

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES, TECHNOLOGIE, SANTÉ

# THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur,  
Spécialité « Mécanique des matériaux »

par

**Anouar BENABBES**

## APPROCHES MICROMÉCANIQUES DE LA COMPACTION DE POUDRES ET DE LA RUPTURE DUCTILE DES MATÉRIAUX INCLUANT LE 3<sup>me</sup> INVARIANT DES CONTRAINTES

Thèse soutenue le 4 Décembre 2009 devant le jury composé de :

Prof.	JOSEPH PASTOR	LOCIE, POLYTECH'Savoie	Rapporteur
Dr.	XAVIER CHATEAU	Dir. Rech. CNRS, UR Navier	Rapporteur
Prof.	IRINI DJERAN-MAIGRE	Directrice Dpt. GCU, INSA Lyon	Examinatrice
Prof.	SAÏD AHZI	IMFS, Université de Strasbourg	Examinateur
Prof.	SÉBASTIEN MERCIER	LPMM, Université de Metz	Examinateur
Dr.	SERGE KRUCH	Ing. de Recherches, ONERA	Examinateur
Prof.	LARBI SIAD	GRESPI/LMN, Université de Reims	Directeur de thèse
Prof.	LUC DORMIEUX	LMSGC, Ponts ParisTech	co-Directeur de thèse



*À ma famille,  
pour leur patience et leurs encouragements.*



# REMERCIEMENTS

J'AI effectué cette thèse au sein du Laboratoire de Modélisation Numérique (LMN) attaché au Groupe de Recherche en Sciences Pour l'Ingénieur (GRESPI) de l'Université de Reims Champagne Ardenne (URCA).

Je voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à Monsieur *Larbi Siad*, Professeur à l'Université de Reims Champagne Ardenne, pour son dynamisme et son implication dans le rôle de directeur de thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur *Luc Dormieux*, Professeur à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, qui a trouvé du temps à m'accorder en tant que co-directeur de thèse. Ses suggestions pertinentes m'ont beaucoup aidée.

Que Madame *Irini Djeran-Maigre*, directrice du département Génie Civil et Urbanisme de l'INSA Lyon, qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et de présider mon jury de thèse trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie Monsieur *Joseph Pastor*, Professeur au Polytech'Savoie, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant d'être rapporteur. Ses remarques et ses commentaires pertinents m'ont été précieux. Je suis également particulièrement heureux que Monsieur *Xavier Chateau*, directeur de recherche CNRS, ait porté attention à mon travail en acceptant d'être le second rapporteur.

J'adresse mes remerciements à Monsieur *Saïd Ahzi* professeur à l'Université de Strasbourg, à Monsieur *Sébastien Mercier* professeur à l'Université de Metz et à Monsieur *Serge Kurch* ingénieur de recherches ONERA pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail de thèse en acceptant d'être des examinateurs.

Merci également à tous mes amis thésards et docteurs de l'URCA de m'avoir aidé ainsi que d'avoir rendu, à leur manière, ce travail plus sympathique et agréable.

Je tiens à exprimer mes remerciements aussi au Conseil Général des Ardennes pour avoir financé ma thèse.

Enfin, je remercie chaleureusement ma famille qui m'ont soutenue avant et pendant cette thèse.

Reims, le 22 décembre 2009.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	viii
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
<b>I COMPACTION DES MATÉRIAUX GRANULAIRES</b>	<b>5</b>
<b>1 MÉTALLURGIE DES POUDRES : TECHNOLOGIE, CARACTÉRISATION ET MODÉLISATION</b>	<b>7</b>
1.1 INTRODUCTION	9
1.2 MP : PRINCIPALES ÉTAPES DE TRAITEMENT	10
1.2.1 Élaboration des poudres	10
1.2.2 Compression des poudres	13
1.2.3 Frittage	15
1.3 MISES EN FORME EN MÉTALLURGIE DES POUDRES	15
1.4 CARACTÉRISATION MÉCANIQUES DES POUDRES	18
1.4.1 Comportement élastique	20
1.4.2 Comportement plastique	21
1.5 MODÈLES ÉLASTIQUES ET PLASTIQUES USUELS POUR LES POUDRES	23
1.5.1 Comportement élastique	24
1.5.2 Comportement plastique	25
<b>2 APPROCHE PAR ÉLÉMENTS FINIS DES SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES</b>	<b>37</b>
2.1 INTRODUCTION	39
2.2 MICROSTRUCTURE DU MILIEU GRANULAIRE	39
2.3 ANALYSE PAR ÉLÉMENTS FINIS	41
2.3.1 Surfaces de charge macroscopiques	43
2.3.2 Évolution de la taille des zones de contact	49
<b>3 ESTIMATION PAR L'EXTÉRIEUR DES SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES</b>	<b>53</b>
3.1 INTRODUCTION	55
3.2 HOMOGENÉISATION EN CALCUL À LA RUPTURE	55
3.3 SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES	58
3.3.1 Champs de vitesse virtuels pertinents proposés	59
3.3.2 Construction de bornes supérieures du critère de résistance macroscopique	59

<b>II</b>	<b>ENDOMMAGEMENT ET RUPTURE DUCTILE DES MATÉRIAUX</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>MODÈLES MÉCANIQUES POUR L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE</b>	<b>73</b>
4.1	INTRODUCTION . . . . .	75
4.2	MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ENDOMMAGEABLES . . . . .	76
4.3	APPROCHE MICROMÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE . . . . .	77
4.3.1	Mécanismes physiques de l'endommagement ductile . . . . .	78
4.3.2	Le modèle couplé de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) . . . . .	86
4.3.3	Autres extensions du modèle de Gurson . . . . .	90
4.4	PRISE EN COMPTE DU TROISIÈME INVARIANT . . . . .	93
4.4.1	Motivations et modèles récents . . . . .	93
4.4.2	Le modèle de Xue (2007) . . . . .	95
4.4.3	Le modèle de Nahshon et Hutchinson (2008) . . . . .	96
4.4.4	Le potentiel de McElwain <i>et al.</i> (2006) . . . . .	97
<b>5</b>	<b>IMPLANTATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE DE McELWAIN <i>et al.</i>(2006)</b>	<b>103</b>
5.1	INTRODUCTION . . . . .	105
5.2	RELATIONS ÉLASTOPLASTIQUES . . . . .	105
5.3	INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES RELATIONS ÉLASTOPLASTIQUES . . . . .	108
5.3.1	Description de la méthode . . . . .	108
5.3.2	Module tangent consistant . . . . .	112
5.3.3	Extension aux grandes déformations . . . . .	113
5.4	TESTS SUR DES ÉLÉMENTS SIMPLES . . . . .	114
5.4.1	Traction hydrostatique . . . . .	115
5.4.2	Cisaillement simple . . . . .	116
5.5	TESTS SUR UN MODÈLE DE CELLULE DE BASE . . . . .	116
5.5.1	Traction uniaxiale . . . . .	119
5.5.2	Cisaillement simple . . . . .	119
<b>6</b>	<b>APPLICATIONS DU MODÈLE DE McELWAIN <i>et al.</i> (2006)</b>	<b>123</b>
6.1	STRICTION D'UNE BARRE CYLINDRIQUE LISSE . . . . .	125
6.1.1	Description des conditions de la simulation . . . . .	125
6.1.2	Résultats . . . . .	127
6.2	RUPTURE D'UNE ÉPROUVETTE AXISYMETRIQUE ENTAILLÉE . . . . .	127
6.2.1	Description des conditions de la simulation . . . . .	129
6.2.2	Résultats . . . . .	130
6.3	CISAILLEMENT 2D . . . . .	131
6.3.1	Description des conditions de la simulation . . . . .	131
6.3.2	Résultats . . . . .	135
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>ANNEXES</b>	<b>139</b>

A.1	MÉCANISMES DE RUPTURE PROPOSÉS	141
A.1.1	Mécanisme de rupture A	141
A.1.2	Mécanisme de rupture B	142
A.1.3	Mécanisme de rupture C	144
A.1.4	Mécanisme de rupture D	146
A.1.5	Mécanisme de rupture E	148
A.1.6	Mécanisme de rupture F	150
A.1.7	Mécanisme de rupture G	152
A.1.8	Mécanisme de rupture H	154
A.2	EXPRESSIONS DES DÉRIVÉES PARTIELLES DU POTENTIEL PLASTIQUE	157
A.3	DÉRIVÉES PARTIELLES CORRESPONDANT À L'ALGORITHME D'INTÉGRATION	159
	BIBLIOGRAPHIE	163
	PRINCIPALES NOTATIONS	173

## LISTE DES FIGURES

1.1	Les différents processus de la métallurgie des poudres.	10
1.2	Principe de l'atomisation par jet d'eau (à gauche) et par jet de gaz (à droite) : Source German (1994).	11
1.3	Des exemples de diverses formes et tailles de grains de poudre métallique. a) tellurium moulu, aciculaire ; b) alliage de fer atomisé avec de l'argon, sphérique avec de fines particules agglomérées ; c) tungstène réduit par gaz, les agrégats sont polygonaux ; d) étain atomisé par air ; e) alliage de fer atomisé par centrifugeuse ; f) étain éclaboussé trempé, flocon : Source German (1994).	12
1.4	(suite), g) acier inoxydable atomisé par eau, arrondi et irrégulier ; h) palladium par électrolytique, éponge ; i) nickel par décomposition de carbonyle, poreux et cubique ; j) verre métallique à base de fer, ruban écrasé, plats angulaires ; k) titane, réduit par sodium moulu, irrégulier ; et l) hydrure de niobium, moulu, anguleux : Source German (1994).	13
1.5	Schéma du cycle de compaction pour une seule pièce : Source German (1994).	14
1.6	Illustration des opérations séquentielles dans un four de frittage : Source German (1994).	15
1.7	Principe du moulage par injection (MIM).	16
1.8	Réalisation rapide de prototypes.	17
1.9	Principe de la Compression Isostatique à Chaud (CIC) : Source German (1994).	17
1.10	Principe du procédé RIP.	18

1.11	Différentes pièces issues de l'industrie de la MP : Source Eisen <i>et al.</i> (1998). . . . .	18
1.12	Présentation des essais simples sur des comprimés cylindriques et leurs différentes conditions aux limites. . . . .	19
1.13	Illustration de l'anisotropie induite lors d'une compression en matrice. . . . .	20
1.14	(a) Courbes iso-densités ; (b) Courbes iso-potentielles dans le plan $(p, q)$ pour une poudre de fer : Source Pavier et Doremus (1999). . . . .	21
1.15	Évolution de la surface de charge en fonction de la densité relative pour un comprimé obtenu par : (a) compression isotrope ; (b) compression en matrice : Source Rottmann <i>et al.</i> (2001). . . . .	22
1.16	Compression uniaxiale monotone sur des comprimés mis en matrices ou par pression isotrope : Source Mosbah (1995). . . . .	23
1.17	Sections de surfaces de charge typiques pour les matériaux poreux par le plan de contrainte $(p, q)$ . . . . .	26
1.18	Représentation de trois surfaces de charge particulières pour une même densité relative. . . . .	26
1.19	Surface de charge dans le plan $(p, q)$ du critère de Cam-Clay modifié pour (à gauche) poudres peu cohésives (poudres dures), (à droite) poudres cohésives (poudres tendres). . . . .	28
1.20	Surfaces de charge dans le plan $(p, q)$ pour le Cap-Modèle. . . . .	28
1.21	Surfaces de charge macroscopiques de comprimés de particules cylindriques pré-densifiés par compression isostatique et en matrice à des densités relatives de 0.95 et 0.98. Les résultats de la méthode des éléments finis sont comparés à ceux de la méthode de lignes de glissement et à la solution analytique de Gurson en 2D (relation (1.6)) : Source Sridhar <i>et al.</i> (2001). . . . .	30
1.22	Construction des surfaces de charge macroscopiques par la méthode de la borne supérieure de comprimés de particules cylindriques pré-densifiés isostatiquement et en matrice : Source Sridhar <i>et al.</i> (2001). . . . .	31
1.23	Volume macroscopique représentatif d'un agrégat de poudre sous chargement axisymétrique et représentation typique d'un contact entre deux particules sphériques : Source Fleck <i>et al.</i> (1992). . . . .	31
1.24	Surface de charge pour un chargement axisymétrique du volume macroscopique à partir des calculs numériques (modèle de surfaces de contact), et ces approximations mathématiques : une forme quadratique (1.9) et une forme linéaire/circulaire : Source Fleck <i>et al.</i> (1992). . . . .	32
1.25	Critère de surfaces de contact (calcul numérique) comparé au critère de Gurson (1.6) pour une variété de densités relatives : Source Fleck <i>et al.</i> (1992). . . . .	33
1.26	Famille de surfaces de charge proposée pour un agrégat de poudre : Pour $D_r < 0.75$ , l'approximation quadratique du critère de surfaces de contact est utilisée. Pour $0.75 < D_r < 0.9$ , le critère de transition (1.10), entre le modèle FKM et le modèle de Gurson, est utilisé. Pour $D_r > 0.9$ , le modèle de Gurson est utilisé : Source Fleck <i>et al.</i> (1992). . . . .	33

1.27	Effet de la cohésion, à travers le paramètre $0 < \eta < 1$ , entre particules sur la surface de charge macroscopique (modèle numérique) et comparaison avec le modèle de Cam-Clay pour une poudre non cohésive : Source Fleck (1995). . . . .	34
1.28	Effet de l'anisotropie induite par le chemin de déformation sur la surface de charge macroscopique (modèle numérique). Les surfaces de charge sont données pour la compaction isostatique et la compaction en matrice pour une densité relative $D_r = 0.8$ en tenant compte de la cohésion parfaite ( $\eta = 1$ ) et la non cohésion ( $\eta = 0$ ) entre les grains : Source Fleck (1995). . . . .	34
1.29	Surface de charge macroscopique : effet du frottement entre particules dans le cas d'une distribution isotrope des contacts. $\eta = 1$ correspond à une cohésion parfaite entre les grains et $\eta = 0$ correspond à aucune cohésion : Source Fleck (1995). . . . .	35
2.1	Modèle micromécanique de matériaux granulaires : (en haut) échelle macroscopique : structure, (en bas) échelle mésoscopique : cellule de base. . . . .	40
2.2	État déformé de la cellule de base : caractéristiques dimensionnelles et état macroscopique de contraintes. . . . .	41
2.3	Maillage élément fini, conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation. . . . .	42
2.4	Trajets de charge choisis. . . . .	44
2.5	Isovaleurs de la déformation plastique équivalente pour différentes densités relatives $D_r$ : chargement isostatique ( $E_z = E_r \neq 0$ ). . . . .	45
2.6	Isovaleurs de la déformation plastique équivalente pour différentes densités relatives $D_r$ : chargement uniaxial ( $E_z \neq 0, E_r = 0$ ). . . . .	46
2.7	Surfaces de charge macroscopiques dans le plan $(\Sigma_r, \Sigma_z)$ à une densité relative $D_r = 0.8$ . Trait continu : compaction isostatique ; trait discontinu : compaction en matrice. . . . .	47
2.8	Surfaces de charge macroscopiques dans le plan $(\Sigma_m, \Sigma)$ à une densité relative $D_r = 0.8$ . Trait continu : compaction isostatique ; trait discontinu : compaction en matrice. . . . .	47
2.9	Surfaces de charge pour des pré-comprimés obtenues par compaction isostatique et en matrice à différentes densités relatives. . . . .	48
2.10	Surfaces de charge pour des pré-comprimés obtenues par compaction isostatique et en matrice à différentes densités relatives. . . . .	48
2.11	Formes typiques d'un grain solide au cours du processus de compaction. . . . .	50
2.12	Évolution de la densité relative $D_r$ en fonction de $(a/H)$ : comparaison des relations (2.12) et (2.14) avec les résultats d'éléments finis. . . . .	51
2.13	Évolution des tailles des zones de contact : variations de (a) $a/H$ et (b) $b/R$ en fonction de la déformation macroscopique $E_z$ pour la compaction isostatique (ligne continue) et la compaction en matrice (ligne discontinue). Les résultats fournis par les éléments finis sont indiqués par des points. . . . .	52

3.1	Interprétation géométrique de la définition cinématique de $G^{hom}$ . . . . .	57
3.2	Mécanismes de rupture proposés pour le stade I de la compaction. . . . .	60
3.3	Mécanismes de rupture proposés pour le stade II de la compaction. . . . .	61
3.4	Illustration du mécanisme de rupture $\mathbb{A}$ . . . . .	62
3.5	Bornes supérieures obtenues pour des pré-comprimés isostatique de densité relative $D_r = 0.7$ et $D_r = 0.95$ correspondant respectivement au stade I et II de la compaction. Les lettres représentent le mécanisme de rupture considéré. . . . .	65
3.6	Surfaces de charge macroscopiques pour des pré-comprimés hydrostatiques à différentes densités relatives : (a) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques radiale $\Sigma_r$ et axiale $\Sigma_z$ ; (b) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques moyenne $\Sigma_m$ et déviatorique $\Sigma$ . . . . .	67
3.7	Surfaces de charge macroscopiques pour des pré-comprimés obtenus par compression en matrice à différentes densités relatives : (a) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques radiale $\Sigma_r$ et axiale $\Sigma_z$ ; (b) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques moyenne $\Sigma_m$ et déviatorique $\Sigma$ . . . . .	68
3.8	Surfaces de charge macroscopiques à des densités relatives $D_r = 0.7, 0.8$ et $0.95$ pour des pré-comprimés obtenus par : (a) compression isostatique; (b) compression en matrice. Confrontation aux modèles FKM (Fleck <i>et al.</i> , 1992) et au modèle de Gurson (1977). . . . .	69
4.1	Schématisation du mécanisme de germination des cavités. . . . .	79
4.2	Schématisation du mécanisme de croissance des cavités. . . . .	81
4.3	Différents modes de coalescence observés par Benzerga (2000). . . . .	83
4.4	Graphe de la fonction $f^*(f)$ . . . . .	85
4.5	Représentation du critère de Gurson pour diverses valeurs de la porosité $f$ dans l'espace de contrainte normalisée ( $\Sigma_m/\sigma_0, \Sigma_{eq}/\sigma_0$ ). . . . .	87
4.6	Représentation du critère de Gurson dans l'espace de Haigh-Westergaard. . . . .	87
4.7	Cavités sphéroïdale de révolution allongée et aplatie. . . . .	91
4.8	Déformation plastique équivalente à la rupture pour l'aluminium Al 2024 – T351 en fonction de la triaxialité. Résultats expérimentaux de Bao et Wierzbicki (2004) et formules approchées de Teng et Wierzbicki (2006) : Source Nahshon et Hutchinson (2008). . . . .	93
4.9	Graphe de la fonction $D(f)$ . . . . .	96
4.10	Cellules cubiques représentatives du matériau poreux : (à gauche) cellule cubique simple, (au milieu) cellule cubique centrée et (à droite) cellule cubique à face centrée : Source McElwain <i>et al.</i> (2006a;b). . . . .	97
4.11	Définitions conventionnelle de la contrainte d'écoulement macroscopique. . . . .	98
4.12	Section de la surface de charge par un plan octaédrique d'un matériau poreux avec $f = 0.25$ , microstructure CS et utilisation de la définition 2. $\circ$ : $\Sigma_m = 0.1$ , $\times$ : $\Sigma_m = 0.5$ , ligne continue : GTN avec $q_1 = 1.4$ et $q_2 = 1$ : Source McElwain <i>et al.</i> (2006b). . . . .	99

4.13	Surface de charge obtenu pour la microstructure cubique simple à $f = 0.25$ en utilisant la définition 2 : Source McElwain <i>et al.</i> (2006b). . . . .	99
5.1	Interprétation géométrique du schéma de retour implicite d'Euler pour le cas de la plasticité associée (schéma de "Closet point projection", Simo et Hughes (1998))	109
5.2	Conditions de chargement d'un élément cubique simple. . . . .	115
5.3	Variation de : (a) la contrainte hydrostatique normalisée $\Sigma_m/\sigma_0$ ; (b) la porosité $f$ , en fonction de la déformation volumétrique $E_v = 3 \ln(1 + \Delta l/l)$ . . . . .	117
5.4	Variations de la contrainte équivalente normalisée $\Sigma_{eq}/\sigma_0$ en fonction de la déformation équivalente $E_{eq}$ . . . . .	118
5.5	Cellule de base à trois éléments utilisé pour la comparaison des réponses mécaniques des modèles GTN et McElwain <i>et al.</i> . . . . .	118
5.6	Variations de : (a) la contrainte équivalente $\Sigma_{eq}$ ; (b) la porosité $f$ , en fonction de la déformation plastique équivalente dans la matrice $\bar{\epsilon}^p$ sous la condition de chargement uniaxiale du modèle de cellule de base. . . . .	120
5.7	Variations de : (a) la contrainte équivalente $\Sigma_{eq}$ ; (a) la porosité $f$ , en fonction de la déformation plastique équivalente dans la matrice $\bar{\epsilon}^p$ sous la condition de chargement en cisaillement simple du modèle de cellule de base. . . . .	121
6.1	Succession d'événements observée sur une éprouvette axisymétrique lisse en traction : Source Leblond (2003). . . . .	125
6.2	Barre cylindrique lisse en traction : (a) Seul la partie hachurée est analysée; (b) Maillage éléments finis, conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation; (c) Configuration de la barre à la rupture. . . . .	126
6.3	Variations de la contrainte nominale $\Sigma_N = F/\pi R_0^2$ en fonction de : (a) la déformation nominale $E_N = u/l_0$ ; (b) la réduction nominale de rayon $\Delta R/R_0$ de l'éprouvette. . . . .	128
6.4	Géométrie d'une éprouvette axisymétrique entaillée. . . . .	129
6.5	Éprouvettes axisymétrique entaillées : maillage éléments finis, conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation. . . . .	130
6.6	Courbe d'érouissage à temperature ambiante pour l'acier API X65 : Source Chang-Kyun <i>et al.</i> (2007). . . . .	131
6.7	Variations de la contrainte nominale $\Sigma_N = F/\pi R_0^2$ en fonction de : (a) la déformation nominale $E_N = u/l_0$ ; (b) la réduction nominale de rayon $\Delta R/R_0$ de l'éprouvette AE <sub>1.5</sub> . . . . .	132
6.8	Variations de la contrainte nominale $\Sigma_N = F/\pi R_0^2$ en fonction de : (a) la déformation nominale $E_N = u/l_0$ ; (b) la réduction nominale de rayon $\Delta R/R_0$ de l'éprouvette AE <sub>3</sub> . . . . .	133
6.9	Géométrie de l'échantillon utilisé dans les essais de cisaillement effectués par Cowie <i>et al.</i> (1989). . . . .	134
6.10	Bande plane soumise à un cisaillement pur : géométrie, conditions de chargement et maillages non déformé et déformé. . . . .	135

6.11 Variations de la contrainte de cisaillement $\tau = F/l_0$ en fonction du cisaillement $\gamma = 2u/e_0$ de la bande cisillée. . . . .	136
A.1 Mécanisme de rupture A. . . . .	141
A.2 Mécanisme de rupture B. . . . .	143
A.3 Mécanisme de rupture C. . . . .	145
A.4 Mécanisme de rupture D. . . . .	147
A.5 Mécanisme de rupture E. . . . .	149
A.6 Mécanisme de rupture F. . . . .	151
A.7 Mécanisme de rupture G. . . . .	153
A.8 Mécanisme de rupture H. . . . .	155



# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce mémoire comporte deux parties distinctes. La partie I a pour objet la compaction des matériaux granulaires et la partie II traite de l'approche locale de la rupture ductile des matériaux.

## PARTIE I

**D**ANS la gamme de production de pièces en grande série via des procédés simples et économiques, les procédés de mise en forme des matériaux (métalliques, céramiques ou composites) à partir de poudres présentent un intérêt de plus en plus croissant pour les industriels. Les matériaux granulaires utilisés vont des poudres métalliques (acier, cuivre) aux mélanges de poudres (carbure de tungstène-cuivre, aluminium-céramiques . . .) en passant par les céramiques (alumine, ferrites).

Le procédé de mise en forme à partir de poudres est utilisé dans nombreux secteurs parmi lesquels l'aéronautique et l'automobile pour fabriquer différentes sortes de pièces telles que, si on se réfère à l'industrie automobile, des engrenages, des moyeux, des cames ou encore des bielles. Le matériau granulaire est tout d'abord soumis à de fortes pressions ensuite à des températures élevées dans le but d'atteindre les spécifications de tenue mécanique requises de la pièce escomptée. La compression a pour objectif principal d'imprimer à la poudre la forme de la pièce et entraîne la densification du comprimé pour atteindre une densité maximale suite à un réarrangement des grains accompagné de leur déformation. À l'issue de la compression, la pièce dite "comprimé à vert" est encore mécaniquement très fragile, d'où la nécessité de procéder au frittage. Celui-ci consiste à chauffer le comprimé à vert à haute température permettant ainsi de mieux "souder" les grains pour avoir de bonnes caractéristiques de tenue mécanique. La combinaison de la compression et du frittage est couramment employée dans le secteur mécanique pour des productions de grandes séries permettant des prix de revient faibles, d'allier forte cadence de production, minimum de perte de matières premières et ne nécessite pas de reprise d'usinage majeure.

Dans le processus de mise en forme, le matériau évolue de l'état initial d'une poudre sans cohésion vers un matériau poreux de porosité tendant asymptotiquement vers zéro (matériau dense). Les caractéristiques du comportement au cours de la densification s'avèrent être un des aspects importants à prendre en compte. Les propriétés du "comprimé à vert", comme sa densité relative et sa résistance, ne sont pas uniquement liées à la nature des poudres (composition, taille, forme, distribution, propriétés mécaniques des grains . . .), mais dépendent aussi du mode et de l'histoire du chargement du matériau. En effet, le chemin de chargement affecte

la déformation et le développement des surfaces de contact des grains qui affectent à leur tour les propriétés mécaniques (résistance, anisotropie ...).

Depuis le milieu des années soixante-dix, la modélisation de la compaction de poudres a fourni un moyen efficace pour comprendre les mécanismes de base mise en jeu et d'optimiser les opérations des procédés de mise en forme des matériaux granulaires. Les modèles proposés à l'issue de ces recherches sont pour la plupart issus d'une approche phénoménologique et leur utilisation dans les analyses aux éléments finis a prouvé leur efficacité à prédire, par exemple, la distribution de la densité dans des comprimés de forme complexe. Les fort peu nombreux modèles basés sur une approche micromécanique ont été utilisés pour reproduire le comportement dû à la densification du matériau granulaire. Parmi les tout premiers modèles micromécaniques on peut citer ceux proposés par Fleck et ses co-investigateurs (Fleck *et al.*, 1992; Fleck, 1995). La construction de ces modèles micromécaniques avait pour but la détermination de la réponse macroscopique du matériau granulaire en prenant en compte le développement de la plasticité locale au niveau des zones de contacts entre grains. L'analyse mécanique du problème considéré employée par ces auteurs repose sur l'homogénéisation des milieux hétérogènes aléatoires en plasticité et les simulations éléments finis (Akisanya *et al.*, 1994; Akisanya et Cocks, 1995; Ogbonna et Fleck, 1995; Sridhar *et al.*, 2001).

Nous nous proposons dans la première partie de ce mémoire de déterminer, pour une densité relative fixée, la surface de charge macroscopique d'un milieu granulaire composé de grains sphériques identiques. Deux volumes élémentaires représentatifs (VER) axisymétriques, associés à chacun des deux stades classiques de la compaction ont été choisis. Préalablement à ce choix, l'analyse aux éléments finis du comportement élastoplastique d'un VER *primitif* axisymétrique a permis, d'une part, de fixer pour une densité relative donnée les paramètres géométriques des deux autres VERs et, d'autre part, de comparer les surfaces de charge macroscopiques fournies par l'homogénéisation en calcul à la rupture et celle obtenue numériquement.

Le *premier chapitre* de la partie I, en rapport avec l'industrie de la métallurgie des poudres, est une présentation relativement brève de l'état de l'art de la mise en forme des matériaux se présentant sous forme de poudres. Le *second chapitre* expose la démarche de l'analyse élément finis mentionnée plus haut. Nous avons jugé utile de présenter succinctement l'approche cinématique de l'homogénéisation en calcul à la rupture des milieux périodiques au *troisième chapitre*. Cette approche est appliquée pour l'estimation par l'extérieur des surfaces de charge macroscopiques cherchées. Pour ce faire, huit mécanismes de rupture pertinents sont proposés.

## PARTIE II

**L**ES matériaux métalliques sont des milieux hétérogènes constitués d'une matrice élastoplastique truffée d'inclusions quasi-rigides de très petites dimension (sulfures, carbures ...). La rupture ductile de ces matériaux est généralement amorcée par la nucléation au droit des inclusions de cavités microscopiques provoquée soit par la décohésion de la matrice autour

des inclusions, soit par rupture fragile de celles-ci. Ces cavités croissent ensuite en raison de l'écoulement plastique de la matrice et finissent par coalescer, ce qui conduit à l'apparition d'une fissure macroscopique dont la propagation relève de la mécanique de rupture classique. De nombreuses études ont été consacrées à la compréhension des phénomènes physiques et mécaniques concernés par ces phases. Il existe peu de modèles capables de prédire la nucléation des cavités du fait de la complexité de la liaison matrice-particules.

Il est communément admis que la phase de croissance des cavités dans un matériau ductile est bien décrite par le modèle Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) (Gurson, 1977; Tvergaard, 1982; Tvergaard et Needleman, 1984) ou ses différentes extensions parmi lesquels le modèle Gologanu-Leblond-Duveaux (GLD) (Gologanu *et al.*, 1993; 1994; 1997). Ces modèles, par construction, ne peuvent prédire la croissance du volume des cavités sous très faible triaxialité<sup>1</sup> et en particulier le cisaillement pur. D'un autre côté des observations expérimentales fines sur des aciers à très haute résistance (Cowie *et al.*, 1989) confirment la croissance des microcavités soumises à des contraintes de cisaillement pur. Ceci est particulièrement vrai pour les sollicitations de nature dynamiques (choc, impact ...). Xue (2007a;b) et Nahshon et Hutchinson (2008) ont proposé d'incorporer d'une manière phénoménologique, la croissance des cavités sous faible triaxialité dans le modèle GTN. Ces auteurs avancent que les modifications apportées sont liées à la prise en compte de la troisième invariant du tenseur de contrainte. Dans ce contexte, McElwain *et al.* (2006a;b) suite à de très nombreuses simulations numériques du comportement élastoplastique de microstructures représentatives de milieux poreux proposent un critère plastique similaire au GTN et dépendant du troisième invariant. L'objectif de la seconde partie de cette thèse est d'implanter le modèle de McElwain *et al.* (2006a;b) dans le code ABAQUS (2005) et de l'utiliser dans les problèmes pratiques.

Dans le *quatrième chapitre* de la partie II, on rappelle quelques points essentiels des approches phénoménologique et locale de la rupture ductile. On y décrit le modèle de Gurson (1977) ainsi que certaines de ses extensions. On finit le chapitre par présenter les modèles très récents de rupture ductile incluant le troisième invariant que sont les modèles de Xue (2007a;b), Nahshon et Hutchinson (2008) et McElwain *et al.* (2006a;b). L'implantation du modèle de McElwain *et al.* (2006a;b) dans le code ABAQUS (2005) est détaillée dans le *cinquième chapitre*. L'intégration de la loi de comportement est basée sur un schéma implicite d'Euler (Simo et Hughes, 1998; Belytschko *et al.*, 2000). La validation de l'implantation est effectuée sur des cas tests avec comparaison au résultats fournis par le GTN d'ABAQUS. Le *sixième chapitre* est dédié à l'application du modèle de McElwain *et al.* (2006a;b) à des problèmes pratiques simples relevant de la mécanique de la rupture ductile des matériaux.

---

1. Rapport de la contrainte moyenne macroscopique à la contrainte équivalente macroscopique



**Première partie**

**COMPACTION DES MATÉRIAUX  
GRANULAIRES**



# MÉTALLURGIE DES POUDRES : 1

## TECHNOLOGIE, CARACTÉRISATION ET MODÉLISATION

### SOMMAIRE

1.1	INTRODUCTION	9
1.2	MP : PRINCIPALES ÉTAPES DE TRAITEMENT	10
1.2.1	Élaboration des poudres	10
1.2.2	Compression des poudres	13
1.2.3	Frittage	15
1.3	MISES EN FORME EN MÉTALLURGIE DES POUDRES	15
1.4	CARACTÉRISATION MÉCANIQUES DES POUDRES	18
1.4.1	Comportement élastique	20
1.4.2	Comportement plastique	21
1.5	MODÈLES ÉLASTIQUES ET PLASTIQUES USUELS POUR LES POUDRES	23
1.5.1	Comportement élastique	24
1.5.2	Comportement plastique	25

Ce chapitre se propose de présenter succinctement l'état de l'art de la métallurgie des poudres en focalisant sur les aspects comportement mécanique des matériaux élaborés à partir de poudres. Nous commençons par rappeler les principales étapes d'élaboration des matériaux se présentant initialement sous forme granulaire. Les différents procédés de mise en forme des poudres sont ensuite exposés ainsi que les modèles de comportement de ces matériaux en cours de densification.



## 1.1 INTRODUCTION

La métallurgie des poudres (MP) se réfère à un ensemble de procédé de fabrication et de mise en forme qui sont utilisés pour produire différentes formes de pièces mécaniques à partir de mélanges de poudres de métaux purs ou d'alliages. Cette filière permet la réalisation de pièces de précision difficile à obtenir par d'autres procédés communs et ce sans encourir de perte de matériaux. Les principaux processus de la MP pour la production de pièces et de composants sont la compression et le frittage. La compression a pour objectif de déformer la poudre à l'aide d'une pression externe et d'imprimer à la poudre la forme de la pièce. Le frittage consiste à chauffer le comprimé obtenu pour un objectif final de tenue mécanique. Une schématisation des différents processus de cette filière de fabrication est illustrée sur la figure 1.1. Chaque processus est versatile, efficace, rentable et respectueux de l'environnement. Pour de nombreux pièces issues de la MP, les opérations secondaires sont éliminées complètement ou réduites de façon significative par rapport aux procédés de fabrication conventionnels.

La MP offre de nombreux avantages par rapport aux autres technologies de mise en forme des matériaux métalliques, parmi lesquels on peut citer :

- la capacité intrinsèque à produire une large gamme d'alliages, notamment les composites, avec des propriétés uniques ;
- le contrôle de la taille, la forme et l'emplacement de la porosité dans la pièce ;
- l'adaptation des microstructures pour proposer une gamme de propriétés physiques et mécaniques ;
- la production des pièces de volume modéré à volume élevé ;
- la fabrication d'une gamme étendue de formes ;
- la capacité d'optimiser le processus complet, allant de la sélection des matériaux en passant par la fabrication jusqu'aux propriétés du produit fini.
- le coût-efficacité plus compétitif vis-à-vis des procédés tels que le moulage, le forgeage et l'usinage.

Des procédés spécifiques à la MP sont développés depuis quelques décennies. Ils se sont positionnés comme des solutions techniques concurrentielles ou innovantes dans divers secteurs industriels. Par comparaison aux autres procédés de mise en forme, les techniques de la MP se sont ainsi imposées pour certaines applications.

Par ailleurs, la modélisation du comportement mécanique de la poudre au cours de la densification constitue un point crucial pour la simulation numérique qui est un outil d'aide précieux pour l'industrie. Les moyens expérimentaux mis en œuvre pour analyser le comportement des poudres montrent la grande évolution des caractéristiques des poudres aux cours de leurs densifications. Les expériences ont permis de mettre en évidence, en ce qui concerne la description du comportement des poudres lors de la phase de compression, la densité relative courante, les déformations et les contraintes comme variables pertinentes.

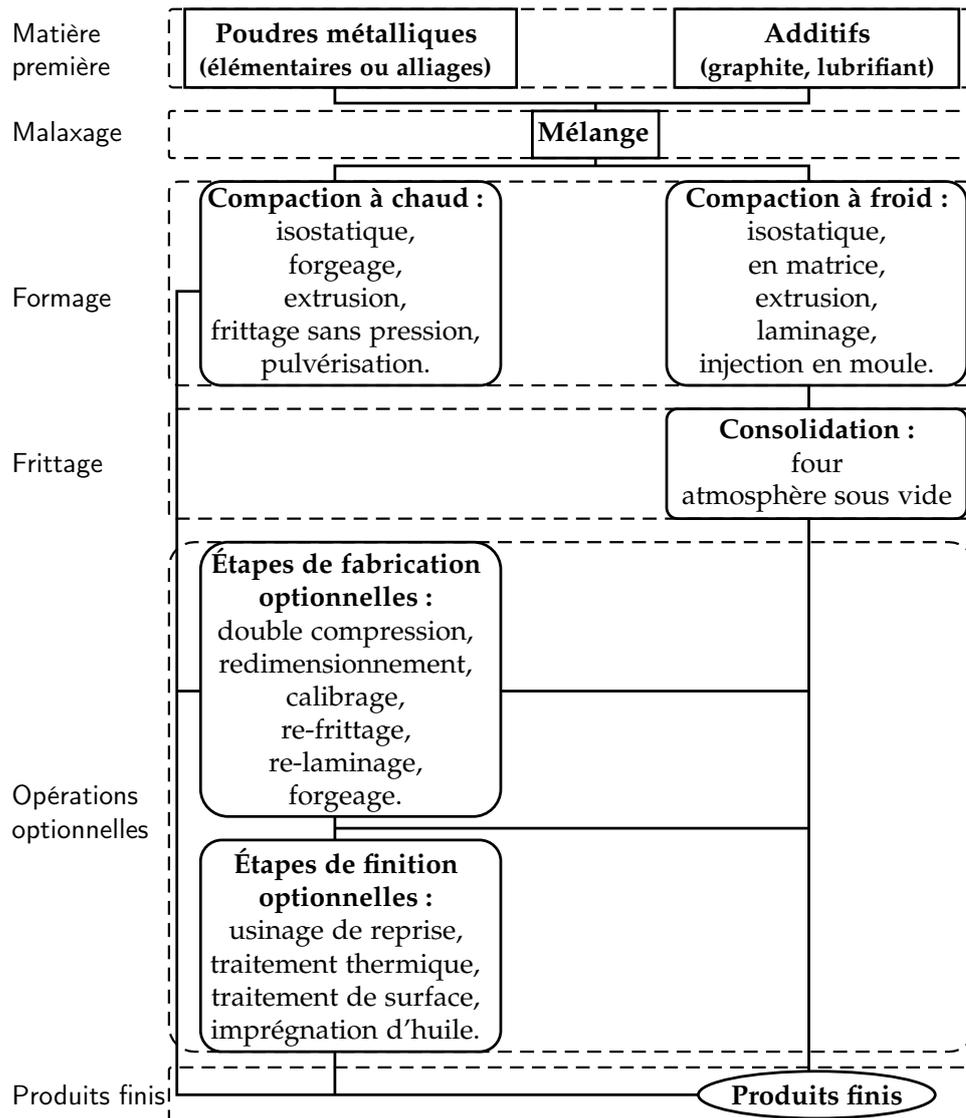


FIGURE 1.1 – Les différents processus de la métallurgie des poudres.

## 1.2 MP : PRINCIPALES ÉTAPES DE TRAITEMENT

### 1.2.1 Élaboration des poudres

En pratique, il existe trois méthodes de fabrication des poudres : mécanique, physique et chimique. Chacune de ces méthodes ont une influence sur la taille des grains solides, leur répartition, leur forme, leur microstructure, la chimie et le coût des poudres obtenues (Bouvard, 2002; German, 1994).

- Du point de vue mécanique, les techniques couramment utilisées sont celles du broyage et du mécanosynthèse.
- Les méthodes physiques se réfèrent essentiellement aux techniques d'atomisations dont le principe est de faire couler le métal en fusion et de le soumettre aux jets d'un fluide (eau, gaz, huile) dont le but est d'isoler les gouttelettes qui constituent ainsi les grains solides

conformément à la figure 1.2. Il existe d'autres techniques physiques telles que l'ultrason, l'orifice vibrant... (Bouvard, 2002; German, 1994).

- Parmi les techniques chimiques, on distingue une diversité de méthodes de préparation du poudres qui consistent à faire intervenir un réactant et un réactif (Bouvard, 2002).

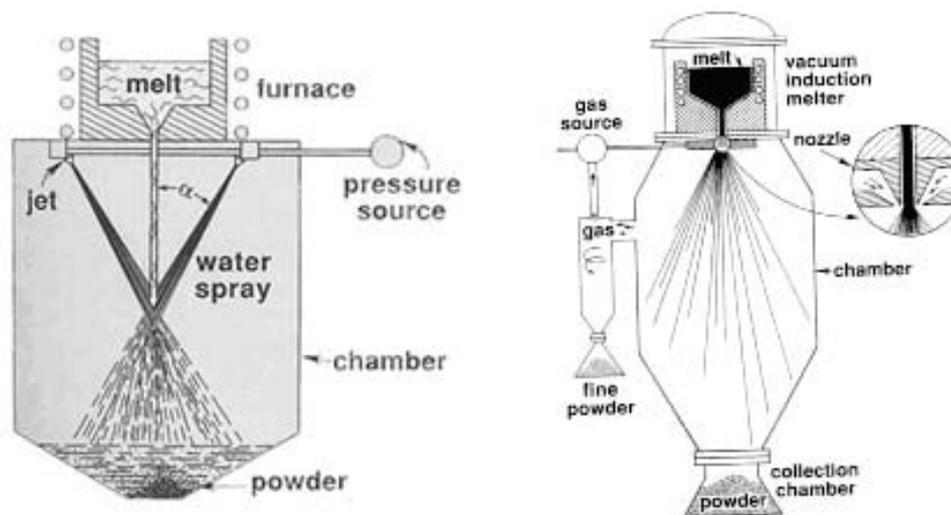


FIGURE 1.2 – Principe de l'atomisation par jet d'eau (à gauche) et par jet de gaz (à droite) : Source German (1994).

Les procédés de mise en forme des poudres rencontrent actuellement un succès croissant dans divers secteurs industriels tels que l'automobile, l'aérospatial, les outils de coupes, l'énergie, les conducteurs électriques, les supports magnétiques et l'électronique. Chacun de ces secteurs emploie des poudres spécifiques à leurs activités. La matière première, livrée sous forme pulvérulente, peut être de différentes natures : métallique, céramique ou organique. Les poudres de nature organique sont utilisés dans l'industrie pharmaceutique. Pour décrire ces matières premières, il est d'usage de préciser

- la composition chimique : les matières premières sont distinguées au travers de noms commerciaux. La composition chimique inclut également la nature des adjuvants.
- les adjuvants : ce sont des matériaux ou substances ajoutés à la poudre brute et ont pour fonction soit de liant, soit de lubrifiant. Le liant autorise l'agglomération des grains de poudre et le lubrifiant réduit les frottements aux interfaces poudres-outils et grain-grain.

La nature granulaire d'un matériau pulvérulent est caractérisée par un certain nombre de paramètres physiques : la masse totale, le volume total de la poudre, le volume de la partie solide, le volume des vides, la masse volumique de la matière dense, la densité relative rapportée à la masse volumique du matériau dense, etc. Ces paramètres qualifient essentiellement l'état du matériau au regard de la porosité au cours des phases caractéristiques des procédés de mises en forme.

D'autres paramètres doivent être également considérés pour distinguer avec précision les nuances variées des poudres industrielles. En effet, la caractérisation mécanique de dureté conduit à définir deux grandes classes de matériaux pour les poudres :

- Les matériaux ductiles qui sont des matériaux "mou" et qui peuvent être allongés, étendus, étirés sans se rompre (fer, cuivre, plomb ...)
- Les matériaux fragiles qui sont des matériaux durs et qui peuvent se briser sans déformation plastique appréciable. On distingue dans cette classe les carbures et les céramiques.

La caractérisation des poudres repose aussi sur l'analyse de la morphologie des grains :

- la taille des grains est mesurée par tamisage ou micrographie qui renseignent sur la granulométrie du mélange,
- la forme des grains conditionne en partie le comportement de la poudre pour certaines phases du procédé de mise en forme.

Les photographies présentées sur les figures 1.3 et 1.4 permettent d'apprécier la variété des morphologies rencontrées pour quelques poudres métalliques.

Lors de l'étape de mélange, des éléments d'alliages, tels que le graphite, le nickel ou le cuivre, ainsi que éventuellement le lubrifiant sont ajoutés à la poudre de base (poudre de fer par exemple). La factorisation d'un bon malaxage du mélange réalisé permet d'obtenir une certaine homogénéisation de la poudre conduisant à une répartition plus uniforme de celle-ci.

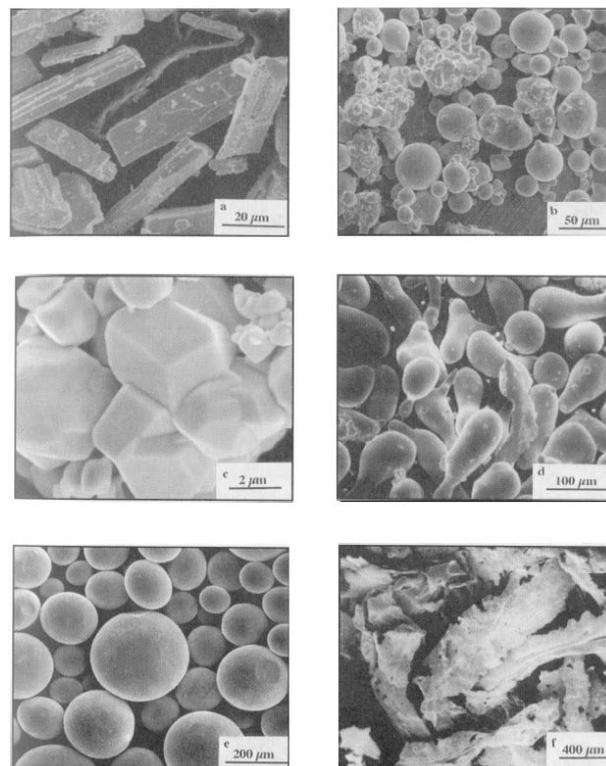


FIGURE 1.3 – Des exemples de diverses formes et tailles de grains de poudre métallique. a) tellurium moulu, aciculaire ; b) alliage de fer atomisé avec de l'argon, sphérique avec de fines particules agglomérées ; c) tungstène réduit par gaz, les agrégats sont polygonaux ; d) étain atomisé par air ; e) alliage de fer atomisé par centrifugeuse ; f) étain éclaboussé trempé, flocon : Source *German (1994)*.

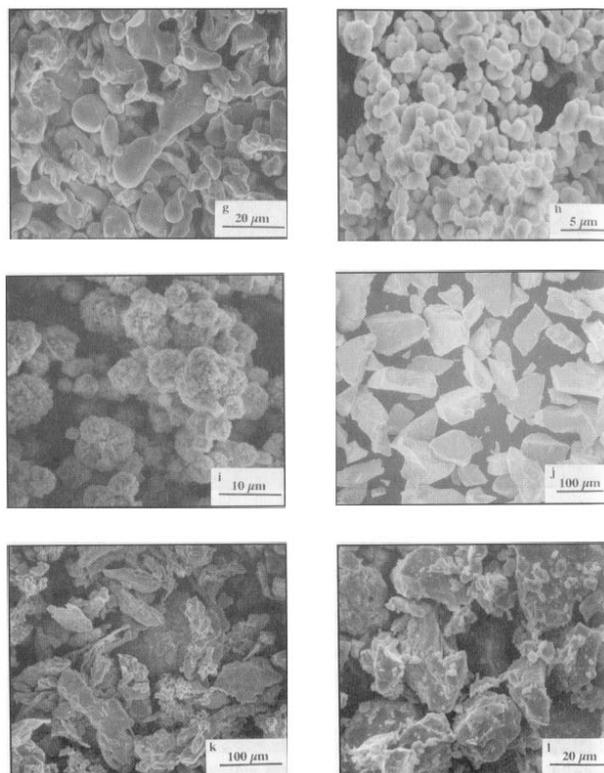


FIGURE 1.4 – (suite), g) acier inoxydable atomisé par eau, arrondi et irrégulier ; h) palladium par électrolytique, éponge ; i) nickel par décomposition de carbonyle, poreux et cubique ; j) verre métallique à base de fer, ruban écrasé, plats angulaires ; k) titane, réduit par sodium moulu, irrégulier ; et l) hydrure de niobium, moulu, anguleux : Source *German (1994)*.

### 1.2.2 Compression des poudres

La phase compression vise deux buts que sont la densification par rapprochement et déformation des grains solides à l'aide d'une pression externe, et l'obtention de comprimés ayant la forme et les dimensions désirées. Au cours de la compression, le lubrifiant sec mélangé initialement avec la poudre est pressé jusqu'au proie de la matrice afin de faciliter l'éjection de la pièce d'une part et d'autre part pour augmenter la vie de l'outillage. La méthode de compression la plus utilisée est la méthode dite uni-axe à froid. Le cycle de compaction est décrit par les étapes ci-dessous conformément à la figure 1.5 :

1. Une quantité contrôlée de la poudre est mise en place par gravité dans la matrice par l'intermédiaire d'un sabot d'alimentation.
2. Les poinçons supérieur et inférieur se déplacent l'un vers l'autre en appliquant une pression pré-déterminée sur la poudre, générant ainsi un comprimé conforme à la forme et à la taille de la matrice et des poinçons.
3. Le poinçon supérieur est retiré de la matrice et le poinçon inférieur se déplace vers le haut afin d'éjecter la pièce de la matrice.
4. Le poinçon inférieur revient à sa position initiale et le sabot passe à travers la cavité de la matrice poussant ainsi le comprimé obtenu et remplissant de nouveau la matrice pour une nouvelle étape de compression.

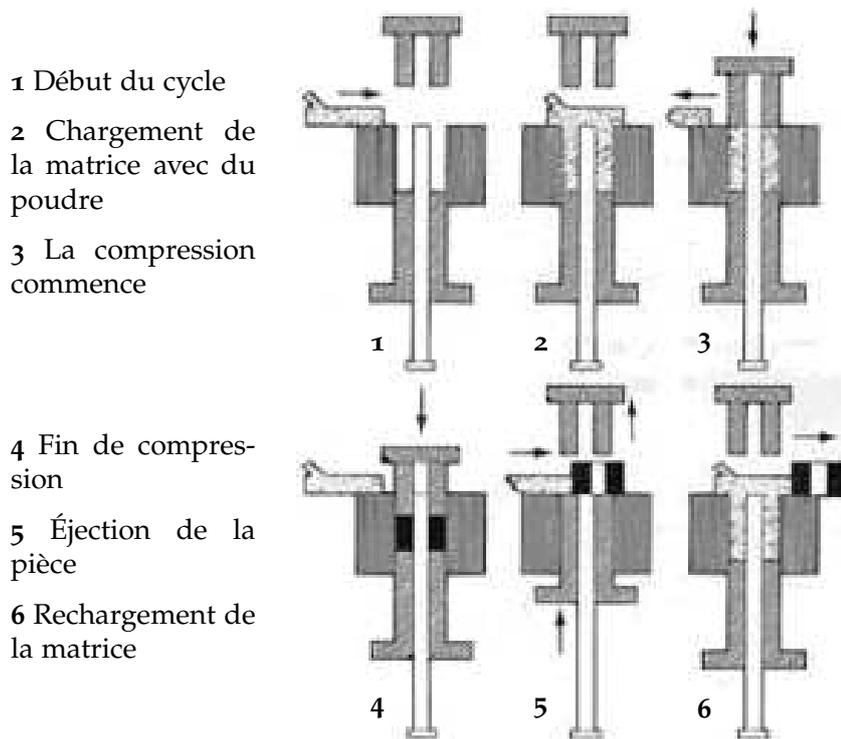


FIGURE 1.5 – Schéma du cycle de compaction pour une seule pièce : Source *German (1994)*.

Les pressions utilisées pour comprimer les poudres peuvent aller de 138 à 827 MPa (ou plus) en fonction de la densité et la taille de la pièce désirée. La majorité des pièces obtenues par l'industrie de la MP sont consolidées selon la méthode citée. D'autres méthodes plus spécifiques sont également utilisées et seront discutées ultérieurement.

Pour un comprimé, tout comme les milieux granulaires de manière générale, l'état de compacité des matériaux est quantifié par la densité relative qui est égale à la densité obtenue par le comprimé rapportée à la densité théorique du matériau dense, c'est-à-dire densité sans porosité. Pour avoir une bonne densité via le procédé de compression, il faut (*Bouvard, 2002*) :

- Diminuer le nombre de contacts entre grains, cela revient à avoir des tailles plus importante des grains,
- Améliorer le réarrangement par moyen mécanique (vibration),
- Abaisser la valeur des coefficients de frottement grains-outils et grains-grains par ajout d'un lubrifiant,
- Favoriser un bon temps de mélange poudre/lubrifiant,
- Bien définir la cinématique de compression,
- Favoriser des contraintes de compression élevées.

Les comprimés ainsi obtenus par l'étape de compression, désignés par "pièces à vert", possèdent la forme désirée mais leurs propriétés mécaniques sont médiocres. L'amélioration de ces propriétés mécaniques nécessitent l'opération de frittage.

### 1.2.3 Frittage

Le but du frittage est la consolidation des pièces à vert suite à une élévation de la température, ce qui a pour effet de densifier le matériau et de rehausser ses propriétés mécaniques. Dans une étape de frittage typique, la pièce à vert est placée sur un tapis à mailles et se déplace lentement à travers un four à atmosphère contrôlée. La température dans le four, comme indiquée sur la 1.6, augmente graduellement depuis une zone de pré-chauffage jusqu'à une zone chaude où elle est maintenue constante à la température de frittage désirée. La température commence ensuite à diminuer dans une zone de refroidissement où la baisse de température est contrôlée. La température de frittage est maintenue au-dessous du point de fusion du métal de base. Dans certains cas, des alliages additifs à la poudre de base peuvent fondre, on parle donc ici du frittage à phase liquide. Généralement, le four comporte une atmosphère protectrice afin d'empêcher l'oxydation des pièces dans la zone chaude et pour aider à réduire les oxydes encore présents.

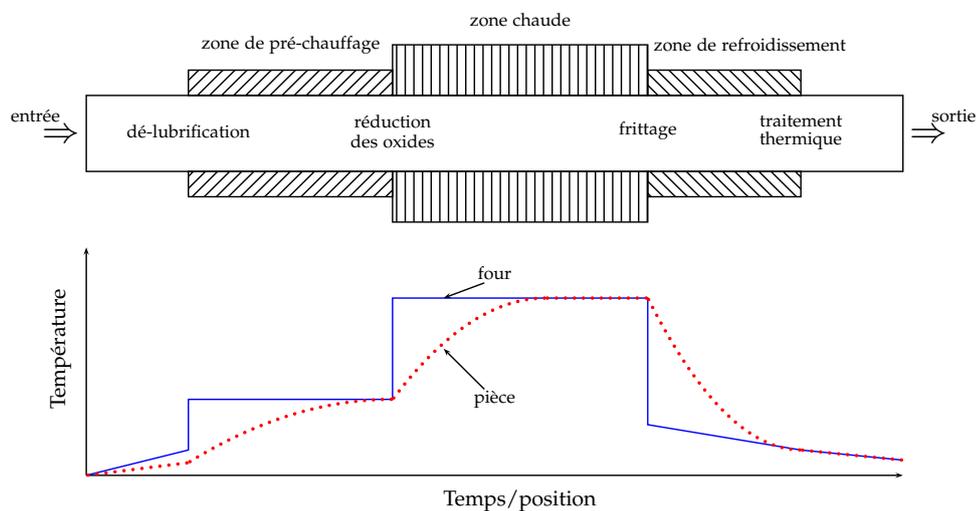


FIGURE 1.6 – Illustration des opérations séquentielles dans un four de frittage : Source *German (1994)*.

Le cycle de température imposé aux pièces lors de leur présence dans le four, implique des changements de la microstructure du matériau constitutif ainsi que sa composition. La microstructure développée au cours du frittage détermine les propriétés physiques et mécaniques du matériau.

## 1.3 MISES EN FORME EN MÉTALLURGIE DES POUDRES

D'un point de vue technique et économique, les pièces mécaniques obtenus par la métallurgie des poudres s'avèrent souvent être des pièces directement utilisables, sans usinage supplémentaire et sans perte de matière première. Le principe général de la mise en forme des poudres consiste en l'élaboration d'un matériau compact, de bonne tenue mécanique et de forme définie, à partir d'un matériau granulaire. L'énergie nécessaire à la densification est délivrée sous forme thermique et/ou mécanique. Il est à noter que l'énergie thermique est toujours requise pour aboutir à une bonne tenue mécanique par "soudure" des grains.

De manière simplifiée, la densification d'un matériau granulaire peut être la conséquence des effets thermiques, le résultat d'un procédé combinant simultanément des effets thermiques et mécaniques, ou encore un procédé comprenant d'abord une phase purement mécanique (mise en forme) suivie d'une phase thermique (frittage). Citons ci-après quelques procédés de mise en forme rencontrés en métallurgie des poudres.

**Metal Injection Moulding (MIM) :** ce procédé est utilisé pour la fabrication de pièces tridimensionnelles aux formes particulièrement complexes. Le principe consiste à injecter la poudre métallique préalablement mélangée avec un liant dans une moule comme le montre la figure 1.7. Après élimination du liant (déliantage), suite au démoulage, la pièce est soumise à haute température pour le frittage.

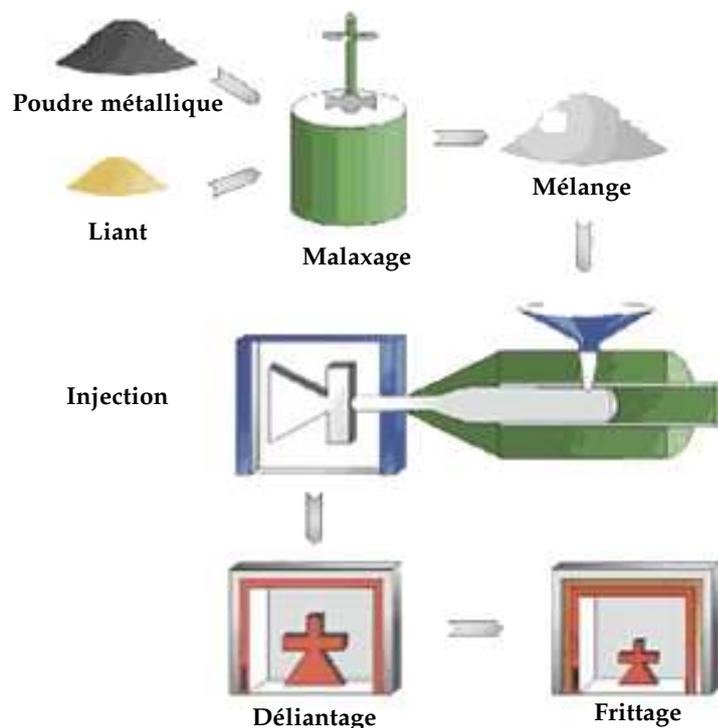


FIGURE 1.7 – Principe du moulage par injection (MIM).

**Frittage pour le prototypage rapide :** il s'agit d'un procédé de production rapide de pièces, ou de séries de pièces, sans outillages à partir de données 3D. Le principe repose sur la soudure des grains de poudre couche par couche. Chaque couche étant exposée à un faisceau laser qui trace la forme de chaque strate et solidifie la poudre. Les grains non chauffés ne sont pas affectés et servent de support pour la couche suivante. Une nouvelle couche est étalée par un rouleau mécanique et le cycle recommence comme illustrée sur la figure 1.8.

**Compression Isostatique à Chaud (CIC) :** ce procédé combine des sollicitations mécaniques et thermiques. Son principe consiste à placer de la poudre dans un conteneur sur lequel est appliquée une pression isotrope. Celle-ci est portée à une température proche de la température de fusion du matériau (cf. figure 1.9). La méthode est utilisée pour la consolidation de matériaux tels que les outils en acier, les superalliages à base de nickel,

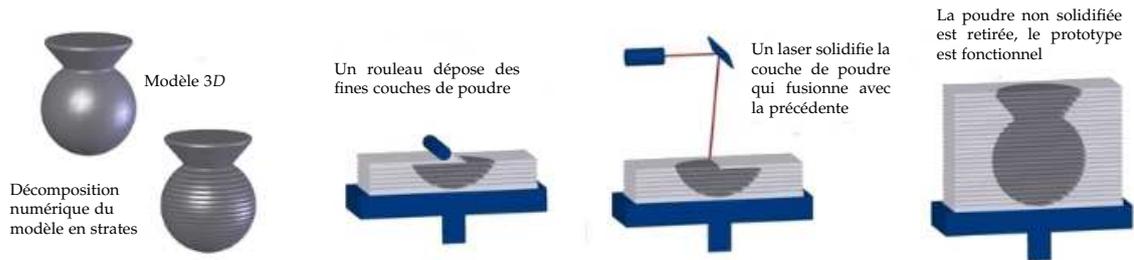


FIGURE 1.8 – Réalisation rapide de prototypes.

titane, et composites à matrice en aluminium. Les pièces obtenues par ce procédé ont des propriétés physiques et mécaniques isotropes avec une porosité minimale, en particulier pour les pièces massives.

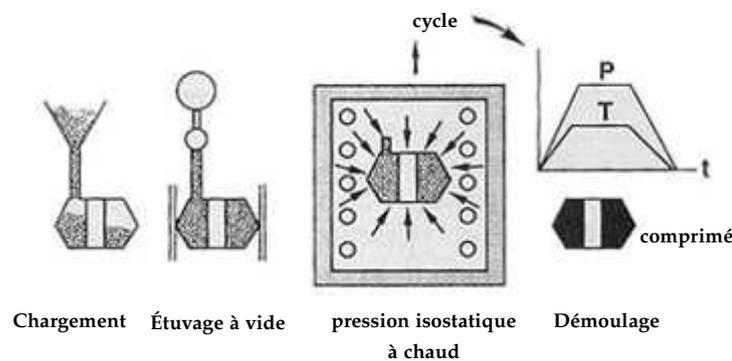


FIGURE 1.9 – Principe de la Compression Isostatique à Chaud (CIC) : Source German (1994).

**Compression Isostatique à Froid (CIF) :** le principe de ce procédé, dont les sollicitations sont purement mécanique, consiste à immerger un conteneur souple rempli de poudre dans un liquide, habituellement de l'eau, qui est comprimé à une haute pression. La poudre est alors rendue compacte à travers une pression approximativement identique dans toutes les directions. Ceci conduit à une bonne uniformité de la densité. Ce procédé se distingue par sa capacité à produire des pièces très élancées telles que des barres.

**Rubber Isostatic Pressing (RIP) :** ce procédé reprend le principe du CIF, à la différence que la pression est créée par l'intermédiaire du mouvement unidirectionnel d'un piston. La poudre est versée dans un moule en élastomère (matériau presque incompressible). L'énergie appliquée par le piston est transmise à l'élastomère pour parvenir à des conditions similaires à la compression isostatique (cf. figure 1.10). La pièce extraite du moule est ensuite frittée.

**Compression à froid :** il existe plusieurs procédés de mise en forme par compression à froid, parmi lesquels on peut citer,

- la compression en matrice dont les différentes étapes de ce procédé ont déjà été commentées précédemment (section 1.2.2, figure 1.5).
- la compression-laminage qui est un procédé analogue au laminage sauf qu'une poudre est comprimée entre deux rouleaux en mouvement de rotation pour former une plaque relativement fine.

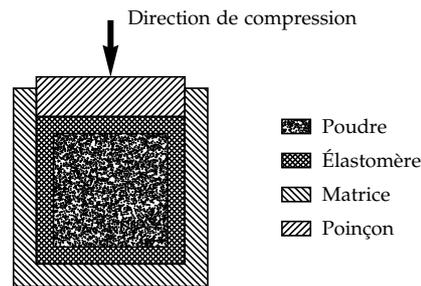


FIGURE 1.10 – Principe du procédé RIP.

- la compression rotative qui consiste à comprimer une poudre dans une matrice, mais contrairement au procédé classique où toute la surface du poinçon exerce une pression, l'effort est seulement transmis sur une partie de la surface d'un outil animé d'un mouvement de rotation désaxée.
- la compression dynamique qui regroupe la compression par choc hydraulique, la compression explosive et la compression par impact de projectile. Ces procédés consistent à comprimer une poudre en appliquant une pression très importante (100 GPa) pendant un très court instant (micro-seconde). Ils permettent d'atteindre, pour certains matériaux, des densités relatives proches de l'unité.

Le lecteur peut se référer aux références [German \(1994\)](#); [Eisen \*et al.\* \(1998\)](#) et [Bouvard \(2002\)](#) pour plus de détails sur l'ensemble de ces procédés ainsi que leurs applications. Des pièces, de formes diverses et variées, fabriquées par divers processus de MP sont indiquées sur la figure 1.11.



FIGURE 1.11 – Différentes pièces issues de l'industrie de la MP : Source [Eisen \*et al.\* \(1998\)](#).

#### 1.4 CARACTÉRISATION MÉCANIQUES DES POUDRES

Il existe toute une variété de moyens d'essais permettant de caractériser (propriétés physiques et mécaniques) la poudre et les comprimés. Dans l'industrie, les essais de caractérisation sont souvent normalisés. On y distingue les essais de coulabilité et de densité tassée à la réception de la matière, les essais de compressibilité, de tenue à cru (essais de flexion) et d'efforts d'éjection sur des comprimés. Dans les unités de recherches, les moyens d'essais sont sophistiqués et plus lourds d'exploitation. Ils permettent cependant d'effectuer des essais mécaniques

identifiant le type de comportement manifesté par la poudre et donnent accès aux valeurs des paramètres matériaux figurant dans les expressions des lois de comportement (Brewin *et al.*, 2008).

La figure 1.12 montre schématiquement les essais rencontrés dans la pratique courante. Ce sont les essais classique de traction simple, de compression triaxiale, de compression isotrope (compression triaxiale pour laquelle la contrainte radiale est égale à la contrainte axiale), et de compression en matrice. Les essais de compression diamétrale (essais brésilien) et de flexion quatre points sont aussi pratiqués en métallurgie des poudres. Du point de vue interpretation des résultats, il peut s'avérer plus aisé dans certains cas, comme en géotechnique, de substituer aux contraintes axiale  $\Sigma_z$  et radiale  $\Sigma_r$ , la pression moyenne  $p$  et le déviateur  $q$  définis par

$$p = -(2\Sigma_r + \Sigma_z)/3, \quad q = \Sigma_z - \Sigma_r. \quad (1.1)$$

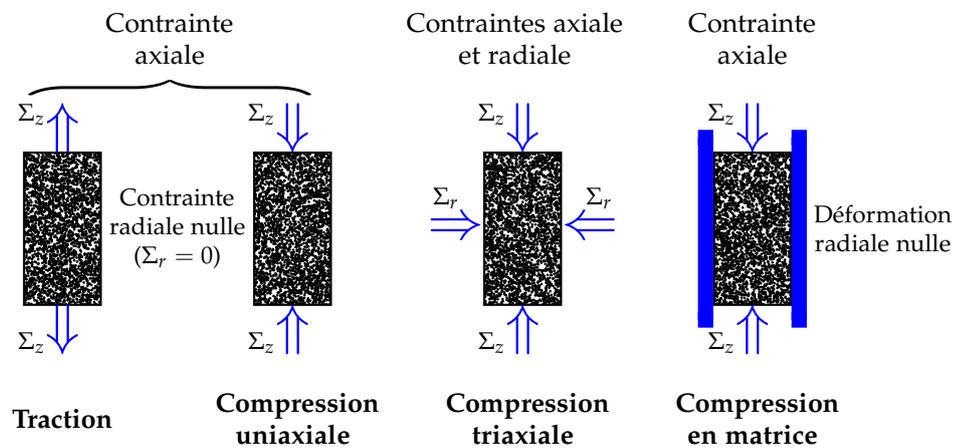


FIGURE 1.12 – Présentation des essais simples sur des comprimés cylindriques et leurs différentes conditions aux limites.

Les dispositifs des essais classiques constituent des moyens de caractérisation fiables de comprimé de poudre. Chacun d'eux permet de décrire des états de sollicitation distincts et des histoires de chargement spécifiques. Suivant l'état de contraintes auquel elle est soumise, une poudre va répondre différemment. Elle manifeste un caractère pulvérulent sous un état de cisaillement à faible pression moyenne. Son comportement est celui d'un matériau massif lorsqu'elle est fortement comprimée. Étant donnée que le comportement à la compression est très faiblement sensible à la vitesse de chargement, qui est en pratique relativement faible (de l'ordre de quelques cm/s à quelques dizaines de cm/s), les parties réversible et irréversible du comportement peuvent être respectivement qualifiées d'élastique et plastique. La distinction entre l'élasticité et la plasticité est faite par la décomposition de l'état de déformation en une partie élastique et une partie plastique. Les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques (< 3% pour les poudres de fer) pour une sollicitation de compression. la manifestation de la plasticité est due aux mouvements rigides des grains, à leur déformation et éventuellement leur fracturation, faisant évoluer la densité relative et la distribution des contacts intergranulaires. L'élasticité n'est due qu'à la composante élastique des déformations de grains.

### 1.4.1 Comportement élastique

Le comportement élastique d'une poudre se manifeste lors du relâchement des contraintes de compression à l'éjection des comprimés. Le rebond<sup>1</sup> consiste en une dilatation du comprimé lors de sa sortie de la matrice. L'augmentation du volume est due à la restitution d'une partie de l'énergie de déformation. Ce phénomène est en partie attribué au comportement élastique de la poudre (Brewin *et al.*, 2008). Une modélisation précise de ce comportement est essentiel pour prédire les dimensions de la pièce à vert après éjection. Dans le cas des poudres de fer par exemple, le rebond à l'éjection est plus important que le retrait au frittage.

Afin de mettre en évidence les caractéristiques du comportement élastique, des mesures indirectes par ultrasons des paramètres élastiques (module de Young, module de compressibilité volumique, coefficient du Poisson dont la mesure reste très imprécise) ont été effectués par Dawson *et al.* (1996) durant la compaction de poudre de fer. Ces auteurs ont mis en évidence une *non-linéarité* et une *anisotropie* de l'élasticité fonction de la densité. Par ailleurs, des mesures directes de contraintes et de déformations réalisées par Pavier et Doremus (1999) après confinement dans la cellule triaxiale de révolution confirment la nature non-linéaire de la réponse et une anisotropie du comportement élastique du matériau. En première approximation, on peut considérer la poudre lâche comme un matériau isotrope dont l'élasticité initialement très faible revêt un caractère anisotrope au fur et à mesure de la densification. L'anisotropie est induite par la direction de chargement qui déforme ou oriente les grains de manière préférentielle. La figure 1.13 illustre l'anisotropie induite lors d'une compression en matrice. Cette anisotropie de comportement est mise en évidence par un essai de compression uniaxiale qui montre ainsi une meilleure résistance dans le sens de la pré-compression que dans le sens perpendiculaire.

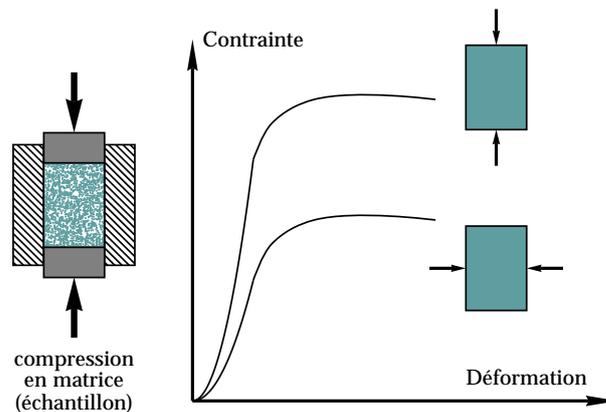


FIGURE 1.13 – Illustration de l'anisotropie induite lors d'une compression en matrice.

Les mesures réalisées par Dawson *et al.* (1996) et Pavier et Doremus (1999) n'ont pas le degré de précision pourtant nécessaire. Riera *et al.* (2000) et Frachon (2002) ont réalisé des essais de compression simple sur des échantillons cubiques de poudre de fer qui ont été mis en forme dans un premier temps par compression en matrice de section carrée. L'originalité de ces essais repose sur le caractère cyclique du chargement comportant de nombreuses

1. Différence entre le diamètre de la matrice et celui de la pièce éjectée.

décharges-recharges de la sollicitation imposée. Il en ressort de la série de résultats obtenus que les réponses en déformation-contrainte présentent une évolution avec la densité et que le comportement élastique est non-linéaire. En outre, il dépend de l'orientation de la sollicitation par rapport au comprimé. Cette anisotropie élastique semble disparaître pour les valeurs élevées de la densité.

### 1.4.2 Comportement plastique

La déformation plastique est prépondérante au cours de la compression. Dans le cas de poudres tendres, les grains au cours de la densification s'indentent mutuellement au cours de la déformation, créant ainsi des zones de dissipation plastique au niveau des zones de contact. Il s'ensuit que la matière tend à s'extruder pour combler les vides entre les grains, ce qui fait croître la densité au fur et à mesure que la charge appliquée augmente. Une compression isotrope génère de faibles densités comparativement aux autres états de contrainte. Ceci implique que la superposition d'une contrainte de cisaillement à la compression isotrope améliore la densification en laissant aux grains une grande mobilité. La connaissance de l'évolution de la densité en fonction de l'état de contrainte appliqué s'avère ainsi indispensable.

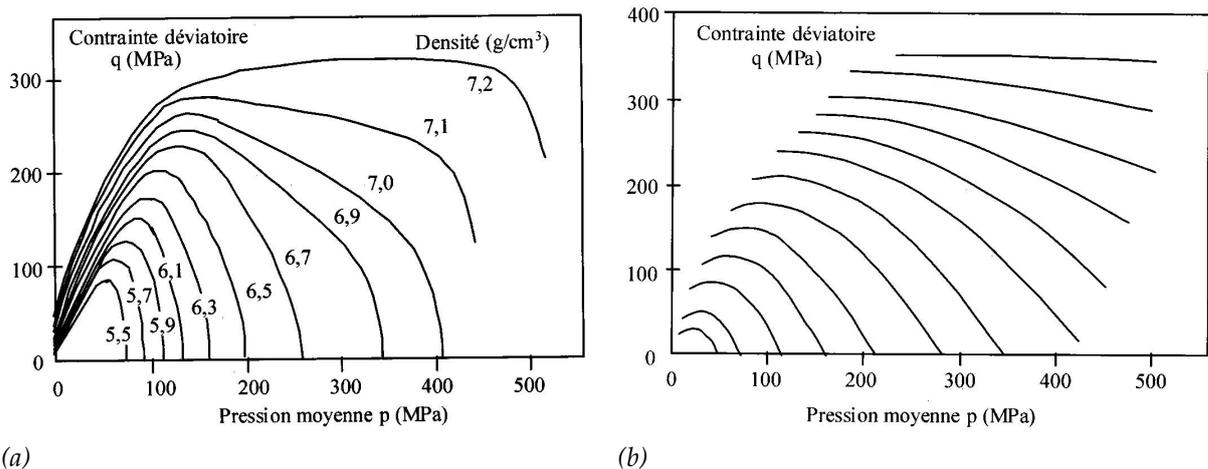


FIGURE 1.14 – (a) Courbes iso-densités; (b) Courbes iso-potentielles dans le plan  $(p, q)$  pour une poudre de fer : Source Pavier et Doremus (1999).

En se basant sur des essais triaxiaux de révolution, permettant dans son principe d'explorer une partie significative du plan pression moyenne-déviateur de contrainte  $(p, q)$  par combinaison d'une contrainte axiale et d'une contrainte radiale différentes sur l'éprouvette (cf. figure 1.12), on peut obtenir un réseau de courbes d'iso-densité comme celui représenté sur la figure 1.14a (Pavier et Doremus, 1999). Cette figure met en évidence des états de contraintes différents pour une même densité. Ces courbes conduisent à définir des surfaces fermées dans l'espace  $(p, q)$ . Ce sont les surfaces de charges pour une densité fixée, dont la taille augmente avec celle-ci. Sous de fortes pressions moyennes et des cisaillements élevés, la réponse de la poudre s'approche de celle du matériau constitutif des grains solides. Les courbes iso-densité s'orientent progressivement suivant la direction de l'axe des pressions  $p$ , à l'image des maté-

riaux plastiques de von Mises bien que les contraintes appliquées ne permettent généralement pas d'atteindre une porosité nulle.

Les essais triaxiaux effectués par Pavier et Doremus (1999), ont permis de mesurer la direction de l'écoulement plastique d'une poudre dans une large gamme de contraintes. La déformation d'une poudre est souvent analysée en la séparant en *déformation volumique*  $E_v$ , caractérisant la densification, et en *déformation déviatorique*  $E_q$ , caractérisant le cisaillement à volume constant. Une représentation possible consiste alors à tracer les iso-potentiels, qui sont les courbes perpendiculaires à la direction du vecteur écoulement ( $dE_v, dE_q$ ). Les mesures effectuées sur une poudre de fer montrent un réseau d'iso-potentiels plastiques dont l'allure générale indiquée sur la figure 1.14b diffère sensiblement de celle des surfaces de plasticité. La partie des iso-potentiels de pente positive témoigne d'une déformation dilatante, typique des milieux granulaires, alors qu'une pente négative indique une densification.

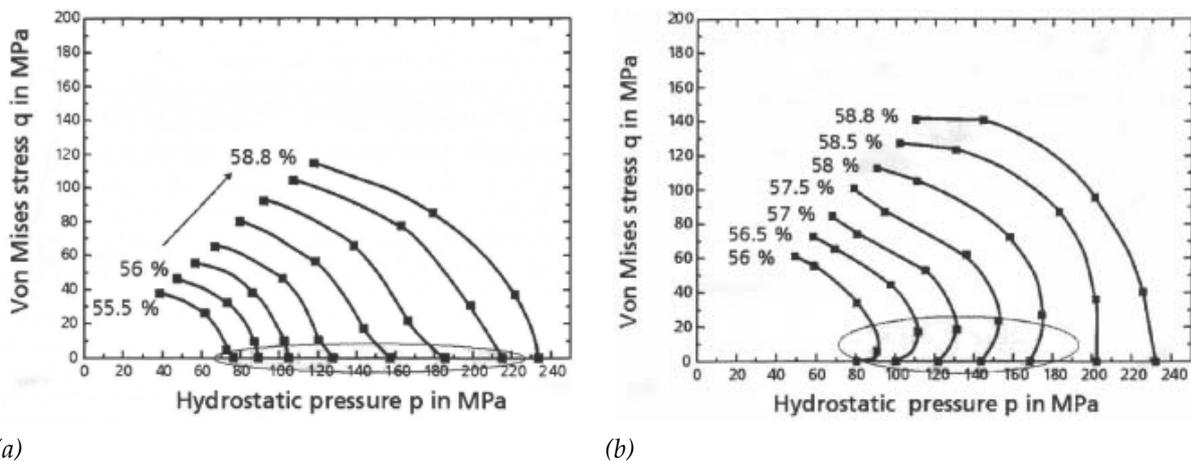


FIGURE 1.15 – Évolution de la surface de charge en fonction de la densité relative pour un comprimé obtenu par : (a) compression isotrope ; (b) compression en matrice : Source Rottmann *et al.* (2001).

Outre la dépendance de la densité en fonction du chemin de chargement dans le plan  $(p, q)$ , une dépendance de l'histoire de chargement a été constatée. En effet, en se référant à l'analyse faite par Rottmann *et al.* (2001) sur divers échantillons cylindriques, certains sont densifiés par compression isotrope et d'autres par compression en matrice. Les comprimés à vert ainsi obtenus ont été ensuite testés au sein d'une cellule de compression triaxiale de révolution. Les résultats de ces investigations sont reportés sous forme de courbes d'iso-densités par les figures 1.15a-b. Afin d'identifier l'influence des histoires de mise en forme sur le comportement des comprimés à vert, les figures 1.15a-b doivent être analysées en parallèle. La première constatation est le niveau de contrainte requis pour atteindre une même densité. En effet, les comprimés issus d'une pré-densification isotrope nécessitent des états de contraintes de niveaux globalement inférieurs à ceux des comprimés obtenus par compression en matrice pour une même densité. La deuxième différence concerne la courbe des iso-densités à proximité de l'axe des pressions  $p$ . L'influence de l'histoire de mises en forme sur la limite d'élasticité de la poudre est manifeste et est imputable à un comportement plastique anisotrope induit par l'histoire de sollicitations. L'influence de celle-ci sur le comportement du matériau

apparaît également dans les travaux de Mosbah (1995). L'auteur a effectué la comparaison sur des échantillons pré-densifiés par compression en matrice et par compression isotrope. Les échantillons ont été sollicités par une compression simple monotone jusqu'à rupture suivant deux directions différentes par rapport à l'orientation de l'échantillon. Ainsi que l'indique la figure 1.16, les résultats confirment l'importance et l'effet de l'orientation du comprimé mis en forme par compression en matrices. Des mesures de même type ont été réalisées par Riera *et al.* (2000) et elles arrivent aux mêmes résultats.

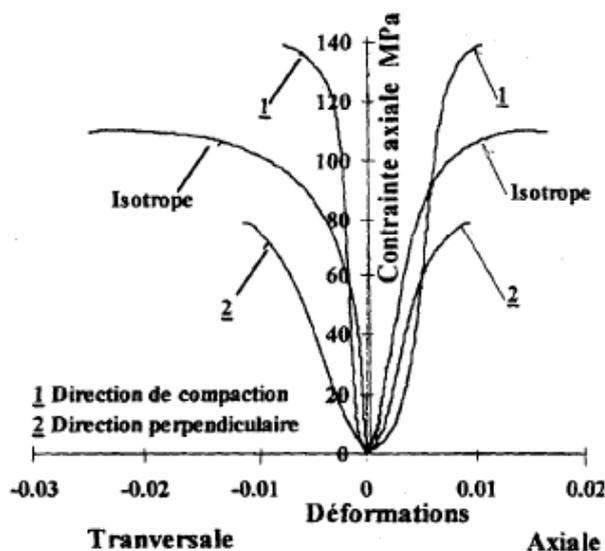


FIGURE 1.16 – Compression uniaxiale monotone sur des comprimés mis en matrices ou par pression isotrope : Source Mosbah (1995).

## 1.5 MODÈLES ÉLASTIQUES ET PLASTIQUES USUELS POUR LES POUDRES

La simulation numérique apparaît comme un outil précieux pour la prédiction systématique de la distribution de densité du comprimé, l'évaluation en cours de déformation des efforts exercés par les outils, les défauts éventuels, etc. D'un point de vue pratique, le numérique a tout d'abord besoin d'une base de données suffisamment riche et fiable correspondant aux poudres mises en forme. Il doit par ailleurs pouvoir disposer de lois constitutives adaptées pour décrire le comportement de la poudre et de procédures d'identification de ces lois en utilisant la base de données. La simulation et la caractérisation d'une poudre doivent être menées sans perdre de vue le procédé industriel que l'on étudie. Accompagnées de la cinématique de compression, ces données représentent l'ensemble des valeurs numériques à entrer dans un code éléments finis. Différents paramètres concourant à l'amélioration des prévisions numériques, certains sont accessibles et modifiables par l'utilisateur comme les paramètres attachés à la loi de comportement, les conditions initiales telles que la densité initiale et le maillage éléments finis du domaine. D'autres au contraire, sont plus ou moins figés tels que l'algorithme de résolution. Dans cette section, des modèles utilisés pour représenter les comportements élastiques et plastiques des poudres sont présentés et parmi lesquels ceux qui sont couramment utilisés dans les codes éléments finis.

### 1.5.1 Comportement élastique

Comme il à été signalé précédemment, la caractérisation mécanique des poudres a mis en évidence une non-linéarité doublée d'une anisotropie du comportement élastique. Dans l'usage courant, par manque de résultats sur l'ensemble des poudres utilisées en métallurgie des poudres l'élasticité isotrope linéaire ou non est souvent utilisée. Dans le cadre du modèle élastique non-linéaire issu de la mécanique des géomatériaux associé au modèle de comportement plastique de Cam Clay (prochaine sous section), l'incrément de dilatation volumique unitaire élastique  $dE_v^e$  est lié à l'incrément de pression appliqué  $dp$  par (Bouvard, 2002)

$$dE_v^e = -K \frac{dp}{p + p_e} \quad (1.2)$$

où les constantes matérielles  $K$  et  $p_e$  représentent respectivement la compressibilité et la cohésion du matériau considéré. Cette élasticité volumique non linéaire est souvent couplée au module de cisaillement  $G$  constant, ou au coefficient de Poisson  $\nu$  constant. Le fait que  $G$  soit constant impose une linéarité de la partie déviatorique du comportement alors que le choix de  $\nu$  constant se traduit par une partie déviatorique dépendant de la pression moyenne  $p$ . Ce modèle élastique montre ses limites lors de la modélisation de la phase d'éjection dans laquelle l'élasticité joue un rôle majeur. Il est à signaler que ce modèle élastique est implanté dans ABAQUS (2005).

Une analyse récente a été faite par Frachon (2002) pour identifier un modèle élastique adapté aux poudres métalliques. Le choix de son modèle a été guidé par un compromis entre une bonne reproduction des données expérimentales, un faible nombre de paramètres et une expression la plus simple possible. En égard à la forme axisymétrique des comprimés dans le procédé de compression en matrice, l'auteur a proposé une expression pour le potentiel élastique  $W$  incluant une non linéarité et une anisotropie induite de type orthotrope de révolution. Le potentiel proposé a pour forme

$$W = c E_{eq} + d \frac{E_{eq}^2}{2} + (a - c) \tan^{-1}(E_{eq}) + \frac{b - d}{2} \ln(1 + E_{eq}^2) \quad (1.3)$$

La déformation équivalente  $E_{eq}$  est définie par

$$E_{eq}^2 = b_0 \text{Tr}(\mathbf{E})^2 + 2b_1 \text{Tr}(\mathbf{E}) \text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{E}) + c_1 \text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{E})^2 + a_2 \text{Tr}(\mathbf{E}^2) + 2a_3 \text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{E}^2) \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{M}$  est un tenseur de structure d'ordre deux prenant en compte l'orientation de la structure interne du comprimé à vert et les paramètres  $(b_0, b_1, c_1, a_2, a_3)$  caractérisent l'orthotropie de révolution pouvant être exprimés en fonction des modules de Young, du module de cisaillement et des coefficients de Poisson. L'avantage de ce modèle non linéaire orthotrope de révolution est sa flexibilité. En effet, il généralise le comportement élastique dans la limite de l'orthotropie de révolution. La généralisation comprend comme cas particulier l'élasticité linéaire isotrope ( $a = c = 0; b = d = 1; b_1 = c_1 = a_3 = 0; b_0 = \lambda; a_2 = 2\mu$ , loi de Hooke), l'élasticité non linéaire isotrope ( $b_1 = c_1 = a_3 = 0; b_0 = \lambda; a_2 = 2\mu$ ) et l'élasticité linéaire orthotrope de révolution ( $a = c = 0; b = d = 1$ ) (Frachon, 2002). Cependant, le modèle souffre d'une carence au niveau du calage de ces paramètres.

### 1.5.2 Comportement plastique

La poudre consiste généralement au départ, pour un processus de compression, en un arrangement aléatoire de particules avec des tailles, des formes et des orientations différentes. Au cours de la densification on identifie trois stades de compaction : Le stade 0 est celui qui correspond au réarrangement initial des particules. Pour des particules sphériques de même taille, ce réarrangement initial conduit à une densité relative initiale d'environ 0.64. La densification au stade I de la compaction se produit par indentations mutuelles des grains solides en des surfaces de contact isolées dont la taille croît tout en laissant les pores interconnectés. La densité relative au stade II de la compaction est supérieure à environ 0.9 et les surfaces de contact entre grains solides ont évolué jusqu'à avoir des pores isolés. À ce stade de la compaction, le comprimé est modélisé comme un solide poreux et la densification est contrôlée par la forme, la taille et la distribution des pores.

Au cours des dernières années, deux approches basées sur des modèles de *matériaux poreux* et de *matériaux granulaires* ont été développées pour décrire le comportement de la poudre aux stades I et II de la densification. Les modèles de matériaux poreux, généralement une adaptation du modèle de von Mises, ont été utilisés pour la simulation des procédés de mise en forme des métaux et des matériaux se présentant sous forme de poudre. La particularité de ces modèles, contrairement aux matériaux denses, est leur prise en compte de l'influence de la composante hydrostatique du tenseur de contrainte. Les modèles de matériaux granulaires, réservés usuellement aux matériaux frottants tels que les sols et les roches, sont adoptés moyennant certains arrangements pour décrire le comportement des matériaux en poudre. La contrainte d'écoulement, le frottement et les caractéristiques de densification de la poudre couplées à l'écrouissage en cours de compression peuvent être éventuellement décrits par ces modèles.

#### Modèles de matériaux poreux

- *Approches phénoménologiques*

Plusieurs chercheurs (Green, 1972; Shima et Oyanne, 1976; Doraivelu *et al.*, 1984; Lee et Khim, 1992) ont proposé divers fonctions de charge pour les matériaux poreux et qui peuvent être représentées par la forme générale :

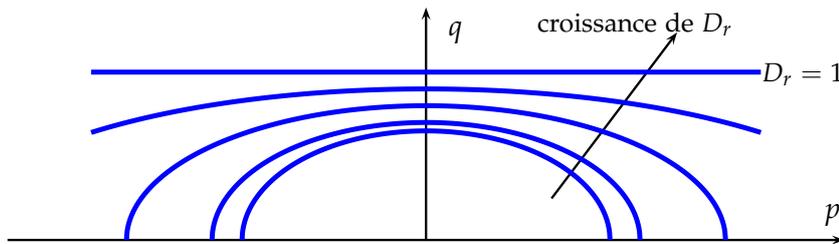
$$f_1(D_r)p^2 + f_2(D_r)q^2 = \sigma_o^2 \quad (1.5)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions de la densité relative  $D_r$  dont les expressions sont rassemblées au tableau 1.1;  $\sigma_o$  est la contrainte d'écoulement en compression simple du matériau dense.

La section d'une surface de charge correspondant à (1.5) par le plan de contrainte  $(p, q)$  est de forme ellipsoïdale dont le grand axe coïncide avec l'axe des pressions  $p$  et symétrique par rapport à l'axe du déviateur des contraintes  $q$  (cf. figures 1.17 et 1.18). La fonction de charge (1.5) est celle de von Mises pour un matériaux dense lorsque  $D_r = 1$ .

Cependant, en considération des observations expérimentales (Doraivelu *et al.*, 1984), la forme (1.5) de la surface de charge ne permet pas une bonne prédiction de la dépendance

	$f_1$	$f_2$
Green (1972) :	$\frac{1}{4 (\ln(1 - D_r))^2}$	$\frac{(3 - 2(1 - D_r)^{1/4})^2}{3(1 - (1 - D_r)^{1/3})^2}$
Shima et Oyanne (1976) :	$\frac{(1 - D_r)}{1.44D_r^5}$	$\frac{3}{D_r^5}$
Doraivelu (1984) :	$\frac{(1 - D_r^2)}{3(2D_r^2 - 1)}$	$\frac{(2 + D_r^2)}{(2D_r^2 - 1)}$
Lee et kim (1992) :	$\frac{3(1 - D_r^2)(1 - D_{rc})^2}{(D_r - D_{rc})^2}$	$\frac{(2 + D_r^2)(1 - D_{rc})^2}{3(D_r - D_{rc})^2}$

TABLE 1.1 – Expressions de  $f_1$  et  $f_2$  en fonction de la densité relative  $D_r$ .FIGURE 1.17 – Sections de surfaces de charge typiques pour les matériaux poreux par le plan de contrainte  $(p, q)$ .

de la contrainte d'écoulement en compression en fonction de la densité relative. En effet, la plupart des cas d'études (Green, 1972; Shima et Oyanne, 1976; Doraivelu *et al.*, 1984) reportent que la compaction commence à partir d'une densité relative d'environ 0.7, tandis que dans le processus de compaction de poudre la densité relative initiale à l'état lâche est d'environ 0.25 – 0.4. Par ailleurs, le facteur d'écrouissage associé au processus de densification, une des principales caractéristiques du processus de compactage, est négligé par (1.5). Plus représentatifs de matériaux poreux que des matériaux granulaires, ces modèles sont réservés à la simulation des opérations post-frittage dans le cadre de la métallurgie des poudres.

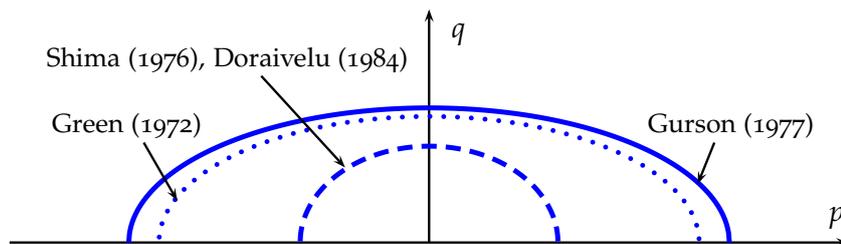


FIGURE 1.18 – Représentation de trois surfaces de charge particulières pour une même densité relative.

- *Approches micromécaniques*

L'approche micromécanique considère le matériau poreux comme un assemblage de cellules poreuses possédant une cavité sphérique, elliptique ou cubique. Le modèle de Gurson est le plus célèbre des modèles relevant de cette approche. En se basant sur la théorie de l'analyse limite d'une cellule sphérique creuse représentant un matériau poreux, Gurson (1977) propose une approximation de la surface de charge macroscopique donnée par

$$\Phi_G = \left(\frac{q}{\sigma_o}\right)^2 + 2(1 - D_r) \cosh\left(\frac{3p}{2\sigma_o}\right) - (1 - D_r)^2 - 1 = 0 \quad (1.6)$$

La section de cette surface de charge par le plan de contrainte  $(p, q)$  est représentée sur la figure 1.18 dans le but de comparaison avec les modèles phénoménologiques des matériaux poreux cités ci-dessus.

### Modèles de matériaux granulaires

- *Approches phénoménologiques*

Contrairement aux modèles de matériaux poreux, les modèles de matériaux granulaires présentent une combinaison de deux surfaces de plasticité. La première surface est construite à partir de la notion d'état critique. L'état critique est un état de contrainte pour lequel le matériau se déforme à volume constant (rupture par cisaillement). On cite par exemple dans cette catégorie le critère de plasticité de Mohr-Coulomb et de Drucker-Prager (Drucker et Prager, 1952). La deuxième surface a une forme elliptique écouissable, dite "Cap", pour décrire le comportement non-linéaire des poudres (la densification). Le mode d'écrouissage de ces lois est isotrope dont la variable d'écrouissage est la densité où la déformation volumique plastique. Ces modèles requièrent cependant la détermination expérimentale d'un plus grand nombre de paramètres. Un certain nombre de critères de plasticité ont été développés et testés pour décrire le comportement des matériaux granulaires avec la considération de la rupture et de la densification (Roscoe *et al.*, 1963; Schofield et Wroth, 1968; DiMaggio et Sandler, 1971; Sandler *et al.*, 1976; Desai, 1980; Desai et Hashmi, 1989; Sun et Kim, 1997). Le plus pratique des fonctions de charge qui ont été employés pour les matériaux en poudre sont les modèles d'état critique, Cam-Clay, Cam-Clay modifié et le cap modèle.

Le modèle de Cam-Clay a été initialement proposé par Schofield et Wroth (1968). Il a été modifié par la suite afin d'enlever l'indétermination de la direction d'écoulement plastique au niveau de l'axe de contraintes isotropes  $p$  (Cam-Clay modifié). Ce dernier est un modèle de plasticité associé et présente une famille de surfaces de plasticité et potentiels de forme elliptique, ainsi présenté sur la figure 1.19, qui a pour expression :

$$q^2 + M^2 (p - p_1) (p - p_o) = 0 \quad (1.7)$$

L'évolution des paramètres  $M$ ,  $p_1$  et  $p_o$  en fonction de la variable d'écrouissage détermine complètement ces surfaces dont les sommets sont situés sur la courbe d'état critique. Cette

courbe correspondant à l'état le plus déviatoire de la surface de charge sont décrits par une droite de pente  $M$  dans le plan  $(p, q)$ . La surface de charge du modèle de Cam-Clay décrit la densification lorsque l'état de contraintes est en-dessous de la droite de l'état critique. Lorsque l'état de contraintes est au-dessus de cette droite, le modèle décrit la dilatance.

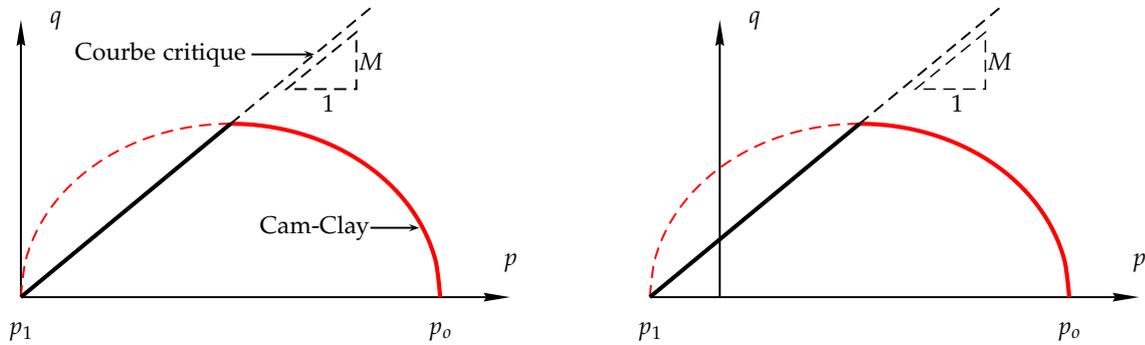


FIGURE 1.19 – Surface de charge dans le plan  $(p, q)$  du critère de Cam-Clay modifié pour (à gauche) poudres peu cohésives (poudres dures), (à droite) poudres cohésives (poudres tendres).

Le Cap-Model diffère du modèle de Cam-Clay par sa partie dilatante. Comme indiqué sur la figure 1.20 il se décompose en deux surfaces : la surface de rupture non-associée et la surface de cap associée. Les "Cap" décrivent la densification du matériau et sont comparables au quart d'ellipse du modèle de Cam-Clay. Leur évolution dépend de la déformation volumique plastique  $E_v^p$  et leur forme est déterminée par la connaissance de l'excentricité  $R (E_v^p)$  ( $R = b/a$ ) et de  $p_b (E_v^p)$ . La position de la droite de rupture qui peut être ou non fonction de la deforma-

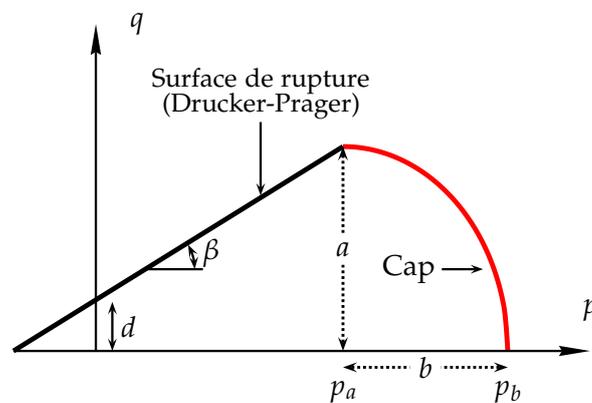


FIGURE 1.20 – Surfaces de charge dans le plan  $(p, q)$  pour le Cap-Modèle.

tion volumique plastique se détermine par la connaissance de la cohésion  $d (E_v^p)$  et de la pente  $\beta (E_v^p)$ . Cette droite de rupture est fréquemment représentée par le critère de Drucker-Prager d'où le modèle de Drucker-Prager/Cap qui est largement été utilisé pour les simulations numériques (Pavier, 1998).

Les modèles de comportement de Cam-Clay et de Drucker-Prager/Cap sont fréquemment utilisés en métallurgie des poudres car ils sont assez convenables pour appréhender le comportement de milieux pulvérulents. Ainsi ils sont utilisés pour des calculs numériques de procédés de mise en forme des poudres (Brewin et al., 2008). Par exemple, le code de calcul numérique ABAQUS (2005) décrit en détail ces lois de comportement.

Le comportement des poudres métalliques en cours de densification est classiquement modélisé par des lois de comportement isotropes. Celles-ci représentent une bonne approximation du comportement réel. Le raffinement de la modélisation en vue de réaliser des simulations plus réalistes nécessite la prise en compte d'autres phénomènes tels que l'anisotropie induite. Une des théories pour modéliser le comportement plastique anisotrope consiste à effectuer une transformation de l'espace des contraintes pour transformer les modèles isotropes en modèles anisotropes. Cette théorie permet d'écrire l'équation d'une surface de charge anisotrope de façon formellement semblable à l'équation d'une surface de charge isotrope. Une telle théorie de représentation des surfaces de charges a été développées par [Boehler \(1997\)](#). Ainsi les auteurs [ODA et Ohnishi \(1992\)](#) ont utilisé cette théorie pour transformer le modèle de Cam-Clay modifié non cohésif isotrope en un modèle anisotrope.

- *Approches micromécaniques*

Toute description micromécanique du comportement d'un matériau granulaire consiste à se placer au niveau des grains solides afin d'observer aussi bien leurs comportements individuels que leurs interactions avec les grains solides voisins. Durant la compression ceci requiert la détermination des évolutions des forces de contact et des surfaces de contact entre grains. En effet, les poudres dites tendres comme le cuivre ou le fer enregistrent à l'échelle microscopique de grandes variations géométriques de la forme des grains. Le nombre de coordination<sup>2</sup> et les surfaces de contact ne cessent d'augmenter tandis que la fraction volumique des pores diminue. Lorsque la contrainte appliquée est faible il y a réarrangement des grains qui sont essentiellement sollicités à travers les surfaces de contact dont les évolutions sont régis par un mécanisme relevant de l'élasticité avec frottement. Les grains solides se déforment plastiquement pour un niveau de contrainte élevé. Il vient alors de tenir en compte dans la modélisation à la fois des grandes variations de forme des grains et de leur comportement plastique.

Cette analyse a été menée en 2D, au stade I de la compaction, par [Akisanya et al. \(1994\)](#); [Akisanya et Cocks \(1995\)](#) pour le cas d'un assemblage compact de barres cylindriques de même diamètre. Ces auteurs considèrent que l'indentation particule-plan est un des aspects fondamentaux du comportement micromécanique. En effet, il s'agit de déterminer les relations entre les évolutions de contraintes et déformations lorsqu'une particule initialement cylindrique, généralement supposée rigide parfaitement plastique, est plastiquement déformé par un accroissement de surfaces de contact planes. Ici, le comportement plastique est étudié par trois méthodes, une théorie plastique dite des lignes de glissement ([Hill, 1960](#)), méthode de la borne supérieure de l'analyse limite ([Salençon, 1983; 1993](#)) et la méthode des éléments finis (maillage des particules). Cette étude a permis d'examiner la valeur de la pression moyenne aux contacts établis sur chaque particule et la forme des porosités au cours de la densification. Les résultats de ces méthodes ont permis également de tracer les surfaces de charge macroscopiques, fonction de la densité relative, pour des comprimés chargés hydrostatiquement et d'autres obtenus par compaction en matrice. Ces surfaces sont constituées de segments de

---

2. Nombre de contact par particule avec les grains voisins

droites ce qui est inhérent au caractère très ordonné de l'empilement initial présupposé de particules cylindriques (empilement bidimensionnel dense selon un réseau hexagonal avec un nombre de coordination égal à 6). Plus récemment, *Sridhar et al. (2001)* ont utilisé les mêmes méthodes pour étudier la compaction biaxiale d'un réseau cubique de barres cylindriques avec un nombre de coordination égal à 4. Ces auteurs ont examiné l'évolution de la taille des surfaces de contact, la pression de contact et les surfaces de charge macroscopiques aux stades I et II de la compaction hydrostatique et en matrice (cf. figures 1.21 et 1.22). Le comportement mécanique modélisé est conditionné par les directions de contact privilégiées à l'assemblage macroscopique, ceci est bien illustré sur la figure 1.22 par la différence du comportement macroscopique entre des comprimés obtenus par compaction hydrostatique et par compaction en matrice.

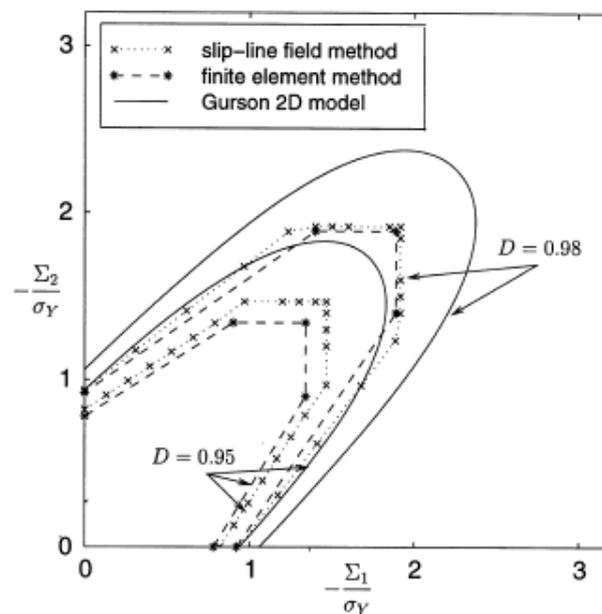


FIGURE 1.21 – Surfaces de charge macroscopiques de comprimés de particules cylindriques pré-densifiés par compression isostatique et en matrice à des densités relatives de 0.95 et 0.98. Les résultats de la méthode des éléments finis sont comparés à ceux de la méthode de lignes de glissement et à la solution analytique de Gurson en 2D (relation (1.6)) : Source *Sridhar et al. (2001)*.

Par ailleurs, dans le cadre des procédés de compaction isostatique à chaud (CIC) et en considérant que les contacts entre particules sphériques contrôlent la déformation plastique, Ashby et ces collaborateurs (*Arzt, 1982; Arzt et al., 1983; Helle et al., 1985*) ont développé une condition sur le critère macroscopique mais uniquement dans une situation de chargement purement hydrostatique et ceci pour un matériau constitutif des grains de type Tresca. Cette condition sur le critère est

$$P_y = 2.97 D_r^2 \frac{(D_r - D_{r_0})}{(1 - D_{r_0})} \bar{\sigma}_o \quad (1.8)$$

avec  $P_y$  est la pression macroscopique,  $\bar{\sigma}$  est la contrainte d'écoulement du matériau des particules de poudre et  $D_{r_0}$  est la densité relative initiale à l'état lâche. Ce critère sur la pression hydrostatique montre bien que lorsque la densité est égale à  $D_r = D_{r_0}$  (les particules en état

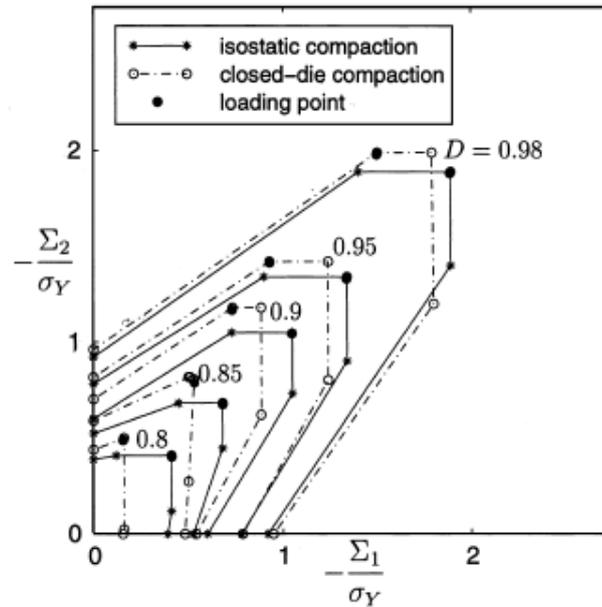


FIGURE 1.22 – Construction des surfaces de charge macroscopiques par la méthode de la borne supérieure de comprimés de particules cylindriques pré-densifiés isostatiquement et en matrice : Source *Sridhar et al. (2001)*.

relâché se touchent uniquement en des points), la pression macroscopique est nulle. Au fur et à mesure que la densité croît jusqu'à environ la valeur unité, la pression hydrostatique croit aussi. Cependant, la condition n'est pas destinée à s'appliquer au-dessus de  $D_r = 0.9$ . Ce critère a été utilisé avec succès par *Helle et al. (1985)* dans de vastes comparaisons avec des expérimentations sur le procédé CIC. Par conséquent, tout critère plus général tenant compte des contraintes déviatoriques outre que la pression doit se mettre en accord avec la relation (1.8) à la limite du chargement hydrostatique.

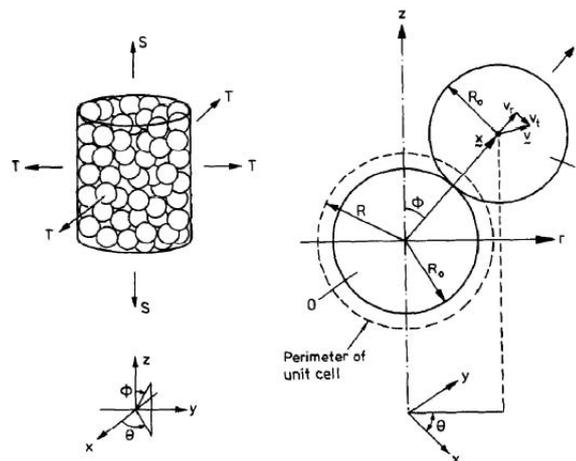


FIGURE 1.23 – Volume macroscopique représentatif d'un agrégat de poudre sous chargement axisymétrique et représentation typique d'un contact entre deux particules sphériques : Source *Fleck et al. (1992)*.

Du point de vue micromécanique, un modèle isotrope spécifique à la compression axisymétrique à froid d'un assemblage aléatoire de sphères de taille unique comme le montre la figure 1.23, de densité relative initiale  $D_{r_0} = 0.64$ , a été proposé par Fleck (*Fleck et al., 1992*;

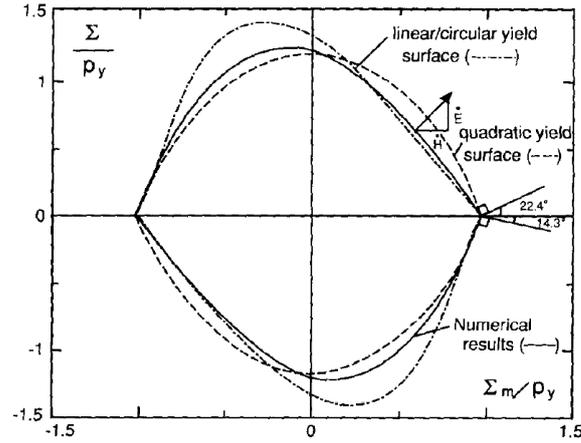


FIGURE 1.24 – Surface de charge pour un chargement axisymétrique du volume macroscopique à partir des calculs numériques (modèle de surfaces de contact), et ces approximations mathématiques : une forme quadratique (1.9) et une forme linéaire/circulaire : Source Fleck *et al.* (1992).

Fleck, 1995). Le modèle suppose que les contacts entre particules, de forme circulaire et répartie de façon isotrope autour d'un grain, se déforme plastiquement de la manière établie par Green (1954) pour la déformation plane développée entre une jonction de deux demi-plans soumis aux effets conjugués d'un cisaillement et d'une pression. Ce modèle propose une transition micro-macro. En effet, le tenseur macroscopique des contraintes se déduit de la puissance plastique dissipée en fonction du tenseur macroscopique des taux de déformation. La puissance plastique macroscopique a été définie par une intégrale qui tient compte de l'ensemble moyenné des contributions microscopiques de dissipation aux niveaux des contacts entre grains. Les formules déduites de cette modélisation sont introduites dans une procédure numérique qui calcule point par point de la surface de charge associée au comportement d'un volume de matière contenant plusieurs grains. Comme l'indique la figure 1.24, le résultat obtenu sur la forme la surface de charge, nommé critère de surfaces de contact, devient alors une référence pour la recherche d'une forme mathématique adaptée, fonction de l'état de contraintes macroscopiques. Fleck *et al.* (1992) proposent alors une forme quadratique de la surface de charge macroscopique, référée au modèle FKM, donnée par

$$\Phi_{FKM} = \left( \frac{5}{18} \frac{q}{P_y} + \frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{p}{P_y} \right)^2 - 1 = 0 \quad (1.9)$$

Le modèle FKM suppose aussi que les surfaces de contacts entre particules n'interagissent pas entre elles. Cette considération rend le modèle plus fiable pour des densités relative  $D_r$  allant jusqu'à environ 90%. Pour des densités relatives proche de l'unité, les aires de contact sont plus grandes et interagissent entre elles en se connectant éventuellement. Ceci a pour effet de mettre en cause le modèle adopté par ses auteurs. Afin de tenir compte de cet aspect du problème considéré, Fleck *et al.* (1992) suggèrent une transition entre leur modèle et le modèle de Gurson (1.6), pouvant convenir aux fortes densités (cf. figure 1.25). Les auteurs proposent un critère de transition de la forme

$$\Phi = \left( \frac{D_{r2} - D_r}{D_{r2} - D_{r1}} \right) \Phi_{FKM} + \left( \frac{D_{r2} - D_r}{D_r - D_{r1}} \right) \Phi_G = 0 \quad (1.10)$$

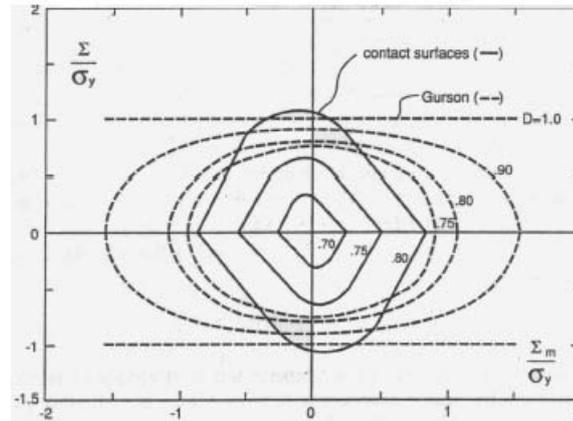


FIGURE 1.25 – Critère de surfaces de contact (calcul numérique) comparé au critère de Gurson (1.6) pour une variété de densités relatives : Source Fleck et al. (1992).

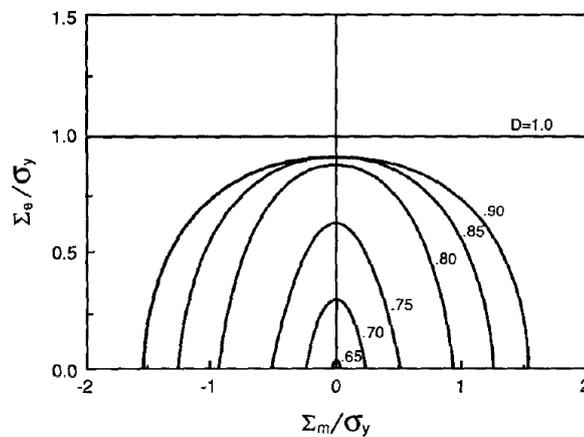


FIGURE 1.26 – Famille de surfaces de charge proposée pour un agrégat de poudre : Pour  $D_r < 0.75$ , l'approximation quadratique du critère de surfaces de contact est utilisée. Pour  $0.75 < D_r < 0.9$ , le critère de transition (1.10), entre le modèle FKM et le modèle de Gurson, est utilisé. Pour  $D_r > 0.9$ , le modèle de Gurson est utilisé : Source Fleck et al. (1992).

avec  $D_{r_1} \leq D_r \leq D_{r_2}$  est la gamme de transition sur la densité relative d'un critère à l'autre et dont le choix est donné par  $D_{r_1} = 0.75$  et  $D_{r_2} = 0.9$ . Ainsi, les auteurs proposent une famille de surfaces de charge sur une gamme de densités relatives allant de  $D_r = D_{r_0} = 0.64$  à  $D_r = 1$  comme illustrée sur la figure 1.26.

Sur le même principe de modélisation que Fleck et al. (1992), Fleck (1995) a étudié le rôle du frottement entre les particules, la cohésion et l'anisotropie au cours de la compaction de particules sphériques dans des conditions axisymétriques. Il montre que le critère de surfaces de contact est influencé d'une part par la force de cohésion par l'intermédiaire d'un paramètre de cohésion entre les grains variant de 0 (aucune cohésion en traction) à 1 (contrainte limite en traction égale à la contrainte limite en compression) comme le montre la figure 1.27, et d'autre part par la non uniformité de la distribution de surfaces de contact développée autour de chaque grain. Dans le cas de compression en matrice, cette non uniformité est due à la direction privilégiée de compression qui favorise des contacts plus large dans cette direction que dans la direction transverse conduisant ainsi à un comportement anisotrope (cf. figure 1.28). Cette anisotropie dans la distribution des surfaces de contact est décrite par un tenseur de

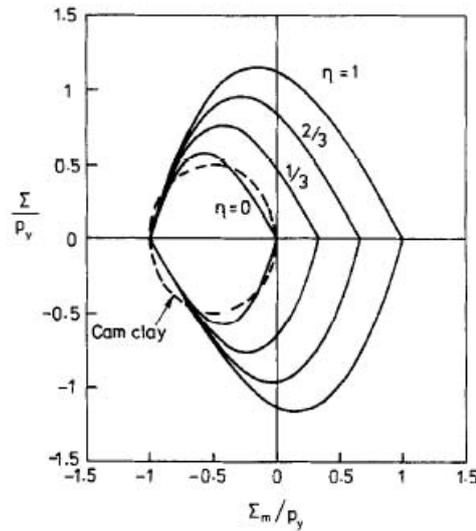


FIGURE 1.27 – Effet de la cohésion, à travers le paramètre  $0 < \eta < 1$ , entre particules sur la surface de charge macroscopique (modèle numérique) et comparaison avec le modèle de Cam-Clay pour une poudre non cohésive : Source Fleck (1995).

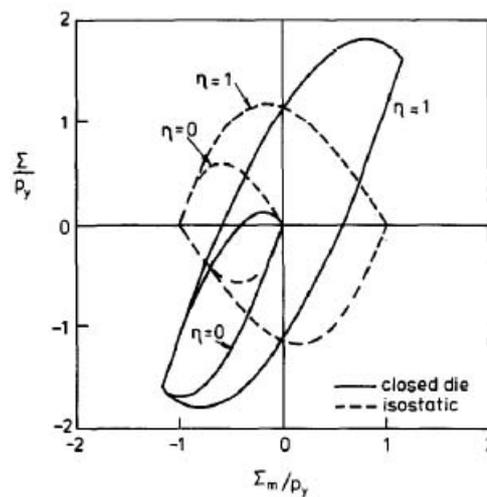


FIGURE 1.28 – Effet de l'anisotropie induite par le chemin de déformation sur la surface de charge macroscopique (modèle numérique). Les surfaces de charge sont données pour la compaction isostatique et la compaction en matrice pour une densité relative  $D_r = 0.8$  en tenant compte de la cohésion parfaite ( $\eta = 1$ ) et la non cohésion ( $\eta = 0$ ) entre les grains : Source Fleck (1995).

second ordre relié à la déformation macroscopique qui est introduit dans la détermination de la dissipation plastique macroscopique de la même manière que dans Fleck *et al.* (1992). Par contre, l'auteur montre que le frottement entre particules joue un rôle mineur sur le comportement comme le montre la figure 1.29.

Il est à indiquer que les études du stade I de la compaction de poudre, réalisées par Helle *et al.* (1985) et Fleck *et al.* (1992), sont basées sur l'hypothèse d'une pression de contact constante et une croissance du nombre de contact durant le début du processus de densification. Helle *et al.* (1985) ont utilisé la solution de Prandtl pour le poinçonnement d'un massif et Fleck *et al.* (1992) ont utilisé celle donnée par Green (1954) pour la déformation plastique plane entre deux demi-plans. Les résultats expérimentaux sur la compression d'une sphère métallique montrent

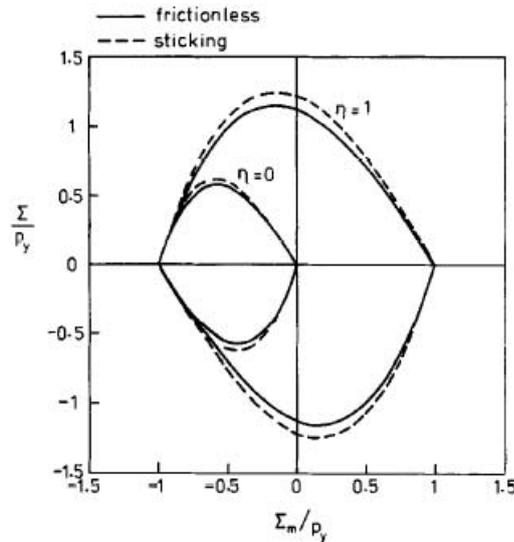


FIGURE 1.29 – Surface de charge macroscopique : effet du frottement entre particules dans le cas d'une distribution isotrope des contacts.  $\eta = 1$  correspond à une cohésion parfaite entre les grains et  $\eta = 0$  correspond à aucune cohésion : Source [Fleck \(1995\)](#).

que la pression moyenne au niveau des contacts entre deux particules chute avec la croissance de la taille du contact ([Laptev et Ul'yanov, 1984](#); [Timothy et al., 1987](#)). Ceci s'explique par le fait qu'au stade I de la compaction la zone plastique à chaque contact entre en interaction avec les zones plastiques des contacts voisins ([Akisanya et al., 1994](#); [Ogbonna et Fleck, 1995](#); [Sridhar et al., 2001](#)). Cependant au stade II de la compaction, les résultats expérimentaux montrent que la pression de contact tend à augmenter. Ceci est dû au fait que la zone plastique sous les contacts entre en interaction avec la surface libre des particules et la matière est forcée à s'extruder dans le vide ([Ogbonna et Fleck, 1995](#); [Sridhar et al., 2001](#)).

L'objectif des deux chapitres suivants est l'analyse, dans le même esprit des travaux de [Akisanya et al. \(1994\)](#); [Akisanya et Cocks \(1995\)](#); [Sridhar et al. \(2001\)](#), du comportement macroscopique d'un assemblage 3D de particules sphériques de taille unique, subissant un chargement axisymétriques, par la méthode des éléments finis et par l'approche cinématique du calcul à la rupture.



# APPROCHE PAR ÉLÉMENTS FINIS DES SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES DE COMPRIMÉS DE POUDRE

# 2

## SOMMAIRE

2.1	INTRODUCTION	39
2.2	MICROSTRUCTURE DU MILIEU GRANULAIRE	39
2.3	ANALYSE PAR ÉLÉMENTS FINIS	41
2.3.1	Surfaces de charge macroscopiques	43
2.3.2	Évolution de la taille des zones de contact	49

LA compaction 3D d'un arrangement de particules sphériques identiques est étudiée en utilisant la méthode des éléments finis. Les grains, supposés élastiques parfaitement plastiques, se déforment plastiquement en leurs zones de contact mutuelles où les dissipations plastiques sont localisées. La détermination de la surface de charge macroscopique est obtenue en imposant à un Volume Élémentaire Représentatif (VER) adéquat un état de contrainte axisymétrique. La construction de la surface de charge résultant d'une pression isostatique et d'une compression en matrice appliquées au VER est effectuée à différents stades de la densification repérés par la valeur de la densité relative. Il en ressort que la taille et la forme des surfaces de charge dépendent de l'histoire de chargement ainsi que la densité relative du comprimé.



## 2.1 INTRODUCTION

Un mécanisme dominant de la densification de poudre liés par des contacts isolés est l'indentation plastique mutuelle des particules de poudres. Les points de contact entre les particules s'étendent en des aires de contact au fur et à mesure que la déformation plastique progresse suite à l'application d'une pression macroscopique monotone croissante. La déformation de la particule par croissance de l'aire de la surface de contact perdure jusqu'à la fermeture de la porosité qui est initialement interconnectée. C'est le stade I de la compaction. L'opération de compaction passe ensuite au stade II où le comprimé se comporte comme un solide contenant des pores isolés.

Une prédiction précise de la compaction de poudre à ces deux stades nécessite la connaissance de la pression au niveau des contacts entre les particules et le nombre de contacts par particule. En adoptant un arrangement simple des particules de poudres, l'étude du comportement de ces dernières à la compaction est accessible par une analyse aux éléments finis d'un VER approprié du matériau granulaire. Cette analyse micromécanique est largement adoptée par plusieurs chercheurs et donne un aperçu du comportement macroscopique d'un système de poudre (Akisanya *et al.*, 1994; Akisanya et Cocks, 1995; Ogbonna et Fleck, 1995; Sridhar *et al.*, 2001). Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis est utilisée pour estimer les surfaces de charge macroscopiques d'un milieu granulaire à différentes densités relatives. Pour ce faire, le milieu granulaire est considéré comme un milieu hétérogène périodique caractérisé par une cellule de base représentative du milieu. Des simulations numériques de la réponse de la cellule de base sont menées sous des conditions de chargement axisymétrique dans le but de caractériser son comportement macroscopique sous l'action d'une compression isostatique et d'une compression en matrice et ce, aux différents stades de la densification.

## 2.2 MICROSTRUCTURE DU MILIEU GRANULAIRE

En regardant le processus de mise en forme des matériaux se présentant sous forme granulaires, le milieu en considération est hétérogène et doté d'une microstructure à deux phases que sont les grains solides et les vides présents entre ces grains. Dans le but de simplifier l'analyse par la méthode des éléments finis, le milieu granulaire est appréhendé comme une distribution isotrope de grains sphériques identiques en contact. Le matériau peut ainsi être considéré comme un assemblage périodique de cellules cylindriques à base hexagonale comme le montre la figure 2.1. Les conditions de chargement sont axisymétriques et chaque grain est initialement en contact avec huit autres grains voisins. Fleck (1995) a montré que le frottement entre particules joue un rôle mineur au stade I de la compaction. Dans ce qui suit, on suppose qu'il n'y a pas de frottement au niveau des contacts entre grains. Par ailleurs, cette hypothèse est raisonnable vu qu'en pratique et en compaction à froid, on utilise des poudres lubrifiées.

La cellule de base considérée, notée par  $\mathcal{A}$ , est constituée d'un grain solide sphérique circonscrit à l'intérieur d'un cylindre circulaire de rayon  $R_0$  égale à celui de la sphère non déformée et de hauteur  $2R_0$  (cf. figure 2.1). Le choix d'une cellule cylindrique à base circulaire au lieu d'une cellule cylindrique à base hexagonale permet de simplifier les analyses en se

ramenant au cas axisymétrique. Ogbonna et Fleck (1995) ont retenu la même cellule de base dans leur analyse par les éléments finis de l'évolution des contacts et des pressions ainsi que de la surface de charge macroscopique du milieu granulaire étudié selon le degré de la densification.

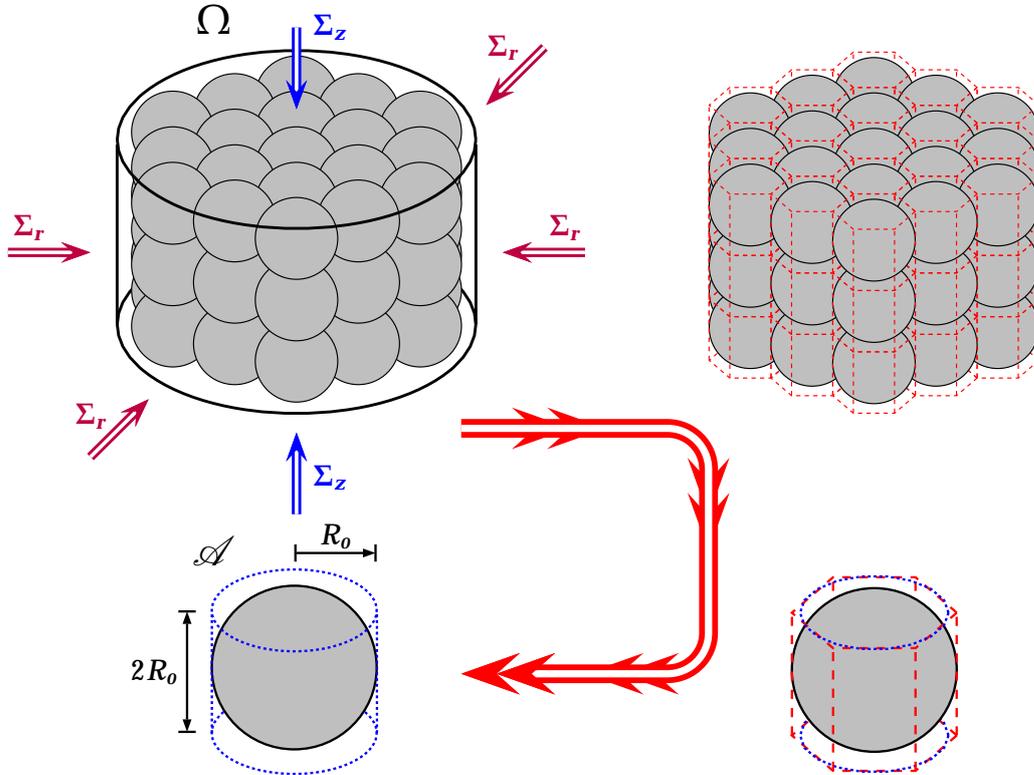


FIGURE 2.1 – Modèle micromécanique de matériaux granulaires : (en haut) échelle macroscopique : structure, (en bas) échelle mésoscopique : cellule de base.

La compaction axisymétrique du simple réseau hexagonal de particules sphériques conduit au développement de six contacts uniformément répartis autour de l'équateur de chaque sphère ainsi que de deux contacts à ses pôles supérieur et inférieur. Cette représentation 3D de l'arrangement des grains solides combinée à un chargement axisymétrique permet d'appréhender qualitativement la déformation de la cellule de base. En effet, durant un processus de compaction, d'une part il y a rapprochement des deux zones planes de contact attachées aux pôles du grain. D'autre part, et de manière concomitante il y a aussi développement des six zones de contact situées sur l'équateur de ce même grain. L'hypothèse d'axisymétrie retenue dans cette analyse impose de supposer que ces six zones de contact sont d'un seul tenant. L'état déformé de la particule est illustré sur la figure 2.2. La surface de contact axiale, normale à l'axe de révolution  $e_z$ , est circulaire de rayon  $a$  et la surface de contact radiale, annulaire, formée sur l'équateur de la particule est de largeur  $2b$  et de rayon  $R$ . La cellule de base, dans son état déformé, a pour rayon  $R$  et pour hauteur  $2H$ . La densité relative  $D_r$  est le rapport du volume du matériau solide de la cellule de base sur son volume total. La densité relative initiale est égale à  $D_{r_0} = 2/3$ . Cette valeur est très proche de 0.64, valeur généralement adoptée pour un arrangement aléatoire de particules sphériques en état lâche. Durant le processus de déformation de la cellule de base, l'expression de  $D_r$  est obtenue par l'exploitation de la loi de

conservation de la masse. En effet, il est facile d'avoir

$$D_r = \frac{2}{3} \left( \frac{R_o}{R} \right)^2 \left( \frac{R_o}{H} \right) \quad (2.1)$$

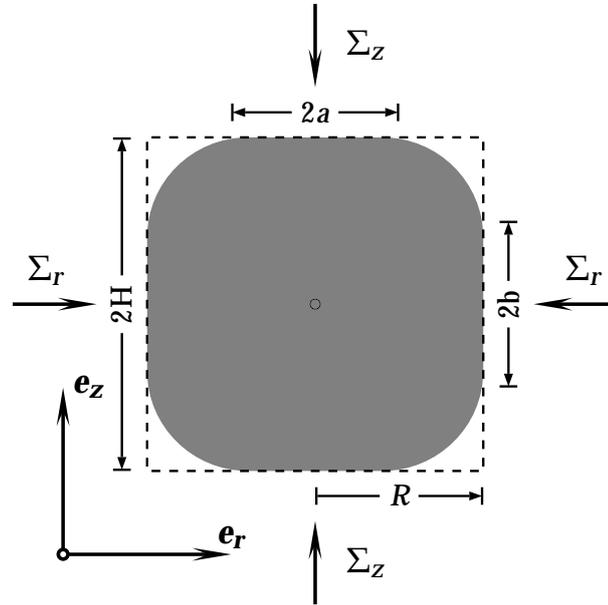


FIGURE 2.2 – État déformé de la cellule de base : caractéristiques dimensionnelles et état macroscopique de contraintes.

### 2.3 ANALYSE PAR ÉLÉMENTS FINIS

Le but du problème des simulations numériques est d'obtenir, pour les deux stades de la compaction d'un milieu granulaire et pour une densité relative donnée, les états de contraintes macroscopiques limites correspondant au début de l'écoulement plastique libre. Ces simulations numériques s'avèrent aussi être un outil précieux de renseignements concernant les états de déformation du milieu granulaire. Le code d'éléments finis [ABAQUS \(2005\)](#) est utilisé pour l'ensemble du processus entier de la compaction (Stade I et II). En raison de l'axisymétrie de la cellule de base, les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  sont appropriées et seul le quart de la cellule défini par  $0 \leq r \leq R_o$  et  $0 \leq z \leq R_o$  est considéré, comme le montre la figure 2.3. Le chargement du quart de la cellule se fait par l'intermédiaire de deux plateaux infiniment rigides animés chacun par un mouvement de translation uniforme. Le contact entre les plateaux et le grain solide est supposé sans frottement.

En cours de déformation, la géométrie du grain solide axisymétrique est caractérisée par les tailles des zones de contact axiale et radiale fixées par les paramètres  $a$  et  $b$  respectivement. Quant à son chargement actualisé, il est déterminé par les pressions de contact axiale  $p_z$  et radiale  $p_r$  définies par

$$p_z = \frac{F_z}{\pi a^2} \quad , \quad p_r = \frac{F_r}{4\pi R b} \quad (2.2)$$

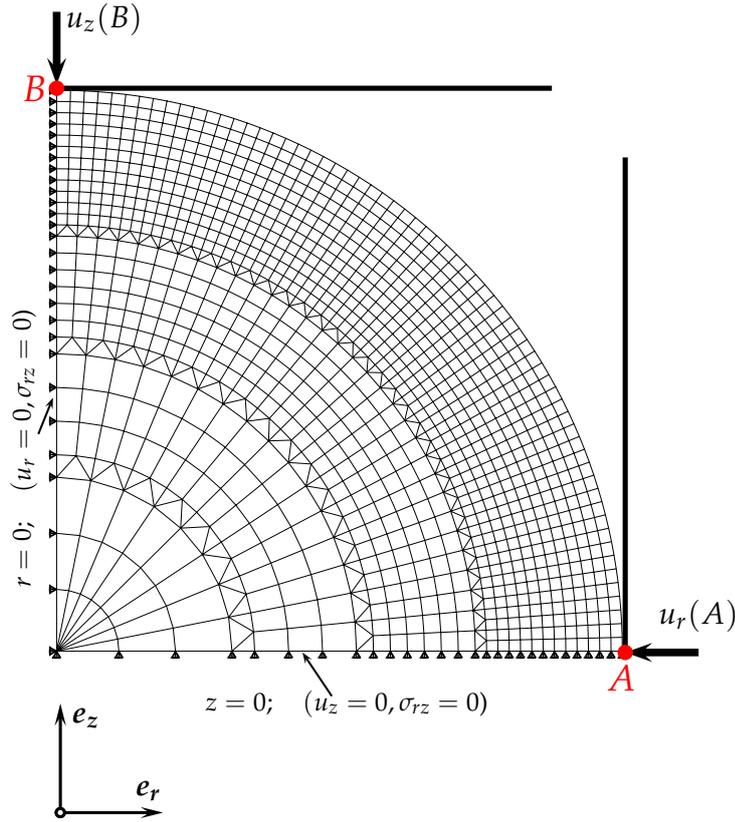


FIGURE 2.3 – Maillage élément fini, conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation.

où  $F_z$  est la force axiale agissant sur le contact circulaire de rayon  $a$  et  $F_r$  est la force radiale sollicitant le contact annulaire de rayon  $R$  et de largeur  $2b$ . La réponse macroscopique du grain est donnée par la moyenne des états de contrainte et de déformation dans la cellule de base. La déformation logarithmique axiale  $E_z$  et la déformation logarithmique radiale  $E_r$  sont définies comme suit :

$$E_z = \ln\left(\frac{H}{R_0}\right) \quad , \quad E_r = \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \quad (2.3)$$

La densité relative  $D_r$  est ainsi reliée directement à l'état de déformation de la cellule de base par

$$\ln\left(\frac{D_r}{D_{r_0}}\right) = -(2E_r + E_z) \quad (2.4)$$

En outre, la contrainte macroscopique axiale  $\Sigma_z$  et la contrainte macroscopique radiale  $\Sigma_r$  sont reliées aux pressions de contact  $p_z$  et  $p_r$  par

$$\Sigma_z = \frac{a^2}{R^2} p_z \quad , \quad \Sigma_r = \frac{b}{H} p_r \quad (2.5)$$

Il vient alors que la contrainte macroscopique moyenne  $\Sigma_m$  et la mesure de la contrainte macroscopique déviatorique  $\Sigma$ , sont données par

$$\Sigma_m = (2\Sigma_r + \Sigma_z)/3 \quad , \quad \Sigma = \Sigma_z - \Sigma_r \quad (2.6)$$

### 2.3.1 Surfaces de charge macroscopiques

Dans ce qui suit, le grain solide de la cellule de base est constituée d'un matériau élastique parfaitement plastique : module de Young  $E = 200$  GPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , limite d'écoulement  $\sigma_o = 200$  MPa. Le maillage en éléments finis est indiqué sur la figure 2.3. Il est composé de 1024 éléments quadratiques (CAX4R) ainsi que de 176 éléments triangulaires axisymétrique (CAX3) avec une concentration d'éléments au niveau des contacts. Tous les éléments sont de type hybride afin de tenir en compte de l'incompressibilité de la déformation plastique. Le chargement de la cellule est réalisé par l'intermédiaire de deux plateaux rigides, l'un horizontal et l'autre vertical, animés de déplacements uniformes  $u_z$  (point B) et  $u_r$  (point A) respectivement selon l'axe  $e_z$  et l'axe  $e_r$ . Le contact plateaux-grains solides est supposé lisse. Les conditions aux limites, tels que mentionnées sur la figure 2.3, consistent à un déplacement vertical nul et une contrainte de cisaillement nulle le long de la surface  $z = 0$ , un déplacement radial nul et une contrainte de cisaillement nulle le long de l'axe de symétrie  $r = 0$ ; la surface curviligne du grain solide est libre.

L'obtention d'une estimation de la surface de charge macroscopique du milieu granulaire considéré, à une densité relative  $D_r$  fixée, procède come suit :

Aussi bien les chargement proportionnels que les chargements quelconques sont considérés. Les chargements proportionnels comprennent en particulier la compaction isostatique ( $E_z = E_r$ ) et la compaction en matrice ( $E_r = 0, E_z \neq 0$ ). Les chargements correspondant à la compression simple axiale ( $\Sigma_r = 0, \Sigma_z \neq 0$ ) et la compression radiale ( $\Sigma_z = 0, \Sigma_r \neq 0$ ) sont considérés.

#### Cas de la compaction isostatique :

- a) Appliquer un chargement isostatique croissant à la cellule de base jusqu'à obtention de la densité relative escomptée. Durant ce pré-chargement la condition  $\alpha = u_z(B)/u_r(A) = 1$  doit être satisfaite durant tout le processus de chargement.
- b) Procéder ensuite à une décharge complète de la cellule de base. L'état de cette dernière est qualifié dans ce qui suit de "*pré-comprimé*".
- c) Charger le pré-comprimé selon différents trajets de charge en faisant varier le rapport  $\alpha = u_z(B)/u_r(A)$ . Les variations des déformations macroscopiques  $E_z$  et  $E_r$  sont données par

$$E_z = \ln \left( 1 + \frac{u_z(B)}{R_o} \right) \quad , \quad E_r = \ln \left( 1 + \frac{u_r(A)}{R_o} \right) \quad (2.7)$$

Les trajets proportionnels  $u_z = \alpha u_r$  utilisés sont obtenus à partir de  $\alpha = 0, 0.1, 0.5, 1, 2, 11, +\infty$  ( $\equiv u_r = 0$ ), voir figure 2.4.

- d) Noter l'évolution de la force de réaction au niveau des plateaux rigides et calculer les contraintes macroscopiques  $\Sigma_z$  et  $\Sigma_r$  par les relations (2.5).
- e) Pour le trajet de chargement choisi, le point correspondant cherché de la surface de charge est obtenu à partir des courbes  $\Sigma_z$  en fonction de  $E_z$  et  $\Sigma_r$  en fonction de  $E_r$  en utilisant "l'offset" standard de 0.2%.

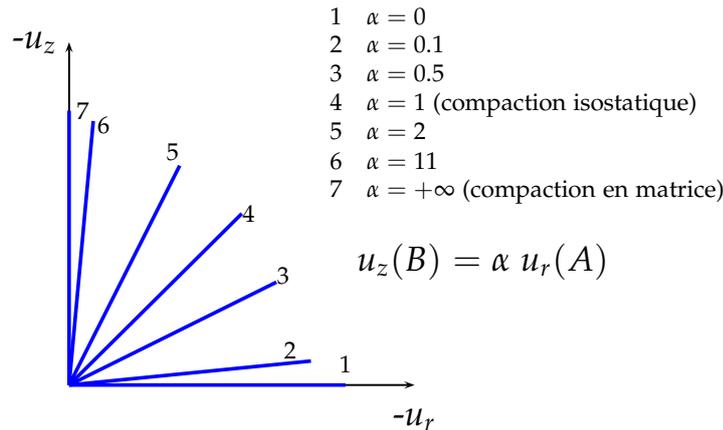


FIGURE 2.4 – Trajets de charge choisis.

- f) Répéter les étapes a) à e) en faisant varier le trajet de chargement de l'étape c) pour obtenir un ensemble de points de la surface de charge macroscopique pour cette particulière densité relative.

Cette technique d'estimation de la surface de charge macroscopique du milieu granulaire considéré est à répéter pour chaque valeur souhaitée de la densité relative.

#### Cas de la compaction en matrice :

Reprenre l'ensemble des étapes de la compaction isostatique sauf qu'à l'étape a) on applique un chargement axial croissant avec une déformation radiale nulle ( $E_r = 0$ ) pour avoir un chargement correspondant à une compression en matrice.

Une illustration géométrique typique des pré-comprimés à différentes densités relatives est représentée sur les figures 2.5 et 2.6, respectivement, pour une compression isostatique et une compression en matrice. Les deux figures illustrent également l'évolution des isovaleurs de la déformation plastique équivalente avec la croissance de la densité relative. Dans le cas de la compression isostatique, il est clairement remarquable que la déformation au début de la densification est concentrée au niveau des contacts axial et radial. Au fur est à mesure que la densification progresse, les zones plastifiées entrent en interaction et la matière tend à s'extruder le long de la surface libre de la particule. Dans le cas de la compression en matrice, la direction privilégiée de compression selon la direction axiale favorise une zone de déformation plastique et une aire de contact plus importante au niveau du contact axial.

La figure 2.7 représente dans le plan  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$  des contraintes macroscopiques axiale et radiale, normalisées par  $\sigma_0$ , les points estimés de la surface de charge macroscopique pour une densité relative  $D_r$  prise égale 0.80. La ligne en trait continu correspond à la compaction isostatique et la ligne en trait discontinu à la compaction en matrice. Les numéros associés aux trajets de charge de la figure 2.4 sont aussi reportés sur la figure 2.7. Une seconde représentation des surfaces de charge macroscopiques peut être effectuée dans le plan  $(\Sigma_m, \Sigma)$  des contraintes macroscopiques moyenne et déviatorique comme le montre la figure 2.8. On y note que les lignes  $\Sigma_z = 0$  et  $\Sigma_r = 0$  font partie de la surface de charge puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de cohésion de contact entre les grains solides.

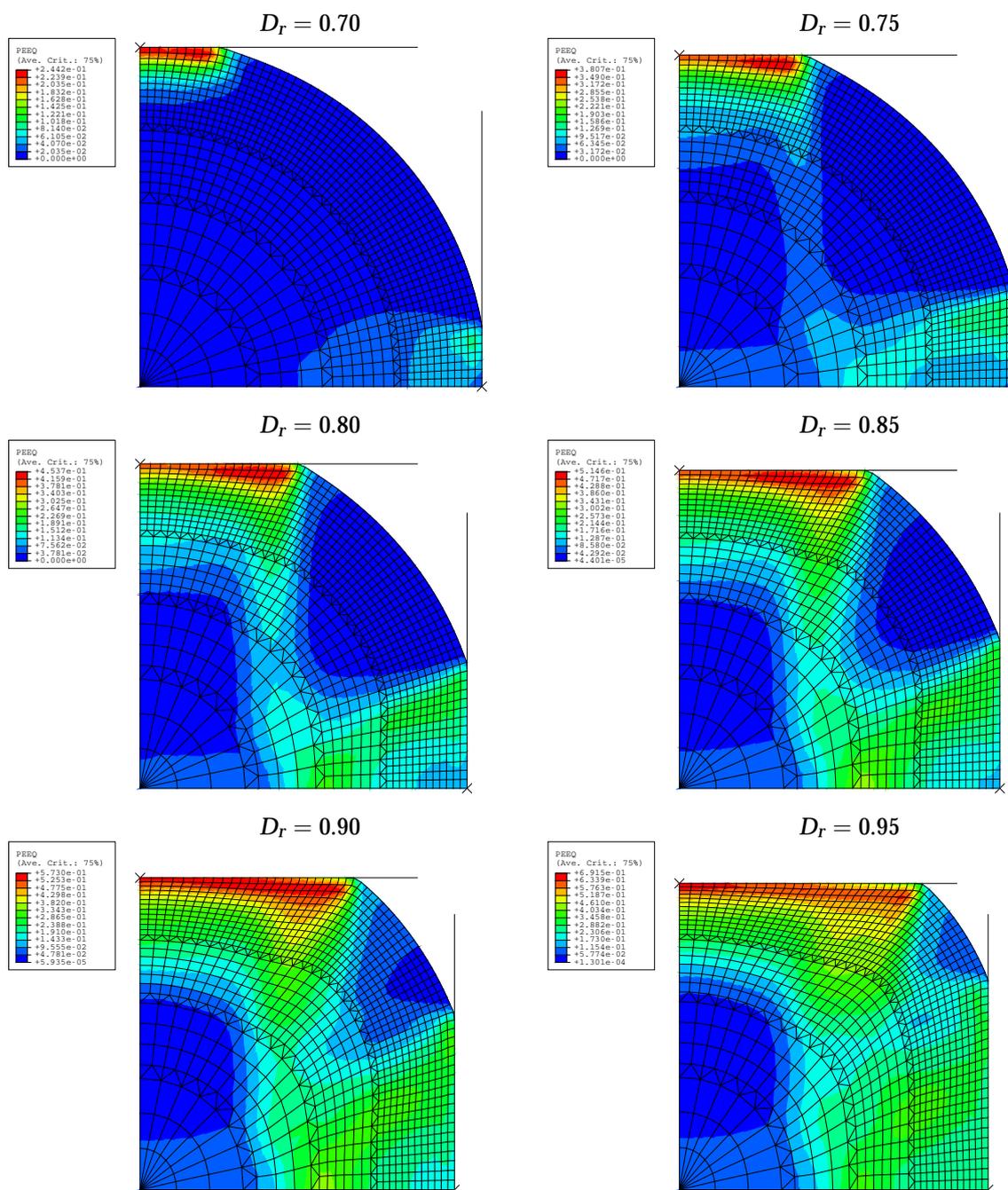


FIGURE 2.5 – Isovaleurs de la déformation plastique équivalente pour différentes densités relatives  $D_r$  : chargement isostatique ( $E_z = E_r \neq 0$ ).

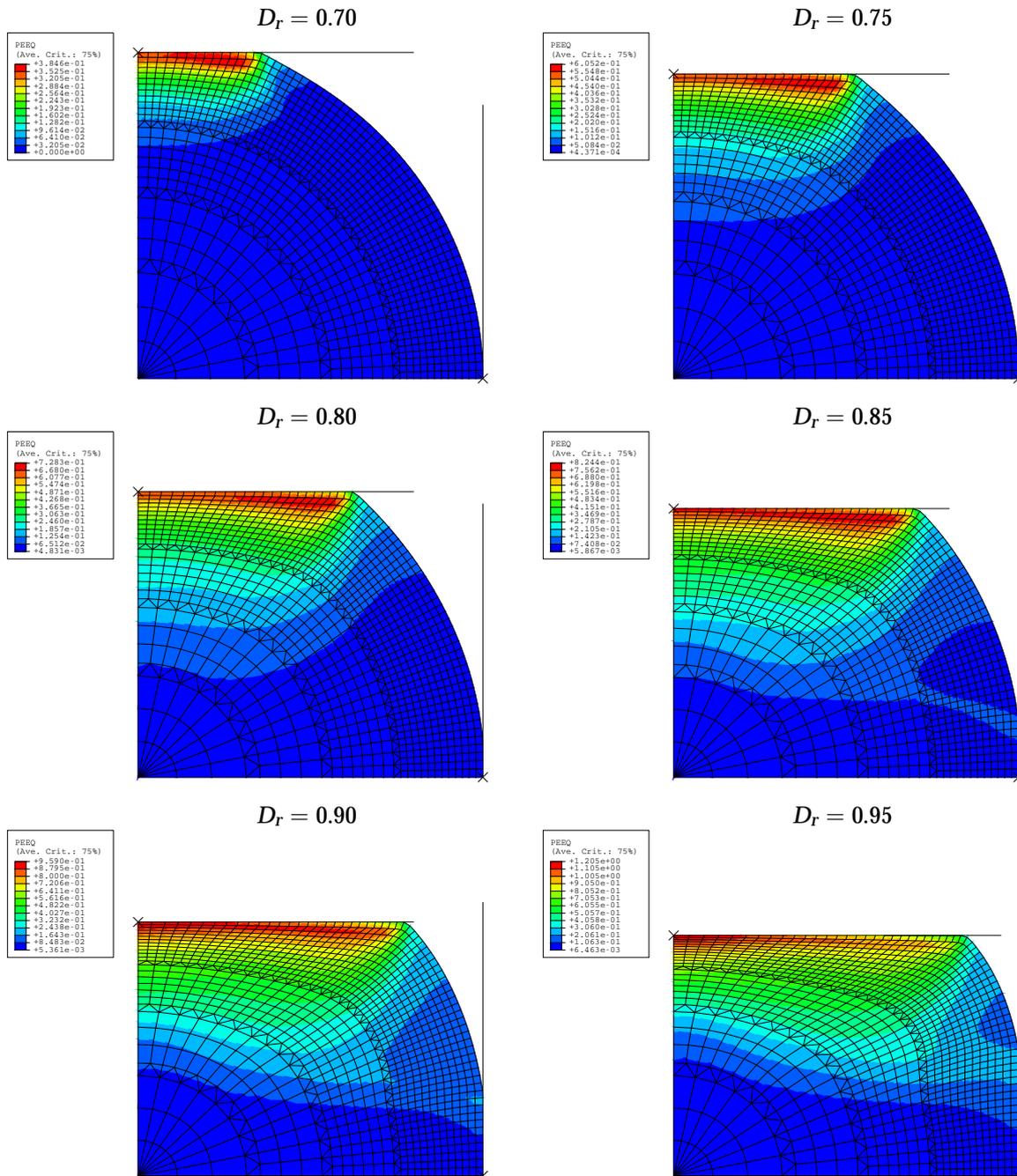


FIGURE 2.6 – Isovaleurs de la déformation plastique équivalente pour différentes densités relatives  $D_r$  : chargement uniaxial ( $E_z \neq 0, E_r = 0$ ).

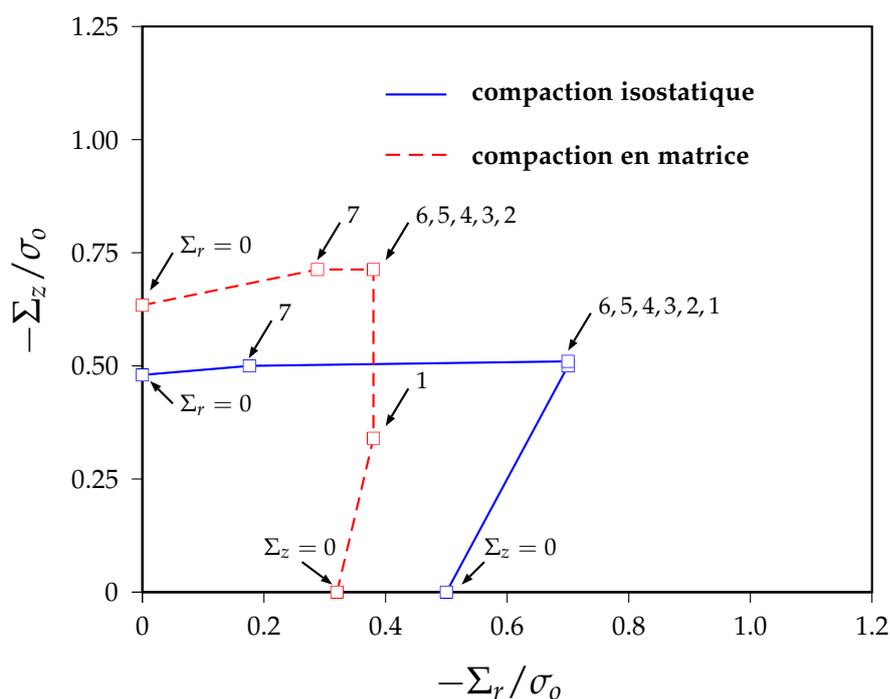


FIGURE 2.7 – Surfaces de charge macroscopiques dans le plan  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$  à une densité relative  $D_r = 0.8$ . Trait continu : compaction isostatique ; trait discontinu : compaction en matrice.

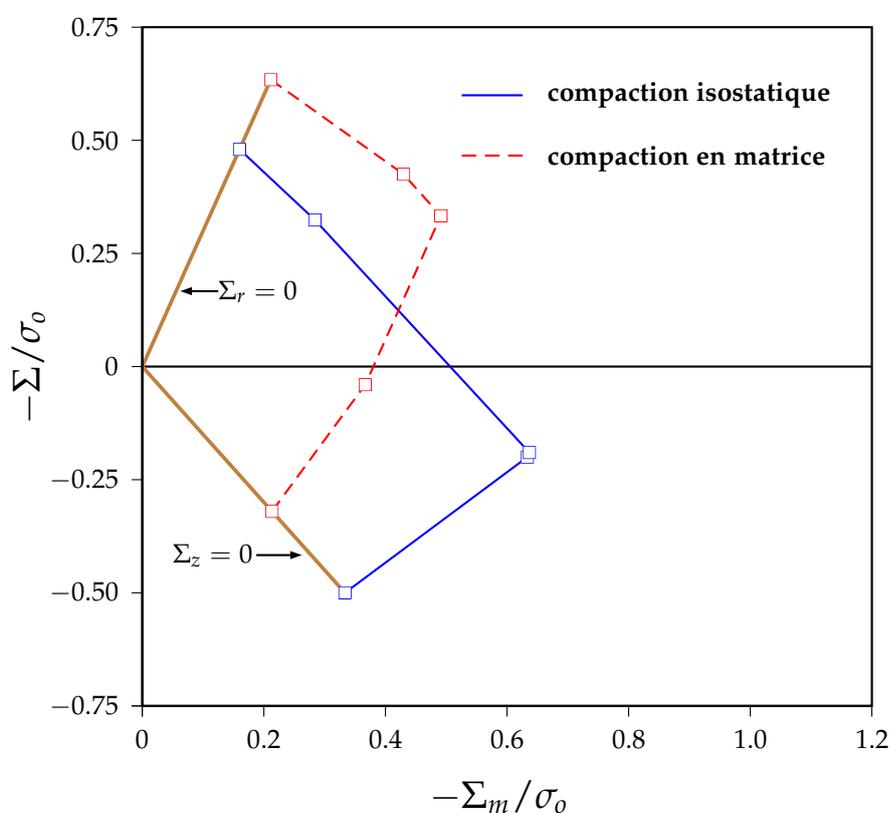


FIGURE 2.8 – Surfaces de charge macroscopiques dans le plan  $(\Sigma_m, \Sigma)$  à une densité relative  $D_r = 0.8$ . Trait continu : compaction isostatique ; trait discontinu : compaction en matrice.

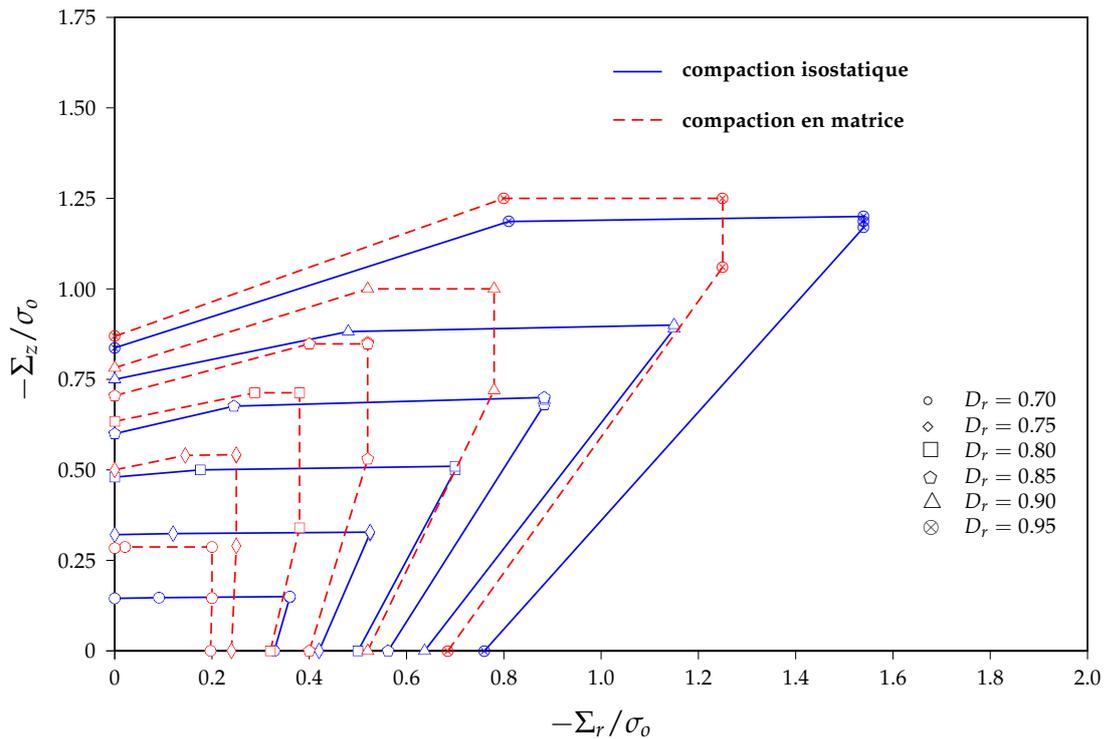


FIGURE 2.9 – Surfaces de charge pour des pré-comprimés obtenues par compaction isostatique et en matrice à différentes densités relatives.

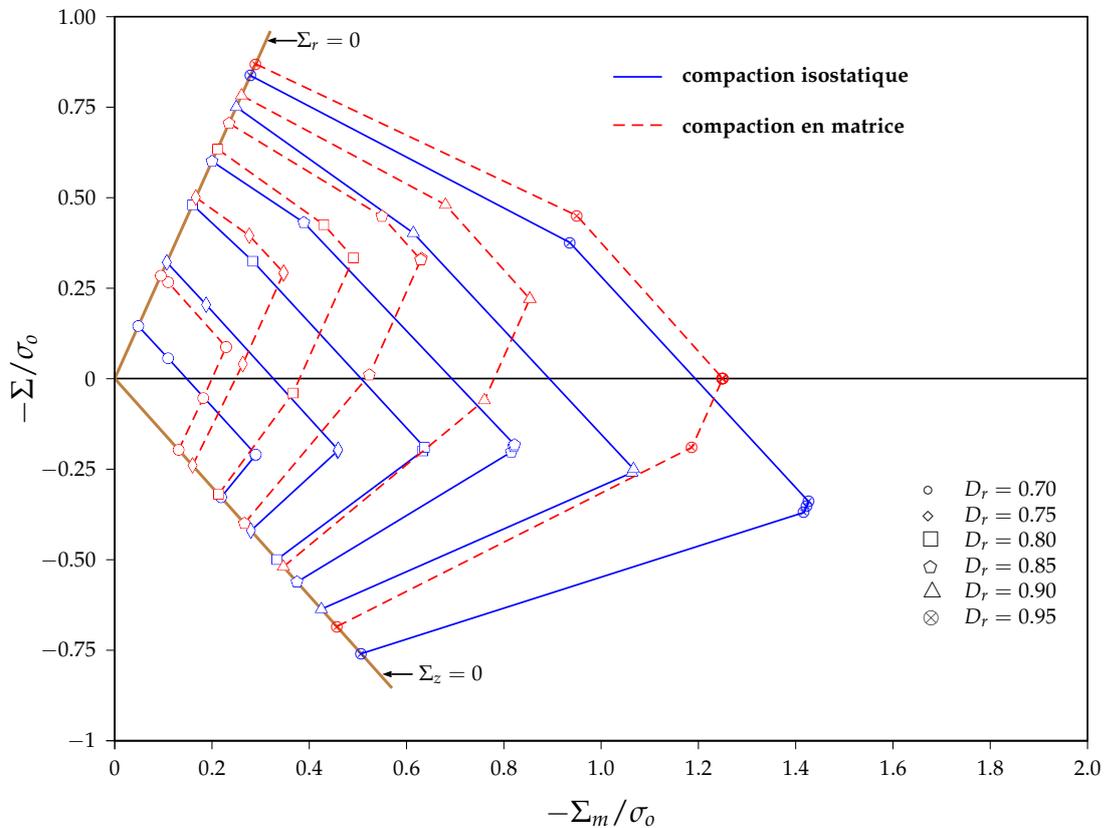


FIGURE 2.10 – Surfaces de charge pour des pré-comprimés obtenues par compaction isostatique et en matrice à différentes densités relatives.

Les figures 2.9 et 2.10 regroupent l'ensemble des résultats obtenus pour des densités relatives  $D_r = 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9$  et  $0.95$ . Nous pouvons y relever que la résistante à la compression uniaxiale (resp. compression radiale) d'un pré-comprimé obtenu par compression isostatique est inférieure (resp. supérieure) à celle d'un pré-comprimé obtenu par compression en matrice et ce, pour la même densité relative. Ceci implique que le comportement du milieu granulaire à la compaction est non seulement fonction de la densité relative mais aussi de l'histoire de chargement. La forme et la taille des surfaces de charge, pour les pré-comprimés obtenus par compression isostatique et en matrice, changent au fur et à mesure que le processus de compactage passe du stade I de densification ( $D_r = 0.7$ ) à une densification modérée ( $D_r = 0.8$ ), puis au stade II de la compaction ( $D_r = 0.95$ ).

### 2.3.2 Évolution de la taille des zones de contact

Les calculs par éléments finis effectués sur la cellule de base permettent, pour une densité relative donnée, de suivre tout le long du processus de chargement aussi bien l'état de déformation que l'évolution des zones de contact entre les plateaux rigides et le grain solide. Nous proposons dans ce qui suit une méthode permettant de déterminer avec une bonne approximation l'évolution des aires de contacts entre les grains solides voisins en fonction des déformations macroscopiques de la cellule de base quantifiées par  $E_z$  et  $E_r$ .

Au stade I de la compaction du milieu granulaire sous un chargement macroscopique, les grains solides se rapprochent les uns des autres et des contacts entre ceux-ci à travers de "petites" aires se développent. Par conséquent, la déformation se localise au voisinage des contacts aux débuts de la densification. Au fur et à mesure que la compaction progresse, les champs mécaniques sous les contacts interagissent entre eux ainsi qu'avec la surface libre du grain ; ce qui a pour effet d'extruder la matière vers les vides. La matière extrudée est supposée être répartie d'une façon uniforme à travers la surface libre de la particule qui aura donc un rayon  $\tilde{R} > R_0$ . La taille des contacts tend ainsi à augmenter avec la croissance de la densité relative.

Au stade I de la compaction, une forme typique d'un grain solide soumis à une déformation macroscopique est illustrée sur la figure 2.11. La déformation locale de la particule est caractérisée par le contact circulaire de rayon  $a$  et le contact annulaire de rayon  $R$  et de largeur  $2b$  ainsi que les distances entre les centres des particules  $2H$  et  $2R$  le long des axes  $e_z$  et  $e_r$  respectivement. Les paramètres  $a, b, H, R$  et  $\tilde{R}$  sont liés par les relations

$$a^2 + H^2 = \tilde{R}^2 \quad , \quad b^2 + R^2 = \tilde{R}^2 \quad (2.8)$$

La loi de conservation de la masse conduit à

$$\left(\frac{R_0}{\tilde{R}}\right)^3 = \left(1 + \frac{a^2}{H^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{a^2}{H^2} \left(1 + \frac{a^2}{H^2}\right)^{-1} + 1 \right] + \frac{b}{R} \left(1 + \frac{b^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \left(1 + \frac{b^2}{R^2}\right)^{-1} - 1 \right] \quad (2.9)$$

d'où il est possible de déduire l'expression de la densité relative

$$D_r = \frac{1}{3} \left( \frac{a^2}{R^2} + 2 \frac{b}{H} \right) + \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{b^2}{R^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{b}{R} \left( 1 + \frac{b^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{a^2}{H^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

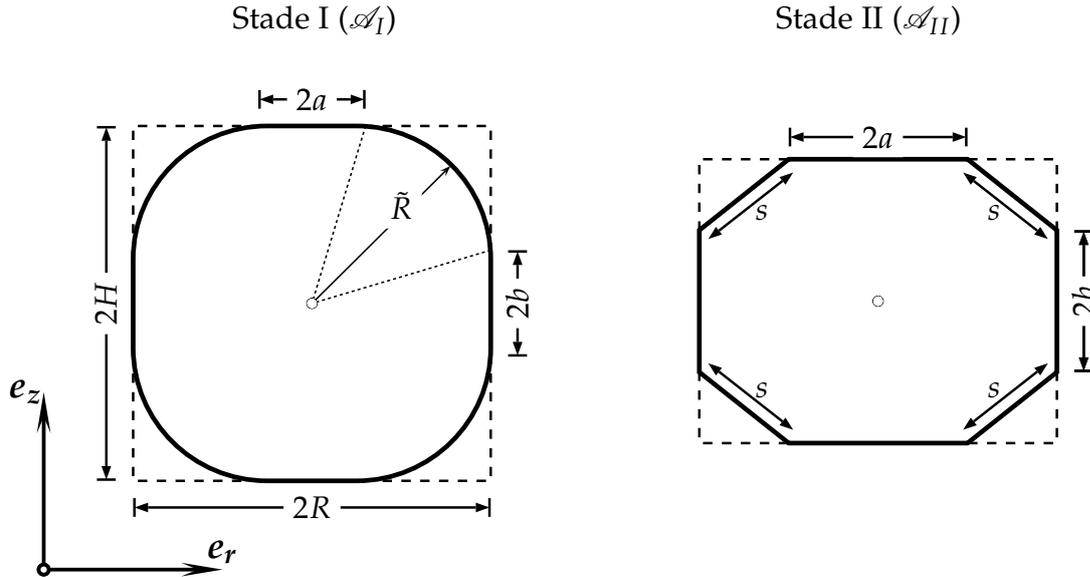


FIGURE 2.11 – Formes typiques d'un grain solide au cours du processus de compaction.

Pour une densification très avancée (stade II), les déformations plastiques se produisent au voisinage des pores. En effet, les zones plastiques sous les aires de contact interagissent avec la surface libre du grain solide et la matière est forcée à s'extruder vers le vide. À ce stade de la compaction, la surface libre du pore est approchée par un losange de côté  $s$  (cf. figure 2.11). De la même manière que ci-dessus, l'expression de la densité relative peut être facilement déduite à partir de la loi de conservation de la masse

$$D_r = 1 - \left(1 - \frac{b}{H}\right) \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{R^2} + \frac{a}{R} + 1\right)\right] \quad (2.11)$$

Les différentes configurations déformées d'un grain solide, pour diverses densités relatives, représentées sur les figures 2.5 et 2.6 peuvent être évoquées pour justifier jusqu'à un certain point le raisonnement ci-dessus. Au chapitre suivant, la détermination des critères de résistance macroscopiques, via l'homogénéisation en calcul à la rupture, utilise des cellules de bases identique à celles représentées à la figure 2.11.

Dans le cas de la compaction isostatique de l'arrangement hexagonal de sphères identiques, les contacts entre grains solides sont de mêmes dimensions. Il s'ensuit que  $a = b$  et  $H = R$ . La relation approchée (2.10) donne, dans le cas de la compaction isostatique au stade I, l'expression qui relie  $D_r$  à  $a/H$

$$D_r = -\frac{2}{3} \frac{a^3}{H^3} + \frac{a^2}{H^2} + \frac{2}{3} \quad (2.12)$$

Au stade II de la compaction, le paramètre  $s$  qui caractérise la géométrie du pore est relié à  $a$  par

$$\frac{a}{H} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{H} \quad (2.13)$$

et l'expression de la densité relative  $D_r$  déduite de la relation (2.11) est donnée par

$$D_r = -\frac{1}{3} \frac{a^3}{H^3} + \frac{a}{H} + \frac{1}{3} \quad (2.14)$$

Les variations de la densité relative  $D_r$  en fonction du paramètre adimensionnel  $a/H$  sont représentées à des fins de comparaison avec les résultats obtenus par la méthode des éléments finis à la figure 2.12. Les deux résultats sont très proches. Nous y relevons par ailleurs une bonne concordance des relations (2.12) et (2.14) durant le stade II de la compaction. De ce fait, l'expression (2.12) de la densité relative en fonction du rapport  $a/H$  est prise en compte pour les deux stades de la compaction. Dans la suite nous retenons l'expression (2.10) comme unique expression de la densité relative, aussi bien pour la compaction isostatique que pour la compaction en matrice.

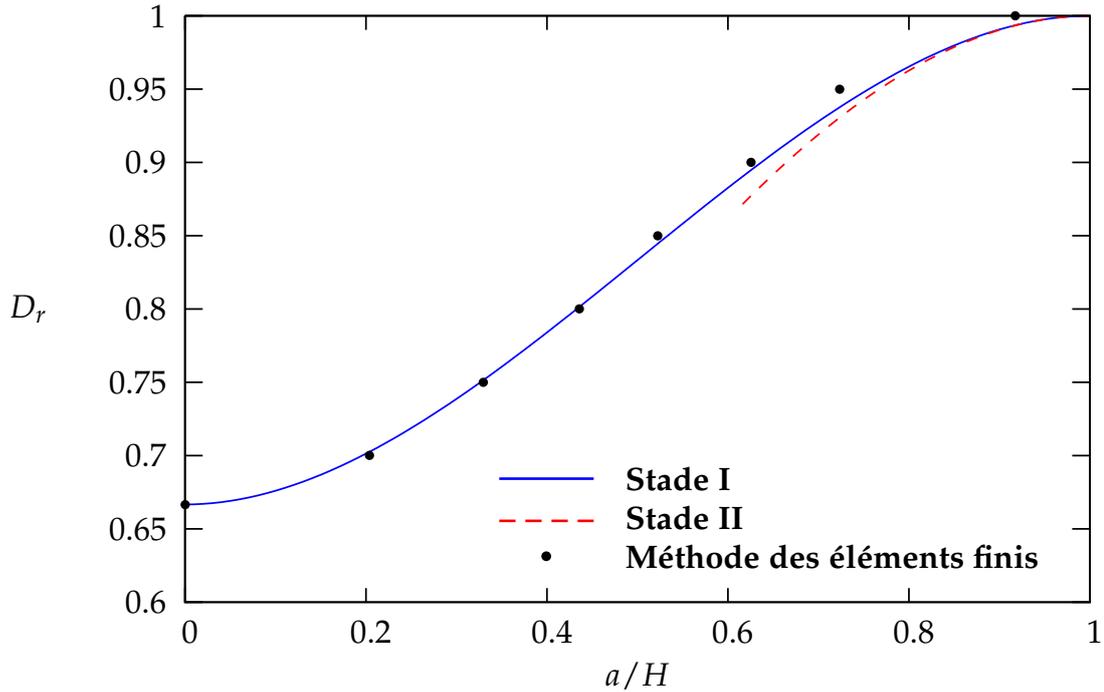


FIGURE 2.12 – Évolution de la densité relative  $D_r$  en fonction de  $(a/H)$  : comparaison des relations (2.12) et (2.14) avec les résultats d'éléments finis.

Les paramètres  $R$  et  $H$  varient avec la déformation et leurs expressions en fonction de  $E_z$  et  $E_r$  sont données par les relations (2.3). Nous disposons ainsi d'une liste de relations complètes (2.3), (2.8)-(2.10) permettant d'exprimer les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $H$ ,  $R$  et  $D_r$  en fonction des déformations macroscopiques ( $E_r, E_z$ ) et du rayon initial  $R_0$  de la particule. Notant que l'expression (2.4) pour la densité relative  $D_r$  est mathématiquement identique à l'expression (2.10) puisqu'elles sont issues de la loi de conservation de la masse. Nous pouvons alors déduire l'évolution des tailles des zones de contact au cours de la densification donnée par les variations des rapports adimensionnels  $a/H$  et  $b/R$  en fonction des déformations macroscopiques ( $E_r, E_z$ ). Les figures 2.13a–b représentent l'évolution des tailles des zones de contact pour la compaction isostatique ( $E_r = E_z$ ), et pour la compaction en matrice ( $E_r = 0$ ). Dans ces figures, les résultats analytiques sont confrontés à ceux des éléments finis. La comparaison entre les deux types de résultats est satisfaisante.

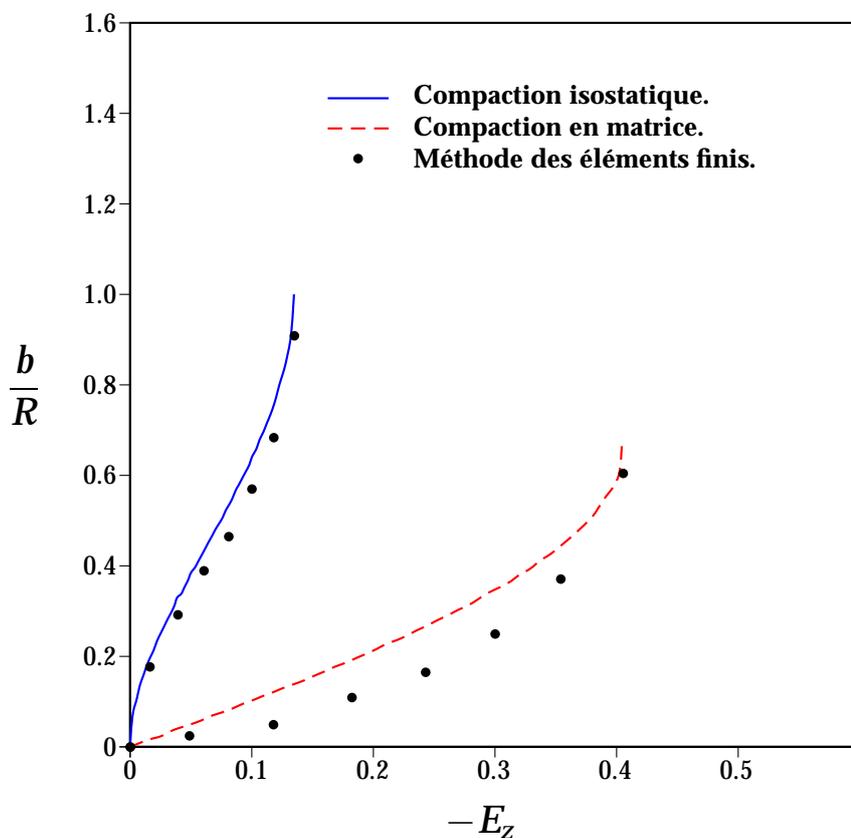
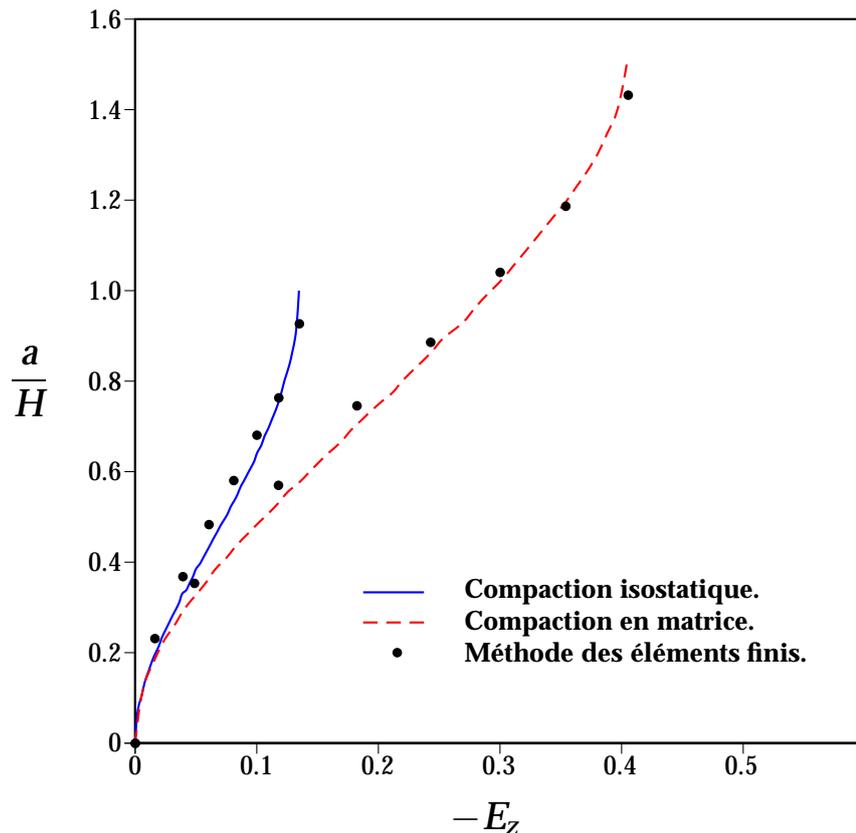


FIGURE 2.13 – Évolution des tailles des zones de contact : variations de (a)  $a/H$  et (b)  $b/R$  en fonction de la déformation macroscopique  $E_z$  pour la compaction isostatique (ligne continue) et la compaction en matrice (ligne discontinue). Les résultats fournis par les éléments finis sont indiqués par des points.

# ESTIMATION PAR L'EXTÉRIEUR DES SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES DE COMPRIMÉS DE POUDRE

# 3

## SOMMAIRE

3.1 INTRODUCTION . . . . .	55
3.2 HOMOGÉNÉISATION EN CALCUL À LA RUPTURE . . . . .	55
3.3 SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES . . . . .	58
3.3.1 Champs de vitesse virtuels pertinents proposés . . . . .	59
3.3.2 Construction de bornes supérieures du critère de résistance macroscopique . . . . .	59

**P**OUR une densité relative fixée caractérisant la compacité d'une poudre donnée, une approximation par l'extérieur de la surface de charge macroscopique de ce milieu basée sur l'approche cinématique du calcul à la rupture est proposée. Le milieu granulaire est appréhendé comme un milieu périodique constitué de grains solides identiques en contact les uns avec les autres et distribués selon un réseau hexagonal. Dans leur état initial, les grains solides sont supposés sphériques de sorte qu'un cylindre circulaire dans lequel un grain est circonscrit et dont la hauteur est égale au diamètre de ce dernier pourrait constituer avec une bonne approximation une cellule de base "primaire", représentative du milieu. Les deux modes de compaction de poudre – la compression isostatique ainsi que la compression en matrice – sont traités. Quatre mécanismes de rupture pertinents de deux cellules de base adaptées aux stades I et II du processus de compaction sont proposés. Ils conduisent pour les deux modes de compaction de poudre – la compression isostatique et la compression en matrice – à des bornes supérieures des surfaces de charge macroscopiques du milieu granulaire considéré. Les résultats obtenus, confrontés à ceux fournis par des calculs aux éléments finis effectués directement sur la cellule de base "primaire", dont le comportement du grain solide est supposé élastique parfaitement plastique, sont satisfaisants.



### 3.1 INTRODUCTION

Contrairement à la plupart des approches classiques qui ont recours à des critères phénoménologiques pour décrire le comportement ultime des matériaux granulaires, la mise en œuvre d'une procédure d'homogénéisation en calcul à la rupture rend possible la construction d'un tel critère de manière rigoureuse. Une formulation générale du critère de résistance macroscopique pour un milieu granulaire dérive de la seule connaissance des propriétés de résistance de leurs constituants que sont les grains solides et le vide entre ceux-ci, ainsi que leur arrangement spatial (de Buhan, 1986). Comme il a été annoncé dans la section 2.2 du précédent chapitre, la structure macroscopique représentant le milieu granulaire considéré est un arrangement isotrope de particules sphériques identiques, soumises à des conditions de chargement axisymétriques, de sorte que le matériau peut être modélisé par un milieu périodique à deux phases. Dans ce cas, il est possible de mettre en évidence une cellule de base, désignée par  $\mathcal{A}$ , représentant ainsi le plus petit volume élémentaire contenant les informations nécessaires pour décrire complètement la structure considérée (cf. figure 2.1).

L'objectif de ce chapitre est de proposer une approche alternative qui permet de construire une estimation des surfaces de charge macroscopiques pour le milieu granulaire analysé. La procédure théorique utilisée pour y aboutir repose sur l'approche cinématique de l'homogénéisation en calcul à la rupture des milieux périodiques (Suquet, 1983; Salençon, 1983; de Buhan, 1986; Salençon, 1993). Les notions de base de la méthode sont tout d'abord rappelées brièvement. Nous l'utilisons ensuite pour l'analyse des formes et des tailles des surfaces de charge macroscopiques à différents degrés de densification.

### 3.2 HOMOGENÉISATION EN CALCUL À LA RUPTURE DES MILIEUX PÉRIODIQUES

La méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture consiste à chercher le domaine de stabilité asymptotique d'une structure constituée d'un matériau hétérogène périodique, soumise à l'action d'un chargement donné, en assimilant le milieu périodique à un milieu homogène à l'échelle macroscopique. Le principe de cette méthode s'appuie sur les notions de structure homogène associée à la structure hétérogène périodique initialement étudiée et de critère de résistance macroscopique. L'objectif de l'homogénéisation en calcul à la rupture est de fournir une estimation sur les conditions de stabilité de la structure sans tenir compte du comportement du matériau constitutif. Les conditions de stabilité sont exprimées en terme d'intensité des charges qui peuvent être appliquées au système sans impliquer sa ruine. Dans ce contexte, Suquet (1983) et de Buhan (1986) ont montré que la détermination du critère de résistance macroscopique du matériau hétérogène périodique passe par la résolution d'un problème de calcul à la rupture posé sur une cellule de base représentative du milieu.

On note  $\Omega$  la structure composée du matériau hétérogène périodique à étudier et  $\mathcal{A}$  une cellule de base. Le volume de  $\mathcal{A}$  comprend un matériau solide (grain solide) et des vides. On désigne par  $G(\mathbf{x})$  le domaine de résistance au point courant  $\mathbf{x}$  de la cellule de base  $\mathcal{A}$ .  $G(\mathbf{x})$  est l'ensemble des tenseurs de contrainte  $\sigma(\mathbf{x})$  admissibles. Le domaine de résistance macroscopique

rique  $G^{hom}$  du milieu périodique est défini comme étant l'ensemble des états macroscopiques de contrainte  $\Sigma$  tels qu'il existe un champ de contrainte microscopique  $\sigma$  défini sur la cellule de base  $\mathcal{A}$  et satisfaisant les conditions suivantes :

1. Conditions d'équilibre :

- (i)  $\Sigma = \langle \sigma \rangle$ , avec  $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{A}} \bullet d\mathcal{A}$ , est l'opérateur de moyenne volumique sur  $\mathcal{A}$  ;
- (ii)  $\text{div} \sigma = \mathbf{0}$  (avec éventuellement  $\llbracket \sigma \rrbracket \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$  au franchissement d'une surface de discontinuité du champ  $\sigma$ , de normale  $\mathbf{n}$ ) ; et
- (iii)  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  est anti-périodique :  $\sigma \cdot \mathbf{n}$  prend des valeurs opposées sur des facettes opposées de  $\mathcal{A}$  de normales sortantes unitaires  $\mathbf{n}$  et  $-\mathbf{n}$ .

2. Condition de résistance :

$$\sigma(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}$$

Autrement formulé, la définition statique du domaine de résistance macroscopique  $G^{hom}$  est :

$$G^{hom} = \{ \Sigma; \Sigma = \langle \sigma \rangle, \sigma \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique, } \text{div} \sigma = \mathbf{0}, \sigma(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A} \} \quad (3.1)$$

La convexité de  $G(\mathbf{x})$ , quelque soit  $\mathbf{x}$ , implique la même propriété pour le domaine de résistance macroscopique  $G^{hom}$ . La définition cinématique duale de  $G^{hom}$  peut être exprimée à travers la fonction d'appui définie comme suit (de Buhan, 1986) :

$$\Pi^{hom}(\mathbf{D}) = \max_{\Sigma} \{ \Sigma : \mathbf{D}; \Sigma \in G^{hom} \} \quad (3.2)$$

Dans cette relation,  $\Sigma : \mathbf{D} = \Sigma_{ij} D_{ji}$ <sup>1</sup> et  $\mathbf{D}$  désigne un tenseur symétrique de second ordre. Suquet (1983) et de Buhan (1986) ont montré que la fonction  $\Pi^{hom}$  peut aussi être calculée comme suit :

$$\Pi^{hom}(\mathbf{D}) = \min_{\mathbf{v}} \{ \langle \pi(\mathbf{d}) \rangle; \langle \mathbf{d}(\mathbf{v}) \rangle = \mathbf{D} \} \quad (3.3)$$

où ;

- $\mathbf{d}$  désigne un champ de taux de déformation périodique associé au champ de vitesse  $\mathbf{v}$  ;
- $\langle \mathbf{d} \rangle = 1/2|\mathcal{A}| \int_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) dS$  définit la valeur moyenne du champ  $\mathbf{d}$  calculée sur la cellule de base, et

•

$$\langle \pi(\mathbf{d}) \rangle = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_{\mathcal{A}} \pi(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \frac{1}{|\mathcal{A}|} \int_S \pi(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) dS \quad (3.4)$$

avec  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}$

$$\pi(\mathbf{d}) = \max_{\sigma} \{ \sigma : \mathbf{d}, \sigma \in G(\mathbf{x}) \} \quad (3.5)$$

et  $\forall \mathbf{x} \in S$ , où  $S$  désigne une surface de discontinuité possible du champ  $\mathbf{v}$ ,

$$\pi(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) = \max_{\sigma} \{ (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \llbracket \mathbf{v} \rrbracket; \sigma \in G(\mathbf{x}) \}^2 \quad (3.6)$$

1. La convention de sommation sur les indices muets est adoptée.

2.  $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket$  est le saut du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  à travers la surface  $S$  de normale unitaire  $\mathbf{n}$ .

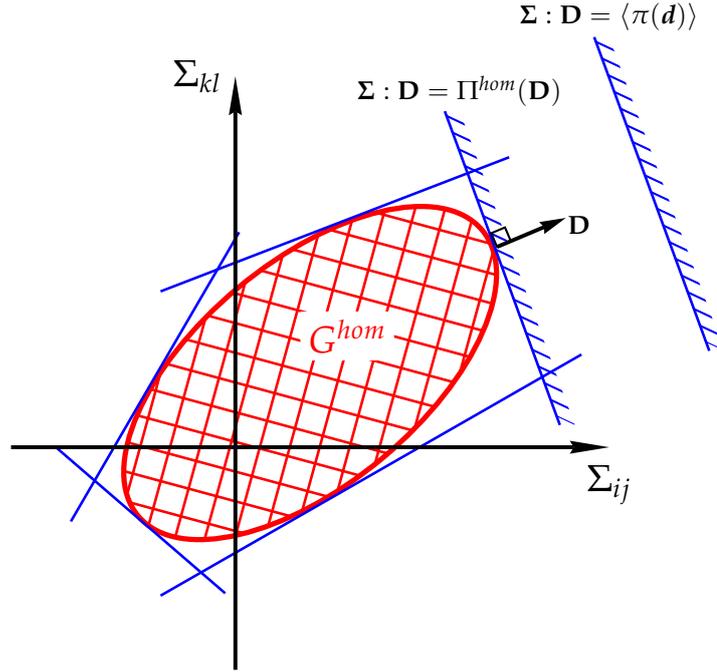


FIGURE 3.1 – Interprétation géométrique de la définition cinématique de  $G^{hom}$ .

La définition cinématique de  $G^{hom}$  peut être interprétée géométriquement dans l'espace des contraintes  $\Sigma$ . En effet, pour un tenseur  $\mathbf{D}$  donné, l'équation (3.2) montre que la fonction d'appui  $\Pi^{hom}(\mathbf{D})$  est proportionnelle à la distance entre l'origine de l'espace des contraintes et l'hyperplan tangent à la surface de  $G^{hom}$  au(x) point(s) où la normale sortante est parallèle à  $\mathbf{D}$  (cf. figure 3.1). En outre la relation (3.3) montre que pour un champ de taux de déformation  $\mathbf{d}$ ,  $G^{hom}$  est contenu dans le demi espace défini par

$$\Sigma : \mathbf{D} - \langle \pi(\mathbf{d}) \rangle \leq 0 \quad (3.7)$$

Il vient alors que le domaine  $G^{hom}$  peut être défini comme l'enveloppe convexe des hyperplans :

$$G^{hom} = \bigcap_{\mathbf{D}} \{ \Sigma; \Sigma : \mathbf{D} - \Pi^{hom}(\mathbf{D}) \leq 0 \} \quad (3.8)$$

L'approche cinématique du calcul à la rupture fournit une condition nécessaire pour que la structure reste stable sous un chargement donné. Elle est exprimée par l'inégalité fondamentale

$$\mathcal{P}_{ex}(\mathbf{F}, \mathbf{v}) \leq \mathcal{P}_{rm}(\mathbf{v}), \quad (3.9)$$

où  $\mathcal{P}_{ex}$  est la puissance virtuelle développée par les efforts extérieurs  $\mathbf{F}$  dans le champ de vitesse virtuel  $\mathbf{v}$ ;  $\mathcal{P}_{rm}(\mathbf{v})$  est la puissance résistante maximale mobilisée à l'intérieur de la structure. Elle est donnée par

$$\mathcal{P}_{rm}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}(\mathbf{v})) dV + \int_S \pi(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) dS \quad (3.10)$$

Le domaine des chargements potentiellement supportables est inclus dans le demi-espace défini par l'inégalité (3.9). L'approche cinématique conduit à une valeur approchée «par excès»

du chargement limite ou encore une borne supérieure de ce chargement. Dans l'espace des contraintes, ces bornes supérieures délimitent de l'extérieur le domaine de résistance macroscopique.

### 3.3 SURFACES DE CHARGE MACROSCOPIQUES

Soient  $\mathcal{A}_s$  (resp.  $\mathcal{A}_v$ ) et  $G_s$  (resp.  $G_v$ ) le volume occupée par le grain solide (resp. le vide) et le domaine de résistance de son matériau constitutif. La densité relative de la cellule de base  $\mathcal{A}$  est donnée par le rapport  $|\mathcal{A}_s|/|\mathcal{A}|$ , où  $|\bullet|$  désigne le volume. Le critère de résistance du matériau du grain solide est celui de von Mises défini par :

$$\sigma \in G_s \Leftrightarrow f(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma' : \sigma' - k^2 \leq 0, \quad (3.11)$$

avec  $k = \sigma_0/\sqrt{3}$  est la limite de résistance en cission simple et  $\sigma'$  désigne le déviateur de la contrainte. Le domaine de résistance  $G_v$  de  $\mathcal{A}_v$  est évidemment l'ensemble vide ( $G_v = \emptyset$ ). La fonction d'appui  $\pi(\cdot)$  du domaine  $G_s$  est donnée par :

$$\begin{cases} \pi_s(\mathbf{d}) = +\infty, & \text{si } \text{Tr } \mathbf{d} \neq 0; \\ \pi_s(\mathbf{d}) = k \sqrt{2 \text{Tr } \mathbf{d}^2}, & \text{si } \text{Tr } \mathbf{d} = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \pi_s(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) = +\infty, & \text{si } \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \neq 0; \\ \pi_s(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) = k \|\llbracket \mathbf{v} \rrbracket\|, & \text{si } \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous rappelons que la mise en oeuvre de l'approche cinématique par l'extérieur basée sur l'exploitation de l'inégalité (3.9) ne conduit à un résultat non trivial que si, pour le champ  $\mathbf{v}$  considéré, d'une part la puissance des efforts extérieurs est positive ( $\mathcal{P}_{ex}(\mathbf{F}, \mathbf{v}) > 0$ ) et, d'autre part, la puissance résistante maximale est finie ( $\mathcal{P}_{rm}(\mathbf{v}) < +\infty$ ). La seconde condition, compte tenu de l'expression (3.10) de  $\mathcal{P}_{rm}(\mathbf{v})$ , implique que  $\mathbf{v}$  doit être choisi de façon à ce que  $\pi(\mathbf{d})$  et  $\pi(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket)$  soient finies. De tels champs de vitesse virtuels sont dits pertinents. Ainsi, en se reportant aux formules (3.12) et (3.13) on voit que, dans le cas du critère de résistance de von Mises, un champ de vitesse virtuel pertinent est tel que le taux de variation de volume est nul :  $\text{Tr } \mathbf{d} = 0$  (déformation isochore); les discontinuités de vitesse doivent être purement tangentielles :  $\llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0$ .

L'expression générale d'un champ de vitesse axisymétrique dans le grain solide  $\mathcal{A}_s$  est de la forme

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_z \mathbf{e}_z \quad (3.14)$$

La condition d'incompressibilité du grain solide,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , se traduit en termes des composantes  $v_r$  et  $v_z$  par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

dont une solution est

$$v_r = \frac{A}{r} \text{ et } v_z = w \quad (3.16)$$

où  $A$  et  $w$  sont des constantes.

### 3.3.1 Champs de vitesse virtuels pertinents proposés

Pour la détermination du domaine  $G^{hom}$  nous utilisons deux cellules de base différentes par leur contour  $\mathcal{A}_I$  et  $\mathcal{A}_{II}$ , et qui sont associées respectivement aux stades I et II de la compaction (cf. figure 2.11). La géométrie de chacune des cellules de base est fixée par la valeur de la densité relative. Les figures 3.2 et 3.3 regroupent, respectivement pour le stade I (cellule de base  $\mathcal{A}_I$ ) et le stade II (cellule de base  $\mathcal{A}_{II}$ ) de la compaction, huit mécanismes de rupture pertinents des deux cellules de bases secondaires. Ces figures montrent en fait les sections des cellules de base par un plan méridien (plan contenant l'axe  $e_z$ ). Pour chaque mécanisme de rupture, les expressions des champs de vitesse des différentes zones de  $\mathcal{A}_I$  et  $\mathcal{A}_{II}$  ainsi que leurs représentation schématique sont reportées sur ces figures.

Les mécanismes A et B sont des champs d'indentation simple pour chaque zone de contact. Ces mécanismes, inspirés du mécanisme de Prandtl, considèrent qu'une zone en adhérence parfaite avec les contacts (zone ①) se déplace le long de la direction d'indentation. Le matériau localisé au centre de la sphère (zone ③) demeure rigide tandis que le matériau qui s'extrude vers les parties adjacentes aux zones de contact (zone ②) est déformable. Les mécanismes proposés sont à deux degrés de liberté de paramètres géométriques  $\chi$  et  $\rho$ .

Les mécanismes C et D supposent l'existence d'une interaction entre la déformation des deux zones de contact (axiale et radiale). Si le contact axiale (resp. radial) est dominant, la zone ① tend à extruder la zone ② de part et d'autre de l'axe  $e_z$  (resp.  $e_r$ ). La zone ③ est sans mouvement (zone "morte"). Les mécanismes C et D sont à un seul degré de liberté de paramètre  $\chi$ .

Les mécanismes E et F suggèrent l'existence d'une interaction entre la zone sous le contact (zone ①) et la surface libre adjacente au vide. Ainsi la zone ② est forcée à s'extruder dans la cavité en supposant que le matériau au centre du grain (zone ③) est rigide. Ces mécanismes possèdent deux degrés de liberté spécifiés par les paramètres  $l$  et  $\rho$ .

Finalement, les mécanismes G et H sont semblables à ceux des mécanismes C et D respectivement, à la différence qu'au stade II de la compaction les contacts sont plus étendus que celles associées stade I.

### 3.3.2 Construction de bornes supérieures du critère de résistance macroscopique

À titre d'illustration, nous donnons ci-après à travers le mécanisme de rupture A, les détails des calculs conduisant à la détermination de la meilleure borne supérieure du critère de résistance macroscopique du milieu granulaire, et ce pour une densité relative donnée. Les détails des calculs pour les autres mécanismes de rupture proposées sont données à l'annexe A.1. Nous reproduisons ci-après la figure du mécanisme rupture A, soit donc la figure 3.4. L'expression du champ de vitesse associé au mécanisme de rupture A est donnée par :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}_s, \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_1 = w_1 e_z & \text{si } \mathbf{x} \in \text{zone ①;} \\ v_2 = \frac{A}{r} e_r + w_2 e_z & \text{si } \mathbf{x} \in \text{zone ②;} \\ v_3 = \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \text{zone ③.} \end{cases} \quad (3.17)$$

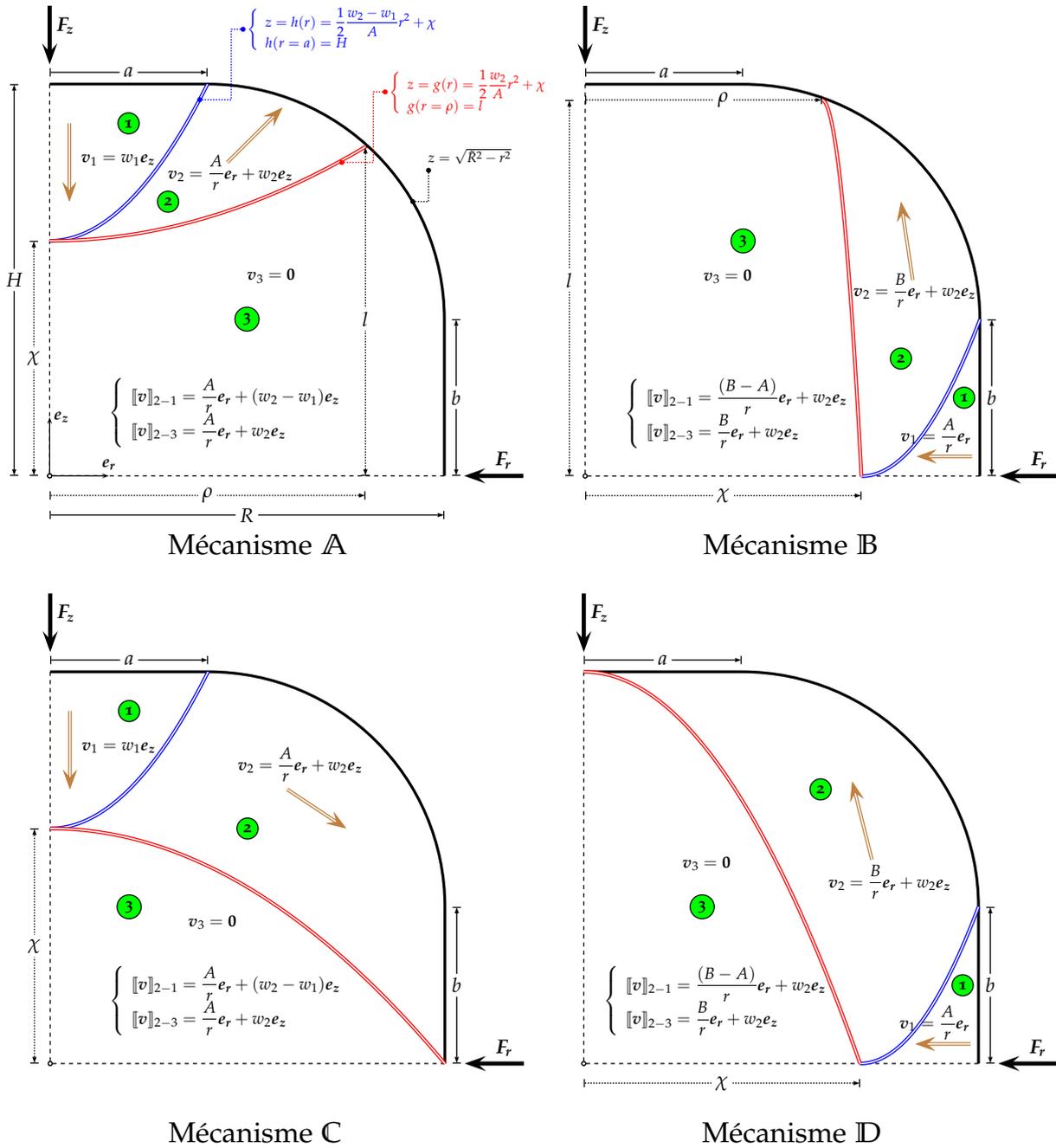


FIGURE 3.2 – Mécanismes de rupture proposés pour le stade I de la compaction.

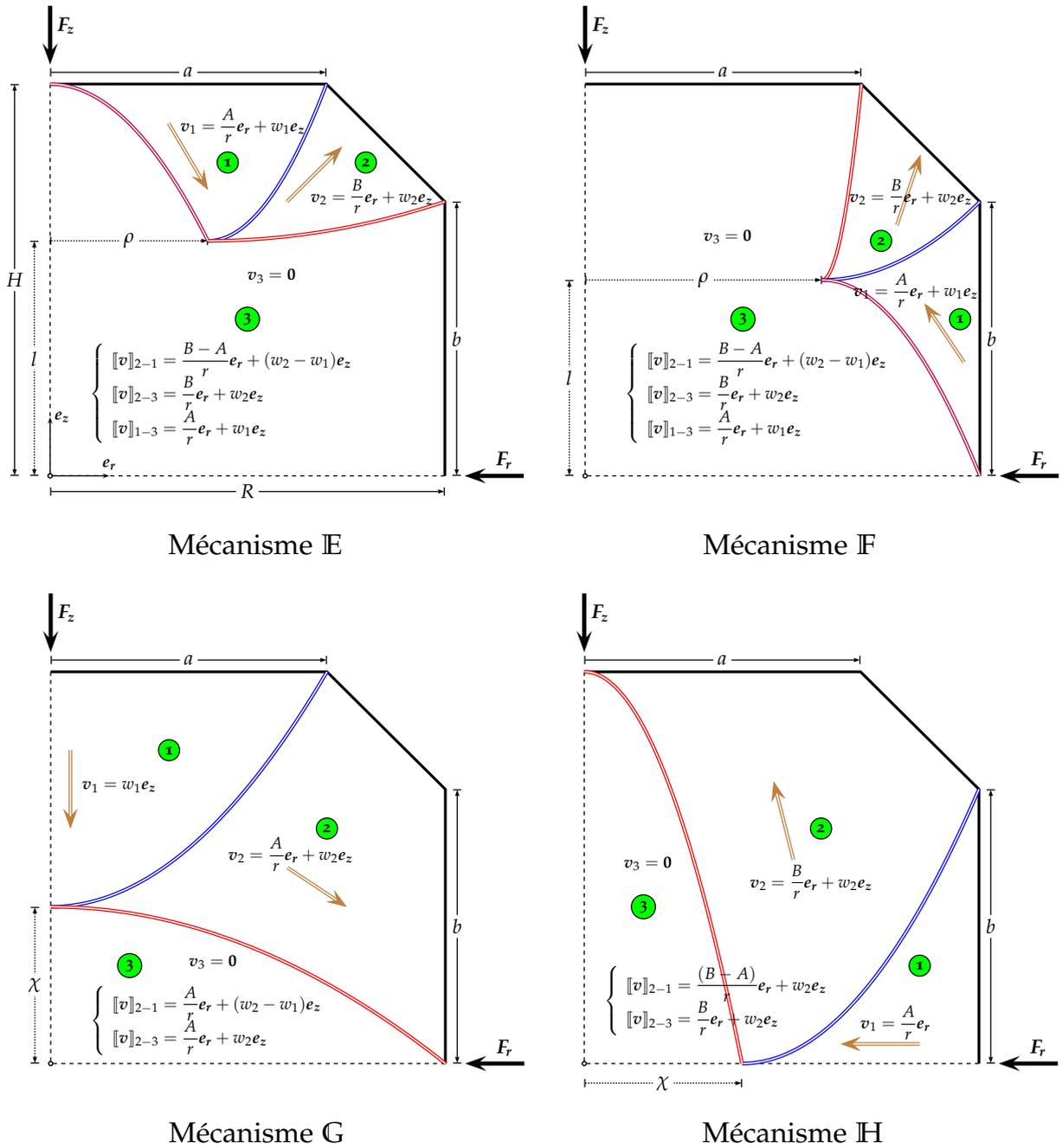


FIGURE 3.3 – Mécanismes de rupture proposés pour le stade II de la compaction.

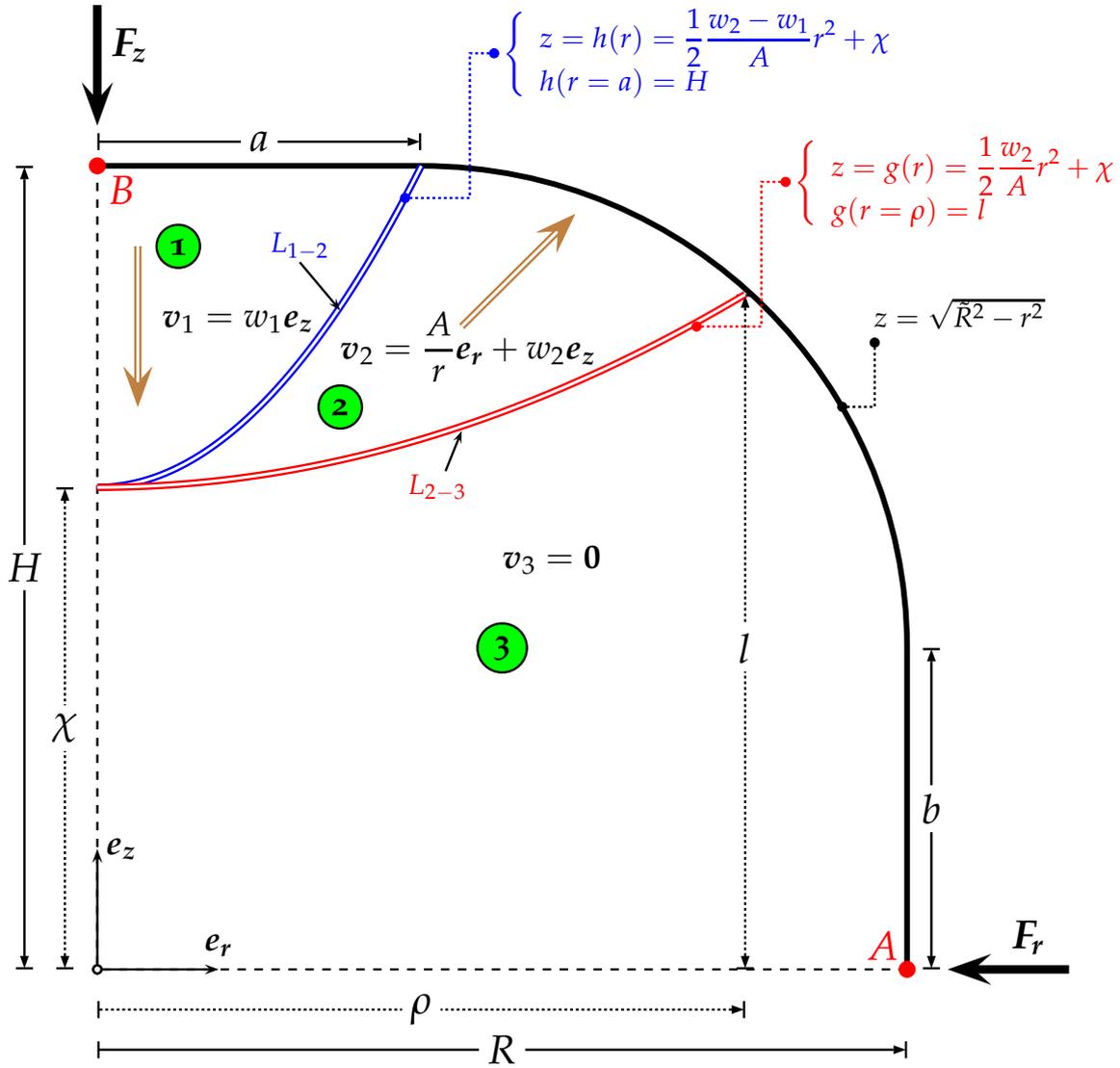


FIGURE 3.4 – Illustration du mécanisme de rupture A.

où  $w_1$ ,  $w_2$  et  $A$  sont des constantes à déterminer. Le taux de déformation associé est

$$d = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0, & & \\ -\frac{A}{r^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{si } x \in \text{zone } \textcircled{1}; \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{A}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{si } x \in \text{zone } \textcircled{2}; \\ 0, & \text{si } x \in \text{zone } \textcircled{3}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Les sauts de vitesse à la traversée des surfaces de discontinuité  $S_{1-2}$  et  $S_{2-3}$  du champ  $v$  entre les zones  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$  et les zones  $\textcircled{2}$  et  $\textcircled{3}$  sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} \llbracket v \rrbracket_{2-1} &= \frac{A}{r} e_r + (w_2 - w_1) e_z \quad \text{à travers } S_{1-2}; \\ \llbracket v \rrbracket_{2-3} &= \frac{A}{r} e_r + w_2 e_z \quad \text{à travers } S_{2-3} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Notons par  $L_{1-2}$  la ligne de discontinuité dans le plan méridien  $(e_r, e_z)$  correspondant à la surface  $S_{1-2}$ . Un point  $M$  appartenant à  $L_{1-2}$  est repéré par son vecteur position

$$\mathbf{M} = r \mathbf{e}_r + h(r) \mathbf{e}_z \quad (3.20)$$

où  $h = h(r)$  est l'équation paramétrique de la ligne  $L_{1-2}$ . L'expression de la fonction  $h$  peut être déduite de la condition  $[[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{n} = 0$ . En effet, un vecteur normale  $\mathbf{n}_{1-2}$  à  $L_{1-2}$  est donné par

$$\mathbf{n}_{1-2} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r} \wedge r \mathbf{e}_\theta = r \mathbf{e}_z - r \frac{\partial h(r)}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (3.21)$$

La condition de glissement pur impose

$$[[\mathbf{v}]]_{2-1} \cdot \mathbf{n}_{1-2} = 0 \implies \frac{\partial h(r)}{\partial r} = \frac{w_2 - w_1}{A} r \quad (3.22)$$

d'où nous déduisons

$$h(r) = \frac{1}{2} \frac{w_2 - w_1}{A} r^2 + \chi, \quad 0 \leq \chi \leq H \quad (3.23)$$

qui est l'équation d'une parabole dans le plan  $(e_r, e_z)$ .

Les constantes  $w_1$ ,  $w_2$  et  $A$  doivent vérifier :

1.  $w_1 < 0, w_2 > 0, A > 0$
2.  $h(r = a) = H \implies w_2 - w_1 = \frac{2A(H - \chi)}{a^2}$

La concavité de la parabole  $h = h(r)$  est dirigée vers le haut comme le montre la figure 3.4. Nous avons donc nécessairement  $w_2 - w_1/A > 0$ .

Soient  $L_{2-3}$  la ligne de discontinuité dans le plan  $(e_r, e_z)$  correspondant à la surface  $S_{2-3}$  et  $g = g(r)$  son équation paramétrique. Il est alors facile de montrer, en procédant de la même manière que précédemment, que

$$g(r) = \frac{1}{2} \frac{w_2}{A} r^2 + \chi, \quad 0 \leq \chi \leq H \quad (3.24)$$

avec les conditions

1.  $a \leq \rho \leq R$
2.  $g(r = \rho) = l \implies w_2 = \frac{2A(l - \chi)}{\rho^2}$
3.  $l = \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2}$ <sup>3</sup>

La concavité de la parabole  $g = g(r)$  est dirigée vers le haut ( $w_2/A > 0$ ). Finalement, les paramètres  $w_1, w_2, A, \chi$  et  $\rho$  déterminent complètement la géométrie du mécanisme de rupture  $\mathbb{A}$ .

La puissance résistante maximale  $\mathcal{P}_{rm}$  associée au champ de vitesse considéré (3.17) est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{rm}(\mathbf{v}) &= \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A}_s + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, [[\mathbf{v}]]) dS \\ &= \int_{\text{zone } \textcircled{2}} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A}_s + \int_{S_{1-2}} \pi_s(\mathbf{n}_{1-2}, [[\mathbf{v}]]_{2-1}) dS + \int_{S_{2-3}} \pi_s(\mathbf{n}_{2-3}, [[\mathbf{v}]]_{2-3}) dS \\ &= \mathcal{P}_{rm_{(2)}}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{rm_{(1/2)}}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{rm_{(2/3)}}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

3. À partir de  $z = \sqrt{\tilde{R}^2 - r^2}$ , équation du cercle de rayon  $\tilde{R}$  et de centre  $(r = 0, z = 0)$ .

Donnons ci-après les expressions de  $\mathcal{P}_{rm_{(2)}}(\mathbf{v})$ ,  $\mathcal{P}_{rm_{(1/2)}}(\mathbf{v})$  et  $\mathcal{P}_{rm_{(2/3)}}(\mathbf{v})$ .

•

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{rm_{(2)}}(\mathbf{v}) &= \int_{\text{zone } \textcircled{2}} \frac{2kA}{r^2} r dr d\theta dz \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{g(r)}^{h(r)} \int_0^a \frac{2kA}{r^2} r dr d\theta dz + \int_0^{2\pi} \int_{g(r)}^{\sqrt{\tilde{R}^2 - r^2}} \int_a^\rho \frac{2kA}{r^2} r dr d\theta dz \\
&= 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4} a^2 \frac{w_1}{A} + \frac{1}{4} \frac{w_2}{A} (a^2 - \rho^2) + \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2} + \tilde{R} \ln \left( \frac{\rho \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2}}{a \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2}} \right) + \chi \ln \left( \frac{a}{\rho} \right) \right\} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{rm_{(1/2)}}(\mathbf{v}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a k \left[ \left( \frac{A}{r} \right)^2 + (w_2 - w_1)^2 \right]^{1/2} \left[ \left( \frac{w_2 - w_1}{A} \right)^2 r^2 + 1 \right]^{1/2} r dr d\theta \\
&= 2\pi k a \left[ A + \frac{a^2}{3A} (w_2 - w_1)^2 \right] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{rm_{(2/3)}}(\mathbf{v}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\rho k \left[ \left( \frac{A}{r} \right)^2 + w_2^2 \right]^{1/2} \left[ \left( \frac{w_2}{A} \right)^2 r^2 + 1 \right]^{1/2} r dr d\theta \\
&= 2\pi k \rho \left[ A + \frac{\rho^2}{3A} w_2^2 \right] \quad (3.28)
\end{aligned}$$

La puissance développée par les efforts extérieurs  $\mathcal{P}_{ex}(\mathbf{v})$  dans le champ de vitesse virtuel associé au mécanisme de rupture  $\mathbb{A}$  est donnée par

$$\mathcal{P}_{ex}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_1(B) + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_3(A) = F_z w_1 \quad (3.29)$$

avec  $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z$  ( $F_z < 0$ ) et  $\mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r$  ( $F_r < 0$ ). Son expression en fonction des contraintes macroscopiques s'obtient en utilisant les relations (2.2) et (2.5), ce qui donne

$$\mathcal{P}_{ex}(\mathbf{v}) = \pi R^2 w_1 \Sigma_z \quad (3.30)$$

L'inégalité fondamentale de l'approche cinématique du calcul à la rupture conduit à la majoration suivante de la contrainte macroscopique axiale  $\Sigma_z$  :

$$\Sigma_z \leq \frac{1}{\pi R^2 w_1} \left( \mathcal{P}_{rm_{(1/2)}}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{rm_{(2)}}(\mathbf{v}) + \mathcal{P}_{rm_{(2/3)}}(\mathbf{v}) \right) \quad (3.31)$$

La minimisation par rapport à  $\chi$  et  $\rho$  du second membre de l'inégalité conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_z$  pour la classe de champs de vitesse considérée. Dans le plan des contraintes macroscopiques  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$ , cette borne supérieure est une droite horizontale comme représentée sur la figure 3.5 pour le cas d'un pré-comprimé isostatique de densité relative  $D_r = 0.7$ .

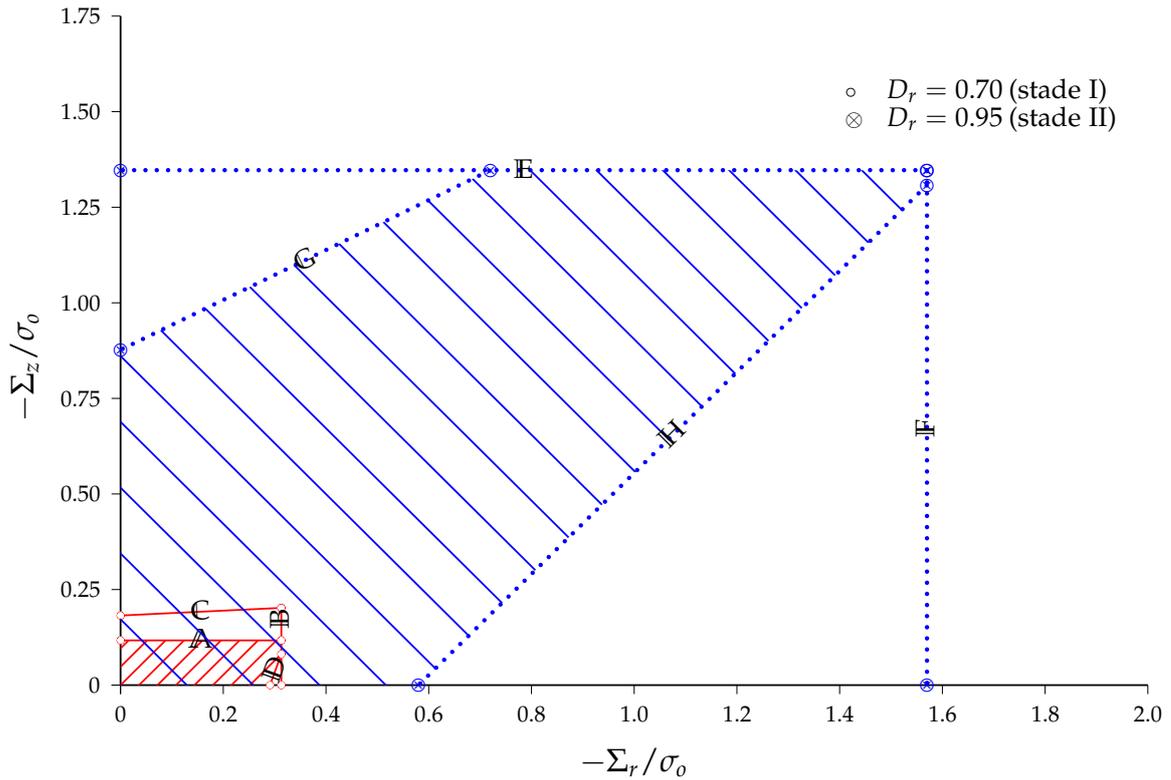
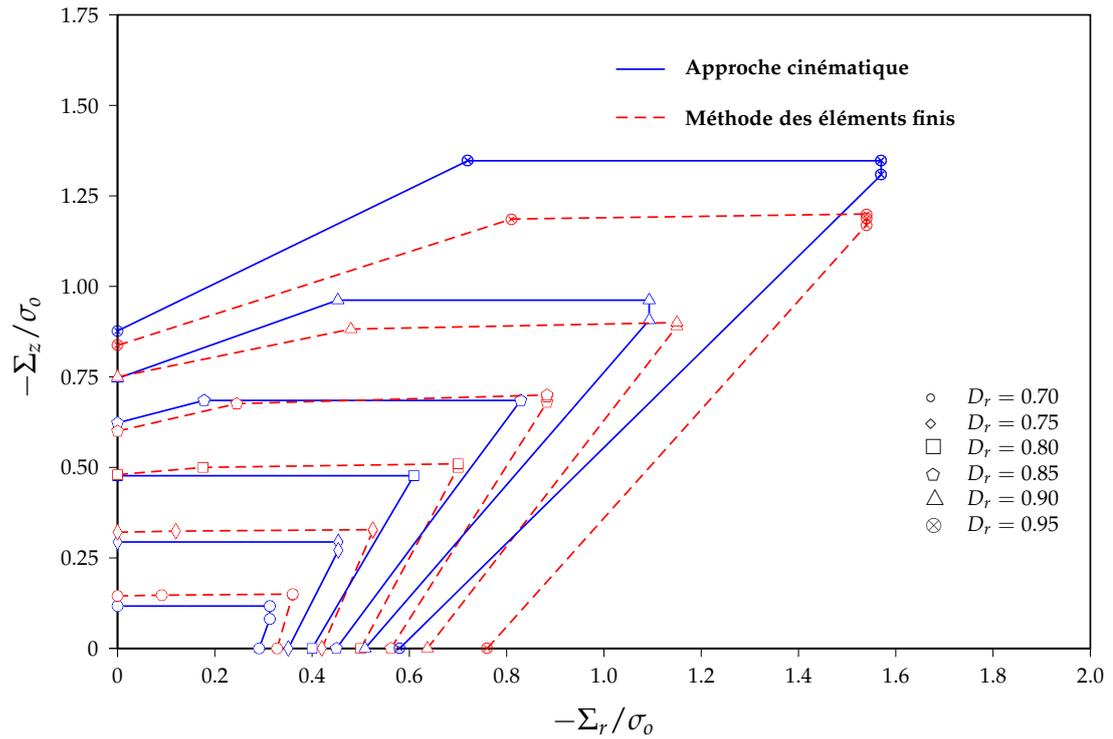


FIGURE 3.5 – Bornes supérieures obtenues pour des pré-comprimés isostatique de densité relative  $D_r = 0.7$  et  $D_r = 0.95$  correspondant respectivement au stade I et II de la compaction. Les lettres représentent le mécanisme de rupture considéré.

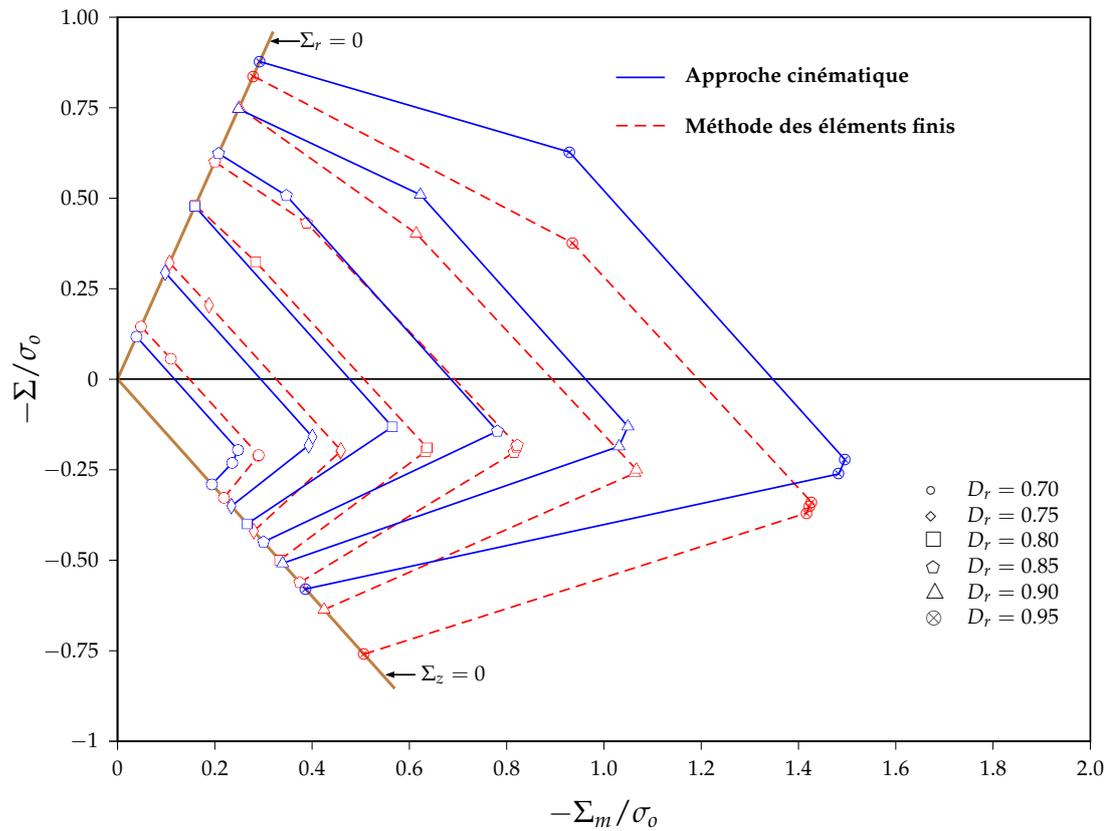
De manière similaire, les mécanismes de ruptures représentés sur les figures 3.2 et 3.3 conduisent, pour une densité relative fixée, à une borne supérieure de la surface de macroscopique cherchée. Par exemple, la figure 3.5 représente dans le plan des contraintes normalisés  $(\Sigma_r/\sigma_0, \Sigma_z/\sigma_0)$  les bornes supérieures auxquelles conduisent les mécanismes de rupture A, B, C, D, G, E, F et H pour des pré-comprimés chargés isostatiquement de densités relatives  $D_r = 0.7$  (stade I) et  $D_r = 0.95$  (stade II).

Des estimations par l'extérieur des surfaces de charge macroscopiques pour diverses valeurs de la densité relative et pour les deux modes de compaction (isostatique et en matrice) peuvent être obtenues en suivant la même procédure qui vient d'être détaillée pour le mécanisme de rupture A. Les résultats ainsi obtenus sur les surfaces de charge macroscopiques sont représentées sur la figure 3.6 pour des pré-comprimés obtenus par compression isostatique et sur la figure 3.7 pour des pré-comprimés obtenus par compression en matrice. Dans ces figures, les surfaces de charge macroscopiques sont tracées dans les espaces  $(\Sigma_r/\sigma_0, \Sigma_z/\sigma_0)$  et  $(\Sigma_m/\sigma_0, \Sigma/\sigma_0)$  et sont confrontées aux résultats fournis par des calculs aux éléments finis effectués directement sur la cellule de base. Pour la clarté des figures, les lettres représentatives des mécanismes de rupture ne sont pas mentionnées sur les segments de droite. Les résultats obtenus par l'approche cinématique sont en accord avec les prédictions éléments finis. Sur la figure 3.7, les résultats obtenus par les deux approches au stade I de la compaction sont plus précis qu'au stade II.

Nous pensons qu'il est aussi instructif de comparer les résultats fournis par l'approche cinématique avec deux modèles de comportement plastiques issus d'analyses micromécaniques, que sont le modèle FKM (Fleck *et al.*, 1992) et le modèle de Gurson (Gurson, 1977). Le modèle FKM a déjà été mentionné et commenté à la section 1.5.2. Quant au célèbre modèle de Gurson très utilisé en rupture ductile des matériaux, nous y reviendrons en deuxième partie de ce mémoire. Le modèle FKM (1.9) traite essentiellement du début de la densification du milieu granulaire jusqu'à des densités relatives de l'ordre de 0.9. Il s'ensuit que ce modèle ne convient que pour le stade I de la compaction. Quant au modèle de Gurson (1.6), il est actuellement largement admis qu'il n'est approprié que pour les matériaux poreux de densité relative voisine de l'unité. Il s'ensuit alors que le modèle de Gurson ne pourrait convenir que pour le stade II de la compaction. La figure 3.8 regroupe à des fins de comparaison l'ensemble des résultats pour des valeurs de la densité relative  $D_r$  prises égales à 0.7, 0.8 et 0.95.

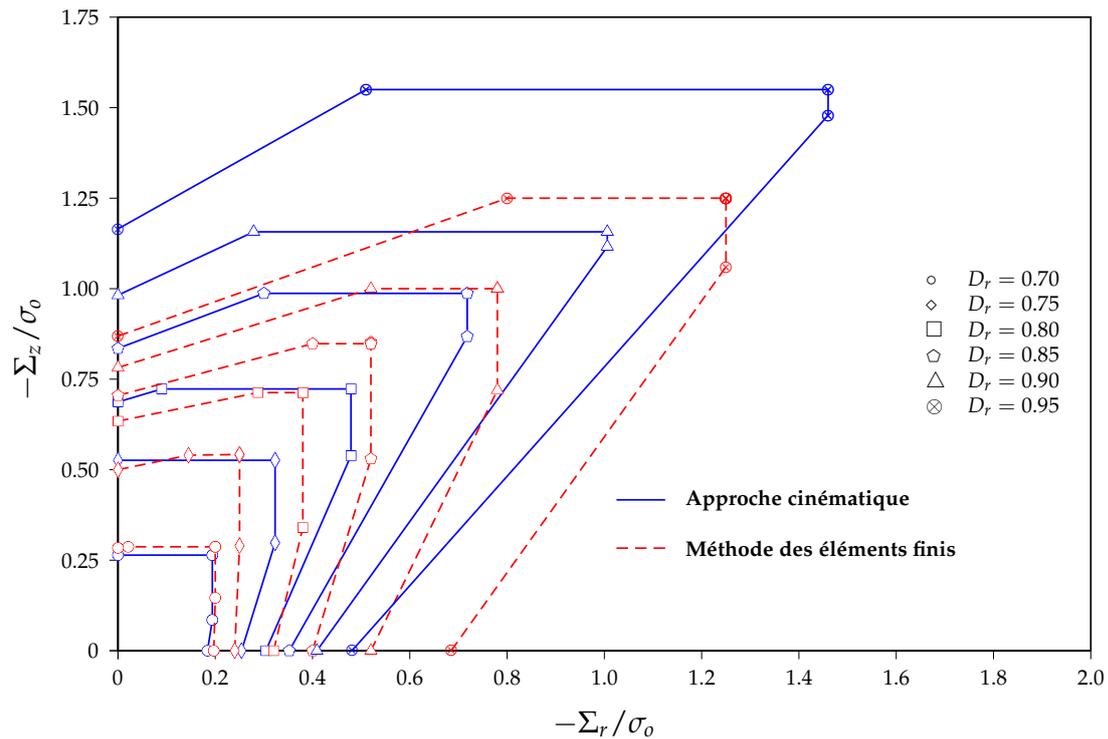


(a)

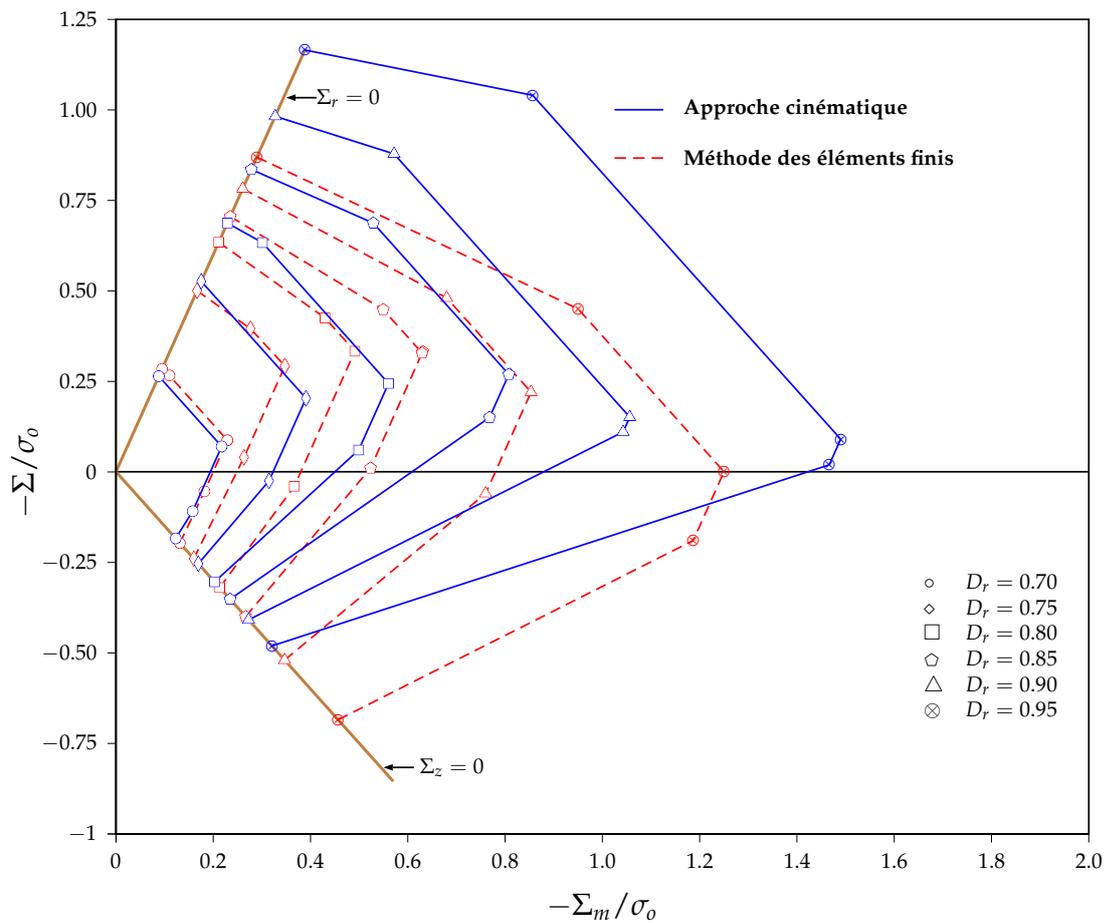


(b)

FIGURE 3.6 – Surfaces de charge macroscopiques pour des pré-comprimés hydrostatiques à différentes densités relatives : (a) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques radiale  $\Sigma_r$  et axiale  $\Sigma_z$  ; (b) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques moyenne  $\Sigma_m$  et déviatorique  $\Sigma$ .

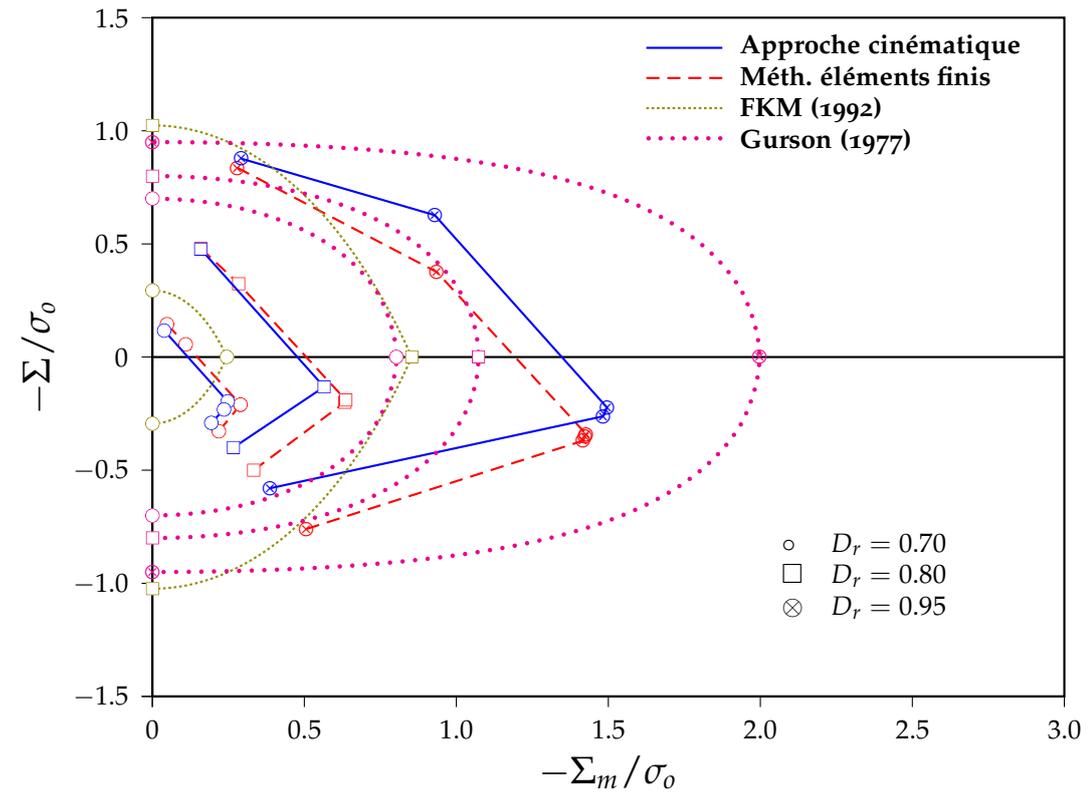


(a)

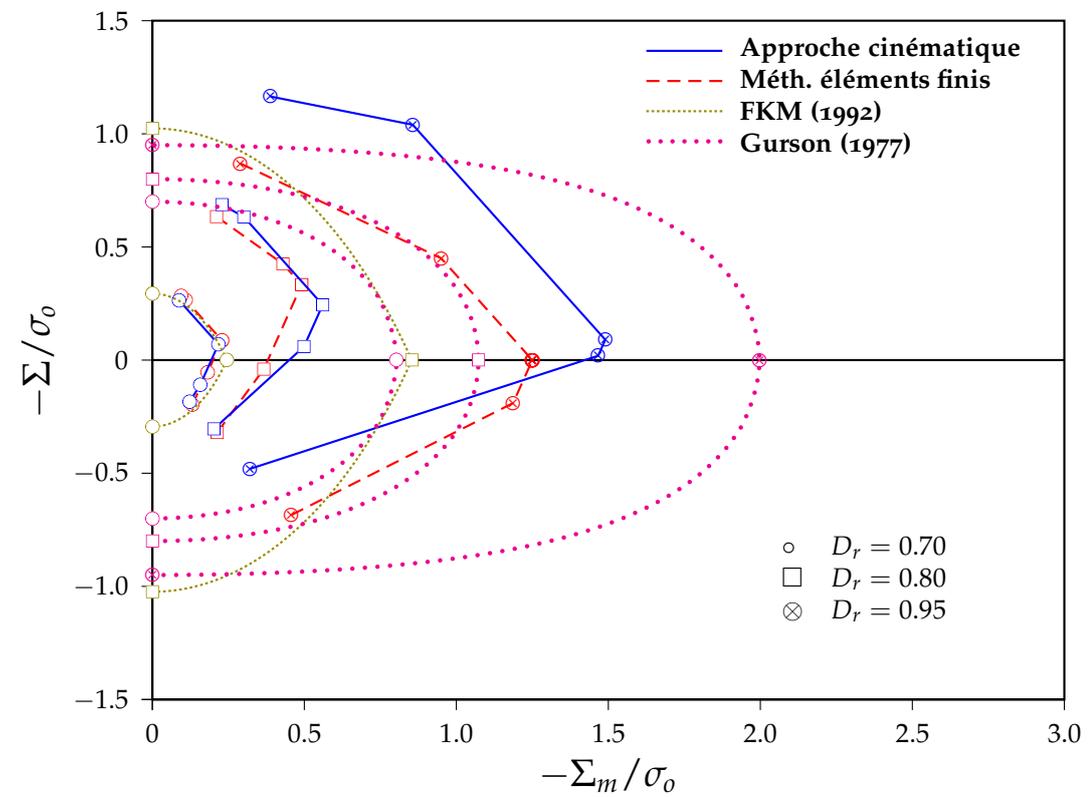


(b)

FIGURE 3.7 – Surfaces de charge macroscopiques pour des pré-comprimés obtenus par compression en matrice à différentes densités relatives : (a) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques radiale  $\Sigma_r$  et axiale  $\Sigma_z$ ; (b) surface de charge dans le plan des contraintes macroscopiques moyenne  $\Sigma_m$  et déviatorique  $\Sigma$ .



(a)



(b)

FIGURE 3.8 – Surfaces de charge macroscopiques à des densités relatives  $D_r = 0.7, 0.8$  et  $0.95$  pour des pré-comprimés obtenus par : (a) compression isostatique ; (b) compression en matrice. Confrontation aux modèles FKM (Fleck et al., 1992) et au modèle de Gurson (1977).



## **Deuxième partie**

# **ENDOMMAGEMENT ET RUPTURE DUCTILE DES MATÉRIAUX**



# MODÈLES MÉCANIQUES POUR 4 L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE

## SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION	75
4.2	MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ENDOMMAGEABLES	76
4.3	APPROCHE MICROMÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE	77
4.3.1	Mécanismes physiques de l'endommagement ductile	78
4.3.2	Le modèle couplé de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN)	86
4.3.3	Autres extensions du modèle de Gurson	90
4.4	PRISE EN COMPTE DU TROISIÈME INVARIANT	93
4.4.1	Motivations et modèles récents	93
4.4.2	Le modèle de Xue (2007)	95
4.4.3	Le modèle de Nahshon et Hutchinson (2008)	96
4.4.4	Le potentiel de McElwain <i>et al.</i> (2006)	97

Ce chapitre se propose de présenter la mécanique de la rupture ductile des matériaux en se focalisant sur les aspects théorique et modélisation. Nous commençons par rappeler succinctement les deux approches employées pour modéliser la rupture ductile des matériaux. Les principaux mécanismes menant à la rupture ductile des matériaux sont exposés ainsi que quelques modèles pour décrire chacun d'eux. Le chapitre finit par présenter les dernières contributions issues de la littérature pour reproduire le comportement à la rupture des matériaux.



## 4.1 INTRODUCTION

Avant qu'ils ne se rompent, les matériaux sont le siège d'endommagements, sources de dégradations continues de leurs propriétés mécaniques. Mieux maîtriser ces endommagements constitue pour les chercheurs et les industriels concernés un objectif essentiel. Généralement, la mécanique de la rupture des matériaux se subdivisent en deux disciplines que sont *la mécanique de la rupture fragile* et *la mécanique de la rupture ductile*. Ce qui différencie ces disciplines est le rôle que joue la plasticité au cours de ces deux modes de rupture. Pour les matériaux fragiles, la rupture est caractérisée par le clivage des liaisons interatomiques induisant une propagation brutale sans déformations plastiques appréciables au sein du matériau. Dans ce cas, le dommage passe brusquement de la valeur zéro à sa valeur critique de rupture finale d'une manière quasi instantanée. Quant aux matériaux ductiles, essentiellement les matériaux métalliques, ils sont le siège d'un endommagement progressif au cours d'importantes déformations plastiques avant la rupture. Le processus physique d'endommagement qui conduit à la rupture de matériaux ductiles peut être décomposé en trois phases élémentaires que sont l'amorçage (ou nucléation/germination) de microcavités, puis la croissance et la coalescence de celles-ci au cours de la déformation plastique. Afin de modéliser les trois mécanismes physiques d'endommagement ductile, l'approche locale de la rupture ductile a été développée. Cette méthodologie basée sur une *approche micromécanique* cherche à modéliser avec plus de précision les mécanismes de la rupture ductile. Elle est fondée sur des concepts mathématiques rigoureux d'homogénéisation permettant d'évaluer les variables mécaniques (contraintes, déformations, écrouissage ...) et les indicateurs d'endommagement (porosité, variables d'endommagement scalaire ou tensorielles, facteurs de forme des cavités, leurs espacements ...) en chaque point de la structure.

Dans la littérature, l'analyse de l'endommagement ductile est aussi abordée par *l'approche des milieux continus endommageables*, fondée sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Contrairement à l'approche micromécanique, l'approche des milieux continus endommageables est basée principalement sur des considérations "phénoménologiques". Toutefois, dans la plupart des cas, ces deux démarches comprennent une surface d'écoulement plastique (critère de plasticité) et des lois d'évolution des variables internes (plasticité, endommagement). En plus des différences dans les fondements théoriques sur lesquels se basent les deux approches, il est à préciser que la variable d'endommagement qui caractérise l'approche micromécanique est la fraction volumique des vides (ou porosité), alors que pour l'approche phénoménologique la variable d'endommagement peut être la porosité ou toute une autre variable scalaire ou tensorielle caractérisant la dégradation des propriétés mécaniques du matériau (abaissement de son module de rigidité, de sa limite d'écoulement ...) sous un chargement. À l'instar de ces deux théories, plusieurs modèles ont été formulés et qu'on peut classer en deux catégories que sont les modèles *couplés* pour lesquels l'écoulement plastique est couplé à l'endommagement par l'intermédiaire d'un critère, et les modèles *non couplés* pour lesquels les lois d'évolution de l'endommagement sont découplées de la loi de comportement du matériau.

## 4.2 MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS ENDOMMAGEABLES

La mécanique des milieux continus endommageables fait usage des principes de la thermodynamique des processus irréversibles qui repose sur la méthode de l'état local. Cette dernière postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point et à un instant donné est complètement défini par la connaissance des valeurs à cet instant d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré. Les phénomènes physiques sont décrits plus ou moins finement selon le choix de la nature et du nombre des variables d'état, appelées aussi variables thermodynamiques. Ce sont des variables observables (par exemple la température, la déformation totale) et les variables internes (la déformation plastique, la déformation thermoélastique, l'écroutissage, l'endommagement). Les processus ainsi définis sont thermodynamiquement admissibles, si à chaque instant de l'évolution, l'inégalité de Clausius-Duhem est satisfaite. Cette inégalité fournit une condition nécessaire de l'existence d'un potentiel thermodynamique  $\Psi$  qui dépend des variables d'état et duquel dérivent les lois d'état. Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit

$$-\rho (\dot{\Psi} + s \dot{T}) + \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0 \quad (4.1)$$

où  $\rho$ ,  $s$ ,  $T$  et  $\mathbf{q}$  désignent respectivement la masse volumique, l'entropie massique, la température et le vecteur courant de chaleur reçu par le matériau. Considérant  $\mathbf{E}^e$  le tenseur des déformations thermoélastiques et  $V_k$  des variables internes représentant des phénomènes tels que l'écroutissage, l'endommagement, la rupture ..., la connaissance de  $\Psi = \Psi(\mathbf{E}^e, T, V_k)$  permet d'explicitier les lois de la thermoélasticité

$$\boldsymbol{\Sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^e} \quad , \quad s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (4.2)$$

et les variables forces thermodynamiques associées aux variables internes  $V_k$

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \quad (4.3)$$

L'ensemble des relations (4.2) et (4.3) constituent les lois d'état.

Dans le contexte de la thermodynamique des processus irréversibles, [Lemaitre et Chaboche \(1988\)](#) ont défini l'endommagement comme la détérioration progressive du matériau précédant la rupture macroscopique. D'après [Kachanov \(1986\)](#), l'effet de l'endommagement est incorporé dans la loi de comportement du matériau à l'aide du concept de *contrainte effective* et du principe d'*équivalence en déformation* ([Lemaitre et Chaboche, 1988](#)). Ainsi, deux états doivent être considérés : le premier est l'état endommagé sollicité par la contrainte réelle et le second est un état virtuel non endommagé soumis à la contrainte effective. Par l'hypothèse de l'équivalence en déformation, la contrainte usuelle est remplacé par la contrainte effective dans la loi de comportement qui s'exprime par

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{1 - D} \quad (4.4)$$

où  $D$  est la variable d'endommagement :  $D = 0$  pour un matériau non endommagé et  $D = 1$  pour un matériau totalement endommagé. En choisissant un potentiel thermodynamique de la forme

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{E}^e, D, \dot{E}_{eq}^p) &= \Psi_e(\mathbf{E}^e, D) + \Psi_p(D, \dot{E}_{eq}^p) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \mathbf{C}^e(D) : \mathbf{E}^e + \frac{S_o}{s_o + 1} \left( -\frac{Y}{S_o} \right)^{s_o+1} \dot{E}_{eq}^p\end{aligned}\quad (4.5)$$

où  $S_o$  et  $s_o$  sont deux paramètres matériau d'endommagement ;  $\dot{E}_{eq}^p$  est la déformation plastique équivalente au sens de von Mises ;  $\mathbf{C}^e(D)$  est le module de rigidité effectif et  $Y$  est la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement  $D$ ,

Lemaitre (Lemaitre et Chaboche, 1988) donne l'évolution de l'endommagement  $D$  par

$$\dot{D} = \left( -\frac{Y}{S_o} \right)^{s_o} \dot{E}_{eq}^p \quad (4.6)$$

avec

$$Y = -\frac{\Sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (4.7)$$

où  $\Sigma_m$  et  $\Sigma_{eq}$  sont respectivement la contrainte moyenne et équivalente ;  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson.

Le modèle couplé de Rousselier (1987), utilisé dans la pratique courante, fait partie des modèles les plus simples qui puissent être obtenus à partir des principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Le potentiel thermodynamique choisi est découpé en trois terme comme suit

$$\Psi(\mathbf{E}^e, D, \dot{E}_{eq}^p) = \Psi_e(\mathbf{E}^e) + \Psi_p(\bar{\epsilon}^p) + \Psi_D(D) \quad (4.8)$$

où  $\bar{\epsilon}^p$  est une variable d'écroutissement et  $D$  une variable d'endommagement choisie égale à la porosité  $f$  du matériau considéré. Le potentiel plastique proposé par Rousselier (1987) pour les matériaux endommageables s'écrit

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\epsilon}^p, f) = \frac{\Sigma_{eq}}{(1-f)} + \kappa \sigma_1 f \exp\left(\frac{\Sigma_m}{(1-f)\sigma_1}\right) - \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p) \quad (4.9)$$

où  $\kappa$  et  $\sigma_1$  sont des paramètres qui dépendent du matériau ;  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente d'écoulement du matériau. Bien qu'il soit obtenu par une approche thermodynamique phénoménologique, Rousselier (1987) a montré, sous certaines conditions, que le potentiel plastique de son modèle est très similaire à celui de Gurson (1977) (présenté dans la prochaine section) qui est issu d'une approche purement micromécanique.

### 4.3 APPROCHE MICROMÉCANIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT DUCTILE

De nombreux chercheurs ont proposé des modèles de rupture ductile fondés sur des concepts rigoureux de micromécanique. Leur objectif était de s'intéresser à l'endommagement des matériaux à des échelles très fines pour remonter ensuite à l'échelle macroscopique. La formulation des modèles dans le cadre de l'approche micromécanique utilise trois étapes

de passage micro-macro que sont la représentation (définition de la microstructure ou, pour employer le langage d'homogénéisation, du volume élémentaire représentatif (VER)), la localisation (expression des données sur le VER en fonction des grandeurs macroscopiques) et enfin l'homogénéisation (définition des comportements moyens locaux sur le VER et détermination des grandeurs macroscopiques du VER en prenant des moyennes appropriées).

Un des premiers travaux pionniers en la matière est dû à [McClintock \(1968\)](#) qui a proposé un modèle micromécanique de croissance de cavité cylindrique dans une matrice infinie rigide parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises. Par la suite, [Rice et Tracey \(1969\)](#) ont proposé un modèle fondé sur la croissance d'une cavité sphérique dans une matrice infinie rigide parfaitement plastique régie également par le critère de von Mises. Le résultat majeur de cette étude a été de mettre en évidence l'importance déterminante, sur la croissance des vides, de la *triaxialité* des contraintes (rapport de la contrainte macroscopique moyenne  $\Sigma_m$  à la contrainte macroscopique équivalente de von Mises  $\Sigma_{eq}$ ). La particularité des critères de type Rice et Tracey est qu'ils sont des modèles non couplés pour lesquels l'écoulement plastique n'est pas couplé à l'endommagement par l'intermédiaire d'un critère. Par conséquent, ces modèles ne sont que des indicateurs d'endommagement qui n'influent pas sur la loi de comportement plastique du matériau global de von Mises.

Une seconde contribution, d'importance fondamentale celle-là, est due à [Gurson \(1975; 1977\)](#)<sup>1</sup>. Elle a consisté en une analyse limite approchée d'un VER représentatif du milieu poreux. Gurson a considéré un vide sphérique dans une matrice sphérique rigide parfaitement plastique, concentrique, de dimension finie, obéissant au critère de von Mises et soumise à un chargement quelconque. L'avantage du VER considéré était que la porosité  $f$  pouvait alors prendre des valeurs arbitraires. Gurson obtient une surface d'écoulement macroscopique, qui dépend de la contrainte équivalente de von Mises  $\Sigma_{eq}$ , de la contrainte hydrostatique  $\Sigma_m$ <sup>2</sup>, de la limite d'écoulement de la matrice métallique  $\sigma_o$  et de la fraction volumique des vides  $f$ . Dans ce critère, la variable d'endommagement  $f$  se trouve couplée à la contrainte  $\Sigma$  et à la variable d'écrouissage  $\sigma_o$ . Par la suite, le modèle de Gurson a subi de nombreuses modifications, avec notamment le remplacement de la limite d'écoulement  $\sigma_o$  par la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  d'une matrice écrouissable et également l'introduction d'une porosité critique associée au début de coalescence.

### 4.3.1 Mécanismes physiques de l'endommagement ductile

Il est maintenant bien admis dans la littérature que les mécanismes de rupture ductile se décompose en trois étapes principales que sont la nucléation (ou germination) de cavités de petites tailles, la croissance et la coalescence de celles-ci impliquant l'amorçage d'une fissure macroscopique dans la structure. Ces étapes ne se succèdent que si on s'intéresse à l'étude d'une cavité isolée. Cependant, dans la plupart des matériaux métalliques, les phases de nucléation et de croissance ne se déroulent pas successivement au cours de la déformation.

1. Doctorant de Rice J.R.

2. Du fait qu'une telle contrainte peut, dans un milieu poreux, provoquer un écoulement plastique via la croissance des vides.

Néanmoins, les trois étapes de la rupture ductile sont décrites séparément dans la suite ainsi que de quelques modélisations correspondant à chacune d'elles.

### Nucléation

Les matériaux métalliques sont considérés comme des milieux hétérogènes, constitués d'une matrice élasto-plastique et de particules de seconde phase (ou inclusions) quasi-rigides. Dans les aciers, ces inclusions sont principalement des oxydes, des sulfures ou encore des oxysulfures et des nitrures. La nucléation est la phase qui correspond à la création de micro-cavités, généralement au niveau de ces inclusions, soit par leur fragmentation, soit par décohésion de l'interface inclusion-matrice, qui présente de faibles propriétés mécaniques, voir figure 4.1. L'amorçage des cavités provient d'une localisation des champs de contrainte et déformation au voisinage des inclusions.

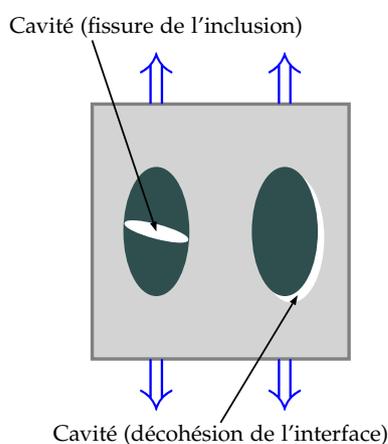


FIGURE 4.1 – Schématisation du mécanisme de germination des cavités.

En général, la nucléation survient par la fissuration des plus grosses particules pour donner naissance à une première population de cavités ( $\approx 10 - 100\mu m$ ), alors qu'une seconde population de vides ( $\approx 1\mu m$ ) va se créer au niveau de plus petites particules par décohésion à l'interface entre ces particules et la matrice métallique. Ce dernier mode de nucléation est provoqué soit par écartement des deux faces de la particule et de la matrice initialement en contact, soit par glissement relatif des deux faces l'une sur l'autre sans ouverture de la cavité. Toutefois la nucléation peut également s'effectuer par fissuration de la matrice au voisinage immédiat d'une particule, ce qui est difficilement observable expérimentalement lorsque la matrice est homogène. Il est à noter que dans la phase de nucléation les cavités sont tellement petites qu'elles ne modifient pas la réponse macroscopique. Ceci revient à considérer que les propriétés élastiques et les propriétés plastiques ne sont pas affectées.

La phase de nucléation de cavités est modélisée au départ par des méthodes énergétiques. Un des premiers modèles de germination est dû à [Gurland et Plateau \(1963\)](#) qui ont proposé un critère énergétique de nucléation par rupture de particules de forme sphérique. Dans le cas de la décohésion de l'interface matrice-inclusion, [Goods et Brown \(1979\)](#) proposent une méthode énergétique qui, en première approche, surestime la déformation plastique de nucléation. En exploitant les résultats de [Gurland et Plateau \(1963\)](#), une étude mésoscopique a été

proposée par Argon (1976) et ensuite reprise dans une étude finalisée par Needleman (1987). Le critère mésoscopique d'une cellule est étudié en grandes transformations. Cette étude permet d'établir un comportement en contrainte. D'autres modèles ont été obtenus en étudiant expérimentalement la nucléation dans certains matériaux (Beremin, 1981). Needleman et Rice (1978) ont développé un critère de nucléation phénoménologique piloté par la déformation plastique équivalente dans la matrice  $\bar{\epsilon}^p$  et la contrainte moyenne  $\Sigma_m$ . Ces auteurs supposent que la première source de création de cavités tient à la décohésion aux interfaces d'inclusions de seconde phase et le terme de nucléation correspondant est donc piloté par la composante hydrostatique de la contrainte macroscopique. Quant à la seconde source de création de cavités tient à la matrice elle-même : des cavités se forment lorsque la déformation dans la matrice atteint une déformation limite. Le terme de nucléation correspondant est donc piloté par la déformation plastique équivalente de la matrice. Le modèle regroupant les deux sources de nucléation est de la forme

$$\dot{f}_{nucléation} = \mathcal{A} \dot{\bar{\epsilon}}^p + \mathcal{B} \dot{\Sigma}_m \quad (4.10)$$

où  $\dot{f}_{nucléation}$  désigne l'évolution de la porosité due à l'amorçage de nouveaux vides au cours d'un écoulement plastique ; Les coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont définis comme suit :

- Les matériaux ductiles dont la germination est uniquement contrôlée par la déformation plastique peuvent être modélisés en prenant  $\mathcal{A} > 0$  et  $\mathcal{B} = 0$ . Chu et Needleman (1980) ont supposé que l'amorçage des vides suit une distribution normale avec une déformation moyenne  $\epsilon_N$  et un écart type  $s_N$  :

$$\mathcal{A} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\epsilon}^p - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right], \mathcal{B} = 0 \quad (4.11)$$

où  $f_N$  est la fraction volumique des vides dont l'amorçage est piloté en déformation.

- Dans le cas de matériaux pour lesquels l'amorçage est seulement piloté par la contrainte normale maximale, il faut prendre  $\mathcal{A} = 0$  et  $\mathcal{B} > 0$ . Needleman et Rice (1978) ont proposé la somme  $(\Sigma_m + \bar{\sigma})$ , avec  $\bar{\sigma}$  est la contrainte d'écoulement de la matrice, comme une mesure approchée de cette contrainte maximale. De manière analogue au cas précédent, on trouve :

$$\mathcal{A} = 0, \mathcal{B} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{(\Sigma_m + \bar{\sigma}) - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (4.12)$$

où  $f_N$  est la fraction volumique des vides dont la germination est pilotée en contrainte,  $\sigma_N$  est la contrainte moyenne et  $s_N$  est l'écart type.

- Dans le cas d'une germination contrôlée par la déformation plastique équivalente et par la contrainte normale maximale, le coefficient  $\mathcal{A}$  est donné par l'équation (4.11) et le coefficient  $\mathcal{B}$  par l'équation (4.12).

Il est à remarquer que les valeurs non nulles de  $\mathcal{A}$  et respectivement  $\mathcal{B}$  sont utilisées si  $\bar{\epsilon}^p$  et respectivement  $(\Sigma_m + \bar{\sigma})$  excèdent leurs valeurs maximales moyennes.

### Croissance des cavités

C'est la phase qui correspond au développement proprement dit des cavités. Cette croissance est pilotée essentiellement par un écoulement plastique traduisant un écrouissage de la

matrice métallique qui entoure ces cavités (cf. figure 4.2). Cet écoulement n'est pas uniforme et dépend beaucoup de l'état de contrainte et de la forme de la cavité. Dans la phase de croissance, les cavités se comportent comme des micro fissures et les inclusions situées à l'intérieur ne jouent plus un rôle prépondérant si la décohésion matrice-inclusion est totale. Néanmoins, il importe dans certains cas d'en tenir compte. En effet, si la décohésion entre la particule et la matrice n'est pas complète, le volume des cavités créées est très inférieur à celui de la particule qui lui a donné naissance. Dans cette phase l'interaction entre les cavités et la plasticité de la matrice est essentielle. Dans la situation où la fraction volumique des vides est faible, l'évolution de leurs volumes peut être considérée indépendante de celle des cavités situées dans leurs voisinages. Cependant, dès que l'ordre de grandeur des propriétés devient relativement élevé, les vides commencent à interagir et une analyse plus fine incluant ces effets doit être effectuée.

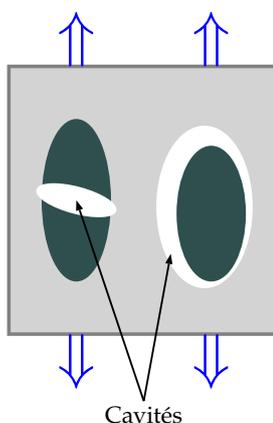


FIGURE 4.2 – Schématisation du mécanisme de croissance des cavités.

La croissance des volumes des cavités est sensible à l'état de contrainte qui règne autour d'elles. McClintock (1968) a proposé une loi de croissance d'une cavité cylindrique de rayon moyen  $R$  isolée dans un milieu infini. La matrice métallique a un comportement rigide parfaitement plastique obéissant au critère de plasticité de von Mises. Le milieu est soumis à un chargement à l'infini composé d'une déformation  $\dot{E}_z$  selon l'axe de révolution de la cavité cylindrique et d'une contrainte principale radiale  $\Sigma_r$ . Avec ces considérations, la loi d'évolution du rayon  $R$  de la cavité est donnée par

$$\frac{\dot{R}}{R \dot{E}_z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh \left( \sqrt{3} \frac{\Sigma_r}{\Sigma_z - \Sigma_r} \right) - \frac{1}{2} \quad (4.13)$$

Rice et Tracey (1969) ont établi un modèle de croissance d'une cavité sphérique de rayon moyen  $R$  isolée dans un milieu infini. Le milieu est soumis à un chargement axisymétrique de traction à l'infini de contraintes principales radiale  $\Sigma_r$  et axiale  $\Sigma_z$ . Dans le cas d'une matrice métallique rigide parfaitement plastique obéissant au critère de plasticité de von Mises et de limite d'écoulement  $\sigma_o$ , Rice et Tracey (1969) ont proposé le modèle suivant :

$$\frac{\dot{R}}{R} = \mathcal{K} \dot{E}_{eq}^p \exp \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_o} \right) \quad (4.14)$$

où  $\dot{E}_{eq}^p$  est la déformation plastique équivalente macroscopique et  $\mathcal{K} = 0.283$  est une constante. Dans le cas d'une matrice écrouissable la relation précédente se met sous la forme

$$\frac{\dot{R}}{R} = \mathcal{K} \dot{E}_{eq}^p \exp\left(\frac{3}{2} T\right) \quad (4.15)$$

où la triaxialité  $T$  qui règne dans le matériau est définie par le rapport de la contrainte moyenne sur la contrainte équivalente  $T = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$ . Le taux de triaxialité des contraintes intervient sous forme exponentielle et tient donc une place importante sur la croissance des vides. Afin de vérifier la loi de Rice et Tracey (4.14)-(4.15) et mettre en évidence le rôle de la triaxialité sur la croissance des vides, les membres du groupe Beremin (Beremin, 1980; 1981) ont mené une étude expérimentale sur des éprouvettes axisymétriques entaillées de traction. Il en ressort que la forme de cette loi est bien applicable expérimentalement mais avec des valeurs de  $\mathcal{K}$  différentes de celle de Rice et Tracey. D'autres formulations du modèle de Rice et Tracey sont ensuite établies (Gilormini *et al.*, 1988; Thomason, 1990; Huang, 1991). Par exemple, Huang (1991) montre que la valeur du coefficient  $\mathcal{K}$  trouvée par Rice et Tracey (1969) est trop faible pour des taux de triaxialité modérés et élevés. Huang (1991) a calculé de façon plus précise la valeur de  $\mathcal{K}$  et a proposé la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} &= 0.427 \dot{E}_{eq}^p \exp\left(\frac{3}{2} T\right), & \text{pour } T \geq 1; \\ \frac{\dot{R}}{R} &= 0.427 \dot{E}_{eq}^p T^{1/4} \exp\left(\frac{3}{2} T\right), & \text{pour } 1/3 \leq T \leq 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Il est à noter que les modèles de croissance des vides présentés précédemment sont considérés non couplés car il n'y a pas de couplage entre l'endommagement et le comportement du matériau. Leur inconvénient principal était de ne pas déboucher sur un modèle de comportement pour un matériau poreux quelconque, la considération d'un milieu infini entraînant automatiquement la nullité de la porosité  $f$ .

### La coalescence des cavités

C'est la dernière phase du processus d'endommagement qui correspond à la localisation de la déformation entre les cavités pour créer des fissures macroscopiques conduisant à la rupture de l'élément de volume. La phase de coalescence des vides est très certainement la moins comprise du processus microscopique d'endommagement ductile. Les raisons sont dues aux difficultés expérimentales d'observation d'un tel phénomène instantané et localisé, la diversité de modes de coalescence et le nombre important de paramètres à prendre en compte, parmi lesquels la forme des cavités (Koplik et Needleman, 1988; Gologanu *et al.*, 1993; 1997), l'espacement entre les vides (Benzerga *et al.*, 1999) ainsi que la présence de nombreuses cavités très petites autour de cavités plus grandes (Perrin et Leblond, 1990). De nombreux auteurs (Tvergaard, 1982; Koplik et Needleman, 1988; Gologanu *et al.*, 1997) ont eu recours à des calculs numériques par éléments finis dans le but de surmonter les complexités expérimentales et pour mieux comprendre le phénomène de coalescence. Sur ce sujet, Koplik et Needleman (1988) ont apporté une contribution majeure en analysant les résultats de simulations numériques effectuées sur des cellules élémentaires (VER) de forme cylindriques soumises à une

traction axisymétrique et constituées d'une matrice élastoplastique contenant un vide en son centre. La coalescence des cavités se caractérise par une soudaine localisation de la déformation plastique dans le ligament de matière entre les vides voisins situés perpendiculairement à l'axe de chargement, la matrice à l'extérieur de cette zone ligamentaire devenant rigide.

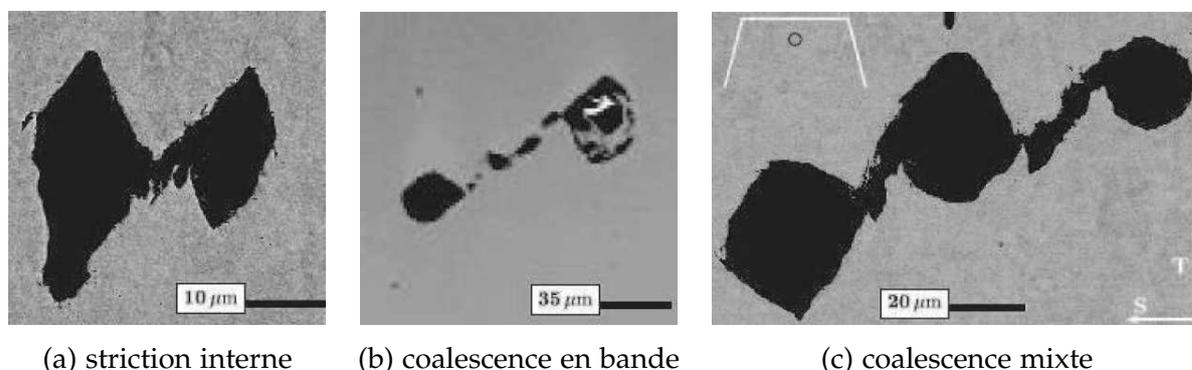


FIGURE 4.3 – Différents modes de coalescence observés par Benzerga (2000).

De nombreux paramètres influent sur la coalescence et un certain nombre de modes de coalescence ont été proposés dans la littérature. À des taux de triaxialité élevés (lorsque le chargement est principalement une traction et presque uniforme le long des trois directions principales), le premier mode correspond à une striction interne du ligament de matière entre les vides de première population après la phase de croissance (cf. figure 4.3-a). À des taux de triaxialité faibles (comprenant le cisaillement pur) ou encore légèrement négative, le second mode de coalescence est la formation d'une bande de cisaillement très localisé entre des cavités de première population (cf. figure 4.3-b). La localisation de la déformation entre ces cavités peut être interprétée soit comme la cause, soit comme la conséquence de la nucléation et de la croissance des microvides de deuxième population. Enfin, de nombreux auteurs proposent de coupler ces deux modes principaux de coalescence (cf. figure 4.3-c) : à la striction entre les grosses cavités de première population succède une localisation de la déformation plastique, associée éventuellement à une croissance instable d'une deuxième population de vides, qui se termine par la rupture des micro-ligaments par cisaillement.

La modélisation de la coalescence soulève deux problématiques. La première est la détermination d'un critère qui caractérise le début de ce phénomène. La seconde concerne l'élaboration d'un modèle capable de décrire le comportement du matériau du début de la coalescence jusqu'à la rupture finale.

**Critère de Rice et Tracey :** du modèle de croissance de Rice et Tracey (4.15) peut être construit un critère de coalescence des cavités fondé sur l'hypothèse suivante : pour un matériau et une direction de sollicitation donnés, la coalescence apparaît dès que le rapport du rayon actuel moyen  $R$  sur le rayon initial moyen  $R_o$  atteint une valeur critique  $(R/R_o)_c$ . Cette analyse conduit au critère de coalescence

$$\ln \left( \frac{R}{R_o} \right)_c = \int_1^2 \mathcal{K} \exp \left( \frac{3}{2} T \right) dE_{eq}^p \quad (4.17)$$

où l'état 1 correspond à la nucléation des cavités et l'état 2 à la rupture.

**Critère de Thomason:** Thomason (1968; 1985a;b; 1990) suppose que la coalescence se produit lorsque le ligament de matière entre les vides atteint sa charge limite plastique. Afin d'effectuer une analyse micromécanique du processus d'endommagement ductile, Thomason a considéré un VER prismatique carré contenant une cavité ellipsoïdale qui est censée bien représenter la forme des cavités d'après des observations métallographiques. Partant d'une analyse limite sur le VER, la condition critique de début de coalescence par striction interne de la matrice inter-cavités d'un matériau soumis à une traction uniaxiale peut s'écrire sous la forme suivante

$$\left[ \frac{0.1}{\left(\frac{R_2}{L-R_1}\right)^2} + \frac{1.2}{\left(\frac{R_1}{L}\right)^{1/2}} \right] \left[ 1 - \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} f_o\right)^{2/3} \left(\frac{R_1}{R_o}\right)^2 \exp(E_z) \right] = \frac{\Sigma_z}{\sigma_o} \quad (4.18)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont les demis-axes de la cavité dans les directions radiale et axiale respectivement ;  $R_o$  est le rayon initial du vide sphérique ;  $L$  et  $H$  sont respectivement la largeur et la hauteur du VER ;  $\sigma_o$  et  $\Sigma_z$  sont respectivement la limite d'écoulement de la matrice et la contrainte macroscopique dans la direction axiale ; et  $f_o$  est la porosité initiale du VER. Le critère de Thomason peut aussi être formulé différemment en introduisant les variables adimensionnelles  $\chi = R_1/L$ ,  $W = R_2/R_1$  et  $\lambda = H/L$  qui représentent respectivement la taille du ligament, le paramètre de forme de la cavité et l'espacement entre cavités.

**Critère de Perrin-Leblond :** en exploitant les observations de Koplik et Needleman (1988) en ce qui concerne l'existence d'une couche fortement poreuse située entre deux couches rigides au début de coalescence, Perrin (1992) a proposé d'appliquer la théorie de localisation de la déformation de Rudnicki et Rice (1975) (analyse revisitée par Perrin et Leblond (1993)) à une couche centrale poreuse. Cette couche dont le comportement obéit au modèle GTN (Gurson, 1977; Tvergaard, 1981; Tvergaard et Needleman, 1984) est située entre deux couches saines obéissant au critère de von Mises introduisant ainsi la notion de VER multicouche. Le critère s'écrit sous la forme

$$\left[ \frac{\Sigma_{eq}^{(p)}}{\sigma_o} - q_1 q_2 f^{(p)} \sinh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_o} \right) \right]^2 = \frac{3(1-\nu)\sigma_o}{E} q_1^2 q_2 (1-f^{(p)}) f^{(p)} \sinh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_o} \right) \times \left[ \cosh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_o} \right) - q_1 f^{(p)} \right] \quad (4.19)$$

où l'exposant ( $p$ ) fait référence à une quantité exprimée dans la couche poreuse ;  $q_1$  et  $q_2$  sont les coefficients de Tvergaard (1981) ; et  $f$  est la porosité de la couche poreuse.

**Modèle de Tvergaard-Needleman :** initialement élaboré pour corriger le critère de Gurson (1977) qui prédit mal la rupture finale du matériau, Tvergaard et Needleman (1984) ont proposé un modèle coalescence qui prend en compte l'évolution rapide de la porosité au cours de cette dernière phase de la rupture ductile. Cependant, ce modèle de coalescence ne présente

pas de restriction pour une utilisation avec un autre modèle de croissance. Ces auteurs remplacent la porosité  $f$  par une fonction effective  $f^*$  dont l'expression est donnée par (cf. figure 4.4)

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta (f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $\delta = (f_u - f_c)/(f_f - f_c)$  a été introduit pour représenter l'augmentation rapide de la porosité après coalescence;  $f_c$  et  $f_f$  désigne respectivement la porosité de début de coalescence et à la rupture; et  $f_u$  est la valeur que prendrait  $f^*$  lorsque l'élément de volume ne peut plus supporter de contraintes ( $\Sigma = 0$ ).

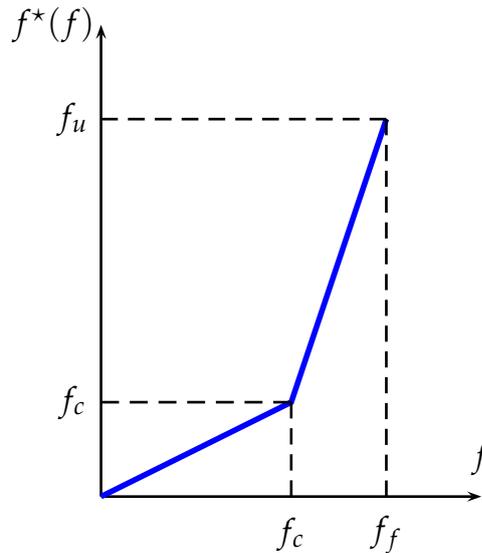


FIGURE 4.4 – Graphe de la fonction  $f^*(f)$ .

**Modèle de Benzerga :** en utilisant le critère de Thomason, Benzerga (2002) a élaboré un modèle complet de coalescence par striction. La possibilité du passage de la forme de la cavité au cours de la phase de coalescence d'un ellipsoïde à un cône à été prise en compte, d'une manière phénoménologique, en introduisant un facteur de forme  $\gamma$  variant de  $\gamma_c = 1/2$  pour une cavité de forme ellipsoïdale à  $\gamma_f = 1$  pour une cavité de forme conique. Benzerga (2002) propose alors l'expression suivante pour  $\gamma$

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_c & \text{si } \chi \leq \chi_c \\ \gamma_c + \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} (\chi - \chi_c) & \text{si } \chi > \chi_c \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $\chi_c$  est la taille du ligament au début de la coalescence. Benzerga et ses collaborateurs (Benzerga *et al.*, 1999; Benzerga, 2000; 2002; Benzerga *et al.*, 2004) proposent de remplacer la porosité  $f$  par la nouvelle variable interne  $\chi$ , qui semble plus appropriée pour décrire la striction du ligament, et de réécrire le critère de Thomason sous une forme plus générale :

$$\Phi^c(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \chi, W) = \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} + \frac{3}{2} \frac{|\Sigma_m|}{\bar{\sigma}} - \frac{3}{2} (1 - \chi^2) \mathcal{C}(\chi, W) \quad (4.22)$$

où

$$C(\chi, W) = 0.1 \left( \frac{\chi^{-1} - 1}{W^2 + 0.1 \chi^{-1} + 0.02 \chi^{-2}} \right)^2 + 1.3 \sqrt{\chi^{-1}} \quad (4.23)$$

Benzerga à complété le modèle en proposant des lois d'évolution des différentes variables internes :

$$\dot{\chi} = \frac{3}{4} \frac{\lambda}{W} \left( \frac{3\gamma}{\chi^2} - 1 \right) \dot{E}_{eq}^p + \frac{\lambda}{2\gamma} \dot{\gamma}, \quad \dot{W} = \frac{9}{4} \frac{\lambda}{\chi} \left( 1 - \frac{\gamma}{\chi^2} \right) \dot{E}_{eq}^p + \frac{W}{2\gamma} \dot{\gamma}, \quad \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \lambda \dot{E}_{eq}^p \quad (4.24)$$

qui représentent respectivement la loi d'évolution de la taille du ligament, du paramètre de forme de la cavité et de l'espacement entre cavités.

### 4.3.2 Le modèle couplé de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN)

Dans ce qui suit, une présentation du modèle de Gurson (1977) ainsi que les différentes améliorations qui lui ont été apportées par Tvergaard (1981; 1982) et Tvergaard et Needleman (1984) est exposé. Ce modèle, basée sur une approche micromécanique, comprend trois éléments : un critère de plasticité macroscopique ; une loi d'écoulement plastique macroscopique associée par normalité au critère ; enfin une loi d'évolution des variables internes que sont la porosité et la déformation plastique équivalente dans la matrice.

#### Le critère de plasticité

À l'aide des techniques d'homogénéisation, Gurson (1975; 1977) a proposé une loi de comportement macroscopique pour modéliser la déformation plastique d'alliages métalliques contenant des vides de formes sphérique. Dans son analyse le matériau poreux est représenté par une sphère poreuse ou un cylindre creux, le matériau constitutif de la matrice étant rigide parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises avec une limite d'écoulement  $\sigma_0$ . L'analyse limite de la sphère poreuse soumise à un chargement lointain axisymétrique conduit au critère macroscopique

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \sigma_0, f) = \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (4.25)$$

Il est important de noter que le critère (4.25) est une approximation par excès du critère macroscopique réel. Il faut remarquer également que ce critère dépend aussi bien de la contrainte hydrostatique  $\Sigma_m$  que la contrainte équivalente  $\Sigma_{eq}$ . Il ne dépend cependant pas du troisième invariant de contrainte  $\det \Sigma$ . La figure 4.5 montre des coupes de ce critère pour diverses valeurs de la porosité  $f$  dans le plan des contraintes  $(\Sigma_m, \Sigma_{eq})$ . On constate que plus la porosité est grande, plus le critère se rapproche de l'origine. Une autre représentation possible du critère peut s'effectuer dans l'espace des contraintes de Haigh-Westergaard rapporté au contraintes principales  $(\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III})$ , comme le montre la figure 4.6. La surface de charge est un ellipsoïde dans cet espace et les sections par le plan perpendiculaire à l'axe hydrostatique sont des cercles (plan octaédral).

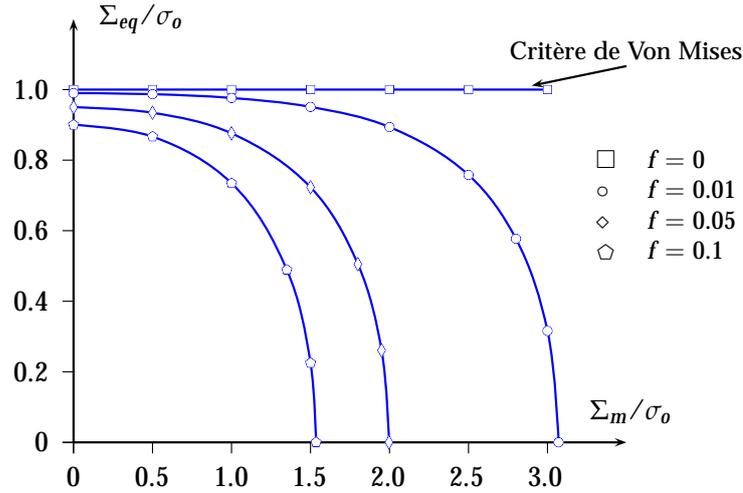


FIGURE 4.5 – Représentation du critère de Gurson pour diverses valeurs de la porosité  $f$  dans l'espace de contrainte normalisée  $(\Sigma_m/\sigma_0, \Sigma_{eq}/\sigma_0)$ .

Pour un matériau dense ( $f = 0$ ), le critère de Gurson se réduit, comme attendu, au critère de von Mises

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 - 1 = 0 \quad (4.26)$$

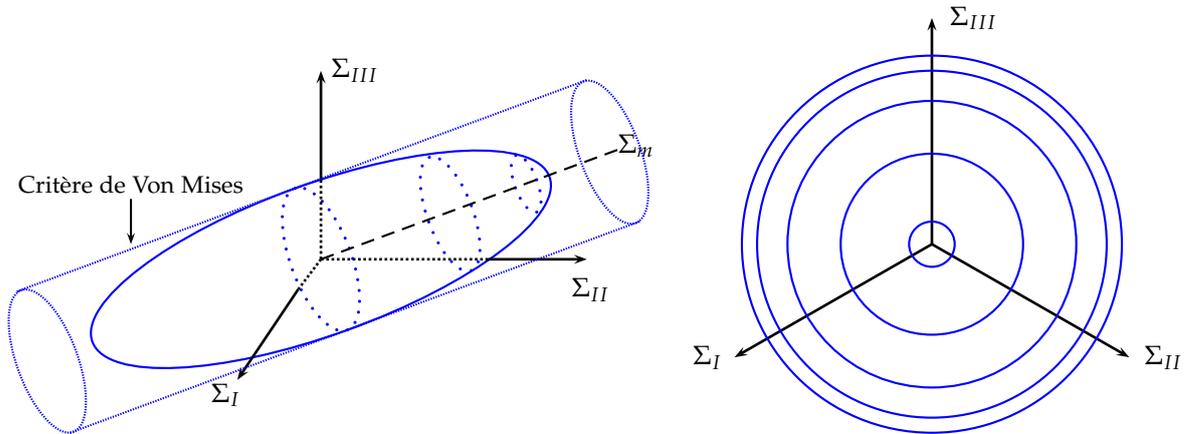


FIGURE 4.6 – Représentation du critère de Gurson dans l'espace de Haigh-Westergaard.

Sous contrainte purement hydrostatique (traction ou compression)  $\Sigma_{eq} \equiv 0$ , la plastification selon le critère de Gurson se produit pour la valeur maximale de

$$\Sigma_m^{max} = \frac{2}{3} \sigma_0 \ln\left(\frac{1}{f}\right) \quad (4.27)$$

ce qui représente la solution analytique exacte du problème de la sphère creuse sous pression. Sous contrainte purement déviatorique ( $\Sigma_m \equiv 0$ ), le critère de Gurson donne une expression surestimée de  $\Sigma_{eq}$ , à savoir  $\Sigma_{eq} = \sigma_0 (1 - f)$ . En effet, à partir d'une extension de la théorie d'Hashin-Shtrikman aux comportements non-linéaires, Michel et Suquet (1992) ont montré

que cette expression viole la condition suivante

$$\left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_o}\right)^2 + \frac{9}{4}f \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_o}\right)^2 - (1-f)^2 \leq 0 \quad (4.28)$$

pour les faibles triaxialités et pour un chargement purement déviatorique ( $\Sigma_m = 0$ ) :

$$\Sigma_{eq} \leq \sigma_o (1-f) \left(1 + \frac{2}{3}f\right)^{-1/2} \quad (4.29)$$

Ainsi le critère de Gurson donne des approximations satisfaisantes pour de forts taux de triaxialité des contraintes et surestime la déformation à rupture du matériau pour de faibles taux de triaxialité. Afin de remédier à cette lacune qui résulte pour partie de la non-prise en compte des interactions entre cavités, [Tvergaard \(1981\)](#), à partir de simulation numérique, introduit trois coefficient  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  dans le critère de Gurson et a étendu le critère au cas des matériaux ductile poreux élastoplastique écrouissable en remplaçant la limite d'écoulement  $\sigma_o$  par la contrainte équivalente d'écoulement  $\bar{\sigma}$  comme suggéré par Gurson. La surface de charge ainsi proposée par [Tvergaard \(1981\)](#) est de la forme

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1f \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_3f^2 = 0 \quad (4.30)$$

Tvergaard a obtenu un bon accord avec les valeurs  $q_2 = 1$  et  $q_3 = q_1^2$ , qui sont généralement acceptées dans la littérature, tandis que le coefficient  $q_1$  a fait l'objet de plusieurs propositions : [Tvergaard \(1981\)](#) ( $q_1 = 1.5$ ), [Koplik et Needleman \(1988\)](#) ( $q_1 = 1.25$ ), [Zhang et al. \(1999\)](#) ( $q_1 = 1.1$ ) et [Perrin et Leblond \(1990\)](#) ( $q_1 = 1.47$ ).

Par ailleurs, le critère de Gurson ne peut pas prédire convenablement la rupture finale du matériau par coalescence des vides car il ne comporte pas de critère de rupture. En effet, lorsque le matériau perd toute sa rigidité, la nullité de la contrainte dans l'équation (4.30) conduit à  $f = 1/q_1$  ( $\simeq 0.66$  pour  $q_1 = 1.5$ ), ce qui est irréaliste. Pour la plupart des alliages métalliques, la coalescence se produit à des porosités relativement faible ( $f < 0.1$ ). Pour tenir compte de la perte rapide de rigidité du matériau, [Tvergaard et Needleman \(1984\)](#) ont introduit une porosité effective  $f^*(f)$  dans le critère de Gurson pour simuler, de façon empirique, l'accélération rapide de la coalescence des vides à partir d'une valeur critique de la porosité  $f_c$ . La surface de charge du modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) s'écrit alors

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1f^* \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1f^*)^2 = 0 \quad (4.31)$$

avec :

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases}, \quad \delta = \frac{f_u - f_c}{f_f - f_c} \quad (4.32)$$

La porosité correspondant à la rupture finale du matériau est  $f_f$  pour laquelle  $f^*(f_f) = f_u = 1/q_1$ . Dès que la coalescence commence, d'un point de vue numérique, il est préférable de prendre en compte graduellement la dégradation du matériau plutôt que brusquement. Ce qui explique pourquoi Tvergaard et Needleman ont défini la porosité effective  $f^*$  par une fonction affine.

### Loi d'écoulement associée par la normalité

D'après Gurson (1975; 1977), la règle de normalité de l'écoulement plastique de la matrice implique la normalité macroscopique pour le matériau poreux<sup>3</sup>. Le tenseur des taux de déformation macroscopique plastique est alors donné par

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}; \dot{\Lambda} \geq 0 \quad (4.33)$$

soit pour le critère GTN :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \left[ \frac{3}{\bar{\sigma}^2} \boldsymbol{\Sigma}' + \frac{f q_1 q_2}{\bar{\sigma}} \sinh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \mathbf{1} \right] \quad (4.34)$$

dont la trace est donnée par

$$\text{Tr } \dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \frac{3f q_1 q_2}{\bar{\sigma}} \sinh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \quad (4.35)$$

La relation (4.34) montre que la déformation plastique possède bien composante hydrostatique. Autrement dit, le taux de variation volumique ( $\text{Tr } \dot{\mathbf{E}}^p$ ) augmente (resp. diminue) lorsque le matériau est soumis localement à une contrainte de traction (resp. de compression) isotrope.

### Loi d'évolution des variables internes

D'après l'expression (4.31) du critère GTN, la porosité  $f$  est couplée à la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  et à la variable d'érouissage  $\bar{\sigma}$ . Afin d'obtenir la loi d'évolution de la déformation plastique équivalente dans la matrice  $\bar{\epsilon}^p$ , Gurson avait suggéré d'écrire l'équivalence des dissipations plastiques microscopiques (au sein de la matrice) et macroscopique (matrice+vides), ce qui conduit à

$$\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p = (1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (4.36)$$

et par conséquent

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1 - f) \bar{\sigma}} \quad (4.37)$$

On note que la déformation plastique équivalente et la contrainte d'écoulement sont reliées par la relation incrémentale suivante :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \bar{h} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (4.38)$$

L'évolution de la porosité est due, en partie à la croissance des cavités existantes et en partie à la nucléation de nouveaux vides :

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{croissance}} + \dot{f}_{\text{nucléation}} \quad (4.39)$$

La condition d'incompressibilité plastique de la matrice est satisfaite à l'échelle microscopique, mais elle ne l'est pas à l'échelle macroscopique à cause de la présence des cavités. L'évolution de la porosité, due à la croissance des vides, est donnée par (en négligeant l'élasticité)

$$\dot{f}_{\text{croissance}} = (1 - f) \text{Tr } \dot{\mathbf{E}}^p \quad (4.40)$$

3. En utilisant le lemme Hill-Mandel, on démontre que la règle de normalité, respectée à l'échelle microscopique "passe" à l'échelle macroscopique.

En ce qui concerne l'amorçage de nouveaux vides qui se produit principalement par fragmentation ou par décohésion à l'interface de la matrice et des particules de secondes phases, le modèle de nucléation suivant une distribution normale contrôlée par la déformation est largement utilisé (cf. section 4.3.1). Pour le modèle GTN, la nucléation des vides est choisie être piloter en déformation comme proposé par [Chu et Needleman \(1980\)](#), soit

$$\dot{f}_{\text{nucléation}} = \mathcal{A} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (4.41)$$

### 4.3.3 Autres extensions du modèle de Gurson

Le modèle GTN est fort utilisé pour suivre dans un calcul par éléments finis l'évolution de la porosité et donc celle de l'endommagement d'un matériau. Il permet en particulier de déterminer l'instant au cours du processus de chargement où l'endommagement atteint une valeur critique conduisant à la rupture d'un élément de volume. Plusieurs extensions ont cependant été apportées au modèle de Gurson par plusieurs auteurs parmi lesquels les suivants.

**Richmond et Smelser (1985)** : ont modifié le critère original de Gurson de la manière suivante

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right)^2 + 2 f^m \cosh \left( \frac{3}{2} m \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) - 1 - f^{2m} = 0 \quad (4.42)$$

où  $m$  est une constante liée au matériau compris entre  $2/3$  et  $1$ . [Richmond et Smelser \(1985\)](#) ont suggéré de prendre  $m = (2 + N)/3$  où  $N$  est l'exposant d'écrouissage de la courbe contrainte-déformation de la matrice. Dans le cas d'un chargement en cisaillement d'un réseau périodique de cellules cubiques contenant des vides sphériques, ces auteurs ont constaté que les valeurs de la contrainte d'écoulement pouvaient être beaucoup plus faibles que celles trouvées par le modèle GTN. C'est pour cet raison les auteurs ont remplacé la porosité  $f$  par une porosité effective  $f^m$ .

**Sun et Wang (1989)** : ont estimé la surface de charge macroscopique d'un matériau poreux ( $f \leq 0.3$ ) à travers l'analyse limite d'une cellule de base identique à celle utilisée par Gurson, et soumise cependant à son bord à un état de contrainte homogène. Le critère obtenu s'écrit

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right)^2 + f \left( 2 - \frac{1}{2} \ln f \right) \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) - 1 - f(1 + \ln f) = 0 \quad (4.43)$$

**Michel et Suquet (1992)** : le comportement effectif des matériaux poreux élastoplastiques isotropes est approché par le critère, fondé sur la méthode d'homogénéisation non linéaire, suivant

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left( 1 + \frac{2}{3} f \right) \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right)^2 + \frac{9}{4} \left( \frac{1-f}{\ln f} \right)^2 \left( \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}} \right)^2 - (1-f)^2 = 0 \quad (4.44)$$

Le terme devant  $(\Sigma_m/\bar{\sigma})^2$  a été déterminé pour satisfaire le résultat (4.27). En revanche, le terme de  $(\Sigma_{eq}/\bar{\sigma})^2$  a été introduit afin de respecter la borne inférieure de Hashin-Shtrikman (4.28) dans le cas d'un chargement purement déviatorique.

**Leblond *et al.* (1994)** : ont proposé de modifier, de manière phénoménologique, le critère de Gurson en introduisant le facteur  $(1 + \frac{2}{3}q_1 f)$  affectant le terme adimensionnel  $(\Sigma_{eq}/\bar{\sigma})^2$ . Pour un comportement élastoplastique écrouissable de la matrice, **Leblond *et al.* (1994)** proposent la forme

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(1 + \frac{2}{3}q_1 f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f)^2 = 0 \quad (4.45)$$

**Zuo et Lou (1996)** : ont remplacé, de manière purement phénoménologique, dans le critère (4.30), le tenseur des contraintes de Cauchy  $\Sigma$  par le tenseur des contraintes "effectif" introduit par **Kachanov (1986)**  $\tilde{\Sigma}$ . En remplaçant le paramètre d'endommagement  $D$  dans (4.4) par la porosité  $f$ , les auteurs proposent la formulation suivante

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{(1-f)\bar{\sigma}}\right)^2 + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{(1-f)\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f)^2 = 0 \quad (4.46)$$

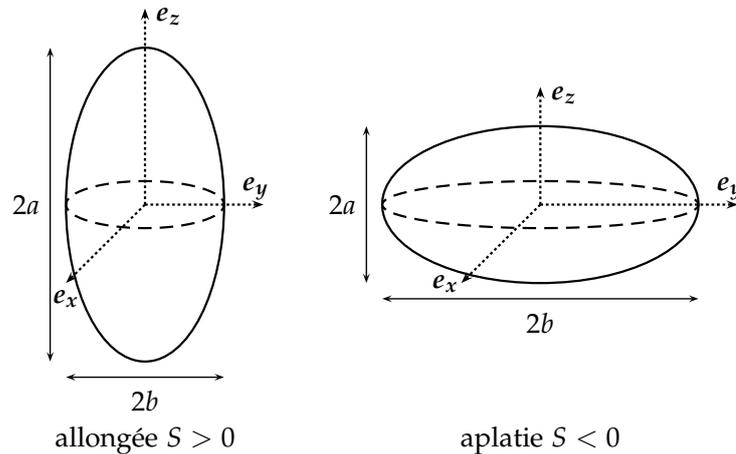


FIGURE 4.7 – Cavités sphéroïdale de révolution allongée et aplatie.

**Gologanu *et al.* (1993; 1994; 1997)** : le modèle GTN considère que les cavités sont initialement sphériques et qu'elles le restent au cours de la déformation. Or il est manifeste que cette hypothèse n'est pas satisfaite car les cavités se déforment et, sauf pour le cas de forte triaxialité, perde leur forme sphérique initiale. Gologanu, Leblond et Devaux (**Gologanu *et al.*, 1993; 1994; 1997**) ont proposé un modèle complet de comportement des métaux tenant compte de l'effet de forme des cavités au cours du chargement. En effet, ils ont repris dans leur démarche l'analyse de Gurson en supposant que la cellule représentative du milieu poreux est de forme sphéroïdale aplatie (oblate) ou sphéroïdale allongée (prolate) contenant une cavité de même forme et qui lui est confocale. Le modèle comprend quatre éléments : un critère de plasticité macroscopique dépendant de deux paramètres géométriques indépendants, la porosité  $f$  et le paramètre de forme  $S = \ln(a/b)$  (cf figure 4.7), une loi d'écoulement plastique associé par la normalité, et une loi d'évolution pour chacun des deux paramètres  $f$  et  $S$ . Pour un chargement axisymétrique du VER considéré, le nouveau critère connu sous le nom de GLD en référence à

ses auteurs, prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_h, \sigma_o, f, S) &= \frac{C}{\sigma_o^2} (\Sigma_{eq} + \eta \Sigma_h)^2 + 2 q_w (g + 1)(g + f) \cosh \left( \kappa \frac{\Sigma_h}{\sigma_o} \right) \\ &\quad - (g + 1)^2 - q_w^2 (g + f)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

où  $\Sigma_h = 2 \alpha_2 \Sigma_x + (1 - 2 \alpha_2) \Sigma_z$ . Les coefficients  $C$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha_2$ ,  $q_w$  et  $g$  et  $\alpha_2$  dépendent uniquement de la porosité et du facteur de forme. Le coefficient  $g$  est nul pour  $S \geq 0$ . Le terme en cosinus hyperbolique ne dépend plus de la contrainte moyenne  $\Sigma_m$  mais d'une contrainte  $\Sigma_h$  faisant intervenir les contraintes selon l'axe de la cavités  $\Sigma_z$  et les contraintes dans les deux directions perpendiculaires, avec des poids différents. Plusieurs cas particuliers sont à envisager avec le critère GLD :

- si  $S \rightarrow +\infty$  la cavité est un cylindre d'axe  $e_z$ , alors  $\alpha_2 = 1/2$  de sorte que  $\Sigma_h$  ne dépend que des contraintes dans les directions perpendiculaires à l'axe de la cavité.
- si  $S = 0$  alors on se trouve dans le cas du modèle de Gurson.
- si  $S \rightarrow -\infty$  la cavité est une fissure plane circulaire de porosité nulle. L'endommagement est alors seulement représenté par le paramètre  $g$ .

Une description détaillée du modèle GLD ainsi que ses paramètres est donnée par les références citées ci-dessus. Récemment, des modifications ont été introduites sur ce modèle pour tenir en compte par exemple de l'anisotropie de la matrice (Croix *et al.*, 2003; Benzerga *et al.*, 2004) ou la viscoplasticité de la matrice (Flandi et Leblond, 2005).

**Pastor et ses collaborateurs :** dans une série de papiers dont la publication avaient commencé au début des années 2000. Pastor et ses collaborateurs (Francescato *et al.*, 2001; Trillat et Pastor, 2005; Trillat *et al.*, 2006) ont abordé le problème de la rupture ductile des matériaux métalliques en focalisant leurs investigations sur l'étude des matériaux poreux à cavités cylindriques ou sphériques aussi bien en contrainte plane qu'en déformation plane. Leur approche est fondée sur la méthode d'homogénéisation des milieux hétérogènes en analyse limite, méthode respectant le principe de macro-homogénéité de Hill-Mandel. Les deux méthodes (approches statique et cinématique) de l'analyse limite sont utilisées et couplées avec une discrétisation éléments finis. La résolution des problèmes d'optimisation (linéaire ou non linéaires) auxquels conduisent inmanquablement les deux méthodes de l'analyse limite est effectuée en utilisant des codes d'optimisation commerciaux (ou des codes ad hoc développés via les facilités qu'offre MATLAB) très performants (XA, MOSEK).

La méthodologie employée a permis à Pastor et ses collaborateurs de préciser très finement les critères macroscopiques de plasticité pour les différents cas considérés. Par exemple, dans leurs premières études ces auteurs (i) confirment que le critère de Gurson ne peut convenir pour des porosités au delà de 0.1; (ii) mettent en évidence l'existence d'un point anguleux sur la surface de charge au voisinage de l'axe des pressions moyennes; (iii) affirment que, du point de vue de l'analyse limite, le critère de Richmond et Smelser (1985) semble être « le plus exact »; et (iv) pour les cas considérés, justifie la non dépendance du critère de Gurson vis-à-vis du troisième invariant des contraintes.

## 4.4 PRISE EN COMPTE DU TROISIÈME INVARIANT

### 4.4.1 Motivations et modèles récents

Il est bien connu que la rupture ductile résultant de la nucléation, la croissance et la coalescence des cavités dépend considérablement de l'état de contrainte. Plusieurs études ont mis en évidence le rôle de la triaxialité, paramètre ne dépendant que du premier et du second invariants des contraintes, alors que le troisième invariant a reçu beaucoup moins d'attention jusqu'à récemment (Gao et Kim, 2006; McElwain *et al.*, 2006a;b; Barsoum et Faleskog, 2007a;b; Xue, 2007b;a; Nahshon et Hutchinson, 2008).

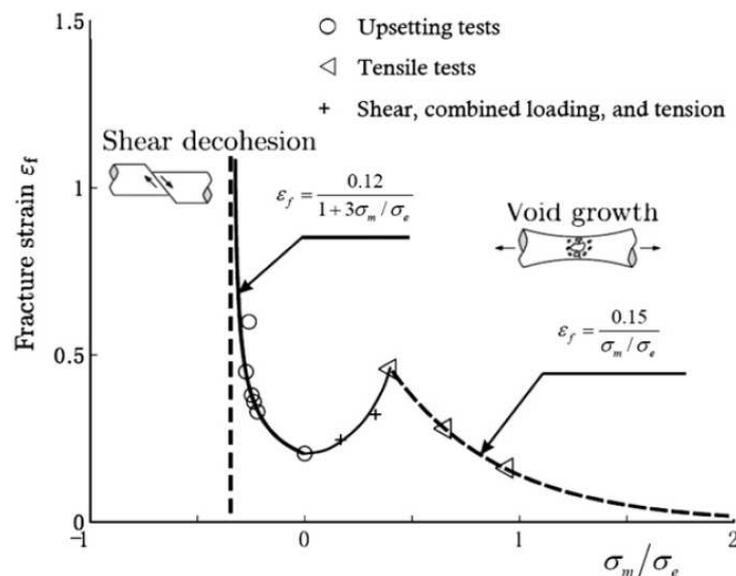


FIGURE 4.8 – Déformation plastique équivalente à la rupture pour l'aluminium Al 2024 – T351 en fonction de la triaxialité. Résultats expérimentaux de Bao et Wierzbicki (2004) et formules approchées de Teng et Wierzbicki (2006) : Source Nahshon et Hutchinson (2008).

Bao et Wierzbicki (2004) ont étudié l'effet de la triaxialité sur la ductilité d'une variété d'échantillons de différentes configurations fabriquées à partir de l'aluminium Al 2024 – T351. Il ressort de leurs résultats expérimentaux que la relation entre la déformation plastique équivalente à la rupture et le taux de triaxialité n'est pas généralement monotone, comme illustré sur la figure 4.8. Les trois branches de la courbe, selon les données expérimentales, correspondent à trois catégories distinctes d'états de contrainte pour lesquels la triaxialité seule ne serait pas un paramètre pertinent. Pour des taux de triaxialité supérieurs à 0.4, les données sur la rupture ont été obtenues en utilisant des éprouvettes de traction axisymétriques entaillées de telle manière que la rupture est initiée sous des états de contrainte nominale axisymétrique. Pour ces éprouvettes la déformation à la rupture diminue de façon monotone avec la croissance de la triaxialité. En revanche, pour des taux de triaxialité compris entre 0 et 0.4, où des chargement combinés de traction et de cisaillement ont été appliqués sur des plaques planes sous forme de papillon, les données recueillies présentent une augmentation de la déformation à la rupture pour un accroissement de la triaxialité. Finalement, à des taux de triaxialité négatif, la déformation à la rupture est obtenue à partir d'éprouvettes cylin-

driques sous compression. Il a été observé par les auteurs que la rupture du matériau ne se produit pas pour des taux de triaxialité inférieure à  $-1/3$ . Bao et Wierzbicki (2004) attribuent ces variations de la déformation à la rupture aux changements du mécanisme de rupture qui consistent en un cisaillement des ligaments entre cavités à des faibles taux de triaxialité et à la coalescence par striction des ligaments entre les cavités pour les forts taux de triaxialité.

L'état de contrainte dans un essai donné est spécifié non seulement par la triaxialité mais aussi par une autre mesure définissant le troisième invariant de la contrainte. Désignons par  $\Sigma_I \geq \Sigma_{II} \geq \Sigma_{III}$ , les trois contraintes principales du tenseur  $\Sigma$  de déviateur  $\Sigma'$ . En plasticité isotrope, afin de caractériser un état de contrainte défini par  $\Sigma$ , on peut choisir en plus du premier et second invariants l'un des paramètres suivants :

1. Déterminant de  $\Sigma'$

$$J_3 = \det \Sigma' = \frac{1}{3} \Sigma'_{ij} \Sigma'_{ik} \Sigma'_{jk} = (\Sigma_I - \Sigma_m)(\Sigma_{II} - \Sigma_m)(\Sigma_{III} - \Sigma_m) \quad (4.48)$$

2. Le paramètre de Lode

$$\mathcal{L} = \frac{2\Sigma_{II} - \Sigma_I - \Sigma_{III}}{\Sigma_I - \Sigma_{III}} = \frac{3(\Sigma_{II} - \Sigma_m)}{\Sigma_I - \Sigma_{III}} \quad (4.49)$$

3. Le paramètre

$$\omega(\Sigma) = 1 - \left( \frac{27 J_3}{2 \Sigma_{eq}^3} \right)^2 \quad (4.50)$$

Les paramètres  $\mathcal{L}$  et  $\omega$  peuvent être utilisées en particulier pour différencier les états de contrainte axisymétrique et des états de contrainte plans. En effet, pour un état de contrainte axisymétrique avec  $\Sigma_I \geq \Sigma_{II} = \Sigma_{III}$  ou  $\Sigma_I = \Sigma_{II} \geq \Sigma_{III}$ , nous avons  $J_3 = \pm 2(\Sigma_I - \Sigma_{III})^3/27 = \pm 2\Sigma_{eq}^3/27$ . Un état de contrainte combinant une contrainte de cisaillement pur et une contrainte hydrostatique est donné par  $\Sigma_I = \tau + \Sigma_m$ ,  $\Sigma_{II} = \Sigma_m$  et  $\Sigma_{III} = -\tau + \Sigma_m$  avec  $\tau > 0$ , soit donc  $J_3 = 0$ . Ainsi, les paramètres de Lode et  $\omega$  sont tels que :  $-1 \leq \mathcal{L} \leq 1$  et  $\omega(\Sigma)$  entre  $0 \leq \omega \leq 1$ .

Le paramètre de Lode a été utilisé par Xue (2007a;b) pour interpréter les données expérimentales obtenues par Bao et Wierzbicki (2004). Xue a suggéré que la nature non monotone de la courbe déformation à la rupture-triaxialité est due à la variation de la triaxialité et du paramètre de Lode en même temps. Barsoum et Faleskog (2007a;b) ont effectué une étude expérimentale sur des éprouvettes axisymétriques entaillée chargées par une combinaison d'une torsion et d'une traction dans le but d'étudier d'une part les effets du taux de triaxialité et le paramètre de Lode sur la ductilité et, d'autre part la transition rupture par localisation du cisaillement-rupture par striction du ligament. À travers des études expérimentales sur deux aciers Weldox 420 et 960, faiblement et hautement résistant respectivement, ces auteurs confirment que la ductilité diminue avec l'augmentation de la triaxialité lorsque la striction interne des ligaments entre cavités est dominante. Cependant, lorsqu'une localisation de cisaillement interne des ligaments entre cavités se produit, les auteurs signalent une importante baisse de la ductilité conformément aux résultats de Bao et Wierzbicki (2004).

Parallèlement à l'étude expérimentale, Barsoum et Faleskog (2007b) et Gao et Kim (2006) ont effectué une étude théorique couplée à des simulations numériques d'une cellule tridimensionnelle renfermant une cavité sphérique et sollicitée à différents états de contrainte. Il ressort de cette étude que la mesure de la triaxialité seule ne suffit pas à caractériser le taux de croissance des cavités ainsi que d'autres aspects relatifs au comportement de la cavité qui sont pertinents pour l'adoucissement et la localisation de la déformation. En outre, l'étude de la cellule effectuée par Barsoum et Faleskog (2007b) pour un état de cisaillement généralisé avec une contrainte hydrostatique nulle montre une fragilité au cisaillement sans adoucissement. Les auteurs ont pu ainsi déterminer la déformation critique à la rupture du ligament entre les cavités et ont proposé un critère de rupture par cisaillement. Par ailleurs, dans le même cadre d'analyse de cavités sollicitées en cisaillement, Anderson *et al.* (1990) ont analysé l'effet des microfissures dans un matériau subissant un état de cisaillement pur. D'où il ressort que l'adoucissement et par suite la localisation de la déformation devraient uniquement provenir de la rotation et l'étirement des cavités. Ces constatations sont confirmées récemment par des simulations numériques appropriées menées par Tvergaard (2008). Pour les faibles triaxialités, l'auteur constate une diminution du volume de la cavité conduisant à la formation d'une microfissure qui subit une rotation dans le domaine cisailé. Ce qui implique, sous un état de contrainte de cisaillement maximal, une localisation de la déformation conduisant à la rupture finale.

À partir des observations expérimentales et numériques, Xue (2007a;b) et Nahshon et Hutchinson (2008) se sont proposés d'incorporer, d'une manière phénoménologique, la croissance de l'endommagement sous de faible taux de triaxialité dans le modèle GTN. Ce dernier modèle, répétons nous, ne peut pas prédire d'accroissement de la porosité du matériau sous l'action d'un cisaillement pur. Les modifications apportées au modèle GTN font intervenir explicitement un troisième paramètre définissant l'état de contrainte et permettant de renseigner sur l'état de cisaillement.

#### 4.4.2 Le modèle de Xue (2007)

Xue (2007a) propose un modèle de plasticité similaire à celui du GTN mais avec une troisième variable interne d'endommagement  $D$  liée à l'angle de Lode<sup>4</sup>. Le critère de plasticité a pour forme

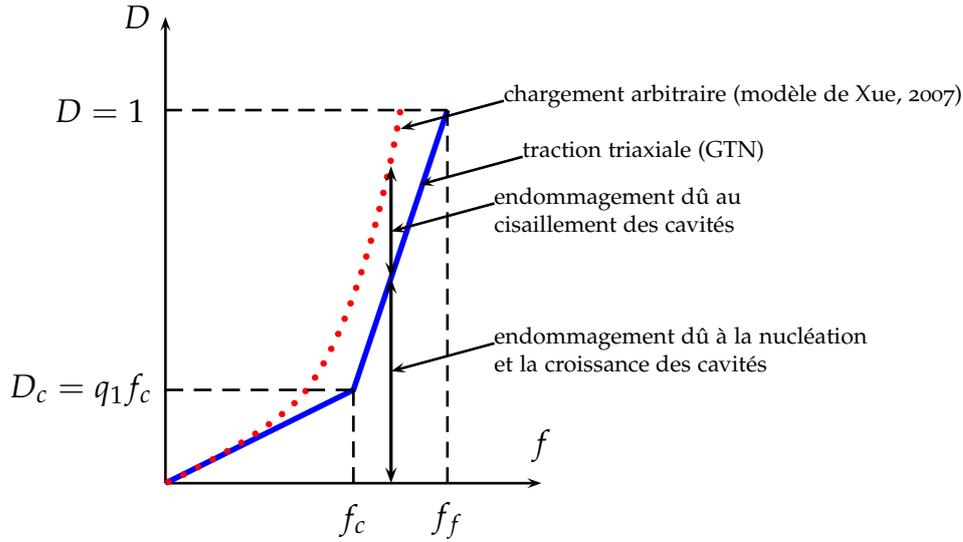
$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \bar{\sigma}, D) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}}\right)^2 + 2D \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - D^2 = 0 \quad (4.51)$$

avec  $D = q_1 f^*$ . Notons que  $D = 1$  pour  $f^* = f_u = 1/q_1$ . L'évolution de la variable d'endommagement  $D$  est donnée par (cf. figure 4.9)

$$\dot{D} = \delta_D (q_1 \dot{f} + \dot{D}_{cis}) \quad (4.52)$$

---

4. Par définition l'angle de Lode  $\theta_L$  est donné par :  $\cos(3\theta_L) = \left(3\sqrt{\frac{1}{2}J_3/\Sigma_{eq}}\right)^3$

FIGURE 4.9 – Graphe de la fonction  $D(f)$ .

où  $\delta_D$  est un coefficient accélérateur de l'endommagement à partir d'une valeur critique  $D_c = q_1 f_c$  annonçant le début de la coalescence.  $\delta_D$  a pour expression

$$\delta_D = \begin{cases} 1 & \text{si } D \leq D_c \\ \frac{1/q_1 - f_c}{f_f - f_c} & \text{si } D_c < D \leq 1 \end{cases} \quad (4.53)$$

Le terme  $\dot{D}_{cis}$  a été introduit par [Xue \(2007a;b\)](#) pour représenter l'endommagement dû au cisaillement des cavités et est donnée par

$$\dot{D}_{cis} = q_3 f^{q_4} g_\theta E_{eq}^p \dot{E}_{eq}^p \quad (4.54)$$

où le facteur  $g_\theta$  est tel que  $g_\theta = 0$  pour une traction et  $g_\theta = 1$  pour un cisaillement. L'expression de  $g_\theta$  en fonction de l'angle de Lode

$$g_\theta = 1 - \frac{6|\theta_L|}{\pi}, \text{ avec } \theta_L = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 2 \left( \frac{\Sigma'_{II} - \Sigma'_{III}}{\Sigma'_I - \Sigma'_{III}} \right) - 1 \right] \right\} \quad (4.55)$$

$\Sigma'_I, \Sigma'_{II}$  et  $\Sigma'_{III}$  sont les contraintes principales du tenseur de contrainte déviatorique  $\Sigma'$ . On note ici que la fonction  $g_\theta$  est équivalente à la mesure  $\omega$  défini par la relation (4.50). De plus, dans le cas d'une traction le modèle de Xue dégénère au modèle GTN avec  $g_\theta = 0$ . Les coefficients  $q_3$  et  $q_4$  dans la relation (4.54) sont des paramètres matériaux à calibrer. [Xue \(2007a\)](#) propose les valeurs de ( $q_3 = 1.69, q_4 = 1/2$ ) pour le cas bidimensionnel, et ( $q_3 = 1.86, q_4 = 1/3$ ) pour le cas tridimensionnel.

#### 4.4.3 Le modèle de Nahshon et Hutchinson (2008)

En l'absence de la nucléation, l'évolution de la porosité  $f$  due à la croissance des vides est donnée par les expressions (4.35) et (4.40). À partir de ces dernières, il est clair que le modèle GTN prédit pas une variation du volume des cavités nulle si la contrainte hydrostatique l'est aussi. Partant de ce constat, [Nahshon et Hutchinson \(2008\)](#) ont proposé de modifier la relation

(4.40) pour inclure une croissance de l'endommagement sous des sollicitations de cisaillement pur. La modification proposée est sans effet sur le modèle GTN pour des états de contrainte axisymétrique. La loi d'évolution de la porosité  $f$  est donnée par

$$\dot{f} = (1 - f) \text{Tr} \dot{\mathbf{E}}^p + k_\omega f \omega(\boldsymbol{\Sigma}) \frac{\boldsymbol{\Sigma}' : \dot{\mathbf{E}}^p}{\Sigma_{eq}} \quad (4.56)$$

où  $\omega(\boldsymbol{\Sigma})$  est défini par (4.50). La contribution du terme additionnel est effectif lorsque l'état de cisaillement pur est dominant. En effet,  $\dot{f}$  est proportionnel à  $k_\omega f \dot{\gamma}^p$ , où  $\dot{\gamma}^p$  est le taux de cisaillement plastique. En revanche, pour des états de contrainte axisymétriques,  $\omega(\boldsymbol{\Sigma})$  s'annule et on retrouve le modèle GTN. La constante  $k_\omega$  définit le taux de croissance de l'endommagement pour des états de cisaillement pur.  $k_\omega$  est le seul nouveau paramètre du modèle modifié. Nahshon et Hutchinson (2008) annoncent que le paramètre  $k_\omega$  varie dans l'intervalle  $1 < k_\omega < 3$  pour de nombreux métaux.

La modification apportée par Nahshon et Hutchinson (2008), bien que phénoménologique, repose sur la notion que le volume des vides en cours de cisaillement ne croît pas, mais la déformation des cavités et la réorientation de celles-ci contribuent à l'adoucissement du matériau et constituent une cause effective de l'augmentation de l'endommagement.

#### 4.4.4 Le potentiel de McElwain *et al.* (2006)

McElwain *et al.* (2006a;b), en se basant sur une analyse numérique de cellules poreuses sous divers états de sollicitation, proposent un potentiel plastique similaire au GTN et dépendant du troisième invariant de contrainte. La cellule poreuse de base est un cube comportant un cavité de forme sphérique. Trois arrangements des cavités ont été retenus (cf. figure 4.10) : i) le cubique simple (CS); ii) le cubique centré (CC) et iii) le cubique à face centré (CFC). Pour les trois microstructures considérées, la porosité varie de 0.02 à environ 0.9 (seuil de percolation de la structure)

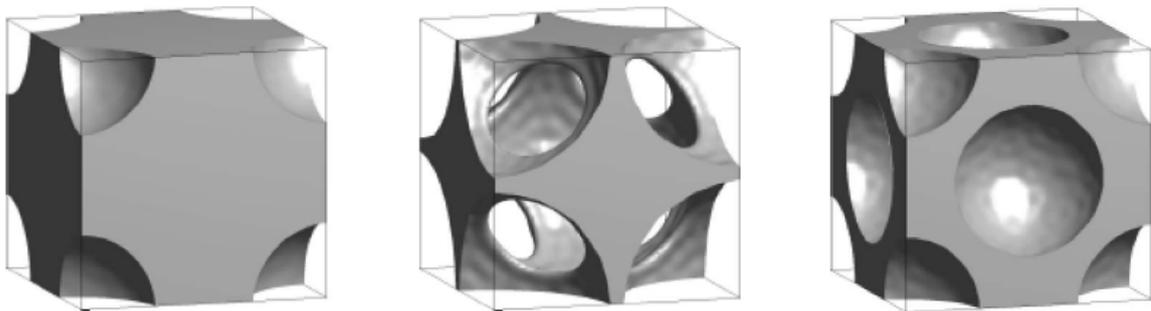


FIGURE 4.10 – Cellules cubiques représentatives du matériau poreux : (à gauche) cellule cubique simple, (au milieu) cellule cubique centrée et (à droite) cellule cubique à face centrée : Source McElwain *et al.* (2006a;b).

Le matériau constitutif de la matrice est rigide parfaitement plastique obéissant au critère de von Mises de limite d'écoulement  $\sigma_0$ . Les surfaces de charges associées aux trois microstructures retenues ont été déterminées points par points en considérant divers états de contrainte macroscopique. Deux définitions du seuil d'écoulement plastique d'une cellule de base donnée ont été utilisées (cf. figure 4.11) :

**Définition 1** la cellule est plastifiée lorsque la valeur de son module sécant vaut 95% de sa valeur initiale (point 1 sur la figure).

**Définition 2** la cellule est plastifiée lorsque la contrainte macroscopique équivalente atteint son maximum (point 2 sur la figure).

La figure 4.12 montre des exemples de surface de charge obtenue par McElwain *et al.* (2006a;b), représentées par leurs sections dans le plan octaédral. Pour certaines valeurs de la contrainte hydrostatique, la surface de charge est d'allure triangulaire, voire trilobique. À titre de comparaison, la surface de charge associée au critère GTN avec  $q_1 = 1.4$  et  $q_2 = 1$  (cercle) est aussi représentée sur la figure 4.12. On constate que pour une faible valeur de la contrainte hydrostatique le modèle GTN prédit convenablement les données numériques avec une section bien circulaire mais cette dernière n'est pas une bonne approximation pour une valeur plus élevée de la contrainte hydrostatique. Pour les trois microstructures étudiées, McElwain *et al.* (2006a;b) ont remarqué, pour les deux définitions du seuil d'écoulement, la forme triangulaire de la surface de charge dans le cas de la microstructure CS et la microstructure CC. Il n'en est pas ainsi pour la microstructure CFC.

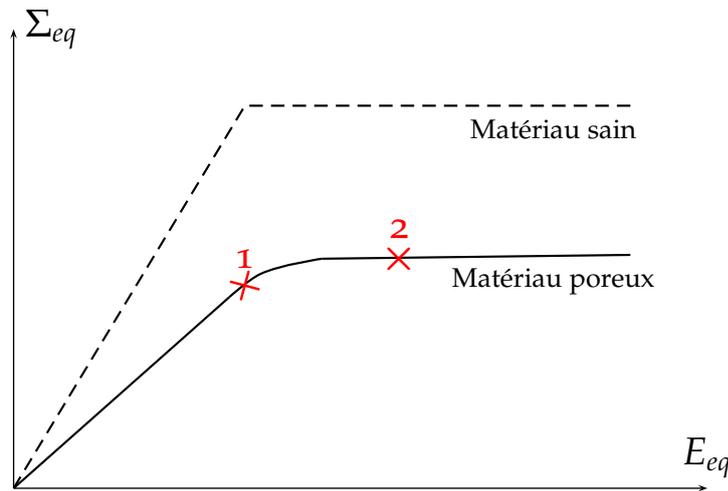


FIGURE 4.11 – Définitions conventionnelles de la contrainte d'écoulement macroscopique.

Attendu que la surface de charge des matériaux poreux devrait dépendre du troisième invariant de contrainte, McElwain *et al.* (2006a;b) ont procédé au lissage de leur fort nombreux résultats numériques en vue d'obtenir une surface de charge généralisant celle associée au modèle GTN, et ce pour une large gamme de valeurs de la porosité  $f$ . À l'issue de ces opérations, les résultats ci-après ont été établis :

- Introduction de nouveaux paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $s$  généralisant d'une certaine façon les paramètres  $(q_1, q_2, q_3)$  de Tvergaard et ayant la propriété de dépendre de la porosité  $f$ ,
- La convexité de la surface de charge, qui dépend donc du troisième invariant de contrainte, est assurée dès lorsque certaines conditions sont imposées à ces nouveaux paramètres.

L'expression du potentiel plastique proposée par McElwain *et al.* (2006a;b) est

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \Sigma_d, \sigma_o, f) = \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_o}\right)^2 + 2a_1 \cosh\left(\frac{3}{2}a_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_o}\right) - 1 - a_1^2 - s \frac{\Sigma_m}{\sigma_o} \left(\frac{\Sigma_d - \langle \Sigma_d \rangle}{\sigma_o^3}\right) \quad (4.57)$$

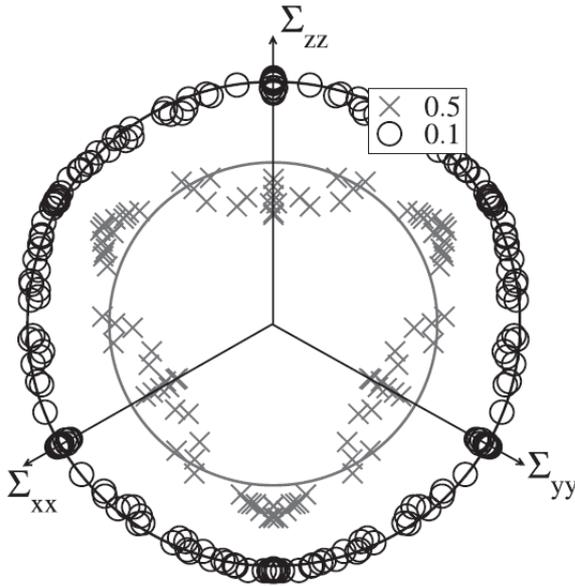


FIGURE 4.12 – Section de la surface de charge par un plan octaédrique d'un matériau poreux avec  $f = 0.25$ , microstructure CS et utilisation de la définition 2.  $\circ$  :  $\Sigma_m = 0.1$ ,  $\times$  :  $\Sigma_m = 0.5$ , ligne continue : GTN avec  $q_1 = 1.4$  et  $q_2 = 1$  : Source McElwain et al. (2006b).

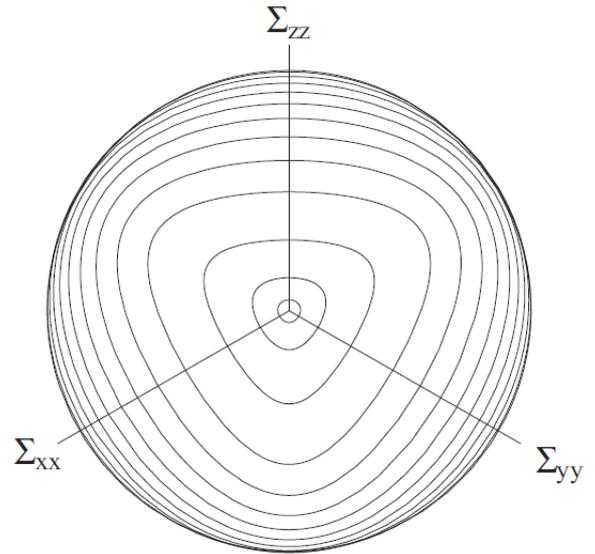


FIGURE 4.13 – Surface de charge obtenue pour la microstructure cubique simple à  $f = 0.25$  en utilisant la définition 2 : Source McElwain et al. (2006b).

avec  $a_1$ ,  $a_2$  et  $s$  sont trois nouveaux paramètres dépendant de la porosité  $f$  et de la microstructure ;  $\Sigma_d = \det \Sigma$  est le troisième invariant du tenseur de contrainte  $\Sigma$  ; et la grandeur  $\langle \Sigma_d \rangle$  est donnée par

$$\frac{\langle \Sigma_d \rangle}{\sigma_o^3} = \frac{\Sigma_m^3}{\sigma_o^3} + \frac{1}{3} \frac{\Sigma_m}{\sigma_o} \left[ 2 a_1 \cosh \left( \frac{3}{2} a_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_o} \right) - 1 - a_1^2 \right] \quad (4.58)$$

La différence  $(\Sigma_d - \langle \Sigma_d \rangle)$  est directement liée à l'écart séparant les surfaces de charge de Gurson et de McElwain et al. (2006a;b). Il est à noter que le dernier terme de (4.57) est une fonction linéaire de  $\Sigma_d$  dont la pente dépend linéairement de la contrainte moyenne  $\Sigma_m$ . Le choix de cette pente permet de contrôler, dans un plan octaédrique et tout le long de l'axe des pressions isotropes, la forme trilobée de la surface de charge.

Revenons ci-dessous sur les trois nouveaux paramètres  $a_1$ ,  $a_2$  et  $s$ .

– Le paramètre  $a_1$  : son expression est

$$a_1 = \left( \frac{f}{f_p} \right)^n + A \left[ \frac{f}{f_p} - \left( \frac{f}{f_p} \right)^m \right] \quad (4.59)$$

– Le paramètre  $a_2$  : son expression dépend de la définition retenue pour le seuil d'écoulement

$$\begin{aligned} a_2 &= V + W \exp(-Xf), & \text{définition 1;} \\ a_2 &= Y + Z \frac{f}{f_p}, & \text{définition 2.} \end{aligned} \quad (4.60)$$

où  $f_p$  est le seuil de percolation de la microstructure considérée ;  $n$ ,  $m$ ,  $A$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont des coefficients déterminés à partir des résultats numériques obtenus en utilisant la méthode des moindres carrés. On note que pour  $f = 0$  le paramètre  $a_1 = 0$ , et la fonction de charge

(4.57) (indépendante du déterminant de la contrainte) se réduit à celle de von Mises. Par ailleurs, si  $f = f_p$  la structure de la matrice n'est plus connectée,  $a_1 = 1$  et le matériau devient plastique sous chaque chargement appliqué. Le critère GTN est retrouvé en prenant  $a_1 = q_1 f$ ,  $a_2 = q_2$  et  $s = 0$ .

- Le paramètre  $s$  : détermine l'intensité du nouveau terme dans le critère (4.57); si la valeur de  $s$  est très grande alors la forme trilobique observée (cf. figure 4.12) dégénère en un triangle équilatéral au fur et à mesure que la contrainte hydrostatique  $\Sigma_m$  augmente à partir de la valeur zero. La surface de charge devient non convexe lorsque  $\Sigma_m$  s'approche de sa valeur maximale

$$\Sigma_m^{max} = \frac{2}{3a_2} \sigma_o \cosh^{-1} \left( \frac{1 + a_1^2}{2a_1} \right) \quad (4.61)$$

Dans le but d'éviter la non convexité de la surface de charge, McElwain *et al.* (2006a) proposent une borne pour le paramètre  $s$ , donnée par

$$s_{max}^{-1} = \frac{1}{3} \left( \frac{\Sigma_m^{max}}{\sigma_o} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{3} \left( \frac{\Sigma_m^{max}}{\sigma_o} \right)} \times \left( 1 - a_1 - \frac{9a_1a_2^2 \left( \frac{\Sigma_m^{max}}{\sigma_o} \right)^2}{8(1-a_1)} - \frac{27a_1(1+a_1+a_1^2)a_2^4 \left( \frac{\Sigma_m^{max}}{\sigma_o} \right)^4}{128(1-a_1)^3} \right) \right] \quad (4.62)$$

Nous reproduisons ci-après les valeurs numériques suggérées par McElwain *et al.* (2006b) pour les coefficients introduites dans leur modèle :

**Microstructure CS :**  $f_p \approx 0.965$ ;

- Définition 1 :  $n = 0.65$ ;  $m = 0$ ;  $A = 0$ ;  $V = 1.47$ ;  $W = 0$ ;  $X = 0$ ;  $s = s_{max}$ .
- Définition 2 :  $n = 0.81$ ;  $m = 0$ ;  $A = 0$ ;  $Y = 0.88$ ;  $Z = 1.3$ ;  $s = s_{max}$ .

**Microstructure CC :**  $f_p \approx 0.994$ ;

- Définition 1 :  $n = 1$ ;  $m = 0.79$ ;  $A = -3.3$ ;  $V = 0.5$ ;  $W = 1.2$ ;  $X = 4.9$ ;  $s = s_{max}$ .
- Définition 2 :  $n = 1$ ;  $m = 1.2$ ;  $A = 2.4$ ;  $Y = 0.85$ ;  $Z = -0.22$ ;  $s = s_{max}$ .

**Microstructure CFC :**  $f_p \approx 0.963$ ;

- Définition 1 :  $n = 1$ ;  $m = 0.86$ ;  $A = -4.5$ ;  $V = 0.63$ ;  $W = 1.2$ ;  $X = 6.4$ ;  $s = 0$ .
- Définition 2 :  $n = 1$ ;  $m = 1.4$ ;  $A = 1.33$ ;  $Y = 0.83$ ;  $Z = -0.14$ ;  $s = 0$ .

Notant que si  $s = 0$ , il n'y a pas de dépendance avec le déterminant du tenseur de contrainte.

Nous considérons dans ce qui suit, que nous disposons pour nos simulations numériques du comportement de structures constitués de matériaux élastoplastiques poreux, d'un modèle de comportement "complet" au sens suivant :

- Un potentiel plastique dont l'expression est donnée par (4.57) en substituant la limite d'écoulement  $\sigma_o$  par la contrainte équivalente d'écoulement  $\bar{\sigma}$ ;

- Une règle d'écoulement plastique :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \partial\Phi / \partial\boldsymbol{\Sigma}, \quad (4.63)$$

- Des lois d'évolutions des variables internes  $f$  et  $\bar{\epsilon}^p$  identique à celles du modèle GTN.
- Un critère de coalescence basé sur la porosité effective  $f^*$  de [Tvergaard et Needleman \(1984\)](#) (4.32), sachant que la valeur de  $f_u$  est égale à  $f_p$  pour le critère (4.57).



# IMPLANTATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE **5** DE McELWAIN *et al.*(2006)

## SOMMAIRE

5.1	INTRODUCTION	105
5.2	RELATIONS ÉLASTOPLASTIQUES	105
5.3	INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES RELATIONS ÉLASTOPLASTIQUES	108
5.3.1	Description de la méthode	108
5.3.2	Module tangent consistant	112
5.3.3	Extension aux grandes déformations	113
5.4	TESTS SUR DES ÉLÉMENTS SIMPLES	114
5.4.1	Traction hydrostatique	115
5.4.2	Cisaillement simple	116
5.5	TESTS SUR UN MODÈLE DE CELLULE DE BASE	116
5.5.1	Traction uniaxiale	119
5.5.2	Cisaillement simple	119

**L** e modèle élastoplastique pour les matériaux poreux de [McElwain \*et al.\* \(2006a;b\)](#) est implantée dans le code d'éléments finis [ABAQUS \(2005\)](#) en vue de son emploi dans les problèmes pratiques. À cette fin, le schéma d'intégration numérique est celui du retour implicite d'Euler. La validation de l'implantation est ensuite effectuée à travers la réponse d'éléments tests appropriés.



## 5.1 INTRODUCTION

Au cours des dernières années, les méthodes d'éléments finis ont été utilisées avec succès dans l'analyse non linéaire des structures. En ce qui concerne le matériau inélastique de ces structures, la plupart des modèles de comportement définissent le taux de déformation inélastique en termes de contraintes et un ensemble de variables internes. Généralement, la résolution de ces problèmes non linéaires est effectuée incrémentalement et l'intégration numérique des équations inélastiques du modèle est nécessaire. Le choix du schéma d'intégration s'avère important pour la précision et la stabilité de la solution numérique (Krieg et Krieg, 1977; Ortiz et Popov, 1985), notamment pour les problèmes de grandes déformations pour lesquels la déformation plastique est de deux à trois fois plus élevée que la déformation élastique.

Plusieurs algorithmes d'intégration des lois de comportement élastoplastiques sont actuellement disponibles (Aravas, 1987; Crisfield, 1991; Jerimic et Sture, 1997; Simo et Hughes, 1998; Belytschko *et al.*, 2000). On les classe en deux catégories : les schémas explicites et les schémas implicites. Les schémas du "retour radial" dominent l'ensemble de la catégorie d'algorithmes implicites en raison de leur robustesse et de leur précision. Un tel schéma est effectué en deux étapes : une étape de prédiction élastique initial impliquant des contraintes en dehors de la surface de charge, et une étape de correction plastique qui "retourne" les contraintes à la surface de charge.

Les algorithmes d'intégrations ont montré leurs grands succès dans plusieurs logiciels commerciaux d'éléments finis tel que ABAQUS (2005). Pourtant, la plupart des difficultés méthodologiques proposés pour l'intégration implicite sont restreintes aux modèles de plasticité dont le critère invoque le premier invariant de contrainte  $I_1$ , et le second invariant de contrainte déviatorique  $J_2$  (Aravas, 1987; Zhang, 1995). Récemment, certains chercheurs en géomatériaux ont travaillé sur des modèles qui invoquent le troisième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques  $J_3$  dans le but de développer des algorithmes d'intégration correspondant (Tammagnini *et al.*, 2002; Borja *et al.*, 2003; Wang *et al.*, 2004; Foster *et al.*, 2005). En se référant aux travaux des auteurs cités précédemment et en particulier à l'algorithme d'intégration proposé par Simo et Hughes (1998) et Belytschko *et al.* (2000) pour une classe générale de modèles plastiques, une intégration basée sur le schéma de retour implicite d'Euler est appliquée au modèle de McElwain *et al.* (2006a;b).

## 5.2 RELATIONS ÉLASTOPLASTIQUES

Nous adoptons dans ce qui suit la décomposition additive du taux de déformation totale  $\dot{\mathbf{E}}$  :

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p \quad (5.1)$$

où  $\dot{\mathbf{E}}^e$  est le taux de déformation élastique et  $\dot{\mathbf{E}}^p$  est le taux de déformation plastique. Nous supposons que les déformations élastiques sont petites en comparaison des déformations plastiques. En élasticité linéaire le tenseur de contrainte de Cauchy  $\Sigma$  est donnée par la loi classique

$$\Sigma = \mathbb{C}^e : \mathbf{E}^e \quad (5.2)$$

où  $\mathbb{C}^e$  est le tenseur des modules d'élasticité dont les composantes pour un matériau isotrope s'écrivent

$$\mathbb{C}_{ijkl}^e = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + 2G \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (5.3)$$

relation dans laquelle  $K$  et  $G$  sont le module d'incompressibilité du matériau et le module de cisaillement respectivement, et  $\delta_{ij}$  est la composante  $ij$  du tenseur unité.

Tenant compte de la relation  $\Sigma_d = \det(\boldsymbol{\Sigma}) = J_3 - (I_1 J_2)/3 + I_1^3/27$ , où  $J_3$  est le troisième invariant du déviateur de contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}'$ , la nouvelle expression du potentiel plastique (4.57) est alors

$$\begin{aligned} \Phi(I_1, J_2, J_3, H_\alpha) &= \frac{3J_2}{\bar{\sigma}^2} + 2a_1(f^*) \cosh\left(\frac{3}{2}a_2(f^*)\frac{p}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1(f^*)^2 + s(f^*)\frac{p}{\bar{\sigma}^4} \\ &\times \left[ J_3 + pJ_2 + \frac{1}{3}p\bar{\sigma}^2 \left( 2a_1(f^*) \cosh\left(\frac{3}{2}a_2(f^*)\frac{p}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1(f^*)^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

expression dans laquelle :

- $I_1$  est le premier invariant du tenseur de contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}$  :  $I_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}) = -3p$
- $J_2$  et  $J_3$  sont respectivement le second et le troisième invariants du tenseur déviateur de contrainte  $\boldsymbol{\Sigma}'$  :  $J_2 = \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}' : \boldsymbol{\Sigma}')/2$ ,  $J_3 = \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}' : \boldsymbol{\Sigma}' : \boldsymbol{\Sigma}')/3$ . Rappelons que  $J_2$  est une mesure de la contrainte équivalente et  $J_3$  reflète les sollicitations d'extension et de compression triaxiales.
- $f^*(f)$  conserve l'expression de [Tvergaard et Needleman \(1984\)](#) avec une valeur de  $f_u = f_p$

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{for } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_p - f_c}{f_f - f_c}(f - f_c) & \text{for } f > f_c \end{cases}$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $s$  sont définis à la section 4.4.4.

- $H_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) représente les l'ensemble de variables internes considérées :  $H_1 = \bar{\epsilon}^p$  et  $H_2 = f$ .

Pour un état donné de l'élément de volume (contrainte, déformation et variables internes), la fonction de charge  $\Phi$  permet de définir dans l'espace des contraintes un domaine d'élasticité du matériau considéré limité par la surface d'équation  $\Phi(I_1, J_2, J_3, H_\alpha) = 0$ . La règle d'écoulement plastique s'écrit

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \dot{\Lambda} \mathbf{r}, \quad (5.5)$$

où  $g$  est le potentiel plastique et  $\Lambda$  est le multiplicateur plastique. En plasticité classique (indépendante du temps)  $\Lambda$  doit satisfaire les conditions de Kuhn-Tucker ([Simo et Hughes, 1998](#))

$$\dot{\Lambda} \geq 0, \quad \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha) \leq 0, \quad \dot{\Lambda} \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha) = 0 \quad (5.6)$$

Dans toute la suite, nous limitons notre analyse aux matériaux standards, pour lesquels la règle d'écoulement est associée au sens où le potentiel plastique est identique à la fonction de charge  $\Phi$  :  $g(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha) = \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha)$ . Pour des raisons de commodités, nous conservons dans les calculs ci-après aussi que ceux fournis à l'annexe A.2 et A.3 le potentiel plastique  $g$ .

En explicitant la règle d'écoulement (5.5), la direction de l'écoulement plastique  $\mathbf{r}$  est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \\ &= \frac{\partial g}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial g}{\partial J_2} \boldsymbol{\Sigma}' + \frac{\partial g}{\partial J_3} \mathbf{T}\end{aligned}\quad (5.7)$$

où  $\mathbf{1}$  est le tenseur unité et  $\mathbf{T}$  est le tenseur de composantes

$$T_{ij} = \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} = \frac{\partial J_3}{\partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (5.8)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} &= -\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial g}{\partial J_2} \Sigma'_{ij} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} J_2 \delta_{ij} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} J_2 \delta_{ij}\end{aligned}\quad (5.9)$$

d'où

$$\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \mathbf{1} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}'} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} J_2 \mathbf{1} \quad (5.10)$$

et finalement

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\Lambda} \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \mathbf{1} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}'} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} J_2 \mathbf{1} \right) \quad (5.11)$$

Par ailleurs, le taux de déformation plastique peut être décomposé en deux parties, une volumétrique  $\dot{E}_m^p \mathbf{1}$  et l'autre déviatorique  $\dot{\mathbf{E}}'^p$  :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{E}_m^p \mathbf{1} + \dot{\mathbf{E}}'^p \quad (5.12)$$

Le rapprochement de (5.12) et (5.11) conduit à

$$\dot{E}_m^p = -\frac{1}{3} \dot{\Lambda} \frac{\partial g}{\partial p}, \quad \dot{\mathbf{E}}'^p = \dot{\Lambda} \left( \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Sigma}'} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} J_2 \delta_{ij} \right) \quad (5.13)$$

Notons au passage que le taux de déformation volumétrique  $\dot{E}_v^p$  est égale à  $3 \dot{E}_m^p = -\dot{\Lambda}(\partial g / \partial p)$ . En outre, la décomposition

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{3} \dot{E}_v^p \mathbf{1} + \dot{E}_q^p \mathbf{n}, \quad (5.14)$$

adoptée par de nombreux chercheurs (Aravas, 1987; Zhang, 1995) n'est pas retenue. Dans l'équation (5.14),  $\mathbf{n} \doteq 3 \boldsymbol{\Sigma}' / 2q$  est un vecteur unitaire dans l'espace des contraintes déviatoriques normal à la surface de charge pour les matériaux plastiques associés. En raison de l'existence de  $J_3$  dans le potentiel plastique, la partie déviatorique de  $\dot{\mathbf{E}}^p$  (5.13) ne peut pas être indiquée en tant que  $\dot{\Lambda}(\partial g / \partial q) \mathbf{n}$  ( $= \dot{E}_q^p \mathbf{n}$ ) ou  $\dot{\Lambda}(\partial g / \partial \boldsymbol{\Sigma}')$ . Par ailleurs, la trace du taux de déformation plastique (5.11) s'explicité en

$$\begin{aligned}\text{Tr } \dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\Lambda} \frac{3a_1 a_2}{\bar{\sigma}} \sinh \left( \frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}} \right) + \dot{\Lambda} \frac{s}{3\bar{\sigma}^4} \left[ 3J_3 + 6pJ_2 - 2p\bar{\sigma}^2(1 + a_1^2) \right. \\ &\quad \left. + 4p\bar{\sigma}^2 a_1 \cosh \left( \frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}} \right) + 3p^2 a_1 a_2 \bar{\sigma} \sinh \left( \frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}} \right) \right]\end{aligned}\quad (5.15)$$

relation dépendante de  $J_3$ , contrairement à la relation (4.35) du modèle GTN. Ainsi, l'évolution de la porosité due au terme de croissance des cavités (4.40), liée à la trace du taux de déformation plastique, se trouve dépendante du troisième invariant  $J_3$ .

Le modèle plastique est complété par la description de l'évolution des variables internes au cours de la progression de la déformation plastique. Généralement, l'évaluation des variables internes peuvent s'exprimer en fonction des champs mécaniques (contraintes, déformation. . .) et des variables internes elles mêmes de la manière suivante :

$$\dot{H}_\alpha = \bar{h}_\alpha(\dot{\mathbf{E}}^p, \boldsymbol{\Sigma}, H_\beta), \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (5.16)$$

En ce qui concerne le modèle de McElwain *et al.* (2006a;b) les lois d'évolutions des variables internes sont données par (voir (4.37), (4.40) et (4.41))

$$\dot{H}_1 = \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)\bar{\sigma}} = \frac{-3p\dot{E}_m^p + \boldsymbol{\Sigma}' : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)\bar{\sigma}}, \quad \dot{H}_2 = \dot{f} = 3(1-f)\dot{E}_m^p + \mathcal{A}\dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (5.17)$$

ce qui peut encore s'écrire en tenant compte de (5.13) :

$$\dot{H}_1 = \dot{\Lambda} \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial g}{\partial p} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right) = \dot{\Lambda} h_1(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha), \quad (5.18)$$

$$\dot{H}_2 = \dot{\Lambda} \left( -(1-f) \frac{\partial g}{\partial p} + \mathcal{A} h_1(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha) \right) = \dot{\Lambda} h_2(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha). \quad (\alpha = 1, 2) \quad (5.19)$$

où  $h_1(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha)$  et  $h_2(\boldsymbol{\Sigma}, H_\alpha)$  désignent les modules d'écrouissage plastiques correspondant aux variables internes  $\bar{\epsilon}^p$  et  $f$ .

## 5.3 INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES RELATIONS ÉLASTOPLASTIQUES

### 5.3.1 Description de la méthode

Dans l'algorithme de retour implicite d'Euler, il est supposé que la déformation totale  $\mathbf{E}_n$ , la déformation plastique  $\mathbf{E}_n^p$  et toutes les variables internes  $H_{\alpha n}$  sont connues à l'instant  $t_n$  (temps au début de l'incrément). Pour un incrément de déformation  $\Delta \mathbf{E}$  donné, on a besoin de calculer la déformation totale  $\mathbf{E}_{n+1}$ , la déformation plastique  $\mathbf{E}_{n+1}^p$  et les variables internes  $H_{\alpha n+1}$  à l'instant  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  (temps à la fin de l'incrément). Au cours de l'intégration des contraintes et des variables internes du modèle élastoplastique, des itérations de Newton sont effectuées dans le but de satisfaire le critère de plasticité, la règle d'écoulement et les lois d'évolution des variables internes. Les équations non linéaires à satisfaire pour l'intégration sont regroupés ci-dessous

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E} \quad (5.20a)$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Delta \Lambda_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} \quad (5.20b)$$

$$\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n + \Delta \Lambda_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} \quad (5.20c)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p) \quad (5.20d)$$

$$0 = \Phi_{n+1}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \mathbf{H}_{n+1}) \quad (5.20e)$$

avec  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{h}$  sont les vecteurs désignant respectivement les variables internes  $H_\alpha$  et les modules plastiques  $h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). La résolution numérique, selon un schéma de retour implicite d'Euler, de l'ensemble de ces équations non linéaires est détaillée ci-après.

À partir de (5.20b), l'incrément de déformation plastique est donné par

$$\Delta \mathbf{E}_{n+1}^p \equiv \mathbf{E}_{n+1}^p - \mathbf{E}_n^p = \Delta \Lambda_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} \quad (5.21)$$

En substituant cette expression dans (5.20d), on obtient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} &= \mathbf{C}^e : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p - \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p) \\ &= (\boldsymbol{\Sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}) - \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p \\ &= \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{pred} - \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p = \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{pred} - \Delta \Lambda_{n+1} \mathbf{C}^e : \mathbf{r}_{n+1} \end{aligned} \quad (5.22)$$

avec  $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{pred} = \boldsymbol{\Sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}$  est la contrainte d'essai initial du prédicteur élastique et le terme  $-\Delta \Lambda_{n+1} \mathbf{C}^e : \mathbf{r}_{n+1}$  correspond à la correction plastique qui consiste à "projeter" la contrainte d'essai sur la surface de charge actualisée et le long de la direction de l'écoulement plastique  $\mathbf{r}_{n+1}$  au point final (voir la figure 5.1). Durant la phase du correction plastique la déformation totale est fixée, par conséquent, en utilisant (5.20d), nous avons

$$\Delta \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = -\mathbf{C}^e : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^p = -\Delta \Lambda_{n+1} \mathbf{C}^e : \mathbf{r}_{n+1}. \quad (5.23)$$

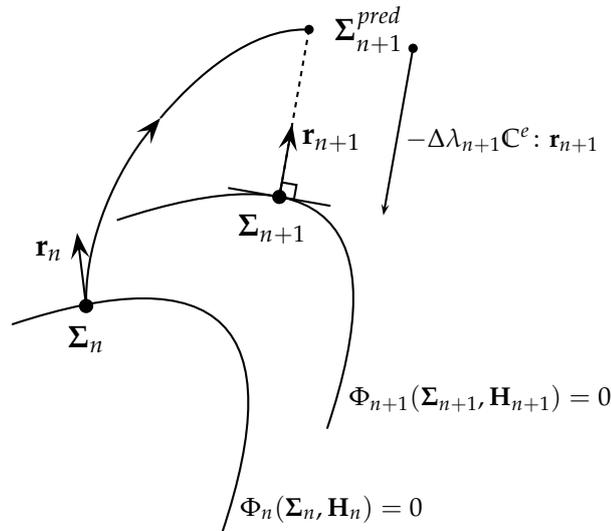


FIGURE 5.1 – Interprétation géométrique du schéma de retour implicite d'Euler pour le cas de la plasticité associée (schéma de "Closest point projection", Simo et Hughes (1998))

En suivant Simo et Hughes (1998) en plasticité associée, la méthode de Newton conduit à une correction plastique de la prédiction élastique selon la technique du "closest point projection". La solution du système non linéaire (5.20) peut être obtenue par une méthode de type Newton basée sur des équations non linéaires par rapport à l'incrément  $\Delta \Lambda$ . Par exemple, dans le cas d'une seule équation scalaire  $f(\Delta \Lambda) = 0$  avec  $\Delta \Lambda^{(0)} = 0$ , la méthode de Newton conduit pour la  $k^{me}$  itération à

$$\mathbf{f}^k + \left( \frac{d\mathbf{f}}{d\Delta \Lambda} \right)^k \delta \Delta \Lambda^k = 0, \quad \Delta \Lambda^{k+1} = \Delta \Lambda^k + \delta \Delta \Lambda^k \quad (5.24)$$

où  $\delta\Lambda^k$  est l'incrément de  $\Delta\Lambda$  à la  $k^{me}$  itération. <sup>1</sup>

Il convient tout d'abord de mettre les équations (5.20b), (5.20c) et (5.20e) sous une forme appropriée à l'application de la méthode de Newton; Pour ce qui nous concerne, cette forme est

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\mathbf{E}^p + \mathbf{E}_n^p + \Delta\Lambda\mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{H} + \mathbf{H}_n + \Delta\Lambda\mathbf{h} = \mathbf{0} \\ \Phi &= \Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{H}) = 0\end{aligned}\quad (5.25)$$

En utilisant (5.23) sous la forme  $\Delta\mathbf{E}^{pk} = -\mathbf{C}^{e-1} : \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k$ , la linéarisation de (5.25) donne

$$\mathbf{a}^k + \mathbf{C}^{e-1} : \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k + \Delta\Lambda^k \Delta\mathbf{r}^k + \delta\Lambda^k \mathbf{r}^k = \mathbf{0} \quad (5.26a)$$

$$\mathbf{b}^k - \Delta\mathbf{H}^k + \Delta\Lambda^k \Delta\mathbf{h}^k + \delta\Lambda^k \mathbf{h}^k = \mathbf{0} \quad (5.26b)$$

$$\Phi^k + \Phi_{\boldsymbol{\Sigma}}^k : \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k + \Phi_{\mathbf{H}}^k \cdot \Delta\mathbf{H}^k = 0 \quad (5.26c)$$

avec

$$\Delta\mathbf{r}^k = \mathbf{r}_{\boldsymbol{\Sigma}}^k : \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k + \mathbf{r}_{\mathbf{H}}^k \cdot \Delta\mathbf{H}^k \quad (5.27)$$

$$\Delta\mathbf{h}^k = \mathbf{h}_{\boldsymbol{\Sigma}}^k : \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k + \mathbf{h}_{\mathbf{H}}^k \cdot \Delta\mathbf{H}^k \quad (5.28)$$

La notation  $\Phi_{\boldsymbol{\Sigma}}^k$ ,  $\Phi_{\mathbf{H}}^k$ , etc. signifie dérivées partielles de  $\Phi^k$  par rapport à  $\boldsymbol{\Sigma}$ ,  $\mathbf{H}$ , etc.

La résolution du système non linéaire (5.26) permettent d'obtenir  $\boldsymbol{\Sigma}^k$ ,  $\mathbf{H}^k$  et  $\delta\Lambda^k$ . Pour ce faire, la substitution de (5.27) dans (5.26a) et de (5.28) dans (5.26b) permet d'avoir, après un arrangement algébrique, un système d'équations dont l'écriture matricielle est :

$$\left[ \mathbf{A}^k \right]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k \\ \Delta\mathbf{H}^k \end{Bmatrix} = - \left\{ \tilde{\mathbf{a}}^k \right\} - \delta\Lambda^k \left\{ \tilde{\mathbf{r}}^k \right\} \quad (5.29)$$

avec

$$\left[ \mathbf{A}^k \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{e-1} + \Delta\Lambda\mathbf{r}_{\boldsymbol{\Sigma}} & \Delta\Lambda\mathbf{r}_{\mathbf{H}} \\ \Delta\Lambda\mathbf{h}_{\boldsymbol{\Sigma}} & -\mathbb{1} + \Delta\Lambda\mathbf{h}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix}^k \quad (5.30)$$

$$\left\{ \tilde{\mathbf{a}}^k \right\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^k \\ \mathbf{b}^k \end{Bmatrix}, \quad \left\{ \tilde{\mathbf{r}}^k \right\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^k \\ \mathbf{h}^k \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

La résolution du système (5.29) par rapport aux incrément de contrainte et de variables internes fournit

$$\begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\Sigma}^k \\ \Delta\mathbf{H}^k \end{Bmatrix} = - \left[ \mathbf{A}^k \right] \left\{ \tilde{\mathbf{a}}^k \right\} - \delta\Lambda^k \left[ \mathbf{A}^k \right] \left\{ \tilde{\mathbf{r}}^k \right\} \quad (5.32)$$

Finalement, la substitution de (5.32) dans (5.26c) permet de résoudre complètement le problème initial en conduisant à

$$\delta\Lambda^k = \frac{\Phi^k - \partial\Phi^k \mathbf{A}^k \tilde{\mathbf{a}}^k}{\partial\Phi^k \mathbf{A}^k \tilde{\mathbf{r}}^k}, \quad (5.33)$$

1. Dans ce qui suit, et pour des raisons de simplification des notations, l'indice du temps  $n + 1$  sera omis. Sauf mention du contraire, toutes les grandeurs sont évaluées à l'instant  $t_{n+1}$ .

où la notation  $[\partial\Phi^k] = [\Phi_{\Sigma}^k \ \Phi_{\mathbf{H}}^k]$  est employée. Par conséquent, connaissant les incréments définis par (5.32) et (5.33), l'actualisation itérative de la déformation plastique, des variables internes et du multiplicateur plastique est accessible à travers les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{p^{k+1}} &= \mathbf{E}^{p^k} + \Delta\mathbf{E}^{p^k} = \mathbf{E}^{p^k} - \mathbf{C}^{e-1} : \Delta\Sigma^k \\ \mathbf{H}^{k+1} &= \mathbf{H}^k + \Delta\mathbf{H}^k \\ \Delta\Lambda^{k+1} &= \Delta\Lambda^k + \delta\Lambda^k \end{aligned} \quad (5.34)$$

La procédure itérative de Newton qui vient d'être présentée schématiquement est à poursuivre jusqu'à convergence vers la surface de charge actualisée dans la limite d'une tolérance suffisante fixée à l'avance. Il est important de mentionner que la méthode de Newton est une méthode implicite et nécessite de ce fait la connaissance des gradients de la direction de l'écoulement plastique ainsi que les modules plastiques correspondant aux variables internes ( $\mathbf{r}_{\Sigma}$ ,  $\mathbf{r}_{\mathbf{H}}$ ,  $\mathbf{h}_{\Sigma}$  et  $\mathbf{h}_{\mathbf{H}}$ ). Les expressions de ces derniers sont données en détail dans les annexes A.2 et A.3 pour le modèle plastique qui nous préoccupe.

En résumé, l'algorithme basé sur le schéma du retour implicite d'Euler pour l'intégration des relations élastoplastiques du modèle de McElwain *et al.* (2006a;b) est donné ci-après.

**Étape 1.** Initialisation : Fixer les valeurs initiales de la déformation plastique et les variables internes par les valeurs obtenues après convergence à la fin du précédent pas de temps. Initialiser le paramètre plastique à zero et évaluer la contrainte d'essai initiale :

$$k = 0, \mathbf{E}^{p^0} = \mathbf{E}_n^p, \mathbf{H}^0 = \mathbf{H}_n, \Delta\Lambda^0 = 0, \Sigma^0 = \mathbf{C}^e : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}^{p^0})$$

**Étape 2.** Contrôler la fonction de charge et la convergence à la  $k^{\text{ème}}$  itération :

$$\Phi^k = \Phi(\Sigma^k, \mathbf{H}^k), \quad \{\tilde{\mathbf{a}}^k\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}^k \\ \mathbf{b}^k \end{array} \right\},$$

Si :  $\Phi^k < \text{TOL}_1$  et  $\|\tilde{\mathbf{a}}^k\| < \text{TOL}_2$ , convergence. Si non : Passer à l'Étape 3

**Étape 3.** Calculer l'incrément du paramètre plastique :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^k]^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{e-1} + \Delta\Lambda \mathbf{r}_{\Sigma} & \Delta\Lambda \mathbf{r}_{\mathbf{H}} \\ \Delta\Lambda \mathbf{h}_{\Sigma} & -\mathbb{1} + \Delta\Lambda \mathbf{h}_{\mathbf{H}} \end{bmatrix}^k, \quad \{\tilde{\mathbf{r}}^k\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}^k \\ \mathbf{h}^k \end{array} \right\}, \quad [\partial\Phi^k] = [\Phi_{\Sigma}^k \ \Phi_{\mathbf{H}}^k] \\ \delta\Lambda^k &= \frac{\Phi^k - \partial\Phi^k \mathbf{A}^k \tilde{\mathbf{a}}^k}{\partial\Phi^k \mathbf{A}^k \tilde{\mathbf{r}}^k} \end{aligned}$$

**Étape 4.** Obtenir Les incréments de contraintes et de variables internes :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta\Sigma^k \\ \Delta\mathbf{H}^k \end{array} \right\} = -[\mathbf{A}^k] \{\tilde{\mathbf{a}}^k\} - \delta\Lambda^k [\mathbf{A}^k] \{\tilde{\mathbf{r}}^k\}$$

**Étape 5.** Mettre à jour tous les quantités :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{p^{k+1}} &= \mathbf{E}^{p^k} + \Delta\mathbf{E}^{p^k} = \mathbf{E}^{p^k} - \mathbf{C}^{e-1} : \Delta\Sigma^k \\ \mathbf{H}^{k+1} &= \mathbf{H}^k + \Delta\mathbf{H}^k \\ \Delta\Lambda^{k+1} &= \Delta\Lambda^k + \delta\Lambda^k \\ \Sigma^{k+1} &= \Sigma^k + \Delta\Sigma^k = \mathbf{C}^e : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}^{p^{k+1}}) \end{aligned}$$

$k \leftarrow k + 1$ , passer à l'**Étape 2**.

Il est bien connu que le taux de convergence, s'il devait y avoir convergence, de la méthode de Newton est étroitement liée au point de départ de la procédure itérative. Ainsi, un point de départ moins favorable pourrait conduire soit à une divergence, soit à des oscillations de la méthode. L'un des points de départ proposé par Crisfield (1991) utilise la normale au point du prédicteur élastique. En effet, le développement de Taylor au premier ordre de la fonction de charge au tour de  $\Sigma^{pred}$  donne :

$$\Phi(\Sigma, \mathbf{H}) = \Phi^{pred} + \Phi_{\Sigma}^{pred} : \Delta\Sigma + \Phi_{\mathbf{H}}^{pred} \cdot \Delta\mathbf{H} \quad (5.35)$$

où l'indice *pred* indique que ces termes sont évalués en  $(\Sigma^{pred}, \mathbf{H}_n)$ . En forçant la satisfaction de la condition  $\Phi(\Sigma, \mathbf{H}) = 0$  et en substituant (5.18) et (5.19) sous leur formes incrémentales et (5.23) dans (5.35), on obtient une première approximation du multiplicateur plastique :

$$\Delta\Lambda = \frac{\Phi^{pred}}{\Phi^{pred} : \mathbf{C}^e : \mathbf{r}^{pred} - \Phi_{\mathbf{H}}^{pred} \cdot \mathbf{h}^{pred}} \quad (5.36)$$

$\Delta\Lambda$  ainsi calculé, permet d'obtenir le point de départ pour le lancement des itérations de Newton :

$$\begin{aligned} \Sigma^{depart} &= \Sigma^{pred} - \Delta\Lambda \mathbf{C}^e : \mathbf{r}^{pred} \\ \mathbf{H}^{depart} &= \mathbf{H}_n + \Delta\Lambda \mathbf{h}^{pred} \\ \mathbf{E}^{pdepart} &= \mathbf{E}_n^p + \Delta\Lambda \mathbf{r}^{pred} \end{aligned} \quad (5.37)$$

L'initialisation de l'algorithme de retour implicite d'Euler s'effectue désormais avec ce point de départ au lieu de celui mentionné précédemment. Plus précisément, à  $k = 0$  :

$$\mathbf{E}^{p0} = \mathbf{E}_n^{pdepart}, \quad \mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^{depart}, \quad \Delta\Lambda^0 = \Delta\Lambda, \quad \Sigma^0 = \Sigma^{depart}$$

### 5.3.2 Module tangent consistant

Si un schéma complet de Newton<sup>2</sup> est utilisé pour résoudre les équations d'équilibre non linéaires, il est nécessaire de disposer du *module tangent consistant*, juste après la détermination des contraintes. Ce module est consistant avec l'algorithme d'intégration par application des contraintes totales à l'instant  $t_{n+1}$  ; il s'écrit simplement

$$\mathbf{C}^{cons} = \left( \frac{d\Sigma}{d\mathbf{E}} \right)_{n+1} \quad (5.38)$$

$\mathbf{C}^{cons}$  définit la variation de la contrainte à l'instant  $t_{n+1}$  causée par une variation de la déformation totale à l'instant  $t_{n+1}$ . Sa connaissance est exigée pour définir la matrice de rigidité Jacobienne utilisée pour les itérations de Newton permettant la résolution globale des équations d'équilibre.  $\mathbf{C}^{cons}$  dépend ainsi de l'algorithme utilisé pour l'intégration des équations

2. La méthode de Newton utilisée dans l'itération globale des équations d'équilibre et non l'itération locale de la loi de comportement.

du comportement et il est généralement différent du *module tangent élastoplastique* ou encore le *module tangent continu* que l'on peut théoriquement déterminer à partir de la condition de cohérence  $\dot{\Phi} = 0$ .

Le module tangent consistant pour le schéma de retour implicite d'Euler découle de la procédure décrite ci-dessous : On écrit le système (5.20) sous sa forme incrémentale en omettant l'indice  $n + 1$

$$d\Sigma = \mathbf{C}^e : (d\mathbf{E} - d\mathbf{E}^p) \quad (5.39a)$$

$$d\mathbf{E}^p = d\Delta\Lambda \mathbf{r} + \Delta\Lambda d\mathbf{r} \quad (5.39b)$$

$$d\mathbf{H} = d\Delta\Lambda \mathbf{h} + \Delta\Lambda d\mathbf{h} \quad (5.39c)$$

$$d\Phi = \Phi_\Sigma : d\Sigma + \Phi_H \cdot d\mathbf{H} = 0 \quad (5.39d)$$

avec

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_\Sigma : d\Sigma + \mathbf{r}_H \cdot d\mathbf{H} \quad , \quad d\mathbf{h} = \mathbf{h}_\Sigma : d\Sigma + \mathbf{h}_H \cdot d\mathbf{H} \quad (5.40)$$

En substituant (5.39b) dans (5.39a) et en utilisant (5.40), on obtient ainsi  $d\Sigma$  et  $d\mathbf{H}$  :

$$\begin{Bmatrix} d\Sigma \\ d\mathbf{H} \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} d\mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - d\Delta\Lambda \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}} \quad (5.41)$$

avec

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{e-1} + \Delta\Lambda \mathbf{r}_\Sigma & \Delta\Lambda \mathbf{r}_H \\ \Delta\Lambda \mathbf{h}_\Sigma & -\mathbb{1} + \Delta\Lambda \mathbf{h}_H \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.42)$$

En substituant la solution (5.41) dans la condition de cohérence (5.39d) et en résolvant par rapport à  $d\Delta\Lambda$ , on obtient

$$d\Delta\Lambda = \frac{-\partial\Phi : \mathbf{A} : \begin{Bmatrix} d\mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}}{\partial\Phi : \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}} \quad , \quad \text{avec } [\partial\Phi] = [\Phi_\Sigma \ \Phi_H] \quad (5.43)$$

Le report de ce résultat dans (5.41) conduit à la solution cherchée

$$\begin{Bmatrix} d\Sigma \\ d\mathbf{H} \end{Bmatrix} = \left[ \mathbf{A} - \frac{(\mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}) \otimes (\partial\Phi : \mathbf{A})}{\partial\Phi : \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}} \right] : \begin{Bmatrix} d\mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

c'est-à-dire l'expression du module tangent consistant pour les incréments de contrainte et de variables internes.

### 5.3.3 Extension aux grandes déformations

Plusieurs logiciels commerciaux d'éléments finis offrent la possibilité aux utilisateurs de spécifier leurs propres modèles de comportement. Dans [ABAQUS \(2005\)](#), l'utilisateur est tenu de fournir une sous-routine, en langage Fortran ou C++, nommée *UMAT* pour des analyses statiques avec "ABAQUS/Standard" et une sous-routine nommée *VUMAT* pour des analyses dynamiques avec "ABAQUS/Explicit". Il est à noter que le module tangent consistant présenté précédemment est nécessaire dans une sous-routine *UMAT*.

L'intégration du comportement élastoplastique, discutée dans les sections précédentes pour un schéma implicite, est adéquat pour les problèmes à la fois de petite et de grande déformation par le logiciel ABAQUS. La raison en est que les rotations de corps rigide pour les déformations et les contraintes sont déjà prises en compte par ABAQUS avant qu'ils ne soient fournis à la routine (ABAQUS, 2005).

**La rotation de Jaumann :** est utilisée dans ABAQUS/Standard pour tous les types d'éléments à l'exception des éléments de type coque ou membrane. La mise à jour nécessaire pour la contrainte en grande déformation est

$$\Delta \Sigma = \Delta \check{\Sigma} + (W \Sigma_n - \Sigma_n W) \Delta t = \Delta \check{\Sigma} + R \Sigma_n R^T, \quad (5.45)$$

avec  $\Delta \check{\Sigma}$  est l'incrément de contrainte dans le référentiel tournant (co-rotationnel),  $R$  est la rotation et  $W$  est le taux de rotation qui est donné par la partie antisymétrique du gradient de vitesse.

La contrainte  $\Sigma_n$  au début de l'incrément (aussi la déformation) est déjà été tournée par ABAQUS (la contrainte produit au début de l'incrément est effectivement  $R \Sigma_n R^T$ ), donc tout ce que nous devons faire au sein de la *UMAT* est d'effectuer la mise à jour de la contrainte. Parfois, en fonction du modèle de plasticité employé, il est nécessaire d'utiliser des variables internes qui sont eux aussi des quantités tensorielles. En raison que les variables internes ne sont pas modifiées par ABAQUS, il est nécessaire pour l'utilisateur d'effectuer les rotations de corps rigide sur les tenseurs des variables internes. En fait, ABAQUS fournit une subroutine utilitaire pour simplifier ce processus : si par exemple, la variable tensorielle au début de l'incrément est noté  $x_n$ , alors l'utilisateur doit effectuer la rotation du corps rigide  $R x_n R^T$  avant la mise à jour de  $x$  à la fin de l'incrément dans *UMAT*. Cette rotation est effectuée par le simple appel à la subroutine utilisateur *ROTSIG* détaillée dans le manuel d'ABAQUS.

**La rotation propre de Green-Naghdi :** est utilisée dans ABAQUS/Explicit pour tous les types d'éléments et dans ABAQUS/Standard pour éléments de type coque ou membrane. Pour tout tenseur utilisé dans le modèle plastique, ABAQUS fait un transport du tenseur, au début de l'incrément, dans un référentiel tournant. Après actualisation à la fin de l'incrément, ABAQUS procède au transport inverse.

## 5.4 TESTS SUR DES ÉLÉMENTS SIMPLES

Dans cette section, l'implantation numérique du modèle de McElwain *et al.* dans ABAQUS, via sa routine *VUMAT*, est vérifiée à travers deux tests illustratifs sur un élément cubique simple cubique à huit nœuds (*C3D8R*) de côté  $l = 1 \text{ mm}$ . Le premier test se porte sur une traction hydrostatique pour lequel la confrontation entre le modèle de McElwain *et al.* et le modèle GTN est présentée. L'élément est sollicité à une vitesse normale constante de  $0.01 \text{ m/s}$  sur trois facettes adjacentes résultant à une expansion volumétrique uniforme. Les conditions aux limites dans les trois autres facettes sont telles que ces derniers peuvent s'étendre ou se

contracte librement dans le plan et sont restreint de mouvoir en dehors du plan, comme illustré sur la figure 5.2a.

Le second test est un cisaillement simple qui illustre aussi une comparaison entre les deux modèles. Le même élément cubique est soumis maintenant à une vitesse de cisaillement de  $0.01 \text{ m/s}$  sur une seule facette résultant ainsi à un chargement de cisaillement simple ( $\Sigma_{13} = \Sigma_{31} = \tau$ , sinon  $\Sigma_{ij} = 0$ ), comme illustré sur la figure 5.2b. Le matériau constitutif de la matrice

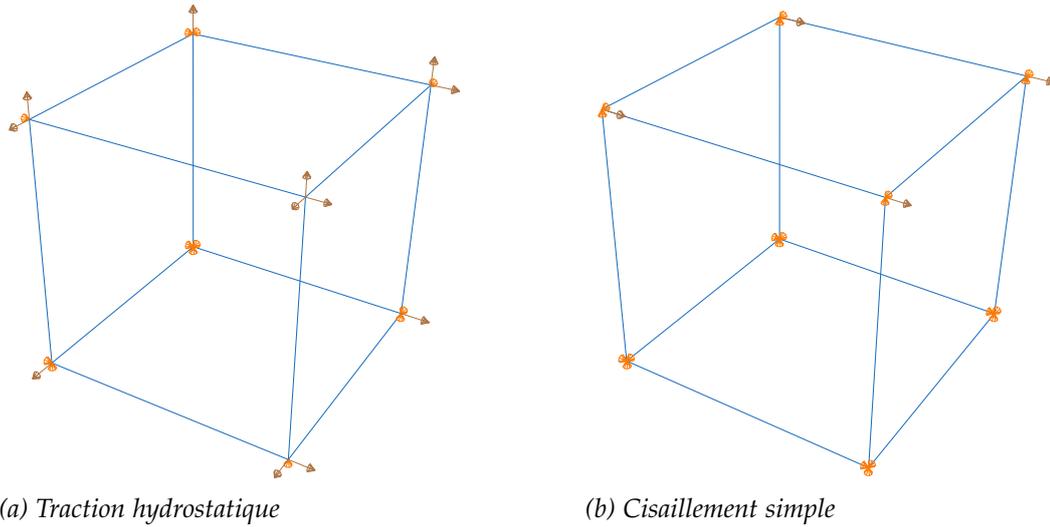


FIGURE 5.2 – Conditions de chargement d'un élément cubique simple.

est élastoplastique écrouissable, avec une limite d'écoulement  $\sigma_o = 200 \text{ MPa}$ , un module de Young  $E = 200 \text{ GPa}$  et un coefficient de poisson  $\nu = 0.3$ . L'expression de la loi d'écrouissage de la matrice  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p)$  est spécifiée par une loi en puissance :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_o} = \frac{E\bar{\epsilon}}{\sigma_o} \text{ pour } \bar{\sigma} < \sigma_o, \quad \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_o} = \left(1 + \frac{E\bar{\epsilon}^p}{\sigma_o}\right)^N \text{ pour } \bar{\sigma} \geq \sigma_o \quad (5.46)$$

où  $N$  est le coefficient d'écrouissage dont la valeur est choisie égale à 0.1. La valeur initiale de la porosité  $f_o$  est fixé à 0.005 et les paramètres de nucléation sont pris égale à  $\epsilon_N = 0.3$ ,  $s_N = 0.1$  et  $f_N = 0.04$ . Dans ce test aussi, le critère de coalescence  $f^*(f)$  est retenu avec  $f_c = 0.15$  et  $f_f = 0.25$ .

#### 5.4.1 Traction hydrostatique

Les figures 5.3a–b montrent les variations de la contrainte hydrostatique normalisée  $\Sigma_m/\sigma_o$  ainsi que la fraction volumique du vide  $f$  en fonction de la déformation volumétrique  $E_v = 3 \ln(1 + \Delta l/l)$ . Dans les deux figures, la comparaison est effectuée entre les résultats obtenus par la routine *VUMAT* pour le modèle GTN, avec  $q_1 = 1.5$  et  $q_2 = 1$ , et le modèle de McElwain *et al.* pour les trois microstructures et les deux définitions de la limite d'écoulement plastique. Les résultats fournis par le modèle GTN incorporé dans ABAQUS sont également inclus dans les figures pour validation du code implanté. Les résultats du modèle GTN obtenus par la routine *VUMAT* sont identiques à ceux fournis par ABAQUS, ce qui constitue une validation partielle de l'implantation numérique de la loi de comportement pour ce test.

On note sur la figure 5.3a que les résultats du modèle de McElwain *et al.* obtenus pour les trois microstructures, en se basant sur la "Définition 2", sont proches de ceux obtenus pour le modèle GTN. En revanche, les résultats du modèle de McElwain *et al.* obtenus pour les trois microstructures, en se basant sur la "Définition 1", montrent une différence notable par rapport au modèle GTN. Les mêmes constatations sont à faire sur la figure 5.3b.

#### 5.4.2 Cisaillement simple

Dans le cas du cisaillement simple, la nucléation du vide est négligée et  $f^*$  est prise égale  $f$  pour toutes les valeurs de  $f$ . La figure 5.4 montre la variation de la contrainte équivalente normalisée  $\Sigma_{eq}/\sigma_0$  en fonction de la déformation équivalente  $E_{eq}$  pour le modèle GTN et le modèle de McElwain *et al.*, pour les trois microstructures et les deux définitions de la limite d'écoulement plastique. Durant ce test de cisaillement simple, il est à signaler que la porosité enregistrée au cours du chargement reste constante  $f = f_0 = 0.005$ , et ce pour les deux modèles de comportement.

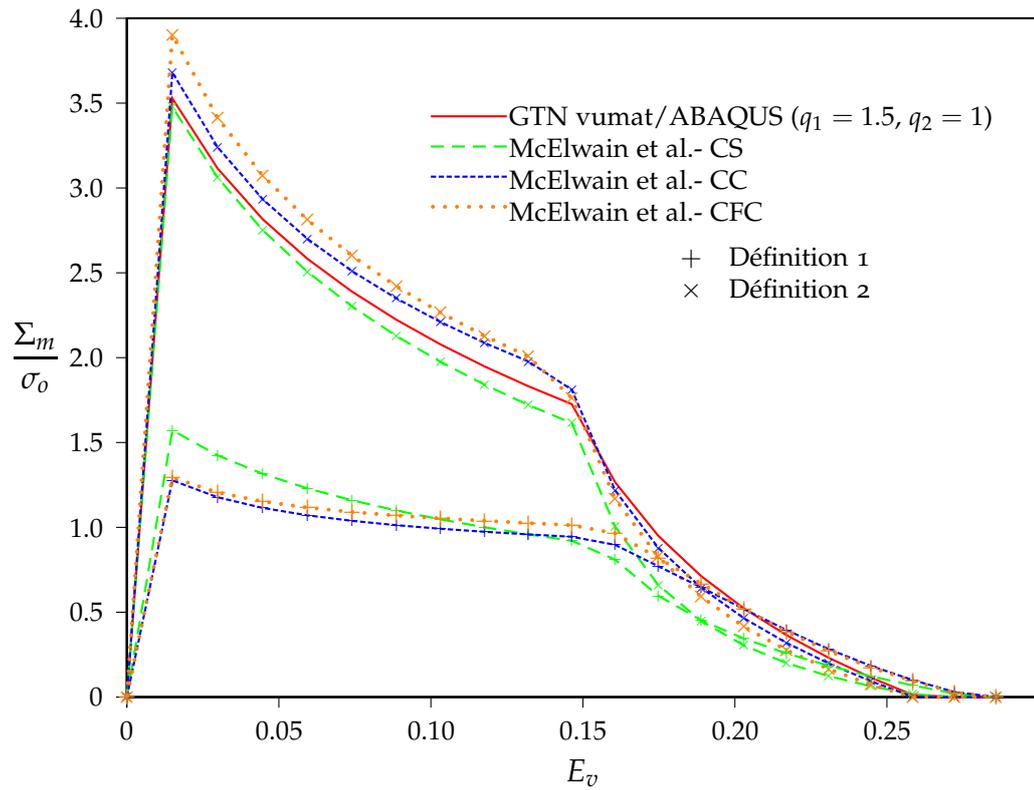
Comme le test précédent, la validation du code numérique est assurée vu que les résultats du modèle GTN obtenus par la routine *VUMAT* sont identiques à ceux obtenus par *ABAQUS*. En outre, on a une bonne concordance entre les résultats du modèle de McElwain *et al.* pour les différentes microstructures et le modèle GTN, notamment pour le cas de la "définition 2" du seuil d'écoulement plastique.

### 5.5 TESTS SUR UN MODÈLE DE CELLULE DE BASE

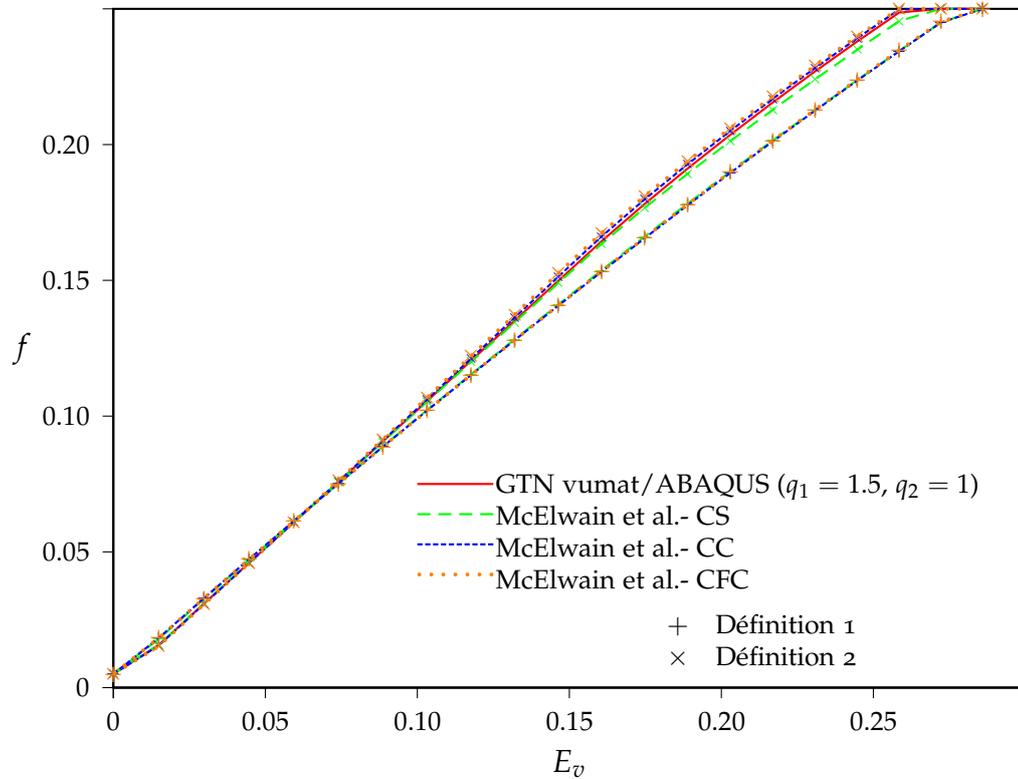
Les propriétés du modèle de comportement de McElwain *et al.* peuvent être aussi illustrées en étudiant la réponse du modèle de cellule de base cubique représenté à la figure 5.5. Deux cas de chargement, traction uniaxiale et cisaillement simple, sont utilisés pour montrer la différence de réponse entre le modèle de McElwain *et al.* et le modèle GTN. Afin de permettre l'occurrence en traction uniaxiale de la striction, la cellule est discrétisée en trois éléments identiques à huit nœuds (*C3D8R*) alignés selon la direction 2, comme illustré sur les figures 5.5a-b. Les deux facettes dans le plan 13 sont chargées avec une vitesse constante dans la direction 2 (resp. 1) pour traction uniaxiale (resp. cisaillement simple).

Les propriétés d'écrouissage du matériau constitutif de la matrice sont supposées être gouvernées par une loi puissance à travers la relation (5.46) avec  $\sigma_0/E = 1/300$ , un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et un coefficient d'écrouissage  $N = 0.1$ . Les paramètres matériaux relatives à la nucléation des vides et l'évolution de l'endommagement sont :

- Porosité initiale :  $f_0 = 0$
- Paramètres de Tvergaard (GTN) :  $q_1 = 1.5$  et  $q_2 = 1$
- Nucléation :  $\varepsilon_N = 0.3$ ,  $s_N = 0.1$  et  $f_N = 0.04$
- Coalescence :  $f_c = 0.05$  et  $f_f = 0.25$
- Le paramètre  $a_2$  (McElwain *et al.*) est seulement considéré dans le cas de la définition 2.



(a)



(b)

FIGURE 5.3 – Variation de : (a) la contrainte hydrostatique normalisée  $\Sigma_m/\sigma_o$ ; (b) la porosité  $f$ , en fonction de la déformation volumétrique  $E_v = 3 \ln(1 + \Delta l/l)$ .

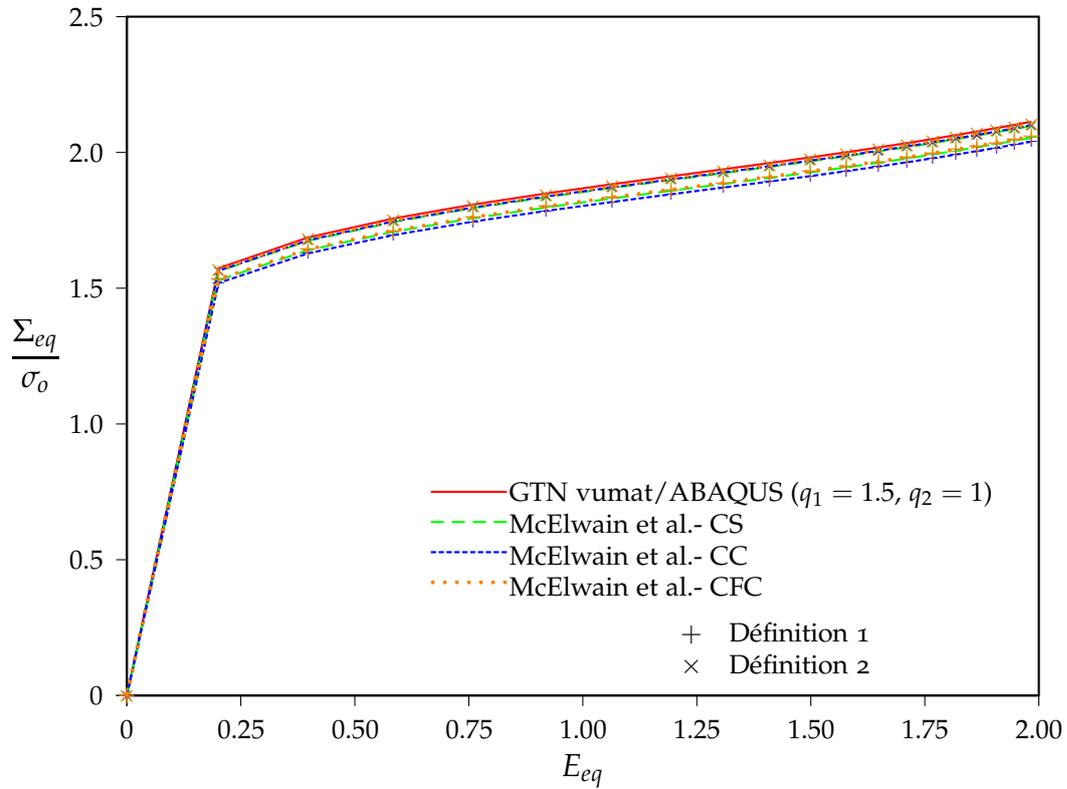


FIGURE 5.4 – Variations de la contrainte équivalente normalisée  $\Sigma_{eq}/\sigma_0$  en fonction de la déformation équivalente  $E_{eq}$ .

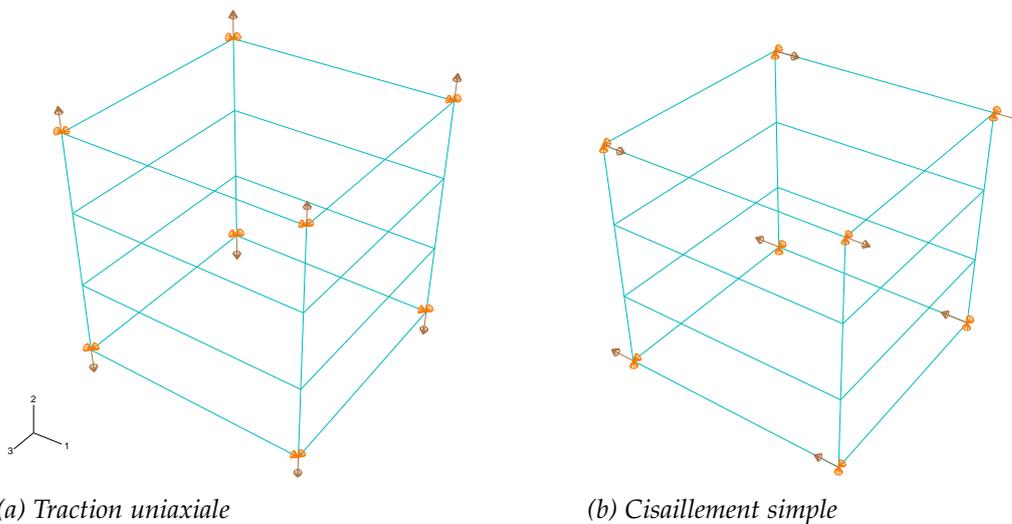


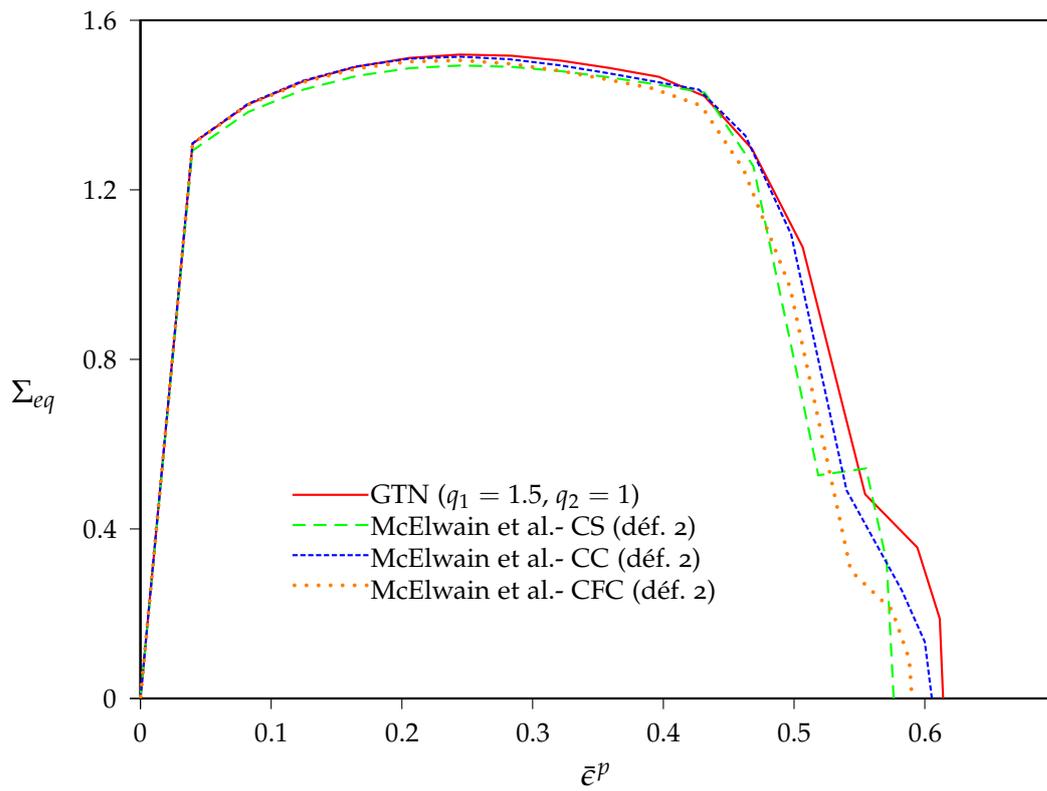
FIGURE 5.5 – Cellule de base à trois éléments utilisé pour la comparaison des réponses mécaniques des modèles GTN et McElwain *et al.*.

### 5.5.1 Traction uniaxiale

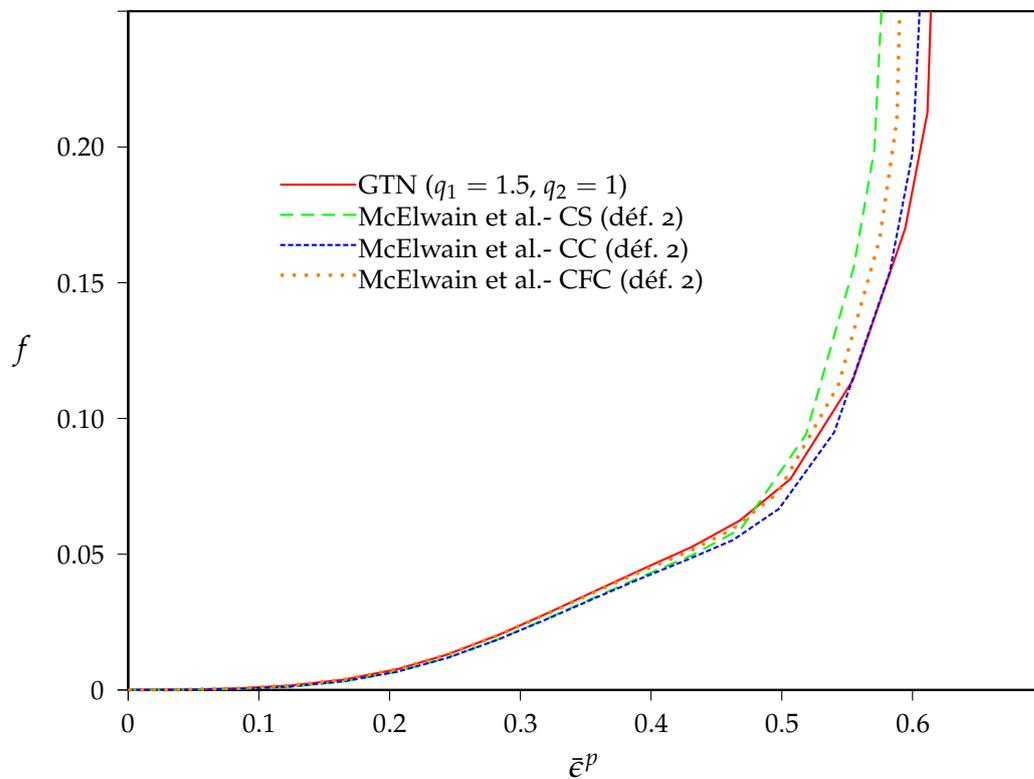
Les variations de la contrainte équivalente  $\Sigma_{eq}$  et de la porosité  $f$  en fonction de la déformation plastique équivalente dans la matrice  $\bar{\epsilon}^p$  sont représentées sur la figure 5.6. Les courbes obtenues pour les deux modèles de comportement présentent les mêmes allures surtout durant la phase d'écroutissage. Cependant, nous avons des différences notables en cours d'adoucissement. Par ailleurs, il semblerait que la microstructure CS est la moins résistante à la traction uniaxiale.

### 5.5.2 Cisaillement simple

Les variations de la contrainte équivalente  $\Sigma_{eq}$  et la porosité  $f$  en fonction de la déformation plastique équivalente dans la matrice  $\bar{\epsilon}^p$  sont représentées sur la figure 5.7 dans le cas de cisaillement simple. Les courbes obtenues par les deux modèles de comportement présentent les mêmes allures durant la phase d'écroutissage. En revanche, nous constatons des différences significatives en cours d'adoucissement. La microstructure CS est plus résistante au cisaillement que les microstructures CC et CFC.

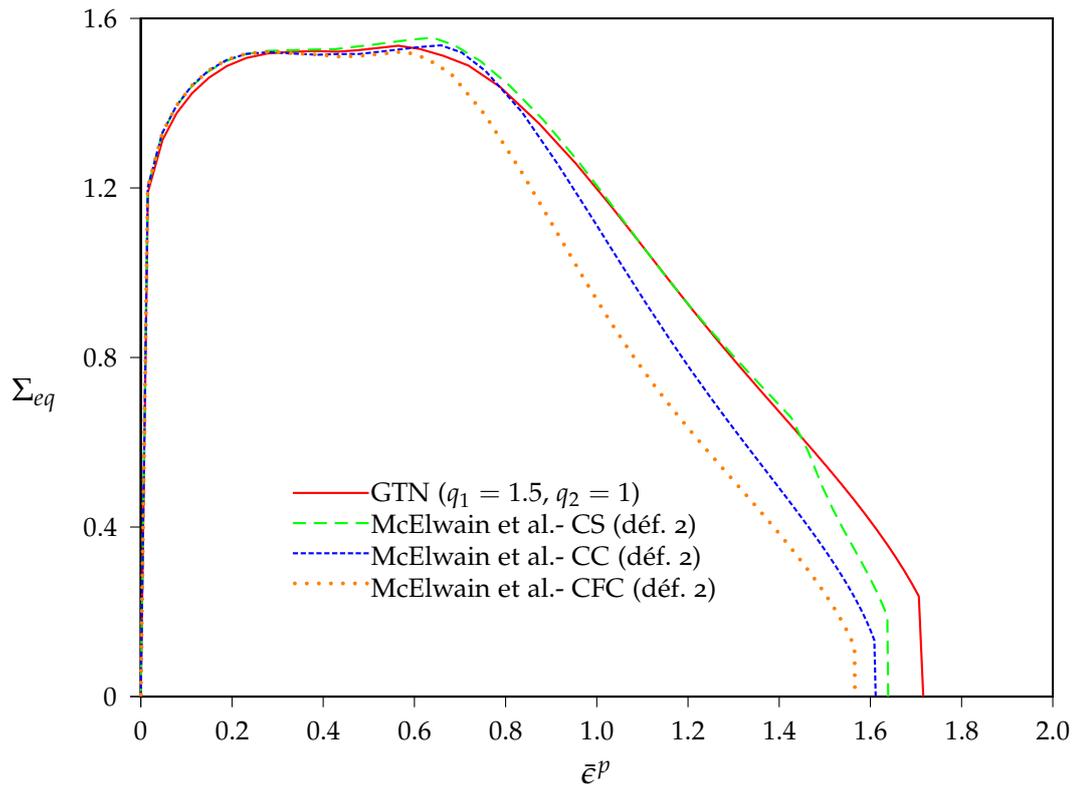


(a)

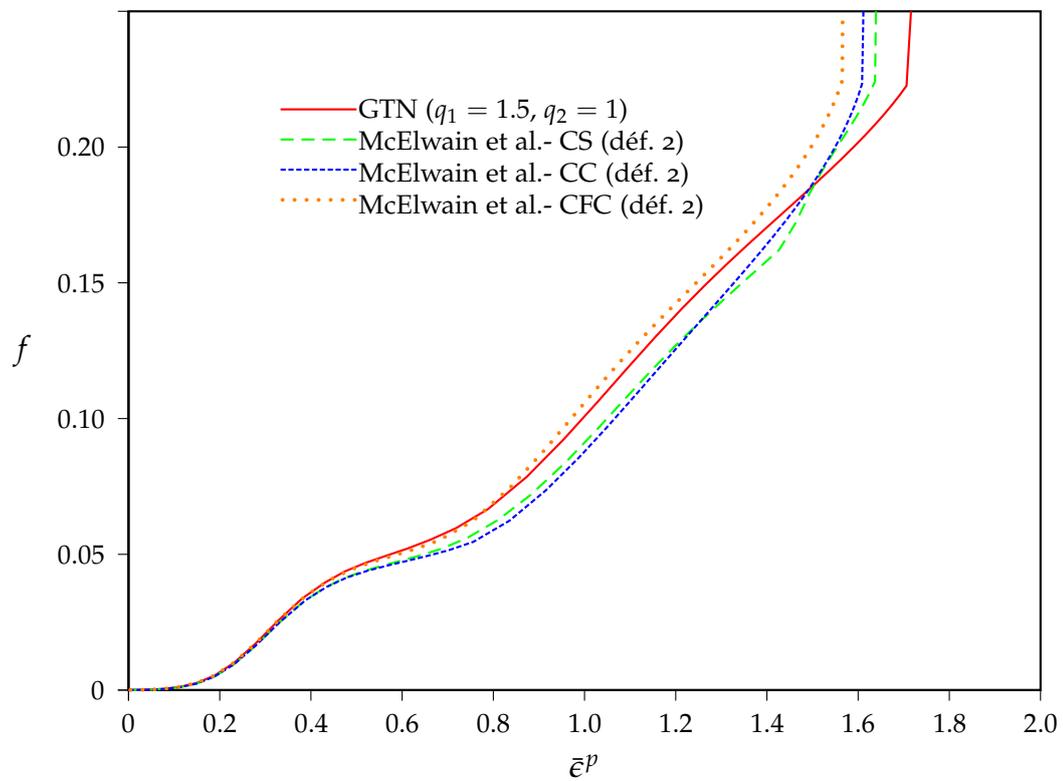


(b)

FIGURE 5.6 – Variations de : (a) la contrainte équivalente  $\Sigma_{eq}$ ; (b) la porosité  $f$ , en fonction de la déformation plastique équivalente dans la matrice  $\bar{\epsilon}^P$  sous la condition de chargement uniaxiale du modèle de cellule de base.



(a)



(b)

FIGURE 5.7 – Variations de : (a) la contrainte équivalente  $\Sigma_{eq}$ ; (a) la porosité  $f$ , en fonction de la déformation plastique équivalente dans la matrice  $\bar{\epsilon}^p$  sous la condition de chargement en cisaillement simple du modèle de cellule de base.



# APPLICATIONS DU MODÈLE DE McELWAIN 6 *et al.* (2006)

## SOMMAIRE

6.1	STRICTION D'UNE BARRE CYLINDRIQUE LISSE . . . . .	125
6.1.1	Description des conditions de la simulation . . . . .	125
6.1.2	Résultats . . . . .	127
6.2	RUPTURE D'UNE ÉPROUVETTE AXISYMETRIQUE ENTAILLÉE . . . . .	127
6.2.1	Description des conditions de la simulation . . . . .	129
6.2.2	Résultats . . . . .	130
6.3	CISAILLEMENT 2D . . . . .	131
6.3.1	Description des conditions de la simulation . . . . .	131
6.3.2	Résultats . . . . .	135

LE modèle de McElwain *et al.* (2006a;b), présenté dans la section 4.4.4, a été implanté dans ABAQUS/Explicit via sa routine *VUMAT* en optant pour un algorithme de retour implicite d'Euler qui permet d'avoir une stabilité inconditionnelle dans l'intégration de la loi constitutive. Une première validation de l'implantation numérique du modèle a été obtenue à travers l'étude comparative des réponses d'éléments tests soumis à des sollicitations simples (traction simple, traction hydrostatique et cisaillement simple). Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré à l'analyse du comportement de structures simples, depuis l'état matériel jusqu'à la rupture complète, dont le matériau constitutif est décrit par le modèle de McElwain *et al.*.



## 6.1 STRICTION D'UNE BARRE CYLINDRIQUE LISSE

Le comportement à la rupture d'une barre cylindrique lisse (c'est-à-dire non entaillée) soumise à une traction est l'objet de cette section. Cet exemple est choisi en raison des nombreuses études dont il a fait l'objet (Needleman et Tvergaard, 1984; Tvergaard et Needleman, 1984; Aravas, 1987; Thomason, 1990). Nous comparons les résultats numériques prédits par les modèles GTN et McElwain *et al.*. Expérimentalement, la rupture de ce type de barre se produit en son milieu, selon le mode dit rupture en "tronc de cône" (Tvergaard et Needleman, 1984; Thomason, 1990). L'évolution de la configuration de la barre depuis l'état initial jusqu'à la rupture finale en "tronc de cône" est représentée schématiquement à la figure 6.1 (Leblond, 2003). Tout d'abord, le milieu de l'éprouvette se rétrécit (striction); ensuite une fissure s'amorce au centre de la partie "strictionnée", au voisinage de l'axe de symétrie, et se propage horizontalement vers la surface libre; enfin, au voisinage de cette dernière et jusqu'à la rupture finale de l'éprouvette, la fissure dévie à 45° du plan horizontal, soit vers le haut soit vers le bas, dessinant ainsi, compte tenu de l'axisymétrie, un tronc de cône. Un calcul de structure par éléments finis faisant l'hypothèse d'un comportement local régi par le modèle GTN permet de reproduire fidèlement une telle succession d'événements (Tvergaard et Needleman, 1984; Thomason, 1990; Leblond, 2003).

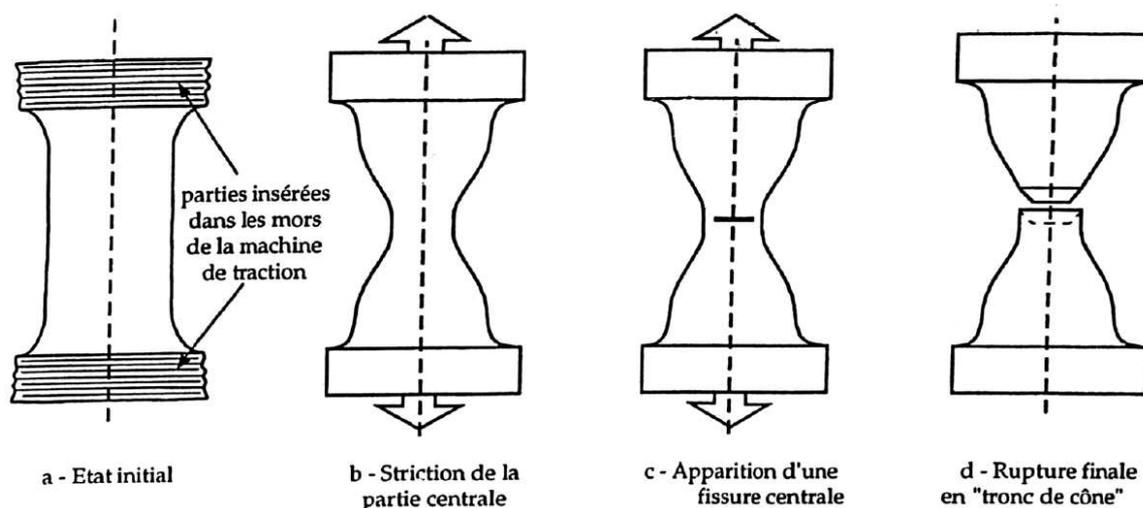


FIGURE 6.1 – Succession d'événements observée sur une éprouvette axisymétrique lisse en traction : Source Leblond (2003).

### 6.1.1 Description des conditions de la simulation

On considère une barre de longueur initiale de  $2l_0$  et de section circulaire de rayon initial  $R_0$ , avec  $l_0/R_0 = 4$  (cf. figure 6.2a-b). Le rayon  $R_0$  est pris égale à l'unité dans ce qui suit. En raison de l'axisymétrie du problème considéré seul le quart de la structure est analysé (cf. figure 6.2a). Le maillage utilisé consiste en 330 éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR). Le maillage est raffiné près du centre de l'éprouvette en raison de l'adoucissement et la déformation intense suspectés dans cette région (cf. figure 6.2c). Une imperfection géométrique initiale  $\Delta R_0 = 0.005 R_0$  est utilisée pour amorcer la striction dans

l'éprouvette analysée. Les conditions aux limites sont telles que selon l'axe de révolution  $e_z$  tous les nœuds le long de  $r = 0$  ont un déplacement  $u_r = 0$ , et selon l'axe de symétrie  $e_r$  tous les nœuds le long de  $z = 0$  ont un déplacement  $u_z = 0$ . Les nœuds à l'extrémité supérieure de l'éprouvette ( $z = 4$ ) sont animés d'une vitesse  $v$ , selon la direction  $e_z$ , qui augmente linéairement de 0 jusqu'à 30 durant 0.025 s et diminue ensuite linéairement de 30 jusqu'à 0 sur une durée de 0.05 s.

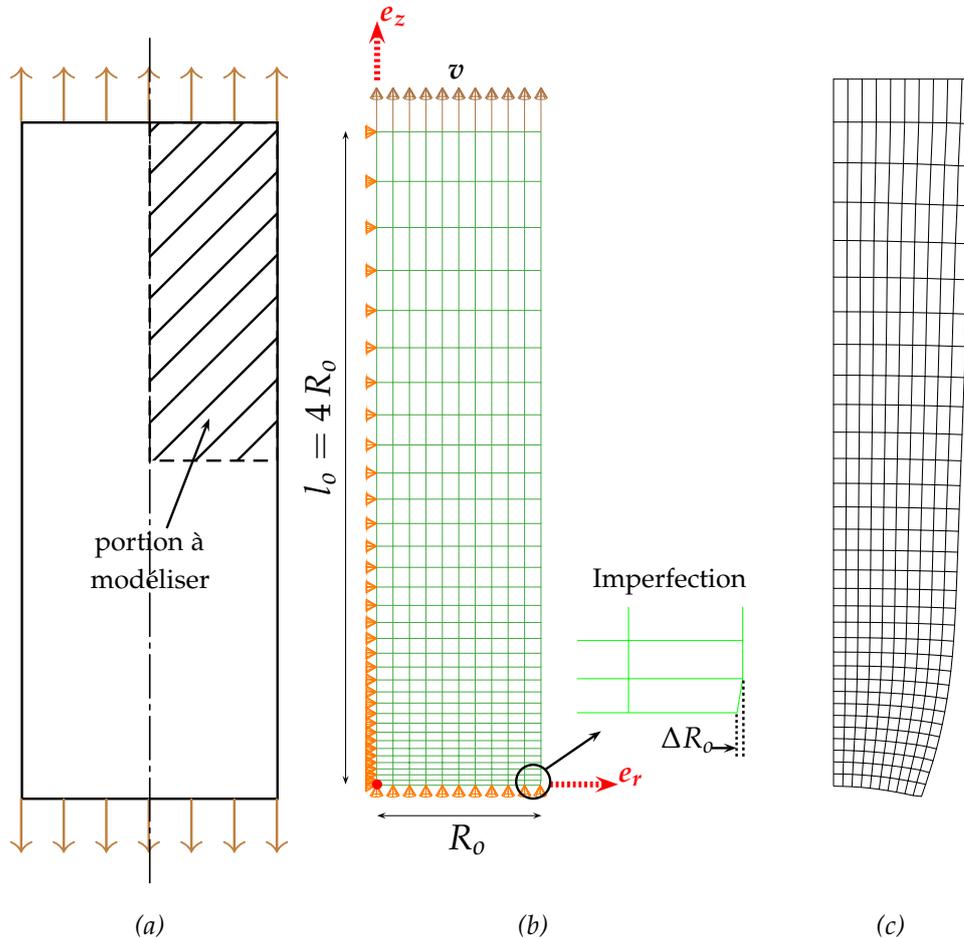


FIGURE 6.2 – Barre cylindrique lisse en traction : (a) Seul la partie hachurée est analysée ; (b) Maillage éléments finis, conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation ; (c) Configuration de la barre à la rupture.

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier courant avec un rapport  $\sigma_0/E = 1/300$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . L'écroutissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi en puissance définie par (5.46) avec un coefficient d'écroutissage  $N = 0.1$ . Le matériau est supposé initialement dense  $f_0 = 0$ . Les mêmes paramètres de coalescence et de nucléation que ceux utilisés par Tvergaard et Needleman (1984) sont considérés, à savoir,  $f_c = 0.15$  et  $f_f = 0.25$  pour décrire la coalescence et  $\varepsilon_N = 0.3$ ,  $s_N = 0.1$  et  $f_N = 0.04$  pour décrire la nucléation de nouvelles cavités pilotée par la déformation plastique équivalente dans la matrice. Les coefficients  $q_1$  et  $q_2$  du modèle GTN sont pris égaux à 1.5 et 1 respectivement. En ce qui concerne le modèle de McElwain *et al.*, seul le paramètre  $a_2$  (cf. relation (4.60)) représentant le cas de la deuxième définition du seuil d'écoulement plastique est utilisé pour les trois microstructures CS, CC et CFC.

	GTN	CS	CC	CFC
$E_N^{rup}$	0.277	0.285	0.294	0.298
$(\Delta R/R_o)^{rup}$	0.375	0.381	0.417	0.418

TABLE 6.1 – Comparaisons des déformation à la rupture obtenues pour les deux modèles de comportement, GTN et McElwain *et al.*.

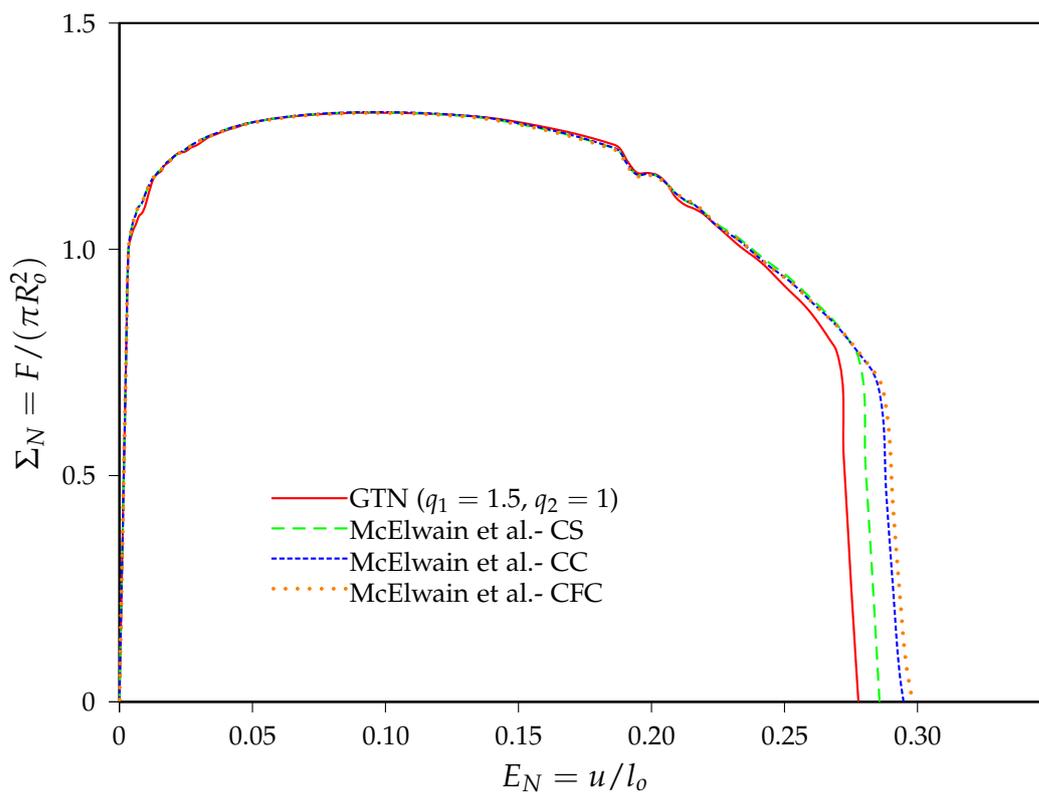
### 6.1.2 Résultats

L'évolution de la contrainte nominale  $\Sigma_N = F/\pi R_o^2$  en fonction de la déformation nominale  $E_N = u/l_o$  et de la réduction nominale de rayon  $\Delta R/R_o$  pour les deux modèles de comportement GTN et McElwain *et al.* est représentée sur les figures 6.3a-a. Les courbes obtenues par les deux modèles présentent les mêmes allures. La contrainte nominale  $\Sigma_N$  commence d'abord par augmenter jusqu'à atteindre un maximum puis la courbe se redresse et amorce une descente à cause de la diminution de la section au niveau du col de la barre. Cette chute s'accroît vers la fin en raison de la coalescence de certaines cavités au niveau du col de la barre. La force maximale, correspond au début de la striction Tvergaard et Needleman (1984), est atteinte pour les deux modèles à une déformation nominale d'environ  $E_N^{str} = 0.0945$  et une réduction de rayon  $(\Delta R/R_o)^{str} = 0.0487$  avec une valeur de  $F_{max}^{str} = 1.301 \pi R_o^2$ . Quant à la rupture de la barre, les prédictions des deux modèles sont dissemblables : le tableau 6.1 regroupe les déformations à la rupture de l'éprouvette pour les deux modèles de comportement.

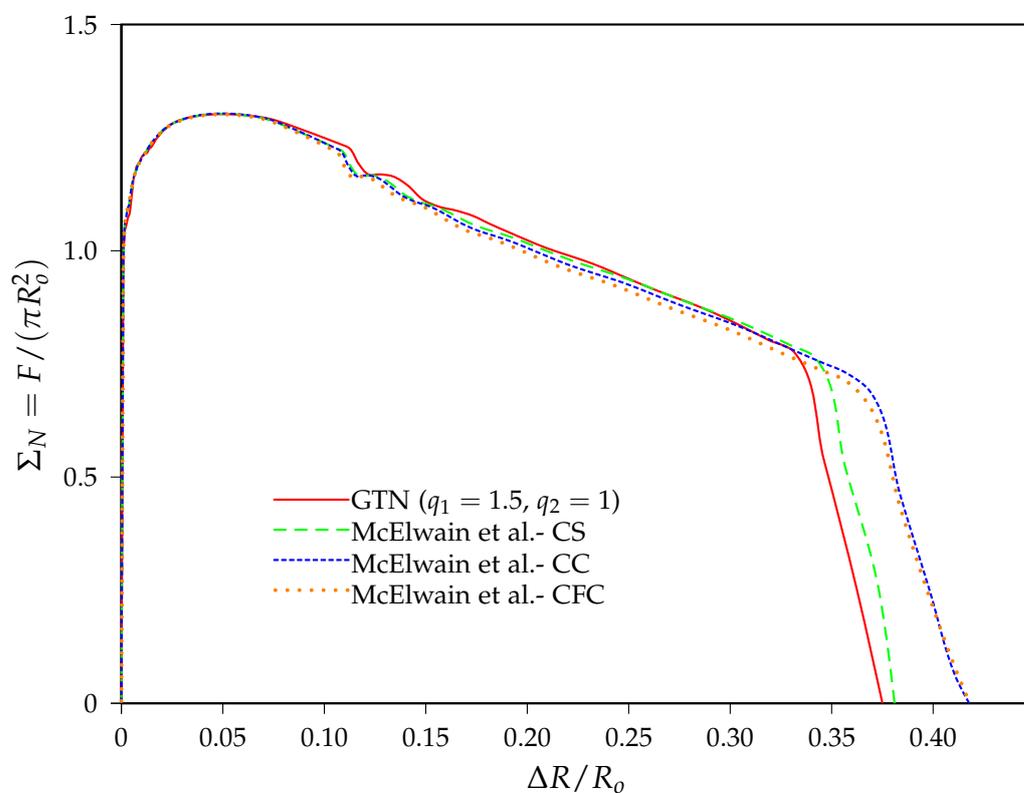
Le maillage déformé typique de cet essai de striction d'une éprouvette lisse est affiché à côté du maillage initial sur la figure 6.2.

## 6.2 RUPTURE D'UNE ÉPROUVETTE AXISYMETRIQUE ENTAILLÉE

Les éprouvettes axisymétriques entaillées (AE), figure 6.4, sont des éprouvettes de traction qui ont été mises au point à l'origine pour analyser l'effet de la contrainte hydrostatique sur la rupture par déchirement ductile. La rupture d'une éprouvette AE se développe au niveau de l'entaille. En jouant sur le rayon d'entaille  $r$ , il est possible d'atteindre localement des niveaux de contrainte supérieurs à la limite d'écoulement du matériau ce qui se traduit par une augmentation du taux de triaxialité des contraintes  $T$ . Pour des rayons d'entailles  $r$  assez importants et en gardant le même rayon de la section minimale  $R_o$ , les éprouvettes AE permettent d'engendrer des états de contrainte et de déformation quasi-homogènes et un taux de triaxialité constant et faible au centre de l'éprouvette (Needleman et Tvergaard, 1984; Besson, 1999; Benzerga *et al.*, 2004). Dans ce qui suit, des simulations de la rupture des éprouvettes AE sont effectuées en vue de comparer le modèle GTN et le modèle de McElwain *et al.*. Pour ce faire, on s'est basé sur les travaux de Chang-Kyun *et al.* (2007) qui ont effectué des essais de traction sur des éprouvettes AE avec trois entailles différentes. Les paramètres du modèle GTN pour un acier API X65 (acier utilisé dans les conduites de gaz et de pétrole) ont



(a)



(b)

FIGURE 6.3 – Variations de la contrainte nominale  $\Sigma_N = F / \pi R_0^2$  en fonction de : (a) la déformation nominale  $E_N = u/l_0$ ; (b) la réduction nominale de rayon  $\Delta R/R_0$  de l'éprouvette.

été déterminés par ces auteurs par confrontation des résultats expérimentaux et numériques obtenus sur des éprouvettes  $AE$ . Nous utilisons ces mêmes paramètres pour nos simulations.

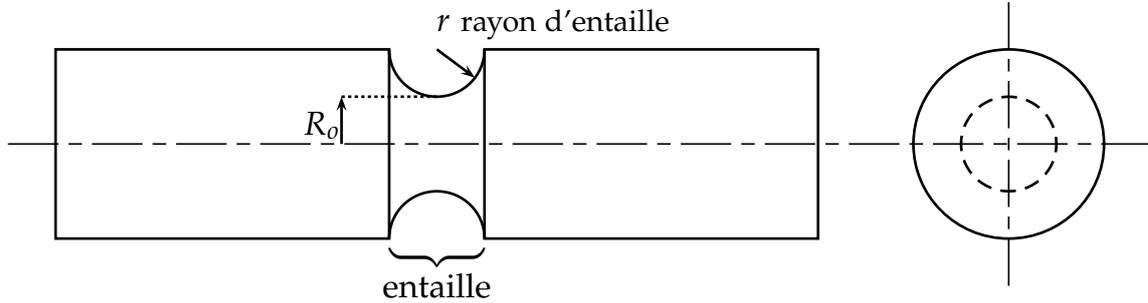


FIGURE 6.4 – Géométrie d'une éprouvette axisymétrique entaillée.

### 6.2.1 Description des conditions de la simulation

Des simulations numériques de deux éprouvettes  $AE$  avec deux entailles différentes ont été effectuées. Les éprouvettes sont désignées par  $AE_r$  où  $r$  représente la valeur du rayon de l'entaille (Besson, 1999). Par symétrie seul un quart du plan méridien est modélisé en mode axisymétrique. La figure 6.5 présente le maillage éléments finis de deux éprouvettes  $AE_{1.5}$  et  $AE_3$ , composé d'éléments axisymétriques à 4 nœuds avec intégrations réduite (CAX4R). Au niveau de l'entaille, le maillage est très dense car c'est la zone litigieuse de fort endommagement. Pour les deux éprouvettes retenues, la barre cylindrique entaillée a une longueur initiale de  $2l_0 = 36 \text{ mm}$ , un rayon extérieur de  $R_{ext} = 5 \text{ mm}$  et un rayon de la section minimale au niveau de l'entaille de  $R_o = 3 \text{ mm}$ . Les conditions aux limites et de chargement sont identiques aux deux éprouvettes (cf. figure 6.5) : blocage des déplacements longitudinaux (resp. transversaux) des nœuds en  $z = 0$  (resp. en  $r = 0$ ), et vitesse de déplacement  $v = 10 \text{ mm.s}^{-1}$  imposée selon l'axe  $e_z$  aux nœuds du sommet de l'éprouvette.

La matrice est supposée avoir un comportement élastoplastique à écrouissage isotrope. Pour les simulations éléments finis, on utilise les caractéristiques mécaniques suivantes : module de Young  $E = 210.7 \text{ GPa}$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Des essais de traction effectués par Chang-Kyun *et al.* (2007) sur éprouvettes lisses ont permis de définir la courbe d'écrouissage (figure 6.6). Afin d'obtenir la loi d'écrouissage, la courbe de traction est approchée par une loi puissance de type  $\bar{\sigma} = K (\bar{\epsilon}^p)^N$  avec

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \text{ si } \epsilon^p \leq 0.021 ; \bar{\sigma} = 896.89 (\epsilon^p)^{0.1693} \text{ (MPa) si } \epsilon^p > 0.021 \quad (6.1)$$

où  $\sigma_0 = 464.5 \text{ MPa}$  est la limite d'écoulement initial de l'acier considéré.

On complète la description des conditions de la simulation par la donnée des paramètres des modèles GTN et McElwain *et al.* (Chang-Kyun *et al.*, 2007) :

- porosité initiale  $f_0$  de l'acier considéré est prise égale à 0.00125 ;
- paramètres de Tvergaard :  $q_1 = 1.5$  et  $q_2 = 1$  ;
- paramètres de nucléation de nouvelles cavités pilotée par la déformation plastique équivalente dans la matrice :  $\epsilon_N = 0.3$ ,  $s_N = 0.1$  et  $f_N = 0.0008$  ;
- paramètres de coalescence des cavités :  $f_c = 0.015$  et  $f_f = 0.25$  ; et

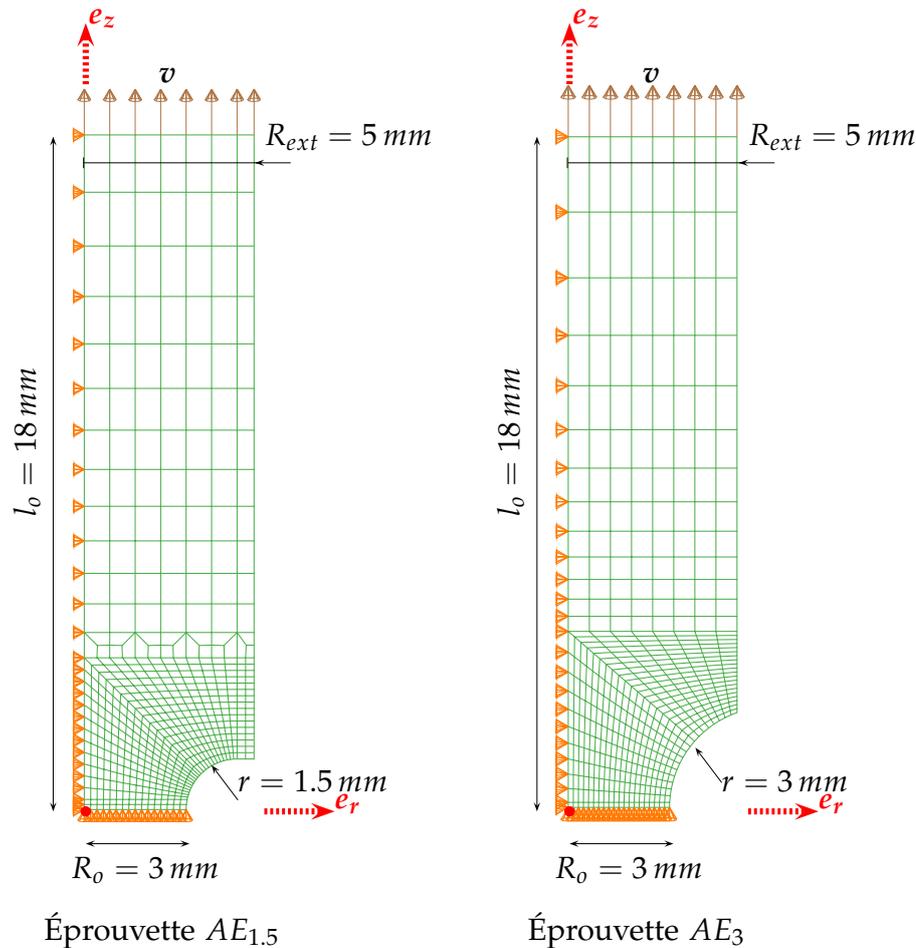


FIGURE 6.5 – Éprouvettes axisymétrique entaillées : maillage éléments finis, conditions aux limites et chargement utilisés dans la simulation.

– paramètre  $a_2$  du modèle de McElwain *et al.* : seule la "Définition 2" est retenue.

### 6.2.2 Résultats

L'évolution de la contrainte nominale  $\Sigma_N = F/\pi R_0^2$  en fonction de la déformation nominale  $E_N = u/l_0$  et de la réduction nominale de rayon  $\Delta R/R_0$  au niveau de l'entaille pour les deux modèles de comportement GTN et McElwain *et al.* est donnée sur les figures 6.7 et 6.8. Les courbes obtenues ont des allures semblables à celles obtenues lors de la simulation de traction d'une éprouvette lisse : la contrainte nominale commence d'abord par augmenter jusqu'à atteindre un maximum qui correspond au début de la striction, puis amorce une descente à cause de la diminution de la section au niveau de l'entaille. Cependant, la phase d'adoucissement présente des différences notables entre les deux modèles de comportement, GTN et McElwain *et al.*.

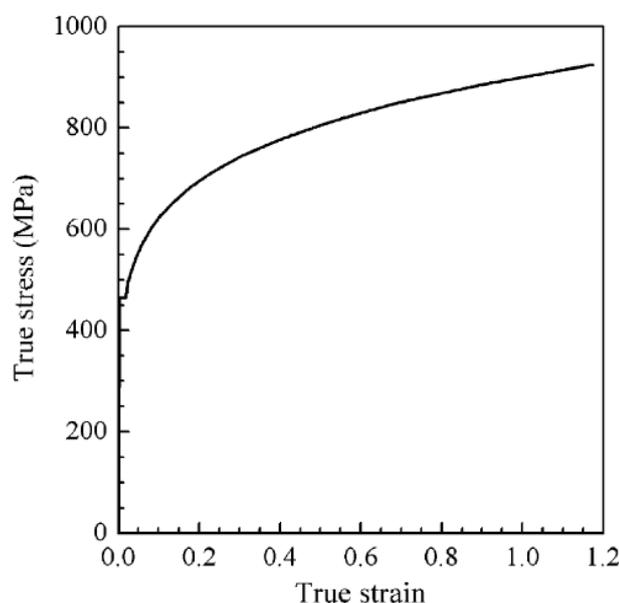


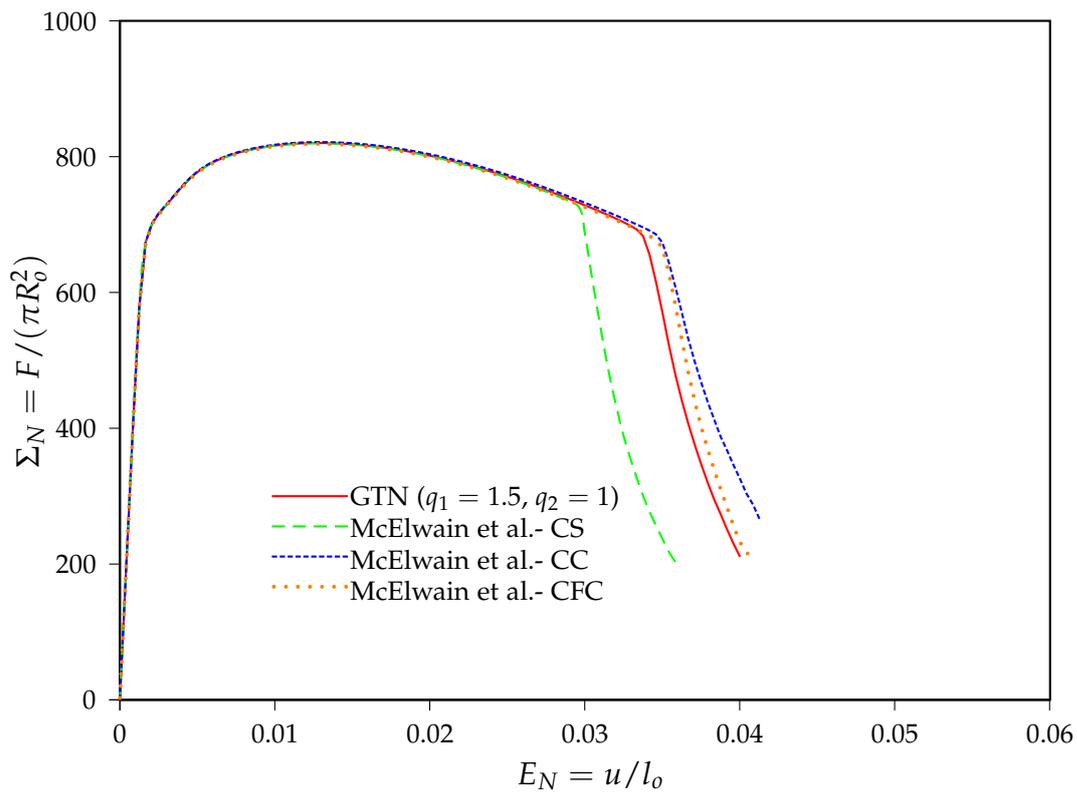
FIGURE 6.6 – Courbe d'écouissage à température ambiante pour l'acier API X65 : Source *Chang-Kyun et al. (2007)*.

## 6.3 CISAILLEMENT 2D

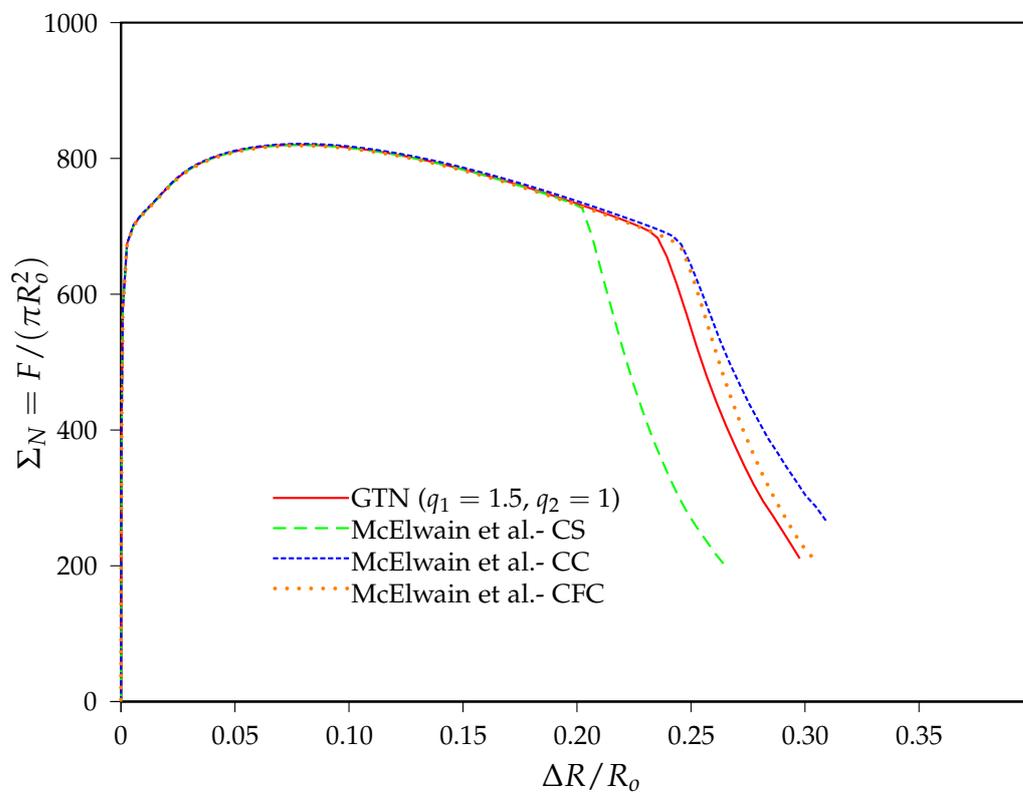
*Cowie et al. (1989)* ont effectué des essais de cisaillement sur des aciers à haute résistance sous des conditions de chargement quasi-statique et dynamique. Ces essais avaient pour objectif d'élucider les mécanismes fondamentaux de la rupture par déformation de cisaillement localisée. Les résultats expérimentaux suggèrent fortement que la déformation localisée dans les aciers étudiés est due à la nucléation de microvides de dimension moyenne égale à  $100\text{ nm}$  plutôt qu'à la croissance de microvides de dimension plus grandes. La géométrie des échantillons utilisées pour effectuer les essais de cisaillement est représenté sur la figure 6.9. Les essais dynamiques ont été réalisés à un taux de déformation imposé supérieure à  $10^4\text{ s}^{-1}$  tandis que les essais quasi-statique ont été réalisés à un taux de déformation de  $10^{-3}\text{ s}^{-1}$ . Dans cette section on simule en déformation plane le comportement à la rupture dynamique de la partie cisailée mise en évidence sur la figure 6.9a. La simulation vise la comparaison entre les prédictions du modèle GTN et le modèle de McElwain *et al.*.

### 6.3.1 Description des conditions de la simulation

La simulation numérique en déformation plane d'une bande de l'éprouvette soumise à un cisaillement pur a été effectuée. La géométrie de la bande concernée ainsi que le maillage correspondant sont représentés sur la figure 6.10a. Le maillage est composé d'éléments pour déformation plane à 4 nœuds avec intégrations réduite (CPE4R). Au milieu de la bande, le maillage est très dense car cette zone est la plus endommagée. Les conditions aux limites sont tels que les déplacements transversaux des nœuds de l'extrémité supérieure, de l'extrémité inférieure et ceux du milieu sont bloqués. Le chargement consiste à imposer des vitesses de déplacement de module  $v = 50\text{ m/s}$  de directions opposées aux faces supérieure et inférieure de la bande.

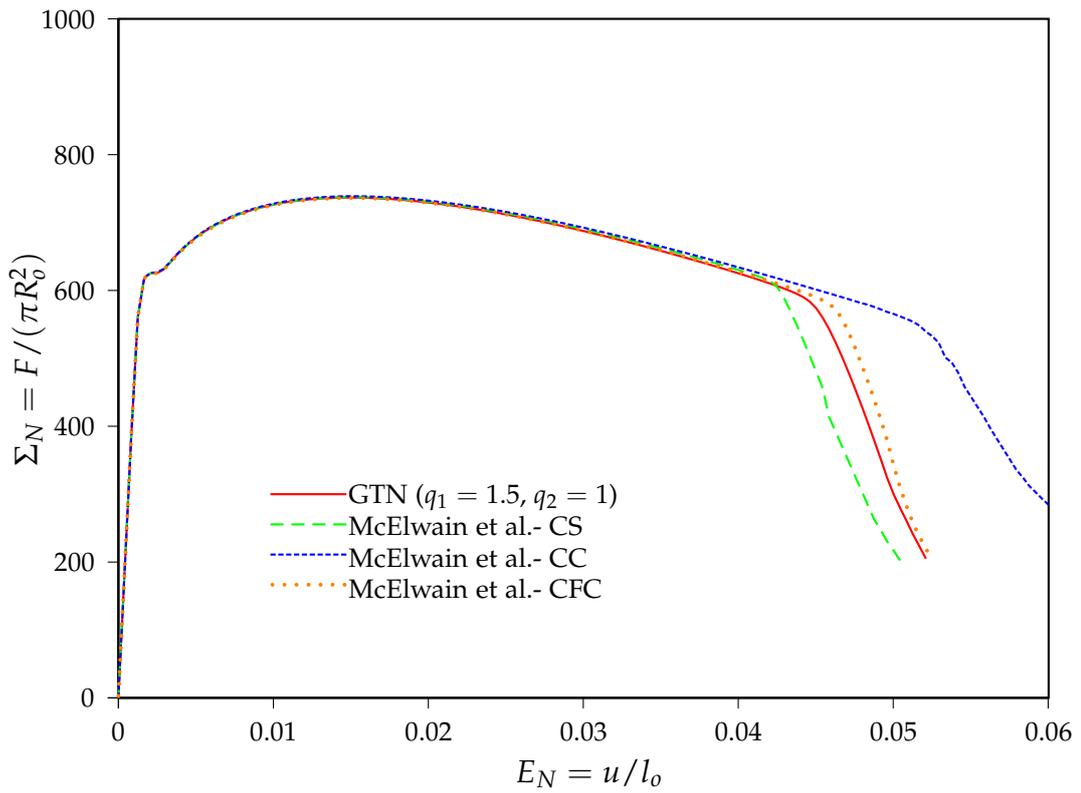


(a)

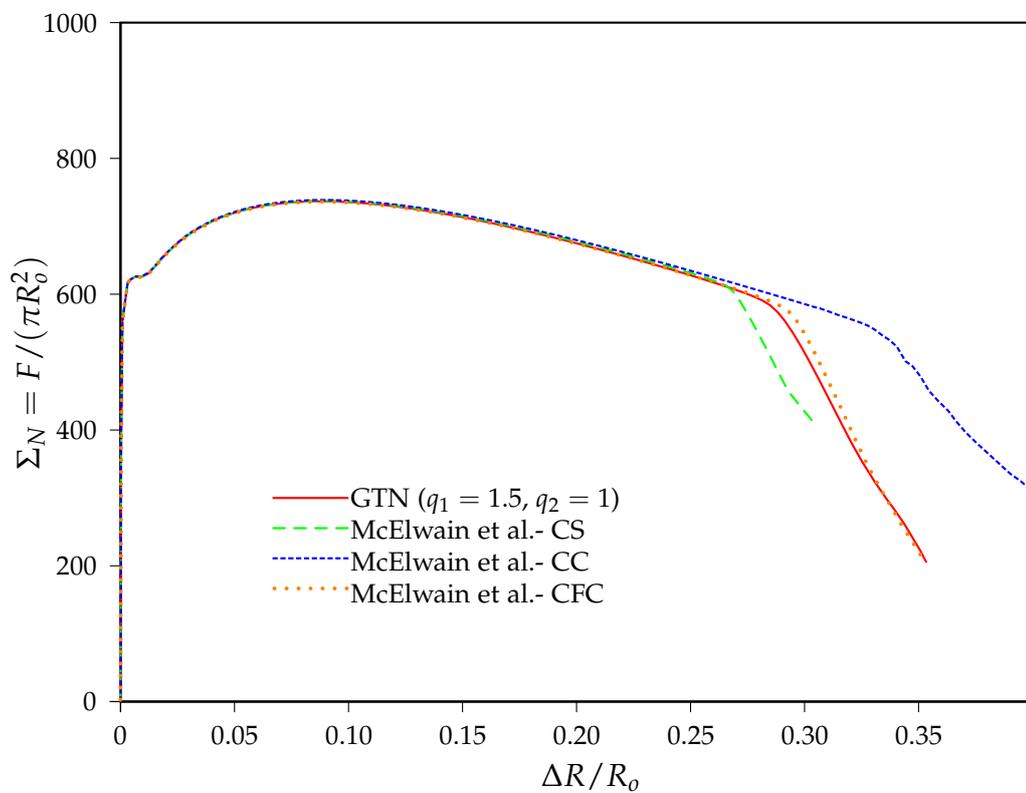


(b)

FIGURE 6.7 – Variations de la contrainte nominale  $\Sigma_N = F / \pi R_0^2$  en fonction de : (a) la déformation nominale  $E_N = u/l_0$ ; (b) la réduction nominale de rayon  $\Delta R/R_0$  de l'éprouvette  $AE_{1.5}$ .



(a)



(b)

FIGURE 6.8 – Variations de la contrainte nominale  $\Sigma_N = F / \pi R_0^2$  en fonction de : (a) la déformation nominale  $E_N = u/l_0$ ; (b) la réduction nominale de rayon  $\Delta R/R_0$  de l'éprouvette AE<sub>3</sub>.

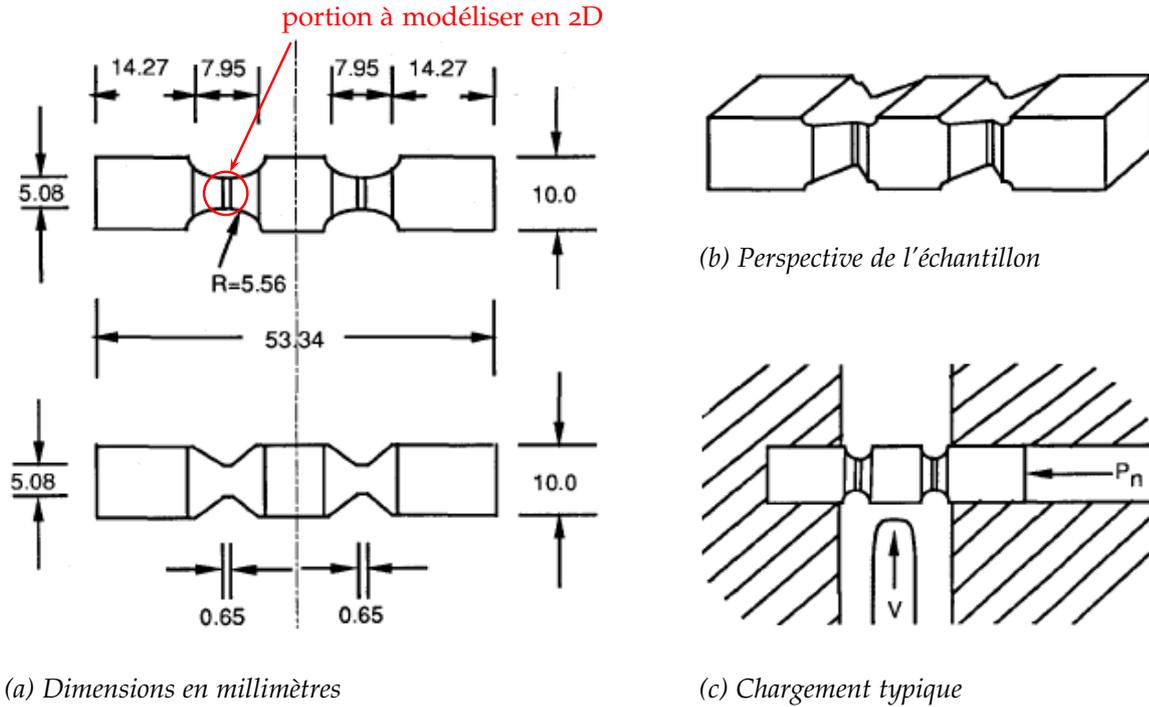


FIGURE 6.9 – Géométrie de l'échantillon utilisé dans les essais de cisaillement effectués par Cowie *et al.* (1989).

Le matériau utilisé dans cette simulation est un acier AISI 4340 similaire à ceux utilisés par Cowie *et al.* (1989) et dont les caractéristiques mécaniques sont prises dans la référence Banerjee (2007). L'écroissage du matériau est modélisé par l'équation de Johnson et Cook (1983) qui intègre les effets de l'écroissage, de la vitesse de déformation et de la température :

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}, T) = \sigma_o \left[ 1 + \frac{B}{\sigma_o} (\bar{\epsilon}^p)^N \right] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_o} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^M \right] \quad (6.2)$$

où  $B$ ,  $C$ ,  $N$  et  $M$  sont des constantes matériau;  $\dot{\epsilon}_o$  est la valeur de taux de déformation de référence;  $T_r = 298 \text{ K}$  et  $T_m = 1793 \text{ K}$  sont respectivement les températures de référence et de fusion du métal. La valeur de  $\sigma_o$  est déterminée en fonction la dureté de l'acier à travers

$$\sigma_o = \exp(A_1 R_c + A_2) \text{ MPa} \quad (6.3)$$

où  $A_1 = 0.0355$ ,  $A_2 = 5.5312$  et  $R_c$  est la dureté Rockwell. La valeur de  $B/\sigma_o = 0.6339$  est supposée être constante pour tous les valeurs de  $R_c$ . Le coefficient d'écroissage  $N$  est pris égale à 0.26 et le coefficient  $C$  lié au taux de déformation est pris égale à 0.014. La valeur de  $\dot{\epsilon}_o$  est égale à  $1 \text{ s}^{-1}$ . La température est prise égale à la température de référence vue que les essais sont effectués à la température ambiante. Ainsi, pour un choix de  $R_c = 52$  et  $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ s}^{-1}$ , les relations (6.2) et (6.3) se réduisent à

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p) = 1805.3 (1 + 0.6339 (\bar{\epsilon}^p)^{0.26}) \text{ MPa}, \quad \sigma_o = 1599.105 \text{ MPa} \quad (6.4)$$

L'acier considéré a pour module de Young  $E = 206.850 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Les paramètres des modèles GTN et McElwain *et al.* sont :

- porosité initiale  $f_o = 0.005$ ;

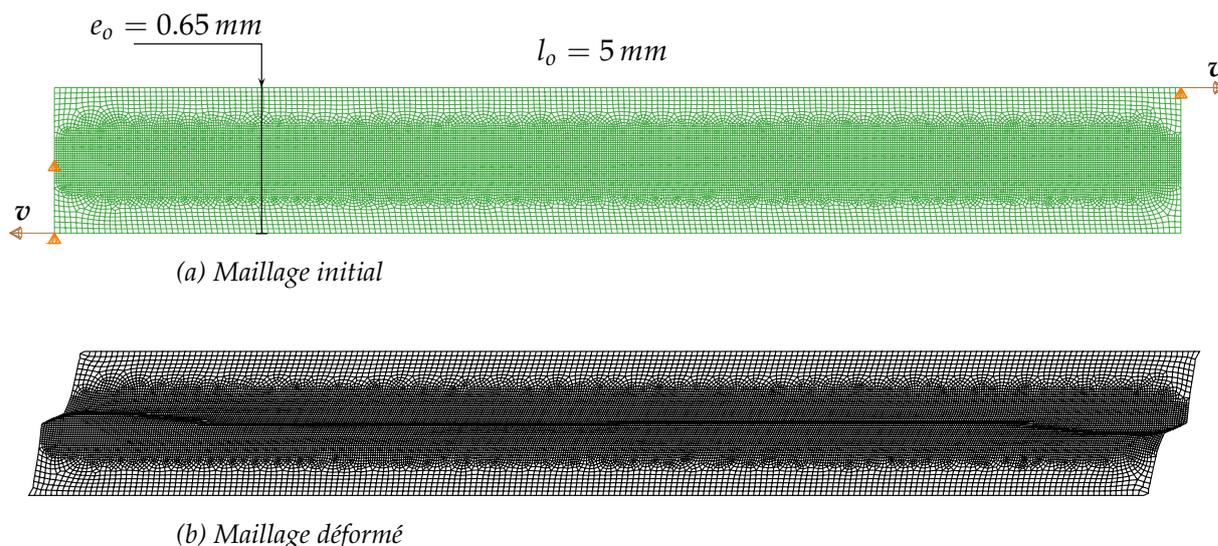


FIGURE 6.10 – Bande plane soumise à un cisaillement pur : géométrie, conditions de chargement et maillages non déformé et déformé.

- paramètres de Tvergaard :  $q_1 = 1.5$  et  $q_2 = 1$  ;
- paramètres de nucléation de nouvelles cavités pilotée par la déformation plastique équivalente dans la matrice :  $\varepsilon_N = 0.1$ ,  $s_N = 0.3$  et  $f_N = 0.1$  ;
- paramètres de coalescence des cavités :  $f_c = 0.05$  et  $f_f = 0.2$  ; et
- paramètre  $a_2$  du modèle de McElwain *et al.* : seule la "Définition 2" est retenue.

### 6.3.2 Résultats

L'évolution de la contrainte de cisaillement  $\tau = F/l_0$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\gamma = 2u/e_0$  pour les deux modèles de comportement GTN et McElwain *et al.* est donnée sur la figure 6.11. Les courbes obtenues pour le modèle de McElwain *et al.* présentent la même allure que la courbe obtenue par le modèle GTN. Cependant, la réponse de la bande n'est pas la même pour les deux modèles de comportement durant la phase d'adoucissement. En effet, les trois microstructures du modèle de McElwain *et al.* sont moins résistantes au cisaillement que le modèle GTN, notamment pour la microstructure CC. Par ailleurs, il a été observé dans les simulations numériques, que la propagation de la fissure dans la bande s'effectue parallèlement à la direction de chargement depuis les extrémités de la bande vers l'intérieur. La figure 6.10b représente la configuration de la bande cisailée en rupture finale.

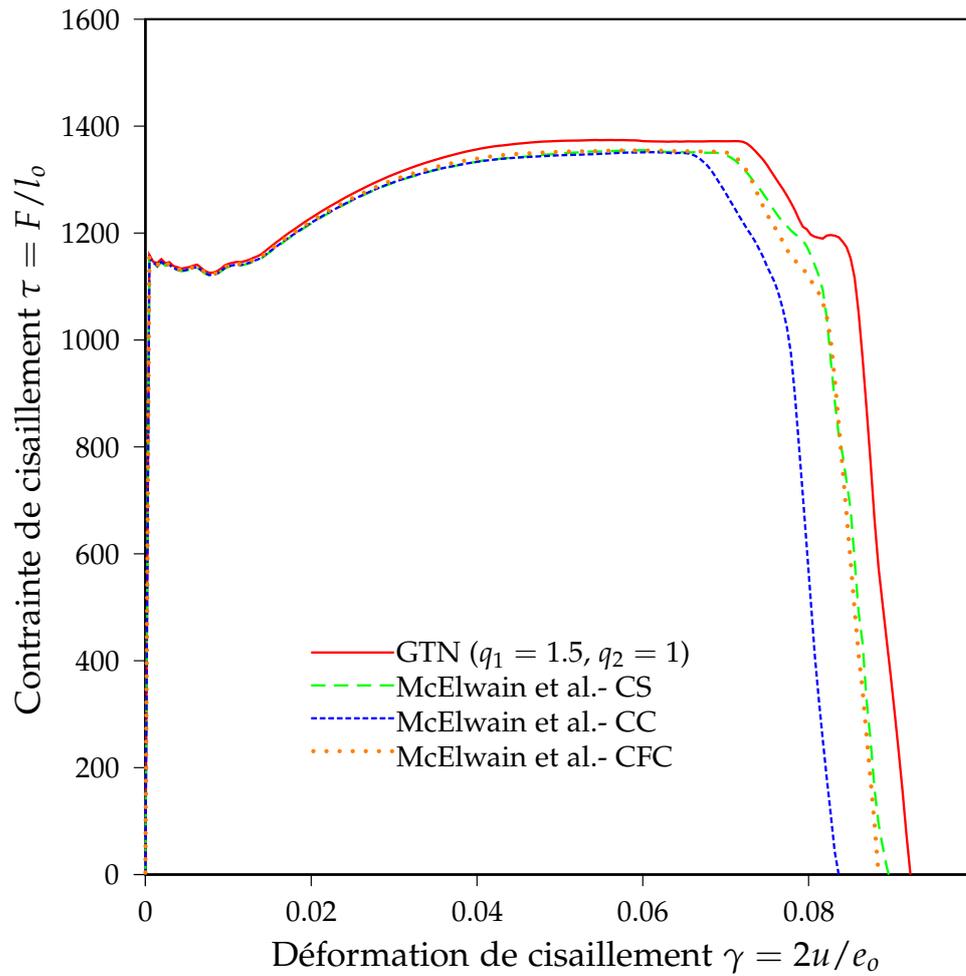


FIGURE 6.11 – Variations de la contrainte de cisaillement  $\tau = F/l_0$  en fonction du cisaillement  $\gamma = 2u/e_0$  de la bande cisailée.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail de recherche consigné dans ce mémoire de thèse traite d'une part de la compaction de milieux granulaires, processus bien connu en métallurgie des poudres et, d'autre part, de l'approche locale de la rupture ductile des matériaux. D'un point de vue pratique, les deux principaux modes de compaction de poudres sont la compression isostatique et la compression en matrice. Le choix de l'un ou l'autre mode de chargement a une influence certaine sur les propriétés physiques (densité) et mécaniques (résistance) du produit final. Quant à la rupture ductile des matériaux, le modèle GTN ne peut rendre compte de façon satisfaisante, sous sa forme actuelle et largement admise, de la rupture ductile observée expérimentalement de certains aciers sous très faible triaxialité, voire sous cisaillement pure.

L'objectif de la première partie de ce travail est d'appréhender le milieu granulaire hétérogène (grains solides et vides) comme un milieu homogène dont nous nous proposons de fournir une estimation du critère de résistance macroscopique. Dans ce but et d'abord pour des raisons de simplicité, voire de convenance, le milieu granulaire est représenté par un milieu périodique composé de grains solides sphériques identiques. Le cadre théorique favorable à l'application de l'homogénéisation en calcul à la rupture (Salençon, 1983; Suquet, 1983; de Buhan, 1986; Salençon, 1993) est ainsi dressé. De nombreuses et très instructives analyses aux éléments finis du comportement élastoplastique d'un VER *primitif* axisymétrique ont été effectuées. Ces analyses, une fois le mode de chargement choisi (compression isostatique et compression en matrice) nous renseignent sur les différents modes de déformation plastique du grain solide et plus particulièrement sur l'évolution de ces dimensions au cours du processus de chargement. Deux volumes élémentaires représentatifs (VER) axisymétriques, associés à chacun des deux stades de la compaction ont été mis en évidence à l'issue de ces simulations et ont été utilisés pour la suite. L'application de la méthode cinématique du calcul à la rupture à travers la proposition de quatre mécanismes de rupture pertinents pour chacun des deux VERs a permis d'obtenir des estimations par excès des surfaces de charge macroscopiques du milieu granulaire périodique retenu. Ces résultats ont été obtenus pour une densité relative donnée (Stade I de la compaction :  $0.7 \leq D \leq 0.85$  et Stade II :  $0.90 \leq D \leq 0.95$ ) une fois le mode de chargement choisi. Comme attendu, la forme et la taille des surfaces de charge dépendent aussi bien de l'histoire du chargement que de la densité relative du comprimé. La comparaison des deux types de résultats, ceux fournis par l'homogénéisation en calcul à la rupture et ceux obtenus par les simulations appropriées aux éléments finis, est de notre point de vue probante.

Les observations au microscope d'échantillons cisailés en acier haute résistance et rompus suite à des essais d'impact menés par Cowie *et al.* (1989) ont montré un accroissement du

volume des micro-cavités au niveau des particules de seconde phase pouvant aller jusqu'à la coalescence. Des calculs de cellules cubiques cisailées à l'intérieur desquelles des petites particules en nombre réduit sont aléatoirement réparties menées par Vernerey (2006) et McVeigh *et al.* (2007) ont confirmé la réalité de cette occurrence.

Une récente extension du critère de Gurson (1977) qui aurait l'avantage d'inclure le troisième invariant des contraintes est proposée par McElwain *et al.* (2006a;b) à partir de fort nombreuses simulations numériques de trois types de VER représentant la microstructure d'un matériau poreux. Ce critère est, outre la règle de normalité, est complété avec les mêmes lois d'évolutions des variables internes que le modèle GTN et le critère de coalescence basé sur la porosité effective de Tvergaard et Needleman (1984). Le nouveau modèle de comportement plastique (appelé dans ce mémoire modèle de McElwain *et al.*) a été implanté dans le code ABAQUS/Explicit en vue de simulations numériques aux éléments finis de problèmes pratiques de rupture ductile incluant le cisaillement pur notamment. Une fois l'implantation du modèle validée à travers les réponses d'élément-tests, la striction d'une barre cylindrique lisse, la traction d'une éprouvette entaillée et le cisaillement en déformation plane ont été étudiés à titre d'exemples d'illustration. Les résultats des simulations montrent des différences entre les prédictions du modèle GTN et le modèle de McElwain *et al.*, notamment dans la phase d'adoucissement du matériau.

## PERSPECTIVES

Dans la continuité directe de ce travail de thèse, nous pouvons, en ce qui concerne la construction de critères de rupture pour matériaux granulaires comprimés, poursuivre dans deux directions :

- (a) en cherchant à proposer éventuellement d'autres mécanismes de rupture pertinents ;
- (b) ou peut être mieux encore, en suivant la méthodologie employée par Pastor et ses collaborateurs pour l'analyse fine du critère de Gurson.

Quant à la partie traitant de la rupture ductile des matériaux, nous estimons que nous sommes en fait au début de nos investigations et qu'il convient, avant d'aller plus loin, de les compléter et de les approfondir

- (a) en poursuivant la validation et la qualification de l'implantation du modèle de McElwain *et al.* ;
- (b) d'étudier en utilisant ce modèle de comportement plusieurs autres exemples pratiques ; et
- (c) de confronter les résultats à l'observation expérimentale.

## SOMMAIRE

<b>A.1 MÉCANISMES DE RUPTURE PROPOSÉS</b> . . . . .	141
A.1.1 Mécanisme de rupture <b>A</b> . . . . .	141
A.1.2 Mécanisme de rupture <b>B</b> . . . . .	142
A.1.3 Mécanisme de rupture <b>C</b> . . . . .	144
A.1.4 Mécanisme de rupture <b>D</b> . . . . .	146
A.1.5 Mécanisme de rupture <b>E</b> . . . . .	148
A.1.6 Mécanisme de rupture <b>F</b> . . . . .	150
A.1.7 Mécanisme de rupture <b>G</b> . . . . .	152
A.1.8 Mécanisme de rupture <b>H</b> . . . . .	154
<b>A.2 EXPRESSIONS DES DÉRIVÉES PARTIELLES DU POTENTIEL PLASTIQUE</b> . . . . .	157
<b>A.3 DÉRIVÉES PARTIELLES CORRESPONDANT À L'ALGORITHME D'INTÉGRATION</b> . . . . .	159



## A.1 MÉCANISMES DE RUPTURE PROPOSÉS

Pour l'ensemble des mécanismes de rupture présentés ci-après, les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $R$ ,  $H$  et  $\tilde{R}$  de la cellule de base sont donnés, pour une densité relative  $D_r$  fixée et pour les cas de compression isostatique et en matrice. Ces paramètres sont connus à l'avance pour les deux mode de compaction.

### A.1.1 Mécanisme de rupture $\mathbb{A}$

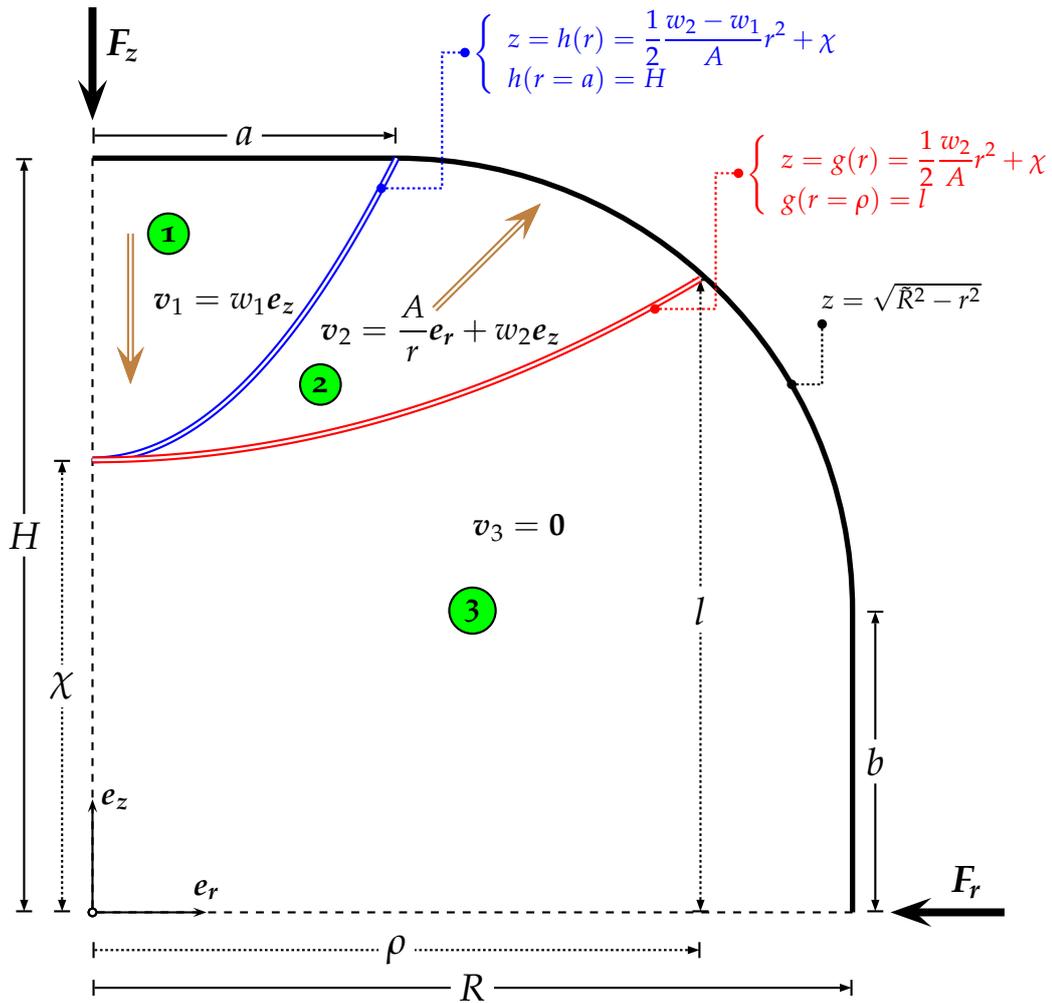


FIGURE A.1 – Mécanisme de rupture  $\mathbb{A}$ .

#### Paramètres :

- $w_1, w_2, A, \chi, \rho$

#### Conditions :

- $w_1 < 0, w_2 > 0, A > 0, 0 \leq \chi \leq H, a \leq \rho \leq R$
- $F_z = F_z e_z (F_z < 0), F_r = F_r e_r (F_r < 0)$
- $h(r = a) = H \Rightarrow w_2 - w_1 = \frac{2A(H - \chi)}{a^2}$

- $g(r = \rho) = l \Rightarrow w_2 = \frac{2A(l - \chi)}{\rho^2}$
- $l = \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2}$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi ka \left[ A + \frac{a^2}{3A}(w_2 - w_1)^2 \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4}a^2 \frac{w_1}{A} + \frac{1}{4} \frac{w_2}{A}(a^2 - \rho^2) + \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2} \right. \\ \quad \left. - \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2} + \tilde{R} \ln \left( \frac{\rho \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2}}{a \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2}} \right) + \chi \ln \left( \frac{a}{\rho} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(2/3)} = 2\pi k\rho \left[ A + \frac{\rho^2}{3A}w_2^2 \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_3 = 2F_z w_1 \quad (\text{A.2})$$

**Théorème cinématique :**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} = 2F_z w_1 \leq \mathcal{P}_{rm} &= \int_{\mathcal{S}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) dS \\ &= 2(\mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Soit

$$2\pi R^2 \Sigma_z w_1 \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.4})$$

où  $\Sigma_z$  est la contrainte macroscopique axiale donnée par

$$\Sigma_z = \frac{F_z}{\pi R^2} \quad (\text{A.5})$$

Finalement nous avons :

$$\Sigma_z \leq \frac{1}{2\pi R^2 w_1} \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.6})$$

La minimisation du second membre de (A.6) par rapport à  $\chi$  et  $\rho$  conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_z$  pour ce mécanisme de rupture. Cette borne est représentée par une droite horizontale dans le plan des contraintes  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$ .

### A.1.2 Mécanisme de rupture B

**Paramètres :**

- $w_2, A, B, \chi, \rho$

**Conditions :**

- $w_2 > 0, A > 0, B < 0, 0 \leq \chi \leq R, a \leq \rho \leq R$
- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z (F_z < 0), \mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r (F_r < 0)$
- $h(r = \chi) = 0 \Rightarrow w_2 = -\frac{2Bl}{\chi^2 - \rho^2}$

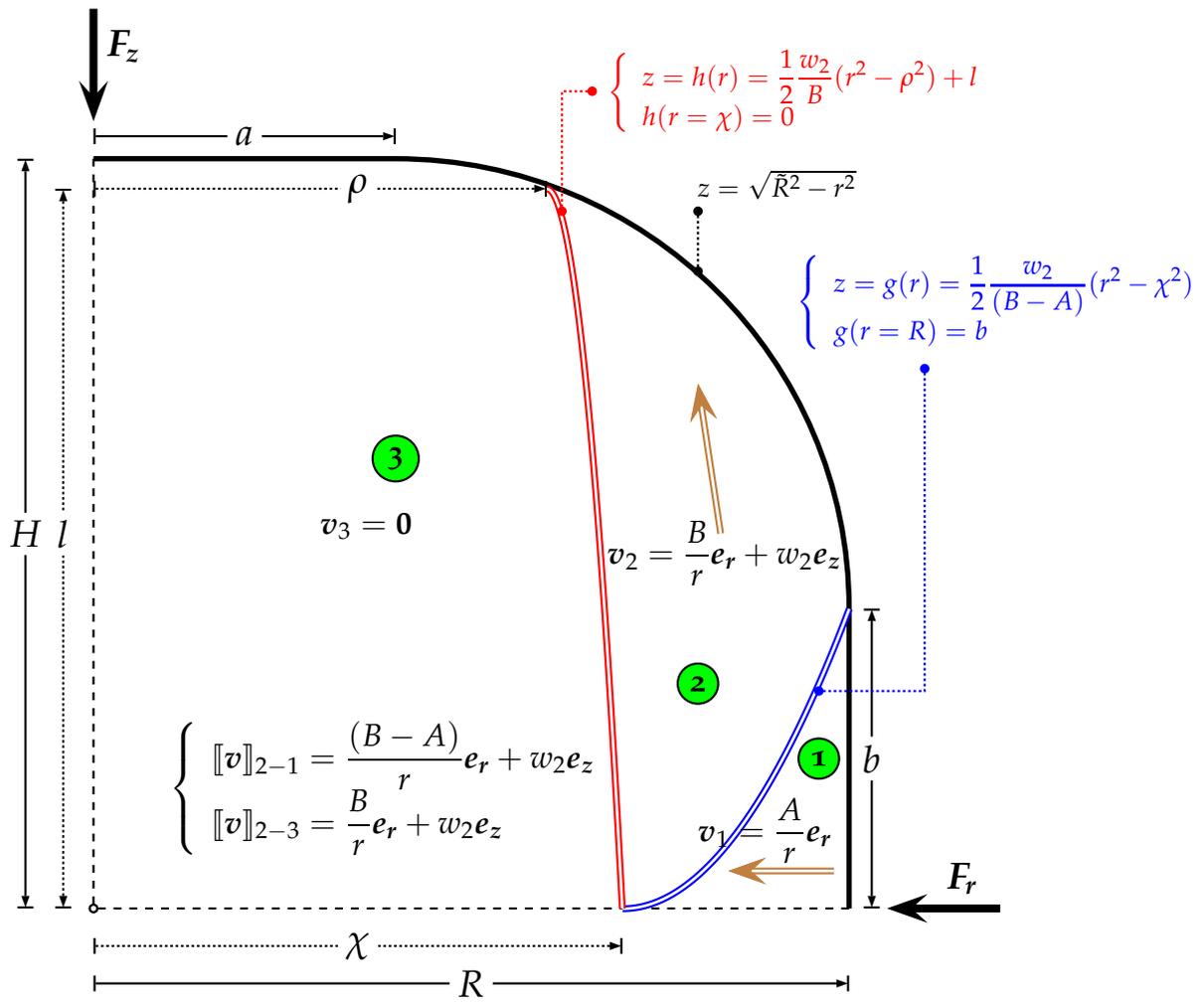


FIGURE A.2 – Mécanisme de rupture B.

- $g(r = R) = b \Rightarrow w_2 = \frac{2(B - A)b}{R^2 - \chi^2}$
- $l = \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2}$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zone } \textcircled{1}, \quad \mathcal{P}_{rm(1)} = 4\pi k A \left\{ \frac{1}{4} \frac{w_2}{(B - A)} \left[ (R^2 - \chi^2) - 2\chi^2 \ln \left( \frac{R}{\chi} \right) \right] \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \quad \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi k (R - \chi) \left[ (B - A) + \frac{w_2^2}{3(B - A)} (R^2 + R\chi + \chi^2) \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \quad \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi k B \left\{ -\frac{1}{4} \frac{w_2}{B} \left[ (\chi^2 - \rho^2) - 2\rho^2 \ln \left( \frac{\chi}{\rho} \right) \right] - \frac{1}{4} \frac{w_2}{(B - A)} \right. \\ \quad \times \left[ (R^2 - \chi^2) - 2\chi^2 \ln \left( \frac{R}{\chi} \right) \right] + \sqrt{\tilde{R}^2 - R^2} \\ \quad \left. - \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2} + \tilde{R} \ln \left( \frac{R \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - \rho^2}}{\rho \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - R^2}} \right) - l \ln \left( \frac{\chi}{\rho} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \quad \mathcal{P}_{rm(2/3)} = -2\pi k (\chi - \rho) \left[ B + \frac{w_2^2}{3B} (\chi^2 + \chi\rho + \rho^2) \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_1(r = R) = \frac{A}{R} F_r \quad (\text{A.8})$$

**Théorème cinématique :**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} = \frac{A}{R} F_r \leq \mathcal{P}_{rm} &= \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) dS \\ &= 2(\mathcal{P}_{rm(1)} + \mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Soit

$$4\pi H A \Sigma_r \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.10})$$

où  $\Sigma_r$  est la contrainte macroscopique radiale donnée par

$$\Sigma_r = \frac{F_r}{4\pi R H} \quad (\text{A.11})$$

Finalement nous avons :

$$\Sigma_r \leq \frac{1}{4\pi H A} \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.12})$$

La minimisation du second membre par rapport à  $\chi$  et  $\rho$  conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_r$ . Cette borne est représentée par une droite verticale dans le plan  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$ .

### A.1.3 Mécanisme de rupture C

**Paramètres :**

- $w_1, w_2, A, \chi$

**Conditions :**

- $w_1 < 0, w_2 < 0, A > 0, 0 \leq \chi \leq H$

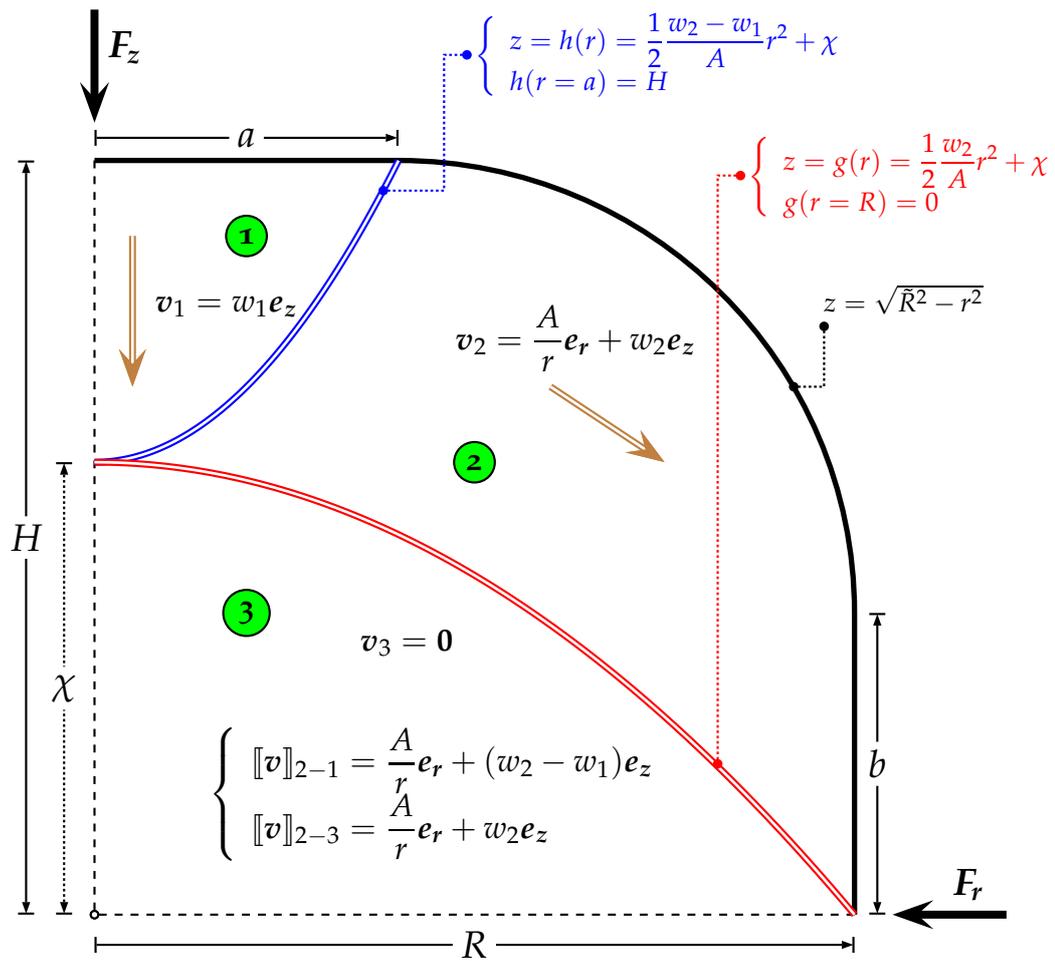


FIGURE A.3 – Mécanisme de rupture C.

- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z$  ( $F_z < 0$ ),  $\mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r$  ( $F_r < 0$ )
- $h(r = a) = H \Rightarrow w_2 - w_1 = \frac{2A(H - \chi)}{a^2}$
- $g(r = R) = 0 \Rightarrow w_2 = -\frac{2A\chi}{R^2}$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi ka \left[ A + \frac{a^2}{3A} (w_2 - w_1)^2 \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4} a^2 \frac{w_1}{A} - \frac{1}{4} \frac{w_2}{A} (R^2 - a^2) + \sqrt{\tilde{R}^2 - R^2} \right. \\ \quad \left. - \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2} + \tilde{R} \ln \left( \frac{R \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2}}{a \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - R^2}} \right) - \chi \ln \left( \frac{R}{a} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(2/3)} = 2\pi kR \left[ A + \frac{R^2}{3A} w_2^2 \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_2(r = R) = 2F_z w_1 + F_r \frac{A}{R} \quad (\text{A.14})$$

**Théorème cinématique :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2F_z w_1 + F_r \frac{A}{R} \leq \mathcal{P}_{rm} = \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, [\mathbf{v}]) dS \quad (\text{A.15})$$

$$= 2(\mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)})$$

Soit

$$2\pi R^2 \Sigma_z w_1 + 4\pi H A \Sigma_r \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.16})$$

où  $\Sigma_z$  et  $\Sigma_r$  sont les contraintes macroscopiques axiale et radiale donnée par (A.4) et (A.11) respectivement. Finalement nous avons :

$$\Sigma_z \leq \frac{1}{2\pi R^2 w_1} [\mathcal{P}_{rm} - 4\pi H A \Sigma_r] \quad (\text{A.17})$$

Pour  $\Sigma_r$  fixée, la minimisation du second membre de (A.17) se fait par rapport au seul paramètre  $\chi$ . Elle conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_z$ . Ainsi pour plusieurs choix de  $\Sigma_r$  on peut avoir la borne supérieure de  $\Sigma_z$  correspondant. Le résultat donne une droite inclinée dans l'espace des contraintes  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$ .

#### A.1.4 Mécanisme de rupture ID

**Paramètres :**

- $w_2, A, B, \chi$

**Conditions :**

- $w_2 > 0, A < 0, B < 0, 0 \leq \chi \leq R$
- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z$  ( $F_z < 0$ ),  $\mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r$  ( $F_r < 0$ )
- $h(r = \chi) = 0 \Rightarrow w_2 = -\frac{2BH}{\chi^2}$

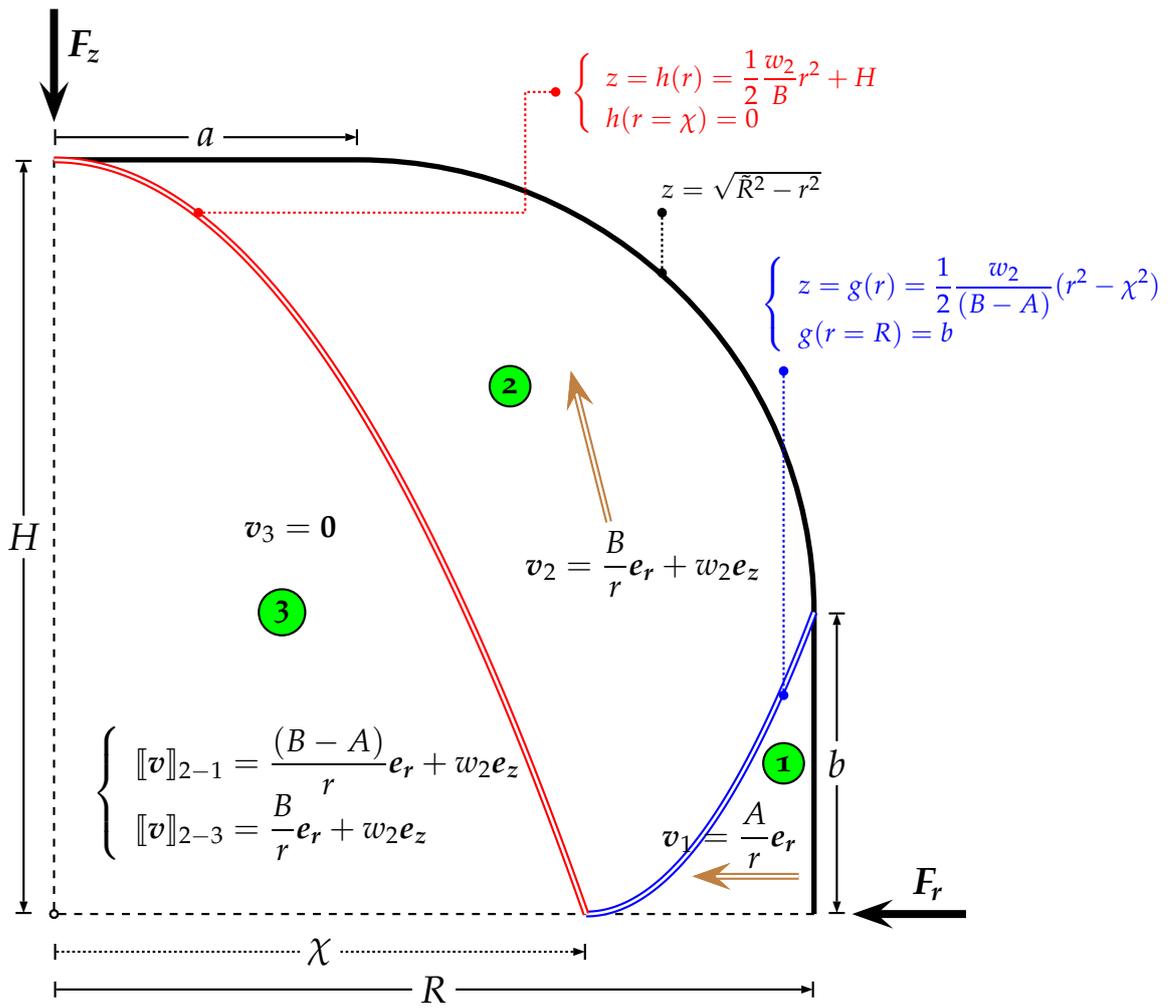


FIGURE A.4 – Mécanisme de rupture ID.

$$\bullet g(r = R) = b \Rightarrow w_2 = \frac{2(B - A)b}{R^2 - \chi^2}$$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zone } \textcircled{1}, \quad \mathcal{P}_{rm(1)} = 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4} \frac{w_2}{(B - A)} \left[ (R^2 - \chi^2) - 2\chi^2 \ln \left( \frac{R}{\chi} \right) \right] \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \quad \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi k(R - \chi) \left[ (B - A) + \frac{w_2^2}{3(B - A)} (R^2 + R\chi + \chi^2) \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \quad \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi kB \left\{ -\frac{1}{4} \frac{w_2}{B} \chi^2 - \frac{1}{4} \frac{w_2}{(B - A)} \right. \\ \quad \times \left[ (R^2 - \chi^2) - 2\chi^2 \ln \left( \frac{R}{\chi} \right) \right] + \sqrt{\tilde{R}^2 - R^2} \\ \quad \left. - \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2} + \tilde{R} \ln \left( \frac{R \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - a^2}}{a \tilde{R} + \sqrt{\tilde{R}^2 - R^2}} \right) - H \ln \left( \frac{\chi}{a} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \quad \mathcal{P}_{rm(2/3)} = -2\pi k\chi \left[ B + \frac{w_2^2}{3B} \chi^2 \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_1(r = R) = 2F_z w_2 + F_r \frac{A}{R} \quad (\text{A.19})$$

**Théorème cinématique :**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} = 2F_z w_2 + F_r \frac{A}{R} \leq \mathcal{P}_{rm} &= \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) dS \\ &= 2(\mathcal{P}_{rm(1)} + \mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)}) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Soit

$$2\pi R^2 \Sigma_z w_2 + 4\pi H A \Sigma_r \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.21})$$

où  $\Sigma_z$  et  $\Sigma_r$  sont donnée par (A.4) et (A.11) respectivement. Finalement nous avons :

$$\Sigma_r \leq \frac{1}{4\pi H A} [\mathcal{P}_{rm} - 2\pi R^2 w_2 \Sigma_z] \quad (\text{A.22})$$

Pour  $\Sigma_z$  fixée, la minimisation du second membre se fait par rapport au seul paramètre  $\chi$ . Elle conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_r$ . On construit donc pour plusieurs choix de  $\Sigma_z$  une droite oblique dans l'espace des contraintes  $(\Sigma_r, \Sigma_z)$ .

### A.1.5 Mécanisme de rupture E

**Paramètres :**

$$\bullet w_1, w_2, A, B, \rho, l$$

**Conditions :**

- $w_1 < 0, w_2 > 0, A > 0, B > 0, 0 < \rho \leq a, 0 \leq l \leq H$
- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z (F_z < 0), \mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r (F_r < 0)$
- $f(r = \rho) = l \Rightarrow w_1 = \frac{2A(l - H)}{\rho^2}$

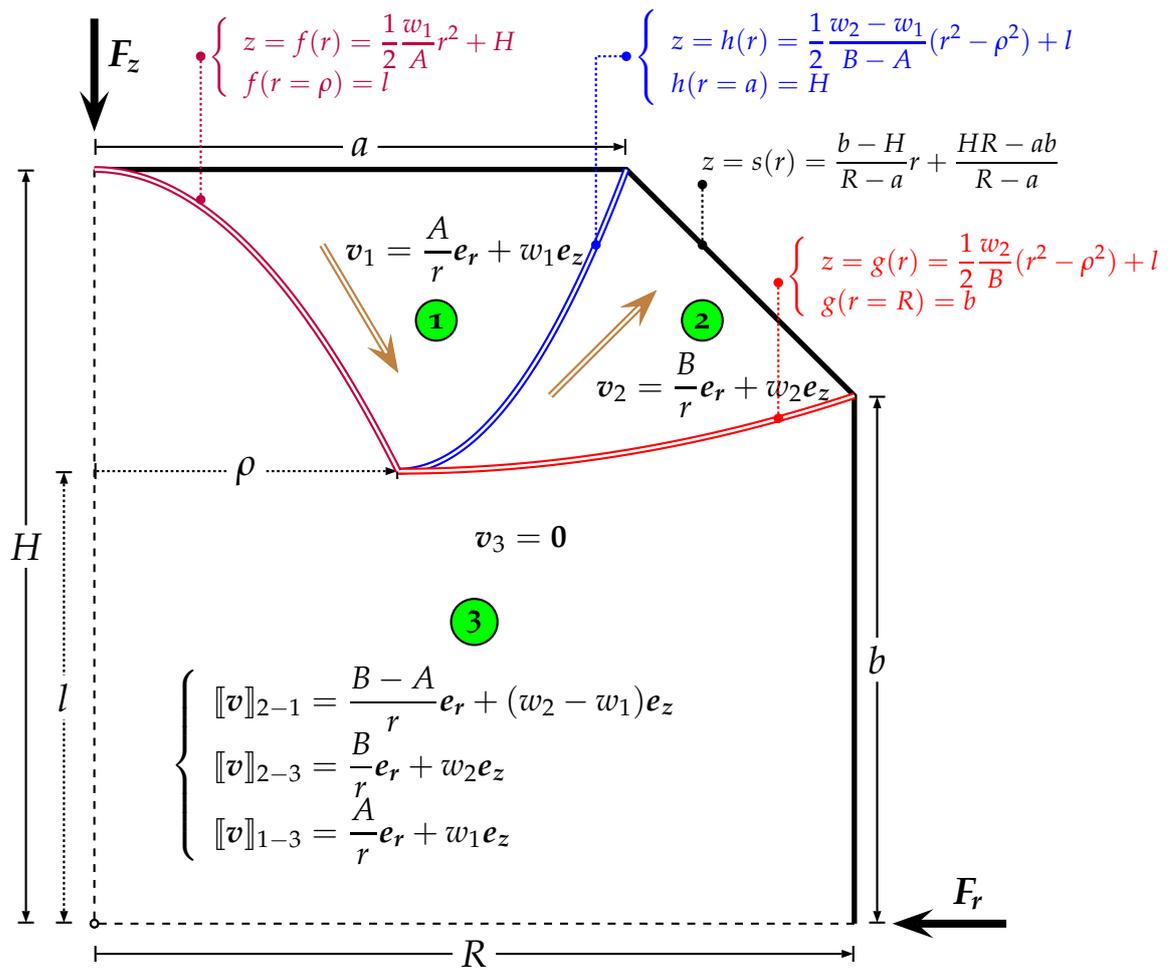


FIGURE A.5 – Mécanisme de rupture  $\mathbb{E}$ .

- $h(r = a) = H \Rightarrow w_2 - w_1 = \frac{2(B - A)(H - l)}{(a^2 - \rho^2)}$
- $g(r = R) = b \Rightarrow w_2 = \frac{2B(b - l)}{(R^2 - \rho^2)}$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(1/3)} = 2\pi k\rho \left[ A + \frac{w_1^2}{3A}\rho^2 \right] \\
 \text{Zone } \textcircled{1}, \mathcal{P}_{rm(1)} = 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4} \frac{w_1}{A}\rho^2 - \frac{1}{4} \frac{w_2 - w_1}{B - A}(a^2 - \rho^2) \right. \\
 \quad \left. + \left[ \frac{1}{2} \frac{w_2 - w_1}{B - A}\rho^2 + (H - l) \right] \ln \left( \frac{a}{\rho} \right) \right\} \\
 \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi k(a - \rho) \left[ (B - A) + \frac{(w_2 - w_1)^2}{3(B - A)}(a^2 + a\rho + \rho^2) \right] \\
 \text{Zone } \textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi kB \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{w_2 - w_1}{B - A} - \frac{w_2}{B} \right) \left[ (a^2 - \rho^2) - 2\rho^2 \ln \left( \frac{a}{\rho} \right) \right] \right. \\
 \quad \left. - \frac{1}{4} \frac{w_2}{B}(R^2 - a^2) + \left[ \frac{HR - ab}{R - a} + \frac{1}{2} \frac{w_2}{B}\rho^2 - l \right] \ln \left( \frac{R}{a} \right) \right. \\
 \quad \left. + (b - H) \right\} \\
 \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(2/3)} = 2\pi k(R - \rho) \left[ B + \frac{w_2^2}{3B}(R^2 + R\rho + \rho^2) \right]
 \end{array} \right. \quad (\text{A.23})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2F_z \cdot v_1 + F_r \cdot v_3 = 2F_z w_1 \quad (\text{A.24})$$

**Théorème cinématique :**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{ext} = 2F_z w_1 \leq \mathcal{P}_{rm} &= \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, [\mathbf{v}]) dS \\
 &= 2(\mathcal{P}_{rm(1/3)} + \mathcal{P}_{rm(1)} + \mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)})
 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Soit

$$2\pi R^2 \Sigma_z w_1 \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.26})$$

où  $\Sigma_z$  est donnée par (A.4). Finalement nous avons :

$$\Sigma_z \leq \frac{1}{2\pi R^2 w_1} \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.27})$$

La minimisation du second membre de (A.27) par rapport à  $\rho$  et  $l$  conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_z$ .

### A.1.6 Mécanisme de rupture F

**Paramètres :**

- $w_1, w_2, A, B, \rho, l$

**Conditions :**

- $w_1 > 0, w_2 > 0, A < 0, B > 0, 0 < \rho \leq a, 0 \leq l \leq b$

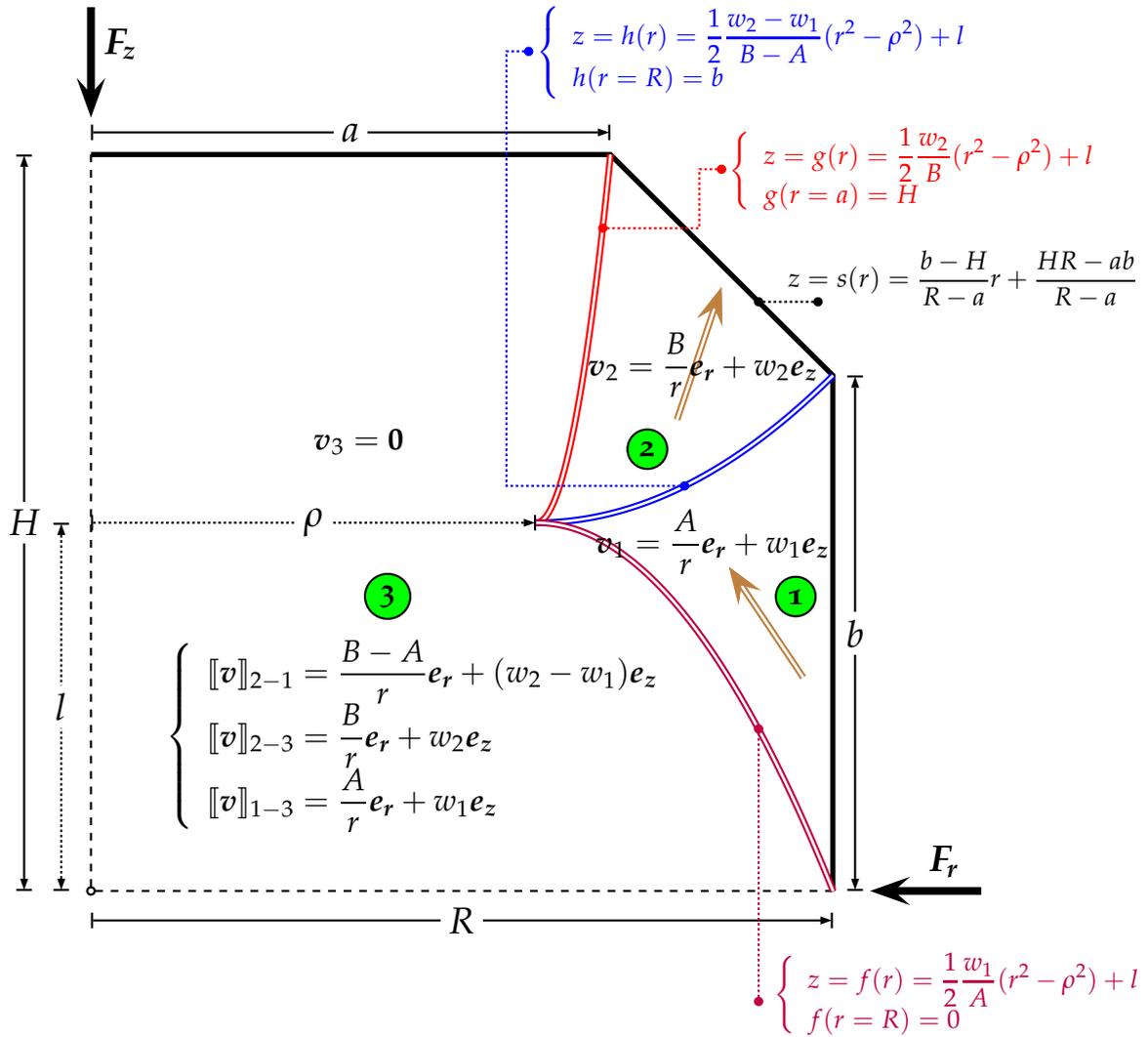


FIGURE A.6 – Mécanisme de rupture F.

- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z$  ( $F_z < 0$ ),  $\mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r$  ( $F_r < 0$ )
- $f(r = R) = 0 \Rightarrow w_1 = -\frac{2Al}{(R^2 - \rho^2)}$
- $h(r = R) = b \Rightarrow w_2 - w_1 = \frac{2(B - A)(b - l)}{(R^2 - \rho^2)}$
- $g(r = a) = H \Rightarrow w_2 = \frac{2B(H - l)}{(a^2 - \rho^2)}$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(1/3)} = -2\pi k(R - \rho) \left[ A + \frac{w_1^2}{3A}(R^2 + R\rho + \rho^2) \right] \\ \text{Zone } \textcircled{1}, \mathcal{P}_{rm(1)} = 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{w_2 - w_1}{B - A} - \frac{w_1}{A} \right) \left[ (R^2 - \rho^2) - 2\rho^2 \ln \left( \frac{R}{\rho} \right) \right] \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi k(R - \rho) \left[ (B - A) + \frac{(w_2 - w_1)^2}{3(B - A)}(R^2 + R\rho + \rho^2) \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi kB \left\{ -\frac{1}{4} \left( \frac{w_2 - w_1}{B - A} - \frac{w_2}{B} \right) \left[ (a^2 - \rho^2) - 2\rho^2 \ln \left( \frac{a}{\rho} \right) \right] \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{4} \frac{w_2 - w_1}{B - A} (R^2 - a^2) + (b - H) \right. \\ \quad \left. + \left[ \frac{HR - ab}{R - a} + \frac{1}{2} \frac{w_2 - w_1}{B - A} \rho^2 - l \right] \ln \left( \frac{R}{a} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(2/3)} = 2\pi k(a - \rho) \left[ B + \frac{w_2^2}{3B}(a^2 + a\rho + \rho^2) \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.28})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_1 = \frac{A}{R} F_r \quad (\text{A.29})$$

**Théorème cinématique :**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} = \frac{A}{R} F_r \leq \mathcal{P}_{rm} &= \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, [\mathbf{v}]) dS \\ &= 2(\mathcal{P}_{rm(1/3)} + \mathcal{P}_{rm(1)} + \mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)}) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Soit

$$4\pi HA \Sigma_r \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.31})$$

où  $\Sigma_r$  est donnée par (A.11). Finalement nous avons :

$$\Sigma_r \leq \frac{1}{4\pi HA} \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.32})$$

La minimisation du second membre par rapport à  $\rho$  et  $l$  conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_r$ .

### A.1.7 Mécanisme de rupture G

**Paramètres :**

- $w_1, w_2, A, \chi$

**Conditions :**

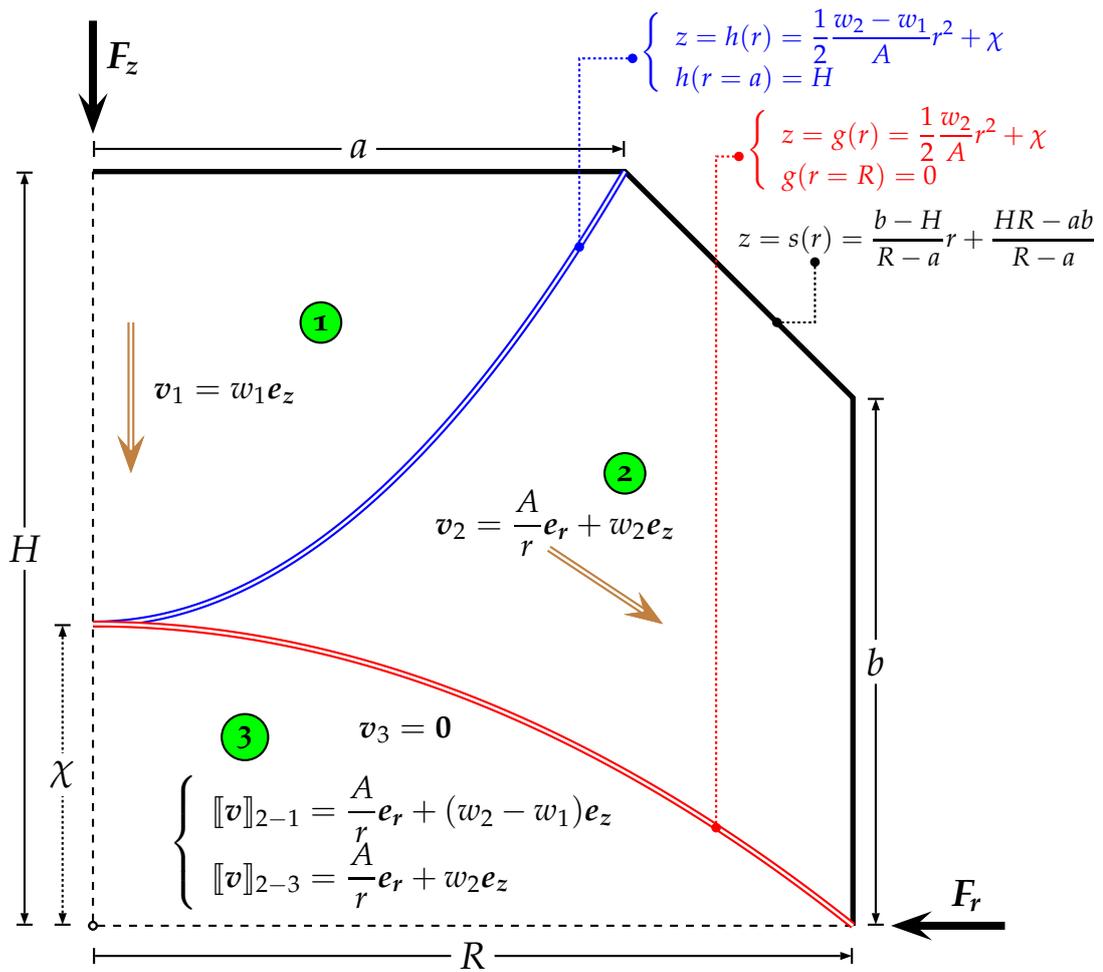


FIGURE A.7 – Mécanisme de rupture G.

- $w_1 < 0, w_2 < 0, A > 0, 0 \leq \chi \leq H$
- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z (F_z < 0), \mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r (F_r < 0)$
- $h(r = a) = H \Rightarrow w_2 - w_1 = \frac{2A(H - \chi)}{a^2}$
- $g(r = R) = 0 \Rightarrow w_2 = -\frac{2A\chi}{R^2}$

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi k a \left[ A + \frac{a^2}{3A} (w_2 - w_1)^2 \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi k A \left\{ \frac{1}{4} a^2 \frac{w_1}{A} - \frac{1}{4} \frac{w_2}{A} (R^2 - a^2) + (b - H) \right. \\ \quad \left. + \left( \frac{HR - ab}{R - a} - \chi \right) \ln \left( \frac{R}{a} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \mathcal{P}_{rm(2/3)} = 2\pi k R \left[ A + \frac{R^2}{3A} w_2^2 \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.33})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_2(r = R) = 2F_z w_1 + F_r \frac{A}{R} \quad (\text{A.34})$$

**Théorème cinématique :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2F_z w_1 + F_r \frac{A}{R} \leq \mathcal{P}_{rm} = \int_{\mathcal{S}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) dS \quad (\text{A.35})$$

$$= 2(\mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)})$$

Soit

$$2\pi R^2 \Sigma_z w_1 + 4\pi H A \Sigma_r \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.36})$$

où  $\Sigma_z$  et  $\Sigma_r$  sont donnée par (A.4) et (A.11) respectivement. Finalement nous avons :

$$\Sigma_z \leq \frac{1}{2\pi R^2 w_1} [\mathcal{P}_{rm} - 4\pi H A \Sigma_r] \quad (\text{A.37})$$

Pour  $\Sigma_r$  fixée, la minimisation du second membre par rapport à  $\chi$  conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_z$ .

### A.1.8 Mécanisme de rupture IH

**Paramètres :**

- $w_2, A, B, \chi$

**Conditions :**

- $w_2 > 0, A < 0, B < 0, 0 \leq \chi \leq R$
- $\mathbf{F}_z = F_z \mathbf{e}_z (F_z < 0), \mathbf{F}_r = F_r \mathbf{e}_r (F_r < 0)$
- $h(r = \chi) = 0 \Rightarrow w_2 = -\frac{2BH}{\chi^2}$
- $g(r = R) = b \Rightarrow w_2 = \frac{2(B - A)b}{R^2 - \chi^2}$

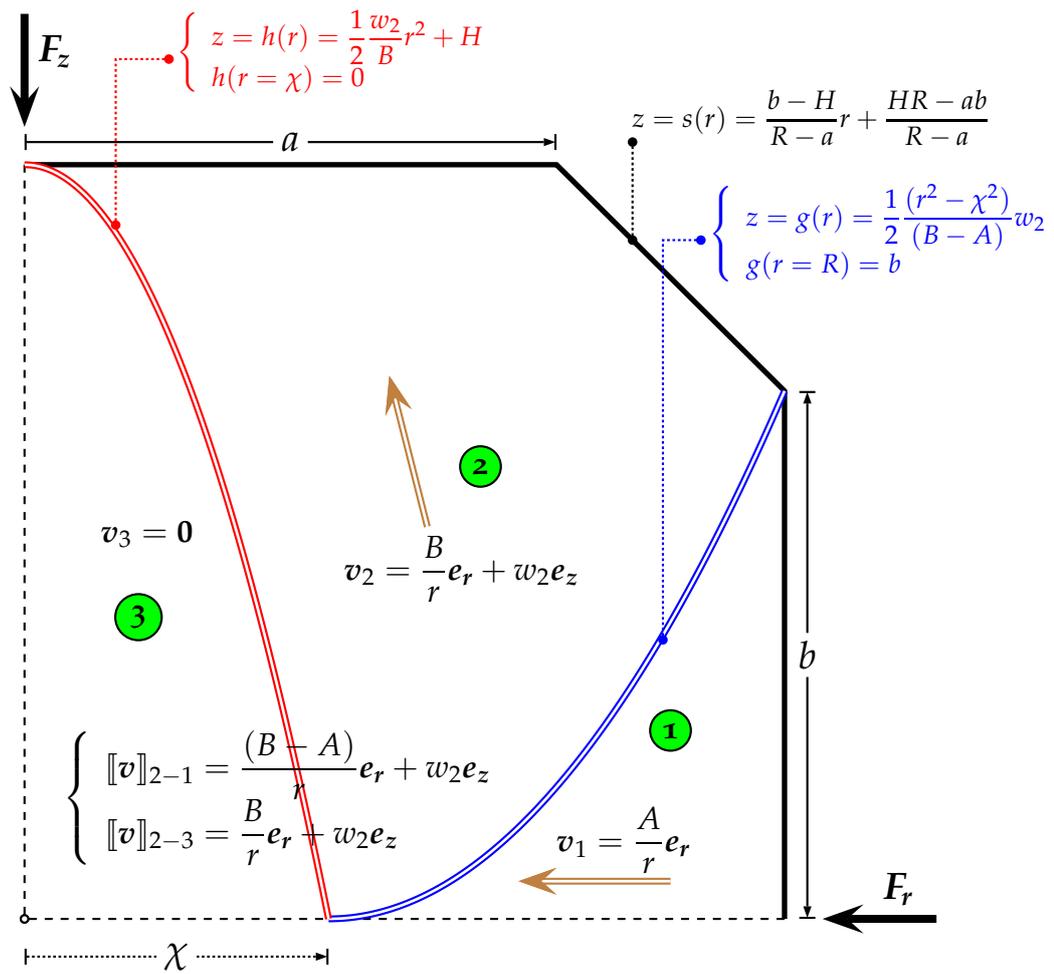


FIGURE A.8 – Mécanisme de rupture H.

**Puissance résistante maximale :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zone } \textcircled{1}, \quad \mathcal{P}_{rm(1)} = 4\pi kA \left\{ \frac{1}{4} \frac{w_2}{(B-A)} \left[ (R^2 - \chi^2) - 2\chi^2 \ln \left( \frac{R}{\chi} \right) \right] \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{1}/\textcircled{2}, \quad \mathcal{P}_{rm(1/2)} = 2\pi k(R - \chi) \left[ (B - A) + \frac{w_2^2}{3(B - A)} (R^2 + R\chi + \chi^2) \right] \\ \text{Zone } \textcircled{2}, \quad \mathcal{P}_{rm(2)} = 4\pi kB \left\{ -\frac{1}{4} \frac{w_2}{B} \chi^2 - \frac{1}{4} \frac{w_2}{(B - A)} \right. \\ \quad \times \left[ (R^2 - \chi^2) - 2\chi^2 \ln \left( \frac{R}{\chi} \right) \right] + (b - H) \\ \quad \left. \left( \frac{HR - ab}{R - a} \right) \ln \left( \frac{R}{a} \right) - H \ln \left( \frac{\chi}{a} \right) \right\} \\ \text{Surface } \textcircled{2}/\textcircled{3}, \quad \mathcal{P}_{rm(2/3)} = -2\pi k\chi \left[ B + \frac{w_2^2}{3B} \chi^2 \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.38})$$

**Puissances des efforts extérieurs :**

$$\mathcal{P}_{ext} = 2\mathbf{F}_z \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v}_1(r = R) = 2F_z w_2 + F_r \frac{A}{R} \quad (\text{A.39})$$

**Théorème cinématique :**

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} = 2F_z w_2 + F_r \frac{A}{R} &\leq \mathcal{P}_{rm} = \int_{\mathcal{A}_s} \pi_s(\mathbf{d}) d\mathcal{A} + \int_S \pi_s(\mathbf{n}, [\mathbf{v}]) dS \\ &= 2(\mathcal{P}_{rm(1)} + \mathcal{P}_{rm(1/2)} + \mathcal{P}_{rm(2)} + \mathcal{P}_{rm(2/3)}) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Soit

$$2\pi R^2 \Sigma_z w_2 + 4\pi H A \Sigma_r \leq \mathcal{P}_{rm} \quad (\text{A.41})$$

où  $\Sigma_z$  et  $\Sigma_r$  sont donnée par (A.4) et (A.11) respectivement. Finalement nous avons :

$$\Sigma_r \leq \frac{1}{4\pi H A} [\mathcal{P}_{rm} - 2\pi R^2 w_2 \Sigma_z] \quad (\text{A.42})$$

Pour  $\Sigma_z$  fixée, la minimisation du second membre par rapport à  $\chi$  conduit à la meilleure borne supérieure de  $\Sigma_r$ .

## A.2 EXPRESSIONS DES DÉRIVÉES PARTIELLES DU POTENTIEL PLASTIQUE

Le potentiel plastique est donné par

$$g(p, J_2, J_3, \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^p), f) = \frac{3J_2}{\bar{\sigma}^2} + 2a_1(f^*) \cosh\left(\frac{3a_2(f^*)p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1(f^*)^2 + s(f^*) \frac{p}{\bar{\sigma}^4} \\ \times \left[ J_3 + pJ_2 + \frac{1}{3}p\bar{\sigma}^2 \left( 2a_1(f^*) \cosh\left(\frac{3a_2(f^*)p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1(f^*)^2 \right) \right] \quad (\text{A.43})$$

avec

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{for } f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_p - f_c}{f_f - f_c}(f - f_c) & \text{for } f > f_c \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

et  $a_1$ ,  $a_2$  et  $s$  sont définis à la section 4.4.4.

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{3a_1a_2}{\bar{\sigma}} \sinh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) + \frac{s}{3\bar{\sigma}^4} \left[ 3J_3 + 6pJ_2 - 2p\bar{\sigma}^2(1 + a_1^2) + 4p\bar{\sigma}^2a_1 \cosh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \right. \\ \left. + 3p^2a_1a_2\bar{\sigma} \sinh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \right] \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} = \frac{3}{\bar{\sigma}^2} \Sigma'_{ij} + \frac{s}{\bar{\sigma}^4} p \left[ \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} + p \Sigma'_{ij} \right] \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_2} = \frac{3}{\bar{\sigma}^2} + \frac{s}{\bar{\sigma}^4} p^2 \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_3} = \frac{s}{\bar{\sigma}^4} p \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\epsilon}^p} = -\frac{6\bar{h}}{\bar{\sigma}^3} J_2 - \frac{3\bar{h}}{\bar{\sigma}^2} p a_1 a_2 \sinh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \\ + \frac{s}{\bar{\sigma}^4} p \left[ -4\frac{\bar{h}}{\bar{\sigma}} \left( J_3 + pJ_2 + \frac{1}{3}p\bar{\sigma}^2 \left( 2a_1 \cosh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1^2 \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{3}\bar{h}p\bar{\sigma} \left( 2a_1 \cosh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1^2 \right) - \bar{h}p^2a_1a_2 \sinh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \right] \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{\partial g}{\partial f} = \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} \left( 2 \cosh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) - 2a_1 \right) + 3 \frac{\partial a_2}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} \frac{p}{\bar{\sigma}} a_1 \sinh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \\ + \frac{\partial s}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} \frac{p}{\bar{\sigma}^4} \left( J_3 + pJ_2 + \frac{1}{3}p\bar{\sigma}^2 \left( 2a_1 \cosh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1^2 \right) \right) \\ + \frac{1}{3} \frac{s}{\bar{\sigma}^2} p^2 \left[ 2 \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} \left( \cosh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) - a_1 \right) + 3 \frac{\partial a_2}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} \frac{p}{\bar{\sigma}} a_1 \sinh\left(\frac{3a_2p}{2\bar{\sigma}}\right) \right] \quad (\text{A.50})$$

avec  $\bar{h} = d\bar{\sigma}/d\bar{\epsilon}^p$ .

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = \frac{9a_1 a_2^2}{2\bar{\sigma}^2} \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + \frac{s}{6\bar{\sigma}^4} \left[ 12J_2 - 4\bar{\sigma}^2(1 + a_1^2) + (8\bar{\sigma}^2 a_1 + 9p^2 a_1 a_2^2) \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + 24p\bar{\sigma} a_1 a_2 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) \right] \quad (\text{A.51})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma'_{ij} \partial \Sigma'_{mn}} = \frac{\partial g}{\partial J_2} \delta_{im} \delta_{jn} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial J_2 \partial \Sigma'_{ij}} + \frac{\partial g}{\partial J_3} \left[ \Sigma'_{im} \delta_{jn} + \Sigma'_{jn} \delta_{im} \right] + \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} \frac{\partial^2 g}{\partial J_3 \partial \Sigma'_{mn}} \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial \Sigma'_{ij}} = \frac{s}{\bar{\sigma}^4} \left[ \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} + 2p \Sigma'_{ij} \right] \quad (\text{A.53})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial J_2 \partial \Sigma'_{ij}} = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial J_3 \partial p} = \frac{s}{\bar{\sigma}^4} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial J_3 \partial \Sigma'_{ij}} = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial p} &= -\frac{\bar{h}}{6\bar{\sigma}^5} \left[ 18a_1 a_2 \bar{\sigma}^3 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + 27a_1 a_2^2 p \bar{\sigma}^2 \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\bar{h}}{6\bar{\sigma}^5} s \left[ 24J_3 + 48pJ_2 - 8p\bar{\sigma}^2(1 + a_1^2) + 30p^2 \bar{\sigma} a_1 a_2 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + (16p\bar{\sigma}^2 a_1 + 9p^3 a_1 a_2^2) \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial \Sigma'_{ij}} = -\frac{6\bar{h}}{\bar{\sigma}^3} \Sigma'_{ij} - \frac{4\bar{h}}{\bar{\sigma}^5} s p \left[ \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} + p \Sigma'_{ij} \right] \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial p} &= \frac{1}{6\bar{\sigma}^4} \frac{\partial f^*}{\partial f} \left[ 18 \frac{\partial a_1}{\partial f^*} a_2 \bar{\sigma}^3 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + \frac{\partial a_2}{\partial f^*} a_1 \left( 18\bar{\sigma}^3 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + 27a_2 p \bar{\sigma}^2 \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) \right) + \frac{\partial s}{\partial f^*} \left( 6J_3 + 12pJ_2 - 4p\bar{\sigma}^2(1 + a_1^2) + 8p\bar{\sigma}^2 a_1 \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + 6p^2 \bar{\sigma} a_1 a_2 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) \right) + \frac{s}{6\bar{\sigma}^4} \frac{\partial f^*}{\partial f} \left[ p\bar{\sigma}^2 \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \left( 6p\bar{\sigma} a_2 \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + 8 \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) - 8a_1 \right) + 9p^2 a_1 \frac{\partial a_2}{\partial f^*} \left( 2\bar{\sigma} \sinh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) + p a_2 \cosh\left(\frac{3a_2 p}{2\bar{\sigma}}\right) \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial f \partial \Sigma'_{ij}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^4} \frac{\partial s}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} p \left[ \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} + p \Sigma'_{ij} \right] \quad (\text{A.60})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial J_3} = -\frac{4\bar{h}}{\bar{\sigma}^5} s p \quad (\text{A.61})$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial f \partial J_3} = \frac{1}{\bar{\sigma}^4} \frac{\partial s}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} p \quad (\text{A.62})$$

Dans les expressions précédentes, les dérivés de  $a_1$  et  $a_2$  par rapport à  $f^*$  sont

$$\frac{\partial a_1}{\partial f^*} = \frac{n}{f^*} \left( \frac{f^*}{f_p} \right)^n + A \left( \frac{1}{f_p} - \frac{m}{f^*} \left( \frac{f^*}{f_p} \right)^m \right) \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial a_2}{\partial f^*} = -WX \exp(-Xf^*) & \text{pour la définition 1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial f^*} = \frac{Z}{f^*} & \text{pour la définition 2} \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

le dérivé de  $s$  par rapport à  $f^*$  est

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial f^*} = & -\frac{6}{(\Sigma_h^{\max})^3} \frac{\partial \Sigma_h^{\max}}{\partial f^*} \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3\Sigma_h^{\max}} \left( 1 - a_1 - \frac{9a_1 a_2^2 (\Sigma_h^{\max})^2}{8 - 8a_1} - \frac{27a_1 (1 + a_1 + a_1^2) a_2^4 (\Sigma_h^{\max})^4}{128 (1 - a_1)^3} \right) \right]^{-1} \\ & - \frac{3}{(\Sigma_h^{\max})^2} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3(\Sigma_h^{\max})^2} \left( 1 - a_1 - \frac{9a_1 a_2^2 (\Sigma_h^{\max})^2}{8 - 8a_1} - \frac{27a_1 (1 + a_1 + a_1^2) a_2^4 (\Sigma_h^{\max})^4}{128 (1 - a_1)^3} \right) \frac{\partial \Sigma_h^{\max}}{\partial f^*} \right. \\ & + \frac{\sqrt{3}}{3\Sigma_h^{\max}} \left( -\frac{\partial a_1}{\partial f^*} - \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{9a_2^2 (\Sigma_h^{\max})^2}{8 - 8a_1} - \frac{\partial a_2}{\partial f^*} \frac{18a_1 a_2 (\Sigma_h^{\max})^2}{8 - 8a_1} - \frac{\partial \Sigma_h^{\max}}{\partial f^*} \frac{18a_1 a_2^2 \Sigma_h^{\max}}{8 - 8a_1} \right. \\ & - \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{72a_1 a_2^2 (\Sigma_h^{\max})^2}{(8 - 8a_1)^2} - \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{27 (1 + a_1 + a_1^2) a_2^4 (\Sigma_h^{\max})^4}{128 (1 - a_1)^3} - \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{27 (a_1 + 2a_1^2) a_2^4 (\Sigma_h^{\max})^4}{128 (1 - a_1)^3} \\ & \left. \left. - \frac{\partial a_2}{\partial f^*} \frac{27a_1 (1 + a_1 + a_1^2) a_2^3 (\Sigma_h^{\max})^4}{32 (1 - a_1)^3} - \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{81a_1 (1 + a_1 + a_1^2) a_2^4 (\Sigma_h^{\max})^4}{128 (1 - a_1)^4} \right) \right] \\ & \times \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{3\Sigma_h^{\max}} \left( 1 - a_1 - \frac{9a_1 a_2^2 (\Sigma_h^{\max})^2}{8 - 8a_1} - \frac{27a_1 (1 + a_1 + a_1^2) a_2^4 (\Sigma_h^{\max})^4}{128 (1 - a_1)^3} \right) \right]^{-2} \quad (\text{A.65}) \end{aligned}$$

dans lequel

$$\frac{\partial \Sigma_h^{\max}}{\partial f^*} = \frac{8}{3} \frac{\partial a_1}{\partial f^*} \frac{1 - \frac{1 + a_1^2}{2a_1^2}}{\sqrt{2\frac{1 + a_1^2}{a_1} - 4} \sqrt{2\frac{1 + a_1^2}{a_1} + 4} a_2} - \frac{\partial a_2}{\partial f^*} \frac{\Sigma_h^{\max}}{a_2} \quad (\text{A.66})$$

Finalement, le dérivé de  $f^*$  par rapport à  $f$  est donné par

$$\frac{\partial f^*}{\partial f} = \begin{cases} 1 & \text{for } f \leq f_c \\ \frac{f_p - f_c}{f_f - f_c} & \text{for } f > f_c \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

### A.3 DÉRIVÉES PARTIELLES CORRESPONDANT À L'ALGORITHME D'INTÉGRATION

Les expressions de la direction de l'écoulement plastique ainsi que les modules plastiques correspondant aux variables internes  $H_1 \equiv \bar{\epsilon}^p$  et  $H_2 \equiv f$  s'écrivent :

$$r_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \Sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial g}{\partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} J_2 \delta_{ij} \quad (\text{A.68})$$

$$h_1 = \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial g}{\partial p} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right) \quad (\text{A.69})$$

$$h_2 = -(1-f) \frac{\partial g}{\partial p} + \mathcal{A} h_1 \left\{ +k_\omega f \frac{\omega(\Sigma)}{\sqrt{3}J_2} \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right\} \quad (\text{A.70})$$

Dérivés de la direction de l'écoulement plastique  $r_{ij}$  par rapport à  $\Sigma_{ij}$ ,  $\bar{\epsilon}^p$  et  $f$  :

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial \Sigma_{mn}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_{mn} \partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_{mn} \partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_{mn} \partial J_3} J_2 \delta_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial J_3} \frac{\partial J_2}{\partial \Sigma_{mn}} \delta_{ij} \quad (\text{A.71})$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial \bar{\epsilon}^p} = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial J_3} J_2 \delta_{ij} \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial f} = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial p} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial \Sigma'_{ij}} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial J_3} J_2 \delta_{ij} \quad (\text{A.73})$$

avec,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_{mn} \partial p} &= \frac{9a_1 a_2^2}{2\bar{\sigma}^2} \cosh\left(\frac{3a_2(f^*)p}{2\bar{\sigma}}\right) \frac{\partial p}{\partial \Sigma_{mn}} + \frac{s}{6\bar{\sigma}^4} \left[ 6 \frac{\partial J_3}{\partial \Sigma_{mn}} + 12p \frac{\partial J_2}{\partial \Sigma_{mn}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial p}{\partial \Sigma_{mn}} \left( 12J_2 + 4\bar{\sigma}^2 \left( 2a_1 \cosh\left(\frac{3a_2(f^*)p}{2\bar{\sigma}}\right) - 1 - a_1^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 24p\bar{\sigma}a_1a_2 \sinh\left(\frac{3a_2(f^*)p}{2\bar{\sigma}}\right) + 9p^2a_1a_2^2 \cosh\left(\frac{3a_2(f^*)p}{2\bar{\sigma}}\right) \right) \right] \quad (\text{A.74}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_{mn} \partial \Sigma'_{ij}} &= \frac{3}{\bar{\sigma}^2} \frac{\partial \Sigma'_{ij}}{\partial \Sigma_{mn}} + \frac{s}{\bar{\sigma}^4} \left[ \frac{\partial p}{\partial \Sigma_{mn}} \left( \Sigma'_{ik} \Sigma'_{kj} + 2p \Sigma'_{ij} \right) \right. \\ &\quad \left. + p^2 \frac{\partial \Sigma'_{ij}}{\partial \Sigma_{mn}} + p \left( \frac{\partial \Sigma'_{ik}}{\partial \Sigma_{mn}} \Sigma'_{kj} + \Sigma'_{ik} \frac{\partial \Sigma'_{kj}}{\partial \Sigma_{mn}} \right) \right] \quad (\text{A.75}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma_{mn} \partial J_3} = \frac{s}{\bar{\sigma}^4} \frac{\partial p}{\partial \Sigma_{mn}} \quad (\text{A.76})$$

dans lesquels,

$$\frac{\partial J_2}{\partial \Sigma_{mn}} = \Sigma'_{mn} \quad (\text{A.77})$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \Sigma_{mn}} = \Sigma'_{mk} \Sigma'_{kn} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{mn} \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{\partial \Sigma'_{ij}}{\partial \Sigma_{mn}} = \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (\text{A.79})$$

Dérivés du module d'écroutissement plastique  $h_1$  par rapport à  $\Sigma_{ij}$ ,  $\bar{\epsilon}^p$  et  $f$  :

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Sigma_{mn}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial h_1}{\partial p} \delta_{mn} + \frac{\partial h_1}{\partial \Sigma'_{mn}} - \frac{2}{3} \frac{\partial h_1}{\partial J_3} J_2 \delta_{mn} \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \bar{\epsilon}^p} = -\frac{\bar{h}}{(1-f)\bar{\sigma}^2} \left( p \frac{\partial g}{\partial p} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right) + \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial p} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial \Sigma'_{ij}} \right) \quad (\text{A.81})$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial f} = \frac{1}{(1-f)^2 \bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial g}{\partial p} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right) + \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial p} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial \Sigma'_{ij}} \right) \quad (\text{A.82})$$

avec,

$$\frac{\partial h_1}{\partial p} = \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( \frac{\partial g}{\partial p} + p \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial \Sigma'_{ij}} \right) \quad (\text{A.83})$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Sigma'_{mn}} = \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma'_{mn} \partial p} + \delta_{im} \delta_{jn} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma'_{mn} \partial \Sigma'_{ij}} \right) \quad (\text{A.84})$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial J_3} = \frac{1}{(1-f)\bar{\sigma}} \left( p \frac{\partial^2 g}{\partial J_3 \partial p} \right) \quad (\text{A.85})$$

Dérivés du module d'érouissage plastique  $h_2$  par rapport à  $\Sigma_{ij}$ ,  $\bar{\epsilon}^p$  et  $f$  :

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Sigma_{mn}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial h_2}{\partial p} \delta_{mn} + \frac{\partial h_2}{\partial \Sigma'_{mn}} - \frac{2}{3} \frac{\partial h_2}{\partial J_3} J_2 \delta_{mn} \quad (\text{A.86})$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \bar{\epsilon}^p} = -(1-f) \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial p} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \bar{\epsilon}^p} h_1 + \mathcal{A} \frac{\partial h_1}{\partial \bar{\epsilon}^p} \left\{ +k_\omega f \frac{\omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\sqrt{3}J_2} \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial \Sigma'_{ij}} \right\} \quad (\text{A.87})$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial f} = \frac{\partial g}{\partial p} - (1-f) \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial p} + \mathcal{A} \frac{\partial h_1}{\partial f} \left\{ +k_\omega \frac{\omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\sqrt{3}J_2} \Sigma'_{ij} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{\epsilon}^p \partial \Sigma'_{ij}} + f \frac{\partial^2 g}{\partial f \partial \Sigma'_{ij}} \right) \right\} \quad (\text{A.88})$$

avec,

$$\frac{\partial h_2}{\partial p} = -(1-f) \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \mathcal{A} \frac{\partial h_1}{\partial p} \left\{ +k_\omega f \frac{\omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\sqrt{3}J_2} \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial \Sigma'_{ij}} \right\} \quad (\text{A.89})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial \Sigma'_{mn}} &= -(1-f) \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma'_{mn} \partial p} + \mathcal{A} \frac{\partial h_1}{\partial \Sigma'_{mn}} \left\{ +k_\omega f \frac{\partial \omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \Sigma'_{mn}} \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right. \\ &\quad \left. +k_\omega f \frac{\omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\sqrt{3}J_2} \left( \delta_{im} \delta_{jn} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} + \Sigma'_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial \Sigma'_{mn} \partial \Sigma'_{ij}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial J_3} = -(1-f) \frac{\partial^2 g}{\partial J_3 \partial p} + \mathcal{A} \frac{\partial h_1}{\partial J_3} \left\{ +k_\omega f \frac{\partial \omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial J_3} \Sigma'_{ij} \frac{\partial g}{\partial \Sigma'_{ij}} \right\} \quad (\text{A.91})$$

où  $\mathcal{A}$  est introduite dans la section 4.3.2 et

$$\frac{\partial \omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \Sigma'_{mn}} = -\frac{\sqrt{3}}{24\sqrt{J_2}^9} \left[ 108J_3J_2 \frac{\partial J_3}{\partial \Sigma'_{mn}} + (4J_2^3 - 189J_3^2) \frac{\partial J_2}{\partial \Sigma'_{mn}} \right] \quad (\text{A.92})$$

$$\frac{\partial \omega(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial J_3} = -\frac{9\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2}^7} \quad (\text{A.93})$$



# BIBLIOGRAPHIE

- HKS Inc. ABAQUS. *ABAQUS/Explicit and ABAQUS/Standard user's manual, version 6.5.1*. Rhode Island, U.S.A., 2005. (Cité pages 3, 24, 28, 41, 103, 105, 113 et 114.)
- A.R. Akisanya et A.C.F. Cocks. Stage I compaction of cylindrical particles under non-hydrostatic loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(4) :605–36, 1995. (Cité pages 2, 29, 35 et 39.)
- A.R. Akisanya, A.C.F. Cocks, et N.A. Fleck. Hydrostatic compaction of cylindrical particles. *J. Mech. Phys. Solids*, 42(7) :1067–85, 1994. (Cité pages 2, 29, 35 et 39.)
- P.M. Anderson, N.A. Fleck, et K.L. Johnson. Localization of plastic deformation in shear due to microcracks. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 38 :681–699, 1990. (Cité page 95.)
- N. Aravas. On the numerical integration of class of pressure-dependent plasticity models. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 24 :1395–1416, 1987. (Cité pages 105, 107 et 125.)
- A.S. Argon. Formation of cavities from non deformable second phase particles in low temperature ductile fracture. *Transaction of the ASME*, pages 60–68, 1976. (Cité page 80.)
- E. Arzt. The influence of an increasing particle coordination on the densification of spherical powders. *Acta metall.*, 30 :1883–1890, 1982. (Cité page 30.)
- E. Arzt, M.F. Ashby, et K.E. Easterling. *Mettall. Trans.*, 14A, 1983. (Cité page 30.)
- B. Banerjee. The mechanical threshold stress model for various tempers of AISI 4340 steel. *Int. J. Solids and Structures*, 44 :834–859, 2007. (Cité page 134.)
- Y. Bao et T. Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. *Int J. Mech. Sci.*, 46(81) :81–98, 2004. (Cité pages xi, 93 et 94.)
- I Barsoum et J. Faleskog. Rupture in combined tension and shear : Experiments. *Int. J. Solids Structures*, 44 :1768–1786, 2007a. (Cité pages 93 et 94.)
- I Barsoum et J. Faleskog. Rupture in combined tension and shear : Micromechanics. *Int. J. Solids Structures*, 44 :5481–5498, 2007b. (Cité pages 93, 94 et 95.)
- T. Belytschko, W.X. Liu, et B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 1 édition, September 12 2000. (Cité pages 3 et 105.)
- A.A. Benzerga. *Rupture ductile des tôles anisotropes : simulation de la propagation longitudinale dans un tube pressurisé*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000. (Cité pages xi, 83 et 85.)

- A.A. Benzerga. Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 50(6) : 1331–1362, 2002. (Cité page 85.)
- A.A. Benzerga, J. Besson, et A. Pineau. Coalescence-controlled anisotropic ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 121(2) :221–229, 1999. (Cité pages 82 et 85.)
- A.A. Benzerga, J. Besson, et A. Pineau. Anisotropic ductile fracture, part ii : theory. *Acta Materialia*, 52, 2004. (Cité pages 85, 92 et 127.)
- F.M. Beremin. Influence de la triaxialité des contraintes sur la rupture par déchirement ductile et la rupture par clivage d'un acier doux. *Journal de Mécanique Appliquée*, 4(3) :327–342, 1980. (Cité page 82.)
- F.M. Beremin. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel. *Metallurgical Transactions*, 12A :723–731, 1981. (Cité pages 80 et 82.)
- J. Besson. Éprouvettes axisymétriques entaillées. Rapport technique, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre des Matériaux, Evry, France, 1999. (Cité pages 127 et 129.)
- J.P. Boehler. *Applications of tensor functions on solids mechanics*. Springer-Verlag, 1997. (Cité page 29.)
- R.I. Borja, K.M. Sama, et P.F. Sanz. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 78 :49–72, 2003. (Cité page 105.)
- D. Bouvard. *Métallurgie des Poudres*. Hermès Science Publications, 2002. (Cité pages 10, 11, 14, 18 et 24.)
- P.R. Brewin, O. Coube, P. Doremus, et J.H. Tweed. *Modelling of powder die compaction*. Springer, 2008. (Cité pages 19, 20 et 28.)
- O. Chang-Kyun, K. Yun-Jae, B. Jong-Hyun, K. Young-Pyo, et K. Woosik. A phenomenological model of ductile fracture for API X65 steel. *Int. J. Mech. S.*, 49 :1399–1412, 2007. (Cité pages xii, 127, 129 et 131.)
- C.C. Chu et A. Needleman. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Engng. Mater. Technol.*, 102 :249–256, 1980. (Cité pages 80 et 90.)
- J.G. Cowie, M. AZRIN, et G.B. OLSON. Microvoid formation during shear deformation of ultrahigh strength steels. *Metallurgical Transaction A*, 20A :143–153, January 1989. (Cité pages xii, 3, 131, 134 et 137.)
- M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. Wiley, West Sussex, UK, 1991. (Cité pages 105 et 112.)
- P. Croix, F. Lauro, J. Oudin, et J. Christlein. Improvement of damage prediction by anisotropy of voids. *J. Material Processing Thecnology*, 143-144, 2003. (Cité page 92.)

- A.LeR. Dawson, S. Pelletier, et J. Bussière. Ultrasonic evaluation of iron powder during compaction. *Advances in Powder Metallurgy and Particulate Materials*, 2(7) :303–313, 1996. (Cité page 20.)
- P. de Buhan. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des sols renforcés*. Thèse d'État, Université Paris-VI, 1986. (Cité pages 55, 56 et 137.)
- C.S. Desai. A general basis for yield, failure and potential functions in plasticity. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 4 :361–375, 1980. (Cité page 27.)
- C.S. Desai et Q.S.E. Hashmi. Analysis, evaluation and implementation of a non associative model for geologic materials. *Int. J. Plasticity*, 5 :397–420, 1989. (Cité page 27.)
- F.L. DiMaggio et I.S. Sandler. Material models for granular soils. *J. Eng. Mech. Div.*, 97 :935–950, 1971. (Cité page 27.)
- S.M. Doraivelu, H.L. Gegel, J.S. Gunasekera, J.C. Malas, J.T. Morgan, et J.F. Thomas. A new yield function for compressible P/M materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 26 :527, 1984. (Cité pages 25 et 26.)
- D.C. Drucker et W. Prager. *Quarterly of applied mathematics*. 10 :157–175, 1952. (Cité page 27.)
- W.B. Eisen, B.L. Ferguson, R.M. German, R. Iacocca, P.W. Lee, D. Madan, K. Moyer, H. Sande-row, et Y. Trudel Hardbound. *Powder metal technologie and applications*, volume 7. ASM, 1998. (Cité pages ix et 18.)
- L. Flandi et J.B. Leblond. A new model for porous nonlinear viscous solids incorporating void shape effects-i : Theory. *European Journal of Mechanics and Solids*, 24 :537–551, 2005. (Cité page 92.)
- N.A. Fleck. On the cold compaction of powders. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(9) :1409–31, 1995. (Cité pages x, 2, 32, 33, 34, 35 et 39.)
- N.A. Fleck, L.T. Kuhn, et R.M. McMeeking. Yielding of metal powder bonded by isolated contacts. *J. Mech. Phys. Solids*, 40(5) :1139–1162, 1992. (Cité pages ix, xi, 2, 31, 32, 33, 34, 66 et 69.)
- C.D. Foster, R.A. Regueiro, A.F. Fossum, et R.I. Borja. Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194 :5109–5138, 2005. (Cité page 105.)
- A. Frachon. *Modélisation et simulation numérique de la compression en matrice de poudres métalliques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2002. (Cité pages 20 et 24.)
- P. Francescato, J. Pastor, et T.H. Thai. Étude du critère de plasticité des matériaux poreux. *C. R. Acad. Sci. Paris*, pages 753–760, 2001. (Cité page 92.)
- X. Gao et J. Kim. Modeling of ductile fracture : Singnificance of void coalescence. *Int. J. Solids Structures*, 43 :6277–6293, 2006. (Cité pages 93 et 95.)

- R.M. German. *Powder Metallurgy Science*. MPIF, second édition, 1994. ISBN 1-878954-42-3. (Cité pages [viii](#), [10](#), [11](#), [12](#), [13](#), [14](#), [15](#), [17](#) et [18](#).)
- P. Gilormini, C. Licht, et P. Suquet. Growth of voids in a ductile matrix : a review. *Archives of mechanics*, 40(1) :43–80, 1988. (Cité page [82](#).)
- M. Gologanu, J.B. Leblond, et J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 : 1723–1754, 1993. (Cité pages [3](#), [82](#) et [91](#).)
- M. Gologanu, J.B. Leblond, et J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *ASME J. Engng. Mater. Technol.*, 116 :1723–1754, 1994. (Cité pages [3](#) et [91](#).)
- M. Gologanu, J.B. Leblond, et J. Devaux. *Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals*. CISM Lectures. Springer, New York, 1997. (Cité pages [3](#), [82](#) et [91](#).)
- S.H. Goods et L.M. Brown. The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta metallurgica*, 27 :1–15, 1979. (Cité page [79](#).)
- A.P. Green. The plastic yielding of metal junctions due to combined shear and pressure. *J. Mech. Phys. Solids*, 2 :197–211, 1954. (Cité pages [32](#) et [34](#).)
- R.J. Green. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 14 :215, 1972. (Cité pages [25](#) et [26](#).)
- J. Gurland et J. Plateau. Mechanism of ductile rupture of metals containing inclusions. *Journal of the ASM*, 56 :442–455, 1963. (Cité page [79](#).)
- A.L. Gurson. *Plastic Flow and fracture behavior of ductile metals incorporating void nucleation, growth and interaction*. PhD thesis, Brown University, 1975. (Cité pages [78](#), [86](#) et [89](#).)
- A.L. Gurson. Continuum theory for ductile rupture by void nucleation and growth : part 1 - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng Mater. Technol.*, 99(2), 1977. (Cité pages [xi](#), [3](#), [27](#), [66](#), [69](#), [77](#), [78](#), [84](#), [86](#), [89](#) et [138](#).)
- A.S. Helle, K.E. Easterling, et M.F. Ashby. Hot isostatic pressing diagrams : new developments. *Acta metall.*, 33(12) :2163–2174, 1985. (Cité pages [30](#), [31](#) et [34](#).)
- R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1960. p254. (Cité page [29](#).)
- Y. Huang. Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. *Journal of Applied Mechanics*, 58 :1084–1086, 1991. (Cité page [82](#).)
- B. Jerimic et S. Sture. Implicit integration in elastoplastic geotechnics. *Mech. Cohesive-Frictional Mater.*, 2 :135–43, 1997. (Cité page [105](#).)
- G.R. Johnson et W.H. Cook. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures. Dans *7th International Symposium on Ballistics*, pages 541–547, 1983. (Cité page [134](#).)

- L.M. Kachanov. *Introduction to continuum damage mechanics*. Mechanics of Elastic Stability. Martinus Nijhoff, Dordrecht, Pays-Bas, 1986. (Cité pages 76 et 91.)
- J. Koplik et A. Needleman. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, 24 :835–853, 1988. (Cité pages 82, 84 et 88.)
- R.D. Krieg et D.B. Krieg. Accuracies of numerical solution methods for elastic-perfectly plastic model. *J. Pressure Vessel Technol. ASME*, 99 :2–15, 1977. (Cité page 105.)
- A.M. Laptev et A.N. Ul'yanov. Deformation of spherical particles during the densification of an idealized porous material I-Investigation of kinematic characteristics. *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, 23(4) :183–6, 1984. (Cité page 35.)
- J.B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. 2003. (Cité pages xii et 125.)
- J.B. Leblond, G. Perrin, et P. Suquet. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *Int. J. Plasticity*, 10(3) :213–235, 1994. (Cité page 91.)
- D.N. Lee et H.S. Khim. Plastic yield behaviour of porous metals. *Powder Metall.*, 35(4) :275–279, 1992. (Cité page 25.)
- J. Lemaitre et J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 2ème édition, 1988. (Cité pages 76 et 77.)
- F.A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *J. Applied Mechanics*, 35 :363–371, 1968. (Cité pages 78 et 81.)
- D.L.S. McElwain, A.P. Roberts, et A.H. Wilkins. Yield criterion for porous materials subjected to complex stress states. *Acta materialia*, 54 :1995–2002, 2006a. (Cité pages xi, 3, 93, 97, 98, 99, 100, 103, 105, 108, 111, 123, 138 et 173.)
- D.L.S. McElwain, A.P. Roberts, et A.H. Wilkins. Yield functions for porous materials with cubic symmetry using different definitions of yield. *Advanced engineering materials*, 8(9) :870–876, 2006b. (Cité pages xi, xii, 3, 93, 97, 98, 99, 100, 103, 105, 108, 111, 123, 138 et 173.)
- C. McVeigh, F. Vernerey, W.K. Liu, B. Moran, et B. Olson. An interactive micro-void shear localization mechanism in high strength steels. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :225–244, 2007. (Cité page 138.)
- J.C. Michel et P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. *J. Mech. Phy. Solids*, 40(4) :783–812, 1992. (Cité pages 87 et 90.)
- P. Mosbah. *Etude expérimentale et modélisation du comportement de poudre métalliques au cours du compactage en matrice fermée*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1995. (Cité pages ix et 23.)
- K. Nahshon et J.W. Hutchinson. Modification of the gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27 :1–17, 2008. (Cité pages xi, 3, 93, 95, 96, 97 et 174.)

- A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Applied Mechanics*, 54 :525–530, 1987. (Cité page 80.)
- A. Needleman et J.R. Rice. Limit to ductility set by plastic flow localization. *Mechanics of sheet metal forming*, pages 237–267, 1978. (Cité page 80.)
- A. Needleman et V. Tvergaard. An analysis of ductile rupture in notched bars. *J. Mech. Phys. Solids*, 30 :461–490, 1984. (Cité pages 125 et 127.)
- M. ODA et A. Ohnishi. Plasticity theory for granular soils with induced anisotropy. *Advances in Micromechanics of Granular Materials*, pages 192–202, 1992. (Cité page 29.)
- N. Ogbonna et N.A. Fleck. Compaction of an array of spherical particles. *Acta Metall. Mater.*, 43 (2) :603–20, 1995. (Cité pages 2, 35, 39 et 40.)
- M. Ortiz et E.P. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21 :1561–76, 1985. (Cité page 105.)
- E. Pavier. *Caractérisation du comportement d'une poudre de fer pour le procédé de compression en matrice*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998. (Cité page 28.)
- E. Pavier et P. Doremus. Triaxial characterisation of iron powder behaviour. *Powder Met.*, 42 (4) :345–352, 1999. (Cité pages ix, 20, 21 et 22.)
- G. Perrin. *Contribution à l'étude numérique de la rupture ductile des métaux*. PhD thesis, École Polytechnique, 1992. (Cité page 84.)
- G. Perrin et J.B. Leblond. Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension-application to some problems in ductile fracture of metals. *Int. J. Plasticity*, 6 :677–699, 1990. (Cité pages 82 et 88.)
- G. Perrin et J.B. Leblond. Rudnicki and rice's analysis of strain localization revisited. *Journal of Applied Mechanics*, 60(4) :842–846, 1993. (Cité page 84.)
- J.R. Rice et D.M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 :201–217, 1969. (Cité pages 78, 81 et 82.)
- O. Richmond et R.E. Smelser. *Alcoa Technical Center Memorandum*, 1985. (Cité pages 90 et 92.)
- M.D. Riera, J.M. Prado, A. Frachon, D. Imbault, et P. Doréumus. Modelling of green compact elasticity. *Powder Metallurgy World Congress*, pages 598–601, Novembre 2000. (Cité pages 20 et 23.)
- K.H. Roscoe, A.N. Schofield, et A. Thurairjah. Yielding of clays in state wetter than critical. *Geotechnique*, 13(3) :211–240, 1963. (Cité page 27.)
- G. Rottmann, O. Coube, et H. Riedel. Comparaison between triaxial results and models prediction with special consideration of anisotropy. *PM2001 European Congress Exhibition*, 3 : 29–37, October 2001. (Cité pages ix et 22.)

- G. Rousselier. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105 :97–111, 1987. (Cité page 77.)
- J.W. Rudnicki et J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :371–394, 1975. (Cité page 84.)
- J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'E.N.P.C., Paris, 1983. (Cité pages 29, 55 et 137.)
- J. Salençon. Yield design : a survey of the theory. Chapitre in Sacchi G. and Salençon J. (eds.), pages 1–44. CISM Lectures, 1993. (Cité pages 29, 55 et 137.)
- I.S. Sandler, F.L. DiMaggio, et G.Y. Baladi. Generalized cap model for geological materials. *J. Geotech. Eng. Div.*, 102 :683–699, 1976. (Cité page 27.)
- A.N. Schofield et C.P. Wroth. *Critical state of soil mechanics*. McGraw-Hill, Londres, 1968. (Cité page 27.)
- S. Shima et M. Oyanne. Plasticity theory for porous metals. *Int. J. Mech. Sci.*, 18 :285, 1976. (Cité pages 25 et 26.)
- J.C. Simo et T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag New York, Inc, 1998. (Cité pages xii, 3, 105, 106 et 109.)
- I. Sridhar, N.A. Fleck, et A.R. Akisanya. Cold compaction of an array of cylindrical fibres. *Int. J. Mech. Sci.*, 43 :715–742, 2001. (Cité pages ix, 2, 30, 31, 35 et 39.)
- X.K. Sun et K.T. Kim. Simulation of cold die compaction densification behaviour of iron and copper powders by cam-clay model. *Powder Metall.*, 40(3) :193–195, 1997. (Cité page 27.)
- Y. Sun et D. Wang. A lower bound approach to the yield loci of porous materials. *Acta Mech. Sinica*, 5 :237–243, 1989. (Cité page 90.)
- P. Suquet. Analyse limite et homogénéisation. *CR. Acad. Sc.*, 296 :1355–1358, 1983. (Cité pages 55, 56 et 137.)
- C. Tamagnini, R. Castellanza, et R. Nova. A generalized backward euler algorithm for the numerical integration of an isotropic hardening elastoplastic model for mechanical and chemical degradation of bonded geomaterials. *J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 26 :963–1004, 2002. (Cité page 105.)
- X. Teng et T. Wierzbicki. Evaluation of six fracture models in high velocity perforation. *Engng. Fracture Mech.*, 73 :1653–1678, 2006. (Cité pages xi et 93.)
- P.F. Thomason. A theory for ductile fracture by internal necking of cavities. *Journal of the Institute of Metals*, 96 :360–365, 1968. (Cité page 84.)

- P.F. Thomason. A three-dimensional model for ductile fracture by growth and coalescence of microvoids. *Acta Metallurgica*, 33(6) :1087–1095, 1985a. (Cité page 84.)
- P.F. Thomason. A three-dimensional models for the plastic limit-loads at incipient failure of the intervoid matrix in ductile porous solids. *Acta Metallurgica*, 33(6) :1079–1085, 1985b. (Cité page 84.)
- P.F. Thomason. *Ductile fracture of metals*. Pergamon Press, Oxford, 1990. (Cité pages 82, 84 et 125.)
- S.P. Timothy, J.M. Pearson, et I.M. Hutchings. The contact pressure distribution during plastic compression of lead spheres. *Int. J. Mech. Sci.*, 29(10-11) :713–9, 1987. (Cité page 35.)
- M. Trillat et J. Pastor. Limit analysis and gurson's model. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24 :800–819, 2005. (Cité page 92.)
- M. Trillat, J. Pastor, et P. Francescato. Yield criterion for porous media with spherical voids. *Mechanics Research Communications*, 33 :320–328, 2006. (Cité page 92.)
- V. Tvergaard. Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fracture*, 17 :389–407, 1981. (Cité pages 84, 86, 88 et 174.)
- V. Tvergaard. On localization in ductile materials containing spherical voids. *Int. J. Fracture*, 18 :237–252, 1982. (Cité pages 3, 82 et 86.)
- V. Tvergaard. Shear deformation of voids with contact modelled by internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 :1459–1465, 2008. (Cité page 95.)
- V. Tvergaard et A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32 :157–169, 1984. (Cité pages 3, 84, 86, 88, 101, 106, 125, 126, 127 et 138.)
- F. Vernerey. *Multi-scale continuum theory for microstructured materials*. PhD thesis, Northwestern University, 2006. (Cité page 138.)
- X. Wang, L.B. Wang, et L.M. Xu. Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models. *Computers and Geotechnics*, 31 :315–338, 2004. (Cité page 105.)
- L. Xue. Damage accumulation and fracture initiation in uncracked ductile solids to triaxial loading. *Int. J. Solids Structures*, 44(16) :5163–5181, 2007a. (Cité pages 3, 93, 94, 95 et 96.)
- L. Xue. *Ductile fracture modeling-theory, experimental investigation and numerical verification*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2007b. (Cité pages 3, 93, 94, 95 et 96.)
- K.S. Zhang, J.B. Bai, et D. François. Ductile fracture of materials with high void volume fraction. *Int. J. Solids Struc.*, 36(23) :3407–3425, 1999. (Cité page 88.)
- Z.L. Zhang. Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 121 :29–44, 1995. (Cité pages 105 et 107.)

---

J.Z. Zuo et Z.B. Lou, Z.W. et Kuang. A yield function for porous ductile materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 53(4) :557–559, 1996. (Cité page 91.)



# PRINCIPALES NOTATIONS

$A, B$	coefficients de nucléation des vides,
$\mathcal{A}$	cellule de base représentative d'un milieu granulaire,
$a_1, a_2, s$	paramètres introduits par <a href="#">McElwain <i>et al.</i> (2006a;b)</a>
$\mathbb{C}^e, \mathbb{C}_{ijkl}^e$	tenseur de rigidité élastique,
$\mathbb{C}^{cons}, \mathbb{C}_{ijkl}^{cons}$	module tangent consistant,
$D_r$	densité relative,
$\mathbf{d}$	tenseur des taux de déformation microscopiques,
$\delta$	facteur accélérateur de la croissance des cavités,
$\mathbb{1}, \delta_{ij}$	tenseur identité de Kronecker,
$(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$	base cylindrique orthonormée directe,
$\bar{\epsilon}$	déformation équivalente totale dans la matrice,
$\bar{\epsilon}^p$	déformation plastique équivalente dans la matrice,
$\epsilon_N$	déformation plastique moyenne en début d'amorçage,
$E$	module de Young,
$\mathbf{E}, E_{ij}$	tenseur des déformations macroscopiques,
$E_{eq}^p$	déformation plastique équivalente macroscopique au sens de von Mises,
$E_r, E_z$	déformations axisymétriques macroscopiques,
$\mathbf{E}^e, E_{ij}^e$	partie élastique du tenseur $\mathbf{E}$ ,
$\mathbf{E}^p, E_{ij}^p$	partie plastique du tenseur $\mathbf{E}$ ,
$\dot{\mathbf{E}}, \dot{E}_{ij}$	tenseur des taux de déformation macroscopique (autre notation $\mathbf{D}$ ),
$\dot{\mathbf{E}}', \dot{E}'_{ij}$	déviateur du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ ,
$\dot{\mathbf{E}}^e, \dot{E}_{ij}^e$	partie élastique du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ ,
$\dot{\mathbf{E}}^p, \dot{E}_{ij}^p$	partie plastique du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ ,
$\dot{E}_m^p$	taux de déformation moyenne du tenseur $\dot{\mathbf{E}}^p$ ( $\dot{E}_m^p = \dot{E}_{kk}^p/3$ ),
$\dot{\mathbf{E}}'^p, \dot{E}'_{ij}{}^p$	déviateur du tenseur $\dot{\mathbf{E}}^p$ ,
$f$	fraction volumique de vides (porosité),
$f^*$	fraction volumique efficace de vides (fonction de $f$ ),
$f_N$	fraction volumique de vides nucléés au niveau des inclusions,
$f_o$	fraction volumique initiale de vides,
$f_c$	porosité critique initiant la phase de coalescence,
$f_p$	seuil de percolation de la structure,

$f_f$	fraction volumique de vides en fin de coalescence,
$f_u$	valeur ultime de $f_f$ correspondante à la rupture finale,
$g$	potentiel plastique,
$G$	module de cisaillement,
$GTN$	modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman,
$\bar{h}$	module d'écroissage de la matrice,
$H_1$	désigne la variable interne $\bar{\epsilon}^p$ ,
$H_2$	désigne la variable interne $f$ ,
$\mathbf{H}$	vecteur contenant les variables internes,
$h_1$	module d'écroissage plastique correspondant à $H_1$ ,
$h_2$	module d'écroissage plastique correspondant à $H_2$ ,
$\mathbf{h}$	vecteur contenant les modules d'écroissage plastiques,
$J_2$	deuxième invariant du tenseur $\Sigma'$ ,
$J_3$	troisième invariant du tenseur $\Sigma'$ ,
$K$	module de dilatation,
$k$	limite de résistance en cission simple ( $= \sigma_o / \sqrt{3}$ ),
$k_\omega$	paramètre introduit par <a href="#">Nahshon et Hutchinson (2008)</a> ,
$\Lambda$	multiplicateur de plasticité,
$\mathbf{n}$	normale extérieure,
$N$	exposant d'écroissage,
$\nu$	coefficient de Poisson,
$\Omega$	domaine macroscopique (structure),
$\partial\mathcal{A}$	frontière de la cellule $\mathcal{A}$ ,
$\Phi$	fonction de charge,
$p$	pression moyenne macroscopique ( $p = -\Sigma_m$ ),
$\pi$	fonction d'appui microscopique,
$\Pi$	fonction d'appui macroscopique,
$\mathcal{P}_{ex}$	puissance des efforts extérieurs,
$\mathcal{P}_{rm}$	puissance résistance maximale,
$q_1, q_2, q_3$	paramètres introduits par <a href="#">Tvergaard (1981)</a> ,
$(r, \theta, z)$	coordonnées cylindriques,
$s_N$	écart type de la distribution initiale des inclusions,
$\sigma, \sigma_{ij}$	tenseur des contraintes microscopiques de Cauchy,
$\sigma', \sigma'_{ij}$	déviateur du tenseur $\sigma$ ,
$\sigma_o$	limite d'écoulement de la matrice,
$\bar{\sigma}$	contrainte équivalente d'écoulement de la matrice,
$\sigma_N$	contrainte moyenne d'amorçage de la striction interne localisée,
$\Sigma, \Sigma_{ij}$	tenseur des contraintes macroscopiques de Cauchy,

$\Sigma', \Sigma'_{ij}$	déviateur du tenseur $\Sigma$ ,
$\Sigma_r, \Sigma_z$	contraintes axisymétriques macroscopiques,
$\Sigma$	mesure de la contrainte déviatorique ( $= \Sigma_z - \Sigma_r$ ),
$\Sigma_{eq}, q$	contrainte équivalente macroscopique au sens de von Mises,
$\Sigma_m$	contrainte hydrostatique (moyenne) macroscopique ( $\Sigma_m = \Sigma_{kk}/3$ ),
$\Sigma_d$	troisième invariant du tenseur $\Sigma$ ,
$(\Sigma_I, \Sigma_{II}, \Sigma_{III})$	contraintes principales du tenseur $\Sigma$ ,
$(\Sigma'_I, \Sigma'_{II}, \Sigma'_{III})$	contraintes principales du tenseur $\Sigma'$ ,
$T$	taux de triaxialité des contraintes ( $T = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$ ),
$\text{Tr}$	opérateur trace,
$\mathbf{v}$	vecteur des vitesses de déplacements,
$\otimes$	produit tensoriel, soit $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$ ,
$\cdot$	produit scalaire, soit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_j$ ,
$:$	produit doublement contracté, soit $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ji}$ ,
$\wedge$	produit vectoriel,
$ \bullet $	volume de $\bullet$ ,
$\ \bullet\ $	norme de $\bullet$ ,
$\langle \bullet \rangle_V$	moyenne de $\bullet$ sur le volume $V$ ( $= \frac{1}{ V } \int_V \bullet dV$ ),
$\llbracket \bullet \rrbracket_S$	saut de discontinuité du champ $\bullet$ à travers la surface $S$ ,



Cette thèse a fait/fera l'objet de divers travaux écrits :

A. Benabbes, L. Dormieux, L. Siad. An estimate of the macroscopic yield surfaces of powder compacts using the kinematical approach of the yield design theory. *Int. J. Mater. Form.* (2008), DOI 10.1007/s12289-008-0046-8, © Springer/ESAFORM 2008.

A. Benabbes, L. Siad and L. Dormieux. Yield design homogenization method for compaction of monosized spherical powders. Submitted for eventual publication in *Archive of Applied Mechanics*, Décembre 2009.

A. Benabbes, L. Siad and L. Dormieux. Ductile damage of materials accounting for the third invariant stress. To be submitted for possible publication in *Advanced Engineering Materials*, February 2010.

A. Benabbes, L. Siad and L. Dormieux. Ductile fracture of materials based on McElwain et al. GTN-like model. 18th Conference on Fracture, ECF 18, August 30-September 03, 2010, Dresden, Germany.

A. Benabbes, L. Siad and L. Dormieux. A homogenization approach to the yield strength of spherical powder compacts. NUMIFORM 2010, June 13 17, 2010, Pohang, Korea.



Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte WinEdt et du logiciel de composition typographique L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>.





**Titre** Approches micromécaniques de la compaction de poudres et de la rupture ductile des matériaux incluant le 3<sup>me</sup> invariant des contraintes

**Résumé** Ce travail de thèse englobe deux thématiques de recherche que sont, d'une part la modélisation micromécanique de la compaction de poudre consistant à construire des critères de rupture macroscopiques basés sur l'homogénéisation en calcul à la rupture et, d'autre part, l'approche locale de la rupture ductile des matériaux avec prise en compte des effets du troisième invariant des contraintes ainsi que les simulations numériques s'y rapportant.

Dans la première partie du mémoire, la méthode cinématique du calcul à la rupture est utilisée pour la construction de bornes supérieures des critères de rupture macroscopiques d'un matériau granulaire et ce, pour des densités relatives variant entre 0,7 et 0,95. Pour ce faire, le milieu granulaire est assimilé à un milieu constitué d'un assemblage périodique de cellules cylindriques à base hexagonale. En premier lieu, une cellule de base *primitive* consistant en un cylindre circulaire dans lequel un grain est circonscrit et dont la hauteur est égale au diamètre de ce dernier est employée dans des analyses aux éléments finis qui renseignent en particulier sur les modes de déformation du grain solide. En deuxième lieu, huit mécanismes de rupture pertinents de cellules de base aux géométries appropriées permettent d'obtenir des estimations par l'extérieur des surfaces de charge macroscopiques. Les calculs sont menés aussi bien pour la compression isostatique que pour la compression en matrice. Les résultats ainsi obtenus sont confrontés à ceux fournis par des calculs aux éléments finis effectués directement sur la cellule de base *primitive*.

Dans la seconde partie du mémoire, un modèle de comportement élastoplastique pour matériaux poreux basé sur le critère de McElwain *et al.* (2006) est implantée avec succès dans le code Abaqus. Ce modèle a la particularité de prendre en compte directement dans le potentiel plastique le troisième invariant des contraintes. La striction d'une barre cylindrique lisse, la traction d'une éprouvette entaillée et le cisaillement en déformation plane ont été simulés numériquement en utilisant le modèle de McElwain *et al.* (2006) et les résultats obtenus sont confrontés à ceux dérivés du modèle de Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN). La différence des réponses auxquelles conduisent les deux modèles de comportement est plus importante durant la phase d'adoucissement du matériau finissant par sa rupture totale.

**Mots-clés** Compaction. Calcul à la rupture. Densité. Dynamique. Éléments finis. Endommagement. Homogénéisation. Implantation numérique. Micromécanique. Microstructure. Mise en forme. Modélisation. Poudre. Porosité. Résistance. Rupture. Simulation numérique.