

Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

THESE

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne
Ecole Doctorale : Sciences, Technologies, Santé
Spécialité : Mathématiques

Présentée par :
Julie Baudry

**Structures de Poisson de certaines variétés quotient :
propriétés homologiques, d'engendrement fini
et de rationalité**

Soutenue le 30 Octobre 2009 devant le jury composé de :

Roland Berger	Université de Saint-Etienne	Rapporteur
Ken Brown	Université de Glasgow	Rapporteur
Gérard Cauchon	Université de Reims	Examineur
François Dumas	Université de Clermont-Ferrand	Examineur
Lucy Moser-Jauslin	Université de Bourgogne	Examineur
Jacques Alev	Université de Reims	Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma reconnaissance à Jacques Alev, directeur de ma thèse, qui a consacré beaucoup de son temps à encadrer mon travail de recherche. Je le remercie pour avoir su partager ses connaissances, et m'avoir encouragée à participer à de nombreuses écoles thématiques et séminaires afin d'élargir mon champ de compétence.

Je remercie Roland Berger et Ken Brown d'avoir accepté la tâche difficile de relire ma thèse, de l'avoir fait avec autant de rigueur, et d'y avoir apporté de nombreuses améliorations. Je remercie également Lucy Moser-Jauslin de me faire l'honneur de faire partie de mon jury. Je souhaite aussi remercier François Dumas pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté de participer à mon jury. Je remercie Gérard Cauchon, pour la richesse et la clarté de ses enseignements auxquels j'ai assisté à l'université de Reims, je lui suis reconnaissante pour sa participation au jury de thèse.

Je souhaite aussi remercier Stéphane Launois, Laurent Rigal et Tom Lenagan pour l'organisation des rencontres franco-ecossaises. Elles ont été l'occasion d'exposer mon travail et de partager avec d'autres chercheurs. Je remercie encore les organisateurs du GTIA qui m'ont permis, au travers de ce groupe de travail, de découvrir divers sujets et de rencontrer de nombreux mathématiciens.

J'ai pu bénéficier pendant ces trois années de bonnes conditions de travail au sein du laboratoire de mathématiques de Reims, et je remercie les membres du département pour leur accueil. Merci à Christelle et Nathalie pour leur disponibilité et leur constante bonne humeur, et merci aux doctorants qui ont partagé le bureau avec moi et m'ont supporté pendant ces années.

Résumé de la thèse

Les structures de Poisson sont apparues comme généralisation des variétés symplectiques, qui formalisent la mécanique hamiltonienne. On étudie dans cette thèse certaines propriétés d'exemples classiques d'algèbres de Poisson, et de leurs déformations naturelles : propriété de finitude de la structure de Lie associée au crochet de Poisson, étude du groupe d'homologie en degré zéro lié à la structure de Poisson ou à la structure non commutative de la déformation, propriété de rationalité. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Poisson, on étudie en particulier le passage des certaines propriétés de $\mathcal{A}$ à une sous-algèbre d'invariants sous l'action d'un groupe fini d'automorphismes de Poisson, sur des exemples classiques.

En dimension 2, on s'intéresse à la structure de Poisson induite par la structure symplectique de $\mathbb{C}^2$ sur les variétés quotient $\mathbb{C}^2/G$, où G est un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$, qui sont des surfaces plongées en dimension 3, appelées surfaces de Klein, possédant une singularité isolée à l'origine. L'algèbre de Lie associée au crochet de Poisson symplectique est de type fini, et on étudie la propriété de finitude de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}^G$ munie du crochet de Poisson induit : pour chaque sous-groupe fini G , on exhibe un système générateur de cardinal minimal. L'algèbre de Weyl $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})$ est une déformation naturelle de l'algèbre de Poisson symplectique, et la propriété de finitude de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}^G$ passe aux algèbres d'invariants de la déformation par le gradué associé. En dimension 4, on s'intéresse à l'action d'un groupe de Weyl de rang 2 sur le double de l'algèbre de Cartan associée $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$. On démontre alors que l'algèbre des invariants de l'algèbre de Poisson symplectique $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*]$ est de type fini pour la structure de Lie, en exhibant des systèmes générateurs explicites, dans les cas $G = B_2$, et $G = A_2$.

Un autre exemple en dimension 2 étudié est issu de la théorie des invariants multiplicatifs. Soit G un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$, alors G agit sur $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^2] \simeq \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, que l'on munit cette algèbre de la structure de Poisson définie par $\{x, y\} = xy$. Alors $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est une algèbre de Lie de type fini pour ce crochet, et le groupe G respecte le crochet de Poisson. L'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ s'avère être l'algèbre des fonctions d'une surface plongée en dimension 3 définie par une relation (F) , qui possède plusieurs singularités isolées. En étudiant une désingularisation par éclatements de ces singularités, on établit une correspondance 'à la McKay' dans le cas multiplicatif.

Par ailleurs, on détermine, comme dans le cas des surfaces de Klein, un système générateur de l'algèbre de Lie $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ munie du crochet de Poisson induit. L'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ possède une déformation naturelle par le tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, défini par la relation $yx = qxy$. On peut alors définir une action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur le tore quantique, et l'algèbre des invariants sous l'action d'un sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{Z})$ fournit une déformation de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$. Par des calculs similaires au cas Poisson, on montre que ces algèbres d'invariants non commutatives sont engendrées pour le crochet de commutation par un nombre fini d'éléments. En calculant par ailleurs l'homologie de Hochschild de ces algèbres d'invariants, on montre que ces systèmes générateurs trouvés sont de cardinal minimal.

Dans les deux exemples de dimension 2 précédents, on constate également que la structure de Poisson induite sur la surface (F) provient d'une structure de Poisson jacobienne définie sur $\mathbb{C}^3$ par le polynôme (F) . Ces structures de Poisson jacobienes apparaissent dans de nombreuses situations, en particulier dans le cas de la structure transverse à l'orbite adjointe sous-régulière d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. On étudie alors des propriétés de certaines de ces structures de Poisson jacobienes, comme la recherche du centre de Poisson, et l'étude du groupe d'homologie de Poisson en degré 0.

Enfin, on s'intéresse à une version Poisson d'une conjecture liée aux questions de rationalité, la conjecture de Gelfand-Kirillov. La version Poisson étudiée est la suivante : soit une algèbre de Poisson $\mathcal{A}$ et G un groupe fini d'automorphismes de Poisson de $\mathcal{A}$, on étudie alors l'existence d'un isomorphisme de Poisson entre le corps des fractions de $\mathcal{A}$ et celui de $\mathcal{A}^G$. On vérifie cette propriété pour des exemples vus précédemment : les surfaces de Klein, les invariants de l'algèbre symplectique en dimension 4 sous l'action du groupe de Weyl B_2 , et l'algèbre des invariants multiplicatifs sous l'action du groupe $\langle -id \rangle$.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Préliminaires	9
2.1	Algèbres d'invariants	9
2.2	Algèbres de Poisson	10
2.2.1	Définitions	10
2.2.2	Structure d'algèbre de Lie	11
2.2.3	Produit tensoriel	12
2.3	Homologie et cohomologie de Poisson	13
2.3.1	Cohomologie	13
2.3.2	Homologie	14
2.3.3	Produit intérieur	14
2.3.4	Exactitude du complexe de de Rham	15
2.3.5	Homologie de Poisson en degré zéro	17
2.4	Déformation, quantification des crochets de Poisson	17
2.4.1	Quantification-déformation	17
2.4.2	Déformations algébriques	18
2.4.3	Algèbres non commutatives et équivalence de Morita	22
3	Structure de Poisson jacobienne	26
3.1	Définition	26
3.2	Dualité entre l'homologie et la cohomologie de Poisson	31
3.3	Centre de Poisson	31
3.4	Homologie de Poisson en degré 0 sur la surface	32
3.5	Homologie de Poisson en degré 0 de l'espace ambiant	37
3.6	Application : Structures transverses	40
3.6.1	Orbites adjointes et coadjointes	40
3.6.2	Structure de Poisson transverse	40
4	Algèbres de Poisson symplectiques	42
4.1	Crochet de Poisson symplectique	42
4.2	Déformation par les algèbres de Weyl	45
4.3	Surfaces de Klein	46
4.3.1	Construction	46
4.3.2	Structure de Poisson jacobienne	48
4.3.3	Finitude de la structure de Lie	49
4.3.4	Engendrement particulier	52
4.3.5	Déformation des invariants, produits croisés	57

4.4	Exemples en dimension 4	59
4.4.1	Exemple du groupe de Weyl B_2	59
4.4.2	Engendrement particulier	62
4.4.3	Exemple du groupe de Weyl A_2	65
5	Algèbres de Poisson issues du cas multiplicatif	69
5.1	Invariants multiplicatifs	69
5.1.1	Structure de Poisson	69
5.1.2	Calculs d'invariants	72
5.2	Correspondance à la McKay	74
5.3	Propriété d'engendrement fini de l'algèbre de Lie	83
5.3.1	Le cas du groupe $\mathcal{G}_7$	84
5.3.2	Le cas du groupe $\mathcal{G}_8$	87
5.3.3	Le cas du groupe $\mathcal{G}_9$	89
5.3.4	Le cas du groupe $\mathcal{G}_{10}$	91
5.4	Déformation	92
5.4.1	Le tore quantique	92
5.4.2	Invariants de la déformation	94
5.4.3	Déformation des invariants	95
5.4.4	Finitude de la structure de Lie	97
5.5	Homologie de Poisson et homologie de Hochschild	98
5.6	Calcul de l'homologie de Hochschild en degré zéro	99
6	Conjecture de Gelfand-Kirillov	109
6.1	La conjecture de Gelfand-Kirillov	109
6.2	Version Poisson de la conjecture de Gelfand-Kirillov	110
6.3	Théorème de Miyata : une version Poisson	111
6.4	Exemple des singularités de Klein	112
6.5	Exemple du cas B_2	114
6.6	Exemple du cas multiplicatif	115

Chapitre 1

Introduction

Les crochets de Poisson sont apparus au début du 19^{ème} siècle en mécanique classique, comme outil de description des équations Hamiltoniennes du mouvement. Un crochet de Poisson sur une algèbre commutative $\mathcal{A}$ est une application bilinéaire antisymétrique

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

qui est une dérivation en chacune de ses variables et qui vérifie la propriété de Jacobi.

L'étude géométrique des crochets de Poisson a permis de définir les variétés de Poisson, comme une généralisation des variétés symplectiques, et qui apparaissent naturellement dans de nombreuses situations. Par exemple, si on considère une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, son dual peut être muni d'une structure de Poisson issue du crochet de Lie, que l'on appelle structure de Lie-Poisson, définie de la manière suivante :

$$\forall \mu \in \mathfrak{g}^*, F, F' \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*), \{F, F'\}(\mu) := \mu([\mathbf{d}_\mu F, \mathbf{d}_\mu F'])$$

où $\mathbf{d}_\mu F$ et $\mathbf{d}_\mu F'$ sont des éléments de $(T_\mu \mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$.

A cette structure supplémentaire sur une algèbre commutative, on associe une notion d'homologie et de cohomologie, dites de Poisson, qui fournissent des invariants sur la structure de Poisson elle-même, en étroite correspondance avec l'homologie et la cohomologie de Hochschild d'une déformation non commutative, dont l'algèbre initiale est la limite semi-classique.

Dans le cas des structures de Poisson symplectiques, les propriétés homologiques sont relativement simples, et on s'intéresse alors aux propriétés de leurs sous-algèbres d'invariants sous l'action de certaines symétries symplectiques. Soit V un espace symplectique de dimension $2n$, son algèbre de fonctions polynômiales $\mathbb{C}[V]$ est munie d'une structure de Poisson induite par la forme symplectique sur V . Si G est un sous-groupe fini du groupe symplectique $Sp(V)$, G agit sur l'algèbre des fonctions $\mathbb{C}[V]$ et respecte la structure de Poisson de sorte que l'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[V]^G$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathbb{C}[V]$.

Dans le cas de la dimension 2 apparaissent des propriétés particulières intéressantes. Le groupe symplectique $Sp(2, \mathbb{C})$ s'identifie au groupe spécial linéaire $SL(2, \mathbb{C})$, et les algèbres d'invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$, où G est un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$, ont été longuement étudiées. L'algèbre $\mathbb{C}[x, y]^G$ est vue comme l'algèbre des fonctions polynômiales sur la variété quotient $\mathfrak{X}_G := \mathbb{C}^2/G$, qui s'avère être une surface plongée en dimension 3, possédant une unique singularité isolée à l'origine appelée singularité de Klein. On considère alors une désingularisation minimale $p : \tilde{\mathfrak{X}}_G \rightarrow \mathfrak{X}_G$ de cette singularité ; la fibre exceptionnelle $p^{-1}(0)$ est une réunion de droites projectives, dont le diagramme d'intersection est appelé

graphe de la désingularisation. Par ailleurs, à partir des représentations irréductibles du groupe G , on peut construire un diagramme de Dynkin associé au groupe G . Il existe alors une correspondance entre le graphe de la désingularisation et le diagramme de Dynkin du groupe, appelée correspondance de McKay [Rei02].

Une généralisation de cette correspondance est possible en dimension supérieure dans le cadre des actions linéaires. Nous nous intéresserons à une correspondance de ce type dans le cadre des actions multiplicatives en dimension 2. Une action multiplicative correspond à l'action d'un groupe sur un réseau L ; ce réseau est un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang fini, et on considère un groupe fini G agissant sur L par automorphismes. Cette action s'étend de manière unique en une action sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[L]$ par automorphismes de $\mathbb{C}$ -algèbre.

Pour un réseau L de rang 2, une $\mathbb{Z}$ -base (x, y) étant choisie, l'action d'un groupe G sur L est donnée par un sous-groupe du groupe linéaire $GL(2, \mathbb{Z})$. L'algèbre du groupe $\mathbb{C}[L]$ est alors isomorphe à l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. En notant les monômes de Laurent $x^a y^b =: T^{(a,b)}$, l'action d'un élément g du groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ peut s'écrire

$$g \cdot T^{(a,b)} = T^{g \cdot (a,b)}.$$

L'action de g se résume à une action sur les puissances des monômes. On considère alors sur l'algèbre $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ un crochet de Poisson qui est l'analogue du crochet de Poisson symplectique dans le cas linéaire, défini par

$$\{x, y\} = xy.$$

Les sous-groupes de $GL(2, \mathbb{Z})$ sont classifiés à conjugaison près [Lor05], et dans cette classification, les sous-groupes respectant la structure de Poisson précédente sont les 4 sous-groupes finis du groupe spécial linéaire $SL(2, \mathbb{Z})$, qui sont quatre groupes cycliques. Si G est l'un de ces quatre groupes, l'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômiales sur une surface dans l'espace affine de dimension 3, possédant plusieurs singularités isolées. On utilisera la numérotation de ces groupes donnée dans [Lor05].

En déterminant une désingularisation minimale de chacune de ces singularités, on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 1.0.1

- Dans le cas $G = \mathcal{G}_{10} \simeq C_2$, la surface a quatre points singuliers de type A_1 .
- Dans le cas $G = \mathcal{G}_9 \simeq C_3$, la surface a trois points singuliers de type A_2 .
- Dans le cas $G = \mathcal{G}_8 \simeq C_4$, la surface a un point singulier de type A_1 , et deux de type A_3 .
- Dans le cas $G = \mathcal{G}_7 \simeq C_6$, la surface a un point singulier de type A_1 , un de type A_2 , et un de type A_5 .

Dans chaque cas, le graphe de la désingularisation d'une singularité correspond au diagramme de Dynkin d'un sous-groupe du groupe G dont on considère l'action, et la singularité la plus complexe est de type correspondant au groupe G lui-même.

Afin de mieux comprendre les propriétés des structures de Poisson étudiées, on considère souvent en parallèle les propriétés de leurs déformations non commutatives naturelles. En ce qui concerne les propriétés homologiques, il existe, dans le cas des variétés de Poisson régulières, une correspondance entre l'homologie de Hochschild de la quantification et l'homologie de Poisson de l'algèbre quantifiée [Kon03], [Sho03].

La situation singulière est moins bien connue. Dans le cas d'exemples classiques issus du cas symplectique, on observe une telle correspondance, par exemple dans le cas des singularités de Klein [AL98]. Une déformation algébrique naturelle des algèbres de Poisson symplectiques est donnée par les algèbres de Weyl $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, et leurs algèbres d'invariants donnent des déformations algébriques des invariants des algèbres de Poisson sous l'action de sous-groupes finis du groupe symplectique. Par ailleurs, l'homologie et la cohomologie de Hochschild de ces algèbres d'invariants sont complètement calculées par [AFLS00].

Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre d'invariants de $\mathfrak{g}$, et W son groupe de Weyl. Le groupe W agit diagonalement sur $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$, qui est muni d'une structure symplectique naturelle. Le groupe d'homologie de Poisson en degré zéro de $\mathbb{C}[V]^W$ et le groupe d'homologie de Hochschild de sa déformation par les invariants de l'algèbre de Weyl correspondante sont de même dimension dans le cas des groupes de Weyl de rang 2 [AF09], et 3 [But08]. On verra qu'une telle correspondance existe aussi dans le cas de l'action multiplicative du groupe $\mathcal{G}_{10}$.

Sur une algèbre de Poisson $\mathcal{A}$, du fait de la propriété de Jacobi, le crochet de Poisson induit une structure d'algèbre de Lie; de même, le crochet de commutation induit une structure d'algèbre de Lie sur une algèbre non commutative. Dans de nombreux cas, la finitude de la dimension de l'espace d'homologie en degré zéro découle de la propriété d'engendrement fini de la structure de Lie associée, dans le cas commutatif comme dans le cas non commutatif. En effet, un système générateur pour la structure de Lie fournit un système générateur du groupe d'homologie en degré zéro vu comme un espace vectoriel. Un des buts de cette thèse est donc d'étudier la propriété d'engendrement fini pour la structure de Lie d'une algèbre de Poisson, ainsi que pour la structure de Lie induite par le crochet de commutation sur une déformation naturelle de l'algèbre de Poisson. Ce problème est un analogue du théorème de Noether, qui assure que dans le cas linéaire, l'algèbre des invariants $\mathcal{A}^G$ possède un système générateur de cardinal fini pour la structure associative. On s'attend donc à ce qu'il existe un résultat similaire pour la structure de Lie liée au crochet de Poisson.

Pour les algèbres d'invariants de l'algèbre de Poisson symplectique de dimension 2, on exhibera des systèmes générateurs minimaux de la structure de Lie, que l'on tirera d'une propriété d'engendrement particulier.

PROPOSITION 1.0.2

Il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie V_0 de $\mathbb{C}[x, y]^G$, et un sous-espace vectoriel de dimension finie V_1 de $\mathbb{C}[x, y]$ tels que l'action adjointe itérée de V_0 sur V_1 engendre toute l'algèbre de Lie $\mathbb{C}[x, y]$. En d'autres termes, si on pose, pour $k \geq 1$, $V_{k+1} =$

$\{V_0, V_k\}$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} V_k = \mathbb{C}[x, y]$.

A partir de cette propriété, l'opérateur de Reynolds

$$\rho_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

permet d'obtenir un système générateur pour la structure de Lie de l'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$. On souhaiterait pouvoir généraliser cette propriété d'engendrement de l'algèbre de Poisson $\mathcal{A}$ qui explique l'engendrement fini de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}^G$.

Dans les exemples issus de la dimension 2, dans le cas linéaire comme dans le cas multiplicatif, on a vu que l'algèbre d'invariants est l'algèbre des fonctions sur une surface plongée

en dimension 3. La structure de Poisson sur cette surface permet de munir l'espace ambiant d'une structure de Poisson très particulière, appelée structure de Poisson jacobienne, et définie de la manière suivante. Soit P un élément de $\mathbb{C}[x, y, z]$, il permet de munir l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x, y, z]$ d'une structure de Poisson par la formule

$$\{F, G\} = \text{Jac}(F, G, P),$$

où $\text{Jac}(F, G, P)$ est le déterminant de la matrice jacobienne de (F, G, P) . Ce type de structure de Poisson existe en dimension supérieure : soient $P_1, \dots, P_{n-2}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, on définit le crochet de Poisson associé par

$$\{F, G\} = \text{Jac}(F, G, P_1, \dots, P_{n-2}).$$

Ces structures de Poisson jacobienes ont été étudiées dans [Prz01], et leur (co)homologie a été déterminée en dimension 3 dans le cas d'un polynôme quasi-homogène [Mar04], [Pic05], et dans le cas des algèbres de Sklyanin de dimension 4 [Pel08]. On étudiera ici certaines propriétés en dimension n . On vérifiera en particulier la propriété de Jacobi pour une famille quelconque de polynômes.

Pour une famille quasi-homogène de polynômes $(P_1, \dots, P_{n-2})$ définissant une intersection complète à singularité isolée, on démontrera que le centre de Poisson est réduit à l'algèbre engendrée par $P_1, \dots, P_{n-2}$. On montrera ensuite que le groupe d'homologie en degré 0 de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ est un module de type fini sur le centre de Poisson, dont on peut déterminer un système de générateurs de cardinal minimal, ce cardinal étant le nombre de Tjurina de la singularité.

Ces structures de Poisson jacobienes particulières apparaissent naturellement dans le cadre de la structure de Poisson transverse à l'orbite adjointe sous-régulière d'une algèbre de Lie semi-simple complexe [DSV07].

Revenons maintenant au cas des invariants multiplicatifs décrits précédemment. L'algèbre de Poisson $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}], \{\cdot, \cdot\})$ où le crochet est défini par $\{x, y\} = xy$ possède un système générateur de cardinal fini pour sa structure de Lie, et on peut déterminer que son groupe d'homologie de Poisson en degré zéro est de dimension 1. Si maintenant G est un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$, on rappelle que l'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ est l'algèbre des fonctions polynômiales sur une surface plongée en dimension 3 définie par un polynôme F qui n'est pas quasi-homogène. Les résultats obtenus sur les structures jacobienes dans le cas quasi-homogène ne peuvent donc pas s'appliquer, et le groupe d'homologie de Poisson en degré zéro de l'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ semble plus difficile à obtenir. Toutefois, par des méthodes directes, on détermine dans chaque cas un système générateur pour la structure de Lie dont le cardinal est égal au nombre de Milnor du polynôme F .

De manière analogue au cas symplectique, on recherche une déformation naturelle de ces algèbres de Poisson. Le tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, défini par la relation $yx = qxy$, fournit une déformation du crochet de Poisson défini par $\{x, y\} = xy$. Afin d'en déduire des déformations des algèbres d'invariants du cas Poisson, il faut considérer une action 'tordue' du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ sur le tore quantique. L'algèbre d'invariants de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ sous l'action d'un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$ est alors une déformation de l'algèbre des invariants de l'algèbre de Poisson.

L'homologie de Hochschild a été calculée pour l'algèbre d'invariants sous l'action du groupe $\mathcal{G}_{10} \simeq C_2$ [EO06]. On effectue ici le calcul de l'homologie de Hochschild en degré zéro pour les trois autres algèbres d'invariants, en suivant la méthode employée dans l'article

[EO06] pour les invariants sous l'action du groupe $\mathcal{G}_{10}$, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'un produit croisé et de la formule suivante [Lor92] :

$$HH_0(\mathcal{A} \star G) = \bigoplus_{[g] \in T(G)} H_0(C(g)/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}, \mathcal{A}g))$$

où $T(G)$ est l'ensemble des classes de conjugaison de G , $[g]$ la classe d'un élément g du groupe G , et $C(g)$ le centralisateur de g dans G . A mesure que l'ordre du groupe considéré augmente, les calculs gagnent en complexité, car il apparaît des $C(g)/\langle g \rangle$ -modules $HH_0(\mathcal{A}, \mathcal{A}g)$ non triviaux pour les groupes $\mathcal{G}_8 \simeq C_4$ et $\mathcal{G}_7 \simeq C_6$. On constate finalement que la dimension obtenue pour l'espace d'homologie de Hochschild en degré 0 est égale au cardinal du système générateur de la structure de Lie de l'algèbre de Poisson correspondante.

Dans le cadre du passage à la limite semi-classique, on s'intéresse à une version Poisson d'une conjecture liée aux questions de rationalité des variétés algébriques : la conjecture de Gelfand-Kirillov [GK66]. Cette conjecture s'intéresse au problème suivant : l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie algébrique sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos est-elle 'birationnellement' équivalente à une algèbre de Weyl sur une extension transcendante pure de $\mathbb{K}$. Cette conjecture ainsi qu'une version affaiblie ont été étudiées pour de nombreux exemples ([GK66], [GK69], [Jos74], [McC74], [BGR73], [Hai79], [AOVdB00]).

On donne ici un énoncé très général de la version Poisson de cette conjecture que l'on étudiera sur des exemples. On considère une algèbre de Poisson $\mathcal{A}$ et G un groupe fini d'automorphismes de Poisson de $\mathcal{A}$. La conjecture de Gelfand-Kirillov version Poisson est l'étude de l'existence d'un isomorphisme de Poisson entre le corps des fractions de $\mathcal{A}$ et celui de $\mathcal{A}^G$.

Lorsque $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de Poisson symplectique, cela revient à déterminer des éléments p_i, q_i du corps des fractions de $\mathcal{A}^G$, algébriquement indépendants tels que

$$\text{Frac}(\mathcal{A}^G) = \mathbb{C}(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$$

et $\{p_i, q_i\} = 1$, pour tout i , les autres crochets étant nuls. Un couple (p_i, q_i) est appelé un couple symplectique. Dans le cas des surfaces de Klein, on utilise une version Poisson du théorème de Miyata pour construire un couple symplectique.

En dimension supérieure, la structure du groupe de Weyl B_2 comme produit en couronne permet également d'utiliser cette version Poisson du théorème de Miyata pour construire des couples symplectiques (p_1, q_1, p_2, q_2) du corps des fractions de $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*]^{B_2}$. Concernant l'exemple des invariants multiplicatifs, on vérifie que la conjecture de Gelfand-Kirillov version Poisson est vérifiée dans le cas des invariants sous l'action du groupe $\mathcal{G}_{10} \simeq C_2$.

On décrit maintenant brièvement le contenu de chacun des chapitres développés dans la thèse.

Le chapitre 2 est un chapitre général qui donne les définitions des algèbres étudiées et les différentes propriétés utiles dans la suite, concernant la théorie des invariants, les crochets de Poisson, l'homologie et la cohomologie de Poisson. On donne également les définitions de ce qu'on appellera déformation d'une algèbre de Poisson, en particulier les déformations algébriques pour lesquelles l'utilisation du gradué associé permet de transférer des propriétés de l'algèbre de Poisson à sa déformation.

Le chapitre 3 est consacré aux structures de Poisson jacobien. On décrit en particulier l'homologie de Poisson en degré 0 de la surface définie par les polynômes $P_1, \dots, P_{n-2}$ qui définissent le crochet de Poisson jacobien sur $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, puis l'homologie de Poisson en degré 0 de tout l'espace ambiant. On redéfinit le contexte des structures transverses aux orbites adjointes d'une algèbre de Lie semi-simple complexe pour vérifier que les calculs précédents s'appliquent dans cette situation.

Dans le chapitre 4, on fait une étude détaillée du cas des algèbres de Poisson symplectiques, et de leurs déformations par les algèbres de Weyl. Concernant les invariants, on commence par donner les résultats sur les surfaces de Klein : la structure de Poisson sur la surface est induite par une structure de Poisson jacobienne sur l'espace ambiant définie par le polynôme définissant la surface. Cette propriété permet de donner une première preuve de la propriété d'engendrement fini de la structure de Lie. On donne une seconde preuve de ce résultat en partant d'une propriété d'engendrement plus fine et en utilisant l'opérateur de Reynolds. On transfère enfin ces propriétés aux déformations par les invariants de l'algèbre de Weyl. On s'intéresse ensuite au cas de la dimension 4. Par des calculs directs, on démontre la propriété d'engendrement fini de la structure de Lie des invariants de $\mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*]$ sous l'action du groupe de Weyl B_2 , puis pour le groupe de Weyl A_2 .

Le chapitre 5 regroupe les résultats obtenus dans le cadre des invariants multiplicatifs en dimension 2 : la correspondance de type McKay évoquée précédemment, la propriété d'engendrement fini de la structure de Lie des invariants sous l'action des sous-groupes finis de $SL(2, \mathbb{Z})$, la définition de l'action de ces groupes sur le tore quantique qui est une déformation non commutative de l'algèbre de Poisson et le calcul de l'homologie de Hochschild en degré zéro des invariants de la déformation.

Le chapitre 6 termine sur la conjecture de Gelfand-Kirillov Poisson, avec les exemples des surfaces du Klein, des invariants pour le groupe de Weyl B_2 , et un exemple dans le cas des invariants multiplicatifs.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Algèbres d'invariants

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative, et G un groupe fini d'automorphismes de $\mathcal{A}$. On s'intéresse à la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ appelée algèbre des invariants :

$$\mathcal{A}^G := \{a \in \mathcal{A} \mid g \cdot a = a, \forall g \in G\}$$

Dans les chapitres à venir, nous étudierons en détail certains exemples issus de deux situations différentes : celle des actions de groupe linéaires, et celle des invariants multiplicatifs.

En géométrie algébrique, si V est une variété algébrique affine, d'algèbre de fonctions $\mathcal{A}$, et G un groupe fini d'automorphismes de V , alors G agit par automorphismes d'algèbre sur $\mathcal{A}$ par

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v),$$

pour $g \in G$, $f \in \mathcal{A}$ et $v \in V$. L'algèbre des invariants $\mathcal{A}^G$ peut alors être identifiée à l'algèbre des fonctions sur la variété quotient V/G .

Dans de nombreux exemples étudiés par la suite, la variété V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et G est un groupe fini d'automorphismes de l'espace V . On note $\mathbb{C}[V]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V ; si $x_1, \dots, x_n$ est une base du dual V^* , alors $\mathbb{C}[V]$ s'identifie à l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ en $x_1, \dots, x_n$ qui possède une graduation naturelle par le degré total. L'action de G sur $\mathbb{C}[V]$ conserve le degré des polynômes, donc l'algèbre des invariants peut être munie de la graduation induite :

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_j^G.$$

L'étude de l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[V]^G$ a débuté au 19^{ème} siècle et continue encore de nos jours. Nous citons ici quelques résultats importants liés à la graduation induite sur l'algèbre des invariants, résultats que nous utiliserons dans la suite. Pour une démonstration, voir [Ben93].

Le théorème de Noether :

$\mathbb{C}[V]^G$ est engendrée, en tant qu'algèbre associative sur $\mathbb{C}$, par ses éléments de degré au plus $|G|$, où $|G|$ désigne le cardinal du groupe fini G .

Le théorème de Molien :

On note $P(\mathbb{C}[V]^G, T) = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[V]_j^G$ la série de Hilbert-Poincaré de l'algèbre

$\mathbb{C}[V]^G$. La formule de Molien permet de calculer cette série par :

$$P(\mathbb{C}[V]^G, T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - g^{-1}T, V)}.$$

La seconde théorie des invariants évoquée, la théorie des invariants multiplicatifs, a été étudiée plus récemment, et est liée aux représentations d'un groupe fini sur un réseau, et non plus sur un espace vectoriel. On considère un $\mathbb{Z}$ -module libre L de rang fini, et G un groupe fini agissant sur L par automorphismes. Cette action induit alors une action par automorphismes de $\mathbb{C}$ -algèbre sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[L]$. L'algèbre d'invariants étudiée dans cette situation est l'algèbre $\mathbb{C}[L]^G$. Nous verrons plus en détails l'étude du réseau de rang 2.

2.2 Algèbres de Poisson

2.2.1 Définitions

On munit maintenant l'algèbre commutative $\mathcal{A}$ d'une structure supplémentaire.

DÉFINITION 2.2.1

Une algèbre commutative $\mathcal{A}$ est dite de Poisson lorsqu'elle est munie d'une application bilinéaire antisymétrique :

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

- La règle de Leibniz : $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$, $a, b, c \in \mathcal{A}$;
- L'identité de Jacobi : $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$, $a, b, c \in \mathcal{A}$.

L'application bilinéaire $\{\cdot, \cdot\}$ est alors appelé crochet de Poisson : c'est un crochet de Lie sur $\mathcal{A}$, qui vérifie de plus la règle de Leibniz, autrement dit, qui est une dérivation en chacune de ses variables.

REMARQUE 2.2.2

Lorsque $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative de type fini, engendrée par $x_1, \dots, x_n$:

- un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\mathcal{A}$ est entièrement déterminé par ses valeurs sur les générateurs, c'est-à-dire par les valeurs $\{x_i, x_j\}$, avec $i < j$, grâce à la bilinéarité, la propriété d'antisymétrie et la règle de Leibniz,
- si $\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est une application bilinéaire, antisymétrique, bi-dérivée, alors elle est un crochet de Poisson si et seulement si elle vérifie l'identité de Jacobi pour les générateurs.

REMARQUE 2.2.3

Lorsqu'on localise une algèbre de Poisson, le localisé est naturellement muni d'une structure de Poisson de la manière suivante. Soit S une partie multiplicative de l'algèbre de Poisson $\mathcal{A}$, contenant 1, il existe alors un unique crochet de Poisson sur la localisation $S^{-1}\mathcal{A}$ qui prolonge celui sur $\mathcal{A}$, et qui est donné par la formule :

$$\{as^{-1}, bt^{-1}\} = \{a, b\}s^{-1}t^{-1} - \{a, t\}bs^{-1}t^{-2} - \{s, b\}as^{-2}t^{-1} + \{s, t\}abs^{-2}t^{-2} \quad (2.1)$$

pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, et $s, t \in S$.

DÉFINITION 2.2.4

Soient $(\mathcal{A}_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ et $(\mathcal{A}_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ deux algèbres de Poisson et $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ un morphisme d'algèbres associatives. On dit que f est un morphisme de Poisson si c'est également un morphisme d'algèbres de Lie,

$$f(\{a, a'\}_1) = \{f(a), f(a')\}_2, \quad \forall a, a' \in \mathcal{A}_1.$$

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Poisson, on considère maintenant l'action d'un groupe fini G d'automorphismes de l'algèbre $\mathcal{A}$. Lorsque tous les éléments du groupe G agissent par automorphismes de Poisson sur $\mathcal{A}$, on dit que G respecte le crochet de Poisson. Dans ce cas, pour $a, a' \in \mathcal{A}^G$, et $g \in G$,

$$g \cdot \{a, a'\} = \{g \cdot a, g \cdot a'\} = \{a, a'\},$$

ce qui signifie que le crochet $\{a, a'\}$ de deux invariants est également invariant sous l'action de G . Ainsi l'algèbre $\mathcal{A}^G$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{A}$.

Si on note $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre du groupe G , alors $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{C}[G]$ -module, et l'opérateur de Reynolds ρ_G défini par

$$\rho_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

est une projection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^G$, et un morphisme de $\mathcal{A}^G$ -modules. Par rapport à la structure de Poisson, ρ_G vérifie la propriété suivante

$$\forall a, a' \in \mathcal{A}, \quad \rho_G(\{a, \rho_G(a')\}) = \{\rho_G(a), \rho_G(a')\}.$$

En effet, si $a \in \mathcal{A}$ et $x \in \mathcal{A}^G$,

$$\begin{aligned} \rho_G(\{a, x\}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot \{a, x\} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \{g \cdot a, g \cdot x\} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \{g \cdot a, x\} \quad \text{car } x \text{ est } G\text{-invariant} \\ &= \left\{ \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot a, x \right\} \\ &= \{\rho_G(a), x\} \end{aligned}$$

Cet opérateur sera utilisé dans la suite pour démontrer des propriétés de $\mathcal{A}^G = \rho_G(\mathcal{A})$ à partir de propriétés de l'algèbre de Lie $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$. On s'intéressera en particulier à des propriétés d'engendrement de l'algèbre de Lie $(\mathcal{A}^G, \{\cdot, \cdot\})$.

2.2.2 Structure d'algèbre de Lie

Soit $(\mathfrak{L}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie et V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}$. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{L}(V)$ engendrée par V est par définition la plus petite sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{L}$ contenant V . Il existe plusieurs façons de construire la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{L}(V)$ à partir du sous-espace V . Considérons d'abord les sous-espaces vectoriels suivants :

$$V_1 := V \quad \text{et} \quad V_{n+1} := \sum_{1 \leq k \leq n} [V_k, V_{n+1-k}], \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par construction, il est clair que $\sum_{n>0} V_n$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{L}$ contenant V , et que toute sous-algèbre de Lie contenant V contient chacun des V_n par récurrence. Ainsi,

$$\mathfrak{L}(V) = \sum_{n>0} V_n.$$

On construit à partir de V une autre suite de sous-espaces vectoriels :

$$\mathfrak{L}_1(V) = V, \quad \text{et } \mathfrak{L}_{n+1}(V) = [V, \mathfrak{L}_n(V)], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

PROPOSITION 2.2.5

Avec les notations précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{L}_n(V) = V_n$.

Démonstration : On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $\mathfrak{L}_1(V) = V_1$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{L}_k(V) = V_k$ pour tout $k \leq n$. Alors

$$\mathfrak{L}_{n+1}(V) = [V, \mathfrak{L}_n(V)] = [V_1, V_n] \subset V_{n+1}.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, on utilise la définition $V_{n+1} = \sum_{1 \leq k \leq n} [V_k, V_{n+1-k}]$ et on procède par récurrence sur $k = 1, \dots, n$. On sait déjà que $[V_1, V_n] = \mathfrak{L}_{n+1}(V)$. Soit alors $0 < k < n$ tel que $[V_k, V_{n+1-k}] \subset \mathfrak{L}_{n+1}(V)$, et soit $[v_{k+1}, v_{n-k}]$ un générateur de $[V_{k+1}, V_{n-k}]$ comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Comme $k+1 \leq n$, $V_{k+1} = \mathfrak{L}_{k+1}(V)$ par hypothèse de récurrence, et donc v_{k+1} est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $[v_1, v_k]$, avec $v_1 \in V_1 = V$, et $v_k \in V_k = \mathfrak{L}_k(V)$. Ainsi, $[v_{k+1}, v_{n-k}]$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$[[v_1, v_k], v_{n-k}] = [v_1, [v_k, v_{n-k}]] + [v_k, [v_1, v_{n-k}]],$$

où $[v_k, v_{n-k}] \in V_n = \mathfrak{L}_n(V)$, donc $[v_1, [v_k, v_{n-k}]] \in [V_1, \mathfrak{L}_n(V)] = \mathfrak{L}_{n+1}(V)$, et $[v_1, v_{n-k}] \in V_{n+1-k}$, donc $[v_k, [v_1, v_{n-k}]] \in [V_k, V_{n+1-k}] \subset \mathfrak{L}_{n+1}(V)$, ce qui termine la démonstration.

□

COROLLAIRE 2.2.6

L'algèbre de Lie engendrée par V est égale à la somme des sous-espaces $\mathfrak{L}_n(V)$:

$$\mathfrak{L}(V) = \sum_{n>0} \mathfrak{L}_n(V) \quad \text{où } \mathfrak{L}_1(V) = V \text{ et } \mathfrak{L}_{n+1}(V) = [V, \mathfrak{L}_n(V)].$$

2.2.3 Produit tensoriel

Soient $(\mathcal{A}, \cdot, \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{A}', \cdot, \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{A}'})$ deux algèbres de Poisson sur $\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}'$ est une algèbre de Poisson munie de la multiplication et du crochet définis par les formules :

$$\begin{aligned} (a \otimes a')(b \otimes b') &= ab \otimes a'b' \\ \{a \otimes a', b \otimes b'\} &= \{a, b\}_{\mathcal{A}} \otimes a'b' + ab \otimes \{a', b'\}_{\mathcal{A}'} \end{aligned}$$

pour tous $a, b \in \mathcal{A}$, $a', b' \in \mathcal{A}'$.

PROPOSITION 2.2.7

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ deux algèbres de Poisson, V (resp. V') un $\mathbb{C}$ -sous-espace de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) qui engendre $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) comme algèbre de Lie. Alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ est engendrée comme algèbre de Lie par $(V + \mathbb{C}) \otimes (V' + \mathbb{C})$.

Démonstration : Par hypothèse,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' = \left(\sum_{m \geq 1} \mathfrak{L}_m(V) \right) \otimes \left(\sum_{n \geq 1} \mathfrak{L}_n(V') \right) = \sum_{m, n \geq 1} \mathfrak{L}_m(V) \otimes \mathfrak{L}_n(V')$$

Par récurrence sur $m + n \geq 2$, on va montrer que $\mathfrak{L}_m(V) \otimes \mathfrak{L}_n(V')$ est dans la sous-algèbre de Lie engendrée par $(V + \mathbb{C}) \otimes (V' + \mathbb{C})$.

- Si $m + n = 2$, alors $m = n = 1$, donc $\mathfrak{L}_m(V) \otimes \mathfrak{L}_n(V') = V \otimes V' \subset (V + \mathbb{C}) \otimes (V' + \mathbb{C})$.
- Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m + n > 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $m > 1$. Alors $\mathfrak{L}_m(V) \otimes \mathfrak{L}_n(V') = \{V, \mathfrak{L}_{m-1}(V)\} \otimes \mathfrak{L}_n(V')$. Or si $v \in V$, $x_{m-1} \in \mathfrak{L}_{m-1}(V)$, et $x'_n \in \mathfrak{L}_n(V')$,

$$\{v, x_{m-1}\} \otimes x'_n = \{v \otimes 1, x_{m-1} \otimes x'_n\}$$

Donc $\mathfrak{L}_m(V) \otimes \mathfrak{L}_n(V') \subset \{V \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{L}_{m-1}(V) \otimes \mathfrak{L}_n(V')\} \subset \mathfrak{L}((V + \mathbb{C}) \otimes (V' + \mathbb{C}))$ par récurrence.

□

COROLLAIRE 2.2.8

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux algèbres de Poisson de type fini comme algèbres de Lie, alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ l'est aussi.

2.3 Homologie et cohomologie de Poisson

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Poisson.

2.3.1 Cohomologie

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{X}^k(\mathcal{A})$ le $\mathcal{A}$ -module des k -dérivations antisymétriques sur $\mathcal{A}$, en notant, par convention, $\mathfrak{X}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Par exemple, $\pi = \{\cdot, \cdot\} \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{A})$. L'opérateur de cobord est défini par

$$\begin{aligned} \delta^k : \mathfrak{X}^k(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{X}^{k+1}(\mathcal{A}) \\ Q &\mapsto \delta^k(Q) : (F_0, \dots, F_k) \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \{F_i, Q(F_0, \dots, \check{F}_i, \dots, F_k)\} \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} Q(\{F_i, F_j\}, F_0, \dots, \check{F}_i, \dots, \check{F}_j, \dots, F_k) \end{aligned}$$

On obtient ainsi le complexe de cohomologie de Poisson de $\mathcal{A}$,

$$\dots \longrightarrow \mathfrak{X}^{k-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^{k-1}} \mathfrak{X}^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^k} \mathfrak{X}^{k+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\delta^{k+1}} \dots$$

On définit les espaces de cohomologie :

$$HP^k(\mathcal{A}) = \frac{\text{Ker} \delta^k}{\text{Im} \delta^{k-1}}.$$

Par exemple, le groupe de cohomologie de Poisson en degré 0 de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des éléments centraux pour le crochet de Poisson, appelé aussi ensemble des Casimirs de l'algèbre de Poisson $\mathcal{A}$.

$$HP^0(\mathcal{A}) = \text{Cas}(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \mid \{a, \cdot\} = 0\}.$$

2.3.2 Homologie

On note $\Omega^1(\mathcal{A})$ le $\mathcal{A}$ -module des différentielles de Kähler de $\mathcal{A}$, et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^k(\mathcal{A}) = \wedge^k \Omega^1(\mathcal{A})$ le $\mathcal{A}$ -module des k -différentielles de Kähler, avec par convention $\Omega^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Comme espace vectoriel, $\Omega^k(\mathcal{A})$ est engendré par des éléments de la forme $F \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k$. La différentielle $\mathbf{d} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1(\mathcal{A})$ se prolonge sur les $\Omega^k(\mathcal{A})$ par

$$\mathbf{d}(F \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k) := \mathbf{d}F \wedge \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k$$

Le complexe résultant est appelé complexe de de Rham et sa cohomologie est la cohomologie de de Rham. On définit maintenant un opérateur de bord $\partial_\bullet : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{A})$, défini pour $k \in \mathbb{N}^*$ par la formule :

$$\begin{aligned} \partial_k(F_0 \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k) &:= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \{F_0, F_i\} \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{d}F}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} F_0 \mathbf{d}\{F_i, F_j\} \wedge \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{d}F}_i \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{d}F}_j \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le complexe d'homologie de Poisson de $\mathcal{A}$,

$$\dots \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_{k+1}} \Omega^k(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_k} \Omega^{k-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

On définit les espaces d'homologie :

$$HP_k(\mathcal{A}) = \frac{\text{Ker} \partial_k}{\text{Im} \partial_{k+1}}.$$

Par exemple, le groupe d'homologie de Poisson en degré 0 de $\mathcal{A}$ est son quotient par son algèbre de Lie dérivée :

$$HP_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A} / \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}.$$

2.3.3 Produit intérieur

Il existe une action naturelle de l'espace des p -dérivations antisymétriques $\mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$ sur l'espace des différentielles de Kähler $\Omega^\bullet(\mathcal{A}) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(\mathcal{A})$, donnée pour $Q \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$ par l'application $\mathcal{A}$ -linéaire graduée :

$$i_Q : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{\bullet-p}(\mathcal{A})$$

définie, lorsque $n \geq p$, par

$$i_Q(\mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_n) := \sum_{\sigma \in S_{p, n-p}} \epsilon(\sigma) Q(F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(p)}) \mathbf{d}F_{\sigma(p+1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_{\sigma(n)}.$$

Si $n < p$, $i_Q(\omega) = 0$. La somme se fait sur l'ensemble $S_{p, n-p}$ des $(p, n-p)$ -battages :

$$S_{p, n-p} = \{\sigma \in S_n / \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(n)\}.$$

Avec cette opération, on constate que l'opérateur de bord se note également

$$\partial = i_\pi \circ \mathbf{d} - \mathbf{d} \circ i_\pi. \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une algèbre de polynômes $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, on utilise la forme volume standard sur $\mathbb{C}^n$, $\lambda = \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_n$, pour établir un isomorphisme entre les espaces des différentielles de Kähler et les espaces de dérivations. On définit pour cela l'opérateur $\star : \mathfrak{X}^k(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega^{n-k}(\mathcal{A})$ par $\star Q = i_Q \lambda$. Alors $\star$ est un isomorphisme de $\mathfrak{X}^k(\mathcal{A})$ sur $\Omega^{n-k}(\mathcal{A})$. Cet opérateur nous permet également de définir la divergence (par rapport à λ) comme l'application linéaire $\text{Div} : \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}^{\bullet-1}(\mathcal{A})$ telle que

$$\star \text{Div} = \mathbf{d} \star$$

On verra dans la suite que pour certaines structures de Poisson, cet isomorphisme induit une correspondance entre les espaces d'homologie et de cohomologie.

2.3.4 Exactitude du complexe de de Rham

Dans le cas des algèbres de polynômes, le complexe de de Rham est un complexe exact. Cette propriété résulte d'un lemme utilisant une graduation naturelle de l'algèbre de polynômes à n variables. Ce lemme étant utilisé dans d'autres démonstrations, on l'exprime ici dans le cadre d'une graduation pondérée.

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ l'algèbre de polynômes à n variables. On fixe des poids $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}^*$ pour les variables $x_1, \dots, x_n$, ce qui signifie que l'on considère la graduation sur $\mathcal{A} = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_r$ où $\mathcal{A}_r$ est l'espace vectoriel engendré par les monômes du type $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ avec $a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = r$. Un polynôme homogène est un élément d'un $\mathcal{A}_r$, et pour un polynôme homogène, on note $w(P)$ son degré.

Une telle graduation sur $\mathcal{A}$ permet de munir l'espace $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ des différentielles de Kähler d'une graduation supplémentaire. En effet, $\Omega^k(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{A}$ -module libre de base les $\mathbf{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{i_k}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Ainsi, on peut poser, pour $k, r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Omega^k(\mathcal{A})_r &= \text{Vect}_{\mathbb{C}} (F_0 \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k; F_j \text{ homogènes tels que } w(F_0) + \dots + w(F_k) = r) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{C}} (F \mathbf{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x_{i_k}; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n; \\ &\quad F \text{ homogène de degré } r - (w_{i_1} + \dots + w_{i_k})) \end{aligned}$$

On a alors la décomposition en somme directe suivante :

$$\Omega^\bullet(\mathcal{A}) = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(\mathcal{A})_r \right)$$

Pour cette graduation, $\mathbf{d}$ est une application linéaire graduée de degré 0, ce qui signifie que $\mathbf{d}(\Omega^\bullet(\mathcal{A})_r) \subset \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{A})_r$, pour tout $r \in \mathbb{N}$.

On définit la dérivation d'Euler associée à la précédente graduation sur $\mathcal{A}$ comme étant l'élément

$$e_w = w_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$$

Si P est un polynôme homogène de degré r , la formule d'Euler pour les polynômes homogènes implique alors :

$$e_w(P) = w(P)P.$$

LEMME 2.3.1

Pour tous $k, r \in \mathbb{N}$, on a

$$(i_{e_w} \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ i_{e_w})|_{\Omega^k(\mathcal{A})_r} = r \cdot Id|_{\Omega^k(\mathcal{A})_r}.$$

Démonstration : Soit $F_0 \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \in \Omega^k(\mathcal{A})_r$, les polynômes F_j étant homogènes, tels que $w(F_0) + \dots + w(F_k) = r$.

On calcule alors

$$\begin{aligned} & (i_{e_w} \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ i_{e_w})(F_0 \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k) \\ = & i_{e_w}(\mathbf{d}F_0 \wedge \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k) + \mathbf{d} \left(F_0 \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} w(F_j) F_j \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{d}F_j} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \right) \\ = & \sum_{j=0}^k (-1)^j w(F_j) F_j \mathbf{d}F_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{d}F_j} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \\ & + \mathbf{d}F_0 \wedge \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} w(F_j) F_j \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{d}F_j} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \right) \\ & + F_0 \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} w(F_j) \mathbf{d}F_j \wedge \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\mathbf{d}F_j} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \right) \\ = & w(F_0) F_0 \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k + F_0 \left(\sum_{j=1}^k w(F_j) \right) \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k \\ = & r F_0 \mathbf{d}F_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}F_k, \end{aligned}$$

d'où le résultat du lemme. $\square$

Cette relation implique l'exactitude du complexe de de Rham.

PROPOSITION 2.3.2

Pour $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, le complexe de de Rham est exact :

- Pour $P \in \mathcal{A}$, $\mathbf{d}(P) = 0 \Rightarrow P \in \mathbb{C}$.
- Pour $k \geq 1$, $\mu \in \Omega^k(\mathcal{A})$, $\mathbf{d}(\mu) = 0 \Rightarrow \exists \nu \in \Omega^{k-1}(\mathcal{A})$, $\mu = \mathbf{d}(\nu)$.

Démonstration : Pour $\mu \in \Omega^k(\mathcal{A})$, on utilise la graduation de $\Omega^k(\mathcal{A})$ pour écrire $\mu = \sum_{r \in \mathbb{N}} \mu_r$, les $\mu_r \in \Omega^k(\mathcal{A})_r$ étant presque tous nuls. Si $\mathbf{d}(\mu) = 0$, comme $\mathbf{d}$ est graduée, on obtient $\mathbf{d}\mu_r = 0$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer le résultat pour un élément μ_r de $\Omega^k(\mathcal{A})_r$. Par le lemme précédent, si $\mathbf{d}\mu_r = 0$, alors $\mathbf{d} \circ i_{e_w}(\mu_r) = r\mu_r$. Ainsi :

- Si $\mu_r \in \mathcal{A}$, alors $i_{e_w}(\mu_r) = 0$, donc $r\mu_r = 0$ et $\mu_r \in \mathbb{C}$.
- Si $\mu_r \in \Omega^k(\mathcal{A})$, avec $k \geq 1$, alors $r \geq 1$ et $\mu_r = \mathbf{d} \left(\frac{1}{r} i_{e_w}(\mu_r) \right)$.

$\square$

2.3.5 Homologie de Poisson en degré zéro

Soit $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson. On rappelle que son groupe d'homologie de Poisson en degré zéro est donné par :

$$HP_0(\mathcal{A}) = \frac{\mathcal{A}}{\{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}}.$$

On étudiera au chapitre 4 des algèbres d'invariants d'algèbres de Poisson symplectiques. Soit V un espace vectoriel symplectique complexe, et G un sous-groupe fini de $Sp(V)$. On note $\mathcal{A} := \mathbb{C}[V]^G$ l'algèbre des fonctions polynômiales sur V qui sont G -invariantes. La forme symplectique définit un crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[V]$, et sur $\mathcal{A}$ par restriction. Dans ce cadre, la dimension du groupe d'homologie de Poisson de $\mathcal{A}$ en degré 0 est toujours finie ([BEG04]).

Dans tous les cas, la dimension du HP_0 d'une algèbre de Poisson est inférieure au cardinal d'un système de générateurs pour la structure de Lie. En effet, si $(a_1, \dots, a_n)$ est un système générateur de $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ comme algèbre de Lie, alors les classes d'équivalence des a_i dans $HP_0(\mathcal{A})$ forment un système générateur de cet espace vectoriel. Dans les exemples étudiés dans la suite, cette propriété est utilisée pour s'assurer qu'un système de générateurs est minimal : lorsqu'on connaît la dimension du HP_0 , et que l'on obtient un système de générateurs dont le cardinal est égal à cette dimension, le système de générateurs trouvé est nécessairement de cardinal minimal.

2.4 Déformation, quantification des crochets de Poisson

2.4.1 Quantification-déformation

Nous rappelons ici le cadre général du procédé de déformation d'une algèbre de Poisson. Soit B une $\mathbb{C}$ -algèbre non-commutative, dans laquelle le crochet $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de commutation, et b un élément central de B non diviseur de zéro, et non inversible, tel que l'algèbre $A := B/bB$ soit commutative.

Si $u, v \in B$, alors $(u + bB)(v + bB) = (v + bB)(u + bB)$ par commutativité de l'algèbre A , et donc $[u, v] \in bB$. On note alors $d \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que pour tous $u, v \in B$, $[u, v] \in b^d B$.

L'élément b étant non diviseur de 0, il existe donc un unique élément de w de B tel que $[u, v] = b^d w$. On note cet élément $b^{-d}[u, v]$. On peut alors définir sur A un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ par

$$\{\bar{u}, \bar{v}\} = \overline{b^{-d}[u, v]}$$

pour tous $\bar{u} = u + bB$ et $\bar{v} = v + bB \in A$. En effet, l'élément $\overline{b^{-d}[u, v]}$ ne dépend pas des représentant choisis pour $\bar{u}$ et $\bar{v}$: si $u' = u + bw$, $[u', v] = [u, v] + b[w, v]$ car b est central dans B . Comme $[w, v] \in b^d B$, on peut écrire $[w, v] = b^d w'$ et donc $b^{-d}[u', v] = b^{-d}[u, v] + bw'$, d'où $\overline{b^{-d}[u', v]} = \overline{b^{-d}[u, v]}$.

Dans une telle situation, B est appelée quantification de l'algèbre de Poisson A , et toute $\mathbb{C}$ -algèbre de la forme $B/(b - \lambda)B$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que l'élément central $b - \lambda$ est non inversible dans B , est appelée déformation de l'algèbre de Poisson A .

Cette quantification est utilisée dans le chapitre 5, lorsque l'on déforme l'algèbre de Poisson issue du cas multiplicatif par le tore quantique.

2.4.2 Déformations algébriques

On définit ici un procédé de déformation algébrique d'une algèbre de Poisson utilisant une filtration et le passage au gradué associé.

DÉFINITION 2.4.1

Soit $(\mathcal{A}, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson. Une $\mathbb{C}$ -algèbre non commutative $(\mathcal{B}, \star, [\cdot, \cdot])$, où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de commutation, est une déformation algébrique de $\mathcal{A}$ si :

- il existe une filtration $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{F}_0 = \mathbb{C}$, (on notera également $\mathcal{F}_{-1} = (0)$), telle que $[\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_m] \subseteq \mathcal{F}_{n+m-d}$, pour $d \geq 1$ fixé,
- le gradué associé $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n-1}$ est isomorphe à $\mathcal{A}$ en tant qu'algèbre de Poisson, la multiplication et le crochet de Poisson sur $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ étant définis par :

$$\begin{aligned} (b_n + \mathcal{F}_{n-1})(b_m + \mathcal{F}_{m-1}) &:= b_n \star b_m + \mathcal{F}_{n+m-1} \\ \{b_n + \mathcal{F}_{n-1}, b_m + \mathcal{F}_{m-1}\} &:= [b_n, b_m] + \mathcal{F}_{n+m-d-1} \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\mathcal{A}$ est appelée limite semi-classique de $\mathcal{B}$.

Cette définition est un cas particulier du procédé de déformation vu au paragraphe 2.4.1. En effet, considérons l'algèbre de Rees de $\mathcal{B}$ associée à la filtration $\mathcal{F}$ définie par

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}_n t^n \subset \mathcal{B}[t]$$

Alors t est un élément central de $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$, non diviseur de 0 et non inversible. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) &\rightarrow gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \\ b_n t^n &\mapsto b_n + \mathcal{F}_{n-1}. \end{aligned}$$

φ est clairement surjective, et d'après la définition du produit dans le gradué associé $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$, φ est également un morphisme d'algèbres associatives. Déterminons le noyau de cette application. D'abord, $\varphi(t) = 1 + \mathcal{F}_0 = 0$ dans $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$, donc l'idéal engendré par t est dans le noyau de φ . Soient maintenant $b_0, \dots, b_n$ respectivement dans $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n$, tels que $\varphi(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n) = 0$, alors $b_0 + \mathcal{F}_{-1} = 0$, $b_1 + \mathcal{F}_0 = 0, \dots, b_n + \mathcal{F}_{n-1} = 0$, ce qui signifie que $b_0 = 0$, $b_1 \in \mathcal{F}_0, \dots, b_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, et donc

$$b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n = t(b_1 + \dots + b_n t^{n-1})$$

avec $b_1 + \dots + b_n t^{n-1} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$, donc le noyau de φ est bien l'idéal engendré par t . Donc φ induit un isomorphisme d'algèbres associatives

$$\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})}{(t)} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}).$$

On en déduit que le quotient $\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})}{(t)}$ est commutatif. De plus, pour $b_n \in \mathcal{F}_n$ et $b_m \in \mathcal{F}_m$, $[b_n t^n, b_m t^m] = [b_n, b_m] t^{n+m-d} t^d$ avec $[b_n, b_m] \in \mathcal{F}_{n+m-d}$ par hypothèses sur la filtration. Le crochet de Poisson défini sur le quotient par le procédé de 2.4.1 est donc donné par

$$\{b_n t^n + (t), b_m t^m + (t)\} = [b_n, b_m] t^{m+n-d} + (t)$$

dont l'image par $\tilde{\varphi}$ est $[b_n, b_m] + \mathcal{F}_{m+n-d-1}$. L'isomorphisme précédent est donc bien un isomorphisme d'algèbres de Poisson.

On veut maintenant vérifier que $\mathcal{B}$ est une déformation de $\mathcal{A}$ au sens de 2.4.1 On considère pour cela l'application linéaire

$$\begin{aligned}\psi : \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) &\rightarrow \mathcal{B} \\ b_n t^n &\mapsto b_n.\end{aligned}$$

ψ est clairement un morphisme surjectif d'algèbres associatives. Déterminons le noyau de cette application. D'abord, $\psi(t-1) = 1-1 = 0$ dans $\mathcal{B}$, donc l'idéal engendré par $(t-1)$ est dans le noyau de ψ . Soient maintenant $b_0, \dots, b_n$ respectivement dans $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n$, tels que $\psi(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n) = 0$, alors $b_0 + b_1 + \dots + b_n = 0$, ce qui signifie que $b_n = -b_0 - b_1 - \dots - b_{n-1}$, et donc

$$b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n = b_0(1-t^n) + b_1 t(1-t^{n-1}) + \dots + b_{n-1} t^{n-1}(1-t) \in (t-1),$$

donc le noyau de ψ est bien l'idéal engendré par $t-1$. Donc ψ induit un isomorphisme d'algèbres associatives

$$\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})}{(t-1)} \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathcal{B}.$$

Ce procédé de déformation par le gradué associé est moins général, mais lie de manière plus précise l'algèbre de Poisson à sa déformation. En effet, l'isomorphisme de Poisson entre $\mathcal{A}$ et le gradué associé de $\mathcal{B}$ permet de transférer certaines propriétés de l'algèbre de Lie $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ à l'algèbre $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$ munie du crochet de commutation. Les deux propositions suivantes en sont des exemples.

PROPOSITION 2.4.2

Lorsque $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ est une algèbre de Lie de type fini, $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$ l'est aussi.

Plus précisément, si $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un système générateur d'éléments homogènes de $\mathcal{A}$, (i.e. $\exists n_i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathcal{F}_{n_i}/\mathcal{F}_{n_i-1}$), alors en choisissant pour chaque a_i un représentant dans $\mathcal{F}_{n_i}$, on obtient un système générateur de $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$.

Démonstration : L'algèbre $\mathcal{B}$ étant une déformation algébrique de $\mathcal{A}$, on peut écrire :

$$\mathcal{A} \simeq gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n-1}.$$

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système générateur de $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$. Quitte à remplacer ce système générateur par celui constitué des composantes homogènes des a_i (toujours en nombre fini), on peut supposer que les a_i sont homogènes : $a_i \in \mathcal{F}_{n_i}/\mathcal{F}_{n_i-1}$. On choisit alors, pour tout i , un élément b_i de $\mathcal{F}_{n_i}$ tel que $a_i = b_i + \mathcal{F}_{n_i-1}$. On veut montrer que $\mathcal{B}$ est engendrée comme algèbre de Lie par les éléments b_i . On note donc $\mathfrak{B}$ la sous-algèbre de Lie de $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$ engendrée par les b_i , et on montre que $\mathcal{B} = \mathfrak{B}$.

- On montre d'abord que le gradué associé $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ est engendré en tant qu'espace vectoriel par les éléments de la forme $x_n + \mathcal{F}_{n-1}$, avec $x_n \in \mathcal{F}_n \cap \mathfrak{B}$.

On note V le sous-espace vectoriel de $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ engendré par les a_i . Par hypothèse,

$$gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathfrak{L}_n(V), \text{ où } \mathfrak{L}_1(V) = V \text{ et } \mathfrak{L}_{n+1}V = \{V, \mathfrak{L}_n(V)\}.$$

- ★ Tout élément de $\mathfrak{L}_1(V) = V$ est une combinaison linéaire des $a_i = b_i + \mathcal{F}_{n_i-1}$, $b_i \in \mathcal{F}_{n_i} \cap \mathfrak{B}$.

- ★ On suppose que pour un n fixé, $\mathfrak{L}_n(V)$ est un espace vectoriel engendré par des éléments de la forme $x_m + \mathcal{F}_{m-1}$, $x_m \in \mathcal{F}_m \cap \mathfrak{B}$. Soit alors $x \in \mathfrak{L}_{n+1}V = \{V, \mathfrak{L}_n V\}$:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{\text{finie}} \{a_i, y_i\} \text{ avec } y_i \in \mathfrak{L}_n V \\
 &= \sum_{\text{finie}} \{b_i + \mathcal{F}_{n_i-1}, x_m + \mathcal{F}_{m-1}\} \text{ avec } x_m \in \mathcal{F}_m \cap \mathfrak{B} \\
 &= \sum_{\text{finie}} ([b_i, x_m] + \mathcal{F}_{n_i+m-d-1}) \text{ où } [b_i, x_m] \in \mathcal{F}_{n_i+m-d} \cap \mathfrak{B}
 \end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence.

- Maintenant, on montre que chaque $\mathcal{F}_n$ est dans $\mathfrak{B}$:
 - ★ $\mathcal{F}_{-1} = (0) \subset \mathfrak{B}$.
 - ★ On suppose que le résultat est vrai pour un certain n . Soit $x \in \mathcal{F}_{n+1}$, alors d'après le résultat précédent $x + \mathcal{F}_n = x_{n+1} + \mathcal{F}_n$, avec $x_{n+1} \in \mathfrak{B}$, ainsi $x \in \mathfrak{B} + \mathcal{F}_n \subset \mathfrak{B}$ par hypothèse de récurrence.
- Par récurrence, on a finalement $\mathcal{B} = \sum \mathcal{F}_n \subset \mathfrak{B}$.

□

On considère maintenant une situation dans laquelle intervient l'action d'un groupe fini G d'automorphismes de l'algèbre non commutative $\mathcal{B}$ respectant la graduation :

$$\forall g \in G, \forall x_n \in \mathcal{F}_n, g \cdot x_n \in \mathcal{F}_n.$$

Dans ce cas, G agit sur le gradué associé $\mathcal{A}$ de manière naturelle par automorphismes de Poisson. De plus, la composante homogène $\left(\frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{F}_{m-1}}\right)^G$ des invariants du gradué associé est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\frac{\mathcal{F}_m^G}{\mathcal{F}_{m-1}^G}$. Pour le montrer, on utilise le lemme suivant.

LEMME 2.4.3

On considère une suite exacte courte de G -modules : $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$.

Alors $0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{\alpha|_{A^G}} B^G \xrightarrow{\beta|_{B^G}} C^G \longrightarrow 0$ est une suite exacte.

Démonstration :

- Comme α et β sont des morphismes de G -modules, $\alpha(A^G) \subset B^G$ et $\beta(B^G) \subset C^G$.
- $\alpha|_{A^G}$ est injectif comme restriction d'une application injective.
- $Im(\alpha|_{A^G}) = Im(\alpha) \cap B^G$: Si $b = \alpha(a)$ et $b \in B^G$, alors pour tout $g \in G$, $\alpha(a) = b = g \cdot b = g \cdot \alpha(a) = \alpha(g \cdot a)$ donc $a = g \cdot a$ par injectivité de α , et $a \in A^G$.
Donc $\alpha(A^G) = \alpha(A) \cap B^G = Ker(\beta) \cap B^G = Ker(\beta|_{B^G})$.
- $\beta|_{B^G}$ est surjective : Soit $c \in C^G$. Par surjectivité de β , il existe $b \in B$ tel que

$c = \beta(b)$. On pose alors $b' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot b$. Ainsi, $b' \in B^G$ et

$$\begin{aligned} \beta(b') &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \beta(g \cdot b) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (\beta(b)) \quad \text{car } \beta \text{ est un morphisme de } G\text{-modules} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot c \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} c \quad \text{car } c \in C^G \\ &= c \end{aligned}$$

Donc $c \in \beta(B^G)$.

□

Considérons maintenant la suite exacte de G -modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{m-1} \hookrightarrow \mathcal{F}_m \longrightarrow \frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{F}_{m-1}} \longrightarrow 0.$$

Alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{m-1}^G \hookrightarrow \mathcal{F}_m^G \longrightarrow \left(\frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{F}_{m-1}} \right)^G \longrightarrow 0$$

est une suite exacte, et donc

$$\frac{\mathcal{F}_m^G}{\mathcal{F}_{m-1}^G} \simeq \left(\frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{F}_{m-1}} \right)^G. \quad (2.3)$$

Les hypothèses précédentes s'appliquent par exemple dans le cas des algèbres de Poisson symplectiques. On verra dans certains cas qu'il existe une situation particulière d'engendrement de $\mathcal{A}$ à partir d'un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'algèbre des invariants et d'un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{A}$. La proposition suivante montre que cette construction se relève à la déformation par le gradué associé.

PROPOSITION 2.4.4

Lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ se décompose sous la forme $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k$ où V_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}^G$, V_1 un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ et $V_{k+1} = \{V_0, V_k\}$, on peut engendrer $\mathcal{B}$ de manière similaire : $\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{\infty} W_k$ où W_0 (respectivement W_1) est l'espace vectoriel engendré par des représentants choisis d'un système de générateurs homogènes de V_0 (respectivement V_1), et $W_{k+1} = [W_0, W_k]$.

$$\begin{array}{ccc} V_1 \subset \mathcal{A} & \rightsquigarrow & \mathcal{B} \supset W_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_0 \subset \mathcal{A}^G & \rightsquigarrow & \mathcal{B}^G \supset W_0 \end{array}$$

Démonstration : Soit (a_i) un système de générateurs homogènes de V_0 en tant qu'espace vectoriel : $a_i \in \mathcal{F}_{n_i}^G / \mathcal{F}_{n_i-1}^G$. Pour chaque a_i , on choisit un représentant b_i dans $\mathcal{F}_{n_i}^G = \mathcal{F}_{n_i} \cap \mathcal{B}^G$, et on note W_0 l'espace vectoriel engendré par les b_i . On choisit ensuite un système de générateurs homogènes de V_1 , on choisit un représentant pour chaque générateur, et on pose W_1 l'espace vectoriel engendré par ces représentants choisis. On pose $\mathfrak{B} = \sum_{k=1}^{\infty} W_k$.

- Avec ces notations, on montre d'abord que $\mathcal{A} = gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ est engendré en tant qu'espace vectoriel par les éléments de la forme $x_n + \mathcal{F}_{n-1}$, $x_n \in \mathcal{F}_n \cap \mathfrak{B}$:

- ★ V_1 est engendré par des éléments de la forme $x_n + \mathcal{F}_{n-1}$, $x_n \in \mathcal{F}_n \cap W_1$ par construction de W_1 .
- ★ On suppose que pour un $k \geq 1$ fixé, V_k est un espace vectoriel engendré par des éléments de la forme $x_n + \mathcal{F}_{n-1}$, $x_n \in \mathcal{F}_n \cap \mathfrak{B}$. Soit alors $x \in V_{k+1} = \{V_0, V_k\}$:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\text{finie}} \{a_i, y_i\} \quad \text{où les } y_i \text{ sont des éléments de } V_k \\ &= \sum_{\text{finie}} \{b_i + \mathcal{F}_{n_i-1}, x_m + \mathcal{F}_{m-1}\} \quad \text{avec } x_m \text{ dans } \mathcal{F}_m \cap \mathfrak{B} \\ &= \sum_{\text{finie}} ([b_i, x_m] + \mathcal{F}_{n_i+m-d-1}) \quad \text{où } [b_i, x_m] \in [W_0, \mathfrak{B}] \subset \mathfrak{B} \end{aligned}$$

- Maintenant, on montre que chaque $\mathcal{F}_n$ est dans $\mathfrak{B}$:
 - ★ $\mathcal{F}_{-1} = (0) \subset \mathfrak{B}$.
 - ★ On suppose que le résultat est vrai pour un certain n . Soit $x \in \mathcal{F}_{n+1}$, alors d'après le résultat précédent $x + \mathcal{F}_n = x_{n+1} + \mathcal{F}_n$, avec $x_{n+1} \in \mathfrak{B}$, ainsi $x \in \mathfrak{B} + \mathcal{F}_n \subset \mathfrak{B}$ par hypothèse de récurrence.

Par récurrence, on a finalement $\mathcal{B} = \mathfrak{B}$.

□

Les propositions 2.4.2 et 2.4.4 seront utilisées dans le chapitre 4, lorsque l'on considérera une déformation algébrique usuelle de l'algèbre de Poisson symplectique par l'algèbre de Weyl, afin de déterminer des systèmes générateurs pour la structure de Lie d'algèbres d'invariants ou de produits croisés.

REMARQUE 2.4.5

De même que pour les algèbres de Poisson, on peut effectuer le produit tensoriel d'algèbres non commutatives, et si elles sont de type fini comme algèbres de Lie, le produit tensoriel l'est aussi, la démonstration de ce résultat étant identique à celle faite pour les algèbres de Poisson. En effet, d'après la définition du produit associatif dans un produit tensoriel $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$, on a, pour tous $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, $b'_1, b'_2 \in \mathcal{B}'$

$$\begin{aligned} [b_1 \otimes b'_1, b_2 \otimes b'_2] &= b_1 b_2 \otimes b'_1 b'_2 - b_2 b_1 \otimes b'_2 b'_1 \\ &= [b_1, b_2] \otimes b'_1 b'_2 + b_2 b_1 \otimes [b'_1, b'_2] \end{aligned}$$

2.4.3 Algèbres non commutatives et équivalence de Morita

Les modules (à gauche) sur un anneau peuvent être interprétés comme les représentations de cet anneau, et l'étude de la catégorie des modules (à gauche) donne de précieuses informations sur l'anneau lui-même. De ce point de vue, l'équivalence de Morita définit deux anneaux équivalents en termes de l'équivalence de leurs catégories de modules (à gauche).

DÉFINITION 2.4.6

Deux anneaux R et S sont dits Morita équivalents, noté $R \stackrel{M}{\sim} S$, lorsque ${}_R M \sim {}_S M$ au sens de l'équivalence des catégories de modules à gauche sur R et S .

Il existe une caractérisation de l'équivalence de Morita, qui est plus aisée à utiliser dans les calculs que l'équivalence des catégories de modules [AF92].

PROPOSITION 2.4.7

Deux anneaux R et S sont Morita-équivalents si et seulement si R est un coin dans une algèbre de matrices sur S , autrement dit, si et seulement si il existe un entier non nul n et une matrice idempotente e dans $M_n(S)$ tels que

$$R \simeq eM_n(S)e \quad \text{et} \quad M_n(S)eM_n(S) = M_n(S).$$

Pour certains des exemples étudiés dans ce chapitre, les déformations non commutatives que l'on considère et dont on cherche à savoir si elles sont de type fini pour le crochet de commutation, sont Morita équivalentes à des algèbres non commutatives dont l'étude est plus aisée. Il est donc pertinent de se demander si la propriété de finitude comme algèbre de Lie pour le crochet de commutation est un équivalent de Morita.

L'exemple type de Morita-équivalence est fourni par une algèbre $\mathcal{B}$ et l'algèbre $M_n(\mathcal{B})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{B}$. Pour cet exemple, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.4.8

Si $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de type fini pour le crochet de commutation, alors $(M_n(\mathcal{B}), [\cdot, \cdot])$ l'est aussi.

Démonstration : On note $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les générateurs de $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$. Alors $\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_k(\mathcal{V})$, où $\mathcal{L}_1(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ et $\mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{V}) = [\mathcal{V}, \mathcal{L}_k(\mathcal{V})]$.

On pose alors $\mathcal{W} = \bigoplus_{i,j=1}^n \mathcal{V}E_{ij}$, espace vectoriel de dimension finie, et on note $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathcal{W}$. Montrons que $\mathcal{L}(\mathcal{W}) = M_n(\mathcal{B})$.

On a d'abord clairement $M_n(\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{i,j=1}^n \mathcal{L}_k(\mathcal{V})E_{ij} \right)$. On pose donc pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$\mathcal{W}_k := \bigoplus_{i,j=1}^n \mathcal{L}_k(\mathcal{V})E_{ij}$, et on montre par récurrence sur k , que chaque $\mathcal{W}_k$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})$:

- Pour $k = 1$, $\mathcal{W}_1 := \bigoplus_{i,j=1}^n \mathcal{V}E_{ij} = \mathcal{W}$.
 - On suppose le résultat vrai au rang $k \geq 1$. Soit $x \in \mathcal{W}_{k+1}$, x est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $a_{ij}E_{ij}$ avec $a_{ij} \in \mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{V})$. Chaque a_{ij} est donc une combinaison linéaire d'éléments de la forme $[v, b]$ avec $v \in \mathcal{V}$ et $b \in \mathcal{L}_k(\mathcal{V})$. Il suffit donc de montrer que $\forall v \in \mathcal{V}, \forall b \in \mathcal{L}_k(\mathcal{V}), \forall i, j = 1, \dots, n$, on a $[v, b]E_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Or :
 - ★ Si $i = j$, on a $[v, b]E_{ii} = [vE_{ii}, bE_{ii}] \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$ par hypothèse de récurrence.
 - ★ Si $i \neq j$, on a $[v, b]E_{ij} = [vE_{ij}, b(E_{ii} + E_{jj})] \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$ par hypothèse de récurrence.
- En conclusion, $M_n(\mathcal{B})$ est engendrée comme algèbre de Lie par les $a_k E_{ij}$, où les a_k sont les générateurs de l'algèbre de Lie $(\mathcal{B}, [\cdot, \cdot])$.

□

Dans le cadre qui nous intéresse, les algèbres Morita-équivalentes étudiées seront l'algèbre d'invariants $\mathcal{B}^G$ et l'algèbre produit croisé $\mathcal{B} \star G$, où G est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{B}$. On a en effet le résultat suivant, [Mon80]. Pour la commodité du lecteur, on rappelle la preuve de cet énoncé.

LEMME 2.4.9

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre non commutative, unitaire, et simple, et G un groupe d'automorphismes de $\mathcal{B}$ ne contenant pas d'automorphisme intérieur de $\mathcal{B}$ différent de l'identité. Alors l'algèbre produit croisé $\mathcal{B} \star G$ est simple.

Démonstration : Soit I un idéal bilatère non nul de $\mathcal{B} \star G$. Pour tout élément $x = \sum_{g \in G} b_g g$ de $\mathcal{B} \star G$, on note $\text{supp}(x) = \{g \in G / b_g \neq 0\}$, et on appellera longueur de x le cardinal de son support. Soit alors x un élément non nul de I , de longueur minimale.

On suppose que cette longueur est strictement supérieure à 1. Si $g_0 \in \text{supp}(x)$, alors $x g_0^{-1}$ est un élément de I de même longueur que x . On peut donc supposer que $1 = 1_G \in \text{supp}(x)$. Comme $\mathcal{B}$ est simple, l'idéal engendré par b_1 contient 1, qui se décompose donc sous la forme $1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_1 \beta_i$. Alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i x \beta_i$ est un élément de I , et s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x \beta_i = 1 + \sum_{g \neq 1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_g g(\beta_i) \right) g$$

C'est donc un élément non nul de I , dont le support est inclus dans celui de x . Par minimalité de la longueur de x , $\sum_{i=1}^n \alpha_i x \beta_i$ est de même longueur que x . On peut donc supposer que $b_1 = 1$.

Soit alors $h \in \text{supp}(x) \setminus \{1\}$. Si on suppose que pour tout $\alpha \in \mathcal{B}$, $b_h h(\alpha) = \alpha b_h$, alors $b_h \mathcal{B} = \mathcal{B} b_h = \mathcal{B} b_h \mathcal{B} = \mathcal{B}$ par simplicité de $\mathcal{B}$, donc b_h est inversible dans $\mathcal{B}$, et $h : \alpha \mapsto b_h^{-1} \alpha b_h$ est un automorphisme intérieur, ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathcal{B}$ tel que $b_h h(\alpha) - \alpha b_h \neq 0$. Alors $[x, \alpha]$ est un élément de I , et

$$\begin{aligned} [x, \alpha] &= (\alpha + b_h h(\alpha) h + \sum_{g \neq 1, h} b_g g(\alpha) g) - (\alpha + \alpha b_h h + \sum_{g \neq 1, h} \alpha b_g g(\alpha) g) \\ &= (b_h h(\alpha) - \alpha b_h) h + \sum_{g \neq 1, h} (b_g g(\alpha) - \alpha b_g) g \end{aligned}$$

Ainsi, $[x, \alpha]$ est un élément non nul de I , dont le support est inclus strictement dans celui de x , ce qui contredit l'hypothèse de minimalité de x .

Ainsi, I contient un élément de longueur 1, et par les mêmes raisonnements que précédemment, il contient 1, donc $I = \mathcal{B} \star G$.

□

PROPOSITION 2.4.10

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre non commutative unitaire, et simple, et G un groupe fini d'automorphismes de $\mathcal{B}$ ne contenant pas d'automorphisme intérieur autre que l'identité. Alors $\mathcal{B}^G$ et $\mathcal{B} \star G$ sont Morita-équivalentes.

Démonstration : On considère dans $\mathcal{B} \star G$ l'idempotent :

$$e = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

Alors tout élément de $\mathcal{B}^G$ commute avec e . L'application :

$$b \in \mathcal{B}^G \mapsto ebe = be = eb \in e(\mathcal{B} \star G)e$$

est donc un morphisme d'algèbres. Les éléments de $g \in G$ forment une base de $\mathcal{B} \star G$ sur $\mathcal{B}$, donc ce morphisme est injectif. Si $g \in G$, on a $eg = e = ge$, et si $b \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} ebe &= \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \right) be \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(b)ge \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(b)e \\ &= \rho_G(b)e \end{aligned}$$

où $\rho_G(b)$ est un invariant sous l'action de G . Donc l'application précédente est également surjective. Ainsi $\mathcal{B}^G \simeq e(\mathcal{B} \star G)e$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B} \star G \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{B}^G & \xrightarrow{\sim} & e(\mathcal{B} \star G)e \end{array}$$

D'après le lemme précédent, l'algèbre produit croisé $\mathcal{B} \star G$ est simple, donc

$$(\mathcal{B} \star G)e(\mathcal{B} \star G) = \mathcal{B} \star G.$$

D'après la caractérisation (2.4.7), les algèbres $\mathcal{B}^G$ et $\mathcal{B} \star G$ sont donc Morita-équivalentes.

□

Cette proposition s'appliquera naturellement dans le cas de l'action d'un sous-groupe fini du groupe symplectique sur l'algèbre de Weyl, ainsi que dans le cas d'un sous-groupe fini $SL(2, \mathbb{Z})$ agissant sur le tore quantique.

Chapitre 3

Structure de Poisson jacobienne

3.1 Définition

On considère l'algèbre des polynômes à n variables $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, avec $n \geq 3$. Une famille $(P_1, \dots, P_{n-2})$ de $n - 2$ polynômes permet de munir $\mathcal{A}$ d'un crochet dit jacobien, par la formule

$$\{F, G\} := \text{Jac}(F, G, P_1, \dots, P_{n-2})$$

où $F, G \in \mathcal{A}$ et $\text{Jac}(F, G, P_1, \dots, P_{n-2})$ est le déterminant de la matrice jacobienne de $(F, G, P_1, \dots, P_{n-2})$.

La matrice jacobienne de $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est de taille $(n-2) \times n$. Pour $1 \leq i < j \leq n$, on note $D_{i,j}$ le déterminant extrait obtenu en supprimant les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de cette matrice jacobienne. Pour simplifier les formules, on posera aussi, pour $1 \leq i < j \leq n$, $D_{j,i} := -D_{i,j}$, et pour $1 \leq i \leq n$, $D_{i,i} := 0$. Avec cette notation, on obtient

$$\{x_i, x_j\} = (-1)^{i+j-1} D_{i,j} \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n,$$

et donc, en développant le jacobien par rapport aux lignes correspondant aux dérivées de F et de G :

$$\{F, G\} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (-1)^{i+j-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} D_{i,j} \quad (3.1)$$

Un tel crochet jacobien est toujours un crochet de Poisson. En effet, la propriété d'antisymétrie et la formule de Leibniz se déduisent directement des propriétés des dérivations et du déterminant, cependant, la relation de Jacobi est plus délicate à établir. On en donne ici une preuve algébrique utilisant des relations sur les déterminants extraits d'une matrice, appelées relations de Plücker. Pour définir ces relations, il est nécessaire d'introduire des notations supplémentaires.

Soient $m, l, k \in \mathbb{N}$ des entiers, avec $k \leq m$, $k \leq l$, et M une matrice dans $M_{m,l}(\mathcal{A})$, α une suite de k indices dans $\{1, \dots, m\}$, β une suite de k indices dans $\{1, \dots, l\}$, on note $M[\alpha|\beta]$ la matrice carrée extraite de M obtenue en prenant les lignes d'indices α , dans l'ordre de la suite α , et les colonnes d'indices β , dans l'ordre de la suite β . Si maintenant α est une partie de $\{1, \dots, m\}$ à k -éléments, β une partie $\{1, \dots, l\}$ à k -éléments, alors la notation $M[\alpha|\beta]$ désigne la matrice carrée extraite de M obtenue en prenant les lignes d'indices α , et les colonnes d'indices β , l'ordre d'apparition étant le

même que l'ordre d'apparition dans M . Par exemple :

$$\text{Si } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad \text{alors } M[1, 2|3, 2] = \begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix},$$

$$\text{tandis que } M[\{1, 2\}|\{3, 2\}] = M[\{1, 2\}|\{2, 3\}] = \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Pour une partie α de $\{1, \dots, m\}$ à k éléments, on note aussi $\overline{\alpha}$ son complémentaire dans $\{1, \dots, m\}$. Ainsi, toujours avec l'exemple précédent,

$$M[\overline{\emptyset}|\overline{\{1\}}] = M[\{1, 2\}|\{2, 3\}] = \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$$

Les relations de Plücker sont alors données par la proposition suivante ([LB09], chap.6, §1.3) :

PROPOSITION 3.1.1

On suppose $m \leq l$. Pour toutes suites d'indices $u = (u_1, \dots, u_{m-1})$ et $v = (v_1, \dots, v_{m+1})$,

$$\sum_{\lambda=1}^{m+1} (-1)^{\lambda+1} \det(M[1, \dots, m|u_1, \dots, u_{m-1}, v_\lambda]) \det(M[1, \dots, m|v_1, \dots, \widehat{v}_\lambda, \dots, v_{m+1}]) = 0.$$

Grâce à ces relations, on peut maintenant démontrer qu'un crochet jacobien est effectivement un crochet de Poisson.

PROPOSITION 3.1.2

Pour toute famille de polynômes $(P_1, \dots, P_{n-2})$, le crochet jacobien associé, défini par la formule :

$$\{F, G\} := \text{Jac}(F, G, P_1, \dots, P_{n-2})$$

est un crochet de Poisson sur $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Démonstration : L'antisymétrie et la formule de Leibniz découlent directement des propriétés du déterminant. Il s'agit donc de vérifier l'identité de Jacobi. D'après 2.2.2, il suffit de vérifier cette identité sur les générateurs de l'algèbre $\mathcal{A}$. Soit donc $\{i, j, k\}$ une partie de $\{1, \dots, n\}$ à 3 éléments. On veut montrer que la somme

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\}$$

est nulle. Pour chaque couple d'entiers (a, b) , on pose $\zeta_{a < b} := 1$ si $a < b$, 0 sinon. Soit $J \in M_{n-2, n}(\mathcal{A})$ la matrice jacobienne des P_i .

Soit α une partie de $\{1, \dots, n-2\}$, et β une partie de $\{1, \dots, n\}$, de même cardinal que α . On utilise la notation décrite ci-dessus et on pose $D[\alpha|\beta] := \det(J[\alpha|\beta])$, le déterminant de la matrice carrée extraite de J obtenue en prenant les lignes d'indices α , et les colonnes d'indices β , l'ordre d'apparition étant le même que l'ordre d'apparition dans J .

Afin de simplifier les expressions, on utilise également la convention suivante : lorsque α et β ne sont pas de même cardinal, on pose $D[\alpha|\beta] = 0$ (par exemple, lorsque $l = i$, l'ensemble $\{i, l\}$ ne contient qu'un élément et donc $D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i, l\}}] = 0$).

Les notations étant posées, on peut maintenant effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
& \{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\} \\
&= (-1)^{i+j+\zeta_{i<j}} \{D[\overline{\emptyset|\{i,j\}}], x_k\} + (-1)^{j+k+\zeta_{j<k}} \{D[\overline{\emptyset|\{j,k\}}], x_i\} + (-1)^{i+k+\zeta_{k<i}} \{D[\overline{\emptyset|\{k,i\}}], x_j\} \\
&= (-1)^{i+j+k} \sum_{l=1}^n \left[(-1)^{l+\zeta_{i<j}+\zeta_{l<k}} \frac{\partial D[\overline{\emptyset|\{i,j\}}]}{\partial x_l} D[\overline{\emptyset|\{l,k\}}] + (-1)^{l+\zeta_{j<k}+\zeta_{l<i}} \frac{\partial D[\overline{\emptyset|\{j,k\}}]}{\partial x_l} D[\overline{\emptyset|\{l,i\}}] \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{l+\zeta_{k<i}+\zeta_{l<j}} \frac{\partial D[\overline{\emptyset|\{k,i\}}]}{\partial x_l} D[\overline{\emptyset|\{l,j\}}] \right]
\end{aligned}$$

Du fait de la multilinéarité du déterminant, on a également :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D[\overline{\emptyset|\{i,j\}}]}{\partial x_l} &= \sum_{r=1}^{n-2} \text{Jac} \left(P_1, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_l}, \dots, P_{n-2} \right) [\overline{\emptyset|\{i,j\}}] \\
&= \sum_{r=1}^{n-2} \left[\sum_{p=1}^n (-1)^{r+p+\zeta_{p<i}+\zeta_{j<p}} \frac{\partial^2 P_r}{\partial x_l \partial x_p} D[\overline{\{r\}|\{i,j,p\}}] \right]
\end{aligned}$$

On peut écrire de même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D[\overline{\emptyset|\{j,k\}}]}{\partial x_l} &= \sum_{r=1}^{n-2} \left[\sum_{p=1}^n (-1)^{r+p+\zeta_{p<j}+\zeta_{k<p}} \frac{\partial^2 P_r}{\partial x_l \partial x_p} D[\overline{\{r\}|\{j,k,p\}}] \right] \\
\frac{\partial D[\overline{\emptyset|\{i,k\}}]}{\partial x_l} &= \sum_{r=1}^{n-2} \left[\sum_{p=1}^n (-1)^{r+p+\zeta_{p<i}+\zeta_{k<p}} \frac{\partial^2 P_r}{\partial x_l \partial x_p} D[\overline{\{r\}|\{i,k,p\}}] \right]
\end{aligned}$$

Ainsi $\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\}$ est une somme de produits des dérivées partielles d'ordre 2 des P_r avec des mineurs de la matrice jacobienne J . Etudions chacun de ces termes afin de vérifier qu'il est nul. On fixe $1 \leq r \leq n-2$:

- Pour $p, l \notin \{i, j, k\}$, $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_p \partial x_l}$ est en facteur de la somme suivante

$$\begin{aligned}
& \pm \left((-1)^{\zeta_{p<i}+\zeta_{j<p}+\zeta_{i<j}+\zeta_{l<k}} D[\overline{\emptyset|\{l,k\}}] D[\overline{\{r\}|\{i,j,p\}}] \right. \\
& \quad + (-1)^{\zeta_{l<i}+\zeta_{j<l}+\zeta_{i<j}+\zeta_{p<k}} D[\overline{\emptyset|\{p,k\}}] D[\overline{\{r\}|\{i,j,l\}}] \\
& \quad + (-1)^{\zeta_{p<j}+\zeta_{k<p}+\zeta_{j<k}+\zeta_{l<i}} D[\overline{\emptyset|\{l,i\}}] D[\overline{\{r\}|\{j,k,p\}}] \\
& \quad + (-1)^{\zeta_{l<j}+\zeta_{k<l}+\zeta_{j<k}+\zeta_{p<i}} D[\overline{\emptyset|\{p,i\}}] D[\overline{\{r\}|\{j,k,l\}}] \\
& \quad + (-1)^{\zeta_{p<k}+\zeta_{i<p}+\zeta_{k<i}+\zeta_{l<j}} D[\overline{\emptyset|\{l,j\}}] D[\overline{\{r\}|\{k,i,p\}}] \\
& \quad \left. + (-1)^{\zeta_{l<k}+\zeta_{i<l}+\zeta_{k<i}+\zeta_{p<j}} D[\overline{\emptyset|\{p,j\}}] D[\overline{\{r\}|\{k,i,l\}}] \right)
\end{aligned}$$

On considère alors la matrice $M \in M_{n-2, n+1}(\mathcal{A})$ obtenue en rajoutant à la matrice jacobienne J une $n+1$ -ème colonne contenant des 0 et un 1 sur la r -ème ligne. La relation de Plücker obtenue à partir de cette matrice en utilisant les familles d'indices

$$\begin{aligned}
u &= \{u_1 \leq \dots \leq u_{n-3}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, l\} \\
\text{et } v &= \{v_1 \leq \dots \leq v_{n-1}\} := \{1, \dots, n+1\} \setminus \{k, p\}
\end{aligned}$$

est la relation suivante :

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} (-1)^{\lambda+1} \det(M[1, \dots, n-2|u_1, \dots, u_{n-3}, v_\lambda]) \det(M[1, \dots, n-2|v_1, \dots, \widehat{v_\lambda}, \dots, v_{n-1}]).$$

Lorsque v_λ est égal à l'un des u_i , le déterminant $\det(M[1, \dots, n-2|u_1, \dots, u_{n-3}, v_\lambda])$ est nul. Finalement, il ne reste dans la relation que les termes suivants, après avoir réordonné les colonnes :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{i+1+\zeta_{k<i}+\zeta_{p<i}+n-i+1+\zeta_{i<j}+\zeta_{i<l}+n+r-1} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{j,l\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{i,k,p\}}] \\
& + (-1)^{j+1+\zeta_{k<j}+\zeta_{p<j}+n-j+1+\zeta_{j<i}+\zeta_{j<l}+n+r-1} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i,l\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{j,k,p\}}] \\
& + (-1)^{l+1+\zeta_{k<l}+\zeta_{p<l}+n-l+1+\zeta_{l<i}+\zeta_{l<j}+n+r-1} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i,j\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{k,l,p\}}] \\
& + (-1)^{n-2+n+r-1} D[\overline{\{r\}}|\overline{\{i,j,l\}}] D[\overline{\emptyset}|\overline{\{k,p\}}] = 0.
\end{aligned}$$

On multiplie la relation précédente par le coefficient $(-1)^{r+1+\zeta_{l<i}+\zeta_{j<l}+\zeta_{i<j}+\zeta_{p<k}}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\zeta_{k<i}+\zeta_{p<i}+\zeta_{j<l}+\zeta_{p<k}+1} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{j,l\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{i,k,p\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{k<j}+\zeta_{p<j}+\zeta_{l<i}+\zeta_{p<k}+1} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i,l\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{j,k,p\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{k<l}+\zeta_{p<l}+\zeta_{i<j}+\zeta_{p<k}+1} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i,j\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{k,l,p\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{l<i}+\zeta_{j<l}+\zeta_{i<j}+\zeta_{p<k}} D[\overline{\{r\}}|\overline{\{i,j,l\}}] D[\overline{\emptyset}|\overline{\{k,p\}}] = 0.
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\zeta_{l<i}+\zeta_{j<l}+\zeta_{i<j}+\zeta_{p<k}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{p,k\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{i,j,l\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{p<j}+\zeta_{k<p}+\zeta_{j<k}+\zeta_{l<i}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{l,i\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{j,k,p\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{p<k}+\zeta_{i<p}+\zeta_{k<i}+\zeta_{l<j}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{l,j\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{k,i,p\}}] \\
& = (-1)^{\zeta_{k<l}+\zeta_{p<l}+\zeta_{i<j}+\zeta_{p<k}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i,j\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{k,l,p\}}]
\end{aligned}$$

En intervertissant les rôles de l et p dans cette relation, on a également :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\zeta_{p<i}+\zeta_{j<p}+\zeta_{i<j}+\zeta_{l<k}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{l,k\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{i,j,p\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{l<j}+\zeta_{k<l}+\zeta_{j<k}+\zeta_{p<i}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{p,i\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{j,k,l\}}] \\
& + (-1)^{\zeta_{l<k}+\zeta_{i<l}+\zeta_{k<i}+\zeta_{p<j}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{p,j\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{k,i,l\}}] \\
& = (-1)^{\zeta_{k<p}+\zeta_{l<p}+\zeta_{i<j}+\zeta_{l<k}} D[\overline{\emptyset}|\overline{\{i,j\}}] D[\overline{\{r\}}|\overline{\{k,l,p\}}]
\end{aligned}$$

En sommant les deux relations précédentes, on démontre finalement que le terme en facteur de $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_p \partial x_l}$ est nul.

- On fixe $l \neq i, j, k$. Le polynôme $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_i \partial x_l}$ est alors en facteur de

$$\begin{aligned} & \pm \left((-1)^{\zeta_{l<i} + \zeta_{j<l} + \zeta_{i<j} + \zeta_{i<k}} D[\overline{\emptyset}|\{i,k\}] D[\overline{\{r\}}|\{i,j,l\}] \right. \\ & \quad + (-1)^{\zeta_{i<j} + \zeta_{k<i} + \zeta_{j<k} + \zeta_{l<i}} D[\overline{\emptyset}|\{l,i\}] D[\overline{\{r\}}|\{j,k,i\}] \\ & \quad \left. + (-1)^{\zeta_{l<k} + \zeta_{i<l} + \zeta_{k<i} + \zeta_{i<j}} D[\overline{\emptyset}|\{i,j\}] D[\overline{\{r\}}|\{k,i,l\}] \right) \end{aligned}$$

La relation de Plücker obtenue à partir de la matrice de M précédente, en prenant les familles d'indices $u = \{u_1 \leq \dots \leq u_{n-3}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, l\}$ et $v = \{v_1 \leq \dots \leq v_{n-1}\} := \{1, \dots, n+1\} \setminus \{k, i\}$ montre que le terme précédent est nul. On obtient le même résultat pour les expressions en facteur des dérivées $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_p \partial x_l}$ dans lesquelles soit p , soit l est égal à l'un des indices i, j, k .

- $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_i \partial x_j}$ est en facteur de

$$(-1)^{r+k+\zeta_{j<i} + \zeta_{i<j} + \zeta_{k<i}} \left((-1)^{\zeta_{j<k}} + (-1)^{\zeta_{k<j}} \right) D[\overline{\emptyset}|\{i,j\}] D[\overline{\{r\}}|\{i,j,k\}] = 0$$

De même, les dérivées $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_j \partial x_k}$ et $\frac{\partial^2 P_r}{\partial x_i \partial x_k}$ ont un facteur nul.

□

Dans la suite, on note également I l'idéal engendré par tous les polynômes $P_1, \dots, P_{n-2}$ et les déterminants extraits $D_{i,j}$, avec $1 \leq i < j \leq n$.

Dans de nombreux exemples qui apparaissent dans la littérature, la famille de polynômes $(P_1, \dots, P_{n-2})$ vérifie les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSES 3.1.3

1. La variété algébrique définie par $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est une intersection complète, ce qui équivaut au fait que la suite $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est régulière.
2. L'idéal I engendré par les polynômes P_i et les déterminants extraits $D_{i,j}$ est un espace de codimension finie dans $\mathcal{A}$, ce qui signifie que la variété algébrique affine définie par $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est à singularité(s) isolée(s).
3. $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est une famille quasi-homogène de polynômes, ce qui signifie qu'il existe des entiers $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}^*$, tels que les polynômes $P_1, \dots, P_{n-2}$ sont homogènes pour la graduation définie par :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j, \text{ où } \mathcal{A}_j = \text{Vect}(x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} / a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = j)$$

Pour un polynôme homogène $F \in \mathcal{A}_j$, on notera $w(F) = j$ son degré.

Comme on le voit dans la suite, ces propriétés permettent d'obtenir des résultats précis concernant l'homologie et la cohomologie de Poisson.

Dans le cas de la dimension 2 et 3, l'étude de l'homologie et la cohomologie de Poisson dans le cas des hypothèses 3.1.3 a été entièrement effectuée par A.Pichereau [Pic05]. Cette étude a été prolongée dans le cas de la dimension 4 par S.Pelap [Pel08] pour le cas particulier des algèbres de Sklyanin.

3.2 Dualité entre l'homologie et la cohomologie de Poisson

Il existe une propriété sur le crochet de Poisson permettant d'obtenir une dualité entre l'homologie et la cohomologie de Poisson d'une algèbre de Poisson. Pour plus de détails, voir [Xu99]. On utilise dans ce paragraphe les notations de la section 2.3.3.

PROPOSITION 3.2.1

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Poisson et $\pi = \{\cdot, \cdot\}$ son crochet de Poisson. Si $\text{Div}(\pi) = 0$ (on dit alors que la structure de Poisson est unimodulaire), alors il existe un isomorphisme entre les espaces d'homologie et de cohomologie de Poisson de l'algèbre $\mathcal{A}$:

$$HP^k(\mathcal{A}) \simeq HP_{n-k}(\mathcal{A})$$

Dans le cas de l'algèbre de Poisson jacobienne précédemment définie, cette propriété est vérifiée.

PROPOSITION 3.2.2

Le crochet de Poisson jacobien est unimodulaire.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \star \text{Div}(\pi) &= \mathbf{d} \star (\pi) = \mathbf{d}(i_\pi \lambda) \\ &= \mathbf{d} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j+1} \{x_i, x_j\} \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{d}}x_i \dots \wedge \check{\mathbf{d}}x_j \dots \wedge \mathbf{d}x_n \right) \\ &= \mathbf{d} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j} \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{d}}x_i \dots \wedge \check{\mathbf{d}}x_j \dots \wedge \mathbf{d}x_n \right) \\ &= \mathbf{d}(\mathbf{d}P_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}P_{n-2}) = 0 \end{aligned}$$

L'opérateur $\star$ étant un isomorphisme, on obtient $\text{Div}(\pi) = 0$.

□

REMARQUE 3.2.3

En développant le calcul de $\mathbf{d} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} D_{i,j} \mathbf{d}x_1 \wedge \dots \wedge \check{\mathbf{d}}x_i \dots \wedge \check{\mathbf{d}}x_j \dots \wedge \mathbf{d}x_n \right)$, la démonstration précédente implique que pour i fixé, $\sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{\partial D_{i,j}}{\partial x_j} = 0$.

3.3 Centre de Poisson

Chacun des polynômes P_i étant un élément central pour le crochet de Poisson, l'algèbre $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ est clairement incluse dans le centre de Poisson de $\mathcal{A}$.

On suppose maintenant que la famille $(P_1, \dots, P_{n-2})$ vérifie les hypothèses 3.1.3, et on note $r_1, \dots, r_{n-2}$ les degrés respectifs de $P_1, \dots, P_{n-2}$. Par hypothèse, l'intersection complète définie par $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est donc une surface à singularité isolée, et d'après [Loo84] (p.49), l'idéal engendré par les mineurs $(n-2) \times (n-2)$ de la matrice jacobienne de $(P_1, \dots, P_{n-2})$ est de profondeur égale à 3. On peut donc utiliser une généralisation du lemme de de Rham, due à K.Saito ([Sai76]), qui donne le résultat suivant dans notre situation particulière.

PROPOSITION 3.3.1 (K.SAITO)

Sous les hypothèses 3.1.3, pour $p = 0, 1, 2$, si $\omega \in \Omega^p(\mathcal{A})$ telle que $\omega \wedge \mathbf{d}P_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}P_{n-2} = 0$,

alors $\omega \in \sum_{i=1}^{n-2} \mathbf{d}P_i \wedge \Omega^{p-1}(\mathcal{A})$.

Dans ces conditions, on peut maintenant démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3.2

Sous les hypothèses 3.1.3, le centre de Poisson de $\mathcal{A}$ est l'algèbre engendrée par la famille de polynômes qui définit la structure de Poisson jacobienne :

$$Cas(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]) = \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}].$$

Démonstration : Soit $P \in Cas(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$. La dérivation $\{P, \cdot\} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$ est donc nulle, et son image par l'isomorphisme $\star$ est nulle :

$$\mathbf{d}P \wedge \mathbf{d}P_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}P_{n-2} = 0.$$

Les polynômes $P_1, \dots, P_{n-2}$ étant tous homogènes, on peut supposer que P est homogène. D'après 3.3.1, on a donc $\mathbf{d}P = Q_1 \mathbf{d}P_1 + \dots + Q_{n-2} \mathbf{d}P_{n-2}$, où $Q_1, \dots, Q_{n-2}$ sont des éléments de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, que l'on peut choisir homogènes de degrés respectifs $w(P) - w(P_1), \dots, w(P) - w(P_{n-2})$. On procède alors par récurrence sur le degré p de P .

- Soit $p < \min(r_i)$. Pour des raisons de degré, on a $Q_1 = \dots = Q_{n-2} = 0$ donc $\mathbf{d}P = 0$ et $P \in \mathbb{C}$.
- Soit $p \geq \min(r_i)$ fixé. On suppose que tout élément Poisson-central de degré strictement inférieur à p est dans $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$. Comme $\mathbf{d}P = Q_1 \mathbf{d}P_1 + \dots + Q_{n-2} \mathbf{d}P_{n-2}$, on a

$$\mathbf{d}Q_1 \wedge \mathbf{d}P_1 + \dots + \mathbf{d}Q_{n-2} \wedge \mathbf{d}P_{n-2} = 0$$

et donc, pour tout $i = 1, \dots, n-2$, $\mathbf{d}Q_i \wedge \mathbf{d}P_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}P_{n-2} = 0$. Ainsi, Q_i est central de degré $p - r_i < p$. Par hypothèse de récurrence, $Q_i = \tilde{Q}_i(P_1, \dots, P_{n-2})$. Maintenant, $(P_1, \dots, P_{n-2})$ étant une suite régulière, $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ est une algèbre de polynômes, et le complexe de de Rham : $\mathbf{d} : \Omega^\bullet(\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}])$ est exact. Comme

$$\mathbf{d}(\tilde{Q}_1(P_1, \dots, P_{n-2}) \wedge \mathbf{d}P_1 + \dots + \tilde{Q}_{n-2}(P_1, \dots, P_{n-2}) \wedge \mathbf{d}P_{n-2}) = 0,$$

il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ tel que

$$\tilde{Q}_1(P_1, \dots, P_{n-2}) \wedge \mathbf{d}P_1 + \dots + \tilde{Q}_{n-2}(P_1, \dots, P_{n-2}) \wedge \mathbf{d}P_{n-2} = \mathbf{d}\tilde{Q}$$

Ainsi, $\mathbf{d}P = \mathbf{d}\tilde{Q}$, et par exactitude du complexe de de Rham, $P = \tilde{Q} + a$ avec $a \in \mathbb{C}$, et donc $P \in \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$.

□

3.4 Homologie de Poisson en degré 0 sur la surface

L'idéal de l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ engendré par les polynômes $P_1, \dots, P_{n-2}$ est un idéal de Poisson pour le crochet jacobien, donc $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2})}$ est une algèbre de Poisson, munie du crochet induit.

Dans le cas $n = 3$, pour P homogène, J.Alev et T.Lambre [AL98] ont montré que le zéro-ième groupe d'homologie de Poisson $HP_0\left(\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]}{(P)}\right)$ s'identifie à l'espace vectoriel

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]}{(\partial P / \partial x_1, \partial P / \partial x_2, \partial P / \partial x_3)}.$$

Ce résultat se généralise à la dimension n quelconque. Pour le montrer on aura besoin d'un résultat préliminaire.

Notation : Soit $m \leq n$. Si $P_{j_1}, \dots, P_{j_m}$ sont m polynômes, et $i_1, \dots, i_m$ sont m entiers tels que $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n$, on notera $D_{i_1, \dots, i_m}^{j_1, \dots, j_m}$ le déterminant de la matrice $(\frac{\partial P_{j_p}}{\partial x_{i_q}})_{1 \leq p, q \leq m}$.

PROPOSITION 3.4.1

Soit $1 \leq m \leq n$. Pour toute famille de polynômes homogènes $P_1, \dots, P_m$, de degrés respectifs $r_1, \dots, r_m$, et pour toute liste de $m-1$ indices $i_1, \dots, i_{m-1} \in \{1, \dots, n\}$ on a l'égalité suivante :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i D_{i, i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, m} = \sum_{1 \leq j \leq m} (-1)^{j-1} r_j P_j D_{i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, \hat{j}, \dots, m}$$

Démonstration : On développe chaque $D_{i, i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, m}$ par rapport à la première ligne, c'est-à-dire celle contenant les dérivées des P_j par rapport à la variable x_i :

$$D_{i, i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, m} = \sum_{1 \leq j \leq m} (-1)^{j+1} \frac{\partial P_j}{\partial x_i} D_{i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, \hat{j}, \dots, m}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i D_{i, i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, m} &= \sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i \left(\sum_{1 \leq j \leq m} (-1)^{j+1} \frac{\partial P_j}{\partial x_i} D_{i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, \hat{j}, \dots, m} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq m} (-1)^{j+1} D_{i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, \hat{j}, \dots, m} \sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq m} (-1)^{j+1} D_{i_1, \dots, i_{m-1}}^{1, \dots, \hat{j}, \dots, m} r_j P_j, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité d'Euler pour chaque polynôme P_j .

□

REMARQUE 3.4.2

Avec $m = n - 2$, cette relation implique, pour $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-3} \leq n$.

$$\sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i D_{i, i_1, \dots, i_{n-3}}^{1, \dots, n-2} \in (P_1, \dots, P_{n-2})$$

Mais dès que i est égal à l'un des $i_1, \dots, i_{n-3}$, le déterminant $D_{i, i_1, \dots, i_{n-3}}^{1, \dots, n-2}$ est nul. Il reste trois entiers $j < k < l$ dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_{n-3}\}$. Donc

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i \leq n} w_i x_i D_{i, i_1, \dots, i_{n-3}}^{1, \dots, n-2} \\ &= w_j x_j D_{j, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, \hat{l}, \dots, n}^{1, \dots, n-2} + w_k x_k D_{k, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, \hat{l}, \dots, n}^{1, \dots, n-2} + w_l x_l D_{l, 1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, \hat{l}, \dots, n}^{1, \dots, n-2} \\ &= (-1)^{j-1} w_j x_j D_{1, \dots, \hat{k}, \dots, \hat{l}, \dots, n}^{1, \dots, n-2} + (-1)^{k-2} w_k x_k D_{1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{l}, \dots, n}^{1, \dots, n-2} + (-1)^{l-3} w_l x_l D_{1, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, n}^{1, \dots, n-2} \\ &= (-1)^{j-1} w_j x_j D_{k, l} + (-1)^{k-2} w_k x_k D_{j, l} + (-1)^{l-3} w_l x_l D_{j, k} \\ &= (-1)^{j-1} w_j x_j D_{k, l} + (-1)^{k-1} w_k x_k D_{l, j} + (-1)^{l-3} w_l x_l D_{j, k} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(-1)^j w_j x_j D_{k,l} + (-1)^k w_k x_k D_{l,j} + (-1)^l w_l x_l D_{j,k} \in (P_1, \dots, P_{n-2}). \quad (3.2)$$

Par antisymétrie de (D_{ij}) , cette relation reste vraie pour tous $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

On peut maintenant démontrer la proposition suivante,

PROPOSITION 3.4.3

Soit $P_1, \dots, P_{n-2}$ une famille de polynômes homogènes de degrés $(r_1, \dots, r_{n-2})$. On note $\{\cdot, \cdot\}$ le crochet de Poisson jacobien associé à ces $n-2$ polynômes. Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels (plus précisément d'algèbres de Lie abéliennes) :

$$HP_0 \left(\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2})} \right) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2}, D_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)}$$

où $D_{i,j}$ est le $(n-2)$ -mineur obtenu en supprimant les i^e et j^e colonnes de la matrice jacobienne des P_i .

Démonstration : Pour simplifier les notations, on note les monômes sous la forme $x^a := x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, où $a \in \mathbb{N}^n$. On pose $I = (P_1, \dots, P_{n-2}, D_{i,j}; 1 \leq i, j \leq n)$ l'idéal engendré par les P_i et les déterminants $D_{i,j}$. Par définition du crochet de Poisson induit, on a :

$$\left\{ \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2})}, \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2})} \right\} = \frac{\{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} + (P_1, \dots, P_{n-2})}{(P_1, \dots, P_{n-2})}$$

Donc

$$HP_0 \left(\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2})} \right) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} + (P_1, \dots, P_{n-2})}$$

Il suffit alors de montrer l'égalité :

$$\{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} + (P_1, \dots, P_{n-2}) = I.$$

- Comme $\{F, G\} = Jac(F, G, P_1, \dots, P_{n-2})$, en développant le jacobien deux fois par rapport à la première ligne, on voit que $\{F, G\}$ est dans l'idéal engendré par les $(D_{i,j})$. L'inclusion $\{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} + (P_1, \dots, P_{n-2}) \subset I$ est donc évidente.
- Pour l'inclusion inverse, comme $I = (P_1, \dots, P_{n-2}) + (D_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$, il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^n$, et tout couple (u, v) , $x^a D_{u,v}$ est dans le sous-espace

$$\{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} + (P_1, \dots, P_{n-2}).$$

Pour $k = 1, \dots, n$, on pose $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^e}, 0, \dots, 0)$, et on pose $\alpha = a + e_u + e_v$.

On considère alors l'ensemble $K = \{k \in \{1, \dots, n\}, \alpha_k \geq 1\} \supseteq \{u, v\}$. On a alors, en utilisant (3.1), pour $i \in K$:

$$(E_i) : (-1)^{i-1} \{x_i, x^{\alpha-e_i}\} = \sum_{j=1}^n (-1)^j \alpha_j x^{\alpha-e_i-e_j} D_{i,j}.$$

Dans le membre de droite n'apparaissent que les $D_{i,j}$ pour lesquels $i, j \in K$. Ainsi, si $K = \{u, v\}$, la relation (E_u) donne

$$(-1)^{u-1}\{x_u, x^{\alpha-e_u}\} = (-1)^v \alpha_v x^{\alpha-e_u-e_v} D_{u,v} = (-1)^v x^a D_{u,v},$$

et $x^a D_{u,v} \in \{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$.

On suppose maintenant que K n'est plus réduit à $\{u, v\}$. On utilise alors les relations suivantes, obtenues par (3.2), pour $i, j, k \in K$,

$$(-1)^i w_i x_i D_{j,k} + (-1)^j w_j x_j D_{k,i} + (-1)^k w_k x_k D_{i,j} \in (P_1, \dots, P_{n-2})$$

En multipliant cette relation par $x^{\alpha-e_i-e_j-e_k}$, on obtient

$$(E_{ijk}) : (-1)^i w_i x^{\alpha-e_j-e_k} D_{j,k} + (-1)^j w_j x^{\alpha-e_k-e_i} D_{k,i} + (-1)^k w_k x^{\alpha-e_i-e_j} D_{i,j} = T_{ijk}$$

où T_{ijk} est un élément de l'idéal $(P_1, \dots, P_{n-2})$. Si on note $\kappa = \text{card}(K) \geq 3$, alors

les κ relations (E_i) et les $\binom{\kappa}{3} = \kappa(\kappa-1)(\kappa-2)/6$ relations (E_{ijk}) différentes

font intervenir les $\kappa(\kappa-1)/2$ termes de la forme $x^{\alpha-e_i-e_j} D_{i,j}$, notés dans la suite $X_{i,j}$. A partir de ces équations, on construit un système inversible de $\kappa(\kappa-1)/2$ équations. On fixe d'abord $k_0 \in K \setminus \{u, v\}$. On construit ensuite des relations ne faisant intervenir que les inconnues dont un des indices est k_0 . On effectue pour cela la combinaison linéaire d'équations $(E'_i) : (-1)^{k_0} w_{k_0} (E_i) + \sum_{j \in K \setminus \{k_0\}} (-1)^j \alpha_j (E_{ijk_0})$

pour $i \in K \setminus \{k_0\}$. On a en effet l'égalité :

$$\begin{aligned} & (-1)^{k_0} w_{k_0} \left(\sum_{j \in K} (-1)^j \alpha_j X_{i,j} \right) \\ & + \sum_{j \in K \setminus \{k_0\}} (-1)^j \alpha_j \left[(-1)^i w_i X_{j,k_0} + (-1)^j w_j X_{k_0,i} + (-1)^{k_0} w_{k_0} X_{i,j} \right] \\ & = w_{k_0} \alpha_{k_0} X_{i,k_0} + \sum_{j \in K \setminus \{k_0\}} (-1)^j \alpha_j \left[(-1)^i w_i X_{j,k_0} + (-1)^j w_j X_{k_0,i} \right] \\ & = \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j \right) X_{k_0,i} + \sum_{j \in K \setminus \{k_0\}} (-1)^{i+j} \alpha_j w_i X_{j,k_0} \\ & = \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j - \alpha_i w_i \right) X_{k_0,i} + \sum_{j \in K \setminus \{k_0,i\}} (-1)^{i+j+1} \alpha_j w_i X_{k_0,j} \end{aligned}$$

Les nouvelles équations obtenues sont donc de la forme :

$$(E'_i) : \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j - \alpha_i w_i \right) X_{k_0,i} + \sum_{j \in K \setminus \{k_0,i\}} (-1)^{i+j+1} \alpha_j w_i X_{k_0,j} = T_i$$

avec $T_i \in \{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} + (P_1, \dots, P_{n-2})$, pour $i \in K \setminus \{k_0\}$. On obtient alors un système qui est triangulaire par blocs dont la matrice est telle que :

- ★ les $\kappa-1$ premières lignes correspondent aux relations (E'_i) , et les $\kappa-1$ premières colonnes correspondent aux $X_{k_0,i}$ pour $i \in K \setminus \{k_0\}$.
- ★ les $(\kappa-1)(\kappa-2)/2$ dernières lignes correspondent aux relations (E_{ijk_0}) et les $(\kappa-1)(\kappa-2)/2$ colonnes correspondent aux $X_{i,j}$ pour $i < j \in K \setminus \{k_0\}$.

Cette matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$ avec, en numérotant $i_1, \dots, i_{\kappa-1}$ les éléments de $K \setminus \{k_0\}$:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{j \in K} \alpha_j w_j - \alpha_{i_1} w_{i_1} & (-1)^{i_1+i_2+1} \alpha_{i_2} w_{i_1} & \cdots & (-1)^{i_1+i_{\kappa-1}+1} \alpha_{i_{\kappa-1}} w_{i_1} \\ (-1)^{i_1+i_2+1} \alpha_{i_1} w_{i_2} & \sum_{j \in K} \alpha_j w_j - \alpha_{i_2} w_{i_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (-1)^{i_{\kappa-2}+i_{\kappa-1}+1} \alpha_{i_{\kappa-1}} w_{i_{\kappa-2}} \\ (-1)^{i_1+i_{\kappa-1}+1} \alpha_{i_1} w_{i_{\kappa-1}} & \cdots & & \sum_{j \in K} \alpha_j w_j - \alpha_{i_{\kappa-1}} w_{i_{\kappa-1}} \end{pmatrix}$$

et $C = (-1)^{k_0} w_{k_0} I_{(\kappa-1)(\kappa-2)/2}$, qui est inversible. Calculons le déterminant de la matrice A . On pose

$$W := \begin{pmatrix} (-1)^{i_1+1} w_{i_1} \\ \vdots \\ (-1)^{i_{\kappa-1}+1} w_{i_{\kappa-1}} \end{pmatrix}$$

et on note $(V_1, \dots, V_{\kappa-1})$ la base canonique de $M_{\kappa-1,1}(\mathbb{C})$. Ainsi

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(\left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right) V_1 + (-1)^{i_1} \alpha_{i_1} W, \dots, \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right) V_{\kappa-1} + (-1)^{i_{\kappa-1}} \alpha_{i_{\kappa-1}} W\right) \\ &= \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right)^{\kappa-1} \det(V_1, \dots, V_{\kappa-1}) \\ &\quad + \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right)^{\kappa-2} \left[(-1)^{i_1} \alpha_{i_1} \det(W, V_2, \dots, V_{\kappa-1}) + \dots\right. \\ &\quad \left.+ (-1)^{i_{\kappa-1}} \alpha_{i_{\kappa-1}} \det(V_1, \dots, V_{\kappa-2}, W)\right] \end{aligned}$$

par multilinéarité et antisymétrie du déterminant. Ainsi

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right)^{\kappa-1} + \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right)^{\kappa-2} \left[-\alpha_{i_1} w_{i_1} - \dots - \alpha_{i_{\kappa-1}} w_{i_{\kappa-1}}\right] \\ &= \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right)^{\kappa-2} \left[\sum_{j \in K} \alpha_j w_j - \alpha_{i_1} w_{i_1} - \dots - \alpha_{i_{\kappa-1}} w_{i_{\kappa-1}}\right] \\ &= \alpha_{k_0} w_{k_0} \left(\sum_{j \in K} \alpha_j w_j\right)^{\kappa-2} > 0 \end{aligned}$$

Le déterminant du système est donc non nul, et en inversant ce système, on écrit les $X_{i,j}$ avec $i < j \in K$, et en particulier $X_{u,v} = x^a D_{u,v}$, comme combinaisons linéaires d'éléments de $\{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$ et de $(P_1, \dots, P_{n-2})$, ce qui termine la preuve.

□

Ainsi, si on suppose que les P_i forment une suite régulière, l'ensemble algébrique correspondant est de dimension 2 [Per95, chap.4], et si on suppose que cette variété est à singularité isolée en zéro (i.e. $\text{rg}(Jac(P_1, \dots, P_{n-2})) = n - 2$ partout sauf en zéro), alors le quotient $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(P_1, \dots, P_{n-2}, D_{ij})$ est de dimension finie [CLO05, chap.2, section 2], cette dimension étant celle du groupe d'homologie en degré 0 de la surface $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(P_1, \dots, P_{n-2})$.

3.5 Homologie de Poisson en degré 0 de l'espace ambiant

On a démontré l'isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$HP_0 \left(\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2})} \right) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2}, D_{i,j})}.$$

Dans la suite, on suppose que cet espace vectoriel est de dimension finie μ sur $\mathbb{C}$. Si cette dimension μ n'est pas nulle, on choisit $u_0 = 1, u_1, \dots, u_{\mu-1}$ des polynômes homogènes de $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ (par rapport à la graduation fixée initialement), tels que leurs images dans $\frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(P_1, \dots, P_{n-2}, D_{i,j})}$ forment une base sur $\mathbb{C}$ de cet espace vectoriel : un tel choix est possible car l'idéal $I = (P_1, \dots, P_{n-2}, D_{i,j})$ est homogène. Si $\mu = 0$, alors au moins l'un des $D_{i,j}$ est une constante inversible, pour des raisons d'homogénéité.

Pour simplifier les écritures, on note $\Sigma = \sum_{k=1}^{n-2} w(P_k) = \sum_{k=1}^{n-2} r_k$ et $|w| = w_1 + \dots + w_n$.

THÉORÈME 3.5.1

L'espace d'homologie de Poisson de $\mathcal{A}$ en degré 0 est un $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ -module de type fini, engendré par les μ éléments $u_0 + \partial_1(\Omega^1(\mathcal{A})), \dots, u_{\mu-1} + \partial_1(\Omega^1(\mathcal{A}))$.

Démonstration : On rappelle que $\partial_1 = i_\pi \circ \mathbf{d} - \mathbf{d} \circ i_\pi$ (2.2). Or sur $\Omega^1(\mathcal{A})$, $i_\pi = 0$ donc $\partial_1 = i_\pi \circ \mathbf{d}$. On montre que $\mathcal{A}$ se décompose en la somme de $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ -modules suivante :

$$\mathcal{A} = \partial_1(\Omega^1(\mathcal{A})) + \sum_{m=0}^{\mu-1} \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]u_m.$$

en procédant par récurrence sur le degré d'un polynôme homogène $F \in \mathcal{A}$.

- Pour $F = \alpha \in \mathcal{A}_0 = \mathbb{C}$, on a $\alpha = \partial_1(0) + \alpha u_0$ lorsque $\mu > 0$. Si $\mu = 0$, on note (i, j) un couple tel que $D_{i,j} \in \mathbb{C}^*$, et alors

$$\alpha = \left\{ \frac{\alpha}{(-1)^{i+j+1} D_{i,j}} x_i, x_j \right\} = \partial_1 \left(\frac{\alpha}{(-1)^{i+j+1} D_{i,j}} x_i \mathbf{d} x_j \right).$$

- Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{A}_{<r} \subset \partial_1(\Omega^1(\mathcal{A})) + \sum_{m=0}^{\mu-1} \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]u_m$, et on fixe un polynôme F de degré r .

Par définition des u_j , il existe des scalaires α_j et des éléments $Q_j, R_{i,j}$ de $\mathcal{A}$ tels que

$$F = \sum_{j=0}^{\mu-1} \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^{n-2} Q_j P_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} R_{i,j} D_{i,j}.$$

La première des trois sommes est clairement dans le module $\sum_{m=0}^{\mu-1} \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]u_m$.

Les polynômes F, u_j, P_j , et $D_{i,j}$ étant homogènes de degrés respectifs $r, w(u_j), r_j$, et $\Sigma - |w| + w_i + w_j$, on peut supposer que Q_j est homogène de poids $r - r_j$, et que

$R_{i,j}$ est homogène de poids $r - \Sigma + |w| - w_i - w_j$. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux polynômes Q_j ,

$$Q_j = \partial_1(\mu_j) + \sum_{m=0}^{\mu-1} S_j(P_1, \dots, P_{n-2})u_m,$$

où $S_j(P_1, \dots, P_{n-2})$ est un élément $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$.

Donc un terme de la deuxième somme s'écrit :

$$\begin{aligned} P_j Q_j &= \underbrace{P_j}_{\in \text{Cas}(\mathcal{A})} \partial_1(\mu_j) + \sum_{m=0}^{\mu-1} P_j S_j(P_1, \dots, P_{n-2})u_m \\ &= \partial_1(P_j \mu_j) + \sum_{m=0}^{\mu-1} P_j S_j(P_1, \dots, P_{n-2})u_m \end{aligned}$$

La deuxième somme est donc dans $\partial_1(\Omega^1(\mathcal{A})) + \sum_{m=0}^{\mu-1} \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]u_m$.

Considérons maintenant la dernière somme. Si $r \leq \Sigma - |w|$, alors tous les $R_{i,j}$ sont nuls et cette dernière somme est nulle. Si $r > \Sigma - |w|$, on écrit

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} R_{i,j} D_{i,j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i, x_j\} R_{i,j} = i_\pi \left(\sum_{i < j} R_{i,j} \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_j \right).$$

On pose donc $R := \sum_{i < j} R_{i,j} \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_j \in \Omega^2(\mathcal{A})_{r-\Sigma+|w|}$. Ainsi,

$$\mathbf{d}R \in \text{Ker}(\mathbf{d}) \cap \Omega^3(\mathcal{A})_{r-\Sigma+|w|},$$

et d'après le lemme 2.3.1, on a

$$\mathbf{d} \circ i_{e_w}(\mathbf{d}R) = \underbrace{(r - \Sigma + |w|)}_{>0} \mathbf{d}R.$$

Donc $\mathbf{d} \left(\frac{1}{r - \Sigma + |w|} i_{e_w}(\mathbf{d}R) - R \right) = 0$ et par exactitude du complexe de de Rham, on a l'existence de $\mu \in \Omega^1(\mathcal{A})$, tel que $R = \frac{1}{r - \Sigma + |w|} i_{e_w}(\mathbf{d}R) + \mathbf{d}\mu$. Ainsi

$$\begin{aligned} i_\pi(R) &= \frac{1}{r - \Sigma + |w|} i_\pi(i_{e_w}(\mathbf{d}R)) + i_\pi(\mathbf{d}\mu) \\ &= \frac{1}{r - \Sigma + |w|} i_{e_w \wedge \pi}(\mathbf{d}R) + \partial_1(\mu) \end{aligned}$$

Mais $e_w \wedge \pi$ s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
& \sum_{i < j < p} (w_i x_i \{x_j, x_p\} - w_j x_j \{x_i, x_p\} + w_p x_p \{x_i, x_j\}) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \\
&= \sum_{i < j < p} (w_i x_i (-1)^{j+p-1} D_{j,p} + w_j x_j (-1)^{i+p-1} D_{p,i} \\
&\quad + w_p x_p (-1)^{i+j-1} D_{i,j}) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \\
&= \sum_{i < j < p} (-1)^{i+j+p-1} ((-1)^i w_i x_i D_{j,p} + (-1)^j w_j x_j D_{p,i} \\
&\quad + (-1)^p w_p x_p D_{i,j}) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \\
&= \sum_{i < j < p} (-1)^{i+j+p-1} \left(\sum_{1 \leq k \leq m} (-1)^k r_k P_k D_{1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{p}, \dots, n}^{1, \dots, \hat{k}, \dots, m} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_p} \right)
\end{aligned}$$

d'après la proposition (3.4.1). Ainsi

$$i_{e_w \wedge \pi}(\mathbf{d}R) = i_{e_w \wedge \pi} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{1 \leq p \leq n} \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_p} \mathbf{d}x_p \wedge \mathbf{d}x_i \wedge \mathbf{d}x_j \right) \right) \quad (3.3)$$

est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $P_k \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_p} D_{1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{p}, \dots, n}^{1, \dots, \hat{k}, \dots, m}$, où

$\frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_p} D_{1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{p}, \dots, n}^{1, \dots, \hat{k}, \dots, m}$ est de degré $r - r_k < r$. Donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, ainsi,

$$\begin{aligned}
P_k \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_p} D_{1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, \hat{p}, \dots, n}^{1, \dots, \hat{k}, \dots, m} &= P_k \partial_1(\mu_{ijp}) + \sum_{m=0}^{\mu-1} S_{ijp}(P_1, \dots, P_{n-2}) P_k u_m \\
&= \partial_1(P_k \mu_{ijp}) + \sum_{m=0}^{\mu-1} S_{ijp}(P_1, \dots, P_{n-2}) P_k u_m \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Donc $i_{e_w \wedge \pi}(\mathbf{d}R)$ est bien dans $\partial_1(\Omega^1(\mathcal{A})) + \sum_0^{\mu-1} \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}] u_m$, ce qui achève la démonstration.

□

PROPOSITION 3.5.2

Un système générateur de $HP_0(\mathcal{A})$ comme $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ -module est de cardinal supérieur ou égal à μ .

Démonstration : Si $u_1 + \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}, \dots, u_p + \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}$ sont des générateurs de $HP_0(\mathcal{A})$ comme $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ -module, alors $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^p \mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}] u_k + \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}$, et en passant au quotient par l'idéal I engendré par les P_i et les $D_{i,j}$, on voit que $u_1 + I, \dots, u_p + I$ forment un système générateur de $\mathcal{A}/I$ comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, qui est de dimension μ et donc $p \geq \mu$.

□

COROLLAIRE 3.5.3

Le système générateur de $HP_0(\mathcal{A})$ comme $\mathbb{C}[P_1, \dots, P_{n-2}]$ -module déterminé dans le théorème 3.5.1 est de cardinal minimal.

3.6 Application : Structures transverses

3.6.1 Orbites adjointes et coadjointes

On donne d'abord des rappels concernant les orbites adjointes d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Pour plus de détails, voir par exemple [TY05], [CM93].

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, de rang l , et de groupe de Lie adjoint G . Pour $g \in G$, on note $Ad : g \in G \mapsto Ad_g \in Aut(\mathfrak{g})$ l'action de G dans $\mathfrak{g}$, et pour un élément x de $\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{O}_x$ son orbite sous l'action du groupe G . On dit que l'orbite $\mathcal{O}_x$ est nilpotente (respectivement semi-simple), si x est nilpotent (respectivement semi-simple), et on note $\mathcal{N}$ l'ensemble de tous les éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$. Une orbite $\mathcal{O}_x$ est une variété différentielle complexe, de dimension

$$\dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{g}^x)$$

où $\mathfrak{g}^x$ est le centraliseur de x dans $\mathfrak{g}$. Cette dimension est toujours paire, et l'espace tangent à $\mathcal{O}_x$ en x est $[x, \mathfrak{g}]$. On s'intéresse dans la suite aux orbites nilpotentes. On fixe $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $R \subset \mathfrak{h}^*$ le système de racines associé, B une base du système de racines. Un S -triplet standard dans $\mathfrak{g}$ est un triplet (e, f, h) tel que

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f,$$

avec $h \in \mathfrak{h}$ et $\beta(h) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $\beta \in B$. Pour tout x nilpotent non nul, il existe un unique S -triplet standard (e, f, h) tel que e appartient à l'orbite de x , c'est-à-dire $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_e$. Ainsi, on peut associer à l'orbite $\mathcal{O}_x$ un diagramme de Dynkin pondéré, dans lequel chaque sommet $\alpha \in B$ du diagramme est pondéré par $\alpha(h)$. Un théorème de Kostant assure que ce diagramme pondéré caractérise l'orbite nilpotente. On en déduit qu'il existe au plus 3^l orbites nilpotentes dans $\mathfrak{g}$. Il existe trois orbites nilpotentes spéciales :

- l'orbite principale (ou régulière) : c'est l'unique orbite nilpotente de dimension maximale $\dim(\mathfrak{g}) - l$, elle est ouverte et dense dans le cône nilpotent $\mathcal{N}$;
- l'orbite sous-régulière : c'est l'unique orbite nilpotente de dimension $\dim(\mathfrak{g}) - l - 2$;
- l'orbite minimale : c'est l'unique orbite nilpotente de dimension minimale.

On s'intéresse maintenant au dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, sur lequel G agit naturellement par $g \cdot \mu(x) = \mu(g^{-1} \cdot x)$, pour $g \in G$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$, et $x \in \mathfrak{g}$.

La structure de Lie sur $\mathfrak{g}$ permet de munir $\mathfrak{g}^*$ d'une structure de variété de Poisson, appelée structure de Lie-Poisson, définie par :

$$\forall \mu \in \mathfrak{g}^*, F, F' \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*), \{F, F'\}(\mu) := \mu([\mathbf{d}_\mu F, \mathbf{d}_\mu F'])$$

où $\mathbf{d}_\mu F$ et $\mathbf{d}_\mu F'$ sont des éléments de $T_\mu \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$. La forme de Killing L de $\mathfrak{g}$ permet d'identifier $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$, et est G -équivariante, ce qui permet d'identifier les orbites adjointes aux orbites co-adjointes. L'identification entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ permet également de transporter la structure de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qu'on appelle encore structure de Lie-Poisson.

3.6.2 Structure de Poisson transverse

La structure de Poisson transverse a été introduite par A.Weinstein [Wei83]. Soit M une variété de Poisson, et m un point de M . Localement, M se décompose en un produit $S_m \times N_m$, où S_m est la feuille symplectique passant par m , et N_m est une sous-variété de

M , munie d'une structure de Poisson. La sous-variété N_m est appelée un slice transverse en m à la feuille symplectique, et la structure de Poisson sur N_m est appelée structure de Poisson transverse. A isomorphisme de variété de Poisson près, la structure de Poisson transverse à la feuille symplectique en m est unique. Par ailleurs, si m' est un autre point de la feuille symplectique passant par m , la structure de Poisson transverse à la feuille symplectique en m est isomorphe à la structure de Poisson transverse en m' . On peut donc parler simplement de structure transverse à une feuille symplectique.

On considère maintenant le cas particulier de la variété de Poisson $\mathfrak{g}^*$ définie précédemment. D'après un théorème de Kostant-Kirillov-Souriau, pour tout $\mu \in \mathfrak{g}^*$, la feuille symplectique passant par μ est l'orbite co-adjointe $G \cdot \mu$. Dans cette situation, on connaît une méthode pour réaliser la structure de Poisson transverse à l'orbite $G \cdot \mu$. Soit $\mathfrak{n}$ un complémentaire quelconque du centralisateur $\mathfrak{g}(\mu)$ de μ dans $\mathfrak{g}$, on pose $N = \mu + \mathfrak{n}^\perp$, $\mathfrak{n}^\perp$ étant l'orthogonal de $\mathfrak{n}$ pour la forme de Killing L . L'espace affine N obtenu est un slice transverse à $G \cdot \mu$ en μ [CR02].

En choisissant un système de coordonnées linéaires $(q_1, \dots, q_k)$ sur $\mathfrak{n}^\perp$, il est possible d'obtenir des formules explicites pour la matrice de Poisson $\Lambda_N := (\{q_i, q_j\})_{1 \leq i, j \leq k}$ de la structure de Poisson transverse, qui montrent que cette structure est rationnelle.

Dans [Dam96], P.A. Damianou a explicité ces formules dans le cas des orbites nilpotentes de $\mathfrak{gl}_n$ pour $n \leq 7$, pour un complémentaire $\mathfrak{n}$ particulier tel que la structure transverse est polynômiale. Pour cela, on identifie via la forme de Killing les orbites co-adjointes nilpotentes de $\mathfrak{g}^*$ aux orbites adjointes nilpotentes de $\mathfrak{g}$. Avec les notations du paragraphe précédent, on considère un S -triplet standard (e, f, h) avec e nilpotent, et on s'intéresse à la structure transverse à la feuille symplectique $G \cdot e$ passant par e . Le slice transverse spécial étudié par Damianou correspond à $N = e + \text{Ker}(\text{ad} f)$. Ce résultat a été généralisé par R.Cushman et M.Roberts [CR02] au cas de toutes les algèbres de Lie semi-simples complexes. P.A.Damianou, H.Sabourin et P.Vanhaecke [DSV07] ont ensuite déterminé une classe de slices transverses pour laquelle la structure de Poisson est polynômiale : il suffit de choisir un complémentaire $\mathfrak{n}$ du centralisateur $\mathfrak{g}^e$ de e dans $\mathfrak{g}$ qui est invariant sous l'action adjointe de la caractéristique h du S -triplet. Dans ce cas, la structure de Poisson transverse est polynômiale et quasi-homogène, notée structure ATP (Adjoint Transverse Poisson structure). Dans le cas de l'orbite régulière, la structure ATP est triviale. Dans le cas de l'orbite nilpotente sous-régulière, il est démontré que la structure ATP est jacobienne, définie par les restrictions χ_i , pour $1 \leq i \leq l$, des l Casimirs de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ au slice transverse N .

D'après [DSV07, Lemme 5.1 et Proposition 5.2], dans le cas d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, les polynômes χ_i vérifient les hypothèses 3.1.3, on peut donc appliquer le théorème 3.5.1 qui assure que le groupe d'homologie de Poisson en degré 0 de la structure transverse est un module de type fini sur l'algèbre des Casimirs. Le cardinal minimal d'un système générateur de ce module est égal à la dimension μ de l'algèbre des fonctions polynômiales sur le lieu singulier de la surface définie par les polynômes χ_i . Dans le cas simplement lacé, d'après [DSV07, Proposition 5.2], cette surface a une singularité simple homogène de type correspondant au diagramme de Dynkin de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$. On en déduit que μ est le rang de l'algèbre de Lie.

Chapitre 4

Algèbres de Poisson symplectiques

4.1 Crochet de Poisson symplectique

On considère un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V muni d'une forme symplectique $\langle \cdot, \cdot \rangle$; ainsi $\dim(V) = 2n$, et il existe une base $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ telle que $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$ et $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle = 0$. Par abus de notation, on note encore $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ la base duale, et on munit $\mathbb{C}[V]$ d'un crochet de Poisson, dit symplectique, en posant :

$$\{x_i, y_j\} = \delta_{ij} \text{ et } \{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$$

étendu par bilinéarité, bidérivation, et antisymétrie du crochet de Poisson. On va voir maintenant que l'algèbre de Lie $(\mathbb{C}[V], \{\cdot, \cdot\})$ est de type fini, en explicitant un système de générateurs.

Rappels

- Dans une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$, on définit l'action adjointe d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ par

$$\text{ad } x = [x, \cdot] \in \text{End}(\mathfrak{g})$$

- Les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ sont connues. On note $V = \mathbb{C}^2$ la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$. Les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$ sont alors les espaces $S^n(V)$ qui s'identifie à l'espace de dimension $n+1$, $\mathbb{C}[x, y]_n$ des polynômes homogènes en x, y de degré total n , sur lesquels l'action de $\mathfrak{sl}_2 = \{e, f, h\}$ peut être représentée de la manière suivante,

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{h}{\curvearrowright} & & \overset{h}{\curvearrowright} & & & & \overset{h}{\curvearrowright} & & \overset{h}{\curvearrowright} \\ x^n & \xrightarrow{e} & x^{n-1}y & \xrightarrow{e} & \dots & \xleftarrow{e} & xy^{n-1} & \xleftarrow{e} & y^n \\ \underset{f}{\curvearrowleft} & & \underset{f}{\curvearrowleft} & & & & \underset{f}{\curvearrowleft} & & \underset{f}{\curvearrowleft} \end{array}$$

e agissant par $y \frac{\partial}{\partial x}$, f par $x \frac{\partial}{\partial y}$, et h par $-x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.

- En utilisant ces représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2$, on montre que l'espace $\mathbb{C}[x, y]_{\leq 2}$ des polynômes de degré total inférieur ou égal à 2, est une sous-algèbre de Lie maximale de $\mathbb{C}[x, y]$ munie du crochet de Poisson symplectique précédent [Ber01].
- ★ En effet, $\mathbb{C}[x, y]_2$ muni du crochet de Poisson symplectique est une copie de $\mathfrak{sl}_2$,

agissant sur $\mathbb{C}[x, y]$ par :

$$\begin{aligned} \left\{-\frac{1}{2}y^2, \cdot\right\} &= y \frac{\partial}{\partial x}, \\ \left\{\frac{1}{2}x^2, \cdot\right\} &= x \frac{\partial}{\partial y}, \\ \{xy, \cdot\} &= -x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}[x, y]_n$ est une représentation irréductible de $\mathbb{C}[x, y]_2$ pour l'action adjointe.

★ On a de plus les actions suivantes,

$$\{x, \cdot\} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \{-y, \cdot\} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Soit maintenant $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathbb{C}[x, y]$ contenant strictement $\mathbb{C}[x, y]_{\leq 2}$. Alors $\mathfrak{a}$ contient un polynôme f de degré supérieur ou égal à 3. En appliquant successivement $\{x, \cdot\}$ et $\{y, \cdot\}$ à f , on obtient un polynôme de degré 3 dans $\mathfrak{a}$, et comme $\mathbb{C}[x, y]_{\leq 2} \subset \mathfrak{a}$, on obtient un élément non nul de $\mathbb{C}[x, y]_3$ qui est dans $\mathfrak{a}$. Par l'action de la copie de $\mathfrak{sl}_2$, on obtient donc $\mathbb{C}[x, y]_3 \subset \mathfrak{a}$.

- ★ $\mathfrak{a}$ étant une sous-algèbre de Lie, $\{x^3, y^3\} = 9x^2y^2 \in \mathfrak{a}$, donc $\mathbb{C}[x, y]_4 \subset \mathfrak{a}$.
- ★ Supposons que $\mathbb{C}[x, y]_n \subset \mathfrak{a}$, pour $n \geq 3$. Alors $\{x^3, y^n\} = 3nx^2y^{n-1} \in \mathfrak{a}$, donc $\mathbb{C}[x, y]_{n+1} \subset \mathfrak{a}$. Par récurrence, on a ainsi $\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}[x, y]_n \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} = \mathbb{C}[x, y]$. Ainsi, $(\mathbb{C}[x, y], \{\cdot, \cdot\})$ est une algèbre de Lie de type fini : par exemple, les éléments de $\mathbb{C}[x, y]_{\leq 2}$ auxquels on ajoute n'importe quel polynôme de degré strictement supérieur à 2, en forment un système générateur.

Ainsi, par la proposition 2.2.7, $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] = \mathbb{C}[x_1, y_1] \otimes \dots \otimes \mathbb{C}[x_n, y_n]$ est une algèbre de Poisson qui est de type fini comme algèbre de Lie, engendrée par exemple par ses éléments de degré au plus $3n$. Cependant, il existe dans cette situation un résultat plus précis, qui donne un système générateur minimal.

PROPOSITION 4.1.1

L'algèbre de Lie $(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n], \{\cdot, \cdot\})$, où $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet de Poisson symplectique, admet un système générateur de cardinal 2.

Démonstration : Nous allons utiliser les propriétés suivantes :

- $\text{ad } x_i = \{x_i, \cdot\} = \partial/\partial y_i$, noté ∂_{y_i} ; et $\text{ad } (-y_i) = \{-y_i, \cdot\} = \partial/\partial x_i$, noté ∂_{x_i} ,
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]_2$ est une sous-algèbre de Lie, qui est une copie de $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, et chaque composante homogène $\mathbb{C}[x_1, \dots, y_1, x_n, \dots, y_n]_k$ est une représentation irréductible de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]_2$ pour l'action adjointe (voir [FH91] prop.24.22).

On pose alors

$$H = - \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$T = x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) + \sum_{i=1}^n (x_i^{i+2} + y_i^{i+2}).$$

L'action adjointe de H sur $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ est donnée par

$$\{H, \cdot\} = \sum_{i=1}^n (x_i \partial_{x_i} - y_i \partial_{y_i})$$

On note $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de Lie de $(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n], \{\cdot, \cdot\})$ engendrée par H et T , et on va montrer que $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$.

D'abord, T est une somme de vecteurs propres pour l'action adjointe de H associés à des valeurs propres distinctes donnés par le tableau suivant :

Vecteur propre	$X := \sum_{i=1}^n x_i$	$Y := \sum_{i=1}^n y_i$	$X_1 := x_1^3$	$Y_1 := y_1^3$	...	$X_n := x_n^{n+2}$	$Y_n := y_n^{n+2}$	$Z := \prod_{i=1}^n x_i y_i$
Valeur propre	+1	-1	+3	-3	...	+(n+2)	-(n+2)	0

L'action répétée de H sur T permet donc de former un système de taille $2n+3$

$$\begin{aligned}
T &= X && +Y && + \sum_{i=1}^n X_i && + \sum_{i=1}^n Y_i + Z \\
\{H, T\} &= X && +(-1)Y && + \sum_{i=1}^n (i+2)X_i && + \sum_{i=1}^n (-(i+2))Y_i + 0 \\
\{H, \{H, T\}\} &= X && +(-1)^2 Y && + \sum_{i=1}^n (i+2)^2 X_i && + \sum_{i=1}^n (-(i+2))^2 Y_i + 0 \\
&\vdots \\
(\text{ad} H)^{2n+2}(T) &= X && +(-1)^{2n+2} Y && + \sum_{i=1}^n (i+2)^{2n+2} X_i && + \sum_{i=1}^n (-(i+2))^{2n+2} Y_i + 0
\end{aligned}$$

dont les inconnues sont les vecteurs propres précédents, et dont le déterminant est un déterminant de Vandermonde. Ainsi, le système est inversible, et chacun des vecteurs du tableau est combinaison linéaire des $(\text{ad} H)^i(T)$, pour $0 \leq i \leq 2n+2$ qui sont des éléments de $\mathfrak{A}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{A}$ engendrée par H et T contient donc chacun de ces vecteurs.

- On a ensuite $\text{ad} X = \text{ad}(x_1 + \dots + x_n) = \partial_{y_1} + \dots + \partial_{y_n}$ et $-\text{ad} Y = -\text{ad}(y_1 + \dots + y_n) = \partial_{x_1} + \dots + \partial_{x_n}$, donc par l'action adjointe de ces éléments sur $x_1^3, y_1^3, \dots, x_n^{n+2}, y_n^{n+2}$, on obtient tous les x_i, y_i et x_i^2, y_i^2 .
- Par l'action adjointe répétée des x_i et y_j sur $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_n y_n$, on obtient finalement tous les autres monômes de degré ≤ 2 , et $\mathfrak{A}$ contient a fortiori une copie de $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$.
- Maintenant, $\mathfrak{A}$ contient un monôme de degré 3, et la composante homogène de degré 3 est une représentation irréductible pour $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, donc $\mathfrak{A}$ contient toute la composante homogène de degré 3.
- $\{x_1^3, y_1^3\} = 6x_1^2 y_1^2$, donc $\mathfrak{A}$ contient la composante homogène de degré 4.
- $\{x_1^3, y_1^j\} = 3j x_1^2 y_1^{j-1}$, donc par récurrence, $\mathfrak{A}$ contient la composante de degré j , pour tout j .

En conclusion, $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ est bien engendrée comme algèbre de Lie par les 2 éléments H et T .

□

Les algèbres de Poisson symplectiques étant des algèbres de Lie de type fini, on s'intéresse maintenant à leurs algèbres d'invariants sous l'action de groupes finis d'automorphismes de Poisson. Soit G un sous-groupe fini de $GL(V)$. Il est clair que G respecte le crochet de Poisson symplectique si et seulement si G est un sous-groupe du groupe symplectique $Sp(V)$.

4.2 Déformation par les algèbres de Weyl

On étudiera dans ce chapitre une déformation naturelle des algèbres de Poisson symplectiques, qui est celle fournie par les algèbres de Weyl. On considère l'algèbre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ munie du crochet de Poisson symplectique défini précédemment, donné par

$$\{x_i, y_j\} = \delta_{i,j}.$$

Considérons l'algèbre de Weyl $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. On peut voir cette algèbre non commutative comme le quotient de l'algèbre tensorielle de l'espace $\mathbb{C}^{2n}$ défini par

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) = \frac{T(\mathbb{C}^{2n})}{I}, \quad \text{où } I = \left(\begin{array}{l} x_i \otimes y_i - y_i \otimes x_i - 1 \\ x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i \\ x_i \otimes y_j - y_j \otimes x_i \\ y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i \end{array} \right), i \neq j$$

On notera respectivement ∂_{z_i} et z_i les classes de x_i et y_i dans ce quotient. Les monômes ordonnés en z_i, ∂_{z_i} forment alors une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de l'algèbre de Weyl. On définit sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ la filtration dite de Bernstein :

$$\mathcal{F}_m = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} \partial_{z_1}^{j_1} \dots \partial_{z_n}^{j_n} / i_1 + \dots + i_n + j_1 + j_n \leq m)$$

Par récurrence, il est clair que :

$$\mathcal{F}_m \mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_{m+p}$$

$$[\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_p] \subset \mathcal{F}_{m+p-1}$$

Alors $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{C}))$ est muni d'une structure de Poisson par les formules de la définition 2.4.1, et l'application :

$$x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n} \mapsto z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} \partial_{z_1}^{j_1} \dots \partial_{z_n}^{j_n} + \mathcal{F}_{i_1 + \dots + i_n + j_1 + j_n - 1}$$

est un isomorphisme de Poisson entre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ et $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{C}))$. Ainsi, l'algèbre de Weyl est une déformation algébrique non commutative de l'algèbre symplectique.

Soit maintenant G un sous-groupe fini du groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{C})$. G agit sur l'algèbre tensorielle $T(\mathbb{C}^{2n})$ par automorphismes d'algèbre non commutative, et l'idéal I est stable par l'action de G . G agit donc sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ par automorphismes d'algèbre non commutative, et chaque sous-espace $\mathcal{F}_m$ est stable sous l'action de G , ce qui implique que G agit sur chacun des espaces $\mathcal{F}_m / \mathcal{F}_{m-1}$.

L'isomorphisme de Poisson entre $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ et $gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{C}))$ est finalement aussi un morphisme de G -modules. On en déduit un isomorphisme entre les algèbres d'invariants

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]^G \simeq (gr_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{C})))^G,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]^G \simeq \left(\bigoplus_{m \geq 0} \frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{F}_{m-1}} \right)^G \simeq \bigoplus_{m \geq 0} \left(\frac{\mathcal{F}_m}{\mathcal{F}_{m-1}} \right)^G \bigoplus_{m \geq 0} \frac{\mathcal{F}_m^G}{\mathcal{F}_{m-1}^G} \text{ (lemme 2.4.3).}$$

Ainsi, les espaces $\mathcal{F}_m^G = \mathcal{F}_m \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$ forment une filtration $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$, pour laquelle on a :

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]^G \cong \text{gr}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G)$$

en tant qu'algèbres de Poisson, ce qui signifie que l'algèbre d'invariants de l'algèbre de Weyl est une déformation algébrique non commutative de l'algèbre d'invariants de l'algèbre de Poisson symplectique. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} V & \rightsquigarrow & \mathcal{O}(V) & \xrightarrow{\text{deform.}} & \mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \\ \pi \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ V/G & \rightsquigarrow & \mathcal{O}(V/G) & \xrightarrow{\text{deform.}} & \mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G \\ & & \parallel & & \\ & & \mathcal{O}(V)^G & & \end{array}$$

Il est alors possible de calculer la dimension des espaces d'homologie de Hochschild de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$ grâce à un résultat dû à J.Alev, M.A.Farinati, T.Lambre, et A.L.Solotar ([AFLS00])

THÉORÈME 4.2.1

Pour $j \in \mathbb{N}$, on désigne par $a_j(G)$ le nombre de classes de conjugaison d'éléments de G ayant la valeur propre 1 avec la multiplicité j . Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} HH_j(\mathcal{A}_n^G) = a_j(G)$$

Ce résultat nous permet dans la suite de faire une comparaison entre la dimension du groupe d'homologie de Poisson en degré 0 d'une sous-algèbre d'invariants d'une algèbre de Poisson symplectique et la dimension du zéro-ième groupe d'homologie de Hochschild de sa déformation par l'algèbre d'invariants correspondante de l'algèbre de Weyl.

4.3 Surfaces de Klein

4.3.1 Construction

Un exemple classique à étudier est celui des singularités de Klein $\mathbb{C}^2/G$ associées aux sous-groupes finis $G \subset SL(2, \mathbb{C})$. Ces variétés sont d'une grande importance en géométrie algébrique, théorie des singularités et autres branches des mathématiques. Une des grandes découvertes concernant ces singularités est la correspondance de McKay, qui permet d'associer à chacune de ces surfaces, ainsi qu'à chaque sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$, un diagramme de Dynkin simplement lacé, c'est-à-dire un diagramme de type A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 , ou E_8 .

La classification des sous-groupes finis de $SL(2, \mathbb{C})$, à isomorphisme près, est donnée par :

A_{n-1} : Le sous-groupe cyclique d'ordre n , engendré par :

$$\rho_n := \begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & r_n^{-1} \end{pmatrix}$$

où r_n est une racine primitive n -ème de l'unité.

D_n : Le groupe dihédral binaire : c'est le sous-groupe d'ordre $4n$, engendré par ρ_{2n} et :

$$\mu := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

E_6 : Le groupe tétraédral binaire : c'est le sous-groupe d'ordre 24, engendré par ρ_4 , μ et :

$$\eta_8 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} r_8^7 & r_8^7 \\ r_8^5 & r_8 \end{pmatrix}.$$

E_7 : Le groupe octaédral binaire : c'est le sous-groupe d'ordre 48, engendré par ρ_8 , μ et η_8 .

E_8 : Le groupe icosaédral binaire : c'est le sous-groupe d'ordre 120, engendré par :

$$\phi_5 := \begin{pmatrix} -r_5^3 & 0 \\ 0 & -r_5^2 \end{pmatrix}, \quad \nu := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\psi_5 := \frac{1}{r_5^2 - r_5^{-2}} \begin{pmatrix} r_5 + r_5^{-1} & 1 \\ 1 & -r_5 - r_5^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'algèbre des fonctions sur $\mathbb{C}^2/G$ peut être identifiée à $\mathbb{C}[x, y]^G$, l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{C}^2$, invariantes sous l'action de G .

Pour chaque sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{C})$, $\mathbb{C}[x, y]^G$ est une algèbre associative de type fini, engendrée par trois éléments homogènes g_1, g_2, g_3 , qui vérifient une relation. Dans le tableau suivant, on donne ces générateurs homogènes, et les coefficients de la relation donnée ont été simplifiés, ce qui revient à multiplier les générateurs par des scalaires non nuls (voir [Spr77]) :

G	Générateurs	Relation
A_{n-1}	$g_1 = xy, g_2 = x^n, g_3 = y^n$	$F = X_1^n - X_2 X_3$
D_{n+2}	$g_1 = x^2 y^2, g_2 = x^{2n} + (-1)^n y^{2n},$ $g_3 = x^{2n+1} y - (-1)^n x y^{2n+1}$	$F = X_1^{n+1} + X_1 X_2^2 + X_3^2$
E_6	$g_1 = xy^5 - x^5 y, g_2 = x^8 + 14x^4 y^4 + y^8,$ $g_3 = x^{12} - 33x^8 y^4 - 33x^4 y^8 + y^{12}$	$F = X_1^4 + X_2^3 + X_3^2$
E_7	$g_1 = x^8 + 14x^4 y^4 + y^8, g_2 = x^{10} y^2 - 2x^6 y^6 + x^2 y^{10},$ $g_3 = x^{17} y - 34x^{13} y^5 + 34x^5 y^{13} - x y^{17}$	$F = X_1^3 X_2 + X_2^3 + X_3^2$
E_8	$g_1 = x^{11} y + 11x^6 y^6 - x y^{11},$ $g_2 = x^{20} - 228x^{15} y^5 + 494x^{10} y^{10} + 228x^5 y^{15} + y^{20},$ $g_3 = y^{30} + 522x^{25} y^5 - 10005x^{20} y^{10}$ $- 10005x^{10} y^{20} - 522x^5 y^{25} + y^{30}.$	$F = X_1^5 + X_2^3 + X_3^2$

Le morphisme d'algèbres surjectif

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3] &\rightarrow \mathbb{C}[x, y]^G \\ X_1 &\mapsto g_1 \\ X_2 &\mapsto g_2 \\ X_3 &\mapsto g_3\end{aligned}$$

induit un morphisme surjectif de $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)}$ sur $\mathbb{C}[x, y]^G$. Dans chaque cas, F étant un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$, on en déduit que $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)}$ est de dimension de Krull 2. L'algèbre $\mathbb{C}[x, y]^G$ étant de dimension de Krull 2, le morphisme précédent s'avère être un isomorphisme :

$$\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)} \cong \mathbb{C}[x, y]^G$$

C'est de plus un isomorphisme d'algèbres graduées. En effet, $\mathbb{C}[x, y]$ étant une algèbre graduée, la sous-algèbre $\mathbb{C}[x, y]^G$ est graduée, et les g_i sont des polynômes homogènes, donc si l'on pondère les indéterminées X_i par les poids $w_i = \deg(g_i)$, le morphisme d'algèbres $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3] \rightarrow \mathbb{C}[x, y]^G$ est un morphisme d'algèbres graduées. Le polynôme F étant homogène par rapport à cette graduation, la graduation sur $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ induit une graduation sur $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)}$, définie par :

$$\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \{P + (F); P \text{ est homogène de poids } j\},$$

pour laquelle l'isomorphisme $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)} \cong \mathbb{C}[x, y]^G$ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

4.3.2 Structure de Poisson jacobienne

D'une part, la structure symplectique de $\mathbb{C}^2$ permet de munir naturellement $\mathbb{C}[x, y]$ d'un crochet de Poisson :

$$\{x, y\} = 1$$

Le groupe spécial linéaire $SL(2, \mathbb{C})$ correspondant au groupe symplectique $Sp(2, \mathbb{C})$, l'action du groupe fini $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ respecte le crochet de Poisson. Ainsi, l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ est munie d'une structure de Poisson induite.

D'autre part, le polynôme F permet de munir $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ d'un crochet de Poisson déterminantiel, ou jacobien

$$\{P, Q\} = \det(\vec{\nabla} P, \vec{\nabla} Q, \vec{\nabla} F)$$

(F) étant un idéal de Poisson, ce crochet induit une structure d'algèbre de Poisson sur le quotient $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/(F)$. À une constante multiplicative près, on constate que l'isomorphisme $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)} \cong \mathbb{C}[x, y]^G$ est en fait un isomorphisme d'algèbres de Poisson.

En utilisant la structure de Poisson déterminantielle sur $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/(F)$, et le fait que F est un polynôme quasi-homogène, J.Alev et T.Lambre [AL98] ont démontré l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

$$HP_0\left(\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)}\right) \simeq \frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F'_1, F'_2, F'_3)}.$$

Ce résultat nous permet de calculer la dimension du groupe d'homologie de Poisson en degré 0 pour chaque singularité en calculant la dimension de l'espace $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/(F'_1, F'_2, F'_3)$, appelée nombre de Milnor de la singularité.

G	F	$\dim_{\mathbb{C}}(HP_0(\mathbb{C}[x, y]^G))$
A_{n-1}	$X_1^n - X_2 X_3$	$n - 1$
D_{n+2}	$X_1^{n+1} + X_1 X_2^2 + X_3^2$	$n + 2$
E_6	$X_1^4 + X_2^3 + X_3^2$	6
E_7	$X_1^3 X_2 + X_2^3 + X_3^2$	7
E_8	$X_1^5 + X_2^3 + X_3^2$	8

Chacune de ces dimensions correspond à la dimension du groupe d'homologie de Hochschild en degré 0 de la déformation $A_1(\mathbb{C})^G$ correspondante, ainsi qu'au rang du diagramme de Dynkin associé à G dans la correspondance de McKay, qui est le nombre de Milnor de la singularité de la surface définie par le polynôme F .

4.3.3 Finitude de la structure de Lie

Pour tout sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$, l'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[x, y]^G$ s'identifie d'après le paragraphe précédent à une algèbre du type $H := \frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)}$, où F est un polynôme de poids homogène p à singularité isolée à l'origine, H étant munie du crochet de Poisson déterminantiel associé à F :

$$\begin{aligned} \{P, Q\} &:= \frac{dP \wedge dQ \wedge dF}{dX_1 \wedge dX_2 \wedge dX_3} \\ &= (P'_2 Q'_3 - P'_3 Q'_2) F'_1 + (P'_3 Q'_1 - P'_1 Q'_3) F'_2 + (P'_1 Q'_2 - P'_2 Q'_1) F'_3. \end{aligned}$$

On rappelle que w_1, w_2, w_3 sont les poids respectifs de X_1, X_2 , et X_3 . Alors dans tous les cas, on constate les propriétés suivantes :

- $p = 2\max(w_i)$,
- le quotient $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F'_1, F'_2, F'_3)}$ possède une base $(\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m)$ où chaque P_i est de poids au plus égal à $p - 4$.

G	F	Poids	base de $\frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F'_1, F'_2, F'_3)}$
A_{n-1} $n \geq 2$	$X_1^n - X_2 X_3$	$w_1 = 2, w_2 = n, w_3 = n$ $p = 2n$	$(1, X_1, X_1^2, \dots, X_1^{n-2})$
D_n $n \geq 2$	$X_1^{n+1} + X_1 X_2^2 + X_3^2$	$w_1 = 4, w_2 = 2n, w_3 = 2n + 2$ $p = 4n + 4$	$(X_2, 1, X_1, X_1^2, \dots, X_1^n)$
E_6	$X_1^4 + X_2^3 + X_3^2$	$w_1 = 6, w_2 = 8, w_3 = 12$ $p = 24$	$(1, X_2, X_1, X_1 X_2, X_1^2, X_1^2 X_2)$
E_7	$X_1^3 X_2 + X_2^3 + X_3^2$	$w_1 = 8, w_2 = 12, w_3 = 18$ $p = 36$	$(1, X_2, X_1 X_2, X_1, X_1^2, X_1^3, X_1^4)$
E_8	$X_1^5 + X_2^3 + X_3^2$	$w_1 = 12, w_2 = 20, w_3 = 30$ $p = 60$	$(1, X_2, X_1, X_1 X_2, X_1^2, X_1^2 X_2, X_1^3, X_1^3 X_2)$

PROPOSITION 4.3.1

L'algèbre quotient $H = \frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]}{(F)}$ est une algèbre de Lie de type fini, engendrée par ses éléments de degré inférieur ou égal à p .

Démonstration : On note $w(P)$ le poids d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$.

Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de Lie de H engendrée par les éléments de la forme $P + (F)$, avec $w(P) \leq p$. On montre que pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$, $P + (F)$ est dans $\mathcal{A}$ en procédant par récurrence sur le poids de P .

Si P est de poids inférieur à p , le résultat est évident.

Soit donc $D > p$. On suppose que pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ tel que $w(P) < D$, $P + (F) \in \mathcal{A}$. Soit maintenant P de poids D . On peut écrire P sous la forme :

$$P = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m + Q_1 F'_1 + Q_2 F'_2 + Q_3 F'_3,$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ et $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$. F étant de poids homogène p , F'_1, F'_2 , et F'_3 sont de poids homogènes respectifs $p - w_1, p - w_2, p - w_3$. De plus, $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m$ est de poids inférieur ou égal à $p - 4$. On peut donc choisir Q_1, Q_2 , et Q_3 tels que $w(Q_i F'_i) \leq D$. En effet, si on note Q_i^j la composante homogène de poids j du polynôme Q_i , alors

$$\underbrace{P}_{\text{de poids } D} = \underbrace{\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m}_{\text{de poids } \leq p-4 < D} + \sum_{k=0}^{\max(w(Q_i F'_i))} (Q_1^{k-p+w_1} F'_1 + Q_2^{k-p+w_2} F'_2 + Q_3^{k-p+w_3} F'_3)$$

et pour $k > D$, on a donc $(Q_1^{k-p+w_1} F'_1 + Q_2^{k-p+w_2} F'_2 + Q_3^{k-p+w_3} F'_3) = 0$.

Ainsi,

$$\underbrace{P}_{\text{de poids } D} = \underbrace{\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m}_{\text{de poids } \leq p-4 < D} + \sum_{k=0}^D (Q_1^{k-p+w_1} F'_1 + Q_2^{k-p+w_2} F'_2 + Q_3^{k-p+w_3} F'_3)$$

Maintenant, comme $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m + (F) + \sum_{k=0}^{D-1} (Q_1^{k-p+w_1} F'_1 + Q_2^{k-p+w_2} F'_2 +$

$Q_3^{k-p+w_3} F'_3) \in \mathcal{A}$ par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que chaque $Q_i F'_i + (F)$ est dans $\mathcal{A}$, lorsque Q_i est homogène de poids $D - p + w_i$. Pour des raisons de

symétrie et de linéarité, il suffit de le montrer pour $i = 1$, et pour Q_i monôme, donc pour tout élément de la forme $X_1^a X_2^b X_3^c F_1'$ avec $aw_1 + bw_2 + cw_3 = D - p + w_1$. L'identité d'Euler appliquée au polynôme F de poids homogène p donne :

$$w_1 X_1 F_1' + w_2 X_2 F_2' + w_3 X_3 F_3' = pF$$

- Si $a, b, c > 0$:

$$\begin{aligned} \{X_2^2, X_1^a X_2^{b-1} X_3^{c+1}\} &= 2(c+1)X_1^a X_2^b X_3^c F_1' - 2aX_1^{a-1} X_2^b X_3^{c+1} F_3' \\ \{X_1^a X_2^{b+1} X_3^{c-1}, X_3^2\} &= 2(b+1)X_1^a X_2^b X_3^c F_1' - 2aX_1^{a-1} X_2^{b+1} X_3^c F_2' \end{aligned}$$

Et avec l'identité d'Euler :

$$pX_1^{a-1} X_2^b X_3^c F = w_1 X_1^a X_2^b X_3^c F_1' + w_2 X_1^{a-1} X_2^{b+1} X_3^c F_2' + w_3 X_1^{a-1} X_2^b X_3^{c+1} F_3'$$

Les trois égalités qui précèdent forment un système linéaire en les inconnues $X_1^a X_2^b X_3^c F_1'$, $X_1^{a-1} X_2^{b+1} X_3^c F_2'$, et $X_1^{a-1} X_2^b X_3^{c+1} F_3'$ de déterminant

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 2(c+1) & 0 & -2a \\ 2(b+1) & -2a & 0 \end{vmatrix} = -4a(aw_1 + (b+1)w_2 + (c+1)w_3) < 0$$

Donc $X_1^a X_2^b X_3^c F_1'$ est une combinaison linéaire de $X_1^{a-1} X_2^b X_3^c F$, $\{X_2^2, X_1^a X_2^{b-1} X_3^{c+1}\}$, et $\{X_1^a X_2^{b+1} X_3^{c-1}, X_3^2\}$.

Comme $w(X_2^2) = 2w_2 \leq p$, on a $X_2^2 + (F) \in \mathcal{A}$. De plus,

$$\begin{aligned} w(X_1^a X_2^{b-1} X_3^{c+1}) &= aw_1 + bw_2 + cw_3 + w_3 - w_2 \\ &< aw_1 + bw_2 + cw_3 + p - w_1 = w(X_1^a X_2^b X_3^c F_1') = D \end{aligned}$$

Donc, par hypothèse de récurrence, $X_1^a X_2^{b-1} X_3^{c+1} + (F) \in \mathcal{A}$.

Ainsi, $\{X_2^2, X_1^a X_2^{b-1} X_3^{c+1}\} + (F) \in \mathcal{A}$, et de la même manière, $\{X_1^a X_2^{b+1} X_3^{c-1}, X_3^2\} + (F) \in \mathcal{A}$ et finalement, $X_1^a X_2^b X_3^c F_1' + (F) \in \mathcal{A}$.

- Si $a > 0$ et $c = 0$: (on traite de manière similaire le cas $a > 0$ et $b = 0$)

$$\begin{aligned} \{X_1^{a-1} X_2^{b+1}, X_1 X_3\} &= (b+1)X_1^a X_2^b F_1' - (a-1)X_1^{a-1} X_2^{b+1} F_2' - (b+1)X_1^{a-1} X_2^b X_3 F_3' \\ \{X_1^a X_2^b, X_2 X_3\} &= bX_1^a X_2^b F_1' - aX_1^{a-1} X_2^{b+1} F_2' + aX_1^{a-1} X_2^b X_3 F_3' \end{aligned}$$

Et avec l'identité d'Euler :

$$pX_1^{a-1} X_2^b F = w_1 X_1^a X_2^b F_1' + w_2 X_1^{a-1} X_2^{b+1} F_2' + w_3 X_1^{a-1} X_2^b X_3 F_3'$$

Les trois égalités qui précèdent forment un système linéaire en les inconnues $X_1^a X_2^b F_1'$, $X_1^{a-1} X_2^{b+1} F_2'$, et $X_1^{a-1} X_2^b X_3 F_3'$ de déterminant

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ b+1 & -(a-1) & -(b+1) \\ b & -a & +a \end{vmatrix} = -(a+b)(aw_1 + (b+1)w_2 + w_3) < 0$$

Donc $X_1^a X_2^b F_1'$ est une combinaison linéaire de $X_1^{a-1} X_2^b F$, $\{X_1^{a-1} X_2^{b+1}, X_1 X_3\}$, et $\{X_1^a X_2^b, X_2 X_3\}$. Comme dans le cas précédent, on en conclut que $X_1^a X_2^b F_1' + (F) \in \mathcal{A}$.

- Si $a = 0$, alors F'_1 est de poids inférieur à p et $F'_1 + (F) \in \mathcal{A}$. Donc on suppose $b > 0$ (le cas $c > 0$ se traite de manière similaire).

$$X_2^b X_3^c F'_1 = \frac{1}{2(c+1)} \{X_2^2, X_2^{b-1} X_3^{c+1}\}$$

Et donc par hypothèse de récurrence, $X_2^b X_3^c F'_1 + (F) \in \mathcal{A}$.

Donc par récurrence, pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$, $P + (F)$ est dans $\mathcal{A}$, d'où $H = \mathcal{A}$.

□

4.3.4 Engendrement particulier

Dans cette partie, on démontre d'une autre manière la propriété de finitude de l'algèbre de Lie $(\mathbb{C}[x, y]^G, \{\cdot, \cdot\})$ en démontrant une propriété plus forte. La preuve de cette propriété utilise des idées du théorème de Noether en théorie des invariants des algèbres associatives, que l'on adapte au cas des algèbres de Lie.

PROPOSITION 4.3.2

Il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie de V_0 de $\mathbb{C}[x, y]^G$, et un sous-espace vectoriel de dimension finie V_1 de $\mathbb{C}[x, y]$ tels que l'action adjointe itérée de V_0 sur V_1 engendre toute l'algèbre de Lie $\mathbb{C}[x, y]$. En d'autres termes, si on pose, pour $k \geq 1$, $V_{k+1} = \{V_0, V_k\}$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} V_k = \mathbb{C}[x, y]$.

Ici, G est toujours un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$. La démonstration de ce résultat se fait au cas par cas, par des calculs explicites : dans la plupart des cas, V_0 est engendré par des générateurs g_i de $\mathbb{C}[x, y]^G$ comme algèbre associative, et V_1 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x, y]$ engendré par ses éléments de degré $\leq N$, où N est un entier fixé choisi dans chaque cas.

Démonstration : On note donc $\mathcal{A} = \sum_1^{\infty} V_k$, avec $V_{k+1} = \{V_0, V_k\}$, ainsi $\{V_0, \mathcal{A}\} \subset$

$\mathcal{A}$. Il reste donc à exhiber V_0 et N tels que l'égalité $\mathbb{C}[x, y] = \mathcal{A}$ soit vérifiée.

Cas A_n ($n \geq 1$) : On a les formules suivantes :

$$\{x^2 y^2, x^{p-1} y^{q-1}\} = 2(q-p)x^p y^q \quad \forall p, q \geq 1 \quad (4.1)$$

$$\{x^{n+2} y, x^{p-n-1} y^q\} = [(n+2)q - p + n + 1]x^p y^q \quad \forall p \geq n+1 \quad (4.2)$$

$$\{xy^{n+2}, x^p y^{q-n-1}\} = [q - n - 1 - (n+2)p]x^p y^q \quad \forall q \geq n+1 \quad (4.3)$$

On choisit alors $V_0 = Vect(x^2 y^2; x^{n+2} y; xy^{n+2})$ et $N = 2n$.

Par récurrence sur le degré total $d = p + q$, on montre facilement que tous les monômes $x^p y^q$ sont dans $\mathcal{A}$:

- Si $d \leq 2n$, alors $x^p y^q \in V_1 \subset \mathcal{A}$.
- Supposons que $d > 2n$ et que tout monôme de degré $< d$ est dans $\mathcal{A}$, alors :
 - * Si $p = 0$, alors $q = d > 2n \geq n+1$, donc le coefficient $q - n - 1 - (n+2)p = q - n - 1$ est non nul et par (4.3), $y^d \in \mathcal{A}$. Si $q = 0$, on utilise (4.2) de manière similaire.
 - * Si $p \neq q$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on utilise l'égalité (4.1).
 - * Si $p = q$, alors $p = q \geq n+1$, et le coefficient $(n+2)q - p + n + 1 = (n+1)(p+1)$ est non nul, donc on utilise (4.2).

Cas D_n ($n \geq 4$) : On a les formules suivantes :

$$\{x^{2n-4} + (-1)^n y^{2n-4}, x^{p+1} y^{q-2n+5}\} = (2n-4)(q-2n+5)x^{p+2n-4} y^{q-2n+4} - (-1)^n (2n-4)(p+1)x^p y^q \quad (4.4)$$

$$\{x^2 y^2, x^{p-1} y^{q-1}\} = 2(q-p)x^p y^q \quad (4.5)$$

On choisit $V_0 = Vect(x^2 y^2; x^{2n-4} + (-1)^n y^{2n-4})$ et $N = 4n - 8$.

Par récurrence sur le degré total $d = p + q$, on montre alors que tous les monômes $x^p y^q$ sont dans $\mathcal{A}$:

- Si $d \leq N$, alors $x^p y^q \in V_1 \subset \mathcal{A}$.
- Supposons que $d > N$ et que tout monôme de degré $< d$ est dans $\mathcal{A}$, alors :
 - ★ Si $p \neq q$ avec $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on la formule (4.5) prouve que $x^p y^q \in \mathcal{A}$.
 - ★ Si $p = q$, avec $p + q > N$, alors $p = q > 2n - 4$, donc $x^{p+2n-4} y^{p-2n+4} \in \mathcal{A}$ par le cas précédent, donc (4.4) montre que $x^p y^q \in \mathcal{A}$ également.
 - ★ Si $p = 0$ alors $q = d > 4n - 8$, donc

$$p + 2n - 4 = 2n - 4 \leq 1, \text{ et } q - 2n + 4 > 2n - 4,$$

donc $x^{2n-4} y^{d-2n+4} \in \mathcal{A}$ par le premier cas, et (4.4) montre que y^d est dans $\mathcal{A}$ également. Le cas $q = 0$ se traite de manière similaire.

Cas E_6 : On choisit $V_0 = Vect(g_1, g_2)$, avec $g_1 = xy^5 - x^5 y$ et $g_2 = x^8 + 14x^4 y^4 + y^8$. On a les égalités suivantes, pour $p \geq 0$ et $q \geq 8$:

$$\begin{aligned} \{g_1, x^{p+4} y^{q-8}\} &= (5q - p - 44)x^{p+8} y^{q-8} - (q - 5p - 28)x^{p+4} y^{q-4} \\ \{g_1, x^p y^{q-4}\} &= (5q - p - 20)x^{p+4} y^{q-4} - (q - 5p - 4)x^p y^q \\ \{g_2, x^{p+1} y^{q-7}\} &= 8(q - 7)x^{p+8} y^{q-8} + 56(q - p - 8)x^{p+4} y^{q-4} - 8(p + 1)x^p y^q \end{aligned}$$

Pour $p \in \{0; \dots; 3\}$ fixé, les égalités précédentes forment un système en $x^{p+8} y^{q-8}$, $x^{p+4} y^{q-4}$, $x^p y^q$, dont le déterminant $D_p(q)$ est un polynôme en q non nul, donc il existe un entier naturel N_p tel que pour tout $q > N_p$, $D_p(q) \neq 0$ et le système est inversible. On pose alors $N = \max(10; N_0; 1 + N_1; 2 + N_2; 3 + N_3)$. On montre par récurrence sur le degré total $p + q = d$ que tous les monômes $x^p y^q$ sont dans $\mathcal{A}$.

- Si $d \leq N$, alors $x^p y^q \in V_1 \subset \mathcal{A}$.
- Supposons que $d > N$ et que tout monôme de degré $< d$ est dans $\mathcal{A}$, on procède alors par récurrence sur p .
 - ★ Si $p \in \{0; \dots; 3\}$, $p + q = d > N \geq p + N_p$ par définition de N , donc $q > N_p$, et le système précédent est inversible, donc $x^{p+8} y^{q-8}$, $x^{p+4} y^{q-4}$, $x^p y^q \in \mathcal{A}$. En conclusion, $y^d, xy^{d-1}, \dots, x^{11} y^{d-11}$ sont dans $\mathcal{A}$.
 - ★ Maintenant, pour $p \geq 0$, et $q \geq 8$, la dernière ligne du système précédent montre que $x^{p+8} y^{q-8}$ est une combinaison linéaire des éléments $x^{p+4} y^{q-4}$, $x^p y^q$, et $\{g_2, x^{p+1} y^{q-7}\}$, car le coefficient $8(q-7)$ est non nul. Par récurrence sur p , tous les $x^p y^{d-p}$ sont donc dans $\mathcal{A}$.

Explicitement, on a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} D_0(q) &= 288(q-4)(q-8)(q-10) \\ D_1(q) &= 288(q-7)(q-9)(q-13) \\ D_2(q) &= 288(q-8)(q-10)(q-18) \\ D_3(q) &= 288(q-11)(q^2 - 32q + 199) \end{aligned}$$

Donc $N = \max(10; 10; 14; 20; 14) = 20$.

Cas E_7 : On choisit $V_0 = Vect(g_1, g_2)$, avec $g_1 = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$ et $g_2 = x^{10}y^2 - 2x^6y^6 + x^2y^{10}$. On a les égalités suivantes, pour $p \geq 1$ et $q \geq 13$:

Coefficient en	$\{g_1, x^{p+5}y^{q-11}\}$	$\{g_1, x^{p+1}y^{q-7}\}$	$\{g_2, x^{p+3}y^{q-13}\}$	$\{g_2, x^{p-1}y^{q-9}\}$
$x^{p+12}y^{q-12}$	$8(q-11)$	0	$2(5q-p-68)$	0
$x^{p+8}y^{q-8}$	$+56(q-p-16)$	$+8(q-7)$	$-12(q-p-16)$	$+2(5q-p-44)$
$x^{p+4}y^{q-4}$	$-8(p+5)$	$+56(q-p-8)$	$+2(q-5p-28)$	$-12(q-p-8)$
x^py^q	$+0$	$-8(p+1)$	$+0$	$+2(q-5p-4)$

On procède alors comme pour E_6 , en posant $N = \max(16; 1 + N_1; 2 + N_2; 3 + N_3; 4 + N_4)$. On montre par récurrence sur le degré total $p + q = d$ que tous les monômes x^py^q sont dans $\mathcal{A}$.

- Si $d \leq N$, alors $x^py^q \in V_1 \subset \mathcal{A}$.
- Supposons que $d > N$ et que tout monôme de degré $< d$ est dans $\mathcal{A}$, on procède alors par récurrence sur p , mais l'initialisation se fait pour $p \in \{1, \dots, 16\}$.
 - ★ Si $p \in \{1; \dots; 4\}$, $p + q = d > N \geq p + N_p$ par définition de N , donc $q > N_p$, et le système précédent est inversible, donc $x^{p+12}y^{q-12}$, $x^{p+8}y^{q-8}$, $x^{p+4}y^{q-4}$, $x^py^q \in \mathcal{A}$. En conclusion, xy^{d-1} , x^2y^{d-2} , ..., $x^{16}y^{d-16}$ sont dans $\mathcal{A}$.
 - ★ $p = 0$: $\{g_1, x^1y^{d-7}\} = 8(d-7)x^8y^{d-8} + 56(d-8)x^4y^{d-4} - 8y^d$, donc $y^d \in \mathcal{A}$.
 - ★ Maintenant, pour $p \geq 1$, et $q \geq 9$, la deuxième et la dernière équation du système précédent montrent que $x^{p+8}y^{q-8}$ est une combinaison linéaire des éléments $x^{p+4}y^{q-4}$, x^py^q , $\{g_1, x^{p+1}y^{q-7}\}$, et $\{g_2, x^{p-1}y^{q-9}\}$, car l'un au moins des coefficients $8(q-7)$ et $2(5q-p-44)$ est non nul. Par récurrence sur $p < d$, tous les x^py^{d-p} sont donc dans $\mathcal{A}$.
 - ★ Pour $p = d$: $\{g_1, x^{d-7}y^1\} = 8x^d + 56(-d+8)x^{d-4}y^4 - 8(d-7)x^{d-8}y^8$, donc $x^d \in \mathcal{A}$.

Explicitement, on a les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 D_1(q) &= 73728(q-9)(q-11)(q-13)(q-17) \\
 D_2(q) &= 73728(q-10)(q-14)(q-16)(q-18) \\
 D_3(q) &= 73728(q-11)(q-19)(q^2-36q+307) \\
 D_4(q) &= 73728(q-12)(q-14)(q-20)(q-28)
 \end{aligned}$$

Donc $N = \max(16; 18; 20; 22; 32) = 32$ convient.

Cas E_8 : On choisit $V_0 = Vect(g_1, g_2)$, avec $g_1 = x^{11}y + 11x^6y^6 - xy^{11}$ et $g_2 = x^{20} - 228x^{15}y^5 + 494x^{10}y^{10} + 228x^5y^{15} + y^{20}$.

Dans le tableau suivant, pour $p \geq 0$ et $q \geq 25$, la deuxième ligne donne le coefficient en $x^{p+25}y^{q-25}$ du crochet de Poisson de la première ligne, la troisième celui en $x^{p+20}y^{q-20}$, la quatrième celui en $x^{p+15}y^{q-15}$, la cinquième celui en $x^{p+10}y^{q-10}$, la sixième celui en $x^{p+5}y^{q-5}$, la dernière celui en x^py^q :

$\{g_1, x^{p+15}y^{q-25}\}$	$\{g_1, x^{p+10}y^{q-20}\}$	$\{g_1, x^{p+5}y^{q-15}\}$	$\{g_1, x^py^{q-10}\}$	$\{g_2, x^{p+6}y^{q-24}\}$	$\{g_2, x^{p+1}y^{q-19}\}$
$(11q-p-290)$	0	0	0	$(q-24)$	0
$66(q-p-40)$	$11q-p-230$	0	0	$-57(3q-p-78)$	$(q-19)$
$-q+11p+190$	$66(q-p-30)$	$11q-p-170$	0	$247(q-p-30)$	$-57(3q-p-58)$
0	$-q+11p+130$	$66(q-p-20)$	$11q-p-110$	$57(q-3p-42)$	$247(q-p-20)$
0	0	$-q+11p+70$	$66(q-p-10)$	$-(p+6)$	$57(q-3p-22)$
0	0	0	$-q+11p+10$	0	$-(p+1)$

On procède alors comme pour E_6 , en posant $N = \max(28; N_0; 1 + N_1; 2 + N_2; 3 + N_3; 4 + N_4)$. Explicitement, on a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} D_0(q) &= 6328125 \cdot 10^2 (q-10)(q-20)(q-24)(q-26)(q-28)(q-30) \\ D_1(q) &= 6328125 \cdot 10^2 (q-19)(q-21)(q-25)(q-27)(q-31)(q-33) \\ D_2(q) &= 6328125 \cdot 10^2 (q-22)(q-24)(q-26)(q-28)(q-32)(q-42) \\ D_3(q) &= 6328125 \cdot 10^2 (q-23)(q-25)(q-27)(q-31)(q-33)(q-53) \\ D_4(q) &= 6328125 \cdot 10^2 (q-24)(q-34)(q^4 - 152q^3 + 8164q^2 - 186768q + 1551360) \end{aligned}$$

où le polynôme $q^4 - 152q^3 + 8164q^2 - 186768q + 1551360$ ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}$. En effet, sa réduction modulo 7 est le polynôme $q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 6q + 6$, qui ne possède pas de racine dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Donc $N = \max(28; 30; 34; 44; 56; 38) = 56$ convient.

□

En conclusion, on a un sous-espace vectoriel de dimension finie V_0 de $\mathbb{C}[x, y]^G$, et un sous-espace vectoriel de dimension finie V_1 de $\mathbb{C}[x, y]$ tels que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} V_k = \mathbb{C}[x, y], \text{ avec } V_{k+1} = \{V_0, V_k\}.$$

On utilise alors l'opérateur de Reynolds $\rho_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ qui est une projection de $\mathbb{C}[x, y]$

sur $\mathbb{C}[x, y]^G$. Comme $\rho_G(V_{k+1}) = \{V_0, \rho_G(V_k)\}$, en appliquant ρ_G à l'égalité précédente, on conclut que $\mathbb{C}[x, y]^G$ est engendrée comme algèbre de Lie par les éléments de $V_0 + \rho_G(V_1)$. Excepté pour les cas des groupes A_1 et A_2 , $V_0 \subset \rho_G(V_1)$, donc $\mathbb{C}[x, y]^G$ est engendré par $\rho_G(V_1)$, qui est le sous-espace des invariants de degré $\leq N$, N étant l'entier déterminé dans la démonstration précédente.

Au cas par cas, on réduit maintenant le nombre des générateurs, afin de déterminer un système générateur de cardinal égal à la dimension du groupe d'homologie de Poisson de degré zéro. On aura ainsi obtenu un système générateur de cardinal minimal.

Cas A_n : Le cas du groupe A_1 est différent des autres cas, car alors le groupe d'homologie de Poisson en degré zéro de l'algèbre des invariants est de dimension 1, tandis qu'il faut au moins deux éléments pour engendrer une algèbre de Lie de dimension supérieure à 1.

- $\mathbb{C}[x, y]^{A_1}$ est engendrée comme algèbre de Lie par ses éléments de degré inférieur ou égal à 4, donc par $1 + xy, x^2 + y^2 + (xy)^2$:
On note $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie que $1 + xy$ et $x^2 + y^2 + (xy)^2$ engendrent. Les termes x^2, y^2 , et $(xy)^2$ sont des vecteurs propres pour l'action adjointe de $1 + xy$ associés à des valeurs propres distinctes, donc sont dans $\mathfrak{L}$. Ensuite, $\{x^2, y^2\} = 4xy$, donc $\mathfrak{L}$ contient xy et 1. Il reste à montrer qu'elle contient tous les invariants de degré 4. Or $\mathbb{C}[x, y]_4^{A_1} = \mathbb{C}[x, y]_4$ est une représentation irréductible de la copie de $\mathfrak{sl}(2)$ formée par les éléments x^2, y^2 , et xy , d'où le résultat.
- Par un raisonnement analogue, on montre que pour $n \geq 2$, $\mathbb{C}[x, y]^{A_n}$ est engendrée comme algèbre de Lie par les n éléments $1 + x^{n+1} + y^{n+1}, xy, (xy)^2, \dots, (xy)^{n-1}$.

Cas D_n ($n \geq 4$) : $\mathbb{C}[x, y]^{D_n}$ est engendrée par ses éléments de degré inférieur ou égal à $4n - 8$, qui sont les combinaisons linéaires des éléments suivants :

$$\begin{aligned} g_1 &= x^2 y^2; g_1^2; \dots; g_1^{n-2}; \\ g_2 &= x^{2n-4} + (-1)^n y^{2n-4}; g_1 g_2; \dots; g_1^{\lfloor \frac{n}{2}-1 \rfloor} g_2; \\ &\quad g_2^2 \\ g_3 &= x^{2n-3} y - (-1)^n x y^{2n-3}; g_1 g_3; \dots; g_1^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} g_3 \end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \{g_1^{m+1}, g_2\} &= -(4n-8)(m+1)g_1^m g_3, \quad \forall m \geq 0 \\ \{g_1^m, g_3\} &= -(4n-8)m g_1^m g_2, \quad \forall m \geq 0 \\ \{g_2, g_3\} &= (2n-4)g_2^2 + 2(-1)^{n+1}(2n-4)(2n-2)g_1^{n-2} \end{aligned}$$

Finalement, on constate que $\mathbb{C}[x, y]^{D_n}$ est engendrée par les n éléments $1; g_1; \dots; g_1^{n-2}; g_2$.

Cas E_6 : $\mathbb{C}[x, y]^{E_6}$ est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par ses éléments de degré inférieur ou égal à 20, que l'on détermine grâce aux générateurs g_1, g_2, g_3 en tant qu'algèbre associative :

$$\begin{aligned} 1 \\ g_1 &= x^5 y - x y^5 \\ g_2 &= x^8 + 14x^4 y^4 + y^8 \\ g_3 &= x^{12} - 33x^8 y^4 - 33x^4 y^8 + y^{12} \\ g_1^2 &= x^{10} y^2 - 2x^6 y^6 + x^2 y^{10} \\ g_1 g_2 &= x^{13} y + 13x^9 y^5 - 13x^5 y^9 - x y^{13} \\ g_2^2 &= x^{16} + 28x^{12} y^4 + 198x^8 y^8 + 28x^4 y^{12} + y^{16} \\ g_1 g_3 &= x^{17} y - 34x^{13} y^5 + 34x^9 y^9 - x y^{17} \\ g_1^3 &= x^{15} y^3 - 3x^{11} y^7 + 3x^7 y^{11} - x^3 y^{15} \\ g_2 g_3 &= x^{20} - 19x^{16} y^4 - 484x^{12} y^8 - 484x^8 y^{12} - 19x^4 y^{16} + y^{20} \\ g_1^2 g_2 &= x^{18} y^2 + 12x^{14} y^6 - 26x^{10} y^{10} + 12x^6 y^{14} + x^2 y^{18} \end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes :

$$\{g_1, g_2\} = -8g_3; \{g_1, g_3\} = -12g_2^2; \{g_1, g_1 g_2\} = -8g_1 g_3;$$

$$\{g_1, g_2^2\} = -16g_2 g_3; \{g_2, g_3\} = -1738g_1^3.$$

Finalement, les 6 éléments suivants : $1; g_1; g_2; g_1^2; g_1 g_2; g_1^2 g_2$ suffisent à engendrer $\mathbb{C}[x, y]^{E_6}$ comme algèbre de Lie.

Cas E_7 : $\mathbb{C}[x, y]^{E_7}$ est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par ses éléments de degré inférieur ou égal à 32, qui sont donnés par la liste suivante :

1

$$\begin{aligned}
g_1 &= x^8 + 14x^4y^4 + y^8 \\
g_2 &= x^{10}y^2 - 2x^6y^6 + x^2y^{10} \\
g_1^2 &= x^{16} + 28x^{12}y^4 + 198x^8y^8 + 28x^4y^{12} + y^{16} \\
g_3 &= x^{17}y - 34x^{13}y^5 + 34x^9y^{13} - xy^{17} \\
g_1g_2 &= x^{18}y^2 + 12x^{14}y^6 - 26x^{10}y^{10} + 12x^6y^{14} + x^2y^{18} \\
g_1^3 &= x^{24} + 42x^{20}y^4 + 591x^{16}y^8 + 2828x^{12}y^{12} + 591x^8y^{16} + 42x^4y^{20} + y^{24} \\
g_2^2 &= x^{20}y^4 - 4x^{16}y^8 + 6x^{12}y^{12} - 4x^8y^{16} + x^4y^{20} \\
g_1g_3 &= x^{25}y - 20x^{21}y^5 - 475x^{17}y^9 + 475x^{13}y^{13} + 20x^9y^{17} - xy^{25} \\
g_1^2g_2 &= x^{26}y^2 + 26x^{22}y^6 + 143x^{18}y^{10} - 340x^{14}y^{14} + 143x^{10}y^{18} + 26x^6y^{22} + x^2y^{26} \\
g_2g_3 &= x^{27}y^3 - 36x^{23}y^7 + 69x^{19}y^{11} - 69x^{15}y^{15} + 36x^{11}y^{19} - x^7y^{23} \\
g_1g_2^2 &= x^{28}y^4 + 10x^{24}y^8 - 49x^{20}y^{12} + 76x^{16}y^{16} - 49x^{12}y^{20} + 10x^8y^{24} + x^4y^{28} \\
g_1^4 &= x^{32} + 56x^{28}y^4 + 1180x^{24}y^8 + 11144x^{20}y^{12} + 40773x^{16}y^{16} \\
&\quad + 11144x^{12}y^{20} + 1180x^8y^{24} + 56x^4y^{28} + y^{32}
\end{aligned}$$

On a de plus les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\{g_1, g_2\} &= 16g_3; \{g_1, g_3\} = 8g_1^3 - 2592g_2^2; \{g_1, g_1g_2\} = 16g_1g_3 \\
\{g_1, g_2^2\} &= 32g_2g_3; \{g_1, g_1g_3\} = 8g_1^4 - 2592g_1g_2^2; \{g_2, g_3\} = -24g_1^2g_2
\end{aligned}$$

Finalement, les 7 éléments suivants : $1; g_1; g_1^2; g_2; g_1g_2; g_2^2; g_1g_2^2$ suffisent à engendrer $\mathbb{C}[x, y]^{E_7}$ comme algèbre de Lie.

Cas E_8 : $\mathbb{C}[x, y]^{E_8}$ est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par ses éléments de degré inférieur ou égal à 56, qui sont :

élément	1	g_1	g_2	g_1^2	g_3	g_1g_2	g_1^3	g_2^2
degré	0	12	20	24	30	32	36	40

élément	g_1g_3	$g_1^2g_2$	g_1^4	g_2g_3	$g_1g_2^2$	$g_1^2g_3$	$g_1^3g_2$
degré	42	44	48	50	52	54	56

On a de plus les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\{g_1, g_2\} &= -20g_3; \{g_1, g_3\} = -30g_2^2; \{g_1, g_1g_2\} = -20g_1g_3; \{g_1, g_2^2\} = -20g_2g_3 \\
\{g_1, g_1g_3\} &= -30g_1g_2^2; \{g_1, g_1^2g_2\} = -20g_1^2g_3; \{g_2, g_3\} = 86400g_1^4
\end{aligned}$$

Finalement, les 8 éléments suivants : $1; g_1; g_1^2; g_1^3; g_2; g_1g_2; g_1^2g_2; g_1^3g_2$ suffisent à engendrer $\mathbb{C}[x, y]^{E_8}$ comme algèbre de Lie.

Excepté dans le cas du groupe A_1 , le système générateur obtenu est effectivement de cardinal égal à la dimension du groupe d'homologie de Poisson en degré zéro, donc le système générateur trouvé est de cardinal minimal.

4.3.5 Déformation des invariants, produits croisés

La première algèbre de Weyl $\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle p, q \rangle / (pq - qp = 1)$ est une déformation algébrique de $\mathbb{C}[x, y]$, et $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ agit par automorphismes d'algèbre sur $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})$ de telle sorte que $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ est une déformation de $\mathbb{C}[x, y]^G$. On peut donc appliquer la proposition 2.4.2 pour trouver un système générateur de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ pour le crochet de commutation.

PROPOSITION 4.3.3

Il existe un système de représentants du système générateur minimal de $\mathbb{C}[x, y]^G$ choisi dans le paragraphe précédent, qui engendre l'algèbre de Lie $(\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G, [\cdot, \cdot])$.

Démonstration : Pour $G = D_n$ avec $n \geq 4$, ou E_6, E_7, E_8 , le système générateur minimal de $\mathbb{C}[x, y]^G$ obtenu est constitué d'éléments homogènes, donc le résultat découle directement de la proposition 2.4.2.

Pour $G = A_1$, $\mathbb{C}[x, y]^G$ est engendrée comme algèbre de Lie par $1 + xy, x^2 + y^2 + (xy)^2$ donc a fortiori par les éléments homogènes $1, xy, x^2 + y^2, x^2 y^2$. Donc $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ est engendrée comme algèbre de Lie par $1, pq, p^2 + q^2, p^2 q^2$. Mais

$$\begin{aligned} [1 + pq, p^2 + q^2 + p^2 q^2] &= -2p^2 + 2q^2 \\ [1 + pq, -p^2 + q^2] &= 2p^2 + 2q^2 \\ [p^2, q^2] &= 4pq - 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'algèbre de Lie engendrée par $1 + pq$, et $p^2 + q^2 + p^2 q^2$ contient $p^2, q^2, 1, pq, p^2 q^2$, qui engendrent $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$, donc $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ est engendrée par $1 + pq$, et $p^2 + q^2 + p^2 q^2$. Pour $G = A_n$ avec $n \geq 2$, $\mathbb{C}[x, y]^G$ est engendrée par $1 + x^{n+1} + y^{n+1}; xy; (xy)^2; \dots; (xy)^{n-1}$, donc a fortiori par les éléments homogènes $1, x^{n+1} + y^{n+1}; xy; (xy)^2; \dots; (xy)^{n-1}$. Donc $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ est engendrée comme algèbre de Lie par $1, p^{n+1} + q^{n+1}; pq; (pq)^2; \dots; (pq)^{n-1}$. De plus,

$$\begin{aligned} [pq, 1 + p^{n+1} + q^{n+1}] &= (n+1)(-p^{n+1} + q^{n+1}) \\ [pq, -p^{n+1} + q^{n+1}] &= (n+1)(p^{n+1} + q^{n+1}) \end{aligned}$$

Donc l'algèbre de Lie engendrée par $1 + p^{n+1} + q^{n+1}; pq; (pq)^2; \dots; (pq)^{n-1}$ contient 1 et $p^{n+1} + q^{n+1}$, donc $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ est engendrée comme algèbre de Lie par $1 + p^{n+1} + q^{n+1}; pq; (pq)^2; \dots; (pq)^{n-1}$.

□

REMARQUE 4.3.4

Ainsi, $(\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G, [\cdot, \cdot])$ admet un système générateur de cardinal la dimension de $HH_0(\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G)$, excepté dans le cas $G = A_1$.

On considère maintenant l'algèbre produit croisé $\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) \star G$.

PROPOSITION 4.3.5

$\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) \star G$ munie du crochet de commutation est une algèbre de Lie de type fini.

Démonstration : D'après la proposition 2.4.4, $\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k$ où : W_0 est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$, W_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})$, et $W_{k+1} = [W_0, W_k]$. Alors :

$$\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) \star G = \bigoplus_{g \in G} \left(\sum_{k=1}^{\infty} W_k \right) g = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{W}_k,$$

$$\text{où } \widetilde{W}_k = \bigoplus_{g \in G} W_k g.$$

Nous allons montrer que $(W_0 + W_1) \star G$ engendre $\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) \star G$ pour la structure de Lie.

On note donc $\mathfrak{W}$ la sous-algèbre de Lie engendrée par $(W_0 + W_1) \star G$. Clairement, $\widetilde{W}_1 \subset \mathfrak{W}$. Supposons $\widetilde{W}_k \subset \mathfrak{W}$, soient $w_0 \in W_0$, $w_k \in W_k$ et $g \in G$, alors :

$$[w_0, w_k]g = w_0 w_k g - w_k w_0 g = w_0 w_k g - w_k g w_0 = [w_0, w_k g]$$

or $w_0 = w_0 \text{id}_G \in W_0 \star G \subset \mathfrak{W}$ et $w_k g \in \mathfrak{W}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, $\widetilde{W}_{k+1} \subset \mathfrak{W}$.

□

REMARQUE 4.3.6

- La propriété de l'algèbre de Weyl $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})$ utilisée dans cette démonstration est une propriété plus forte que la simple finitude de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ en tant qu'algèbre de Lie, et permet de construire une démonstration par une récurrence facile.
- Les deux algèbres non-commutatives $\mathcal{A}_1(\mathbb{C})^G$ et $\mathcal{A}_1(\mathbb{C}) \star G$ sont Morita équivalentes par (2.4.10), et on constate qu'elles sont toutes deux des algèbres de Lie de type fini pour le crochet de commutation. On est donc amené à se demander si la propriété de finitude de l'algèbre de Lie est un invariant de Morita.

4.4 Exemples en dimension 4

4.4.1 Exemple du groupe de Weyl B_2

On peut décrire B_2 sous la forme du produit en couronne : $B_2 = (\pm 1)^2 \rtimes S_2$. Le groupe B_2 agit sur $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, y_1] \otimes \mathbb{C}[x_2, y_2] = \mathbb{C}[x_1, y_1, x_2, y_2]$ de la manière suivante :

$$((g_1, g_2), \sigma) \cdot (P_1 \otimes P_2) = g_1 \cdot P_{\sigma^{-1}(1)}(x_1, y_1) \otimes g_2 \cdot P_{\sigma^{-1}(2)}(x_2, y_2)$$

On pose $H = (\pm 1)^2$ sous-groupe de B_2 . L'algèbre des invariants sous l'action de H ,

$$B := \mathcal{A}^H = \mathbb{C}[x_1^2, x_1 y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}[x_2^2, x_2 y_2, y_2^2],$$

est engendrée comme algèbre associative par ses éléments de degré 2. D'après le théorème de Noether, $\mathcal{A}^{B_2} = B^{B_2/H}$ est donc engendrée en tant qu'algèbre associative par ses éléments de degré au plus $2 \times [B_2 : H] = 4$. On détermine la série de Hilbert de $\mathcal{A}^{B_2}$ grâce à la formule de Molien ; on note τ la transposition $\tau = (1 \ 2)$.

g	$((1,1), \text{id})$	$((1,1), \tau)$	$((-1,1), \text{id})$	$((-1,1), \tau)$
$\det(1 - gT)$	$(1 - T)^4$	$(1 - T^2)^2$	$(1 - T^2)^2$	$(1 + T^2)^2$
g	$((1,-1), \text{id})$	$((1,-1), \tau)$	$((-1,-1), \text{id})$	$((-1,-1), \tau)$
$\det(1 - gT)$	$(1 - T^2)^2$	$(1 + T^2)^2$	$(1 + T)^4$	$(1 - T^2)^2$

$$\text{Donc } P(\mathcal{A}^{B_2}) = \frac{1}{8} \sum_{g \in B_2} \frac{1}{\det(1 - gT)} = \frac{1 + T^2 + 4T^4 + T^6 + T^8}{(1 - T^2)^2(1 - T^4)^4} = 1 + 3T^2 + 11T^4 + \dots$$

Ainsi $\mathcal{A}_2^{B_2}$ a pour base $x_1^2 + x_2^2$, $y_1^2 + y_2^2$, et $x_1y_1 + x_2y_2$; et $\mathcal{A}_4^{B_2}$ a pour base la famille de 11 éléments suivante :

$$\begin{array}{cc} y_1^4 + y_2^4 & y_1^2y_2^2 \\ x_1y_1^3 + x_2y_2^3 & x_1y_1y_2^2 + x_2y_2y_1^2 \\ x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 & x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \text{ et } x_1y_1x_2y_2 \\ x_1^3y_1 + x_2^3y_2 & x_1y_1x_2^2 + x_2y_2x_1^2 \\ x_1^4 + x_2^4 & x_1^2x_2^2 \end{array}$$

L'action de B_2 conserve le degré, donc $\mathcal{A}^{B_2}$ est graduée : $\mathcal{A}^{B_2} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_{2n}^{B_2}$ où :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2n}^{B_2} &= \bigoplus_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\mathbb{C}_{2p}[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}_{2(n-p)}[x_2^2, x_2y_2, y_2^2] \\ &\quad \oplus \mathbb{C}_{2(n-p)}[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}_{2p}[x_2^2, x_2y_2, y_2^2])^{S_2} \\ &\quad \oplus (\mathbb{C}_n[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}_n[x_2^2, x_2y_2, y_2^2])^{S_2} \text{ dans le cas } n \text{ pair} \end{aligned}$$

Pour $p < \frac{n}{2}$, $V_{2n}^{2p} := (\mathbb{C}_{2p}[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}_{2(n-p)}[x_2^2, x_2y_2, y_2^2] \oplus \mathbb{C}_{2(n-p)}[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}_{2p}[x_2^2, x_2y_2, y_2^2])^{S_2}$ est de dimension $(2p+1)(2(n-p)+1)$ et a pour base

$$\{x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i y_2^j; i+j=2p; k+l=2(n-p)\}.$$

Lorsque n est pair, $V_{2n}^n := (\mathbb{C}_n[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \otimes \mathbb{C}_n[x_2^2, x_2y_2, y_2^2])^{S_2}$ est de dimension $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ et a pour base

$$\{x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i y_2^j; i+j=k+l=n, i \leq k\}.$$

Chaque sous-espace V_-^0 est stable sous l'action adjointe de $\mathcal{A}_2^{B_2} = \mathfrak{sl}(2)$. De plus, V_{2n}^0 est une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(2)$: il est de dimension $2n+1$ et le vecteur $y_2^{2n} + y_1^{2n}$ est un vecteur propre pour $h = x_2y_2 + x_1y_1$ associé à la valeur propre $2n$.

Le crochet de Poisson sur $\mathbb{C}[x_1, y_1, x_2, y_2]$ donné par $\{x_i, y_i\} = 1$ induit une structure de Poisson sur $\mathcal{A}^{B_2}$.

Soit $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{A}^{B_2}$ engendrée par ses éléments de degré ≤ 4 .

Par récurrence sur n , on montre que $\mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}$.

- Pour $n = 0, 1, 2$, le résultat tient à la construction de $\mathfrak{A}$.
- Supposons le résultat vrai pour $n \geq 2$, et montrons-le pour $n+1$:

$$\underbrace{\{x_2^4 + x_1^4, y_2^{2n} + y_1^{2n}\}}_{\in \mathfrak{A}} = 8n \underbrace{(x_2^3 y_2^{2n-1} + x_1^3 y_1^{2n-1})}_{\in V_{2n+2}^0}$$

Ainsi, $\mathfrak{A}$ contient un élément de V_{2n+2}^0 , et par l'action adjointe de $\mathcal{A}_2^{B_2} \subset \mathfrak{A}$, on a finalement $V_{2n+2}^0 \subset \mathfrak{A}$.

Par récurrence sur p , on montre maintenant que $\forall p = 0, \dots, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}$. On

suppose le résultat vrai pour $0 \leq p \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1$, et montrons-le pour $p+1$.

Soient i, j, k, l tels que $i+j=2p+2$, $k+l=2(n-p)$. Alors $k+l \geq 3$ d'où : $k \geq 2$ ou $l \geq 2$. Il suffit de montrer que $x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i y_2^j$ est dans $\mathfrak{A}$. On distingue alors plusieurs cas :

1. Si $k \geq 2$ et $i \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \{x_1^2 x_2^2, \overbrace{x_1^{i-2} y_1^j x_2^{k-1} y_2^{l+1} + x_1^{k-1} y_1^{l+1} x_2^{i-2} y_2^j}^{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} \\ &= \underbrace{(2j)(x_1^{i-1} y_1^{j-1} x_2^{k+1} y_2^{l+1} + x_1^{k+1} y_1^{l+1} x_2^{i-1} y_2^{j-1})}_{\in V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}} + \underbrace{2(l+1)(x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i y_2^j)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

2. Si $l \geq 2$ et $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} & \{y_1^2 y_2^2, \overbrace{x_1^i y_1^{j-2} x_2^{k+1} y_2^{l-1} + x_1^{k+1} y_1^{l-1} x_2^i y_2^{j-2}}^{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} \\ &= \underbrace{(-2i)(x_1^{i-1} y_1^{j-1} x_2^{k+1} y_2^{l-1} + x_1^{k+1} y_1^{l-1} x_2^{i-1} y_2^{j-1})}_{\in V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}} - \underbrace{2(k+1)(x_1^i y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i y_2^j)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

3. Si $k \geq 2$, $i = 1$ et $j > 1$:

$$\begin{aligned} \{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2, \underbrace{y_1^{j-1} x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l y_2^{j-1}}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} &= \underbrace{2(l-k)(y_1^{j-1} x_2^{k+1} y_2^{l+1} + x_1^{k+1} y_1^{l+1} y_2^{j-1})}_{\in V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}} \\ &+ \underbrace{(2(j-1))(x_1 y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2 y_2^j)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

4. Si $l \geq 2$, $j = 1$ et $i > 1$

$$\begin{aligned} & \{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2, \overbrace{x_1^{i-1} x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^{i-1}}^{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} \\ &= \underbrace{(2(l-k))(x_1^{i-1} x_2^{k+1} y_2^{l+1} + x_1^{k+1} y_1^{l+1} x_2^{i-1})}_{\in V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}} + \underbrace{(-2(i-1))(x_1^i y_1 x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i y_2)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

5. Si $i = 0$ et $j > 2$:

$$\begin{aligned} \{x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3, \underbrace{y_1^{j-2} x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l y_2^{j-2}}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} &= \underbrace{(l-3k)(y_1^{j-2} x_2^k y_2^{l+2} + x_1^k y_1^{l+2} y_2^{j-2})}_{\in V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}} \\ &+ \underbrace{(j-2)(y_1^j x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l y_2^j)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

6. Si $j = 0$ et $i > 2$:

$$\begin{aligned} \{x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2, \underbrace{x_1^{i-2} x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^{i-2}}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} &= \underbrace{(3l-k)(x_1^{i-2} x_2^{k+2} y_2^l + x_1^{k+2} y_1^l x_2^{i-2})}_{\in V_{2n+2}^{2p} \subset \mathfrak{A}} \\ &+ \underbrace{(-(i-2))(x_1^i x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^i)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

7. Si $i = 0, j = 2$, et $l \geq 1$:

$$\{y_1^2 y_2^2, \underbrace{x_2^{k+1} y_2^{l-1} + x_1^{k+1} y_1^{l-1}}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} = \underbrace{(-2(k+1))}_{\neq 0} (y_1^2 x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l y_2^2)$$

8. Si $j = 0, i = 2$, et $k \geq 1$:

$$\{x_1^2 x_2^2, \underbrace{x_2^{k-1} y_2^{l+1} + x_1^{k-1} y_1^{l+1}}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} = \underbrace{2(l+1)}_{\neq 0} (x_1^2 x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2^2)$$

9. Si $i = j = 1$ et $l = k = n$:

$$\begin{aligned} \{x_1^2 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2^2, \underbrace{x_2^{n-1} y_2^{n+1} + x_1^{n-1} y_1^{n+1}}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} &= \underbrace{2(x_1^2 x_2^{n-1} y_2^{n+1} + x_1^{n-1} y_1^{n+1} x_2^2)}_{\in \mathfrak{A} \text{ par le cas 8}} \\ &+ \underbrace{2(n+1)}_{\neq 0} (x_1 y_1 x_2^n y_2^n + x_1^n y_1^n x_2 y_2) \end{aligned}$$

10. Si $i = j = 1$ et $l \neq k$:

$$\{x_1 y_1 x_2 y_2, \underbrace{x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} = \underbrace{2(l-k)}_{\neq 0} (x_1 y_1 x_2^k y_2^l + x_1^k y_1^l x_2 y_2)$$

11. Si $i = 0, j = 2$, et $l = 0$ (ainsi $k > 2$) :

$$\begin{aligned} \{y_1^2 x_2 y_2 + x_1 y_1 y_2^2, \underbrace{x_2^k + x_1^k}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} &= \underbrace{(-2k)(x_1 y_1 x_2^{k-1} y_2 + x_1^{k-1} y_1 x_2 y_2)}_{\in \mathfrak{A} \text{ par le cas 10}} \\ &+ \underbrace{(-k)}_{\neq 0} (y_1^2 x_2^k + x_1^k y_2^2) \end{aligned}$$

12. Si $j = 0, i = 2$, et $k = 0$ (ainsi $l > 2$) :

$$\begin{aligned} \{x_1^2 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2^2, \underbrace{y_2^l + y_1^l}_{\in \mathcal{A}_{2n}^{B_2} \subset \mathfrak{A}}\} &= \underbrace{2l(x_1 y_1 x_2 y_2^{l-1} + x_1 y_1^{l-1} x_2 y_2)}_{\in \mathfrak{A} \text{ par le cas 10}} \\ &+ \underbrace{(l)}_{\neq 0} (x_1^2 y_2^l + y_1^l x_2^2) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient un système générateur de cardinal 2 de $\mathcal{A}^{B_2}$ en tant qu'algèbre de Lie en considérant les vecteurs : $H := 1 + (x_1 y_1 + x_2 y_2)$ et $T := x_1 y_1 x_2 y_2 + (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + (x_1^4 + x_2^4) + (y_1^2 y_2^2)$ qui permettent d'engendrer $\mathcal{A}_{\leq 4}^{B_2}$.

4.4.2 Engendrement particulier

Cette propriété de finitude peut se démontrer par une autre méthode. La composante homogène $\mathcal{A}_2^{B_2}$ de degré 2 de l'algèbre des invariants s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ en posant :

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad F = -\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \quad H = -(x_1 y_1 + x_2 y_2). \quad (4.6)$$

Le crochet étant de degré -2 , chaque composante homogène $\mathcal{A}_n = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]_n$ de $\mathcal{A}$ est stable sous l'action adjointe de $Vect(E, F, H)$, donc est une représentation de $\mathfrak{sl}_2$. Chaque composante homogène se décompose donc en somme de sous-espaces propres de

$H : \mathcal{A}_n = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_n(i)$. On considère alors $V = \bigoplus_{n=0}^4 \mathcal{A}_n$ le sous-espace de $\mathcal{A}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Le groupe B_2 agit sur V , et V^{B_2} est le sous-espace de $\mathcal{A}^{B_2}$ engendré linéairement par $1, E, F, H$ et les 11 éléments de la base de $\mathcal{A}_4^{B_2}$:

$$\left. \begin{array}{l} y_1^4 + y_2^4 \\ x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3 \\ x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 \\ x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2 \\ x_1^4 + x_2^4 \end{array} \right| \begin{array}{l} y_1^2 y_2^2 \\ x_1 y_1 y_2^2 + x_2 y_2 y_1^2 \\ x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \text{ et } x_1 y_1 x_2 y_2 \\ x_1 y_1 x_2^2 + x_2 y_2 x_1^2 \\ x_1^2 x_2^2 \end{array}$$

On veut montrer que l'on obtient toute l'algèbre $\mathcal{A}$ par l'action répétée de V^{B_2} sur une copie de V : on pose $\mathcal{A}' = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{ad } V^{B_2})^{(k)}(V)$. Ainsi $\text{ad } V^{B_2}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}'$. Par hypothèse, on a $\mathcal{A}_{\leq 4} = V \subset \mathcal{A}'$. Soit $n > 4$ fixé, tel que $\mathcal{A}_{< n} \subset \mathcal{A}'$. Montrons qu'alors $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}'$.

Cas n pair : On pose $n = 2p$, $p \geq 3$. On a alors $\mathcal{A}_n = \bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}} \mathcal{A}_n(i)$, et toute sous-

$\mathfrak{sl}_2$ -représentation irréductible de $\mathcal{A}_n$ possède un vecteur propre de H associé à la valeur propre 0. Montrons donc que $\mathcal{A}_n(0) \subset \mathcal{A}'$. L'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(0)$ a pour base les éléments $R_{i,j} = x_1^i y_1^j x_2^{p-i} y_2^{p-j}$, avec $(i, j) \in \{0, \dots, p\}^2$.

- Pour $i = 0, \dots, p-1$, $j = 1, \dots, p-2$, on considère le système d'inconnues $R_{i,j}$ et $R_{i+1,j+1}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\{y_1^2 y_2^2, x_1^{i+1} y_1^{j-1} x_2^{p-i} y_2^{p-2-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= -2(i+1)R_{i,j} - 2(p-i)R_{i+1,j+1} \\ \underbrace{\{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2, x_1^i y_1^j x_2^{p-1-i} y_2^{p-1-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= 2(i-j)(R_{i,j} - R_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

Son déterminant vaut $4(i-j)(p+1)$, qui s'annule uniquement pour $i = j$. En inversant le système, on obtient que les $R_{i,j}$, pour $i = 0, \dots, p$, $j = 1, \dots, p-1$ avec $i \neq j$ sont dans $\mathcal{A}'$.

- Symétriquement, on considère le système pour $i = 1, \dots, p-2$, $j = 0, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} \underbrace{\{x_1^2 x_2^2, x_1^{i-1} y_1^{j+1} x_2^{p-2-i} y_2^{p-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= 2(j+1)R_{i,j} + 2(p-j)R_{i+1,j+1} \\ \underbrace{\{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2, x_1^i y_1^j x_2^{p-1-i} y_2^{p-1-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= 2(i-j)(R_{i,j} - R_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

qui permet de voir que les $R_{i,j}$, avec $i = 1, \dots, p-1$, $j = 0, \dots, p$, $i \neq j$ sont dans $\mathcal{A}'$. En résumé, on a maintenant $R_{i,j} \in \mathcal{A}'$, sauf pour les $R_{i,i}$, $R_{0,p}$ et $R_{p,0}$.

- Ensuite, on a $\{x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3, x_1 y_1 x_2^{p-1} y_2^{p-3}\} = -2R_{1,3} - 2pR_{1,1}$. Comme $R_{1,3} \in \mathcal{A}'$, on a $R_{1,1} \in \mathcal{A}'$.

En utilisant la relation $\{y_1^2 y_2^2, x_1^{i+1} y_1^{j-1} x_2^{p-i} y_2^{p-2-j}\} = -2(i+1)R_{i,j} - 2(p-i)R_{i+1,j+1}$, on a par récurrence, $R_{2,2} \in \mathcal{A}', \dots, R_{p-1,p-1} \in \mathcal{A}'$.

- Finalement, $\{y_1^4 + y_2^4, x_2^{p+1}y_2^{p-3}\} = -4(p+1)(x_2^p y_2^p)$. Ainsi, $R_{0,0} \in \mathcal{A}'$
 $\{y_1^4 + y_2^4, x_1^{p+1}y_1^{p-3}\} = -4(p+1)(x_1^p y_1^p)$ donc $R_{p,p} \in \mathcal{A}'$.
 $\{x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3, y_1^{p-2}x_2^p\} = (p-2)R_{0,p} - 3pR_{0,p-2}$. Comme $R_{0,p-2} \in \mathcal{A}'$, on a $R_{0,p} \in \mathcal{A}'$.
 Par symétrie, $\{x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2, x_1^{p-2}y_2^p\} = -(p-2)R_{p,0} + 3pR_{p-2,0}$ montre que $R_{p,0} \in \mathcal{A}'$.

Ainsi $\mathcal{A}_n(0) \subset \mathcal{A}'$, et par l'action de la copie de $\mathfrak{sl}_2 \subset V^{B_2}$, on a $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}'$.

Cas n impair : On pose $n = 2p + 1$, $p \geq 2$. On a alors $\mathcal{A}_n = \bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}+1} \mathcal{A}_n(i)$, et toute

sous- $\mathfrak{sl}_2$ -représentation irréductible de $\mathcal{A}_n$ possède un vecteur propre de H associé à la valeur propre 1. Montrons donc que $\mathcal{A}_n(1) \subset \mathcal{A}'$. L'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(1)$ a pour base les éléments $R_{i,j} = x_1^i y_1^j x_2^{p+1-i} y_2^{p-j}$, avec $(i, j) \in \{0, \dots, p+1\} \times \{0, \dots, p\}$.

- Pour $i = 0, \dots, p$, $j = 1, \dots, p-2$, on considère le système d'inconnues $R_{i,j}$ et $R_{i+1,j+1}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\{y_1^2 y_2^2, x_1^{i+1} y_1^{j-1} x_2^{p+1-i} y_2^{p-2-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= -2(i+1)R_{i,j} - 2(p+1-i)R_{i+1,j+1} \\ \underbrace{\{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2, x_1^i y_1^j x_2^{p-i} y_2^{p-1-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= 2(i-j-1)R_{i,j} + 2(j-i)R_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

Son déterminant vaut $4[(i-j-1)(p+2) + i+1]$, qui ne s'annule pas. En inversant le système, on obtient que les $R_{i,j}$, pour $i = 0, \dots, p+1$, $j = 1, \dots, p-1$ sont dans $\mathcal{A}'$.

- Symétriquement, on considère le système suivant, pour $i = 1, \dots, p-1$, $j = 0, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} \underbrace{\{x_1^2 x_2^2, x_1^{i-1} y_1^{j+1} x_2^{p-1-i} y_2^{p-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= 2(j+1)R_{i,j} + 2(p-j)R_{i+1,j+1} \\ \underbrace{\{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2, x_1^i y_1^j x_2^{p-1-i} y_2^{p-1-j}\}}_{\in V^{B_2}} &= 2(i-j-1)R_{i,j} + 2(j-i)R_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

Son déterminant vaut $4[(j-i+1)(p+1) - j-1]$, qui ne s'annule pas. En inversant le système, on obtient que les $R_{i,j}$, pour $i = 1, \dots, p$, $j = 0, \dots, p$ sont dans $\mathcal{A}'$.

En résumé, on a maintenant $R_{i,j} \in \mathcal{A}'$, sauf pour $R_{0,0}$, $R_{0,p}$, $R_{p+1,0}$, $R_{p+1,p}$.

- $\{y_1^4 + y_2^4, x_2^{p+2}y_2^{p-3}\} = -4(p+2)(x_2^{p+1}y_2^p)$. Ainsi, $R_{0,0} \in \mathcal{A}'$
 $\{y_1^4 + y_2^4, x_1^{p+2}y_1^{p-3}\} = -4(p+2)(x_1^{p+1}y_1^p)$. Ainsi, $R_{p+1,p} \in \mathcal{A}'$.
 $\{x_1 y_1^3 + x_2 y_2^3, y_1^{p-2}x_2^p + 1\} = (p-2)R_{0,p} - 3(p+1)R_{0,p-2}$. Comme $R_{0,p-2} \in \mathcal{A}'$, on a $R_{0,p} \in \mathcal{A}'$.
 Par symétrie, $\{x_1^3 y_1 + x_2^3 y_2, x_1^{p-1}y_2^p\} = -(p-1)R_{p+1,0} + 3pR_{p-1,0}$ montre que $R_{p+1,0} \in \mathcal{A}'$.

Ainsi $\mathcal{A}_n(1) \subset \mathcal{A}'$, et par l'action de la copie de $\mathfrak{sl}_2$ dans V^{B_2} , on a $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}'$.

En conclusion, on a $\mathcal{A}' = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{ad } V^{B_2})^{(k)}(V)$. En utilisant l'opérateur de Reynolds,

comme dans le cas des singularités de Klein, on en déduit que $\mathcal{A}^{B_2}$ est engendrée comme algèbre de Lie par les éléments de $V^{B_2} = \mathcal{A}_{\leq 4}^{B_2}$, donc par les deux éléments $1 + H$ et $T := x_1 y_1 x_2 y_2 + (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + (x_1^4 + x_2^4) + (y_1^2 y_2^2)$. En effet, T est la somme de 5 vecteurs propres pour l'action adjointe de H associés à des valeurs propres distinctes, donc

l'action répétée de H sur T permet d'engendrer chacun de ces vecteurs : E, F (voir (4.6)), et trois éléments de degré 4. $\mathcal{A}_4^{B_2}$ est la somme de trois représentations irréductibles pour l'algèbre de Lie (E, F, H) , que l'on obtient par l'action de (E, F, H) sur les trois vecteurs de degré 4 précédents.

4.4.3 Exemple du groupe de Weyl A_2

Soit $S' = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$, munie du crochet de Poisson symplectique donné par : $\{x_i, y_i\} = 1$ (les autres crochets valent 0).

$G = A_2 = S_3$ agit par permutation des indices sur S' . On note $\mathcal{A}$ est la sous-algèbre de S' engendrée par $x_1 - x_2, x_1 - x_3, y_1 - y_2$ et $y_1 - y_3$. C'est une sous-algèbre de Poisson graduée et un sous A_2 -module ; en fait : $S' = \mathbb{C}[x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] \otimes \mathcal{A}$. Comme $x_1 + x_2 + x_3$ et $y_1 + y_2 + y_3$ sont A_2 -invariants : $(S')^{A_2} = \mathbb{C}[x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] \otimes \mathcal{A}^{A_2}$. De plus, $\mathcal{A}$ est l'algèbre des polynômes en les éléments :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2x_1 - x_2 - x_3, \\ a_2 &= -x_1 + 2x_2 - x_3, \\ b_1 &= 2y_1 - y_2 - y_3, \\ b_2 &= -y_1 + 2y_2 - y_3. \end{aligned}$$

On pose également : $a_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3, b_3 = -y_1 - y_2 + 2y_3$, de sorte que :

1. A_2 agit sur a_1, a_2 et a_3 par permutation des indices.
2. A_2 agit sur b_1, b_2 et b_3 par permutation des indices.
3. $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ et $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.
4. Le crochet de Poisson sur $\mathcal{A}$ est donné par le tableau suivant :

$\{\cdot, \cdot\}$	a_1	b_1	a_2	b_2
a_1	0	6	0	-3
b_1	-6	0	3	0
a_2	0	-3	0	6
b_2	3	0	-6	0

Déterminons la série de Hilbert de $\mathcal{A}^{A_2}$ grâce à la formule de Molien. On note τ la transposition $\tau = (1\ 2)$ et σ le cycle $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

g	id	τ	σ
$\det(1 - gT)$	$(1 - T)^4$	$(1 - T^2)^2$	$(1 + T + T^2)^2$

Donc

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}^{A_2}) &= \frac{1}{6} \sum_{g \in A_2} \frac{1}{\det(1 - gT)} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(1 - T)^4} + \frac{3}{(1 - T^2)^2} + \frac{2}{(1 + T + T^2)^2} \right) \\ &= 1 + 3T^2 + 4T^3 + 6T^4 + 10T^5 + 17T^6 + o(T^6) \end{aligned}$$

On met en évidence la copie de $\mathfrak{sl}(2)$ de $\mathcal{A}^{A_2}$: on considère les éléments de $\mathcal{A}$ suivants, qui forment une base de $\mathcal{A}_2^{A_2}$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{18} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2}{9}, \\ F &= -\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{18} = -\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2}{9}, \\ H &= -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{9} = -\frac{2a_1 b_1 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2a_2 b_2}{9}, \end{aligned}$$

Alors (E, F, H) forme une copie de $\mathfrak{sl}(2)$ dans $\mathcal{A}^{A_2}$. E , F et H agissent par dérivation sur $\mathcal{A}$. L'action de E , F et H est donnée par :

$$\begin{aligned} \{E, \cdot\} &= a_1 \partial_{b_1} + a_2 \partial_{b_2}, \\ \{F, \cdot\} &= b_1 \partial_{a_1} + b_2 \partial_{a_2}, \\ \{H, \cdot\} &= a_1 \partial_{a_1} + a_2 \partial_{a_2} - b_1 \partial_{b_1} - b_2 \partial_{b_2}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a donc $\mathcal{A}_1(+1) = \text{Vect}(a_1, a_2)$ et $\mathcal{A}_1(-1) = \text{Vect}(b_1, b_2)$.

Soit $V = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3$. L'espace V^{A_2} est un $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de dimension 8 de $\mathcal{A}^{A_2}$, dont une base est donnée par : 1, E, F, H , et les quatre éléments de degré 3 :

$$\begin{aligned} A &:= \frac{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2}{3}, \quad A' := \frac{a_1^2 b_2 + 2a_1 a_2 (b_1 + b_2) + a_2^2 b_1}{3}, \\ B' &:= \frac{a_1 b_2^2 + 2b_1 b_2 (a_1 + a_2) + a_2 b_1^2}{3}, \quad B := \frac{b_1^2 b_2 + b_1 b_2^2}{3}. \end{aligned}$$

L'action de A et A' est donnée par :

$$\begin{aligned} \{A, \cdot\} &= (-a_1^2 + 2a_1 a_2 + 2a_2^2) \partial_{b_1} + (2a_1^2 + 2a_1 a_2 - a_2^2) \partial_{b_2}, \\ \{A', \cdot\} &= (a_1^2 - 2a_1 a_2 - 2a_2^2) \partial_{a_1} + (-2a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2) \partial_{a_2} \\ &\quad + (-2a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + 4a_2 b_2) \partial_{b_1} + (4a_1 b_1 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 - 2a_2 b_2) \partial_{b_2}. \end{aligned}$$

On veut montrer que l'on obtient toute l'algèbre $\mathcal{A}$ par l'action répétée de A et A' sur une copie de V : on pose $\mathfrak{A} = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{ad } V^G)^k(V)$. Ainsi $(\text{ad } V^G)(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$. Par hypothèse, on a $\mathcal{A}_{\leq 3} = V \subset \mathfrak{A}$. Soit $n > 3$ fixé, tel que $\mathcal{A}_{< n} \subset \mathfrak{A}$. Montrons qu'alors $\mathcal{A}_n \subset \mathfrak{A}$.

Cas $n = 4$: $\mathcal{A}_4(0)$ a pour base les éléments $R_{i,j} = a_1^i b_1^j a_2^{2-i} b_2^{2-j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 2\}^2$. Le calcul des crochets $\{A, a_1^0 b_1^j a_2^0 b_2^{3-j}\}$ avec $0 \leq j \leq 3$ et $\{A', a_1^i b_1^j a_2^{1-i} b_2^{2-j}\}$ avec $0 \leq i \leq 1$ et $0 \leq j \leq 3$ forme un système de 10 équations en les neuf $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 2\}^2$. En ne conservant que les 9 premières équations, on obtient un système de déterminant non nul, donc inversible, donc les $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 2\}^2$ sont dans $\mathfrak{A}$.

Cas $n = 5$: On procède de la même manière : $\mathcal{A}_5(1)$ a pour base les éléments $R_{i,j} = a_1^i b_1^j a_2^{3-i} b_2^{2-j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 3\} \times \{0, \dots, 2\}$. Le calcul des crochets $\{A, a_1^i b_1^j a_2^{1-i} b_2^{3-j}\}$ avec $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq j \leq 3$ et $\{A', a_1^i b_1^j a_2^{2-i} b_2^{2-j}\}$ avec $0 \leq i \leq 2$ et $0 \leq j \leq 2$ forme un système de 17 équations en les 12 $R_{i,j}$. En ne conservant que les 12 premières équations, on obtient un système de déterminant non nul, donc inversible, donc les $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 2\}^2$ sont dans $\mathfrak{A}$.

Cas $n = 6$: $\mathcal{A}_6(0)$ a pour base les éléments $R_{i,j} = a_1^i b_1^j a_2^{2-i} b_2^{2-j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 3\}^2$. Le calcul des crochets $\{A, a_1^0 b_1^j a_2^0 b_2^{3-j}\}$ avec $0 \leq i \leq 1$, $0 \leq j \leq 3$ et $\{A', a_1^i b_1^j a_2^{1-i} b_2^{2-j}\}$ avec $0 \leq i \leq 2$ et $0 \leq j \leq 2$ forme un système de 17 équations en les 16 $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 3\}^2$. En ne conservant que les 16 premières équations, on obtient un système de déterminant non nul, donc inversible, donc les $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 3\}^2$ sont dans $\mathfrak{A}$.

Cas n impair > 5 : On pose $n = 2p + 1$, avec $p > 2$. Alors $\mathcal{A}_{2p+1}(1)$ a pour base les éléments

$$R_{i,j} = a_1^i b_1^j a_2^{p+1-i} b_2^{p-j}, \quad (i, j) \in \{0, \dots, p+1\} \times \{0, \dots, p\}.$$

Le calcul des crochets

$$\begin{aligned} &\{A, a_1^i b_1^j a_2^{p-1-i} b_2^{p+1-j}\}, \text{ avec } 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2 \\ &\text{et } \{A', a_1^i b_1^j a_2^{p-i} b_2^{p-j}\}, \text{ avec } 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1 \end{aligned}$$

permet de former un système de 15 équations en les 15 $R_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq 4$, $0 \leq j \leq 2$, dont le déterminant vaut $5971968p^4(p+3)(p+1)^3(p-1)^5 \neq 0$. Le système est donc inversible, donc les $R_{i,j}$, $(i, j) \in \{0, \dots, 4\} \times \{0, \dots, 2\}$ sont dans $\mathfrak{A}$.

On procède alors par récurrence sur $j \in \{0, \dots, p\}$.

- Pour $j = 0$, d'après ce qui précède, les $R_{i,0}$ pour i de 0 à 4, sont dans $\mathcal{A}$. L'égalité suivante

$$\{A, a_1^i b_1^0 a_2^{p-1-i} b_2^{p+1}\} = (p+1)(-R_{i,0} + 2R_{i+1,0} + 2R_{i+2,0})$$

montre alors par récurrence sur i que tous les $R_{i,0}$ avec $0 \leq i \leq p+1$ sont dans $\mathfrak{A}$.

- Soit $j > 0$. On suppose que tous les $R_{i,j'}$ sont dans $\mathfrak{A}$ pour $j' < j$ et $0 \leq i \leq p+1$.
★ On considère alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \{A, a_1^0 b_1^j a_2^{p-1} b_2^{p+1-j}\} &= (p+1-j)(-R_{0,j} + 2R_{1,j} + 2R_{2,j}) \\ &\quad + j(2R_{0,j-1} + 2R_{1,j-1} - R_{2,j-1}) \\ \{A', a_1^{j-1} b_1^j a_2^{p-1} b_2^{p+1-j}\} &= 2(p+1-j)(R_{0,j} + 2R_{1,j}) \\ &\quad + 2(j-1)(2R_{0,j-2} + R_{1,j-2}) \\ &\quad + (4j-4-p)R_{0,j-1} + (-4j+4)R_{1,j-1} + (-2p)R_{2,j-1} \\ \{A', a_1 b_1^{j-1} a_2^{p-1} b_2^{p+1-j}\} &= 2(p+1-j)(R_{1,j} + 2R_{2,j}) \\ &\quad + 2(j-1)(2R_{1,j-2} + R_{2,j-2}) \\ &\quad - 2R_{0,j-1} + (-3+4j-4-p)R_{1,j-1} \\ &\quad + (3-4j+4)R_{2,j-1} + (2-2p)R_{3,j-1} \end{aligned}$$

Elles permettent de former un système d'inconnues $R_{0,j}$, $R_{1,j}$ et $R_{2,j}$ de déterminant $-24(p+1-j)^3 \neq 0$, donc en inversant le système $R_{0,j}$, $R_{1,j}$ et $R_{2,j}$ sont dans $\mathfrak{A}$.

- ★ Ensuite, l'égalité

$$\begin{aligned} \{A, a_1^i b_1^j a_2^{p-1-i} b_2^{p+1-j}\} &= j(2R_{i,j-1} + 2R_{i+1,j-1} - R_{i+2,j-1}) \\ &\quad + (p+1-j)(-R_{i,j} + 2R_{i+1,j} + 2R_{i+2,j}) \end{aligned}$$

montre, par récurrence sur i , que tous les $R_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq p+1$ sont dans $\mathfrak{A}$.

Cas n pair > 6 : On pose $n = 2p$. Alors $\mathcal{A}_{2p}(0)$ a pour base les éléments

$$R_{i,j} = a_1^i b_1^j a_2^{p-2-i} b_2^{p-1-j}, \quad (i, j) \in \{0, \dots, p\}^2.$$

Le calcul des crochets

$$\{A, a_1^i b_1^j a_2^{p-2-i} b_2^{p-1-j}\} \text{ avec } 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2$$

$$\text{et } \{A', a_1^i b_1^j a_2^{p-2-i} b_2^{p-1-j}\}, \text{ avec } 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1$$

forme un système de 15 équations en les 15 $R_{i,j}$ avec $0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 2$, dont le déterminant vaut $5971968p^4(p+3)(p+1)^3(p-1)^5 \neq 0$. Le système est donc inversible, donc les $R_{i,j}, (i, j) \in \{0, \dots, 4\} \times \{0, \dots, 2\}$ sont dans $\mathfrak{A}$.

En procédant comme dans le cas impair, on montre que tous les $R_{i,j}$ sont dans $\mathfrak{A}$.

En conclusion, on a $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{ad } V^G)^{(k)}(V)$. En utilisant l'opérateur de Reynolds,

comme précédemment, on en déduit que $\mathcal{A}^G$ est engendrée comme algèbre de Lie par les éléments de $V^G = \mathcal{A}_{\leq 3}^G$, et donc finalement par les deux éléments $1 + H$ et $E + F + A$.

Dans ce cas, on trouve un système générateur minimal, mais dont le cardinal est strictement supérieur à la dimension du HP_0 , qui vaut 1 (cf [AF09]). Ceci est dû au fait qu'un seul élément ne peut engendrer qu'une algèbre de Lie abélienne de dimension 1.

Chapitre 5

Algèbres de Poisson issues du cas multiplicatif

5.1 Invariants multiplicatifs

On considère un $\mathbb{Z}$ -module libre L de rang fini, et G un groupe fini agissant sur L par automorphismes. Cette action induit alors une action par automorphismes de $\mathbb{C}$ -algèbre sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[L]$. L'algèbre d'invariants étudiée dans cette situation est l'algèbre $\mathbb{C}[L]^G$. Nous étudions ici le cas du réseau L de rang 2. En choisissant une $\mathbb{Z}$ -base (x, y) de L , on peut identifier L au réseau $\mathbb{Z}^2$, et l'action d'un groupe G sur L est alors donnée par un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{Z})$. L'algèbre du groupe $\mathbb{C}[L]$ est l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. On utilisera la notation suivante pour les monômes de Laurent :

$$T^{(a,b)} := x^a y^b, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2.$$

De cette façon, l'action d'un élément g du groupe $GL(2, \mathbb{Z})$ sur un monôme peut s'écrire :

$$g \cdot T^{(a,b)} = T^{g \cdot (a,b)}, \quad \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2.$$

Par exemple, si g est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, son action sur $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est déterminée par l'image des générateurs x et y :

$$g(x) = x^{-1} \text{ et } g(y) = xy.$$

La théorie des invariants multiplicatifs concerne l'étude de la sous-algèbre $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$, pour un sous-groupe donné G de $GL(2, \mathbb{Z})$.

5.1.1 Structure de Poisson

On munit l'algèbre commutative $\mathbb{C}[x, y]$ d'un crochet de Poisson qui est un analogue du crochet de Poisson symplectique, défini par

$$\{x, y\} = xy.$$

On obtient alors pour les monômes :

$$\{x^a y^b, x^c y^d\} = (ad - bc)x^{a+c}y^{b+d}.$$

PROPOSITION 5.1.1

Pour ce crochet de Poisson, le groupe d'homologie de Poisson en degré zéro de l'algèbre $(\mathbb{C}[x, y], \{\cdot, \cdot\})$ n'est pas de dimension finie.

Démonstration : Lorsqu'on effectue le crochet de deux polynômes, on obtient une combinaison linéaire de monômes de la forme $x^{a+c}y^{b+d}$ avec $a + c \geq 1$ et $b + d \geq 1$. En effet, si $a + c = 0$, avec $a, c \in \mathbb{N}$, alors $a = c = 0$, et le coefficient $(ad - bc)$ est nul. De plus, tout monôme de la forme $x^a y^b$ avec $a \geq 1$ et $b \geq 1$ peut être obtenu comme un crochet :

$$\{x, x^{a-1}y^b\} = bx^a y^b$$

Ainsi, l'algèbre se décompose en une somme directe :

$$\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C} \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{C}x^n \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{C}y^n \bigoplus \{\mathbb{C}[x, y], \mathbb{C}[x, y]\}.$$

□

COROLLAIRE 5.1.2

L'algèbre de Lie $(\mathbb{C}[x, y], \{\cdot, \cdot\})$ n'est pas de type fini.

On étend maintenant la structure de Poisson définie précédemment sur l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x, y]$ à sa localisation $\mathcal{A} := \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. L'ensemble $S = \{x^m y^n; m, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative de $\mathbb{C}[x, y]$, telle que $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] = S^{-1}[\mathbb{C}[x, y]]$; on étend le crochet de Poisson défini précédemment à $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ par la formule (2.1) de la section 2.2.1. On obtient alors pour les monômes de Laurent :

$$\{x^a y^b, x^c y^d\} = (ad - bc)x^{a+c}y^{b+d}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}.$$

PROPOSITION 5.1.3

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Poisson défini précédemment. Alors son groupe d'homologie de Poisson en degré zéro $HP_0(\mathcal{A})$ est de dimension 1.

Démonstration : D'après la formule précédente, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$\{x^{a+b}y^{b-a}, x^{-b}y^a\} = (a^2 + b^2)x^a y^b$$

Donc pour $(a, b) \neq (0, 0)$, $x^a y^b \in \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}$. Par ailleurs, si $a + c = b + d = 0$, alors le coefficient $(ad - bc)$ est nul. Ainsi, le crochet de deux éléments de $\mathcal{A}$ a nécessairement un terme constant nul. On a donc montré que

$$\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \{\mathcal{A}, \mathcal{A}\}.$$

□

Le groupe d'homologie de Poisson en degré zéro étant de dimension finie, on peut maintenant s'intéresser à la propriété de l'engendrement par un nombre fini d'éléments de l'algèbre de Lie $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$.

PROPOSITION 5.1.4

L'algèbre de Lie $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ est de type fini.

Démonstration : On considère la famille $(1, x, y, x^{-1}, y^{-1})$ et on note $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de Lie qu'elle engendre. Par récurrence sur $|a| + |b|$, avec $a, b \in \mathbb{Z}^*$, on montre d'abord que les monômes $x^a y^b$ sont dans $\mathfrak{A}$. Les cas de x^a, y^a sont traités ultérieurement.

- Si $|a| + |b| = 2$: alors $(a, b) = (1, 1)$ ou $(-1, -1)$ ou $(-1, 1)$ ou $(1, -1)$.

$$xy = \{x, y\}, \quad x^{-1}y^{-1} = \{x^{-1}, y^{-1}\}, \quad x^{-1}y = -\{x^{-1}, y\}, \quad xy^{-1} = -\{x, y^{-1}\}.$$

Donc les éléments $xy, x^{-1}y^{-1}, x^{-1}y, xy^{-1}$ sont dans $\mathfrak{A}$.

- Si $|a| + |b| > 2$, alors $|a| \geq 2$ ou $|b| \geq 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|a| \geq 2$.
- ★ Si $a \geq 2$: Comme x et $x^{a-1}y^b$ sont dans $\mathfrak{A}$ par hypothèse de récurrence,

$$x^a y^b = \frac{-1}{b} \{x^{a-1} y^b, x\} \in \mathfrak{A}.$$

- ★ Si $a \leq -2$: Comme x^{-1} et $x^{a+1}y^b$ sont dans $\mathfrak{A}$ par hypothèse de récurrence,

$$x^a y^b = \frac{1}{b} \{x^{a+1} y^b, x^{-1}\} \in \mathfrak{A}.$$

Maintenant $x^a = \frac{-1}{a} \{x^a y, y^{-1}\}$ pour $a \neq 0$, et $y^b = \frac{1}{b} \{xy^b, x^{-1}\}$ pour $b \neq 0$.

Ainsi, $\mathfrak{A}$ contient tous les monômes de Laurent $(x^a y^b)$, d'où $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. $\square$

REMARQUE 5.1.5

Ainsi, $(1, x, y, x^{-1}, y^{-1})$ est un système générateur de l'algèbre de Lie $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. On peut en tirer un système générateur de cardinal plus petit. En effet, la famille de trois éléments $(1 + x, y, x^{-1}y^{-1})$ engendre une algèbre de Lie qui contient la famille précédente, donc engendre toute l'algèbre de polynômes de Laurent. La question de savoir si l'on peut trouver un système générateur de cardinal 2 reste posée.

Comme conséquence de cet engendrement fini par les éléments $1, x, y, x^{-1}, y^{-1}$, on peut déterminer les idéaux de Lie de $\mathcal{A}$. On notera $\mathcal{A}^+$ l'espace vectoriel engendré par les monômes de Laurent non constants, et on appellera longueur d'un polynôme de Laurent le nombre de monômes distincts qui le composent.

PROPOSITION 5.1.6

Les seuls idéaux de Lie de $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ sont $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}^+$ et $\mathcal{A}$.

Démonstration : Soit I un idéal de Lie de $\mathcal{A}$ non restreint à $\mathbb{C}$, et

$$u = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \dots + a_s x^{\alpha_s} y^{\beta_s}$$

un élément de longueur minimale s parmi les éléments non constants de I . On va montrer que cette longueur est nécessairement $s = 1$. Pour cela supposons $s \geq 2$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, comme I est un idéal de Lie, l'élément

$$\{x^i y^j, u\} = \sum_{k=1}^s a_k (i\alpha_k - j\beta_k) x^{i+\alpha_k} y^{j+\beta_k}$$

est aussi un élément de I , et il est de longueur inférieure ou égale à celle de u . Deux situations sont alors possibles.

- S'il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$ tel que tous les (α_k, β_k) sont colinéaires à (i, j) , alors il existe des nombres rationnels λ_k deux à deux distincts tels que $(\alpha_k, \beta_k) = \lambda_k(i, j)$, pour tout $k = 1, \dots, s$. Ainsi

$$\{x^j y^{-i}, u\} = \sum_{k=1}^s 2a_k \lambda_k i j a_k x^{j+\lambda_k i} y^{-i+\lambda_k j}$$

est un élément non constant de I , de même longueur que u , et dans lequel les couples d'exposants des monômes $(j + \lambda_k i, -i + \lambda_k j)$ sont deux à deux non colinéaires.

- On peut donc supposer qu'il existe au moins deux couples d'exposants, par exemple (α_1, β_1) et (α_2, β_2) , qui ne soient pas colinéaires dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\{x^{\alpha_1} y^{\beta_1}, u\}$ est un élément de I non constant, de longueur strictement inférieure à celle de u .

En conclusion, u est nécessairement de longueur 1, ce qui signifie que I contient un monôme $u = x^\alpha y^\beta \neq 1$, avec $(\alpha, \beta) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha \neq 0$. Alors I contient

$$\{x^{-\alpha} y^{1-\beta}, u\} = -\alpha y,$$

donc I contient y , ainsi que $\{xy^{-1}, y\} = x$. De même, I contient x^{-1} et y^{-1} , donc I contient les générateurs de $\mathcal{A}$ comme algèbre de Lie, sauf éventuellement la constante 1. On en conclut que I contient $\mathcal{A}^+$, et donc $I = \mathcal{A}^+$ ou $I = \mathcal{A}$.

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.1.7

Le quotient $\mathcal{A}/\mathbb{C}$ est une algèbre de Lie simple.

5.1.2 Calculs d'invariants

On pose $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après [Lor05], les sous-groupes finis de $GL(2, \mathbb{Z})$ sont, à conjugaison près, ceux de la classification :

groupe	générateurs	ordre	groupe	générateurs	ordre
$\mathcal{G}_1$	X, S	12	$\mathcal{G}_7$	X	6
$\mathcal{G}_2$	D, S	8	$\mathcal{G}_8$	DS	4
$\mathcal{G}_3$	$X^2, -S$	6	$\mathcal{G}_9$	X^2	3
$\mathcal{G}_4$	X^2, S	6	$\mathcal{G}_{10}$	$X^3 = -Id$	2
$\mathcal{G}_5$	$D, -D$	4	$\mathcal{G}_{11}$	D	2
$\mathcal{G}_6$	$S, -S$	4	$\mathcal{G}_{12}$	S	2

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, alors :

$$\{g \cdot x, g \cdot y\} = \{x^a y^c, x^b y^d\} = (ad - bc)x^{a+b}y^{c+d} = (ad - bc)(g \cdot (xy))$$

Ainsi, g est un isomorphisme de Poisson si et seulement si g est dans $SL(2, \mathbb{Z})$. Parmi les groupes précédents, ceux qui agissent par automorphismes de Poisson sur $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ sont donc les sous-groupes finis de $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\mathcal{G}_7 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \mathcal{G}_8 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \mathcal{G}_9 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \mathcal{G}_{10} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On constate que pour chacun de ces groupes, le générateur g choisi a ses coefficients anti-diagonaux opposés, donc vérifie la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = g^{-1}$$

Ainsi, lorsque G est l'un des quatre groupes précédents, on a finalement

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} G \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = G$$

Afin d'étudier la structure de Poisson des algèbres d'invariants de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ sous l'action d'un sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{Z})$, il suffit d'étudier le cas des quatre sous-groupes précédents. En effet, si H est un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$, il est conjugué dans $GL(2, \mathbb{Z})$ à un groupe G choisi dans la liste $\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_8, \mathcal{G}_9, \mathcal{G}_{10}$, donc il existe un élément g de $GL(2, \mathbb{Z})$ tel que $G = g^{-1}Hg$. Si $\det(g) = -1$, d'après ce qui précède, on a également

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} G \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} Hg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1. Finalement, H et G sont conjugués dans $SL(2, \mathbb{Z})$: il existe un élément g de $SL(2, \mathbb{Z})$ tel que $G = g^{-1}Hg$. Le morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres

$$P \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G \mapsto g \cdot P \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^H$$

est alors un isomorphisme d'algèbres de Poisson.

Pour chaque algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$, où G est l'un des quatre groupes de la table précédente, on a

$$\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G = \rho_G \left(\bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{C} x^a y^b \right) = \sum_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{C} \rho_G(x^a y^b)$$

où ρ_G est l'opérateur de Reynolds : $P \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on définit les éléments

$$R_{a,b} = \rho_G(T^{(a,b)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} T^{g \cdot (a,b)} = \frac{1}{|G|} \sum_{(i,j) \in G \cdot (a,b)} T^{(i,j)}.$$

Ils engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$. Le réseau $\mathbb{Z}^2$ est la réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G , et pour chaque orbite $\mathcal{O}$, on choisit un représentant $(a_{\mathcal{O}}, b_{\mathcal{O}})$. Du fait que les $T^{(i,j)}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, les $R_{a_{\mathcal{O}}, b_{\mathcal{O}}}$ forment une base de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ en tant qu'espace vectoriel. Pour chacun des groupes étudiés, on choisira explicitement les représentants $(a_{\mathcal{O}}, b_{\mathcal{O}})$ des orbites de $\mathbb{Z}^2$ sous l'action de G de manière à ce qu'ils permettent d'effectuer assez simplement des raisonnements récursifs.

5.2 Correspondance à la McKay

Pour chaque sous-groupe fini G de $GL(2, \mathbb{Z})$, la sous-algèbre des invariants $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ a fait l'objet d'une étude dans [Lor05]. Lorsque G est un sous-groupe du groupe spécial linéaire $SL(2, \mathbb{Z})$, la structure de cette algèbre est la suivante : $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ est engendrée par trois générateurs, qui vérifient une relation, explicitée dans le tableau suivant :

G	Générateurs et relations
$\mathcal{G}_{10} \simeq C_2$	$\xi_1 = x + x^{-1}$ $\xi_2 = y + y^{-1}$ $\theta = xy + x^{-1}y^{-1}$ relation : $\theta\xi_1\xi_2 = \theta^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - 4$
$\mathcal{G}_9 \simeq C_3$	$\eta_+ = x + y + x^{-1}y^{-1}$ $\eta_- = x^{-1} + y^{-1} + xy$ $\varphi = xy^2 + x^{-2}y^{-1} + xy^{-1} + 6$ relation : $\varphi\eta_+\eta_- = \eta_+^3 + \eta_-^3 + \varphi^2 - 9\varphi + 27$
$\mathcal{G}_8 \simeq C_4$	$\sigma_1 = \xi_1 + \xi_2$ $\sigma_2 = \xi_1\xi_2$ $\rho = xy^2 + x^{-1}y^{-2} + x^2y^{-1} + x^{-2}y + 3\sigma_1$ relation : $\rho^2 = \rho\sigma_1(\sigma_2 + 4) + 4\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^4 - \sigma_2(\sigma_2 + 4)^2$
$\mathcal{G}_7 \simeq C_6$	$\tau_1 = \eta_+ + \eta_-$ $\tau_2 = \eta_+\eta_-$ $\sigma = \eta_+\varphi + \eta_-\varphi_-$ où $\varphi_- = x^{-1}y^{-2} + x^2y + x^{-1}y + 6$ relation : $\sigma^2 = \tau_1(\tau_2 + 9)\sigma - \tau_2(\tau_2 + 9)^2 + (\tau_1^2 - 4\tau_2)(3\tau_1\tau_2 - \tau_1^3 - 27)$

Grâce à cette description, on peut considérer $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ comme l'algèbre des fonctions sur une surface définie par la relation, dans l'espace affine de dimension 3. Ces surfaces possèdent des singularités isolées, et pour chacune de ces singularités, on peut construire une désingularisation et obtenir ainsi le type de la singularité. On effectue pour cela des éclatements successifs de la singularité [Die74]. Les résultats obtenus sont résumés dans la proposition suivante.

PROPOSITION 5.2.1

- Dans le cas $G = \mathcal{G}_{10}$, la surface a quatre points singuliers de type A_1 .
- Dans le cas $G = \mathcal{G}_9$, la surface a trois points singuliers de type A_2 .
- Dans le cas $G = \mathcal{G}_8$, la surface a un point singulier de type A_1 , et deux de type A_3 .
- Dans le cas $G = \mathcal{G}_7$, la surface a un point singulier de type A_1 , un de type A_2 , et un de type A_5 .

Démonstration : La preuve se fait par une analyse des singularités au cas par cas. A titre d'exemple, on donne les détails des calculs pour une des singularités de chacune des surfaces, choisie parmi celles de plus grande multiplicité.

- Pour le groupe $G = \mathcal{G}_{10}$, on étudie une singularité de type A_1 . On pose d'abord

$$F = X_1X_2X_3 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + 4.$$

Le système d'équations $(\partial F/\partial X_1 = 0, \partial F/\partial X_2 = 0, \partial F/\partial X_3 = 0)$ est explicitement :

$$\begin{cases} X_2X_3 - 2X_1 &= 0 \\ X_1X_3 - 2X_2 &= 0 \\ X_1X_2 - 2X_3 &= 0 \end{cases}$$

La troisième équation permet d'écrire $X_3 = X_1X_2/2$. Après avoir remplacé X_3 dans les deux autres équations, le système se réduit à

$$\begin{cases} X_1X_2^2 - 4X_1 &= 0 \\ X_1^2X_2 - 4X_2 &= 0, \end{cases}$$

Si $X_1 = 0$, on obtient la solution $(0, 0, 0)$. Sinon, X_2 est également non nul et on peut simplifier le système

$$\begin{cases} X_2^2 - 4 &= 0 \\ X_1^2 - 4 &= 0, \end{cases}$$

Les solutions sont donc $(2, 2, 2)$, $(-2, 2, -2)$, $(2, -2, -2)$, $(-2, -2, 2)$ qui sont sur la surface définie par F , et $(0, 0, 0)$ qui est sur la surface définie par $F - 4$. Nous allons voir que le point singulier de (F) de coordonnées $(2, 2, 2)$ est de type A_1 . On effectue d'abord un changement de coordonnées : $X'_1 = X_1 - 2$, $X'_2 = X_2 - 2$, $X'_3 = X_3 - 2$ afin de ramener la singularité à l'origine. Pour des raisons de commodité, on appelle encore X_1 , X_2 , X_3 les nouvelles variables. Ainsi F devient

$$F_0(X_1, X_2, X_3) = F(X_1 + 2, X_2 + 2, X_3 + 2).$$

Maintenant, on effectue un éclatement de l'origine. Pour simplifier les notations, on écrit $X := (X_1, X_2, X_3)$ un élément de $\mathbb{C}^3$ et $x := (x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. Considérons la variété

$$\Gamma := \{(X, x) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) / \exists \lambda \in \mathbb{C}, X = \lambda x\}.$$

La projection sur la première coordonnée $p : (X, x) \in \Gamma \mapsto X \in \mathbb{C}^3$ est un morphisme de variétés tel que $p^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, et induit un isomorphisme de $U := \Gamma \setminus p^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. La surface $S := \{X \in \mathbb{C}^3 / F_0(X) = 0\}$ possède une singularité isolée à l'origine. On pose alors

$$S_U := p^{-1}(S \setminus \{0\}) = \{(X, x) \in U; F_0(X) = 0\}.$$

Pour $(X, x) \in U$, $X = \lambda x$, la relation $F_0(X) = 0$ est équivalente à

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \lambda Q(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où $Q \in \mathbb{Z}[\lambda][X_1, X_2, X_3]$. On en déduit que l'adhérence S_Γ de S_U dans Γ est $S_\Gamma = S_U \cup E$, où

$$E := \{(0, x) \in \Gamma / (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2x_3 = 0\},$$

où $q(x) = (x_1 - x_2 - x_3)^2 - 4x_2x_3$ est une forme quadratique non dégénérée, donc E est une conique projective D , isomorphe à la droite projective. L'étude des cartes de S montre que cette modification n'a aucun point singulier sur sa fibre exceptionnelle. La désingularisation obtenue pour la singularité est donc une droite projective, et correspond donc à une singularité de type A_1 .

- Pour le groupe $G = \mathcal{G}_9$, on étudie une singularité de type A_2 . On pose d'abord

$$F = -X_1X_2X_3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^2 - 9X_3 + 27.$$

Le système d'équations $(\partial F/\partial X_1 = 0, \partial F/\partial X_2 = 0, \partial F/\partial X_3 = 0)$ est explicitement :

$$\begin{cases} 3X_1^2 - X_2X_3 = 0 \\ 3X_2^2 - X_1X_3 = 0 \\ 2X_3 - X_1X_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

La troisième équation permet d'écrire $X_3 = (X_1X_2 + 9)/2$. Après avoir remplacé X_3 dans les deux autres équations, le système se réduit à

$$\begin{cases} 6X_1^2 - X_2(X_1X_2 + 9) = 0 & (L_1) \\ 6X_2^2 - X_1(X_1X_2 + 9) = 0 & (L_2), \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} 6(X_1^2 + X_2^2) - (X_1 + X_2)(X_1X_2 + 9) = 0 \\ (X_1 - X_2)(6(X_1 + X_2) + X_1X_2 + 9) = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} (L_1) + (L_2) \\ (L_1) - (L_2) \end{pmatrix}$$

Si $X_1 = X_2$, la première équation donne $X_1(X_1 - 3)^2 = 0$, qui fournit les solutions $(0, 0, 9/2)$ et $(3, 3, 9)$. Sinon, le système équivaut à

$$\begin{cases} 6(X_1 + X_2)^2 - 12X_1X_2 - (X_1 + X_2)(X_1X_2 + 9) = 0 \\ X_1X_2 = -6(X_1 + X_2) - 9 \end{cases}$$

c'est-à-dire $X_1 + X_2 = -3$ et $X_1X_2 = 9$, amenant aux solutions :

$$\left(\frac{-3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, 9 \right) \text{ et } \left(\frac{-3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}, 9 \right).$$

En conclusion, le système possède quatre solutions :

$$(3, 3, 9), \left(\frac{-3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, 9 \right), \left(\frac{-3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}, 9 \right),$$

qui sont sur la surface définie par F , et $(0, 0, 9/2)$ qui est sur la surface définie par $F - 27/4$. Nous allons voir que le point singulier de (F) de coordonnées $(3, 3, 9)$ est de type A_2 . On effectue d'abord un changement de coordonnées : $X'_1 = X_1 - 3, X'_2 = X_2 - 3, X'_3 = X_3 - 9$ afin de ramener la singularité à l'origine. Pour des raisons de commodité, on appelle encore X_1, X_2, X_3 les nouvelles variables. Ainsi F devient

$$F_0(X_1, X_2, X_3) = F(X_1 + 3, X_2 + 3, X_3 + 9).$$

Maintenant, on effectue un éclatement de l'origine. Pour simplifier les notations, on écrit $X := (X_1, X_2, X_3)$ un élément de $\mathbb{C}^3$ et $x := (x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. Considérons la variété

$$\Gamma := \{(X, x) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) / \exists \lambda \in \mathbb{C}, X = \lambda x\}.$$

La projection sur la première coordonnée $p : (X, x) \in \Gamma \mapsto X \in \mathbb{C}^3$ est un morphisme de variétés tel que $p^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, et induit un isomorphisme de

$U := \Gamma \setminus p^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. La surface $S := \{X \in \mathbb{C}^3 / F_0(X) = 0\}$ possède une singularité isolée à l'origine. On pose alors

$$S_U := p^{-1}(S \setminus \{0\}) = \{(X, x) \in U; F_0(X) = 0\}.$$

Pour $(X, x) \in U$, $X = \lambda x$, la relation $F_0(X) = 0$ est équivalente à

$$9x_1^2 + 9x_2^2 - 9x_1x_2 - 3x_1x_3 - 3x_2x_3 + x_3^2 + \lambda Q(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où $Q \in \mathbb{Z}[\lambda][X_1, X_2, X_3]$. On en déduit que l'adhérence S_Γ de S_U dans Γ est $S_\Gamma = S_U \cup E$, où

$$E := \{(0, x) \in \Gamma / 9x_1^2 + 9x_2^2 - 9x_1x_2 - 3x_1x_3 - 3x_2x_3 + x_3^2 = 0\}.$$

Alors $p_{S_\Gamma} : S_\Gamma \rightarrow S$ est une modification de S à l'origine, dont la fibre exceptionnelle E est la réunion de deux droites projectives D_1 et D_2 , d'équations respectives :

$$\begin{aligned} D_1 : 2x_3 + (-3 + 3\sqrt{3})x_1 + (-3 - 3\sqrt{3})x_2 &= 0 \\ D_2 : 2x_3 + (-3 - 3\sqrt{3})x_1 + (-3 + 3\sqrt{3})x_2 &= 0 \end{aligned}$$

et dont le point d'intersection a pour coordonnées $(1, 1, 3)$. En conclusion, p_{S_Γ} est birationnelle, et induit un isomorphisme de $S_\Gamma \setminus E$ sur $S \setminus \{0\}$.

On recherche maintenant les points singuliers de S_Γ qui se trouvent sur E . On utilise les cartes usuelles sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, afin de construire des cartes sur S_Γ . Soit $U_3 := \{(X, x) \in \Gamma / x_3 \neq 0\}$ et l'application $\varphi_3 : U_3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ définie par $\varphi_3((X, x)) = (\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, X_3)$. φ_3 est un isomorphisme de variétés de $S_\Gamma \cap U_3$ sur la surface

$$\{(a, b, X_3) \in \mathbb{C}^3 / F^{(2)}(a, b, X_3) = 0\},$$

où

$$\begin{aligned} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) &= X_1^3 X_3 + X_2^3 X_3 + 9X_1^2 + 9X_2^2 - 9X_1 X_2 \\ &\quad - 3X_1 - 3X_2 - X_1 X_2 X_3 + 1 \end{aligned}$$

Le but est maintenant de trouver les points singuliers de cette surface qui sont sur $\varphi_3(E)$. Pour cela, il suffit de résoudre le système suivant ($X_3 = 0, F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_1} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_2} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_3} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0$), qui n'a aucune solution. On peut également définir les autres cartes usuelles (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) , pour constater qu'elles ne font apparaître aucun point singulier de S_Γ contenu dans E . Ainsi, la modification obtenue n'a aucun point singulier sur sa fibre exceptionnelle. La désingularisation obtenue pour la singularité est donc la réunion de deux droites projectives dont le diagramme d'intersection est de type A_2 .

- Pour le groupe $G = \mathcal{G}_8$, on étudie une singularité de type A_3 . On pose d'abord

$$F = X_3^2 - X_3 X_1 (X_2 + 4) - 4X_1^2 X_2 + X_1^4 + X_2 (X_2 + 4)^2.$$

Le système d'équations $(\partial F / \partial X_1 = 0, \partial F / \partial X_2 = 0, \partial F / \partial X_3 = 0)$ est explicitement :

$$\begin{cases} -X_3(X_2 + 4) - 8X_1 X_2 + 4X_1^3 &= 0 \\ -X_3 X_1 - 4X_1^2 + (X_2 + 4)(3X_2 + 4) &= 0 \\ 2X_3 - X_1(X_2 + 4) &= 0 \end{cases}$$

La troisième équation permet d'écrire $X_3 = X_1(X_2 + 4)/2$. Après avoir remplacé X_3 dans les deux autres équations, le système se réduit à

$$\begin{cases} X_1((X_2 + 4)^2 + 16X_2 - 8X_1^2) = 0 \\ -X_1^2(X_2 + 4) - 8X_1^2 + 2(X_2 + 4)(3X_2 + 4) = 0 \end{cases}$$

Si $X_1 = 0$, les solutions sont $(0, -4, 0)$ et $(0, -4/3, 0)$. Sinon, le système se réduit à

$$\begin{cases} (X_2 + 4)^2 + 16X_2 - 8X_1^2 = 0 & (L_1) \\ -X_1^2(X_2 + 12) + 2(X_2 + 4)(3X_2 + 4) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} (X_2 + 4)^2 + 16X_2 - 8X_1^2 = 0 \\ (X_2 - 4)^3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} (L_1) \\ (X_2 + 12)(L_1) - 8(L_2) \end{array} \right)$$

On obtient donc deux nouvelles solutions $(4, 4, 16)$ et $(-4, 4, -16)$. En conclusion, le système possède quatre solutions : $(0, -4, 0)$, $(4, 4, 16)$, $(-4, 4, -16)$ qui sont sur la surface définie par F , et $(0, -4/3, 0)$ qui est sur la surface définie par $F + 32/27$. Nous allons voir que le point singulier de (F) de coordonnées $(4, 4, 16)$ est de type A_3 . On effectue d'abord un changement de coordonnées : $X'_1 = X_1 - 4$, $X'_2 = X_2 - 4$, $X'_3 = X_3 - 16$ afin de ramener la singularité à l'origine. Pour des raisons de commodité, on appelle encore X_1, X_2, X_3 les nouvelles variables. Ainsi F devient

$$F_0(X_1, X_2, X_3) = F(X_1 + 4, X_2 + 4, X_3 + 16).$$

Maintenant, on effectue un éclatement de l'origine. Pour simplifier les notations, on écrit $X := (X_1, X_2, X_3)$ un élément de $\mathbb{C}^3$ et $x := (x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. Considérons la variété

$$\Gamma := \{(X, x) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) / \exists \lambda \in \mathbb{C}, X = \lambda x\}.$$

La projection sur la première coordonnée $p : (X, x) \in \Gamma \mapsto X \in \mathbb{C}^3$ est un morphisme de variétés tel que $p^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, et induit un isomorphisme de $U := \Gamma \setminus p^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. La surface $S := \{X \in \mathbb{C}^3 / F_0(X) = 0\}$ possède une singularité isolée à l'origine. On pose alors

$$S_U := p^{-1}(S \setminus \{0\}) = \{(X, x) \in U; F_0(X) = 0\}.$$

Pour $(X, x) \in U$, $X = \lambda x$, la relation $F_0(X) = 0$ est équivalente à

$$x_3^2 - 48x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 80x_1^2 + 20x_2^2 + \lambda Q(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où $Q \in \mathbb{Z}[\lambda][X_1, X_2, X_3]$. On en déduit que l'adhérence S_Γ de S_U dans Γ est $S_\Gamma = S_U \cup E$, où

$$E := \{(0, x) \in \Gamma / x_3^2 - 48x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 80x_1^2 + 20x_2^2 = 0\}.$$

Alors $p_{S_\Gamma} : S_\Gamma \rightarrow S$ est une modification de S à l'origine, dont la fibre exceptionnelle E est la réunion de deux droites projectives D_1 et D_2 , d'équations respectives :

$$\begin{aligned} D_1 : x_3 - 2(1 + 2i)x_2 - 4(1 - 2i)x_1 &= 0 \\ D_2 : x_3 - 2(1 - 2i)x_2 - 4(1 + 2i)x_1 &= 0 \end{aligned}$$

et dont le point d'intersection a pour coordonnées $(1, 2, 8)$. En conclusion, p_{S_Γ} est birationnelle, et induit un isomorphisme de $S_\Gamma \setminus E$ sur $S \setminus \{0\}$.

On recherche maintenant les points singuliers de S_Γ qui se trouvent sur E . On utilise les cartes usuelles sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, afin de construire des cartes sur S_Γ . Soit $U_1 := \{(X, x) \in \Gamma/x_1 \neq 0\}$ et l'application $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^3$ définie par $\varphi_1((X, x)) = (X_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1})$. φ_1 est un isomorphisme de variétés de $S_\Gamma \cap U_1$ sur la surface

$$\{(X_1, b, c) \in \mathbb{C}^3 / F^{(2)}(X_1, b, c) = 0\}$$

où

$$F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2^3 + 20X_2^2 - X_1 X_2 X_3 - 4X_2 X_3 - 48X_2 \\ + X_3^2 - 8X_3 + X_1^2 + 16X_1 + 80$$

Le but est maintenant de trouver les points singuliers de cette surface qui sont sur $\varphi_1(E)$. Pour cela, il suffit de résoudre le système suivant ($X_1 = 0, F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_1} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_2} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_3} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0$), qui a une unique solution $(X_1, X_2, X_3) = (0, 2, 8)$, correspondant au point d'intersection de

$$\begin{aligned} \varphi_1(D_1 \cap U_1) &= \{(0, b, c) | c - 2(1 + 2i)b - 4(1 - 2i) = 0\} \\ \text{et } \varphi_1(D_2 \cap U_1) &= \{(0, b, c) | c - 2(1 - 2i)b - 4(1 + 2i) = 0\}. \end{aligned}$$

On peut également définir les autres cartes usuelles (U_2, φ_2) et (U_3, φ_3) , pour voir qu'elles n'apportent aucun nouveau point singulier de S_Γ contenu dans E .

On étudie maintenant la surface $S^{(2)}$ dans $\mathbb{C}^3$ définie par $F^{(2)}$, qui possède un point singulier en $(0, 3, 18)$. On effectue à nouveau un changement de coordonnées pour mettre la singularité à l'origine. La nouvelle équation définissant la surface étudiée $F_0^{(2)}$ est

$$F_0^{(2)} = X_1^2 + X_1 X_2^3 + 6X_1 X_2^2 - X_1 X_2 X_3 - 2X_1 X_3 + 20X_2^2 - 4X_2 X_3 + X_3^2.$$

Les images par des droites originelles D_1 et D_2 dans ce changement de coordonnées sont

$$D'_1 := \{(0, X_2, X_3) / X_3 - 2(1 + 2i)X_2 = 0\}$$

et

$$D'_2 := \{(0, X_2, X_3) / X_3 - 2(1 - 2i)X_2 = 0\}$$

De la même manière que précédemment, on effectue un éclatement de l'origine. On obtient une modification de $S^{(2)}$ dont la fibre exceptionnelle $E^{(2)}$ est donnée par

$$E^{(2)} = \{(0, x) \in \Gamma / x_1^2 - 2x_1 x_3 + 20x_2^2 - 4x_2 x_3 + x_3^2 = 0\}$$

où $q(x) = x_1^2 - 2x_1 x_3 + 20x_2^2 - 4x_2 x_3 + x_3^2$ est une forme quadratique non dégénérée, donc $E^{(2)}$ est une conique projective D_3 , isomorphe à la droite projective. Dans cette modification, les images des droites originelles D_1 et D_2 sont :

$$\begin{aligned} D_1^{(2)} : & \{((0, X_2, X_3), x) \in U | X_3 - 2(1 + 2i)X_2 = 0\} \\ & \cup \{(0, 0, 0), (0, 1, 2(1 + 2i))\} \\ D_2^{(2)} : & \{((0, X_2, X_3), x) \in U | X_3 - 2(1 - 2i)X_2 = 0\} \\ & \cup \{(0, 0, 0), (0, 1, 2(1 - 2i))\} \end{aligned}$$

L'étude des cartes de $S^{(2)}$ montre que cette dernière modification n'a aucun point singulier sur sa fibre exceptionnelle. La désingularisation obtenue pour la singularité de départ est donc la réunion de trois droites projectives dont le diagramme d'intersection est de type A_3 .

- Pour le groupe $G = \mathcal{G}_7$, on étudie la singularité de type A_5 . On pose d'abord

$$F = X_3^2 - X_1(X_2 + 9)X_3 + X_2(X_2 + 9)^2 - (X_1^2 - 4X_2)(3X_1X_2 - X_1^3 - 27).$$

Le système d'équations $(\partial F/\partial X_1 = 0, \partial F/\partial X_2 = 0, \partial F/\partial X_3 = 0)$ est explicitement :

$$\begin{cases} -(X_2 + 9)X_3 - 2X_1(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) - 3(X_1^2 - 4X_2)(X_2 - X_1^2) & = 0 \\ -X_1X_3 + (X_2 + 9)^2 + 2X_2(X_2 + 9) + 4(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) - 3X_1(X_1^2 - 4X_2) & = 0 \\ 2X_3 - X_1(X_2 + 9) & = 0 \end{cases}$$

La troisième équation permet d'écrire $X_3 = X_1(X_2 + 9)/2$. Après avoir remplacé X_3 dans les deux autres équations, le système se réduit à

$$\begin{cases} -X_1(X_2 + 9)^2 - 4X_1(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) - 6(X_1^2 - 4X_2)(X_2 - X_1^2) & = 0 \quad (L_1) \\ 2(X_2 + 9)^2 + 8(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) - (X_2 + 9 + 6X_1)(X_1^2 - 4X_2) & = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

Par ailleurs, si $X_1 = 0$, (L_1) montre que $X_2 = 0$ et contredit (L_2) , donc $X_1 \neq 0$. On peut donc réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} (X_1^2 - 4X_2)[12(X_2 - X_1^2) + X_1(X_2 + 9 + 6X_1)] & = 0 \\ 2(X_2 + 9)^2 + 8(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) - (X_2 + 9 + 6X_1)(X_1^2 - 4X_2) & = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -2(L_1) - X_1(L_2) \\ (L_2) \end{pmatrix}$$

qui se décompose en deux systèmes :

$$\begin{cases} (X_1^2 - 4X_2) & = 0 \\ 2(X_2 + 9)^2 + 8(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [12(X_2 - X_1^2) + X_1(X_2 + 9 + 6X_1)] & = 0 \\ 2(X_2 + 9)^2 + 8(3X_1X_2 - X_1^3 - 27) - (X_2 + 9 + 6X_1)(X_1^2 - 4X_2) & = 0 \end{cases}$$

Dans chacun de ces systèmes, la première équation donne permet d'obtenir X_2 comme une fraction rationnelle en X_1 . En remplaçant X_2 dans la seconde équation et en factorisant, on obtient finalement :

$$\begin{cases} 4X_2 & = X_1^2 \\ (X_1 - 6)^3(X_1 + 2) & = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} X_2 & = \frac{3X_1(2X_1 - 3)}{X_1 + 12} \\ (X_1 + 3)^2(X_1 - 6)^2(5X_1 + 6) & = 0 \end{cases}$$

En conclusion, on constate que le système possède quatre solutions : $(-2, 1, -10)$, $(-3, 9, -27)$, $(6, 9, 54)$, qui sont sur la surface définie par F , et $(-6/5, 9/5, -162/25)$ qui est sur la surface définie par $F + 46656/3125$. Nous allons voir que le point singulier de (F) de coordonnées $(6, 9, 54)$ est de type A_5 . On effectue d'abord un changement de coordonnées : $X'_1 = X_1 - 6$, $X'_2 = X_2 - 9$, $X'_3 = X_3 - 54$ afin de ramener la singularité à l'origine. Pour des raisons de commodité, on appelle encore X_1, X_2, X_3 les nouvelles variables. Ainsi F devient

$$F_0(X_1, X_2, X_3) = F(X_1 + 6, X_2 + 9, X_3 + 54).$$

Maintenant, on effectue un éclatement de l'origine. Pour simplifier les notations, on écrit $X := (X_1, X_2, X_3)$ un élément de $\mathbb{C}^3$ et $x := (x_1, x_2, x_3)$ un élément de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$. Considérons la variété

$$\Gamma := \{(X, x) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C}) / \exists \lambda \in \mathbb{C}, X = \lambda x\}.$$

La projection sur la première coordonnée $p : (X, x) \in \Gamma \mapsto X \in \mathbb{C}^3$ est un morphisme de variétés tel que $p^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, et induit un isomorphisme de $U := \Gamma \setminus p^{-1}(0)$ sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. La surface $S := \{X \in \mathbb{C}^3 / F_0(X) = 0\}$ possède une singularité isolée à l'origine. On pose alors

$$S_U := p^{-1}(S \setminus \{0\}) = \{(X, x) \in U; F_0(X) = 0\}.$$

Pour $(X, x) \in U$, $X = \lambda x$, la relation $F_0(X) = 0$ est équivalente à

$$1053x_1^2 - 594x_1x_2 - 18x_1x_3 + 117x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2 + \lambda Q(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où $Q \in \mathbb{Z}[\lambda][X_1, X_2, X_3]$. On en déduit que l'adhérence S_Γ de S_U dans Γ est $S_\Gamma = S_U \cup E$, où

$$E := \{(0, x) \in \Gamma / 1053x_1^2 - 594x_1x_2 - 18x_1x_3 + 117x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2 = 0\}.$$

Alors $p_{S_\Gamma} : S_\Gamma \rightarrow S$ est une modification de S à l'origine, dont la fibre exceptionnelle E est la réunion de deux droites projectives D_1 et D_2 , d'équations respectives :

$$\begin{aligned} D_1 : 117x_1 + (-33 - 12\sqrt{3}i)x_2 + (-1 + 2\sqrt{3}i)x_3 &= 0 \\ D_2 : 117x_1 + (-33 + 12\sqrt{3}i)x_2 + (-1 - 2\sqrt{3}i)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

et dont le point d'intersection a pour coordonnées $(1, 3, 18)$. En conclusion, p_{S_Γ} est birationnelle, et induit un isomorphisme de $S_\Gamma \setminus E$ sur $S \setminus \{0\}$.

On recherche maintenant les points singuliers de S_Γ qui se trouvent sur E . On utilise les cartes usuelles sur $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$, afin de construire des cartes sur S_Γ . Soit $U_1 := \{(X, x) \in \Gamma / x_1 \neq 0\}$ et l'application $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^3$ définie par $\varphi_1((X, x)) = (X_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1})$. φ_1 est un isomorphisme de variétés de $S_\Gamma \cap U_1$ sur la surface

$$\{(X_1, b, c) \in \mathbb{C}^3 / F^{(2)}(X_1, b, c) = 0\}$$

où

$$\begin{aligned} F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) &= X_1^3 - 7X_1^2X_2 + 30X_1^2 + X_1X_2^3 + 12X_1X_2^2 - X_1X_2X_3 \\ &\quad - 126X_1X_2 + 297X_1 + 117X_2^2 - 6X_2X_3 - 594X_2 + X_3^2 - 18X_3 + 1053 \end{aligned}$$

Le but est maintenant de trouver les points singuliers de cette surface qui sont sur $\varphi_1(E)$. Pour cela, il suffit de résoudre le système suivant ($X_1 = 0, F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_1}F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_2}F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0, \partial_{X_3}F^{(2)}(X_1, X_2, X_3) = 0$), qui a une unique solution $(X_1, X_2, X_3) = (0, 3, 18)$, correspondant au point d'intersection de

$$\begin{aligned} \varphi_1(D_1 \cap U_1) &= \{(0, b, c) | 117 + (-33 - 12\sqrt{3}i)b + (-1 + 2\sqrt{3}i)c = 0\} \\ \text{et } \varphi_1(D_2 \cap U_1) &= \{(0, b, c) | 117 + (-33 + 12\sqrt{3}i)b + (-1 - 2\sqrt{3}i)c = 0\}. \end{aligned}$$

On peut également définir les autres cartes usuelles (U_2, φ_2) et (U_3, φ_3) , pour voir qu'elles n'apportent aucun nouveau point singulier de S_Γ contenu dans E .

On étudie maintenant la surface $S^{(2)}$ dans $\mathbb{C}^3$ définie par $F^{(2)}$, qui possède un point singulier en $(0, 3, 18)$. On effectue à nouveau un changement de coordonnées pour mettre la singularité à l'origine. La nouvelle équation définissant la surface étudiée $F_0^{(2)}$ est

$$\begin{aligned} F_0^{(2)} &= X_1^3 - 7X_1^2X_2 + 9X_1^2 + X_1X_2^3 + 21X_1X_2^2 - X_1X_2X_3 \\ &\quad - 45X_1X_2 - 3X_1X_3 + 117X_2^2 - 6X_2X_3 + X_3^2. \end{aligned}$$

Les images par des droites originelles D_1 et D_2 dans ce changement de coordonnées sont

$$D'_1 := \{(0, X_2, X_3)/(-33 - 12\sqrt{3}i)X_2 + (-1 + 2\sqrt{3}i)X_3 = 0\}$$

et

$$D'_2 := \{(0, X_2, X_3)/(-33 + 12\sqrt{3}i)X_2 + (-1 - 2\sqrt{3}i)X_3 = 0\}$$

De la même manière que précédemment, on effectue un éclatement de l'origine. On obtient une modification de $S^{(2)}$ dont la fibre exceptionnelle $E^{(2)}$ est donnée par

$$E^{(2)} = \{(0, x) \in \Gamma/9x_1^2 - 45x_1x_2 - 3x_1x_3 + 117x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2 = 0\}$$

qui se trouve être la réunion des deux droites projectives $D_3 : 6x + (-15 - 9\sqrt{3}i)y + (-1 + \sqrt{3}i)z = 0$, et $D_4 : 6x + (-15 + 9\sqrt{3}i)y + (-1 - \sqrt{3}i)z = 0$, qui s'intersectent au point de coordonnées $(4, 1, 9)$. Dans cette modification, les images des droites D_1 et D_2 sont respectivement

$$D_1^{(2)} : \{((0, X_2, X_3), x) \in U | (-33 - 12\sqrt{3}i)X_2 + (-1 + 2\sqrt{3}i)X_3 = 0\} \\ \cup \{(0, 0, 0), (0, (-1 + 2\sqrt{3}i), -(-33 - 12\sqrt{3}i))\}$$

et

$$D_2^{(2)} : \{((0, X_2, X_3), x) \in U | (-33 + 12\sqrt{3}i)X_2 + (-1 - 2\sqrt{3}i)X_3 = 0\} \\ \cup \{(0, 0, 0), (0, (-1 - 2\sqrt{3}i), -(-33 + 12\sqrt{3}i))\}$$

Le point de $D_1^{(2)}$ qui est dans la fibre exceptionnelle se trouve sur D_3 , et le point de $D_2^{(2)}$ qui est dans la fibre exceptionnelle se trouve sur D_4 . Comme précédemment, on recherche les points singuliers de $S_\Gamma^{(2)}$ qui sont sur $E^{(2)}$. φ_1 est un isomorphisme de variétés de $S_\Gamma^{(2)} \cap U_1$ sur la surface

$$\{(X_1, b, c) \in \mathbb{C}^3 / F^{(3)}(X_1, b, c) = 0\}$$

où

$$F^{(3)}(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2^3 + 21X_1X_2^2 - X_1X_2X_3 - 7X_1X_2 + X_1 \\ + 117X_2^2 - 6X_2X_3 - 45X_2 + X_3^2 - 3X_3 + 9,$$

a un point singulier en $(0, 1/4, 9/4)$, qui correspond au point d'intersection de $\varphi_1(D_3 \cup U_1) := \{(0, b, c) | (-1 + \sqrt{3}i)c + (-15 - 9\sqrt{3}i)b + 6 = 0\}$ et $\varphi_1(D_4 \cup U_1) := \{(0, b, c) | (-1 - \sqrt{3}i)c + (-15 + 9\sqrt{3}i)b + 6 = 0\}$. De même que précédemment, les autres cartes ne donnent aucun autre point singulier situé dans la fibre exceptionnelle. On étudie maintenant la singularité en $(0, 1/4, 9/4)$, de la surface définie par $F^{(3)}$. On effectue un changement de coordonnées pour remettre la singularité à l'origine, et on obtient la nouvelle équation :

$$F_0^{(3)}(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2^3 + 3/4X_1^2X_2^2 + 3/16X_1^2X_2 + 1/64X_1^2 + 21X_1X_2^2 \\ - X_1X_2X_3 + 5/4X_1X_2 - 1/4X_1X_3 + 117X_2^2 - 6X_2X_3 + X_3^2.$$

Les images des droites originelles D_3 et D_4 dans ce changement de coordonnées sont :

$$D'_3 := \{(0, b, c)/(-1 + \sqrt{3}i)c + (-15 - 9\sqrt{3}i)b = 0\}$$

$$D'_4 := \{(0, b, c)/(-1 - \sqrt{3}i)c + (-15 + 9\sqrt{3}i)b = 0\}$$

On effectue à nouveau un éclatement de l'origine : on obtient une modification de $S^{(3)}$ dont la fibre exceptionnelle $E^{(3)}$ est donnée par

$$E^{(3)} = \{(0, x) \in \Gamma / 117x_1^2 + 5/4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 1/64x_2^2 - 1/4x_2x_3 + x_3^2 = 0\}$$

où $q(x) = 117x_1^2 + 5/4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 1/64x_2^2 - 1/4x_2x_3 + x_3^2$ est une forme quadratique non dégénérée, donc $E^{(3)}$ est une conique projective D_5 , isomorphe à la droite projective. Dans cette modification, les images des droites originelles D_3 et D_4 :

$$\begin{aligned} D_3^{(3)} : & \{((0, X_2, X_3), x) \in U | (-1 + \sqrt{3}i)X_3 + (-15 - 9\sqrt{3}i)X_2 = 0\} \\ & \cup \{(0, 0, 0), (0, (-1 + \sqrt{3}i), -(-15 - 9\sqrt{3}i))\} \\ D_4^{(3)} : & \{((0, X_2, X_3), x) \in U | (-1 - \sqrt{3}i)X_3 + (-15 + 9\sqrt{3}i)X_2 = 0\} \\ & \cup \{(0, 0, 0), (0, (-1 - \sqrt{3}i), -(-15 + 9\sqrt{3}i))\} \end{aligned}$$

L'étude des cartes de $S^{(3)}$ montre que cette dernière modification n'a aucun point singulier sur sa fibre exceptionnelle. La désingularisation obtenue pour la singularité de départ est donc la réunion de cinq droites projectives dont le diagramme d'intersection est de type A_5 .

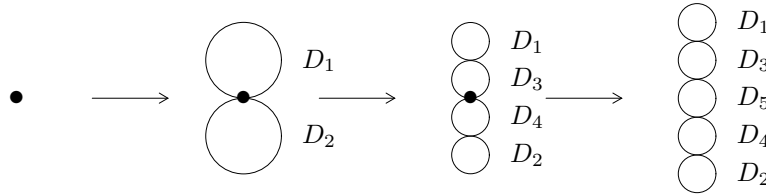


FIG. 5.1 – Eclatements successifs

□

Dans chaque cas, on observe que le graphe de la désingularisation d'une singularité correspond au diagramme de Dynkin d'un sous-groupe du groupe G dont on considère l'action, et que la singularité la plus complexe est de type correspondant au groupe G lui-même [GSV83].

De plus, si on note F la relation satisfaite par les générateurs, la famille de surfaces $S_\lambda = (F - \lambda)$ est une famille de surfaces lisses, sauf pour $\lambda = 0$ et une autre valeur particulière λ_0 , pour laquelle la surface possède exactement un point singulier de type A_1 .

5.3 Propriété d'engendrement fini de l'algèbre de Lie

Pour chaque algèbre de Lie $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G, \{\cdot, \cdot\})$, avec $G = \mathcal{G}_7, \mathcal{G}_8, \mathcal{G}_9$, ou $\mathcal{G}_{10}$, on détermine explicitement un système générateur de cardinal fini.

5.3.1 Le cas du groupe $\mathcal{G}_7$

L'orbite de $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sous l'action de $\mathcal{G}_7$ est

$$\mathcal{G}_7 \cdot (a, b) = \{(a, b), (a - b, a), (-b, a - b), (-a, -b), (-a + b, -a), (b, -a + b)\},$$

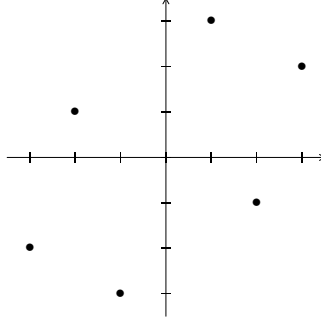


FIG. 5.2 – Orbite sous l'action de $\mathcal{G}_7$

On rappelle la notation

$$R_{a,b} := \frac{1}{|G|} \sum_{(i,j) \in G \cdot (a,b)} T^{(i,j)}.$$

On a alors les égalités

$$R_{a,b} = R_{-a,-b} = R_{a-b,a} = R_{-a+b,-a} = R_{-b,a-b} = R_{b,-a+b}. \quad (5.1)$$

On choisit comme système de représentants des orbites : $\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^-; (0, 0)\}$, ainsi, les éléments $R_{0,0}$, et $R_{a,-b}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ forment une base de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_7}$.

Avec les notations précédentes, pour tous entiers a, b, c, d , on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_7| \{R_{a,-b}, R_{c,-d}\} &= (ad - bc)(R_{a-c,-b+d} - R_{a+c,-b-d}) \\ &\quad + (bd + (a+b)c)(R_{a+c+d,-b+c} - R_{a-c-d,-b-c}) \\ &\quad + (ac + (a+b)d)(R_{a+d,-b+c+d} - R_{a-d,-b-c-d}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

PROPOSITION 5.3.1

L'algèbre des invariants $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_7}, \{\cdot, \cdot\})$ est engendrée par les neuf éléments :

$$R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{2,0}, R_{3,0}, R_{4,0}, R_{5,0}, R_{1,-1}, R_{1,-2}, R_{1,-3}.$$

Démonstration : On note A' la sous-algèbre de Lie engendrée par les éléments cités dans la proposition, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E_n := \{R_{a,-b}, a \geq 1, b \geq 1, a+b = n\} \cup \{R_{a,0}, a = n-1\}.$$

En utilisant la formule (5.2) pour des entiers particuliers et en faisant apparaître principalement les représentants des orbites choisis dans les indices grâce à (5.1), on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 6\{R_{a,-b}, R_{1,0}\} &= -b(R_{a-1,-b} - R_{a+1,-b}) \\ &\quad + (a+b)(R_{a+1,-(b-1)} - R_{a-1,-(b+1)}) \\ &\quad + a(R_{a,-(b-1)} - R_{a,-(b+1)}) \quad \text{pour tous } a \geq 1, b \geq 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
6\{R_{a,-b}, R_{1,-1}\} &= (a-b)(R_{a-1,-(b-1)} - R_{a+1,-(b+1)}) \\
&\quad + (a+2b)(R_{a+2,-(b-1)} - R_{a-2,-(b+1)}) \\
&\quad + (2a+b)(R_{a+1,-(b-2)} - R_{a-1,-(b+2)}) \quad \text{pour tous } a \geq 1, b \geq 1
\end{aligned} \tag{5.4}$$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1, 2$: $E_1, E_2 \subset A'$, par construction de A' .
- Pour $n = 3$: $E_3 = \{R_{1,-2}, R_{2,-1}, R_{2,0}\}$. Par construction, $R_{1,-2}$ et $R_{2,0}$ sont dans A' et d'après l'égalité (5.3),

$$6\{R_{1,-1}, R_{1,0}\} = R_{2,-1} - R_{1,-2},$$

donc $R_{2,-1} \in A'$.

- Pour $n = 4$: $E_4 = \{R_{1,-3}, R_{2,-2}, R_{3,-1}, R_{3,0}\}$. Par construction, $R_{1,-3}$ et $R_{3,0}$ sont dans A' , et d'après (5.3)

$$6\{R_{1,-2}, R_{1,0}\} = -2(R_{2,0} - R_{2,-2}) + 3(R_{2,-1} - R_{3,0}) + (R_{1,-1} - R_{1,-3}),$$

ainsi $R_{2,-2} \in A'$. Ensuite, d'après (5.3)

$$6\{R_{2,-1}, R_{1,0}\} = -(R_{2,-1} - R_{3,-1}) + 3(R_{3,0} - R_{1,-2}) + 2(R_{2,0} - R_{2,-2}),$$

donc $R_{3,-1} \in A'$, et $E_4 \subset A'$.

- Pour $n = 5$ et $n = 6$, la méthode est la même : on suppose que tous les E_k , $k < n$ sont dans A' . Par hypothèse, on a aussi $R_{n-1,0} \in A'$. Alors d'après (5.4)

$$\begin{aligned}
6\{\underbrace{R_{n-3,-1}}_{\in E_{n-2}}, R_{1,-1}\} &= \underbrace{(n-4)}_{\neq 0} \underbrace{(R_{n-4,0} - R_{n-2,-2})}_{\in E_{n-3}} + (n-1) \underbrace{(R_{n-1,0} - R_{n-5,-2})}_{\in A'} \\
&\quad + (2n-5) \underbrace{(R_{1,-(n-3)} - R_{n-4,-3})}_{\in E_{n-2}} \underbrace{\phantom{(R_{1,-(n-3)} - R_{n-4,-3})}}_{\in E_{n-1}}
\end{aligned}$$

et donc $R_{n-2,-2} \in A'$. Ensuite, pour $k = 1, \dots, n-2$, d'après (5.3)

$$\begin{aligned}
6\{\underbrace{R_{k,-(n-1-k)}}_{\in E_{n-1}}, R_{1,0}\} &= -(n-1-k) \underbrace{(R_{k-1,-(n-1-k)} - R_{k+1,-(n-1-k)})}_{\in E_{n-2} \cup E_{n-1}} \\
&\quad + (n-1) \underbrace{(R_{k+1,-(n-2-k)} - R_{k-1,-(n-k)})}_{\in E_{n-1} \cup \{R_{n-1,0}\}} \\
&\quad + k \underbrace{(R_{k,-(n-2-k)} - R_{k,-(n-k)})}_{\in E_{n-2} \cup E_{n-1}}
\end{aligned}$$

De proche en proche, à partir de $R_{n-2,-2}$, on obtient dans A' les éléments $R_{1,-(n-1)}, \dots, R_{n-1,-1}$.

- Pour $n \geq 6$ fixé, on suppose que $\bigcup_{k=1, \dots, n} E_k \subseteq A'$, et on montre que $E_{n+1} \subseteq A'$.

1. En utilisant la relation suivante, obtenue par (5.4),

$$\begin{aligned}
6\{\underbrace{R_{2,-(n-3)}}_{\in E_{n-1}}, R_{1,-1}\} &= \underbrace{(5-n)}_{\neq 0} \underbrace{(R_{1,-(n-4)} - R_{3,-(n-2)})}_{\in E_{n-3}} \\
&\quad + (2n-4) \underbrace{(R_{4,-(n-4)} - R_{n-2,0})}_{\in E_n} \\
&\quad + (n+1) \underbrace{(R_{3,-(n-5)} - R_{1,-(n-1)})}_{\in E_{n-2}},
\end{aligned}$$

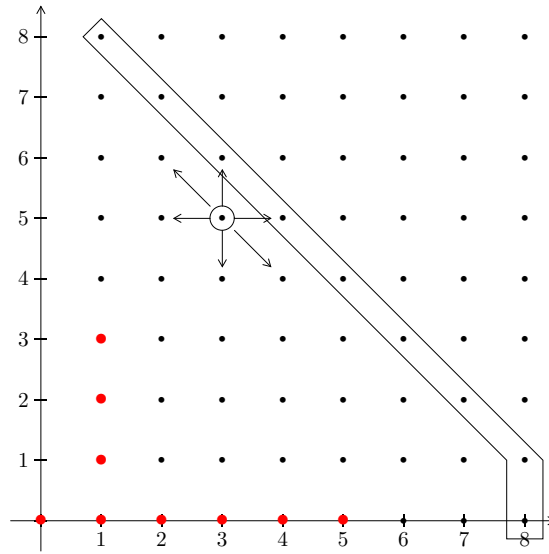


FIG. 5.4 – Deuxième étape de la récurrence

4. En reprenant l'idée de l'avant-dernier point, d'après (5.3) :

$$\begin{aligned}
 6\{\underbrace{R_{n-1,-1}}_{\in E_n}, R_{1,0}\} &= -(\underbrace{R_{n-2,-1}}_{\in E_{n-1}} - R_{n,-1}) + n(\underbrace{R_{n,0}}_{\in A'} - \underbrace{R_{n-2,-2}}_{\in E_n}) \\
 &\quad + (n-1)(\underbrace{R_{n-1,0}}_{\in E_n} - \underbrace{R_{n-1,-2}}_{\in A'})
 \end{aligned}$$

Ainsi, $R_{n,-1} \in A'$.

5. Enfin, on obtient $R_{1,-n}$ grâce à la relation

$$\begin{aligned}
 6\{\underbrace{R_{1,-(n-1)}}_{\in E_n}, R_{1,0}\} &= -(n-1)(\underbrace{R_{n-1,0}}_{\in E_n} - \underbrace{R_{2,-(n-1)}}_{\in A'}) + n(\underbrace{R_{2,-(n-2)}}_{\in E_n} - \underbrace{R_{n,0}}_{\in A'}) \\
 &\quad + (\underbrace{R_{2,-(n-2)}}_{\in E_n} - R_{1,-n})
 \end{aligned}$$

□

5.3.2 Le cas du groupe $\mathcal{G}_8$

On rappelle que $\mathcal{G}_8 = \langle DS \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$. L'orbite d'un élément (a, b) du réseau $\mathbb{Z}^2$ sous l'action de $\mathcal{G}_8$ est

$$\mathcal{G}_8 \cdot (a, b) = \{(a, b), (-b, a), (-a, -b), (b, -a)\},$$

ce qui signifie qu'on a les égalités suivantes

$$R_{a,b} = R_{-a,-b} = R_{-b,a} = R_{b,-a}.$$

On choisit comme système de représentants des orbites : $\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, (0, 0)\}$, ainsi, les éléments $R_{0,0}$, et $R_{a,b}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ forment une base de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_8}$. Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_8| \{R_{a,b}, R_{c,d}\} &= (ad - bc)(R_{a+c, b+d} - R_{a-c, b-d}) \\ &\quad + (ac + bd)(R_{a-d, b+c} - R_{a+d, b-c}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

PROPOSITION 5.3.2

L'algèbre des invariants $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_8}, \{\cdot, \cdot\})$ est engendrée par les huit éléments

$$R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{2,0}, R_{3,0}, R_{4,0}, R_{1,1}, R_{1,2}, R_{1,3}.$$

Démonstration : On note A' la sous-algèbre de Lie engendrée par les éléments cités dans la proposition, et pour $n \geq 2$, on note

$$E_n := \{R_{a,b}, a \geq 1, b \geq 1, a + b = n\} \cup \{R_{n-2,0}\}.$$

On utilisera les relations suivantes, obtenues à partir de l'égalité (5.5), avec des entiers a, b bien choisis :

$$\begin{aligned} 4\{R_{a,b}, R_{1,0}\} &= -b(R_{a+1,b} - R_{a-1,b}) \\ &\quad + a(R_{a,b+1} - R_{a,b-1}) \quad (a \geq 1, b \geq 1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} 4\{R_{a,b}, R_{1,1}\} &= (a - b)(R_{a+1,b+1} - R_{a-1,b-1}) \\ &\quad + (a + b)(R_{a-1,b+1} - R_{a+1,b-1}) \quad (a \geq 1, b \geq 1) \end{aligned} \quad (5.7)$$

On procède alors par récurrence sur $n \geq 2$.

- Pour $n = 2$: On a déjà $E_2 = \{R_{1,1}, R_{0,0}\} \subset A'$.
- Pour $n = 3$: $E_3 = \{R_{1,2}, R_{2,1}, R_{1,0}\}$. Il faut montrer que $R_{2,1}$ est bien dans A' . D'après (5.6), $4\{R_{1,1}, R_{1,0}\} = -R_{2,1} + R_{1,2}$. Donc $R_{2,1} \in A'$.
- Pour $n = 4$: $E_4 = \{R_{1,3}, R_{2,2}, R_{3,1}, R_{0,0}\}$. Il faut montrer que $R_{2,2}$, et $R_{3,1}$ sont dans A' . Or d'après (5.6)

$$4\{R_{1,2}, R_{1,0}\} = -2(R_{2,2} - R_{2,0}) + (R_{1,3} - R_{1,1}),$$

ainsi $R_{2,2} \in A'$. De même,

$$4\{R_{2,1}, R_{1,0}\} = -(R_{3,1} - R_{1,1}) + 2(R_{2,2} - R_{2,0}),$$

donc $R_{3,1} \in A'$.

- Pour $n = 5$ et $n = 6$, la méthode est la même : on suppose que tous les E_k , $k < n$ sont dans A' . Par hypothèse, on a aussi $R_{n-2,0} \in A'$. Alors d'après (5.7)

$$4\{R_{n-3,1}, R_{1,1}\} = (n - 4)(R_{n-2,2} - R_{n-4,0}) + (a + 1)(R_{n-4,2} - R_{n-2,0}).$$

Donc $R_{n-2,2} \in A'$. Ensuite, pour $k = 1, \dots, n - 2$, d'après (5.6) :

$$\begin{aligned} 4\{\underbrace{R_{n-1-k,k}}_{\in E_{n-1}}, R_{1,0}\} &= -\underbrace{k}_{\neq 0} \left(R_{n-k,k} - \underbrace{R_{n-2-k,k}}_{\in E_{n-2} \cup \{R_{n-2,0}\}} \right) \\ &\quad + \underbrace{(n-1-k)}_{\neq 0} \left(R_{n-1-k,k+1} - \underbrace{R_{n-1-k,k-1}}_{\in E_{n-2} \cup \{R_{n-2,0}\}} \right) \end{aligned}$$

A partir de $R_{n-2,2}$, de proche en proche, on constate que les éléments $R_{1,n-1}$, $R_{2,n-2}, \dots, R_{n-2,2}$, $R_{n-1,1}$ sont aussi dans A' .

- Pour $n \geq 6$ fixé, on suppose que $\bigcup_{k=1, \dots, n} E_k \subseteq A'$, et on montre que $E_{n+1} \subseteq A'$.

1. En utilisant la relation suivante

$$4\{\underbrace{R_{2,n-3}, R_{1,1}}_{\in E_{n-1}}\} = -\underbrace{(n-5)}_{\neq 0}(\underbrace{R_{3,n-2} - R_{1,n-4}}_{\in E_{n-3}}) + (n-1)(\underbrace{R_{1,n-2}}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{R_{3,n-4}}_{\in E_{n-1}})$$

on obtient $R_{3,n-2} \in A'$.

2. En utilisant la relation pour $k = 2, \dots, n-2$:

$$4\{\underbrace{R_{n-k,k}, R_{1,0}}_{\in E_n}\} = -\underbrace{k}_{\neq 0}(\underbrace{R_{n+1-k,k} - R_{n-1-k,k}}_{\in E_{n-1}}) + \underbrace{(n-k)}_{\neq 0}(\underbrace{R_{n-k,k+1} - R_{n-k,k-1}}_{\in E_{n-1}})$$

A partir de $R_{3,n-2}$, de proche en proche, on obtient que les $R_{2,n-1}$, $R_{3,n-2}$, ..., $R_{n-2,3}$, $R_{n-1,2}$ sont dans A' .

3. Ensuite, $R_{n-1,0} \in A'$:

$$4\{\underbrace{R_{1,n-2}, R_{1,1}}_{\in E_{n-1}}\} = -(n-3)(\underbrace{R_{2,n-1}}_{\in A'} - \underbrace{R_{n-2,0}}_{\in E_n}) + (n-1)(\underbrace{R_{n-1,0}}_{\in A'} - \underbrace{R_{2,n-3}}_{\in E_{n-1}})$$

4. Puis $R_{1,n} \in A'$:

$$4\{\underbrace{R_{1,n-1}, R_{1,0}}_{\in E_n}\} = -(n-1)(\underbrace{R_{2,n-1}}_{\in A'} - \underbrace{R_{n-1,0}}_{\in A'}) + (\underbrace{R_{1,n}}_{\in A'} - \underbrace{R_{1,n-2}}_{\in E_{n-1}})$$

5. Enfin, $R_{n,1} \in A'$:

$$4\{\underbrace{R_{n-1,1}, R_{1,0}}_{\in E_n}\} = -(\underbrace{R_{n,1}}_{\in A'} - \underbrace{R_{n-2,1}}_{\in E_{n-1}}) + (n-1)(\underbrace{R_{n-1,2}}_{\in A'} - \underbrace{R_{n-1,0}}_{\in A'})$$

□

5.3.3 Le cas du groupe $\mathcal{G}_9$

On rappelle que $\mathcal{G}_9 = \langle X^2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rangle$. L'orbite de $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sous l'action de $\mathcal{G}_9$ est

$$\mathcal{G}_9 \cdot (a, b) = \{(a, b), (-b, a-b), (-a+b, -a)\},$$

ce qui signifie que $R_{a,b} = R_{-b,a-b} = R_{-a+b,-a}$. On choisit comme système de représentants des orbites : $\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, (0, 0)\}$, ainsi, les éléments $R_{0,0}$, et $R_{a,b}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ forment une base de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_9}$. Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_9| \{R_{a,b}, R_{c,d}\} &= (ad - bc)R_{a+c, b+d} \\ &\quad - (bd + (a-b)c)R_{a-c+d, b-c} \\ &\quad + (ac + (b-a)d)R_{a-d, b+c-d} \end{aligned} \quad (5.8)$$

PROPOSITION 5.3.3

L'algèbre des invariants $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_9}, \{\cdot, \cdot\})$ est engendrée par les sept éléments

$$R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{1,1}, R_{1,2}, R_{1,3}, R_{2,0}, R_{3,0}.$$

Démonstration : On note A' la sous-algèbre de Lie engendrée par les éléments cités dans la proposition. On note aussi $E_2 = \{R_{1,1}\}$, et pour $n > 2$,

$$E_n := \{R_{a,b}, a \geq 1, b \geq 1, a + b = n\} \cup \{R_{n-3,0}\}.$$

On utilisera les relations suivantes, avec des $a, b \geq 1$ bien choisis :

$$3\{R_{a,b}, R_{1,0}\} = -bR_{a+1,b} - (a-b)R_{a-1,b-1} + aR_{a,b+1} \quad (5.9)$$

$$3\{R_{a,b}, R_{1,1}\} = (a-b)R_{a+1,b+1} - aR_{a,b-1} + bR_{a-1,b} \quad (5.10)$$

On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

- Pour $n = 2$: $E_2 = \{R_{1,1}\} \subset A'$.
- Pour $n = 3$: $E_3 = \{R_{1,2}, R_{2,1}, R_{0,0}\}$. Les éléments $R_{1,2}$ et $R_{0,0}$ sont déjà dans A' par construction, et d'après 5.9,

$$3\{R_{1,1}, R_{1,0}\} = -R_{2,1} + R_{1,2},$$

donc $R_{2,1} \in A'$.

- Pour $n = 4$: $E_4 = \{R_{1,3}, R_{2,2}, R_{3,1}, R_{1,0}\}$. Il faut montrer que $R_{2,2}$ et $R_{3,1}$ sont dans A' . Or d'après 5.9,

$$3\{R_{1,2}, R_{1,0}\} = -2R_{2,2} + R_{1,0} + R_{1,3},$$

donc $R_{2,2} \in A'$. Ensuite,

$$3\{R_{2,1}, R_{1,0}\} = -R_{3,1} - R_{1,0} + 2R_{2,2},$$

donc $R_{3,1} \in A'$.

- Pour $n = 5$: $E_5 = \{R_{1,4}, R_{2,3}, R_{3,2}, R_{4,1}, R_{2,0}\}$. Or d'après 5.10

$$3\{R_{2,1}, R_{1,1}\} = R_{3,2} - 2R_{2,0} + R_{1,1},$$

donc $R_{3,2} \in A'$. Puis par 5.9, pour $k = 2, 3$,

$$3\{R_{k,4-k}, R_{1,0}\} = -(4-k)\underline{R_{k+1,4-k}} - (2k-4)R_{k-1,3-k} + k\underline{R_{k,5-k}}.$$

Donc de proche en proche, à partir de $R_{3,2}$, on voit que les éléments $R_{4,1}$ et $R_{2,3}$ sont aussi dans A' . Enfin

$$3\{R_{1,3}, R_{1,0}\} = -3\underline{R_{2,3}} + 2R_{2,0} + k\underline{R_{1,4}}.$$

Comme $R_{2,0}$ est dans A' par construction, on a également $R_{1,4} \in A'$.

- Pour $n = 6$: $E_6 = \{R_{1,5}, R_{2,4}, R_{3,3}, R_{4,2}, R_{5,1}, R_{3,0}\}$, et $R_{3,0}$ est dans A' par construction. Par ailleurs, d'après 5.10,

$$3\{R_{3,1}, R_{1,1}\} = 2R_{4,2} - 3R_{3,0} + R_{2,1},$$

donc $R_{4,2}$ est dans A' et par 5.9, pour $k = 2, \dots, 4$,

$$3\{R_{k,5-k}, R_{1,0}\} = -(5-k)\underline{R_{k+1,5-k}} - (2k-5)R_{k-1,4-k} + k\underline{R_{k,6-k}}$$

Donc de proche en proche, à partir de $R_{4,2}$, on voit que les éléments $R_{5,1}$, $R_{3,3}$ et $R_{2,4}$ sont aussi dans A' . Enfin

$$3\{R_{1,4}, R_{1,0}\} = -4\underline{R_{2,4}} + 3R_{3,0} + \underline{R_{1,5}}.$$

Comme $R_{3,0}$ est dans A' par construction, on a également $R_{1,5} \in A'$.

- Soit maintenant $n \geq 6$ fixé, on suppose que $\bigcup_{k=1, \dots, n} E_k \subseteq A'$, et on montre que

E_{n+1} est inclus dans A' .

1. En utilisant la relation suivante

$$3\{\underbrace{R_{n-3,2}}_{\in E_{n-1}}, R_{1,1}\} = \underbrace{(n-5)}_{\neq 0} R_{n-2,3} - (n-3) \underbrace{R_{n-3,1}}_{\in E_{n-2}} + 2 \underbrace{R_{n-4,2}}_{\in E_{n-2}}$$

on obtient $R_{n-2,3} \in A'$.

2. Puis pour $k = 2, \dots, n-2$:

$$3\{\underbrace{R_{k,n-k}}_{\in E_n}, R_{1,0}\} = - \underbrace{(n-k)}_{\neq 0} R_{k+1,n-k} - (2k-n) \underbrace{R_{k-1,n-k-1}}_{\in E_{n-2}} + \underbrace{k}_{\neq 0} R_{k,n-k+1}$$

A partir de $R_{n-2,3}$, de proche en proche, on voit ainsi que les éléments $R_{2,n-1}$, $R_{3,n-2}$, ..., $R_{n-2,3}$, $R_{n-1,2}$ sont dans A' .

3. Ensuite, $R_{n-2,0} \in A'$:

$$3\{\underbrace{R_{1,n-2}}_{\in E_{n-1}}, R_{1,1}\} = (3-n) \underbrace{R_{2,n-1}}_{\in A'} - \underbrace{R_{1,n-3}}_{\in E_{n-2}} + (n-2) R_{n-2,0}$$

4. Puis $R_{1,n} \in A'$:

$$3\{\underbrace{R_{1,n-1}}_{\in E_n}, R_{1,0}\} = -(n-1) \underbrace{R_{2,n-1}}_{\in A'} + (n-2) \underbrace{R_{n-2,0}}_{\in A'} + R_{1,n}$$

5. Enfin, $R_{n,1} \in A'$:

$$3\{\underbrace{R_{n-1,1}}_{\in E_n}, R_{1,0}\} = -R_{n,1} - (n-2) \underbrace{R_{n-2,0}}_{\in A'} + (n-1) \underbrace{R_{n-1,2}}_{\in A'}$$

□

5.3.4 Le cas du groupe $\mathcal{G}_{10}$

L'orbite de $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sous l'action de $G := \mathcal{G}_{10}$ est

$$G \cdot (a, b) = \{(a, b), (-a, -b)\},$$

ce qui signifie que $R_{a,b} = R_{-a,-b}$. On choisit comme système de représentants des orbites : $\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}; (0, b), b \in \mathbb{N}\}$, ainsi, les éléments $R_{0,b}$, $b \in \mathbb{N}$ et $R_{a,b}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ forment une base de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_{10}}$.

Avec les notations précédentes, on a

$$|\mathcal{G}_{10}| \{R_{a,b}, R_{c,d}\} = (ad - bc)(R_{a+c, b+d} - R_{a-c, b-d})$$

PROPOSITION 5.3.4

L'algèbre des invariants $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_{10}}, \{\cdot, \cdot\})$ est engendrée par les cinq éléments

$$R_{0,0} = 1, \quad R_{1,0} = \frac{x + x^{-1}}{2}, \quad R_{0,1} = \frac{y + y^{-1}}{2}, \quad R_{1,1} = \frac{xy + x^{-1}y^{-1}}{2}, \quad R_{2,0} = \frac{x^2 + x^{-2}}{2}.$$

Démonstration : On note A' la sous-algèbre de Lie engendrée par ces cinq éléments. On utilisera les relations suivantes :

$$2\{R_{a,b}, R_{1,0}\} = -b(R_{a+1,b} - R_{a-1,b}) \quad (5.11)$$

$$2\{R_{a,b}, R_{0,1}\} = a(R_{a,b+1} - R_{a,b-1}) \quad (5.12)$$

En procédant par récurrence sur a , on montre que tous les $R_{a,b}$ sont dans A' .

- Pour $a = 1$: d'après 5.11, $2\{R_{1,n}, R_{0,1}\} = R_{1,n+1} - R_{1,n-1}$. Comme $R_{1,0}$ et $R_{1,1}$ sont dans A' , de proche en proche, on voit que tous les $R_{1,b}$, $b \in \mathbb{Z}$ sont dans A' .
- Pour $a = 2$: on a d'abord $2\{R_{1,1}, R_{1,0}\} = R_{0,1} - R_{2,1}$. Ainsi, $R_{2,1} \in A'$. Puis $2\{R_{2,n}, R_{0,1}\} = 2(R_{2,n+1} - R_{2,n-1})$, comme $R_{2,0}$ et $R_{2,1}$ sont dans A' , de proche en proche, on voit que tous les $R_{2,b}$, $b \in \mathbb{Z}$ sont dans A' .
- Pour $a = 0$: $2\{R_{1,b}, R_{1,0}\} = -b(R_{2,b} - R_{0,b})$ pour tout $b > 0$, donc les $R_{0,b}$, $b > 0$ sont dans A' .
- Pour $a > 2$:
- $2\{R_{a-1,b}, R_{1,0}\} = -b(R_{a,b} - R_{a-2,b})$, donc pour $b \neq 0$, par récurrence, tous les $R_{a,b}$, $b \neq 0$ sont dans A' . Enfin, $2\{R_{a,1}, R_{0,1}\} = a(R_{a,2} - R_{a,0})$ donc $R_{a,0}$ est dans A' .

□

REMARQUE 5.3.5

Pour chaque sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{Z})$, nous avons exhibé un système générateur de l'algèbre de Lie $(\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G, \{\cdot, \cdot\})$. On peut remarquer que le cardinal de ce système générateur est égal au nombre de Milnor associé au polynôme F définissant la surface donnée par l'algèbre des invariants.

5.4 Déformation

5.4.1 Le tore quantique

On considère maintenant une quantification des algèbres de Poisson précédentes au sens donné au paragraphe 2.4.1.

Soit q un complexe non nul, et non racine de l'unité. On définit le tore quantique par l'algèbre

$$\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] := \frac{\mathbb{C}\langle x, y, z, t \rangle}{(xz = 1, zx = 1, yt = 1, ty = 1, yx = qxy)}.$$

On peut également voir cette algèbre comme le localisé du plan quantique

$$\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] = S^{-1} \left(\frac{\mathbb{C}\langle x, y \rangle}{(yx = qxy)} \right)$$

où $S = \{\lambda x^m y^n; \lambda \in \mathbb{C}^*; m, n \in \mathbb{N}\}$, qui est un système multiplicatif d'éléments réguliers normaux. Le tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est clairement une déformation de l'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ étudiée précédemment, au sens du paragraphe 2.4.1.

Cette algèbre possède une base de Poincaré-Birkhoff-Witt sur $\mathbb{C}$: la famille des monômes $(x^m y^n)$ avec (m, n) dans $\mathbb{Z}^2$. on considère la structure de Lie induite par le crochet de commutation. Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$[x^a y^b, x^c y^d] = (q^{bc} - q^{ad}) x^{a+c} y^{b+d}.$$

La structure de Lie obtenue est donc très ressemblante à celle du cas commutatif. On rappelle que dans le cas Poisson, le crochet de deux monômes est donné par

$$\{x^a y^b, x^c y^d\} = (ad - bc)x^{a+c}y^{b+d}.$$

En particulier, le coefficient $(q^{bc} - q^{ad})$ s'annule si et seulement si $(ad - bc)$ s'annule. Par une preuve analogue à celle du cas Poisson, on obtient donc le résultat suivant :

PROPOSITION 5.4.1

Le tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est engendré comme algèbre de Lie pour le crochet de commutation par les éléments $1, x, x^{-1}, y, y^{-1}$.

De même que l'algèbre de Weyl qui déforme le plan symplectique, l'algèbre $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ possède la propriété d'être une algèbre non commutative simple.

Ce résultat est une conséquence d'une propriété plus forte, concernant la structure de Lie de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ pour le crochet de commutation, énoncée ci-dessous. On note $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^+$ le sous-espace de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ engendré par les monômes ordonnés non constants.

PROPOSITION 5.4.2

Munie du crochet de commutation, l'algèbre $(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}], [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie dont les seuls idéaux sont $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^+$, et $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

Démonstration : La démonstration est analogue à celle faite dans le cas Poisson. On l'adapte ici en détails. Soit I un idéal de Lie de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ non restreint à $\mathbb{C}$, et $u = a_1 x^{\alpha_1} y^{\beta_1} + \dots + a_s x^{\alpha_s} y^{\beta_s}$ un élément non constant et de longueur minimale s dans I . On va montrer que cette longueur est nécessairement $s = 1$. Pour cela supposons $s \geq 2$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, comme I est un idéal de Lie, l'élément

$$[x^i y^j, u] = \sum_{k=1}^s a_k (q^{j\alpha_k} - q^{i\beta_k}) x^{i+\alpha_k} y^{j+\beta_k}$$

est aussi un élément de I , et il est de longueur inférieure ou égale à celle de u . Deux situations sont alors possibles.

- S'il existe un couple $(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$ tel que tous les (α_k, β_k) sont colinéaires à (i, j) , alors il existe des nombres rationnels λ_k deux à deux distincts tels que $(\alpha_k, \beta_k) = \lambda_k(i, j)$, pour tout $k = 1, \dots, s$. Ainsi

$$[x^j y^{-i}, u] = \sum_{k=1}^s a_k (q^{-i^2 \lambda_k} - q^{j^2 \lambda_k}) x^{j+i\lambda_k} y^{-i+j\lambda_k}$$

est un élément non constant de I . Si l'un des λ_k est nul, il est de longueur strictement plus petite que u , et on aboutit à une contradiction. Si tous les λ_k sont non nuls, il est de même longueur que u , les couples d'exposants de ses monômes $(j + \lambda_k i, -i + \lambda_k j)$ sont deux à deux non colinéaires.

- On suppose maintenant qu'il existe au moins deux couples d'exposants, par exemple (α_1, β_1) et (α_2, β_2) , qui ne soient pas colinéaires dans $\mathbb{R}^2$. Alors $[x^{\alpha_1} y^{\beta_1}, u]$ est un élément de I non constant, de longueur strictement inférieure à celle de u .

En conclusion, u est nécessairement de longueur 1, ce qui signifie que I contient un monôme $u = x^\alpha y^\beta \neq 1$, avec $(\alpha, \beta) \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha \neq 0$. Alors I contient

$$[x^{-\alpha} y^{1-\beta}, u] = q^{-\alpha\beta}(q^\alpha - 1)y,$$

donc I contient y , ainsi que $[xy^{-1}, y] = (1 - q)x$, donc x . De même, I contient x^{-1} et y^{-1} , donc I contient les générateurs de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ comme algèbre de Lie, sauf éventuellement la constante 1. On en conclut que I contient $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^+$, et donc $I = \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^+$ ou $I = \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

□

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 5.4.3

Le tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est une algèbre associative simple.

Démonstration : Soit I un idéal bilatère non nul de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. A fortiori, I est un idéal de Lie pour le crochet de commutation, donc I est l'un des trois espaces vectoriels $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^+$, ou $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Si I contient $\mathbb{C}$, alors I contient l'unité, et si I contient $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^+$, il contient x , et comme c'est un idéal, il contient $xx^{-1} = 1$. Finalement, I est nécessairement égal à toute l'algèbre $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

□

5.4.2 Invariants de la déformation

On définit dans cette partie l'action d'un sous-groupe G de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur le tore quantique. Pour cela, on associe à un élément g de $SL(2, \mathbb{Z})$ un automorphisme $\phi(g)$ de l'algèbre $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, que l'on construit par étapes en partant de l'algèbre libre à deux variables $L = \mathbb{C} \langle x, y \rangle$. Pour que l'application $\phi : G \mapsto \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$ soit effectivement une action de groupe, il est nécessaire d'introduire une racine carrée $\hat{q} = \sqrt{q}$ de q dans $\mathbb{C}$. Soit

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$$

un élément de $GL(2, \mathbb{Z})$. On définit un morphisme d'algèbres associatives par

$$\varphi(g) : \begin{cases} \mathbb{C} \langle x, y \rangle & \rightarrow \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \\ x & \mapsto \hat{q}^{ac} x^a y^c \\ y & \mapsto \hat{q}^{bd} x^b y^d \end{cases}$$

Alors

$$\varphi(g)(yx - qxy) = \hat{q}^{ac+bd}(x^b y^d x^a y^c - q x^a y^c x^b y^d) = \hat{q}^{ac+bd}(\hat{q}^{ad} - \hat{q}^{cb+1})x^{a+b}y^{c+d}.$$

Pour que $\varphi(g)$ induise un morphisme du quotient $L/(yx - qxy)$ sur $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$, étant donné que q est non racine de l'unité, il faut et il suffit que $ad = bc + 1$, ce qui équivaut à $g \in SL(2, \mathbb{Z})$. A partir de maintenant, on considère donc que g est un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$, et on s'intéresse au morphisme d'algèbres associatives : $\bar{\varphi}(g) : L/(yx - qxy) \rightarrow \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ induit. On considère alors la partie multiplicative S d'éléments réguliers normaux de $L/(yx - qxy)$ définie par

$$S = \{\lambda x^m y^n / \lambda \in \mathbb{C}^*; m, n \in \mathbb{N}\},$$

et permettant de construire le localisé $S^{-1}(L/(yx - qxy)) \simeq \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. De plus, si s est un élément de la partie multiplicative, alors $\bar{\varphi}(g)(s)$ est de la forme $\lambda x^m y^n$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, donc est inversible dans le tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Ainsi, par la propriété universelle du localisé, $\bar{\varphi}(g)$ induit un endomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbre du tore quantique

$$\phi(g) : \begin{cases} \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] & \rightarrow \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \\ x & \mapsto \hat{q}^{ac} x^a y^c \\ y & \mapsto \hat{q}^{bd} x^b y^d \end{cases}$$

Exprimons l'image d'un monôme. Pour $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\phi(g)(x^m y^n) &= (\hat{q}^{ac} x^a y^c)^m (\hat{q}^{bd} x^b y^d)^n \\ &= \hat{q}^{mac+nbd} \hat{q}^{acm(m-1)/2 + cmbn + dbn(n-1)/2} x^{am+bn} y^{cm+dn} \\ &= \hat{q}^{acm^2 + 2bcmn + bdn^2} x^{am+bn} y^{cm+dn}\end{aligned}\tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}&= \hat{q}^{acm^2 + (ad+bc)mn + bdn^2 - mn} x^{am+bn} y^{cm+dn} \\ &= \hat{q}^{(am+bn)(cm+dn) - mn} x^{am+bn} y^{cm+dn}\end{aligned}\tag{5.14}$$

De même que dans le cas commutatif, on note les monômes ordonnés sous la forme

$$T^{(m,n)} := x^m y^n \text{ pour tout } (m, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

On introduit également une opération $\alpha : (m, n) \mapsto mn$ de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$. Avec ces notations, on a

$$\phi(g)(T^{(m,n)}) = \hat{q}^{\alpha(g \cdot (m,n)) - \alpha(m,n)} T^{g \cdot (m,n)}.$$

Cette relation implique que $\phi(g)$ induit un automorphisme de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. On a ainsi défini une application

$$\phi : SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]).$$

Il reste à vérifier que cette application est un morphisme de groupes. Soient $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $SL(2, \mathbb{Z})$. Il s'agit de montrer que les automorphismes $\phi(g') \circ \phi(g)$ et $\phi(g'g)$ sont égaux. Il suffit de le vérifier sur les générateurs x et y . D'après l'égalité 5.13,

$$\begin{aligned}\phi(g') \circ \phi(g)(x) &= \phi(g')(\hat{q}^{ac} x^a y^c) \\ &= \hat{q}^{ac + a'c'a^2 + 2b'c'ac + b'd'c^2} x^{a'a+b'c} y^{c'a+d'c},\end{aligned}$$

tandis que

$$\phi(g'g)(x) = \hat{q}^{(a'a+b'c)(c'a+d'c)} x^{a'a+b'c} y^{c'a+d'c}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}(a'a + b'c)(c'a + d'c) &= a'c'a^2 + a'd'ac + b'c'ac + b'd'c^2 \\ &= a'c'a^2 + (1 + b'c')ac + b'c'ac + b'd'c^2\end{aligned}$$

d'où l'égalité $\phi(g'g')(x) = \phi(g') \circ \phi(g)(x)$. La vérification $\phi(g'g')(y) = \phi(g') \circ \phi(g)(y)$ se fait de même, en remplaçant dans les égalités qui précèdent a et c par respectivement b et d .

Finalement, ϕ définit une action du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ sur le tore quantique. Pour tout sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{Z})$, on peut donc maintenant considérer l'algèbre des invariants $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$.

5.4.3 Déformation des invariants

Soit G un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$. On souhaite s'assurer que l'algèbre des invariants $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ est une déformation de l'algèbre des invariants commutative $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ au sens de 2.4.1. On introduit pour cela l'algèbre non commutative intègre

$$\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] := \frac{\mathbb{C}\langle x, x^{-1}, y, y^{-1}, \hat{Q}, \hat{Q}^{-1} \rangle}{\left(\begin{array}{l} xx^{-1} = x^{-1}x = 1, yy^{-1} = y^{-1}y = 1, \hat{Q}\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{-1}\hat{Q} = 1, \\ yx = \hat{Q}^2xy, \hat{Q}x = x\hat{Q}, \hat{Q}y = y\hat{Q} \end{array} \right)}$$

L'élément $2(1 - \hat{Q})$ est central, non inversible, et le quotient

$$\hat{\mathcal{A}} := \frac{\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]}{(2(1 - \hat{Q}))}$$

est une algèbre commutative isomorphe à $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Dans le quotient $\hat{\mathcal{A}}$, on a de plus :

$$\begin{aligned} \{\bar{x}, \bar{y}\} &= \overline{(2(1 - \hat{Q}))^{-1}[x, y]} \\ &= \overline{(2(1 - \hat{Q}))^{-1}(1 - \hat{Q}^2)xy} \\ &= \overline{(2^{-1}(1 + \hat{Q}))xy} \\ &= \bar{x}\bar{y} \end{aligned}$$

L'isomorphisme entre $\hat{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est donc également un morphisme d'algèbres de Poisson, donc $\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est une quantification de l'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. On définit une action du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ sur l'algèbre non commutative $\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ de la même manière qu'au paragraphe précédent par

$$g : \begin{cases} \mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] & \rightarrow & \mathbb{C}_{\hat{Q}}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \\ x & \mapsto & \hat{Q}^{ac} x^a y^c \\ y & \mapsto & \hat{Q}^{bd} x^b y^d \\ \hat{Q} & \mapsto & \hat{Q} \end{cases}$$

pour un élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{Z})$. On fixe un sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{Z})$, et on vérifie que l'algèbre d'invariants $\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ est une quantification de l'algèbre des invariants de l'algèbre de Poisson $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

L'idéal $(1 - \hat{Q})$ étant stable par G , l'action de G sur la déformation $\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ induit une action sur le quotient $\hat{\mathcal{A}} = \frac{\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]}{(2(1 - \hat{Q}))}$, et par le lemme 2.4.3, on a l'isomorphisme d'algèbres associatives :

$$\frac{\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G}{(2(1 - \hat{Q}))} \simeq \hat{\mathcal{A}}^G.$$

L'isomorphisme de Poisson entre $\hat{\mathcal{A}}$ et $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ étant clairement G -équivariant, on a $\hat{\mathcal{A}}^G \simeq \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$, donc

$$\frac{\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G}{(2(1 - \hat{Q}))} \stackrel{\text{Poisson}}{\simeq} \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G.$$

De même, il est clair que

$$\frac{\mathbb{C}_{\hat{Q}^2}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G}{((\hat{q} - \hat{Q}))} \simeq \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G,$$

en tant qu'algèbres associatives. En conclusion, les invariants de la quantification de l'algèbre de Poisson forment une quantification des invariants.

5.4.4 Finitude de la structure de Lie

N'ayant pas à disposition un procédé de relèvement de la propriété de finitude de la structure de Lie du cas Poisson au cas non commutatif, on utilise une preuve directe s'inspirant du cas Poisson.

Les monômes ordonnés forment une base de Poincaré-Birkhoff-Witt du tore quantique $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Pour chaque algèbre d'invariants $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$, où G est l'un des quatre groupes précédents, on a donc

$$\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G = \rho_G\left(\bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{C} x^m y^n\right) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \mathbb{C} \rho_G(x^m y^n)$$

où ρ_G est l'opérateur de Reynolds : $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ défini par $\rho_G(P) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P$.

Pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, on définit les éléments

$$R_{m,n} = \rho_G(T^{(m,n)}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \hat{q}^{\alpha(g \cdot (m,n)) - \alpha(m,n)} T^{g \cdot (m,n)}.$$

Ils engendrent $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ vu comme espace vectoriel. Le réseau $\mathbb{Z}^2$ est la réunion disjointe de ses orbites sous l'action de G . Pour chaque orbite $\mathcal{O}$, on choisit un représentant $(a_{\mathcal{O}}, b_{\mathcal{O}})$. Ainsi, les $R_{a_{\mathcal{O}}, b_{\mathcal{O}}}$ forment une base de $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ en tant qu'espace vectoriel. Pour chacun des groupes étudiés, on choisit les mêmes représentants $(a_{\mathcal{O}}, b_{\mathcal{O}})$ des orbites de $\mathbb{Z}^2$ sous l'action de G que dans le cas de l'étude de la limite semi-classique.

PROPOSITION 5.4.4

Pour chaque sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{Z})$, l'algèbre des invariants $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G$ est de type fini pour la structure de Lie associée au crochet de commutation.

- Pour $G = \mathcal{G}_7$, on trouve un système générateur à 9 éléments : $R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{2,0}, R_{3,0}, R_{4,0}, R_{5,0}, R_{1,-1}, R_{1,-2}, R_{1,-3}$.
- Pour $G = \mathcal{G}_8$, on trouve un système générateur à 8 éléments : $R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{2,0}, R_{3,0}, R_{4,0}, R_{1,1}, R_{1,2}, R_{1,3}$.
- Pour $G = \mathcal{G}_9$, on trouve un système générateur à 7 éléments : $R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{1,1}, R_{1,2}, R_{1,3}, R_{2,0}, R_{3,0}$.
- Pour $G = \mathcal{G}_{10}$, on trouve un système générateur à 5 éléments : $R_{0,0} = 1, R_{1,0}, R_{0,1}, R_{1,1}, R_{2,0}$.

Démonstration : A titre d'exemple, on étudie le cas du groupe $\mathcal{G}_7$. Les autres cas se traitent de manière similaire.

L'orbite du point (a, b) du réseau $\mathbb{Z}^2$ sous l'action du groupe $\mathcal{G}_7$ est

$$\mathcal{G}_7 \cdot (a, b) = \{(a, b), (a - b, a), (-b, a - b), (-a, -b), (-a + b, -a), (b, -a + b)\},$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned} R_{a,b} &= \hat{q}^{(-a)(-b)-ab} R_{-a,-b} = R_{-a,-b} \\ &= \hat{q}^{(a-b)a-ab} R_{a-b,a} = \hat{q}^{(a-2b)a} R_{a-b,a} \\ &= \hat{q}^{(a-2b)a} R_{-a+b,-a} \\ &= \hat{q}^{(b-2a)b} R_{-b,a-b} \\ &= \hat{q}^{(b-2a)b} R_{b,-a+b} \end{aligned}.$$

On choisit comme système de représentants des orbites : $\{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^-; (0, 0)\}$, ainsi, les éléments $R_{0,0}$, et $R_{a,-b}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ forment une base de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_7}$. Avec les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} [R_{a,-b}, R_{c,-d}] = & \frac{1}{6} \left[(q^{-bc} - q^{-ad})R_{a+c,-b-d} + (q^{bc} - q^{ad})R_{a-c,-b+d} \right. \\ & + \hat{q}^{c(c+2d)}(q^{-b(c+d)} - q^{ac})R_{a+c+d,-b+c} + \hat{q}^{c(c+2d)}(q^{b(c+d)} - q^{-ac})R_{a-c-d,-b-c} \\ & \left. + \hat{q}^{d(d+2c)}(q^{-bd} - q^{a(c+d)})R_{a+d,-b+c+d} + \hat{q}^{d(d+2c)}(q^{bd} - q^{-a(c+d)})R_{a-d,-b-c-d} \right] \end{aligned}$$

En comparant cette expression à celle obtenue dans le cas commutatif, on constate que le coefficient apparaissant devant chaque élément de la base s'annule dans le cas non commutatif si et seulement le coefficient correspondant dans le cas commutatif s'annule. La démonstration par récurrence utilisée dans le cas commutatif s'adapte donc complètement au cas non commutatif.

□

REMARQUE 5.4.5

Pour chaque sous-groupe G de $SL(2, \mathbb{Z})$, le système générateur de l'algèbre de Lie $(\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^G, [\cdot, \cdot])$ exhibé est de même cardinal que celui engendrant l'algèbre de Lie sous-jacente à la limite semi-classique.

5.5 Homologie de Poisson et homologie de Hochschild

Dans le cas Poisson comme dans le cas de sa déformation, l'existence d'un système générateur de cardinal fini pour la structure de Lie assure la finitude de la dimension du quotient de l'algèbre de Lie par son algèbre de Lie dérivée. Plus précisément, le cardinal du système générateur considéré fournit une borne supérieure pour la dimension de ce quotient, qui correspond, dans le cas Poisson, au groupe d'homologie de Poisson en degré 0, et dans le cas non commutatif, au groupe d'homologie de Hochschild en degré 0.

Dans un papier de P.Etingof et A.Oblomkov [EO06], l'homologie de Hochschild en degré 0 de l'algèbre des invariants $\mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_{10}}$ a été calculée. C'est un espace vectoriel de dimension 5.

Par ailleurs, on démontre que

PROPOSITION 5.5.1

Le groupe d'homologie de Poisson en degré 0 de $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_{10}}$ est de dimension 5.

Démonstration : $\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}} = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]^{\mathcal{G}_{10}}$ est engendré en tant qu'espace vectoriel par les $R_{a,b} := \frac{1}{2}(x^a y^b + x^{-a} y^{-b})$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, et pour tous (a, b) , (c, d) , on a :

$$\{R_{a,b}, R_{c,d}\} = (ad - bc)[R_{a+c,b+d} - R_{a-c,b-d}] \quad (5.15)$$

On rappelle que les cinq éléments $R_{0,0} = 1$, $R_{1,0} = (x + x^{-1})/2$, $R_{0,1} = (y + y^{-1})/2$, $R_{1,1} = (xy + x^{-1}y^{-1})/2$, et $R_{2,0} = (x^2 + x^{-2})/2$ forment un système générateur de l'algèbre de Lie $(\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}, \{\cdot, \cdot\})$. Leurs classes d'équivalence dans le quotient

$$HP_0(\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}) = \frac{\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}}{\{\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}\}}$$

forment donc un système générateur pour la structure d'espace vectoriel. Il reste à montrer qu'elles forment une famille libre. On suppose pour cela qu'il existe $a, a_{1,1}, a_{1,0}, a_{0,1}, a_{2,0} \in \mathbb{C}$, tels que

$$a + a_{1,1}R_{1,1} + a_{1,0}R_{1,0} + a_{0,1}R_{0,1} + a_{2,0}R_{2,0} \in \{\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}\}.$$

On décompose alors $\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}} = \mathbb{C} \oplus V_{0,0} \oplus V_{1,0} \oplus V_{0,1} \oplus V_{1,1}$$

où $V_{i,j} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(R_{i',j'} \mid (i',j') \neq (0,0), i' \equiv i \pmod{2\mathbb{Z}}, j' \equiv j \pmod{2\mathbb{Z}})$, la somme étant directe par la définition des $R_{i',j'}$. D'après (5.15), il est clair que $\{V_{i,j}, V_{k,l}\} \subset V_{i+k,j+l}$, où la somme sur les indices est prise modulo 2. De plus, $R_{1,1} \in V_{1,1}$, $R_{1,0} \in V_{1,0}$, $R_{0,1} \in V_{0,1}$, et $R_{2,0} \in V_{0,0}$. L'espace vectoriel $\{\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}\}$ se décompose alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}_{10}}\} &= (\{V_{0,0}, V_{0,0}\} + \{V_{1,0}, V_{1,0}\} + \{V_{0,1}, V_{0,1}\} + \{V_{1,1}, V_{1,1}\}) \\ &\quad \oplus (\{V_{0,0}, V_{1,0}\} + \{V_{0,1}, V_{1,1}\}) \\ &\quad \oplus (\{V_{0,0}, V_{0,1}\} + \{V_{1,0}, V_{1,1}\}) \\ &\quad \oplus (\{V_{0,0}, V_{1,1}\} + \{V_{0,1}, V_{1,0}\}) \end{aligned}$$

avec

- $(\{V_{0,0}, V_{0,0}\} + \{V_{1,0}, V_{1,0}\} + \{V_{0,1}, V_{0,1}\} + \{V_{1,1}, V_{1,1}\}) \subset V_{0,0}$,
- $(\{V_{0,0}, V_{1,0}\} + \{V_{0,1}, V_{1,1}\}) \subset V_{1,0}$,
- $(\{V_{0,0}, V_{0,1}\} + \{V_{1,0}, V_{1,1}\}) \subset V_{0,1}$,
- $(\{V_{0,0}, V_{1,1}\} + \{V_{0,1}, V_{1,0}\}) \subset V_{1,1}$.

On en déduit que $a = 0$, et chacun des termes $a_{2,0}R_{2,0}$, $a_{1,0}R_{1,0}$, $a_{0,1}R_{0,1}$, $a_{1,1}R_{1,1}$ est dans $\{\mathcal{A}^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}}\}$. Or d'après (5.15), $\{\mathcal{A}^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}}\}$ est engendré comme espace vectoriel par des éléments de la forme $R_{\alpha} - R_{\beta}$, où les $(R_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{Z}^2/\mathcal{G}}$ forment une base de $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$.

Donc $\{\mathcal{A}^{\mathcal{G}}, \mathcal{A}^{\mathcal{G}}\}$ ne contient aucun des R_{α} . Ainsi, $a_{2,0} = a_{1,0} = a_{0,1} = a_{1,1} = 0$.

□

En conclusion, la dimension du groupe d'homologie de Poisson pour l'algèbre des invariants sous l'action du groupe $\mathcal{G}_{10}$ est égale à la dimension du groupe d'homologie de Hochschild de sa déformation, dimension qui correspond également au cardinal d'un système générateur trouvé dans chacun des deux cas pour la structure de Lie. Les systèmes générateurs trouvés sont donc de cardinal minimal. Dans [Jor07], D.Jordan donne un autre type de correspondance pour le groupe $\mathcal{G}_{10}$ entre l'algèbre des invariants côté Poisson et sa déformation non commutative, en termes de modules simples.

5.6 Calcul de l'homologie de Hochschild en degré zéro

On dispose d'une formule qui donne l'homologie de Hochschild d'un produit croisé [Lor92] qu'on va utiliser dans ce paragraphe pour calculer l'homologie de Hochschild en degré 0 pour les algèbres d'invariants du tore quantique sous l'action de l'un des groupes $\mathcal{G}_7$, $\mathcal{G}_8$, ou $\mathcal{G}_9$. On utilisera à plusieurs reprises le lemme technique d'algèbre linéaire suivant :

LEMME 5.6.1

Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de base $(X_i)_{i \in I}$ où I est un ensemble dénombrable. Soient $I = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ une partition de I , et pour tout $j = 1, \dots, k$ une fonction $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{C}^*$. On considère le sous-espace vectoriel W engendré par les éléments

$$R_j(i_j, i'_j) := c_j(i_j)X_{i_j} - c_j(i'_j)X_{i'_j}, \text{ avec } 1 \leq j \leq k, \quad i_j, i'_j \in I_j,$$

et $(i_1^0, \dots, i_k^0) \in I_1 \times \dots \times I_k$. Alors

$$V = W \oplus \mathbb{C}X_{i_1^0} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}X_{i_k^0}.$$

Démonstration : Tout d'abord, pour $j = 1, \dots, k$, $i_j, i'_j \in I_j$, on a

$$R_j(i_j, i'_j) = -R_j(i_j^0, i_j) + R_j(i_j^0, i'_j)$$

donc l'ensemble $\{R_j(i_j^0, i_j)/j = 1, \dots, k, i_j \in I_j \setminus \{i_j^0\}\}$ forme un système générateur de W . Par ailleurs, pour tout $i \in I$, $\exists 1 \leq j \leq k$, $i \in I_j$, et $X_i = c_j(i_j)^{-1}(R_j(i_j, i_j^0) + c_j(i_j^0)X_{i_j^0}) \in W + \mathbb{C}X_{i_j^0}$. Donc tous les éléments de la base de V sont dans $W + \mathbb{C}X_{i_1^0} + \dots + \mathbb{C}X_{i_k^0}$. Il reste à montrer que la somme est directe. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{i_j} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j X_{i_j^0} = \sum_{j=1}^k \sum_{i_j \in I_j \setminus \{i_j^0\}} \beta_{i_j} (c_j(i_j^0)X_{i_j^0} - c_j(i_j)X_{i_j})$$

Pour $i_j \in I_j \setminus \{i_j^0\}$, l'élément X_{i_j} de la base n'apparaît qu'une fois dans la somme. Or $(X_i)_{i \in I}$ est une base de V . On a donc $\beta_{i_j} = 0$, pour tout $i_j \neq i_j^0$, et finalement $\alpha_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq k$.

□

PROPOSITION 5.6.2

Soit $\mathcal{A}_q = \mathbb{C}_q[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ le tore quantique. On a alors :

- $HH_0(\mathcal{A}_q^{\mathcal{G}_7}) = \mathbb{C}^9$.
- $HH_0(\mathcal{A}_q^{\mathcal{G}_8}) = \mathbb{C}^8$.
- $HH_0(\mathcal{A}_q^{\mathcal{G}_9}) = \mathbb{C}^7$.

Démonstration : Soit G l'un des trois groupes étudiés dans cette partie. L'algèbre $\mathcal{A}_q$ étant simple, et G ne contenant pas d'automorphisme intérieur de l'algèbre $\mathcal{A}_q$ autre que l'identité, l'algèbre produit croisé

$$\mathcal{A}_q \star G := \sum_{g \in G} \mathcal{A}_q g,$$

dans laquelle le produit est défini par le redressement $ga = g(a)g$, est également une algèbre simple d'après (2.4.9). En effet, si g agit par automorphisme intérieur sur $\mathcal{A}_q$, alors $g.a = b^{-1}ab$, où b est un inversible de $\mathcal{A}_q$, donc un monôme $b = \alpha x^i y^j$. L'action de g est alors donnée sur x par $g(x) = q^{-j}x$, et sur y par $g(y) = q^i y$. En comparant cette action à la définition de celle d'un élément du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ (section 5.4.2), on obtient $g = id$. L'algèbre des invariants $\mathcal{A}_q^G$ est donc équivalente au sens de Morita au produit croisé $\mathcal{A}_q \star G$ d'après (2.4.10). Le groupe d'homologie de Hochschild en degré 0 étant un invariant de Morita, il suffit donc de le calculer pour le produit croisé $\mathcal{A}_q \star G$.

On utilise d'abord la relation générale suivante [Lor92] :

$$HH_0(\mathcal{A}_q \star G) = \bigoplus_{[g] \in T(G)} H_0(C(g)/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g))$$

où $T(G)$ est l'ensemble des classes de conjugaison de G , $[g]$ la classe d'un élément g du groupe G , et $C(g)$ le centralisateur de g dans G .

$HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$ est l'homologie de Hochschild en degré zéro,

$$HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g) = \mathcal{A}_q g / [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g],$$

sur lequel le groupe $C(g)/\langle g \rangle$ agit par l'action induite par la conjugaison :

$$h \cdot (ag + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g]) = h^{-1} a g h + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g] = h(a)g + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g].$$

$H_0(C(g)/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g))$ est alors le 0-ème groupe d'homologie du groupe $C(g)/\langle g \rangle$ à valeurs dans $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$. D'après [Rot79, chap. 10], on rappelle que pour un groupe G et un G -module M ,

$$H_0(G, M) = M/\mathfrak{g}M,$$

où $\mathfrak{g}$ est l'idéal d'augmentation de G défini comme l'idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$ du groupe engendré par $\{(1 - g)/g \in G\}$.

Dans la situation étudiée, chaque groupe G est cyclique, donc la formule se simplifie de la manière suivante :

$$HH_0(\mathcal{A}_q \star G) = \bigoplus_{g \in G} H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g))$$

On rappelle la définition des groupes étudiés. On pose

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les sous-groupes finis de $SL(2, \mathbb{Z})$ que l'on considère sont les suivants :

groupe	générateur	ordre
$\mathcal{G}_7$	X	6
$\mathcal{G}_8$	DS	4
$\mathcal{G}_9$	X^2	3
$\mathcal{G}_{10}$	$X^3 = -Id$	2

On commence donc par calculer les groupes d'homologie $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$ pour g l'un des éléments suivants

$$I_2, X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X^2, X^3 = -I_2, X^4, X^5, DS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (DS)^2 = -I_2, (DS)^3.$$

Pour simplifier les notations, on définit pour $g \in SL(2, \mathbb{Z})$ un crochet tordu $[\cdot, \cdot]_g$ sur $\mathcal{A}_q$ défini par

$$[a, b]_g = ab - bg(a), \text{ pour } a, b \in \mathcal{A}_q.$$

Ainsi $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g) = \mathcal{A}_q/[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_g$.

- Pour $g = \pm I_2$, d'après [Obl04], $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q])$, et $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(-I_2))$ est de dimension 4, engendré par les classes de $1, x, y, xy$, avec pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$,

$$q^{-2ij - \varepsilon_1 j + \varepsilon_2 i} x^{\varepsilon_1 + 2i} y^{\varepsilon_2 + 2j} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} = x^{\varepsilon_1} y^{\varepsilon_2} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}.$$

- Pour $g = X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'action est donnée par

$$X : \begin{cases} x & \mapsto \hat{q}xy \\ y & \mapsto x^{-1} \end{cases}$$

Le sous-espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_X$ est engendré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par tous les crochets $[x^a y^b, x^c y^d]_X$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} [x^a y^b, x^c y^d]_X &= x^a y^b x^c y^d - x^c y^d (\hat{q} x y)^a (x^{-1})^b \\ &= q^{bc} x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^a q^{\frac{a(a-1)}{2} - ab + ad - bd} x^{a-b+c} y^{a+d} \\ &= \hat{q}^{2bc} \left(x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^{a^2 - 2ab + 2ad - 2bd - 2bc} x^{a-b+c} y^{a+d} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application $(a, b, c, d) \mapsto (k, l, k', l') = (a + c, b + d, a - b + c, a + d)$ est une bijection de $\mathbb{Z}^4$, d'application réciproque

$$(k, l, k', l') \mapsto (a, b, c, d) = ((k - l) - (k' - l'), k - k', l + (k' - l'), k' - (k - l)).$$

L'espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_X$ est donc engendré par les différences suivantes,

$$x^k y^l - \hat{q}^{k'^2 + l'^2 - k^2 - l^2} x^{k'} y^{l'},$$

soit par les $\hat{q}^{k^2 + l^2} x^k y^l - \hat{q}^{k'^2 + l'^2} x^{k'} y^{l'}$, avec $k, l, k', l' \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 5.6.1, on a donc $\mathcal{A}_q = [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_X \oplus \mathbb{C}$, donc $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_X)$, et pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{q}^{k^2 + l^2} x^k y^l + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_X = 1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_X$$

- Pour $g = X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, l'action est donnée par

$$X^{-1} : \begin{cases} x & \mapsto y^{-1} \\ y & \mapsto \hat{q} x y \end{cases}$$

Le sous-espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-1}}$ est engendré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par tous les crochets $[x^a y^b, x^c y^d]_{X^{-1}}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} [x^a y^b, x^c y^d]_{X^{-1}} &= x^a y^b x^c y^d - x^c y^d (y^{-1})^a (\hat{q} x y)^b \\ &= q^{bc} x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^b q^{\frac{b(b-1)}{2} + b(-a+d)} x^{b+c} y^{-a+b+d} \\ &= \hat{q}^{2bc} \left(x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^{b^2 + 2b(-a+d-c)} x^{b+c} y^{-a+b+d} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application $(a, b, c, d) \mapsto (k, l, k', l') = (a + c, b + d, b + c, -a + b + d)$ est une bijection de $\mathbb{Z}^4$, d'application réciproque $(k, l, k', l') \mapsto (a, b, c, d) = (l - l', -k + l + k' - l', k - l - k' + l', k - k' + l)$. L'espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-1}}$ est donc engendré par les différences suivantes,

$$x^k y^l - \hat{q}^{(k-l)^2 - (k'-l')^2} x^{k'} y^{l'},$$

soit par les $\hat{q}^{-(k-l)^2} x^k y^l - \hat{q}^{-(k'-l')^2} x^{k'} y^{l'}$, avec $k, l, k', l' \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 5.6.1, on a donc $\mathcal{A}_q = [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-1}} \oplus \mathbb{C}$, donc $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^{-1}) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-1}})$, et pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{q}^{-(k-l)^2} x^k y^l + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-1}} = 1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-1}}$$

- Pour $g = X^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, l'action est donnée par

$$X^2 : \begin{cases} x & \mapsto y \\ y & \mapsto \hat{q} x^{-1} y^{-1} \end{cases}$$

Le sous-espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}$ est engendré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par tous les crochets $[x^a y^b, x^c y^d]_{X^2}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} [x^a y^b, x^c y^d]_{X^2} &= x^a y^b x^c y^d - x^c y^d y^a (\hat{q} x^{-1} y^{-1})^b \\ &= q^{bc} x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^b q^{\frac{b(b-1)}{2} - b(a+d)} x^{-b+c} y^{a-b+d} \\ &= \hat{q}^{2bc} \left(x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^{b^2 - 2b(a+c+d)} x^{-b+c} y^{a-b+d} \right) \end{aligned}$$

On compare la somme des exposants de chacun des deux termes de la différence :

$$(a+c) + (b+d) = (-b+c) + (a-b+d) + 3b$$

Il existe donc un unique $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ tel que

$$(a+c) + (b+d) \equiv (-b+c) + (a-b+d) \equiv \varepsilon[3]$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &\mapsto (\varepsilon, k, l, k', l') \\ &= (\varepsilon, a+c-\varepsilon, \frac{a+b+c+d-\varepsilon}{3}, -b+c-\varepsilon, \frac{a-2b+c+d-\varepsilon}{3}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbb{Z}^4$ dans $\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$, d'application réciproque

$$(\varepsilon, k, l, k', l') \mapsto (a, b, c, d) = ((k-l) - (k'-l'), l-l', l+k'-l'+\varepsilon, 2l-k+l').$$

L'espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}$ est donc engendré par les différences suivantes,

$$x^{\varepsilon+k} y^{-k+3l} - \hat{q}^{-3l^2-2l\varepsilon+3l'^2+2l'\varepsilon} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+3l'},$$

soit par les éléments

$$\hat{q}^{3l^2+2l\varepsilon} x^{\varepsilon+k} y^{-k+3l} - \hat{q}^{3l'^2+2l'\varepsilon} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+3l'},$$

avec $(\varepsilon, k, l, k', l') \in \{-1, 0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$. Pour $\varepsilon = -1, 0, 1$ on pose

$$I_\varepsilon = \{(-\varepsilon + k, -k + 3l)/k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

On obtient alors une partition de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{Z}^2 = I_{-1} \sqcup I_0 \sqcup I_1$. D'après le lemme 5.6.1, on a donc

$$\mathcal{A}_q = [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}x^{-1},$$

donc

$$HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^{-2}) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}) \oplus \mathbb{C}(x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}) \oplus \mathbb{C}(x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2})$$

avec pour $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\hat{q}^{3l^2+2l\varepsilon} x^{\varepsilon+k} y^{-k+3l} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} = x^\varepsilon + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}.$$

- Pour $g = X^{-2} = X^4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, l'action est donnée par

$$X^{-2} : \begin{cases} x & \mapsto \hat{q} x^{-1} y^{-1} \\ y & \mapsto x \end{cases}$$

Le sous-espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}$ est engendré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par tous les crochets $[x^a y^b, x^c y^d]_{X^{-2}}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} [x^a y^b, x^c y^d]_{X^{-2}} &= x^a y^b x^c y^d - x^c y^d (\hat{q} x^{-1} y^{-1})^a (x)^b \\ &= q^{bc} x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^a q^{\frac{a(a-1)}{2} - ad + b(-a+d)} x^{-a+b+c} y^{-a+d} \\ &= \hat{q}^{2bc} \left(x^{a+c} y^{b+d} - \hat{q}^{a^2 - 2ad - 2ab + 2bd - 2bc} x^{-a+b+c} y^{-a+d} \right) \end{aligned}$$

On compare la somme des exposants de chacun des deux termes de la différence :

$$(a+c) + (b+d) = (-a+b+c) + (-a+d) + 3a$$

Il existe donc un unique $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ tel que

$$(a+c) + (b+d) \equiv (-a+b+c) + (-a+d) \equiv \varepsilon[3]$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &\mapsto (\varepsilon, k, l, k', l') \\ &= (\varepsilon, a+c-\varepsilon, \frac{a+b+c+d-\varepsilon}{3}, -a+b+c-\varepsilon, \frac{-2a+b+c+d-\varepsilon}{3}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbb{Z}^4$ dans $\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$, d'application réciproque

$$(\varepsilon, k, l, k', l') \mapsto (a, b, c, d) = (l-l', 2(l-l') - (k-k'), \varepsilon + k - (l-l'), l+2l'-k').$$

L'espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}$ est donc engendré par les différences suivantes,

$$x^{\varepsilon+k} y^{-k+3l} - \hat{q}^{-3(l'-k')^2 + k'^2 + 2(2l'-k')\varepsilon + 3(l-k)^2 - k^2 - 2(2l-k)\varepsilon} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+3l'},$$

soit par les éléments

$$\hat{q}^{-3(l-k)^2 + k^2 + 2(2l-k)\varepsilon} x^{\varepsilon+k} y^{-k+3l} - \hat{q}^{-3(l'-k')^2 + k'^2 + 2(2l'-k')\varepsilon} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+3l'},$$

avec $(\varepsilon, k, l, k', l') \in \{-1, 0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$. Pour $\varepsilon = -1, 0, 1$ on pose

$$I_\varepsilon = \{(-\varepsilon + k, -k + 3l)/k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

On obtient alors une partition de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{Z}^2 = I_{-1} \sqcup I_0 \sqcup I_1$. D'après le lemme 5.6.1, on a donc

$$\mathcal{A}_q = [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}x^{-1},$$

donc

$$HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^{-2}) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}) \oplus \mathbb{C}(x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}) \oplus \mathbb{C}(x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}})$$

avec pour $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\hat{q}^{-3(l-k)^2 + k^2 + 2(2l-k)\varepsilon} x^{\varepsilon+k} y^{-k+3l} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} = x^\varepsilon + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}.$$

- Pour $g = DS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'action est donnée par

$$DS : \begin{cases} x & \mapsto y \\ y & \mapsto x^{-1} \end{cases}$$

Le sous-espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{DS}$ est engendré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par tous les crochets $[x^a y^b, x^c y^d]_{DS}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} [x^a y^b, x^c y^d]_{DS} &= x^a y^b x^c y^d - x^c y^d x^a y^b \\ &= q^{bc} x^{a+c} y^{b+d} - q^{-b(a+d)} x^{-b+c} y^{a+d} \\ &= q^{bc} \left(x^{a+c} y^{b+d} - q^{-b(a+d+c)} x^{-b+c} y^{a+d} \right) \end{aligned}$$

On compare la somme des exposants de chacun des deux termes de la différence :

$$(a+c) + (b+d) = (-b+c) + (a+d) + 2b$$

Il existe donc un unique $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que

$$(a+c) + (b+d) \equiv (-b+c) + (a+d) \equiv \varepsilon[2]$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &\mapsto (\varepsilon, k, l, k', l') \\ &= (\varepsilon, a+c-\varepsilon, \frac{a+b+c+d-\varepsilon}{2}, -b+c-\varepsilon, \frac{a-b+c+d-\varepsilon}{2}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbb{Z}^4$ dans $\{0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$, d'application réciproque

$$(\varepsilon, k, l, k', l') \mapsto (a, b, c, d) = (k-l-k'+l', l-l', l-l'+k'+\varepsilon, l-k+l').$$

L'espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)}$ est donc engendré par les différences suivantes,

$$x^{\varepsilon+k} y^{-k+2l} - q^{-l^2-\varepsilon l+l'^2+\varepsilon l'} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+2l'},$$

soit par les éléments

$$q^{l^2+\varepsilon l} x^{\varepsilon+k} y^{-k+2l} - q^{l'^2+\varepsilon l'} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+2l'},$$

avec $(\varepsilon, k, l, k', l') \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$. Pour $\varepsilon = 0, 1$ on pose

$$I_\varepsilon = \{(-\varepsilon + k, -k + 2l)/k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

On obtient alors une partition de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{Z}^2 = I_0 \sqcup I_1$. D'après le lemme 5.6.1, on a donc

$$\mathcal{A}_q = [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{DS} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x,$$

donc

$$HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(DS)) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{DS}) \oplus \mathbb{C}(x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{DS})$$

avec pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$$q^{l^2+\varepsilon l} x^{\varepsilon+k} y^{-k+2l} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{DS} = x^\varepsilon + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{DS}.$$

- Pour $g = (DS)^{-1} = (DS)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, l'action est donnée par

$$X^{-2} : \begin{cases} x & \mapsto y^{-1} \\ y & \mapsto x \end{cases}$$

Le sous-espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}}$ est engendré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ par tous les crochets $[x^a y^b, x^c y^d]_{(DS)^{-1}}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} [x^a y^b, x^c y^d]_{(DS)^{-1}} &= x^a y^b x^c y^d - x^c y^d (y^{-1})^a x^b \\ &= q^{bc} x^{a+c} y^{b+d} - q^{b(-a+d)} x^{b+c} y^{-a+d} \\ &= q^{bc} (x^{a+c} y^{b+d} - q^{b(-a-c+d)} x^{b+c} y^{-a+d}) \end{aligned}$$

On compare la somme des exposants de chacun des deux termes de la différence :

$$(a+c) + (b+d) = (b+c) + (-a+d) + 2a$$

Il existe donc un unique $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que

$$(a+c) + (b+d) \equiv (-a+b+c) + (-a+d) \equiv \varepsilon[2]$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &\mapsto (\varepsilon, k, l, k', l') \\ &= (\varepsilon, a+c-\varepsilon, \frac{a+b+c+d-\varepsilon}{2}, b+c-\varepsilon, \frac{-a+b+c+d-\varepsilon}{2}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbb{Z}^4$ dans $\{0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$, d'application réciproque

$$(\varepsilon, k, l, k', l') \mapsto (a, b, c, d) = (l-l', (l-l') - (k-k'), \varepsilon + k - (l-l'), l+l'-k').$$

L'espace $[\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}}$ est donc engendré par les différences suivantes,

$$x^{\varepsilon+k} y^{-k+2l} - q^{(l-k)^2 - (l'-k')^2 - \varepsilon(l-k) + \varepsilon(l'-k')} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+2l'},$$

soit par les éléments

$$q^{-(l-k)^2 + \varepsilon(l-k)} x^{\varepsilon+k} y^{-k+2l} - q^{-(l'-k')^2 + \varepsilon(l'-k')} x^{\varepsilon+k'} y^{-k'+2l'},$$

avec $(\varepsilon, k, l, k', l') \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}^4$. Pour $\varepsilon = 0, 1$ on pose

$$I_\varepsilon = \{(-\varepsilon + k, -k + 2l)/k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

On obtient alors une partition de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{Z}^2 = I_0 \sqcup I_1$. D'après le lemme 5.6.1, on a donc

$$\mathcal{A}_q = [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}x,$$

donc

$$HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(DS)^{-1}) = \mathbb{C}(1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}}) \oplus \mathbb{C}(x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}})$$

avec pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$$q^{-(l-k)^2 + \varepsilon(l-k)} x^{\varepsilon+k} y^{-k+2l} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}} = x^\varepsilon + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{(DS)^{-1}}.$$

On calcule alors, pour chaque groupe G et chaque élément $g \in G$ le groupe d'homologie $H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g))$.

- Pour $G = \mathcal{G}_9 = \langle X^2 \rangle$, si $g \in G \setminus I_2$, alors le groupe $G/\langle g \rangle$ est le groupe trivial, et si $g = I_2$, $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$ est le G -module trivial, donc dans tous les cas $H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$, et

$$HH_0(\mathcal{A}_q \star G) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^7$$

- Pour $G = \mathcal{G}_8 = \langle DS \rangle$, si $g \in G \setminus \pm I_2$, alors le groupe $G/\langle g \rangle$ est le groupe trivial, et si $g = I_2$, $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$ est le G -module trivial, donc pour $g \neq -I_2$,

$$H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g).$$

Si $g = -I_2$, le groupe $G/\langle g \rangle$ est de cardinal 2, engendré par la classe de DS . On considère alors l'action de DS sur le module $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(-I_2))$ qui est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 4, engendré par les classes de 1, x , y , et xy .

$$\begin{aligned} (DS) \cdot (1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= 1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ (DS) \cdot (x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= y + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ (DS) \cdot (y + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} = x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ (DS) \cdot (xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= yx^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} = q^{-1}x^{1-2}y + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ &= q^{-1}q^1xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} = xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le sous $G/\langle -I_2 \rangle$ -module $\mathfrak{g}HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(-I_2))$, où $\mathfrak{g}$ est l'idéal d'augmentation de $G/\langle -I_2 \rangle$, est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(x - y) + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}$, et donc

$$H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = \mathbb{C}^3.$$

Ainsi,

$$HH_0(\mathcal{A}_q \star G) = \mathbb{C} \oplus (\mathbb{C}^2)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^8$$

- Pour $G = \mathcal{G}_7 = \langle X \rangle$, si $g = I_2$, X , ou X^5 alors $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)$ est le $G/\langle g \rangle$ -module trivial, et donc :

$$H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g).$$

Si $g = -I_2$, le groupe $G/\langle g \rangle$ est de cardinal 3, engendré par la classe de X . On considère alors l'action de X sur le module $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(-I_2))$ qui est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 4, engendré par les classes de 1, x , y , et xy .

$$\begin{aligned} X \cdot (1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= 1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ X \cdot (x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= \hat{q}xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ X \cdot (y + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} = x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \\ X \cdot (xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2}) &= \hat{q}xyx^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} = q^{-1}y + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{-I_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le sous $G/\langle -I_2 \rangle$ -module $\mathfrak{g}HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q(-I_2))$, où $\mathfrak{g}$ est l'idéal d'augmentation de $G/\langle -I_2 \rangle$, est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 engendré par les classes de $x - y$ et $x - \hat{q}xy$, et donc

$$H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = \mathbb{C}^2.$$

Si $g = X^2$, le groupe $G/\langle g \rangle$ est de cardinal 2, engendré par la classe de X . On considère alors l'action de X sur le module $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^2)$ qui est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3, engendré par les classes de 1, x , et x^{-1} .

$$\begin{aligned} X \cdot (1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}) &= 1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} \\ X \cdot (x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}) &= \hat{q}xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} = x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} \\ X \cdot (x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2}) &= \hat{q}^{-1}y^{-1}x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} = \hat{q}x^{-1}y^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} \\ &= x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^2} \end{aligned}$$

Ainsi, le sous $G/\langle X^2 \rangle$ -module $\mathfrak{g}HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^2)$, où $\mathfrak{g}$ est l'idéal d'augmentation de $G/\langle X^2 \rangle$, est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe de $x - x^{-1}$, et donc

$$H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = \mathbb{C}^2.$$

Si $g = X^{-2}$, le groupe $G/\langle g \rangle$ est de cardinal 2, engendré par la classe de X . On considère alors l'action de X sur le module $HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^{-2})$ qui est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 3, engendré par les classes de 1, x , et x^{-1} .

$$\begin{aligned} X \cdot (1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}) &= 1 + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} \\ X \cdot (x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}) &= \hat{q}xy + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} = x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} \\ X \cdot (x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}}) &= \hat{q}^{-1}y^{-1}x^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} = \hat{q}x^{-1}y^{-1} + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} \\ &= x + [\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q]_{X^{-2}} \end{aligned}$$

Ainsi, le sous $G/\langle X^{-2} \rangle$ -module $\mathfrak{g}HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q X^{-2})$, où $\mathfrak{g}$ est l'idéal d'augmentation de $G/\langle X^{-2} \rangle$, est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe de $x - x^{-1}$, et donc

$$H_0(G/\langle g \rangle, HH_0(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q g)) = \mathbb{C}^2.$$

Ainsi,

$$HH_0(\mathcal{A}_q \star G) = (\mathbb{C})^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{C}^2)^{\oplus 3} = \mathbb{C}^9$$

□

Chapitre 6

Conjecture de Gelfand-Kirillov

6.1 La conjecture de Gelfand-Kirillov

On souhaite étudier dans ce chapitre une version Poisson de la conjecture de Gelfand-Kirillov. La conjecture originelle faite par I.M.Gelfand et A.A.Kirillov [GK66] stipule que l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ sur un $\mathbb{C}$ est 'birationnellement' équivalente à une algèbre de Weyl sur une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$:

CONJECTURE 6.1.1 (CONJECTURE DE GELFAND-KIRILLOV)

Il existe des entiers n, k tels que

$$K(\mathfrak{g}) \simeq D_n(\mathbb{C}(T_1, \dots, T_k))$$

où $\mathbb{C}(T_1, \dots, T_k)$ est le centre du corps gauche $K(\mathfrak{g})$, et où l'on note $D_n(\mathbb{K})$ le corps des fractions de l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K}$ corps commutatif), ce qui signifie :

- 1. Le centre de $K(\mathfrak{g})$ est transcendant pur, de degré de transcendance k .*
- 2. Au dessus de ce centre, $K(\mathfrak{g})$ est isomorphe au corps des fractions d'une algèbre de Weyl.*

On dira dans une telle situation que $U(\mathfrak{g})$ est birationnellement équivalente à une algèbre de Weyl.

Cette conjecture a été initialement démontrée par I.M.Gelfand et A.A.Kirillov [GK66], pour les algèbres de matrices gl_n and sl_n , ainsi que pour les algèbres de Lie nilpotentes. En 1969, ils démontrent dans un autre article [GK69] une forme plus faible de la conjecture, pour les algèbres de Lie semi-simples, en effectuant une extension du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ par l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Elle a été ensuite démontrée pour les algèbres de Lie résolubles par A.Joseph [Jos74], J.C.McConnell [McC74], et W.Borho, P.Gabriel et R.Rentschler [BGR73]. X.H.Nghiem a également démontré la conjecture pour certaines classes de produits semi-directs d'algèbres de Lie [Hai79], et J.Alev, A.I.Ooms et M.Van den Bergh l'ont démontré pour toute algèbre de Lie de dimension inférieure ou égale à 8 [AOVdB00]. Cependant, des contre-exemples à la conjecture ont été exhibés [AOVdB96], pour certains produits semi-directs. Des versions quantiques de la conjecture de Gelfand-Kirillov ont été étudiées, par exemple par K.A.Brown et K.R.Goodearl dans [BG02].

6.2 Version Poisson de la conjecture de Gelfand-Kirillov

L'étude de ces exemples et contre-exemples à la conjecture de Gelfand-Kirillov nous amène naturellement à considérer la version géométrique de ce problème. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique, et G un groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. L'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ peut être interprétée comme l'algèbre des fonctions sur l'espace affine $\mathfrak{g}^*$. L'action du groupe G sur $\mathfrak{g}^*$ par la représentation coadjointe induit une action de G sur l'algèbre $S(\mathfrak{g}) = \mathcal{O}(\mathfrak{g}^*)$. On peut identifier l'algèbre des invariants $\mathcal{O}(\mathfrak{g}^*)^G$ à l'algèbre des fonctions sur les orbites fermées sous l'action de G . D'après un théorème dû à Kostant-Kirillov-Souriau, on sait que les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ sont munies canoniquement d'une structure de variété symplectique, et forment donc une partition de $\mathfrak{g}^*$ en feuilles symplectiques. La question qui se pose est alors de savoir si l'on peut trouver un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$, et des fonctions $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ sur cet ouvert, telles que leurs restrictions à chaque orbite définissent la structure symplectique de l'orbite grâce à la 2-forme différentielle $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$. Ces considérations géométriques se traduisent en terme de la structure du corps des fractions $L(\mathfrak{g})$ de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par la conjecture de Gelfand-Kirillov Poisson :

CONJECTURE 6.2.1 (CONJECTURE DE GELFAND-KIRILLOV POISSON)

Il existe des entiers n, k tels que

$$L(\mathfrak{g}) \simeq F_n(\mathbb{C}(T_1, \dots, T_k))$$

où $\mathbb{C}(T_1, \dots, T_k)$ est le centre de Poisson du corps commutatif $L(\mathfrak{g}) := \text{Frac}(S(\mathfrak{g}))$, et où l'on note $F_n(\mathbb{K})$ le corps des fractions de l'algèbre de Poisson symplectique $B_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K}$ corps commutatif), ce qui signifie :

1. *Le centre de Poisson de $L(\mathfrak{g})$ est transcendant pur, de degré de transcendance k .*
2. *Au dessus de ce centre, $L(\mathfrak{g})$ est isomorphe au corps des fractions d'une algèbre de Poisson symplectique.*

En s'inspirant de la démonstration faite par I.M.Gelfand et A.A.Kirillov dans le cas du corps enveloppant, M.Vergne démontre la conjecture de Gelfand-Kirillov Poisson pour les algèbres de Lie nilpotentes [Ver72]. Dans [TY07], P.Tauvel et R.W.T.Yu démontrent un résultat similaire pour des quotients de l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie résoluble. Dans [GL07], K.Goodearl et S.Launois étudient une version du problème de Gelfand Kirillov adaptée au cas d'algèbres de Poisson polynômiales itérées, et qui s'inspire de versions quantiques du problème de Gelfand-Kirillov. Ils utilisent les limites semi-classiques des espaces affines quantiques, qui sont des algèbres de Poisson polynômiales $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ avec un crochet de Poisson défini par

$$\{x_i, x_j\} = \lambda_{ij} x_i x_j$$

pour tous i, j , où $\Lambda = (\lambda_{ij})$ est une matrice anti-symétrique à coefficients dans $\mathbb{K}$. En notant $\mathbb{K}_\Lambda[x_1, \dots, x_n]$ une telle algèbre de Poisson, et $\mathbb{K}_\Lambda(x_1, \dots, x_n)$ son corps des fractions, la version du problème de Gelfand Kirillov qu'ils étudient est l'existence d'un isomorphisme de Poisson entre le corps des fractions de l'algèbre de Poisson étudiée et un corps de Poisson de la forme $\tilde{\mathbb{K}}_\Lambda(x_1, \dots, x_n)$, où $\tilde{\mathbb{K}}$ est une extension du corps de base $\mathbb{K}$. Ils démontrent cette existence pour une large classe d'algèbres de Poisson polynômiales, en particulier pour des quotients de limites semi-classiques de groupes quantiques par des idéaux premiers de

Poisson.

On étudie dans ce chapitre un problème de Gelfand-Kirillov adapté à la théorie des invariants, en particulier aux différents exemples étudiés dans les chapitres précédents. On considère une algèbre de Poisson $\mathcal{A}$ et G un groupe fini d'automorphismes de Poisson de $\mathcal{A}$. La version du problème de Gelfand-Kirillov que l'on étudie ici est l'existence d'un isomorphisme de Poisson entre le corps des fractions de $\mathcal{A}$ et celui de $\mathcal{A}^G$.

Dans le cas des singularités de Klein, le résultat découle d'une version Poisson du théorème de Miyata, dont on peut trouver l'énoncé non commutatif dans [AD97].

6.3 Théorème de Miyata : une version Poisson

THÉORÈME 6.3.1

Soit K un corps commutatif, $F = K(x)$, $S = K[x]$. On suppose de plus que S est munie d'une structure de Poisson telle que :

- $a, b \in K \Rightarrow \{a, b\} \in K$.
- $a \in K \Rightarrow \{a, x\} \in K$.

Soit G un sous-groupe d'automorphismes de Poisson de S , tel que $G(K) \subset K$. Alors :

1. Si $S^G \subset K$, alors $S^G = K^G = F^G$.
2. Sinon, pour tout $u \in S^G$, de degré minimal en x parmi les éléments de S^G de degré strictement positif, on a $S^G = K^G[u]$ et $F^G = K^G(u)$. En outre, si $a, b \in K^G$, alors $\{a, b\} \in K^G$ et $\{u, a\} \in K^G$.

Démonstration :

- Tout élément g de G est un automorphisme de $K[x]$ tel que $g(K) \subset K$. Pour des raisons de degré, on en déduit que $g(x) = a_g \cdot x + b_g$, avec $a_g \in K^*$, $b_g \in K$.
- On montre maintenant que $F^G = \text{Frac}(S^G)$. Tout élément de $F^G = K(x)^G \subset K(x)$ peut s'écrire comme un quotient s/t avec $s, t \in K[x] = S$, et $s \wedge t = 1$. On raisonne par récurrence sur $\deg_x(s) + \deg_x(t)$. Si $\deg_x(s) = 0$ ou $\deg_x(t) = 0$, le résultat est évident. On suppose maintenant que $\deg_x(s), \deg_x(t) > 0$. Pour tout $g \in G$, on a $g(s/t) = s/t$, donc $t \cdot g(s) = s \cdot g(t)$. Comme s et t sont premiers entre eux, on en déduit que $g(s) = k_g \cdot s$ et $g(t) = k_g \cdot t$, avec $k_g \in K^*$. On peut supposer $\deg_x(s) \geq \deg_x(t)$. On effectue la division euclidienne de s par t : il existe un unique couple (q, r) , tel que

$$s = tq + r \text{ avec } \deg_x(r) < \deg_x(t)$$

Pour $g \in G$, on obtient donc $k_g \cdot s = k_g \cdot t g(q) + g(r)$. Comme $g(r)$ est de même degré que r , par unicité du couple (q, r) , on a $g(q) = q$ et $g(r) = k_g \cdot r$. On en déduit que $q \in S^G$ et $r/t \in F^G$, et par hypothèse de récurrence, $r/t \in \text{Frac}(S^G)$. Ainsi, $s/t = q + r/t \in \text{Frac}(S^G)$.

On démontre maintenant le théorème.

1. Si $S^G \subset K$, comme $K \subset S$, on a aussi $K^G \subset S^G$, d'où $S^G = K^G$, et $F^G = \text{Frac}(S^G) = \text{Frac}(K^G) = K^G$.
2. Si $S^G \not\subset K$, alors on peut trouver un élément u de degré minimal en x parmi les éléments de S^G de degré ≥ 1 . Si p est un autre élément de S^G , on montre que p est un polynôme en u par récurrence sur le degré de p .

□

6.4 Exemple des singularités de Klein

Soit $\mathbb{C}[x, y]$ l'algèbre des polynômes à deux variables, munie du crochet de Poisson symplectique $\{x, y\} = 1$. Le groupe symplectique $SL(2, \mathbb{C})$ agit par automorphismes de Poisson, et on fixe G un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$. L'algèbre d'invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ est l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété quotient $\mathbb{C}^2/G$, et est munie du crochet de Poisson induit. Donc $\mathbb{C}^2/G$ est une surface de Klein, munie d'une structure de variété de Poisson, et on s'intéresse à la version de la conjecture de Gelfand-Kirillov Poisson dans le cas de ces surfaces de Klein : le corps des fractions de l'algèbre des fonctions $\mathbb{C}[x, y]^G$ est-il Poisson-isomorphe au corps des fractions d'une algèbre de Poisson symplectique ? On rappelle d'abord que le corps des fractions des invariants est le sous-corps des invariants du corps des fractions de l'algèbre initiale.

LEMME 6.4.1

Soit G un groupe fini d'automorphismes d'une algèbre commutative $\mathcal{A}$. Alors

$$\text{Frac}(\mathcal{A}^G) = (\text{Frac}(\mathcal{A}))^G.$$

Démonstration : L'inclusion $\text{Frac}(\mathcal{A}^G) \subset (\text{Frac}(\mathcal{A}))^G$ est évidente. Soit donc $\frac{a}{b}$ un élément non nul de $(\text{Frac}(\mathcal{A}))^G$, avec $a, b \in \mathcal{A}$. Alors

$$\frac{a}{b} = \frac{\prod_{g \in G} g \cdot a}{b \prod_{g \neq id} g \cdot a}.$$

$$\text{avec } a' := \prod_{g \in G} g \cdot a \in \mathcal{A}^G, \text{ et } b \prod_{g \neq id} g \cdot a = \frac{b}{a} \times a' \in \text{Frac}(\mathcal{A})^G \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}^G.$$

□

D'après [Spr77], l'algèbre des invariants $\mathbb{C}[x, y]^G$ est engendrée sur $\mathbb{C}$ par trois polynômes g_1, g_2, g_3 vérifiant une relation F quasi-homogène. On en déduit que $\text{Frac}(\mathbb{C}[x, y]^G)$ est le corps $\mathbb{C}(g_1, g_2, g_3)$, les g_i étant algébriquement liés.

PROPOSITION 6.4.2

Soit G un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$. Alors il existe $p, q \in \mathbb{C}(x, y)^G$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que :

- $\mathbb{C}(x, y)^G = \mathbb{C}(p, q)$.
- $\{p, q\} = 1$.

Démonstration :

- Cas A_{n-1} : on note G_n le groupe cyclique d'ordre n engendré par $g_n = \begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & r_n^{-1} \end{pmatrix}$, où $r_n = e^{2i\pi/n}$. Alors G_n agit sur $K = \mathbb{C}(x)$, donc en posant $F = K(y)$, on peut appliquer le théorème de Miyata avec $u = xy$ de degré minimal en y :

$$\mathbb{C}(x, y)^G = \mathbb{C}(x)^G(xy) = \mathbb{C}(x^n, xy).$$

Or $\{x^n, xy\} = nx^n$, donc en posant $p = x^n$ et $q = \frac{xy}{nx^n}$, on a bien $\mathbb{C}(p, q) = \mathbb{C}(x, y)^G$ et $\{p, q\} = 1$.

- Cas D_n, E_6, E_7, E_8 : on note G un groupe de ce type. Alors $G_2 = \langle -I_2 \rangle$ est un sous-groupe distingué de G , donc $\mathbb{C}(x, y)^G = (\mathbb{C}(x, y)^{G_2})^{G'}$, où $G' = G/G_2$. Or d'après le point précédent, $Q_2 := \mathbb{C}(x, y)^{G_2} = \mathbb{C}(x^2, x/y) = \mathbb{C}(x/y, xy)$. On pose $v := y/x$ et $w := xy$. Ainsi :

★ $K := \mathbb{C}(v)$ est stable par l'action de G' : pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$,

$$g(v) = \frac{-bx + ay}{dx - cy} = \frac{-b + av}{d - cv} \in \mathbb{C}(v).$$

★ G' s'identifie à un groupe d'automorphismes de $S := K[w]$:

$$g(w) = (dx - cy)(-bx + ay) = \frac{-bd + (ad + bc)v - acv^2}{v}w.$$

où $(-bd + (ad + bc)v - acv^2)$ est non nul, et si g agit comme l'identité, alors $g(v) = v$, donc $g \in G_2$, i.e. $g = id$ dans G' .

On peut donc appliquer le théorème de Miyata.

- ★ $S^{G'} \not\subseteq \mathbb{C}(v)$, car sinon $Q_2^{G'} \subseteq \mathbb{C}(v)$ et alors Q_2 est une extension transcendante de $Q_2^{G'}$, ce qui contredit le fait que Q_2 est une extension galoisienne de $Q_2^{G'}$ (par le lemme d'Artin).
- ★ Soit alors u un élément de $\mathbb{C}(v)[w]$, invariant par G' , de degré minimal en w parmi les éléments de degré ≥ 1 . On a $Q_2^{G'} = K^{G'}(u)$. D'après le théorème de Luröth, $\mathbb{C}(v)^{G'}$ est purement transcendant sur $\mathbb{C}$, et $\mathbb{C}(v)^{G'} = \mathbb{C}(q)$ pour toute q fraction rationnelle en v de hauteur $[\mathbb{C}(v) : \mathbb{C}(v)^{G'}] = |G'|$ (la hauteur d'une fraction écrite sous forme irréductible étant le maximum des degrés de son numérateur et de son dénominateur). On écrit alors u sous la forme $u = a_m(v)w^m + \dots + a_0(v)$ avec $a_m(v) \neq 0$ et $m \geq 1$. Soit $g \in G'$. On a vu que $g(w) \in \mathbb{C}(v)w$, donc $g(u) = g(a_m(v))(\frac{g(w)}{w})^m w^m + \dots + g(a_0(v))$. Comme w est transcendant sur $\mathbb{C}(v)$, on en déduit que chaque $a_i(v)w^i$ est invariant, et on peut donc choisir u sous la forme $u = a_1(v)w$. Alors

$$\{u, q\} = a_1(v)(\partial_v q)\{w, v\} = 2a_1(v)(\partial_v q)v \in \mathbb{C}(v) \setminus \{0\}.$$

Si on pose $p = \{u, q\}^{-1}u$, on a donc $\{p, q\} = 1$, et

$$\mathbb{C}(x, y)^G = \mathbb{C}(v, w)^{G'} = \mathbb{C}(q, u) = \mathbb{C}(q, p).$$

□

On souhaite maintenant donner explicitement un couple d'éléments (p, q) remplissant les conditions du théorème, pour chaque sous-groupe fini G de $SL(2, \mathbb{C})$.

On sait que $\mathbb{C}(p, q) = \mathbb{C}(g_1, g_2, g_3)$, donc on donne p et q sous la forme de fraction rationnelle en les éléments g_1, g_2, g_3 .

- On peut choisir pour q n'importe quelle fraction irréductible en $v = y/x$ de hauteur $|G'| = |G|/2$ qui est G -invariante. Un tel élément est un quotient de deux polynômes homogènes de degré $|G'|$ en x et y , G -invariant. On peut par exemple choisir deux polynômes dans $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$ homogènes de degré $|G'|$, premiers entre eux, lorsque c'est possible.

- De même pour $u = a_1(v)w$, on peut choisir un quotient de deux polynômes de $\mathbb{C}[g_1, g_2, g_3]$, homogènes en x, y tels que le degré du numérateur soit supérieur de 2 au degré du dénominateur.

On rappelle dans le tableau suivant les générateurs g_1, g_2, g_3 de l'algèbre des invariants pour chaque groupe G .

G	Générateurs	Relation
A_{n-1}	$g_1 = xy, g_2 = x^n, g_3 = y^n$	$F = X_1^n - X_2 X_3$
D_{n+2}	$g_1 = x^2 y^2, g_2 = x^{2n} + (-1)^n y^{2n},$ $g_3 = x^{2n+1} y - (-1)^n x y^{2n+1}$	$F = X_1^{n+1} + X_1 X_2^2 + X_3^2$
E_6	$g_1 = xy^5 - x^5 y, g_2 = x^8 + 14x^4 y^4 + y^8,$ $g_3 = x^{12} - 33x^8 y^4 - 33x^4 y^8 + y^{12}$	$F = X_1^4 + X_2^3 + X_3^2$
E_7	$g_1 = x^8 + 14x^4 y^4 + y^8, g_2 = x^{10} y^2 - 2x^6 y^6 + x^2 y^{10},$ $g_3 = x^{17} y - 34x^{13} y^5 + 34x^5 y^{13} - x y^{17}$	$F = X_1^3 X_2 + X_2^3 + X_3^2$
E_8	$g_1 = x^{11} y + 11x^6 y^6 - x y^{11},$ $g_2 = x^{20} - 228x^{15} y^5 + 494x^{10} y^{10} + 228x^5 y^{15} + y^{20},$ $g_3 = y^{30} + 522x^{25} y^5 - 10005x^{20} y^{10} - 10005x^{10} y^{20} - 522x^5 y^{25} + y^{30}.$	$F = X_1^5 + X_2^3 + X_3^2$

Voici dans chaque cas un exemple de choix de couple (p, q) .

G	q	u	p
$D_{n+2}, n \text{ pair}$	$\frac{x^{2n} + y^{2n}}{(xy)^n} = \frac{g_2}{g_1^{n/2}}$	$\frac{g_3}{g_2}$	$\delta_n \frac{g_1^{n/2} g_3}{4g_1^n - g_2^2}$
$D_{n+2}, n \text{ impair}$	$\frac{x^{2n} + y^{2n}}{(xy)^n} = \frac{g_3}{g_1^{(n+1)/2}}$	$\frac{g_3}{g_2}$	$\delta_n \frac{g_1^{(n+1)/2} g_2}{4ng_1^n - (n+1)g_2^2}$
E_6	$\frac{g_3}{g_1^2}$	$\frac{g_2}{g_1}$	$\lambda_6 \frac{g_1^3}{g_2^2}$
E_7	$\frac{g_2}{g_1^3}$	$\frac{g_3}{g_1^2}$	$\lambda_7 \frac{g_1^4}{g_2 g_3}$
E_8	$\frac{g_3}{g_2^3}$	$\frac{g_1 g_2}{g_3}$	$\lambda_8 \frac{g_1 g_2^4}{g_3^3 - g_3 g_2^3}$

où les δ_n , et λ_n sont des constantes complexes non nulles.

6.5 Exemple du cas B_2

Le groupe de Weyl de rang 2 B_2 agit naturellement sur $V = \mathbb{C}^2$. On en déduit une action de B_2 sur $S(V \oplus V^*) = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, que l'on munit du crochet de Poisson symplectique induit par $\{x_i, y_j\} = \delta_{i,j}$ (les autres crochets étant nuls). Alors B_2 agit comme un groupe fini d'automorphismes de Poisson, et on cherche à vérifier la conjecture de Gelfand-Kirillov Poisson pour l'algèbre $S(V \oplus V^*)^{B_2} = \mathbb{K}[x_1, x_2, y_1, y_2]^G$. Plus précisément, on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 6.5.1

Il existe des éléments p_1, q_1, p_2, q_2 du corps des fractions $\text{Frac}(S(V \oplus V^*)^{B_2})$, algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$, tels que :

- $\text{Frac}(S(V \oplus V^*)^{B_2}) = \mathbb{C}(p_1, q_1, p_2, q_2)$.
- $\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}$, et les autres crochets sont nuls.

Démonstration : On sait que le corps de fractions des invariants correspond aux invariants du corps des fractions :

$$\text{Frac}(S(V \oplus V^*)^{B_2}) = \mathbb{C}(x_1, y_1, x_2, y_2)^{B_2}.$$

On pose $H = (\pm 1)^2$, sous-groupe de B_2 . Ainsi, $\mathbb{C}(x_1, y_1, x_2, y_2)^{B_2} = (\mathbb{C}(x_1, y_1, x_2, y_2)^H)^{B_2/H}$. Par ailleurs,

$$\mathbb{C}(x_1, y_1, x_2, y_2)^H = \mathbb{C}(x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_2^2, x_2 y_2, y_2^2) = \mathbb{C}(x_1^2, \frac{y_1}{2x_1}, x_2^2, \frac{y_2}{2x_2})$$

avec $\{x_i^2, \frac{y_i}{2x_i}\} = 1$, les autres crochets étant nuls. Ainsi,

$$\mathbb{C}(x_1, y_1, x_2, y_2)^{B_2} = \mathbb{C}(x_1^2, \frac{y_1}{2x_1}, x_2^2, \frac{y_2}{2x_2})^{(\sigma)},$$

où σ agit par permutation des indices. On pose alors $p_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, $q_1 = \frac{y_1}{2x_1} + \frac{y_2}{2x_2}$, $a = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}$, et $b = \frac{y_1}{2x_1} - \frac{y_2}{2x_2}$. De cette façon, $\{p_1, q_1\} = 1$, $\{a, b\} = 1$, et les autres crochets sont nuls

$$\mathbb{C}(x_1^2, \frac{y_1}{2x_1}, x_2^2, \frac{y_2}{2x_2})^{(\sigma)} = \mathbb{C}(p_1, q_1, a, b)^{(\sigma)}$$

où p_1, q_1 sont invariants par σ , et σ agit comme $-Id \simeq A_1$ sur $\mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}b$. D'après les résultats sur A_1 , en posant $p_2 = a^2$ et $q_2 = \frac{b}{2a}$, on a finalement,

$$\mathbb{C}(x_1, y_1, x_2, y_2)^{B_2} = \mathbb{C}(p_1, q_1, p_2, q_2)$$

avec $\{p_i, q_i\} = 1$ et les autres crochets sont nuls.

□

6.6 Exemple du cas multiplicatif

On considère l'exemple multiplicatif vu au chapitre 5. Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ l'algèbre de Poisson munie du crochet défini par

$$\{x, y\} = xy.$$

et $G = \mathcal{G}_{10}$ le sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{Z})$ d'ordre 2 engendré par $-I_2$.

On démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 6.6.1

Le corps des fractions de l'algèbre des invariants $\mathcal{A}^G$ est isomorphe au corps des fractions de $\mathcal{A}$.

Démonstration : On rappelle que d'après [Lor05], l'algèbre des invariants $\mathcal{A}^G$ est engendrée par les trois éléments suivants :

$$\xi_1 = x + x^{-1}, \quad \xi_2 = y + y^{-1}, \quad \theta = xy + x^{-1}y^{-1},$$

soumis à la relation $\theta\xi_1\xi_2 - \theta^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + 4 = 0$. Ainsi, le corps des fractions des invariants est $K := \mathbb{C}(\xi_1, \xi_2, \theta)$, où les générateurs ξ_1, ξ_2, θ sont algébriquement liés.

1. On commence par exhiber une base de transcendance de K sur $\mathbb{C}$. Dans le corps K , la relation entre les générateurs s'écrit aussi

$$\begin{aligned} & \theta\xi_1\xi_2 - \theta^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2\theta - \xi_1\xi_2)^2 = \xi_1^2\xi_2^2 - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 - 4) \\ \Leftrightarrow & (2\theta - \xi_1\xi_2)^2 = (\xi_1^2 - 4)(\xi_2^2 - 4) \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{2\theta - \xi_1\xi_2}{\xi_2 - 2}\right)^2 = (\xi_1^2 - 4)\frac{\xi_2 + 2}{\xi_2 - 2} \end{aligned}$$

On pose alors

$$\eta := \frac{2\theta - \xi_1\xi_2}{\xi_2 - 2} \in K,$$

et on montre que $K = \mathbb{C}(\eta, \xi_1)$. D'abord,

$$\alpha := \frac{\eta^2}{\xi_1^2 - 4} = \frac{\xi_2 + 2}{\xi_2 - 2} \in \mathbb{C}(\eta, \xi_1),$$

donc $\xi_2 = \frac{2(\alpha + 1)}{\alpha - 1} \in \mathbb{C}(\eta, \xi_1)$. Ensuite, la définition de η donne $\theta = \frac{\eta(\xi_2 - 2) + \xi_1\xi_2}{2}$. Finalement, les trois générateurs ξ_1, ξ_2, θ de K sur $\mathbb{C}$ sont dans $\mathbb{C}(\eta, \xi_1)$. D'où l'égalité $K = \mathbb{C}(\eta, \xi_1)$.

2. Concernant la structure de Poisson, on rappelle que

$$\begin{aligned} \{\xi_1, \xi_2\} &= 2\theta - \xi_1\xi_2 \\ \{\xi_2, \theta\} &= 2\xi_1 - \theta\xi_2 \\ \{\theta, \xi_1\} &= 2\xi_2 - \theta\xi_1 \end{aligned}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \{\eta, \xi_1\} &= \left\{ \frac{2\theta - \xi_1\xi_2}{\xi_2 - 2}, \xi_1 \right\} \\ &= \frac{-(2\theta - \xi_1\xi_2)}{(\xi_2 - 2)^2} \{\xi_2 - 2, \xi_1\} + \frac{1}{\xi_2 - 2} \{2\theta - \xi_1\xi_2, \xi_1\} \\ &= \left(\frac{2\theta - \xi_1\xi_2}{\xi_2 - 2} \right)^2 + \frac{1}{\xi_2 - 2} (2(2\xi_2 - \theta\xi_1) + \xi_1(2\theta - \xi_1\xi_2)) \\ &= \eta^2 + \frac{\xi_2}{\xi_2 - 2} (4 - \xi_1^2) \\ &= \eta^2 + \frac{\alpha + 1}{2} (4 - \xi_1^2) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^2 - \xi_1^2 + 4) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \{\eta, \eta^2 - \xi_1^2 + 4\} &= -\xi_1(\eta^2 - \xi_1^2 + 4) \\ \{\xi_1, \eta^2 - \xi_1^2 + 4\} &= -\eta(\eta^2 - \xi_1^2 + 4) \end{aligned}$$

d'où $\{\eta + \xi_1, \eta^2 - \xi_1^2 + 4\} = -(\eta + \xi_1)(\eta^2 - \xi_1^2 + 4)$, et donc

$$\left\{ \frac{1}{\eta + \xi_1}, \eta^2 - \xi_1^2 + 4 \right\} = \frac{1}{\eta + \xi_1} (\eta^2 - \xi_1^2 + 4).$$

Par ailleurs, le corps engendré sur $\mathbb{C}$ par les deux éléments $X := \frac{1}{\eta + \xi_1}$ et $Y := \eta^2 - \xi_1^2 + 4$ contient clairement $\eta + \xi_1$ et $\eta^2 - \xi_1^2 = (\eta - \xi_1)(\eta + \xi_1)$, donc contient η et ξ_1 . Ainsi, $K = \mathbb{C}(X, Y)$ avec $\{X, Y\} = XY$.

□

Bibliographie

- [AD97] J. Alev and F. Dumas. Invariants du corps de Weyl sous l'action de groupes finis. *Comm. Algebra*, 25(5) :1655–1672, 1997.
- [AF92] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller. *Rings and categories of modules*, volume 13 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [AF09] Jacques Alev and Loïc Foissy. Le groupe des traces de Poisson de certaines algèbres d'invariants. *Comm. Algebra*, 37(1) :368–388, 2009.
- [AFLS00] J. Alev, M. A. Farinati, T. Lambre, and A. L. Solotar. Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini. *J. Algebra*, 232(2) :564–577, 2000.
- [AL98] J. Alev and T. Lambre. Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein. In *Algebra and operator theory (Tashkent, 1997)*, pages 25–38. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.
- [AOVdB96] Jacques Alev, Alfons Ooms, and Michel Van den Bergh. A class of counterexamples to the Gel'fand-Kirillov conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(5) :1709–1716, 1996.
- [AOVdB00] Jacques Alev, Alfons I. Ooms, and Michel Van den Bergh. The Gelfand-Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight. *J. Algebra*, 227(2) :549–581, 2000.
- [BEG04] Yuri Berest, Pavel Etingof, and Victor Ginzburg. Morita equivalence of Cherednik algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 568 :81–98, 2004.
- [Ben93] D. J. Benson. *Polynomial invariants of finite groups*, volume 190 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Ber01] Rolf Berndt. *An introduction to symplectic geometry*, volume 26 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1998 German original by Michael Klucznik.
- [BG02] Ken A. Brown and Ken R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [BGR73] Walter Borho, Peter Gabriel, and Rudolf Rentschler. *Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren (Beschreibung durch Bahnenräume)*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 357. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [But08] Frédéric Butin. Poisson homology in degree 0 for some rings of symplectic invariants. *preprint*, 2008. <http://arxiv.org/abs/0809.4983>.

- [CLO05] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Using algebraic geometry*, volume 185 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2005.
- [CM93] David H. Collingwood and William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semi-simple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.
- [CR02] Richard Cushman and Mark Roberts. Poisson structures transverse to coadjoint orbits. *Bull. Sci. Math.*, 126(7) :525–534, 2002.
- [Dam96] Pantelis A. Damianou. Transverse Poisson structures of coadjoint orbits. *Bull. Sci. Math.*, 120(2) :195–214, 1996.
- [Die74] Jean Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique*. SUP. Le mathématicien. Presses universitaires de France, 1974.
- [DSV07] Pantelis A. Damianou, Hervé Sabourin, and Pol Vanhaecke. Transverse Poisson structures to adjoint orbits in semisimple Lie algebras. *Pacific J. Math.*, 232(1) :111–138, 2007.
- [EO06] Pavel Etingof and Alexei Oblomkov. Quantization, orbifold cohomology, and Cherednik algebras. In *Jack, Hall-Littlewood and Macdonald polynomials*, volume 417 of *Contemp. Math.*, pages 171–182. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [GK66] I. M. Gelfand and A. A. Kirillov. Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (31) :5–19, 1966.
- [GK69] I. M. Gel'fand and A. A. Kirillov. Structure of the Lie sfield connected with a semisimple decomposable Lie algebra. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(1) :7–26, 1969.
- [GL07] K.R. Goodearl and S. Launois. The dixmier-moeglin equivalence and a gel'fand-kirillov problem for poisson polynomial algebras. *preprint*, 2007. <http://arxiv.org/abs/0705.3486>.
- [GSV83] G. Gonzalez-Sprinberg and J.-L. Verdier. Construction géométrique de la correspondance de McKay. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(3) :409–449 (1984), 1983.
- [Hai79] Nghiêm Xuân Hai. Réduction de produits semi-directs et conjecture de Gel'fand et Kirillov. *Bull. Soc. Math. France*, 107(3) :241–267, 1979.
- [Jor07] D. Jordan. Finite-dimensional simple poisson modules. *preprint*, 2007. <http://arxiv.org/abs/0708.3928v2>.
- [Jos74] A. Joseph. Proof of the Gelfand-Kirillov conjecture for solvable Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 :1–10, 1974.
- [Kon03] Maxim Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66(3) :157–216, 2003.
- [LB09] V. Lakshmibai and Justin Brown. *Flag varieties*, volume 53 of *Texts and Readings in Mathematics*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009. An interplay of geometry, combinatorics, and representation theory.

- [Loo84] E. J. N. Looijenga. *Isolated singular points on complete intersections*, volume 77 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [Lor92] Martin Lorenz. Crossed products : characters, cyclic homology, and Grothendieck groups. In *Noncommutative rings (Berkeley, CA, 1989)*, volume 24 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 69–98. Springer, New York, 1992.
- [Lor05] Martin Lorenz. *Multiplicative invariant theory*, volume 135 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VI.
- [Mar04] Nicolas Marconnet. Homologies of cubic Artin-Schelter regular algebras. *J. Algebra*, 278(2) :638–665, 2004.
- [McC74] J. C. McConnell. Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 29 :453–484, 1974.
- [Mon80] Susan Montgomery. *Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings*, volume 818 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [Obl04] Alexei Oblomkov. Double affine Hecke algebras of rank 1 and affine cubic surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, (18) :877–912, 2004.
- [Pel08] Serge Romeo Tagne Pelap. Poisson (co)homology of polynomial poisson algebras in dimension four : Sklyanin’s case. *preprint*, 2008. <http://arxiv.org/abs/0803.1635>.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique*. Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris, 1995. Une introduction. [An introduction].
- [Pic05] Anne Pichereau. Cohomologie de Poisson en dimension trois. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(2) :151–154, 2005.
- [Prz01] Radosław Przybysz. On one class of exact Poisson structures. *J. Math. Phys.*, 42(4) :1913–1920, 2001.
- [Rei02] Miles Reid. La correspondance de McKay. *Astérisque*, (276) :53–72, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [Rot79] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*, volume 85 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.
- [Sai76] Kyoji Saito. On a generalization of de-Rham lemma. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 26(2) :vii, 165–170, 1976.
- [Sho03] Boris Shoikhet. A proof of the Tsygan formality conjecture for chains. *Adv. Math.*, 179(1) :7–37, 2003.
- [Spr77] T. A. Springer. *Invariant theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585.
- [TY05] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [TY07] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. Algèbres de poisson et algèbres de lie résolubles. *preprint*, 2007. <http://arxiv.org/abs/math/0702615>.
- [Ver72] Michèle Vergne. La structure de Poisson sur l’algèbre symétrique d’une algèbre de Lie nilpotente. *Bull. Soc. Math. France*, 100 :301–335, 1972.

- [Wei83] Alan Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3) :523–557, 1983.
- [Xu99] Ping Xu. Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry. *Comm. Math. Phys.*, 200(3) :545–560, 1999.