(t) - \lambda^2 \varphi^T(t)\varphi(t)) dt \leq 0 \quad (5.47)$$

Notons que la minimisation de (5.47) permet d'obtenir une atténuation optimale des perturbations externes  $\varphi(t)$  vis-à-vis des sorties  $y(t)$ . Notre but dans la suite est d'étendre les résultats précédents au cas des systèmes T-S standards incertains soumis à des perturbations externes.

### 5.4.1. Synthèse de contrôleurs robustes par retour de sortie dynamique

Dans le cas de la synthèse robuste d'un DOFC (5.2) et en considérant le vecteur d'état étendu  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \bar{x}^T(t) \quad y^T(t) \quad u^T(t)]^T$  utilisé pour écrire la BFR (5.5), le critère  $H_\infty$  (5.47) peut être réécrit sous la forme :

$$\int_0^T (\tilde{x}^T(t)\tilde{Q}\tilde{x}(t) - \lambda^2 \varphi^T(t)\varphi(t)) dt \leq 0 \quad (5.48)$$

$$\text{avec } \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'approche non quadratique garantissant simultanément la stabilisation de (5.1) via le DOFC (5.2) et l'atténuation de l'effet des perturbations externes  $\varphi(t)$  sous le critère  $H_\infty$  (5.48) est résumée dans le théorème suivant.

**Théorème 5.3 :** [Guelton et al., 2009]

Soient  $\forall z(t)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ ,  $\dot{h}_k(z(t)) \geq \phi_k$ . Le modèle T-S (5.1) est globalement asymptotiquement stable via le DOFC non-PDC (5.2) s'il existe, pour  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , des matrices  $X_j^1 = (X_j^1)^T > 0$ ,  $X_j^6 = (X_j^6)^T > 0$ ,  $X_j^{11}$ ,  $X_j^{13}$ ,  $X_j^{14}$ ,  $X_j^{15}$ ,  $X_j^{16}$ ,  $\bar{A}_i$ ,  $\bar{B}_i$ ,  $\bar{C}_i$  et  $\bar{D}_i$ , des scalaires positifs  $\varepsilon_{ij}^{1a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{6a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{13b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{14b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{15b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{16b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{1c}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{6c}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{13d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{14d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{15d}$  et  $\varepsilon_{ij}^{16d}$ , ainsi qu'un taux d'atténuation  $\lambda = \sqrt{\mu}$  à minimiser tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées :

$$\Phi_{ii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (5.49)$$

$$\frac{1}{r-1} \Phi_{ii} + \frac{1}{2} (\Phi_{ij} + \Phi_{ji}) < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (5.50)$$

$$X_k^1 - X_r^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.51)$$

$$X_k^6 - X_r^6 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.52)$$

où  $\Phi_{ij} = \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} & & & & & & 0 & (*) \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & \Gamma_{ij} & & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \hline & & \Omega_{ij} & & \chi_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & X_j^{11} & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ F_i^T & 0 & G_i^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I & \end{array} \right]$  et  $\Gamma_{ij}$ ,  $\Omega_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  définies dans le théorème 5.1.

**Preuve :**

La BFR (5.5) est globalement asymptotiquement stable sous le critère  $H_\infty$  (5.48) si :

$$\dot{V}(x(t), \bar{x}(t)) + \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) - \lambda^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \quad (5.53)$$

C'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T(t) & \left( \left( \tilde{A}_{hh}^T + \Delta \tilde{A}_{hh}^T(t) \right) (\tilde{X}_h)^{-1} + \left( (\tilde{X}_h)^{-1} \right)^T \left( \tilde{A}_{hh} + \Delta \tilde{A}_{hh}(t) \right) + \tilde{E} \overline{(\tilde{X}_h)^{-1}} + \tilde{Q} \right) \tilde{x}(t) \\ & + \varphi^T(t) \tilde{F}_h^T (\tilde{X}_h)^{-1} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \left( (\tilde{X}_h)^{-1} \right)^T \tilde{F}_h \varphi(t) - \lambda^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

La négativité de (5.54) est assurée  $\forall \tilde{x}(t)$  et  $\forall \varphi(t)$  si :

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \tilde{A}_{hh}^T + \Delta \tilde{A}_h^T(t) \right) \left( \tilde{X}_h \right)^{-1} + \left( \left( \tilde{X}_h \right)^{-1} \right)^T \left( \tilde{A}_{hh} + \Delta \tilde{A}_h(t) \right) + \tilde{E} \overline{\left( \tilde{X}_h \right)^{-1}} + \tilde{Q} \quad (*) \\ \tilde{F}_h^T \left( \tilde{X}_h \right)^{-1} \quad -\lambda^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (5.55)$$

En multipliant (5.55) à gauche et à droite respectivement par  $\begin{bmatrix} \tilde{X}_h^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} \tilde{X}_h & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\left[ \begin{array}{c} \tilde{X}_h^T \left( \tilde{A}_{hh}^T + \Delta \tilde{A}_h^T(t) \right) + \left( \tilde{A}_{hh} + \Delta \tilde{A}_h(t) \right) \tilde{X}_h + \tilde{E} \tilde{X}_h^T \overline{\left( \tilde{X}_h \right)^{-1}} \tilde{X}_h + \tilde{X}_h^T \tilde{Q} \tilde{X}_h \quad (*) \\ \tilde{F}_h^T \quad -\lambda^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (5.56)$$

Notons que,  $\tilde{X}_h^T \tilde{Q} \tilde{X}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( X_h^{11} \right)^T X_h^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . En suivant le même raisonnement que celui de

la preuve du théorème 5.1 pour traiter le premier bloc diagonal de (5.56) et en appliquant le complément de Schur sur le terme  $\left( X_h^{11} \right)^T X_h^{11}$  associé au changement de variable  $\mu = \lambda^2$ , on obtient les conditions du théorème 5.3 en appliquant le schéma de relaxation proposé par le lemme 3.1 (chapitre 1) [Tuan et al., 2001].

■

## 5.4.2. Synthèse de contrôleurs robustes par retour de sortie statique

Dans le cadre de la synthèse robuste d'un SOF (5.6) et en considérant le vecteur d'état étendu  $x^*(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & y^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}^T$  utilisé pour écrire la BFR (5.8), le critère  $H_\infty$  (5.47) peut être réécrit sous la forme :

$$\int_0^T \left( \left( x^*(t) \right)^T Q^* x^*(t) - \lambda^2 \varphi^T(t) \varphi(t) \right) dt \leq 0 \quad (5.57)$$

$$\text{avec } Q^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'approche non quadratique garantissant simultanément la stabilisation de (5.1) via le SOF (5.6) et l'atténuation de l'effet des perturbations externes  $\varphi(t)$  sous le critère  $H_\infty$  (5.57) est résumée dans le théorème suivant.

**Théorème 5.4 :**

Soient  $\forall z(t)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ ,  $\dot{h}(z(t)) \geq \phi_k$ . Le modèle T-S (5.1) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande SOF non-PDC (5.6) s'il existe, pour  $i, j = 1, 2, \dots, r$ , des matrices  $X_j^1 = (X_j^1)^T > 0$ ,  $X_j^5 = (X_j^5)^T > 0$ ,  $X_j^7$ ,  $X_j^8$ ,  $X_j^9$ ,  $K_i$ , ainsi que des scalaires positifs  $\varepsilon_{ij}^{1a}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{1c}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{7b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{7d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{8b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{8d}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{9b}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{9d}$  et un taux d'atténuation  $\lambda = \sqrt{\mu}$  à minimiser tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées

$$\Theta_{ii} < 0, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, r \quad (5.58)$$

$$\frac{1}{r-1} \Theta_{ii} + \frac{1}{2} (\Theta_{ij} + \Theta_{ji}) < 0, \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \quad (5.59)$$

$$X_k^1 - X_r^1 \geq 0, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, r-1 \quad (5.60)$$

$$\text{où } \Theta_{ij} = \begin{bmatrix} & & & & 0 & (*) \\ & \xi_{ij} + \mathbf{T}_{ij} & & & (*) & (*) \\ & & & & 0 & 0 \\ \hline & \varpi_{ij} & & -\vartheta_{ij} & 0 & 0 \\ \hline 0 & X_j^5 & 0 & 0 & -I & 0 \\ F_i^T & G_i^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} \text{ et les matrices } \xi_{ij}, \mathbf{T}_{ij}, \varpi_{ij} \text{ et } \vartheta_{ij} \text{ définies dans}$$

le théorème 5.2.

**Preuve :**

La stabilité de la BFR (5.8) est garantie sous le critère  $H_\infty$  (5.57) si :

$$\dot{V}(x(t)) + (x^*(t))^T Q^* x^*(t) - \lambda^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \quad (5.61)$$

à partir de (5.8) et (5.33), on obtient :

$$\begin{aligned} (x^*(t))^T & \left( (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t))^T (X_h^*)^{-1} + ((X_h^*)^{-1})^T (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t)) + E^* \overline{(X_h^*)^{-1}} + Q^* \right) \tilde{x}(t) \\ & + \varphi^T(t) (F_h^*)^T (X_h^*)^{-1} x^*(t) + (x^*(t))^T \left( (X_h^*)^{-1} \right)^T F_h^* \varphi(t) - \lambda^2 \varphi^T(t) \varphi(t) < 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

l'inégalité (5.62) est vérifiée  $\forall x^*(t)$  et  $\forall \varphi(t)$  si :

$$\begin{bmatrix} (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t))^T (X_h^*)^{-1} + ((X_h^*)^{-1})^T (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t)) + E^* \overline{(X_h^*)^{-1}} + Q^* & (*) \\ (F_h^*)^T (X_h^*)^{-1} & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.63)$$

En multipliant à gauche et à droite respectivement par  $\begin{bmatrix} (X_h^*)^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} X_h^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} (X_h^*)^T (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t))^T + (A_{hh}^* + \Delta A_h^*(t)) X_h^* + E^* (X_h^*)^T \overline{(X_h^*)^{-1}} X_h^* + (X_h^*)^T Q^* X_h^* & (*) \\ (F_h^*)^T & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.64)$$

En suivant le même chemin emprunté dans la preuve du théorème 5.4, l'inégalité (5.64) est vérifiée si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{hh} + H_{hh} + Z_{hh}^T (M_{hh})^{-1} Z_{hh} + (X_h^*)^T Q^* X_h^* & (*) \\ (F_h^*)^T & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.65)$$

Notons que,  $(X_h^*)^T Q^* X_h^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (X_h^5)^T X_h^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , en faisant le changement de variable  $\mu = \lambda^2$  et

en appliquant le complément de Schur, on obtient les conditions du théorème 5.4 relâchées par le lemme 3.1 (chapitre 1) [Tuan et al., 2001].

■

### Remarque 5.1

Tout comme les conditions non quadratiques exprimées au chapitre précédent, les conditions de stabilisation non quadratiques par retour de sortie proposées dans ce chapitre peuvent être réduites au cadre quadratique étendu afin de s'affranchir de la connaissance a priori des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance. Ainsi, en ce qui concerne la commande par retour de sortie dynamique, deux corollaires quadratiques étendus aux théorèmes 5.1 et 5.3 peuvent être obtenus en fixant  $X_i^1 = X_1$  et  $X_i^6 = X_6$  communes. De même, en ce qui concerne la commande par retour de sortie statique, deux corollaires quadratiques étendus peuvent également être obtenus en fixant  $X_i^1 = X_1$  commune dans les théorèmes 5.2 et 5.4.

### Remarque 5.2

Bien entendu, les conditions présentées au cours de ce chapitre restent applicables à la

commande des systèmes T-S sans incertitudes ( $\Delta A_i = 0$ ,  $\Delta B_i = 0$ ,  $\Delta C_i = 0$ ,  $\Delta D_i = 0$ ). Dans ce cas, on retrouve les conditions  $\mathcal{LMI}$  présentées dans [Guelton et al., 2008a] pour le retour de sortie dynamique et dans [Bouarar et al., 2009c] pour le retour de sortie statique.

## 5.5. Exemples numériques et simulations

Afin de montrer l'efficacité des approches proposées dans ce chapitre, nous considérons trois exemples numériques. Dans un premier temps, dans le cadre du retour de sortie dynamique, le conservatisme des conditions proposées (théorème 5.1) sera comparé à celui des conditions fournies dans [Li et al., 2000]. Ensuite, un second exemple permettra, dans le cadre du retour de sortie statique, de montrer l'intérêt en termes de conservatisme des conditions non quadratiques vis-à-vis des conditions quadratiques étendues. Enfin, un dernier exemple permettra d'apprécier les performances des contrôleurs dynamiques et statiques pour un modèle T-S incertain et perturbé.

### 5.5.1. Exemple 1 : évaluation du conservatisme pour le retour de sortie dynamique – approches classiques vs redondantes

L'objectif de cet exemple est de montrer l'intérêt, en termes de conservatisme, de l'approche redondante proposée vis-à-vis de conditions issues de la littérature. Ainsi, nous proposons d'étudier la faisabilité des conditions  $\mathcal{LMI}$  pour la synthèse de DOFC au travers des conditions non quadratiques redondantes données au théorème 5.1 vis-à-vis des conditions quadratiques proposées dans [Li et al., 2000]. Notons que le choix est porté sur cette dernière référence car, à notre connaissance, il s'agit des seules conditions  $\mathcal{LMI}$  existantes, hormis celles proposées dans le cadre de cette thèse, permettant la stabilisation des systèmes décrits par (5.1) (sans incertitudes paramétriques et sans perturbations externes) sans nécessiter la réalisation d'hypothèses restrictives telles que  $C_i = C$  commune et  $D_i = 0$ . Notons enfin que les conditions proposées dans [Li et al., 2000] sont quadratiques et qu'elles sont basées sur l'utilisation du produit de Redheffer [Redheffer, 1960]. Ainsi, on considère le système T-S donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (5.66)$$

$$\text{où } A_1 = \begin{bmatrix} -5a & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3b \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  et  $D_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ , tels que  $a$  et  $b$  sont deux paramètres dédiés à l'étude des domaines de faisabilité.

Rappelons que les conditions du théorème 5.1 sont non quadratiques, afin de les exploiter nous

choisissons  $\phi_1 = -2$ . En utilisant Matlab LMI Toolbox [Gahinet et al., 1995], les domaines de solutions des théorèmes 5.1 (en considérant  $\Delta A_i = 0$ ,  $\Delta B_i = 0$ ,  $\Delta C_i = 0$  et  $\Delta D_i = 0$ ) et du théorème 2 dans [Li et al., 2000] sont présentés à la Figure 5.1 pour  $a \in [-5 \ 20]$ ,  $b \in [-20 \ 0]$ . Evidemment, les conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées au théorème 5.1 étant non quadratiques, elles fournissent le résultat le moins conservatif.

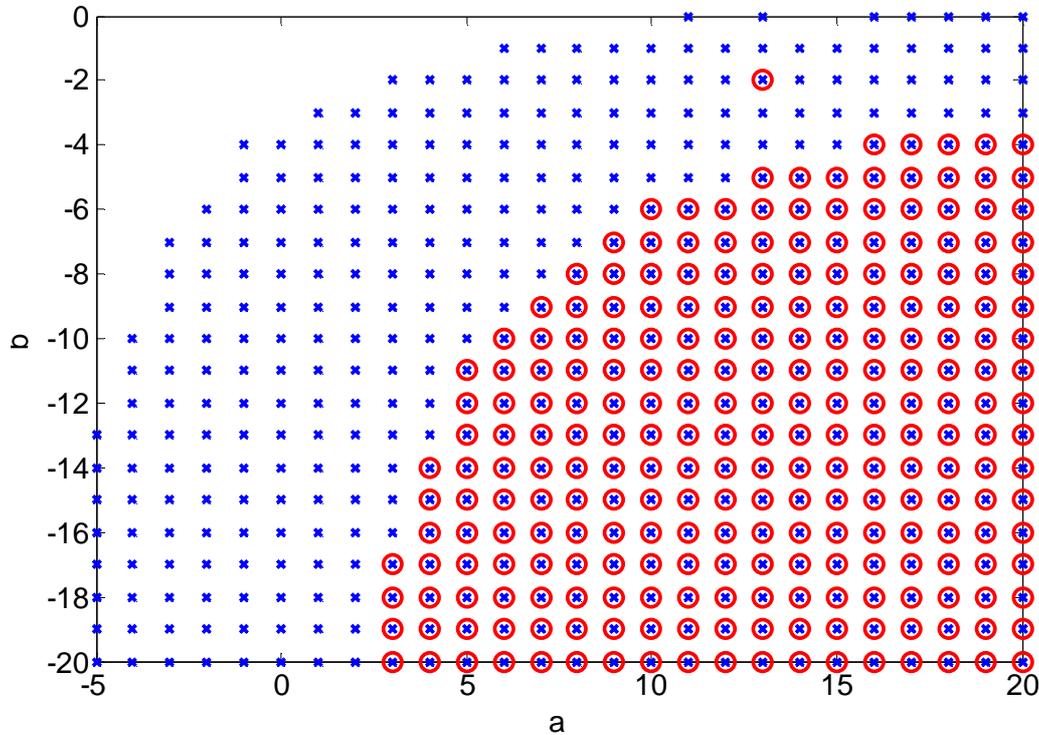


Figure 5.1. Domaine de solutions du Théorème 5.1 ( $\times$ ) vs [Li et al., 2000] (théorème 2) ( $\circ$ ).

### 5.5.2. Exemple 2 : intérêt de l'approche non quadratique vs quadratique – cas du retour de sortie statique soumis à perturbations externes

La résolution des conditions de stabilité non quadratiques nécessite de choisir arbitrairement des bornes de variables dont on ne peut objectivement pas connaître l'exactitude avant d'avoir réalisé la synthèse d'une loi de commande et, par conséquent, de connaître la dynamique finale du système en boucle fermée. Ce point constitue la principale critique des approches non quadratique émises dans la littérature. Afin de contourner ce problème, des approches quadratiques étendues peuvent être obtenues sur la base des théorèmes 5.1 à 5.4. Une manière d'étudier le conservatisme est de comparer les taux d'atténuation  $H_\infty$  des perturbations externes obtenus par la résolution des conditions non quadratiques par rapport à celles obtenues

avec des conditions quadratiques étendues. On propose alors d'étudier l'influence du choix de la borne inférieure  $\phi_1$  de  $\dot{h}_1(z(t))$  dans le cas de la stabilisation non quadratique par retour de sortie (Théorème 5.4) sur le taux d'atténuation  $\gamma$ . Pour ce faire, on considère le système T-S perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + F_i \varphi(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i \varphi(t)) \end{cases} \quad (5.67)$$

où  $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $C_2 = \begin{bmatrix} -3 & 20 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ ,  
 $D_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $D_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix}$ ,  $G_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$  et  $G_2 = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ , avec  
 $h_1(x_1(t)) = \cos^2(x_1(t)) = 1 - h_2(x_1(t))$ .

La figure 5.2 présente donc l'évolution du taux d'atténuation pour différentes valeurs de  $\phi$  obtenues via le théorème 5.4 sans incertitudes.

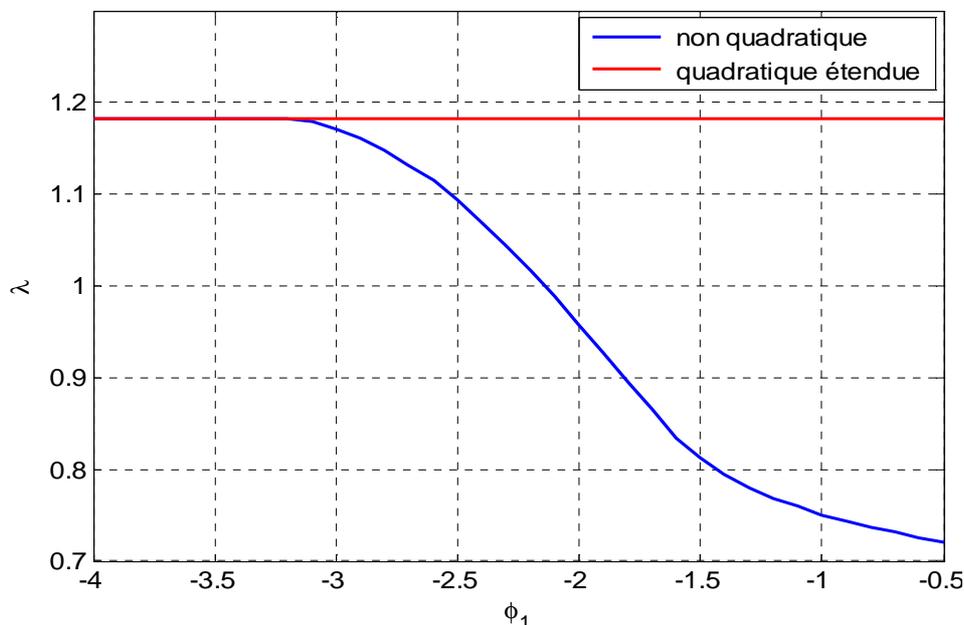


Figure 5.2. Taux d'atténuation : approches non quadratiques (remarque 5.2) vs quadratiques étendues (Théorème 5.4 sans incertitudes avec  $X_j^1 = X_1$ ).

Notons que le taux d'atténuation obtenu via l'approche quadratique étendue (théorème 5.4 avec  $X_j^1 = X_1$  commune) est  $\mu = 1.3971$ . Cette valeur constitue naturellement la borne supérieure de des résultats obtenus via le théorème 5.4. Dès lors, il est possible de dire que l'approche non quadratique n'apporte un intérêt en terme de conservatisme pour le système T-S (5.67) que pour les valeurs  $-3 < \phi_1 < 0$ .

### 5.5.3. Exemple 3 : stabilisation robuste par retour de sortie dynamique et statique

A travers cet exemple, on montre l'efficacité des approches non quadratiques proposées au cours de ce chapitre. Dans un premier temps, les résultats de la synthèse de lois de commande

par retour de sortie dynamique seront présentés puis nous nous intéresserons au cas du retour de sortie statique. Soit le modèle T-S incertain et perturbé donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) + F_i\varphi(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t))((C_i + \Delta C_i(t))x(t) + (D_i + \Delta D_i(t))u(t) + G_i\varphi(t)) \end{cases} \quad (5.68)$$

$$\text{avec } A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.25 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \text{ les matrices}$$

d'incertitudes  $\Delta A_i(t) = H_i^a f_i^a(t) N_i^a$ ,  $\Delta B_i(t) = H_i^b f_i^b(t) N_i^b$ ,  $\Delta C_i(t) = H_i^c f_i^c(t) N_i^c$  et

$$\Delta D_i(t) = H_i^d f_i^d(t) N_i^d \quad \text{où } H_1^a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H_2^a = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, H_1^b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, H_2^b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, H_1^c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$H_2^c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, H_1^d = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, H_2^d = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, N_1^a = [1 \ 1], N_2^a = [-1 \ 1], N_1^b = 1, N_2^b = -0.75,$$

$N_1^c = [1 \ 1], N_2^c = [-1 \ -1], N_1^d = -1, N_2^d = 0.5$  et les fonctions d'appartenances

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1 + \sin(x_1(t))}{2}, h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)).$$

Les résultats de simulation seront donnés pour les fonctions d'incertitudes évoluant telle que

$$f_i^a(t) = \sin(0.5t), f_i^b(t) = \cos(2t), f_i^c(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \text{ et } f_i^d(t) = \cos^2(2t) \text{ et la perturbation}$$

externe  $\varphi(t) = rand(1,1)$ .

### 5.5.3.1. Résultats en retour de sortie dynamique

La résolution du théorème 5.1 permet la synthèse non quadratique d'une loi de commande par retour de sortie dynamique (5.2) stabilisant le système (5.68) sans perturbations externes.

Les résultats suivants sont obtenus à l'aide de la boîte à outils Matlab LMI Toolbox pour  $\phi_1 = -0.3$  :

$$X_1^1 = \begin{bmatrix} 0.0506 & -0.0161 \\ -0.0161 & 0.0579 \end{bmatrix}, \quad X_2^1 = \begin{bmatrix} 0.0122 & 0.0023 \\ 0.0023 & 0.0475 \end{bmatrix}, \quad X_1^6 = \begin{bmatrix} 0.0039 & -0.0007 \\ -0.0007 & 0.0084 \end{bmatrix},$$

$$X_2^6 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.922 & -0.3322 \\ -0.3322 & 0.8752 \end{bmatrix}, \quad X_1^{11} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0001 & -3.7227 \\ 3.7227 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad X_2^{11} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0001 & 6.85085 \\ -6.8508 & 0.0001 \end{bmatrix},$$

$$X_1^{13} = [0.0088 \ 0.0103], \quad X_2^{13} = [-0.0064 \ -0.0006], \quad X_1^{14} = [0.0002 \ 0.0046],$$

$$\begin{aligned}
 X_2^{14} &= [-0.003 \quad 0.0029], & X_1^{15} &= [-0.0152 \quad 0.0171], & X_2^{15} &= [-0.0226 \quad 0.0223], \\
 X_1^{16} &= 6.2845 \times 10^{-4}, & X_2^{16} &= 0.0019, & \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} -0.0194 & -0.0038 \\ 0.0142 & -0.027 \end{bmatrix}, & \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} -0.0213 & 0.0105 \\ 0.0042 & -0.0212 \end{bmatrix}, \\
 \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} -0.0036 & 0.0053 \\ -0.0503 & 0.0336 \end{bmatrix}, & \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} 0.0199 & 0.0145 \\ 0.0061 & -0.0067 \end{bmatrix}, & \bar{C}_1 &= 10^{-3} [0.6691 \quad 0.291], \\
 \bar{C}_2 &= [-0.0069 \quad -0.0004], & \bar{D}_1 &= [-0.0246 \quad 0.0208], & \bar{D}_2 &= [-0.0235 \quad 0.0238], & \varepsilon_{11}^{1a} &= 0.0399, \\
 \varepsilon_{12}^{1a} &= 0.0621, & \varepsilon_{21}^{1a} &= 0.0621, & \varepsilon_{22}^{1a} &= 0.0464, & \varepsilon_{11}^{6a} &= 0.0211, & \varepsilon_{12}^{6a} &= 0.0371, & \varepsilon_{21}^{6a} &= 0.0371, \\
 \varepsilon_{22}^{6a} &= 0.0124, & \varepsilon_{11}^{13b} &= 0.0083, & \varepsilon_{12}^{13b} &= 0.0195, & \varepsilon_{21}^{13b} &= 0.0427, & \varepsilon_{22}^{13b} &= 0.017, & \varepsilon_{11}^{14b} &= 0.0072, \\
 \varepsilon_{12}^{14b} &= 0.0198, & \varepsilon_{21}^{14b} &= 0.044, & \varepsilon_{22}^{14b} &= 0.0132, & \varepsilon_{11}^{15b} &= 0.0108, & \varepsilon_{12}^{15b} &= 0.0204, & \varepsilon_{21}^{15b} &= 0.0468, \\
 \varepsilon_{22}^{15b} &= 0.019, & \varepsilon_{11}^{16b} &= 0.0074, & \varepsilon_{12}^{16b} &= 0.0198, & \varepsilon_{21}^{16b} &= 0.0442, & \varepsilon_{22}^{16b} &= 0.0143, & \varepsilon_{11}^{1c} &= 0.0185, \\
 \varepsilon_{12}^{1c} &= 0.0317, & \varepsilon_{21}^{1c} &= 0.0317, & \varepsilon_{22}^{1c} &= 0.0183, & \varepsilon_{11}^{6c} &= 0.0052, & \varepsilon_{12}^{6c} &= 0.0132, & \varepsilon_{21}^{6c} &= 0.0132, \\
 \varepsilon_{22}^{6c} &= 0.0047, & \varepsilon_{11}^{13d} &= 0.0156, & \varepsilon_{12}^{13d} &= 0.0475, & \varepsilon_{21}^{13d} &= 0.0293, & \varepsilon_{22}^{13d} &= 0.0041, & \varepsilon_{11}^{14d} &= 0.0143, \\
 \varepsilon_{12}^{14d} &= 0.0347, & \varepsilon_{21}^{14d} &= 0.0101, & \varepsilon_{22}^{14d} &= 0.0046, & \varepsilon_{11}^{15d} &= 0.0498, & \varepsilon_{12}^{15d} &= 0.0421, & \varepsilon_{21}^{15d} &= 0.1081, \\
 \varepsilon_{22}^{15d} &= 0.037, & \varepsilon_{11}^{16d} &= 0.0443, & \varepsilon_{12}^{16d} &= 0.0417, & \varepsilon_{21}^{16d} &= 0.1059 & \text{et} & \varepsilon_{22}^{16d} &= 0.0341.
 \end{aligned}$$

La figure 5.3 montre l'évolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du vecteur d'état du contrôleur et du signal de commande pour la condition initiale  $x(0) = [-5 \quad 4]^T$ . Par ailleurs, la figure 5.4 présente l'évolution de  $\dot{h}_1(x_1(t))$  au cours de cette simulation. Celle-ci permet de vérifier a posteriori l'hypothèse  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) > \phi$ . En effet,  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) = -0.2365$  et  $\phi = -0.3$ .

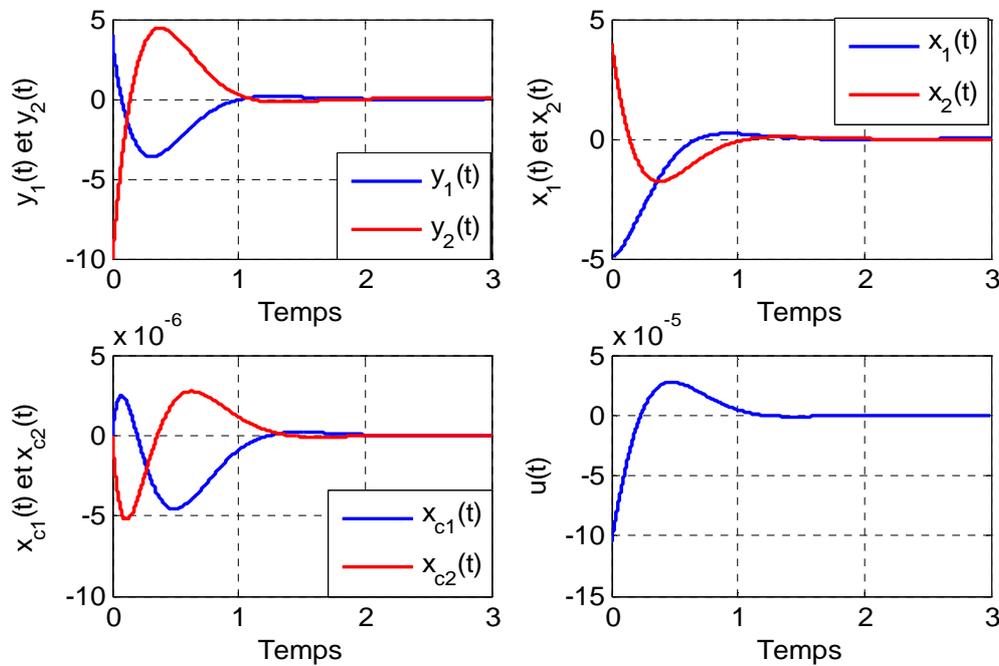
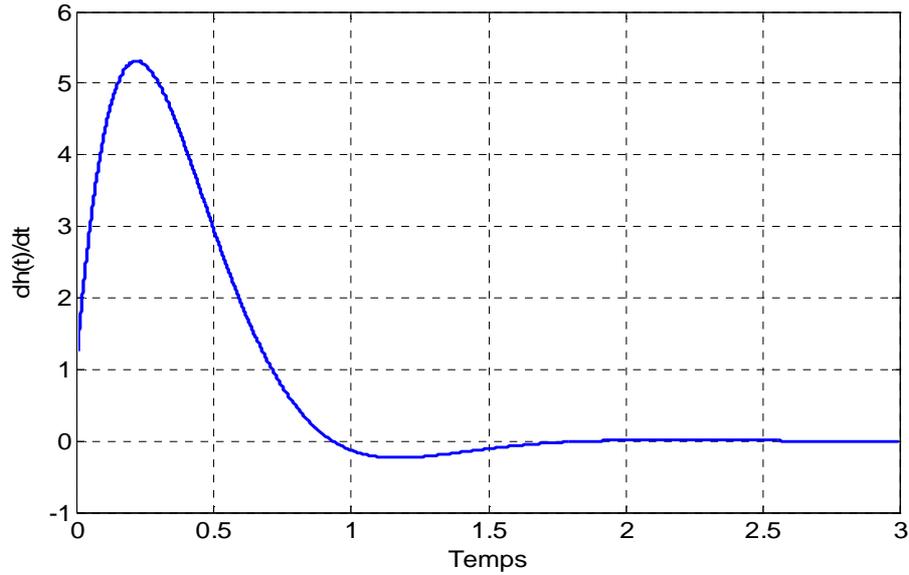


Figure 5.3. Evolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du vecteur d'état du contrôleur et du signal de commande.


 Figure 5.4. Evolution temporelle de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

Considérons maintenant, au travers de la résolution du théorème 5.2, le cas de la synthèse  $H_\infty$  non quadratique d'une loi de commande par retour de sortie dynamique (5.2) garantissant simultanément la stabilisation de (5.68) et l'atténuation des perturbations externes. Les résultats sont obtenus pour  $\phi_1 = -1.5$  et sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 X_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.0902 & -0.004 \\ -0.004 & 0.1348 \end{bmatrix}, & X_2^1 &= \begin{bmatrix} 0.0444 & 0.0144 \\ 0.0144 & 0.1273 \end{bmatrix}, & X_1^6 &= \begin{bmatrix} 0.0163 & -0.0128 \\ -0.0128 & 0.0189 \end{bmatrix}, \\
 X_2^6 &= \begin{bmatrix} 0.0054 & -0.0029 \\ -0.0029 & 0.0016 \end{bmatrix}, & X_1^{11} &= X_2^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & X_1^{13} &= 10^{-4} \times [-0.284 & -0.6133], \\
 X_2^{13} &= [-0.0027 & -0.0104], & X_1^{14} &= 10^{-5} \times [-0.3957 & 0.0621], & X_2^{14} &= 10^{-3} \times [-0.431 & 0.0221], \\
 X_1^{15} &= [-0.06 & 0.0427], & X_2^{15} &= [-0.0869 & 0.0735], & X_1^{16} &= 2.2584 \times 10^{-6}, & X_2^{16} &= 0.0025, \\
 \bar{A}_1 &= \begin{bmatrix} -0.1148 & -0.2353 \\ -0.1372 & -0.4072 \end{bmatrix}, & \bar{A}_2 &= \begin{bmatrix} -0.0196 & -0.0099 \\ 0.0466 & -0.107 \end{bmatrix}, & \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} -0.1212 & -0.0778 \\ -0.4697 & -0.0358 \end{bmatrix}, \\
 \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} -0.0485 & -0.0346 \\ 0.1766 & 0.0231 \end{bmatrix}, & \bar{C}_1 &= 10^{-3} \times [-0.0174 & -0.1281], & \bar{C}_2 &= [-0.0053 & -0.0175], \\
 \bar{D}_1 &= [-0.0602 & 0.0427], & \bar{D}_2 &= [-0.0827 & 0.0692], & \varepsilon_{11}^{1a} &= 0.0224, & \varepsilon_{12}^{1a} &= 0.2321, & \varepsilon_{21}^{1a} &= 0.2321, \\
 \varepsilon_{22}^{1a} &= 0.0775, & \varepsilon_{11}^{6a} &= 6.5188 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{12}^{6a} &= 0.0973, & \varepsilon_{21}^{6a} &= 0.0973, & \varepsilon_{22}^{6a} &= 0.0135, \\
 \varepsilon_{11}^{13b} &= 2.9196 \times 10^{-5}, & \varepsilon_{12}^{13b} &= 0.0119, & \varepsilon_{21}^{13b} &= 0.1069, & \varepsilon_{22}^{13b} &= 0.0121, & \varepsilon_{11}^{14b} &= 2.626 \times 10^{-5}, \\
 \varepsilon_{12}^{14b} &= 0.012, & \varepsilon_{21}^{14b} &= 0.1126, & \varepsilon_{22}^{14b} &= 6.8771 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{11}^{15b} &= 0.009, & \varepsilon_{12}^{15b} &= 0.0122, & \varepsilon_{21}^{15b} &= 0.1341, \\
 \varepsilon_{22}^{15b} &= 0.0088, & \varepsilon_{11}^{16b} &= 3.1229 \times 10^{-5}, & \varepsilon_{12}^{16b} &= 0.012, & \varepsilon_{21}^{16b} &= 0.1094, & \varepsilon_{22}^{16b} &= 0.0093, & \varepsilon_{11}^{1c} &= 0.0338, \\
 \varepsilon_{12}^{1c} &= 0.0199, & \varepsilon_{21}^{1c} &= 0.0199, & \varepsilon_{22}^{1c} &= 0.0346, & \varepsilon_{11}^{6c} &= 0.0016, & \varepsilon_{12}^{6c} &= 0.0102, & \varepsilon_{21}^{6c} &= 0.0102, \\
 \varepsilon_{22}^{6c} &= 4.5579 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{11}^{13d} &= 7.5008 \times 10^{-5}, & \varepsilon_{12}^{13d} &= 0.1432, & \varepsilon_{21}^{13d} &= 0.0153, & \varepsilon_{22}^{13d} &= 0.0011, \\
 \varepsilon_{11}^{14d} &= 6.7966 \times 10^{-5}, & \varepsilon_{12}^{14d} &= 0.0599, & \varepsilon_{21}^{14d} &= 0.0064, & \varepsilon_{22}^{14d} &= 1.0318 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{11}^{15d} &= 0.0783,
 \end{aligned}$$

$\varepsilon_{12}^{15d} = 1.3508$ ,  $\varepsilon_{21}^{15d} = 0.1476$ ,  $\varepsilon_{22}^{15d} = 0.0701$ ,  $\varepsilon_{11}^{16d} = 0.0018$ ,  $\varepsilon_{12}^{16d} = 1.3541$ ,  $\varepsilon_{21}^{16d} = 0.1477$ ,  $\varepsilon_{22}^{16d} = 0.074$  et le taux d'atténuation  $\lambda = 0.8611$ .

La figure 5.5 montre l'évolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du vecteur d'état du contrôleur et du signal de commande pour la condition initiale  $x(0) = [1 \quad -3]^T$ . De plus, la figure 5.6 présente l'évolution de  $\dot{h}_1(x_1(t))$  au cours de cette simulation. Celle-ci permet de vérifier a posteriori l'hypothèse  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) > \phi_1$ . En effet,  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) = -1.3169$  et  $\phi_1 = -1.5$ .

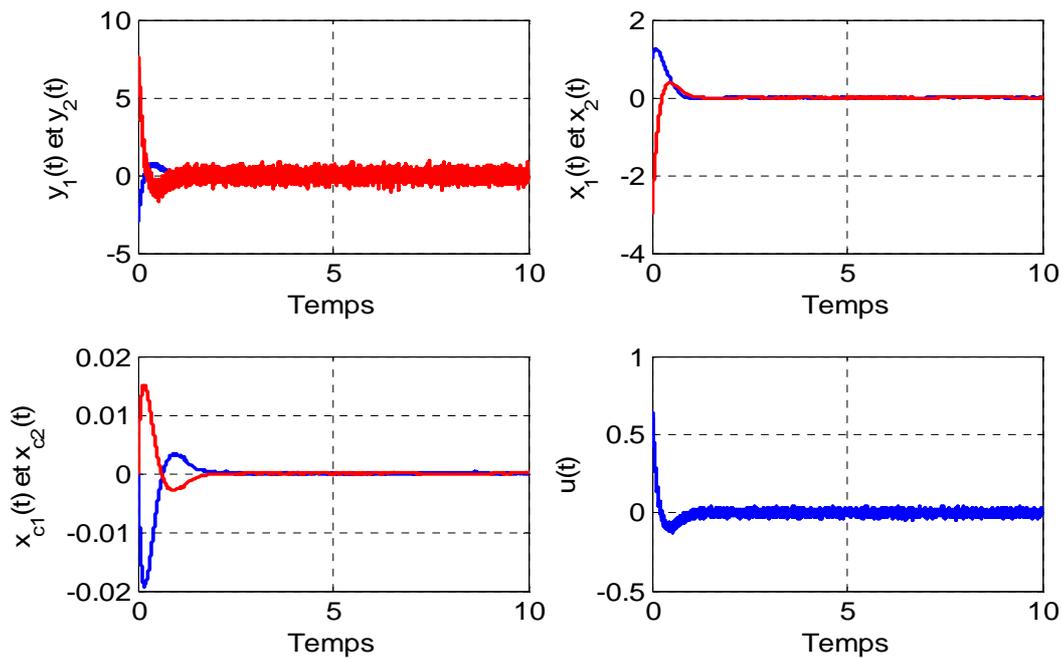


Figure 5.5. Evolution temporelle des vecteurs de sortie, du vecteur d'état du système perturbé, du vecteur d'état du contrôleur et du signal de commande.

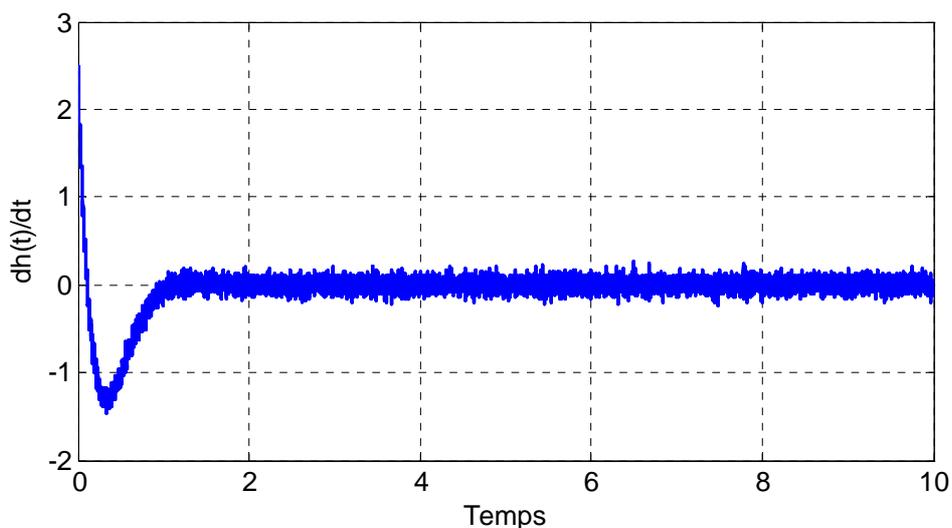


Figure 5.6. Evolution temporelle de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

### 5.5.3.2. Résultats en retour de sortie statique

La résolution du théorème 5.3 permet la synthèse non quadratique d'une loi de commande par retour de sortie statique (5.6) stabilisant le système (5.68) sans perturbations externes ( $\varphi(t) = 0$ ). Les résultats suivants sont obtenus à l'aide de la boîte à outils Matlab LMI Toolbox pour  $\phi_1 = -1.2$  :

$$\begin{aligned}
 X_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.0742 & -0.0136 \\ -0.0136 & 0.0949 \end{bmatrix}, & X_2^1 &= \begin{bmatrix} 0.0212 & 0.009 \\ 0.009 & 0.0835 \end{bmatrix}, & X_1^5 &= \begin{bmatrix} 0.1868 & 0.0444 \\ 0.0444 & 0.2909 \end{bmatrix}, \\
 X_2^5 &= \begin{bmatrix} 0.2112 & -0.0033 \\ -0.0033 & 0.2953 \end{bmatrix}, & X_1^7 &= [0.0146 \quad 0.0171], & X_2^7 &= [-0.0048 \quad -0.0023], \\
 X_1^8 &= [-0.0222 \quad 0.0258], & X_2^8 &= [-0.0443 \quad 0.0388], & X_1^9 &= 8.8147 \times 10^{-4}, & X_2^9 &= 0.0026, \\
 K_1 &= [-0.0336 \quad 0.0294], & K_2 &= [-0.0645 \quad 0.037], & \varepsilon_{11}^{1a} &= 0.0557, & \varepsilon_{12}^{1a} &= 0.1618, & \varepsilon_{21}^{1a} &= 0.1618, \\
 \varepsilon_{22}^{1a} &= 0.0681, & \varepsilon_{11}^{1c} &= 0.0222, & \varepsilon_{12}^{1c} &= 0.043, & \varepsilon_{21}^{1c} &= 0.043, & \varepsilon_{22}^{1c} &= 0.0238, & \varepsilon_{11}^{7b} &= 0.0111, \\
 \varepsilon_{12}^{7b} &= 0.0414, & \varepsilon_{21}^{7b} &= 0.1198, & \varepsilon_{22}^{7b} &= 0.024, & \varepsilon_{11}^{7d} &= 0.0191, & \varepsilon_{12}^{7d} &= 0.1147, & \varepsilon_{21}^{7d} &= 0.0337, \\
 \varepsilon_{22}^{7d} &= 0.0052, & \varepsilon_{11}^{8b} &= 0.0118, & \varepsilon_{12}^{8b} &= 0.0422, & \varepsilon_{21}^{8b} &= 0.1272, & \varepsilon_{22}^{8b} &= 0.0276, & \varepsilon_{11}^{8d} &= 0.0118, \\
 \varepsilon_{12}^{8d} &= 0.0422, & \varepsilon_{21}^{8d} &= 0.1272, & \varepsilon_{22}^{8d} &= 0.0276, & \varepsilon_{11}^{9d} &= 0.1297, & \varepsilon_{12}^{9d} &= 0.1169, & \varepsilon_{21}^{9d} &= 0.226, \\
 \varepsilon_{22}^{9d} &= 0.1006, & \varepsilon_{11}^{9b} &= 0.0102, & \varepsilon_{12}^{9b} &= 0.0415, & \varepsilon_{21}^{9b} &= 0.1208, & \varepsilon_{22}^{9b} &= 0.0232.
 \end{aligned}$$

La figure 5.7 montre l'évolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du signal de commande pour la condition initiale  $x(0) = [-1 \quad 3]^T$  et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ . Notons que l'hypothèse  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) > \phi_1$  est vérifiée a posteriori en simulation puisque  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) = -0.7172$  et  $\phi_1 = -1.2$ .

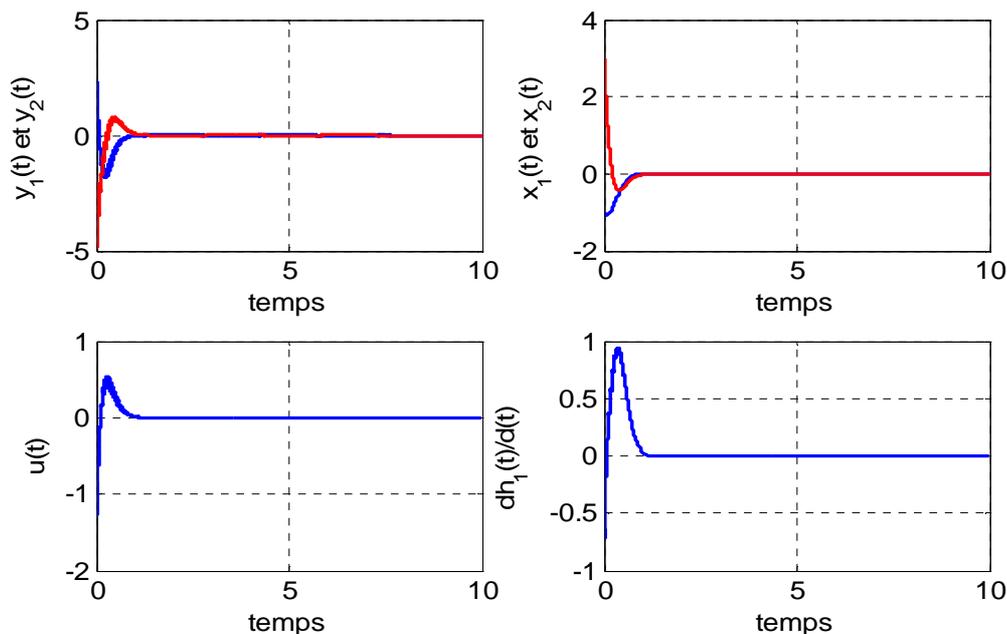


Figure 5.7. Evolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système, du signal de commande et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

Considérons maintenant, au travers de la résolution du théorème 5.4, le cas de la synthèse  $H_\infty$  non quadratique d'une loi de commande par retour de sortie statique (5.6) garantissant simultanément la stabilisation de (5.68) et l'atténuation des perturbations externes. Les résultats sont obtenus pour  $\phi_1 = -1$  et sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 X_1^1 &= \begin{bmatrix} 0.1177 & -0.0041 \\ -0.0041 & 0.1844 \end{bmatrix}, & X_2^1 &= \begin{bmatrix} 0.0566 & 0.0182 \\ 0.0182 & 0.1762 \end{bmatrix}, & X_1^5 &= \begin{bmatrix} 1.4895 & -0.0687 \\ -0.0687 & 1.0105 \end{bmatrix}, \\
 X_2^5 &= \begin{bmatrix} 1.1062 & -0.1417 \\ -0.1417 & 1.1896 \end{bmatrix}, & X_1^7 &= 10^{-3} [0.0066 & -0.1847], & X_2^7 &= [0.0004 & -0.0017], \\
 X_1^8 &= [-0.064 & 0.0593], & X_2^8 &= [-0.121 & 0.1055], & X_1^9 &= 1.9995 \times 10^{-5}, & X_2^9 &= 8.6468 \times 10^{-5}, \\
 K_1 &= [-0.0635 & 0.0594], & K_2 &= [-0.1226 & 0.1047], & \varepsilon_{11}^{1a} &= 0.0375, & \varepsilon_{12}^{1a} &= 0.402, & \varepsilon_{21}^{1a} &= 0.402, \\
 \varepsilon_{22}^{1a} &= 0.1214, & \varepsilon_{11}^{1c} &= 0.0659, & \varepsilon_{12}^{1c} &= 0.049, & \varepsilon_{21}^{1c} &= 0.049, & \varepsilon_{22}^{1c} &= 0.0658, & \varepsilon_{11}^{7b} &= 2.3315 \times 10^{-4}, \\
 \varepsilon_{12}^{7b} &= 0.0392, & \varepsilon_{21}^{7b} &= 0.3689, & \varepsilon_{22}^{7b} &= 0.0012, & \varepsilon_{11}^{7d} &= 4.5215 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{12}^{7d} &= 0.3556, & \varepsilon_{21}^{7d} &= 0.0378, \\
 \varepsilon_{22}^{7d} &= 1.8303 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{11}^{8b} &= 0.0231, & \varepsilon_{12}^{8b} &= 0.0393, & \varepsilon_{21}^{8b} &= 0.3802, & \varepsilon_{22}^{8b} &= 0.0192, & \varepsilon_{11}^{8d} &= 0.1194, \\
 \varepsilon_{12}^{8d} &= 2.5595, & \varepsilon_{21}^{8d} &= 0.2794, & \varepsilon_{22}^{8d} &= 0.091, & \varepsilon_{11}^{9d} &= 0.005, & \varepsilon_{12}^{9d} &= 2.6276, & \varepsilon_{21}^{9d} &= 0.2802, \\
 \varepsilon_{22}^{9d} &= 0.0185, & \varepsilon_{11}^{9b} &= 2.4299 \times 10^{-4}, & \varepsilon_{12}^{9b} &= 0.0392, & \varepsilon_{21}^{9b} &= 0.3692, & \varepsilon_{22}^{9b} &= 5.9093 \times 10^{-4} \text{ et le taux} \\
 & & & & & & & & & & & \text{d'atténuation } \lambda = 0.7723.
 \end{aligned}$$

La figure 5.8 montre l'évolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système du signal de commande et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$  pour la condition initiale  $x(0) = [-1 \ 3]^T$ . Notons que l'hypothèse  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) > \phi_1$  est vérifiée a posteriori en simulation puisque  $\min \dot{h}_1(x_1(t)) = -0.6475$  et  $\phi_1 = -1$ .

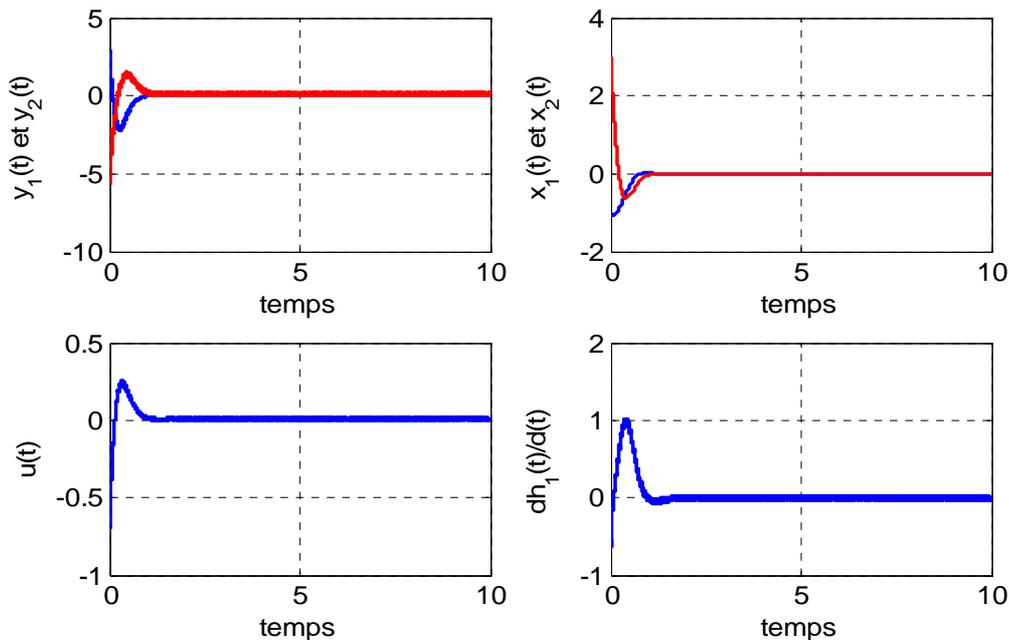


Figure 5.8. Evolution temporelle du vecteur de sortie, du vecteur d'état du système perturbé, du signal de commande et de  $\dot{h}_1(x_1(t))$ .

## 5.6. Conclusion

Au cours de ce chapitre, la stabilisation non quadratique par retour de sortie des systèmes T-S incertains et perturbés a été traitée. Sur la base de fonctions candidates de Lyapunov floues et de l'écriture redondante des boucles fermées, des conditions  $\mathcal{LMI}$  ont été proposées pour la synthèse de loi de commande par retour de sortie dynamique puis statique. Notons que ces approches constituent, à notre connaissance, les seuls résultats connus dans le cadre non quadratique en ce qui concerne la commande des systèmes T-S par retour de sortie. Par ailleurs, les résultats existants dans la littérature dans le cadre quadratique sont pour la plupart proposés sous forme de  $\mathcal{BMI}$  ou, au prix d'hypothèses restrictives, en termes de  $\mathcal{LMI}$ . Ainsi, tirant parti de la réécriture redondante sous forme descripteur de la boucle fermée, les conditions  $\mathcal{LMI}$  proposées au cours de ce chapitre sont applicables à une classe générique de systèmes T-S incertains et perturbés admettant une forme non linéaire de l'équation de sortie. Enfin, les résultats proposés dans un premier temps pour la stabilisation des systèmes incertains puis étendus aux systèmes incertains et perturbés par l'emploi d'un critère  $H_\infty$ , ont été confrontés à quelques résultats pertinents de la littérature au travers de trois exemples. La réduction du conservatisme ainsi que les performances en boucle fermée des approches par retour de sortie proposées ont alors pu être appréciées.



# Conclusion générale et perspectives

---

---

Dans ce mémoire, nous avons abordé les problèmes de stabilité et de stabilisation des systèmes non linéaires de type T-S. Les résultats issus de ce travail de recherche présentent deux contributions principales concernant l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  pour les problèmes de commande suivants :

- Stabilisation par retour d'état pour la classe des descripteurs T-S incertains et perturbés (DTSIP),
- Stabilisation par retour de sortie pour la classe des modèles T-S standards incertains et perturbés (MTSIP).

Nous avons commencé par introduire les concepts élémentaires de la commande des systèmes T-S dans le **premier chapitre**, notamment pour les classes des systèmes T-S standards (explicites) et descripteurs (implicites). Ainsi, un bref aperçu des principaux travaux de la littérature sur la synthèse de contrôleurs flous par retour d'état et de sortie, étendus aux systèmes descripteurs a d'abord été présenté. Puis, les sources de conservatisme lors de la résolution de contraintes  $\mathcal{LMI}$  ont été discutées. Ces différents concepts constituent la base des développements proposés dans ce manuscrit et permettent de positionner les contributions apportées.

De manière générale, les **chapitres 2 à 4** ont traité de la stabilité et de la stabilisation des DTSIP. Plusieurs approches ont été présentées suivant un ordre graduel de complexité afin d'aboutir à des conditions de stabilisation non quadratiques minimisant le conservatisme au regard de celles développées antérieurement.

Dans un premier temps des conditions de stabilité, basées sur une fonction candidate de Lyapunov quadratique, ont été proposées au **chapitre 2**. Celles-ci ont ensuite été étendues à la synthèse de lois de commande robustes de type PDC modifiées, d'abord pour les descripteurs incertains. Puis, l'emploi d'un critère  $H_\infty$  a permis d'aboutir à des conditions visant à minimiser l'influence des perturbations externes sur la dynamique du DTSI considéré. Les résultats proposés sont fournis en termes de  $\mathcal{LMI}$  et, afin de relâcher (réduire le conservatisme) les approches quadratiques proposées, un schéma de relaxation typique pour la classe des systèmes descripteurs a été développé. Notons que les résultats proposés au cours de ce chapitre constituent la base des travaux présentés au cours des chapitres suivants.

Dans la continuité du chapitre 2, les chapitres 3 et 4 ont été consacrés à la réduction du conservatisme des conditions de stabilisation selon deux sources distinctes. Dans le **chapitre 3**, une fonction non quadratique de Lyapunov, dite fonction de Lyapunov floue, a été employée. Les limites d'une telle approche ont été discutées et concernent notamment leur applicabilité en terme de résolution des  $\mathcal{LMI}$ . En effet, celles-ci nécessitent la connaissance a priori de paramètres (bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance) difficiles à obtenir lorsque l'on ne connaît pas à l'avance la dynamique de la boucle fermée désirée.

Un premier résultat, inspiré des résultats proposés par [Guerra et al., 2007], a permis d'aboutir à un compromis « quadratique étendu » entre conservatisme et applicabilité des approches proposées. **Dans le chapitre 4**, une réécriture de la dynamique de la boucle fermée, basée sur une propriété de redondance des descripteurs, a permis de traiter une seconde source de conservatisme : à savoir l'apparition de termes croisés au sein des conditions  $\mathcal{LMI}$ . En effet, l'écriture redondante permet, par l'introduction d'une dynamique virtuelle sur la commande, de découpler les gains de commande et les matrices du système à commander. Par ailleurs, il a également été démontré que les approches proposées dans ce chapitre englobent celles proposées précédemment.

Fort de la connaissance acquise sur la redondance des descripteurs, des méthodologies de synthèses de contrôleurs flous par retour de sortie dynamique et statique pour la classe des MTSIP ont été proposées **au chapitre 5**. En effet, les problèmes de retour de sortie sont réputés complexes d'un point de vue  $\mathcal{LMI}$  puisqu'ils font apparaître de nombreux termes croisés. Il a donc été montré que l'écriture de la dynamique en boucle fermée sous forme de descripteur redondant, pour le retour de sortie, facilite l'obtention de conditions  $\mathcal{LMI}$  pour une classe générique de MTSIP ne nécessitant pas d'hypothèses structurelles restrictives. Notons par ailleurs que, aussi bien pour la stabilisation par retour d'état des DTSIP que pour la stabilisation par retour de sortie des modèles DTS, les approches proposées sont, à notre connaissance, les seules existantes dans la littérature traitant de ces problèmes dans le cadre non quadratique.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et concernent des points soulevés au cours de ce manuscrit.

Tout d'abord, à court terme, l'extension de ces travaux à la commande décentralisée des descripteurs interconnectés peut-être envisagée. Ceux-ci font l'objet d'une thèse démarrée récemment au CReSTIC dont les premiers résultats sont prometteurs [Jabri et al., 2009a][Jabri et al., 2009b]. Il convient maintenant d'étendre ces travaux au cas incertains et perturbés. D'autre part, les travaux entrepris au cours de cette thèse ont été étendus et appliqués au cas de la commande en suivi de trajectoire d'une machine de rééducation dans le cadre de la thèse de Lynda Seddiki soutenue récemment [Seddiki, 2008] et donné lieu à une publication commune [Seddiki et al., 2009]. Là encore, ces conditions peuvent encore être étendues au cas incertain et perturbé. Par ailleurs, une autre piste possible, dans la mesure où peu de résultats  $\mathcal{LMI}$  existent dans la littérature [Huang, 2005][Xu et al., 2007], serait de transposer les travaux de cette thèse au cas des descripteurs T-S discrets.

Par ailleurs, il a été soulevé, dans [Marx et Ragot, 2006] et [Marx et Ragot, 2008], que les conditions de non impulsivité peuvent ne pas être satisfaites dans le cas général des descripteurs T-S lors de la dérivation des conditions de stabilité sur la base d'un vecteur d'état augmenté. Dans le but de fournir des résultats valables pour une plus large classe de systèmes (systèmes singuliers,  $\text{rang}(E_v) < n \dots$ ), il s'avèrerait judicieux d'étudier cette piste ainsi que de proposer des conditions de régularité, d'admissibilité et de non impulsivité génériques tenant compte des informations issues des fonctions d'appartenance des descripteurs T-S. Ce problème étant à ce jour encore ouvert !

De manière générale, les travaux de la communauté concernant les systèmes T-S se focalisent sur la réduction du conservatisme des conditions  $\mathcal{LMI}$ . Là encore, des progrès restent encore à accomplir dans la mesure où toutes les sources de conservatisme n'ont pas été traitées [Sala,

2009]. Par ailleurs, les sources traitées sont-elles pour autant résolues ? Au cours de cette thèse, trois sources ont été abordées. La première vise à réduire le conservatisme des conditions  $\mathcal{LMI}$  par une relaxation de somme, en l'occurrence une triple somme pour les descripteurs (cf. lemme 2.1). Notons que la solution proposée constitue une extension des travaux les plus simples [Tanaka et Sano, 1994] et pourrait être étendue à des schémas de relaxation plus efficaces et récents [Tuan et al., 2001] [Xiaodong et Qingling, 2003]. Une seconde source ayant été traitée concerne l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique. Celle-ci permet notamment d'obtenir les conditions de stabilité globale les moins conservatives à ce jour mais présente l'inconvénient de nécessiter la connaissance a priori des bornes inférieures des dérivées des fonctions d'appartenance. Des travaux récents vont en ce sens. Ainsi, une nouvelle approche a été proposée afin de s'affranchir de la recherche des bornes des dérivées des fonctions d'appartenance dans le cadre de l'étude de la stabilité locale des systèmes T-S standards [Guerra et Bernal, 2009]. Celle-ci se base sur la réécriture développée des dérivées des matrices de Lyapunov incluse dans les conditions suffisantes de stabilité. Bien que très prometteuse, cette approche conduit à des résultats  $\mathcal{LMI}$  dans le cadre de la stabilité, mais reste difficilement applicable au cas de la synthèse de loi de commande et son extension aux cas des descripteurs reste un champ ouvert. La troisième source de conservatisme concerne le découplage des matrices d'entrée-sortie et, il apparaît que l'écriture redondante de la boucle fermée constitue une solution adéquate à ce problème. La transposition de cette technique peut alors être envisagée pour la commande de nombreuses autres classes de systèmes dynamiques.



# Références bibliographiques

---

## A

[Assawinchaichote et al., 2004] W. Assawinchaichote, S. K. Nguang and P. Shi, “Output feedback control design for uncertain singularly perturbed systems: an LMI approach,” *Automatica* 40 (12): 2147–2152, 2004.

## B

[Bernal et Guerra, 2009] M. Bernal and T. M. Guerra, “Non-quadratic robust stability of Takagi-Sugeno models,” *2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing (ICONS)*. Istanbul, Turkey, September 2009.

[Blanco et al., 2001] Y. Blanco, W. Perruquetti and P. Borne, “Nonquadratic stability of nonlinear systems in the Takagi–Sugeno form,” *European Control Conference (ECC)*, Porto, Portugal, 2001.

[Bouarar et al., 2007a] T. Bouarar, K. Guelton, B Mansouri and N. Manamanni, “LMI stability condition for uncertain descriptors,” *International Conference on Fuzzy systems (FUZZ-IEEE)*, London, UK, July 2007.

[Bouarar et al., 2007b] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, “LMI based  $H_\infty$  controller design for uncertain Takagi-Sugeno descriptors subject to external disturbances,” *3rd IFAC Workshop on Advanced Fuzzy/Neural Control (IFAC-AFNC)*, Valenciennes, France, October 2007.

[Bouarar et al., 2008a] T. Bouarar, K. Guelton, N. Manamanni and P. Billaudel, “Stabilization of uncertain Takagi-Sugeno descriptors: a fuzzy Lyapunov approach,” *16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Ajaccio, Corsica, France, June 2008

[Bouarar et al., 2008b] T. Bouarar, K. Guelton et N. Manamanni, “Approches non-quadratiques pour la synthèse de commande robuste des descripteurs flous de type T-S,” *5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Bucarest, Roumanie, 3-5 Septembre 2008.

[Bouarar et al., 2009a] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, “Relaxed non-quadratic LMI stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy descriptor based on descriptor redundancy,” *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation*, Nashville, USA, March 30–April 2 2009.

[Bouarar et al., 2009b] T. Bouarar, K. Guelton et N. Manamanni, “Nouvelles conditions LMI de stabilisation non quadratique pour descripteurs flous de type T-S,” *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA)*. Lens, Octobre 2008.

[Bouarar et al., 2009c] T. Bouarar, K. Guelton and N. Manamanni, “Static output feedback controller design for Takagi-Sugeno systems – A fuzzy Lyapunov LMI approach”, *48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Shanghai, P.R. China, December 2009.

[Boyd et al., 1994] S. Boyd, L. El Ghaoui and E. Feron, “Linear matrix inequalities in system and control theory,” *Siam*, 1994

## C

[Chen et al., 2000] B. S. Chen, C.S. Tseng and H. J. Uang, “Mixed  $H_2/H_\infty$  fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy System.*, 14(4), August 2006.

[Chen, 2004] G. Chen, “System analysis using redundancy of descriptor representation,” *IEEE Intlmtional Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei*, Taiwan, September 24, 2004

[Chadli et al., 2002] M. Chadli, D. Maquin and J. Ragot, “Nonquadratic stability analysis of Takagi-Sugeno models,” *41<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Las Vegas, Nevada, USA, December. 2002.

[Cobb, 1981] D. Cobb, “Feedback and pole placement in descriptor variable systems,” *International Journal of Control*, 33 : 1135-1146, 1981.

[Cobb, 1983] D. Cobb, “Descriptor variable system and optimal state regulation,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, 28: 601-611, 1983.

## D

[Dai, 1989] L. Dai, “Singular control systems,” *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer –Verlag : 12-45, 1989.

[Delmotte et al., 2007] F. Delmotte, T.M. Guerra and M. Ksantini, “Continous Takagi-Sugeno’s models: reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design techniques,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15 (3), June 2007.

[Delmotte et al., 2008] F. Delmotte, T.M. Guerra and M. Kruszewski, “Discerte Takagi-Sugeno’s models: reduction of the number of LMI conditions in fuzzy control techniques,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 38 (5), June 2008.

[Ding et Huang, 2008] B. Ding and B. Huang, “Stabilization of Takagi-Sugeno Model via Non-parallel Distributed Compensation Law,” *7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Chongqing, China, June 25 - 27, 2008.

[Dong et Yang, 2009] J. Dong and G. H. Yang, “Dynamic output feedback  $H_\infty$  control synthesis for discrete-time T–S fuzzy systems via switching fuzzy controllers,” *Fuzzy Sets and Systems* 160 482–499, 2009.

[Dubuisson, 1990] B. Dubuisson, “Diagnostic et reconnaissance des formes,” *Hermes*, Paris.

## F

[Feng et Harris, 2001] M. Feng and C. J. Harris, “Piecewise Lyapunov stability conditions of fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics -part B*, 31(2): 259–262, April. 2001.

[Feng et Wang, 2001] G. Feng and L. Wang, “Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions,” *FUZZ-IEEE’2001*, Melbourne, Australia, 2001.

[Feng et Sun, 2002] G. Feng and D. Sun, “Generalized  $H_2$  controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 49: 1843–1850, December, 2002.

[Feng, 2004] G. Feng, “ $H_\infty$  controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B*: 34(1), February, 2004.

[Feng, 2006] G. Feng, “A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(5): 676–697, 2006.

## G

[Gahinet et al., 1995] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, “LMI Control Toolbox,” *The Mathworks Inc*, 1995.

[Gasso et al., 1999] K. Gasso, G. Mourot, A. Boukhriss et J. Ragot, “Optimisation de la structure d’un modèle de Takagi-Sugeno,” *Actes des rencontres francophones (LFA)*, Valenciennes, France, 1999.

[Gasso et al., 2000] K. Gasso, “Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles,” *Thèse de doctorat de l’INPL*, Décembre, 2000

[Guelton, 2003] K. Guelton, “Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en oeuvre d’observateurs flous sous forme descripteur,” *Thèse de doctorat*, LAMIH-SF, de l’Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2003.

[Guelton et al., 2008a] K. Guelton, T. Bouarar and N. Manamanni, “Fuzzy Lyapunov LMI based output feedback stabilization of Takagi Sugeno systems using descriptor redundancy,” *International Conference on Fuzzy Systems*, Hong Kong, June 2008.

[Guelton et al., 2008b] K. Guelton, S. Delprat and T. M. Guerra, “An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi–Sugeno unknown-inputs observer in the descriptor form,” *Control Engineering Practice* 16: 1414–1426, 2008.

[Guelton et al. 2009] K. Guelton, T. Bouarar and N. Manamanni, “Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi–Sugeno systems – a descriptor redundancy approach,” *Fuzzy Sets and Systems* 160(19):2796–2811, October 2009.

[Guelton et al. 2010] K. Guelton, T-M. Guerra, M. Bernal, T. Bouarar et N. Manamanni, “Comments on Fuzzy Control Systems Design via Fuzzy Lyapunov Functions,” *IEEE, Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part B*, Digital Object Identifier: 10.1109/TSMCB.2009.2033807.

[Guerra et al., 1999] T. M. Guerra, L. Vermeiren, F. Delmotte et P. Borne, “Lois de commande pour systèmes flous continus Lois de commande pour systèmes flous continus, ” *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 33(4) : 489-527, 1999.

[Guerra et Vermeiren, 2004] T. M. Guerra and L. Vermeiren., “LMI based relaxed non quadratic stabilizations for non-linear systems in the Takagi-Sugeno’s form,” *Automatica*, 40 (5): 823-829, May 2004.

[Guerra et al., 2006] T. M. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren and H. Rago-Tirmant, “Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno’s form,” *Fuzzy Sets and Systems*, 157 (9): 1248-1259, 2006.

[Guerra et al., 2007] T. Guerra, M. Bernal, A. Kruszewski and Arfoun, “A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models.” *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, December, 12-14, 2007.

[Guerra et Bernal, 2009] T. M. Guerra and M. Bernal “A way to escape from the quadratic framework,” *International Conference on Fuzzy Systems*, Korea, August 20-24, 2009.

## H

[Han et al., 2000] Z. X. Han, G. Feng, B. L. Walcott and J. Ma, “Dynamic output feedback controller design for fuzzy systems,” *Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B*, 30(1), February, 2000.

[Henrion et Garulli, 2004] D. Henrion and A. Garulli, “*Stabilization of LPV Systems*,” *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 2004.

[Huang, 2005] C. P. Huang, “Stability analysis of discrete singular fuzzy systems”, *Fuzzy sets and systems*, 151 (2005) 155-165.

[Huang et Nguang, 2006] D. Huang and S. K. Nguang, “Robust  $H_\infty$  static output feedback control of fuzzy systems: An ILMI approach,” *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part B*, 36(1): 216–222, 2006.

[Huang et Nguang, 2007] D. Huang and S.K. Nguang, “Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ILMI approach,” *Information Sciences*, 177 (2007): 3005–3015.

## J

[Jabri et al., 2009a] D. Jabri, K. Guelton, N. Manamanni and N. Abdelkrim, “Fuzzy Lyapunov decentralized control of Takagi-Sugeno interconnected descriptors,” *IEEE Symposium Series on Computational Intelligence/Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation*, Nashville, Tennessee, USA, March 2009.

[Jabri et al., 2009b] D. Jabri, K. Guelton, N. Manamanni and N. Abdelkrim, “ $H_\infty$  based decentralized fuzzy Lyapunov controller design for Takagi-Sugeno interconnected descriptors,” *2nd IFAC International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing*, Istanbul, Turkey, September 2009.

[Jadbabaie, 1999] A. Jadbabaie, “A reduction in conservatism in stability and  $L_2$  gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities,” *14th IFAC Triennial World Congress*, Beijing, China: 285–289, 1999.

[Ji et al., 2007] Z. Ji, Y. Zhou and Y. Shen, “Stabilization of a Class of fuzzy control systems via piecewise fuzzy Lyapunov function approach,” *American Control Conference*: 4065-4070, New York City, USA, July 11-13, 2007.

[Johansson, 1999] M. Johansson, “Piecewise linear control systems,” *Ph.D. dissertation*, Lund Institute of Technology, 1999.

[Johansson et al., 1999] M. Johansson, A. Rantzer and K. Arzen, “Piecewise quadratic stability of fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (7): 713–722, 1999.

## K

[Kau et al., 2007] S. W. Kau, H. J. Lee, C. M. Yang, C. H. Lee, L. Hong and C. H. Fang, “Robust  $H_\infty$  fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties,” *Fuzzy Sets and Systems*, 158 (2007) 135 – 146.

[Kawamoto et al., 1992] S. Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame and T. Taniguchi, “An approach to stability analysis of second order fuzzy systems,” *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*: 1427–1434. 1992.

[Khalil, 1996] H. Khalil, “Nonlinear systems,” *Prentice hall, Inc. second edition*, USA, 1996.

[Khalil et Dombre, 1999] W. Khalil et E. Dombre, “Modélisation identification et commande des robots,” *Edition Paris Hermès*, 1999.

[Kim et Lee, 2000] E. Kim and H. Lee, “New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems,” *Transactions on Fuzzy Systems*, (8): 523-533, 2000.

[Kumar et Daoutidis, 1995] A. Kumar and P. Daoutidis, “State-space realizations of linear differential algebraic-equation systems with control-dependent state space,” *Transactions Automation and Control*, (41): 269-274, 1995.

## L

[Lam et Leung, 2006] H. K. Lam and F. H. F. Leung, “LMI based stability and performance conditions for continuous time nonlinear systems in Takagi-Sugeno’s form,” *International Conference on Fuzzy Systems*, July 16-21, 2006.

[Lee et al., 2000] K. R. Lee, J. H. Kim, E. T. Jeung, and H. B. Park, "Output feedback robust  $H_\infty$  control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 8, (6): 657-664 December, 2000.

[Li et al., 2000] J. Li, H. O. Wang, D. Newmann, and K. Tanaka, "Dynamic parallel distributed compensation For Takagi Sugeno systems: An LMI approach," *Information Sciences*, (123): 201-221, 2000.

[Liapounoff, 1907] Liapounoff, A. (1907). "Problème général de la stabilité du mouvement," *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, (9):203-474. (traduction en français du mémoire Russe).

[Liberzon, 2003] D. Liberzon, "Switching in systems and control," *Edition Boston Birkauser*, 2003.

[Lin, 1999] C. L. Lin, "On the stability of uncertain linear descriptor systems," *Journal of the Franklin Institute*, 336 (1999) 549-564.

[Lin et Er, 2001] D. Lin and M.J. Er, "A new approach for stabilising nonlinear systems with time delay," *European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.

[Lin et al., 2006] C. Lin, Q. G. Wang and T. H. Lee, "Stability and stabilization of a class of fuzzy time-delay descriptor systems," *Transactions on Fuzzy Systems*, 14(4), August 2006.

[Xiaodong et Qingling, 2003] L. Xiaodong and Z. Qingling, "New approaches to  $H_\infty$  controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI," *Automatica*, 39(9):1571-1582. 2003.

[Liu et al., 2004] C.H. Liu, J. D. Hwang, Z. R. Tsai and S. H. Twu, "An LMI-Based stable T-S fuzzy model with parametric uncertainties using Multiple Lyapunov Function approach," *Conference on Cybernetics and Intelligent Systems*, Singapore, 1-3 December, 2004.

[Luenberger, 1977] D. G. Luenberger, "Dynamic Equation in Descriptor Form," *Transactions Automation and Control*, (AC-22): 312-321, 1977.

## M

[Ma et al., 1998] X. J. Ma, Z. Q. Sun and Y. Y. He, "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer," *Transactions on Fuzzy Systems*, 6(1): 41-50, 1998.

[Ma et Sun, 2004] B.P. Ma and J. Sun, "Robust stabilization of uncertain T-S fuzzy descriptor systems," *3<sup>rd</sup> IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Shanghai, China, 2004.

[Marx et Ragot, 2006] B. Marx and J. Ragot, "Controller and observer designs for a class of TS descriptor systems with pole placement constraint," *45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, December 13-15, 2006.

[Marx et Ragot, 2008] B. Marx and J. Ragot, “Stability and  $L_2$  norm bound conditions for Takagi-Sugeno descriptor systems,” *IFAC World Congress*, 2008.

[Masubushi et al., 1997] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda, “ $H_\infty$  control for descriptor Systems: a matrix inequalities approach,” *Automatica*, 33: 669-673, 1997.

[Morère, 2001] Y. Morère, “Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno,” *Thèse de doctorat*, LAMIH-SF, de l’Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.

[Merlet, 1997] J. P. Morlet, “Les robots parallèles,” *Edition Paris Hermès*, 1997

## N

[Nachidi et al., 2007] M. Nachidi, F. Tadeo, A. Hmamed and A. Benzaouia, “Static output feedback stabilization for time-delay Takagi-Sugeno fuzzy systems,” *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, December. 12-14, 2007.

## O

[Oustaloup et Mathieu, 1999] A. Oustaloup et B. Mathieu “La commande crone” *Hermès Science Publications*, Paris, 1999.

[Othake et al., 2003] H. Othake, K. Tanaka and H. O. Wang, “Piecewise nonlinear control,” *42<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December, 2003.

## P

[Peaucelle, 2007] D. Peaucelle, “Modèles descripteurs redondants et réduction du pessimisme des Conditions LMI,” *JN MACS*, 2007

## R

[Redheffer, 1960] R. M. Redheffer, “On a certain linear fractional transformation,” *Journal of Mathematics and Physics*, (39):269-286, 1960.

[Rejichi et al., 2008] O. Rejichi, O. Bachelier, M. Chaabane and D. Mehdi, “Admissibility and state feedback admissibilization of discrete singular systems: An LMI approach,” *16th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Ajaccio, Corsica, France, June 2008.

[Ren 2005] J. S. Ren, “Non fragile LQ fuzzy control for a class of nonlinear descriptor system with time delays,” *4<sup>th</sup> International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Guangzhou, 2005.

[Rhee et Won, 2006] B.J. Rhee and S. Won, “A new Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design,” *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9): 1211-1228, 2006.

## S

[Sala et Ariño, 2009] S. Antonio and C. Ariño, “Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya’s theorem,” *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 2671 – 2686.

[Sala, 2009] S. Antonio, “On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems,” *Annual Reviews in Control* 33 (2009) 48–58.

[Sastry, 1999] S. Sastry, “Nonlinear systems: analysis, stability, and control,” *Springer-Verlag*, New York, 1999.

[Seddiki, 2008] L. Seddiki, “Développement et commande T-S d’une machine de rééducation des membres inférieurs en chaîne musculaire fermée,” Octobre 2008.

[Seddiki et al., 2009] L. Seddiki, K. Guelton, T. Bouarar, N. Manamanni and J. Zaytoon, “T-S tracking controller design for Sys-Reeduc: a descriptor approach,” *7th IFAC Symposium on Modelling and Control in Biomedical Systems (MCBMS)*, Aalborg, Denmark, August 2009.

## T

[Takagi et Sugeno, 1985] T. Takagi and M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control,” *Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 1115: 116-132,1985.

[Tanaka et Sugeno, 1992] K. Tanaka and M. Sugeno, “Stability analysis and design of fuzzy control systems,” *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2): 135-156,1992.

[Tanaka et Sano, 1994] K. Tanaka and M. Sano, “A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer,” *Transactions on Fuzzy Systems*, 2: 119-134, 1994.

[Tanaka et al., 1998] K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, “Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs,” *Transactions on Fuzzy Systems*, 6 (2), May 1998.

[Tanaka et al., 2001a] K. Tanaka, T. Hori, T. Taniguchi and H. O. Wang, “Stabilization of nonlinear systems based on fuzzy Lyapunov function,” *Workshop IFAC Advances in Fuzzy and Neural Control*. Valencia, Spain. 2001a.

[Tanaka et al., 2001b] K. Tanaka, T. Hori and H. O. Wang, “A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design,” *American Control Conference*, Washington, USA, 2001b.

[Tanaka et al., 2001c] K. Tanaka, T. Hori, H. O. Wang, “New Parallel Distributed Compensation using time derivative of membership functions, A fuzzy Lyapunov approach,” *42<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA, December 2001.

[Tanaka et Wang, 2001] K. Tanaka and H.O. Wang, “Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach,” *John Wiley & Son Eds, New York, Wiley-Inter science* ISBN 0-471-32324-190000, 2001.

[Tanaka et al., 2003] K. Tanaka, T. Hori, and H.O. Wang, “A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems,” *Transactions on Fuzzy Systems*, (11): 582–589, 2003.

[Tanaka et al., 2006] K. Tanaka, K. Yamauchi, H. Ohtake, and H. O. Wang, “Optimal dynamic output feedback designs for backing-up control of a vehicle with triple trailers,” *International Conference on Fuzzy Systems*, Vancouver, BC, Canada July 16-21, 2006.

[Tanaka et al., 2007] K. Tanaka, H. Ohtake, H.O. Wang, “A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions,” *Transaction on Fuzzy Systems*, 15(3): 333- 341, 2007.

[Taniguchi et al., 1999a] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji and H.O. Wang, “Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs,” *American Control Conference* San Diego, California, June 1999a.

[Taniguchi et al., 1999b] T. Taniguchi, K. Tanaka and H. O. Wang, “Universal trajectory tracking control using fuzzy descriptor systems,” *38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona USA, December 1999b.

[Taniguchi et al., 2000] T. Taniguchi, K. Tanaka and H.O. Wang, “Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control,” *Transactions on Fuzzy Systems*, 8 (4): 442-452, 2000.

[Taniguchi et al., 2001] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Othake and H. O. Wang, “Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems,” *Transactions on Fuzzy Systems*, 9 (4): 525-537, 2001.

[Tian et al., 2007] W. Tian, H. Zhang and X. Yang, “Robust  $H_\infty$  control for fuzzy descriptor systems with time-varying delay and parameter uncertainties”. *3<sup>rd</sup> International conference on natural computation (ICNC)*, 2007.

[Tuan et al., 2001] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto, “Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control design,” *Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2): 324-332, 2001.

## W

[Wang et al., 1996] H. O. Wang, K. Tanaka and M. Griffin, “An approach to fuzzy control of non linear systems: Stability and design issues,” *Transactions on Fuzzy Systems*, (4): 14-23, 1996.

[Wang et al., 2004] Y. Wang, Z. Q. Sun and F. C. Sun, “Robust fuzzy control of a class of nonlinear descriptor systems with time-varying delay,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*: 2(1), 2004.

[Wu et al., 2007] H. N. Wu and H. Y. Zhang, “Reliable  $H_\infty$  fuzzy control for a class of discrete-time nonlinear systems using multiple fuzzy Lyapunov functions,” *Transactions on Circuits Systems II*, 54: 357–361, April 2007.

[Wu, 2008] H. N. Wu, “An ILMI approach to robust  $H_2$  static output feedback fuzzy control for uncertain discrete-time nonlinear systems,” *Automatica*, 44 (2008): 2333–2339.

[Wu et al., 2008] Z. Wu, H. Su and J. Chu, “Robust stabilization for uncertain discrete singular systems with state delay,” *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 18:1532–1550, 2008.

## Y

[Yoneyama et Ichikawa, 1999] C. Lin, Q. G. Wang and T. H. Lee, “ $H_\infty$ -Control for Takagi-Sugeno Fuzzy Descriptor Systems,” *International Conference on Systems Man Cybernetics*, 1999, 3: 28-33, Tokyo, Japan.

[Yoneyama et al., 2001] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama and A. Ichikawa, “Design of output feedback controllers for Takagi–Sugeno fuzzy systems,” *Fuzzy Sets and Systems* 121(2001)127–148.

[Yoneyama, 2006] J. Yoneyama, “Output Feedback Stabilization of Fuzzy Systems with Unobservable Premise Variables,” *International Conference on System of Systems Engineering*, Los Angeles, CA, USA - April 2006

## X

[Xu et al., 2007] S. Xu, B. Song, J. Lu and J. Lam, “Robust stability of uncertain discrete-time singular fuzzy systems,” *Fuzzy sets and systems*, 158(2007) 2306-2316.

## Z

[Zerar et al., 2008] M. Zerar, K. Guelton and N. Manamanni, “Linear fractional transformation based H-infinity output stabilization for Takagi–Sugeno fuzzy models,” *Mediterranean Journal Measurement Control*, 4(3)(2008)111–121.

[Zerar et al., 2009] M. Zerar, F. Cazaurang and A. Zolghadri, “Coupled LPV and Flatness-based Approach for Space Reentry Vehicles Guidance,” *Control Theory and Applications* 3(8) 1081-1092, 2009.

[Zhou et Doyle, 1996] K. Zhou and J.C. Doyle, “Robust optimal control”, *Printice Hall Int. Ed.*, New Jersey, 1996.

[Zhou et Khargonekar, 1988] K. Zhou and P.P. Khargonekar, “Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty,” *Systems Control Letters*, 10: 17-20, 1988.



---

---

## A. 1. Inégalités Matricielles Linéaires (*Linear Matrix Inequalities*) (*LMI*)

Les *LMI* ont émergées comme des outils puissants d'optimisation dans divers domaines techniques, notamment en automatique. Plus particulièrement, elles sont utilisées pour l'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande pour les modèles T-S.

Les résultats d'analyse et de synthèse auxquels aboutit la seconde méthode de Lyapunov sont parfois non convexes et nécessitent alors quelques transformations afin de les rendre convexes pour obtenir une solution au problème étudié. Ce point a été abordé le long de ce mémoire.

Les contraintes *LMI* sont données par l'expression suivante [Boyd et al., 1994] :

$$T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^n x_i T_i < 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $T(x)$  est une fonction affine en les variables de décision  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Les matrices des réels  $T_0, T_1, \dots, T_n$  sont carrées et symétriques.

L'inégalité  $< 0$  dans (A.1) signifie qu'elle est définie négative, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres  $\lambda(T(x)) < 0$  sont négatives.

La réalisabilité de la *LMI* (A.1) consiste à déterminer le vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tel que la contrainte convexe  $T(x) < 0$  est vérifiée. Cela revient alors à minimiser  $\min_x \lambda_{\max}(T(x)) < 0$ . Cette minimisation peut être effectuée à l'aide de l'algorithme du point intérieur [Boyd et al., 1994] dans la mesure où la fonction  $\lambda(T(x)) < 0$  est convexe.

### A.1.1. Propriétés des Inégalités Matricielles Linéaires

- **Analyse convexe**

La convexité joue un rôle important dans ce mémoire dans la mesure où les approches de synthèse de lois de commande que nous proposons sont formulées en terme des contraintes convexes. Ceci offre un avantage puisque les solutions apportées à ces problèmes correspondent au minimum global.

$\xi$  est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \xi^2 \text{ alors } \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \xi \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{A.2})$$

Soulignons que l'ensemble de solutions  $\xi = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) < 0\}$  correspondant au problème

d'optimisation convexe  $\min_{x \in \xi} \lambda_{\max}(T(x)) < 0$  est convexe.

Une fonction est dite convexe si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in \xi^2 \text{ pour } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ alors } T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda T(x_1) + (1-\lambda)T(x_2) < 0 \quad (\text{A.3})$$

Notons que,  $T(x)$  dans (A.1) doit être convexe.

## A. 2. Transformations matricielles

*Dans cette partie, nous présentons quelques transformations matricielles existant dans la littérature qui ont pour principal objectif de rendre les inégalités matricielles linéaires en variables recherchées.*

- **Propriété de la congruence**

Soit  $T(x)$  une matrice définie positive, symétrique et de dimension appropriées et  $Y$  une matrice non singulière de dimensions compatibles avec  $T(x)$ .

$$\text{Si } T(x) > 0 \text{ alors } Y^T T(x) Y > 0 \quad (\text{A.4})$$

Le produit matriciel  $Y^T T(x) Y$  est appelé la transformation congruence de  $T(x)$ . Notons que, dans une inégalité matricielle, la réalisation de cette transformation ne change pas le nombre de valeurs propres négatives et positives de la matrice  $T(x)$ .

- **Le complément de Schur** [\[Boyd et al., 1994\]](#)

### **Lemme 1**

*Soient  $A_{22}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice définie positive,  $A_{12}(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  une matrice de rang plein en ligne et  $A_{11}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice quelconque. Notons que ces matrices sont affines en les variables  $x$ . Les deux inégalités suivantes sont équivalentes :*

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}^T(x) \\ A_{12}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.5})$$

$A(x) > 0$  est équivalente à :

$$A_{11}(x) - A_{12}^T(x)(A_{22}(x))^{-1}A_{12}(x) > 0 \quad (\text{A.6})$$

- **Le carré matriciel** [Zhou et Khargonekar, 1988]

### Lemme 2

Soient  $W(x)$  et  $N(x)$  deux matrices de dimensions appropriées, l'inégalité suivante est vérifiée s'il existe  $Q > 0$  ou  $\tau > 0$  tels que :

$$W(x)(N(x))^T + N(x)(W(x))^T \leq \tau W(x)(W(x))^T + \frac{1}{\tau} N(x)(N(x))^T \quad (\text{A.7})$$

$$W(x)(N(x))^T + N(x)(W(x))^T \leq W(x)Q(W(x))^T + N(x)Q^{-1}(N(x))^T \quad (\text{A.8})$$

Le but des propriétés (A.7) et (A.8) est de pouvoir éliminer les terme anti-diagonaux dans une matrice symétrique et de les ramener dans les blocs diagonaux. Cette transformation permet de réécrire certains problèmes non convexes en termes de  $\mathcal{LMI}$ . L'exemple suivant permet d'illustrer le principe de cette transformation.

### Exemple

Soient les matrices  $N(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  et  $R(x)$  de dimensions appropriées, formant la matrice bloc suivante :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & (N(x))^T (M(x))^T \\ M(x)N(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.9})$$

Notre objectif est de ramener les termes  $M(x)$  et  $N(x)$  sur la diagonale. Ainsi, (A.9) peut être réécrite :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(x) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N(x))^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (M(x))^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.10})$$

En appliquant (A.7), on obtient

$$\begin{bmatrix} Q(x) & (N(x))^T (M(x))^T \\ M(x)N(x) & R(x) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} Q(x) + \frac{1}{\tau} (N(x))^T N(x) & 0 \\ 0 & R(x) + \tau M(x)(M(x))^T \end{bmatrix} < 0$$

### B. 1. Stabilité au sens de Lyapunov

La méthode de Lyapunov se base sur un principe relatif à la réalité physique de tel sorte que : si l'énergie totale d'un système (qui est une quantité scalaire) se dissipe au cours du temps, ce système tend vers un point d'équilibre. Ainsi, l'idée de Lyapunov est de considérer une fonction scalaire puis d'examiner sa variation afin d'étudier la stabilité d'un système donné.

L'analyse de la stabilité et de la stabilisation des systèmes s'effectue généralement à l'aide de la théorie de Lyapunov. Dans la littérature on distingue plusieurs types de fonctions de Lyapunov.

Soit les modèles T-S continu (MTSC) et discrets (MTSD) suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{B.1})$$

$$x(\kappa+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(\kappa))(A_i x(\kappa) + B_i u(\kappa)) \quad (\text{B.2})$$

D'une manière générale, la deuxième méthode de Lyapunov consiste à sélectionner la fonction candidate définie positive qu'on notera  $V(x(t))$ , puis de choisir des lois de commande assurant sa décroissance c'est-à-dire  $\dot{V}(x(t)) < 0$  pour les (MTSC) (B.1) et  $\Delta V(x(\kappa)) = V(x(\kappa+1)) - V(x(\kappa)) < 0$  pour les (MTSD) (B.2), si ces conditions sont vérifiées, alors la fonction  $V$  est dite fonction de Lyapunov et assure la stabilité. De plus, cette fonction peut servir de base à la synthèse de lois de commande stabilisantes. La difficulté réside dans la détermination de la fonction de Lyapunov qui se fait usuellement par tâtonnement. Cette méthode de Lyapunov donne des conditions suffisantes lors de l'étude de la stabilité des modèles flous T-S [Tanaka et Wang, 2001].

L'analyse de la stabilité des modèles T-S est généralement basée sur les fonctions candidates de Lyapunov [Tanaka et Wang, 2001]. Il existe plusieurs types fonctions de Lyapunov qui ont été utilisées dans la théorie de stabilité des modèles flous T-S telles que:

- Fonction quadratique.
- Fonction quadratique continue par morceaux (*piecewise quadratic Lyapunov functions*).
- Fonctions non quadratiques

### B. 1.1. Fonction candidate quadratique de Lyapunov

Ce type de fonction est largement utilisé par la communauté d'Automatique. Si en se plaçant dans le cadre des modèles T-S, de très nombreux travaux sont basés sur cette fonction [Tanaka et Wang., 2001].

La fonction candidate quadratique de Lyapunov est donnée par :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) \text{ avec } P = P^T > 0 \quad (\text{B.3})$$

L'utilisation de la fonction candidate quadratique de Lyapunov dans le cadre des modèles T-S conduit aisément à la formulation du problème de synthèse sous forme  $\mathcal{LMI}$ . Cependant, elle conduit à des résultats conservatifs, d'où l'intérêt de considérer d'autres types de fonctions de Lyapunov afin de proposer des approches moins conservatives.

### B. 1.2. Fonction candidate quadratique continue par morceaux de Lyapunov

Ce type de fonction es donnée par : [Johansson et al., 1999]

$$V(x(t)) = \begin{cases} x^T(t)P_i x(t) & x(t) \in X_i, i \in I_0 \\ \bar{x}^T(t)\bar{P}_i \bar{x}(t) & \bar{x}(t) \in X_i, i \in I_1 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

avec  $I_0$  désigne l'ensemble des indices de partitions de l'espace d'état  $X_i$  qui contiennent l'origine,  $I_1$  désigne l'ensemble des indices de partitions de l'espace d'état  $X_i$  qui ne contiennent pas l'origine.

Afin d'assurer la continuité des fonctions candidates de Lyapunov (B.4), les matrices  $P_i$  et  $\bar{P}_i$  sont paramétrées par la matrice  $T$  comme suit :

$$P_i = F_i^T T F_i, \text{ pour } i \in I_0 \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{P}_i = \bar{F}_i^T T \bar{F}_i, \text{ pour } i \in I_1 \quad (\text{B.6})$$

$\bar{F}_i$  sont des matrices à construire, pour plus de détails le lecteur peut se référer à [Johansson et al., 1999]. Dans le cadre des modèles T-S obtenus par l'approche de découpage en secteur non linéaire, cette fonction s'avère peu efficace dans la mesure où elle ne tient pas compte de la structure d'interconnexion non linéaire entre sous-modèles composant le système global.

### B. 1.3. Fonction candidate non quadratique de Lyapunov

Cette fonction est largement utilisée pour l'étude des modèles T-S [Jadbabaie, 1999][Blanco et al., 2001][Guerra et Vermeiren, 2004][Tanaka et al., 2007] puisqu'elle conduit à des résultats moins conservatifs par rapport à ceux présentés précédemment. Elle est donnée par :

$$V(x(t)) = x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i \right) x(t) \quad (\text{B.7})$$

avec  $P_i > 0$ .

Les travaux développés le long de ce mémoire sont basés sur ce type de fonction étendue aux cas des descripteurs T-S.



## Résumé :

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse portent sur la stabilisation des systèmes descripteurs non linéaires représentés par des multi-modèles flous de type Takagi-Sugeno incertains et/ou perturbés. Dans ce cadre, des approches basées sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov ont tout d'abord été développées. Celles-ci permettent la synthèse de lois de commande par la résolution d'un ensemble de contraintes LMIs (Inégalités Linéaires Matricielles). Les résultats de ces premières approches restent toutefois pessimistes vis-à-vis de l'ensemble des solutions accessible au problème de synthèse de lois de commande. Afin de réduire ce conservatisme, de nouvelles approches basées sur une fonction candidate non quadratique de Lyapunov et une loi de commande non PDC (Compensation Parallèle Distribuée) ont été proposées. Une autre source de conservatisme a ensuite été abordée. En effet, l'écriture classique de la dynamique de la boucle fermée introduit des termes croisés entre la commande et le modèle au sein des conditions LMIs à résoudre. L'utilisation de la propriété de redondance des descripteurs a alors permis de pallier cette source de conservatisme. En effet, l'écriture redondante de la dynamique de la boucle fermée permet de découpler les matrices du système à piloter de celles des gains de commande par retour d'état. Tirant parti de cette propriété, des problèmes réputés complexes en terme de formulation LMI ont été traités tels que la synthèse de lois de commande robustes par retour de sortie dynamique et statique pour les systèmes standard de type Takagi-Sugeno incertains et/ou perturbés.

**Mots Clés :** Systèmes non linéaires, Descripteurs, Modèles Takagi-Sugeno, LMI, Commande robuste  $H_\infty$ , Commande floue, Redondance, Fonctions de Lyapunov non quadratiques.

## Abstract :

This work deals with the stabilization of uncertain and/or disturbed nonlinear systems represented by fuzzy Takagi-Sugeno models. First, some results based on a quadratic candidate Lyapunov function have been proposed in terms of LMIs (Linear Matrix Inequalities) and the conservatism of such approaches has been discussed. To reduce the conservatism, new approaches based on a non quadratic Lyapunov function and non PDC (Parallel Distributed Compensation) control law have been proposed. Then, one other source of conservatism has been studied. Indeed, the classical way to express the closed-loop dynamic leads to introduce crossing-terms in the set of LMIs to be solved. Therefore, to overcome this source of conservatism, the descriptor redundancy property has been used to rewrite the closed-loop dynamic. This allows decoupling the system matrices from those of state feedback gain matrices. Furthermore, the redundancy property has been employed to cope with the well-known and difficult problems in terms of LMI formulation relating to the robust static and dynamic output feedback controller design for uncertain and / or disturbed Takagi-Sugeno systems.

**Keywords:** Nonlinear systems, Descriptor, Takagi-Sugeno models, LMI,  $H_\infty$  robust control, Fuzzy control, Descriptor redundancy, Non quadratic Lyapunov functions.