

UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE  
UFR SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

# THESE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne

**Spécialité : Mathématiques**

présentée par

**Antoine Mériaux**

Titre :

**Etude des spectres premier et primitif de  
l'analogie quantique de la partie positive de  
l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple  
complexe**

Soutenue le 30 Juin 2009 devant le jury composé de :

<b>Gérard Cauchon</b>	Université de Reims	directeur de thèse
<b>Stéphane Launois</b>	University of Kent	co-directeur de thèse
<b>Bernard Leclerc</b>	Université de Caen	Président du jury
<b>Thomas H. Lenagan</b>	University of Edinburgh	rapporteur
<b>Laurent Rigal</b>	Université de Paris 12	rapporteur



*A mes parents,*

*à Julie.*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Gérard Cauchon. C'est lui qui, au travers des multiples cours auxquels j'ai assisté, m'a donné l'envie de faire de l'Algèbre. Tout au long de ces trois années, il m'a guidé, tout d'abord dans l'activité de recherche pure puis dans l'apprentissage de la rédaction d'écrits scientifiques avec un engagement et une patience sans égaux.

Je remercie vivement Stéphane Launois d'avoir co-dirigé ma thèse. Il a lui aussi porté une attention toute particulière à mes activités de recherche et a eu à coeur de m'accompagner dans ma découverte de la communauté scientifique internationale. Ses conseils avisés et ses informations m'ont beaucoup aidé tout au long de mon doctorat.

Je tiens à remercier Thomas H. Lenagan et Laurent Rigal pour l'attention qu'ils ont portée à mon travail de doctorant. Leur façon d'aborder les mathématiques et leur énergie à partager leur passion est source d'inspiration pour moi. J'apprécie tout particulièrement qu'ils aient accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.

Je remercie Bernard Leclerc de l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail et des discussions très profitables que nous avons partagées notamment à Oberwolfach. Je suis sensible à l'honneur qu'il m'accorde en étant président du jury.

Mes remerciements vont aussi à Jacques Alev qui, par son investissement dans le Master 2 Recherche, a largement contribué à me donner envie d'aller voir plus loin. Il m'a, par son action d'organisateur de séminaires et de groupes de travail, invité à rencontrer d'autres mathématiciens et d'autres sujets. Je lui en suis grandement reconnaissant.

Je remercie enfin l'ensemble des membres du département de Mathématiques de l'Université de Reims Champagne-Ardenne pour leur accueil et leur disponibilité. Mes pensées vont en particulier aux membres de l'équipe d'algèbre. Ces trois années resteront un très bon souvenir pour moi en particulier grâce aux moments passés avec les autres doctorants.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Combinatoire dans les groupes de Weyl</b>	<b>11</b>
1.1	Système de racines . . . . .	11
1.1.1	Résultats classiques sur les systèmes de racines . . . . .	11
1.1.2	Ordre de Lusztig . . . . .	13
1.2	Sous-expressions positives . . . . .	20
1.2.1	Diagrammes . . . . .	20
1.2.2	Quelques propriétés des diagrammes positifs . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Les algèbres enveloppantes quantifiées</b>	<b>26</b>
2.1	L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ . . . . .	26
2.1.1	Rappels sur $U_q(\mathfrak{g})$ . . . . .	26
2.1.2	La construction de Jantzen sur $\mathbb{K}$ . . . . .	27
2.1.3	La construction de Lusztig sur $\mathbb{Q}(v)$ . . . . .	31
2.1.4	La construction de Lusztig sur $\mathbb{K}$ . . . . .	34
2.1.5	Relations de commutation entre les $X_\gamma$ dans les plans admissibles . . . . .	38
2.2	Les sous-algèbres $U[w]$ . . . . .	43
2.2.1	Définition et propriétés . . . . .	43
2.2.2	Un exemple où $U[w] = O_q(M_{p,m}(\mathbb{K}))$ . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Effacement des dérivations dans <math>U[w]</math></b>	<b>48</b>
3.1	Contexte de l'algorithme d'effacement des dérivations . . . . .	48
3.1.1	Conventions . . . . .	48
3.1.2	Les algèbres $R^{(m)}$ . . . . .	49
3.1.3	Spectres premier et $H$ -premier de $R^{(m)}$ , diagrammes admissibles . . . . .	51
3.2	Nouveaux résultats sur les idéaux premiers $H$ -invariants . . . . .	52
3.2.1	Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{P}^{(m)}$ soit dans $Im(\phi_m)$ . . . . .	53
3.2.2	Quelques propriétés de $A^{(m)}$ . . . . .	54
3.2.3	Chaque $x_i^{(m)}$ est un polynôme de Laurent en $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$ . . . . .	58
3.2.4	Une nouvelle condition suffisante pour que $\mathcal{P}^{(m)}$ appartienne à $Im(\phi_m)$ . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Diagrammes de Cauchon dans <math>U_q^+(\mathfrak{g})</math> avec un ordre de Lusztig</b>	<b>72</b>
4.1	Construction algorithmique des diagrammes . . . . .	72
4.1.1	Contraintes dans un diagramme . . . . .	72
4.1.2	Contraintes provenant d'un plan admissible . . . . .	77
4.1.3	Le premier théorème fondamental . . . . .	78
4.2	Forme des diagrammes pour une décomposition de $w_0$ particulière. . . . .	82
4.2.1	Le cas des familles infinies . . . . .	84
4.2.2	Les cas exceptionnels . . . . .	89
4.3	Nombre de diagrammes de Cauchon dans le cas général . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Liens entre les diagrammes de Cauchon et les diagrammes positifs</b>	<b>100</b>
5.1	Une propriété des diagrammes de Cauchon . . . . .	100
5.2	Le cas $w = w_0$ . . . . .	105
5.3	Le cas général (deuxième théorème fondamental) . . . . .	106

<b>A</b>	<b>Description des <math>w^\Delta</math> à l'aide de pipe dreams</b>	<b>109</b>
A.1	Le type $A_n$ . . . . .	109
A.2	Les types $B_n$ et $C_n$ . . . . .	110
A.3	Le type $D_n$ . . . . .	114

# Introduction

Soit  $\Phi$  un système de racines irréductible de rang  $n \geq 1$  dans un espace vectoriel euclidien  $E$  (de dimension  $n$ ), vérifiant  $|\beta|^2 = 2$  pour toutes les racines courtes  $\beta$  de  $\Phi$ .

Choisissons une base  $\Pi = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de  $\Phi$ , notons  $\Phi^+$  (resp.  $\Phi^-$ ) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) et posons  $N = |\Phi^+|$  ( $1 \leq n \leq N$ ).

Notons  $W$  le groupe de Weyl de  $\Phi$  et, pour tout  $\beta \in \Phi$ , notons  $s_\beta$  la réflexion par rapport à l'hyperplan normal à  $\beta$ . On rappelle que  $W$  est engendré par les réflexions simples  $s_\alpha$  ( $\alpha \in \Pi$ ) et qu'il contient toutes les réflexions  $s_\beta$  ( $\beta \in \Phi$ ). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple complexe correspondant au système de racines  $\Phi$ .

Soit  $\mathbb{K}$  un corps (commutatif) de caractéristique différente de 2 (et différente de 3 si  $\Phi$  est de type  $G_2$ ), et  $q$  un élément de  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  qui n'est pas une racine de l'unité. Sauf mention contraire, toutes les algèbres considérées dans cette thèse sont des  $\mathbb{K}$ -algèbres.

L'algèbre  $U_q(\mathfrak{g})$  et ses générateurs canoniques  $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha^{\pm 1}$  sont définis comme dans le livre de Jantzen ([Jan96]) et on note  $U_q^+(\mathfrak{g})$  la sous-algèbre engendrée par les  $E_\alpha$  ( $\alpha \in \Pi$ ). Si  $w \in W$ , on lui associe comme dans [Jan96] une sous algèbre  $U[w]$  de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . A chaque décomposition réduite

$$w = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_t} \quad (\alpha_i \in \Pi) \quad (\star)$$

correspond une famille de générateurs "canoniques"  $X_1, \dots, X_t$  de  $U[w]$ .

Si  $\mathbb{Z}\Pi = \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_n$  désigne le groupe additif engendré par  $\Pi$ , et si  $\rho = a_1\epsilon_1 + \dots + a_n\epsilon_n \in \mathbb{Z}\Pi$  ( $a_i \in \mathbb{Z}$ ), on note  $K_\rho = K_{\epsilon_1}^{a_1} \dots K_{\epsilon_n}^{a_n}$  et  $h_\rho : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$  l'automorphisme intérieur  $u \mapsto h_\rho(u) = K_\rho^{-1}uK_\rho$ .

$H = \{h_\rho | \rho \in \mathbb{Z}\Pi\}$  est un groupe abélien d'automorphismes de  $U_q(\mathfrak{g})$  et, pour chaque  $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$ , on a  $h_\rho(U[w]) = U[w]$ , de sorte que  $H$  opère naturellement sur l'algèbre  $U[w]$ .

L'un des objectifs de ce travail est l'étude de la  $H$ -stratification (au sens de K. Brown et K. Goodearl [BG02]) du spectre premier  $\text{Spec}(U[w])$  de l'algèbre  $U[w]$ .

Dans [Cau03a], G. Cauchon a introduit la notion de diagrammes admissibles (encore appelés diagrammes de Cauchon). Ce sont des sous-ensembles particuliers de l'ensemble  $\{1, \dots, t\}$  qui "contrôlent" parfaitement la  $H$ -stratification de  $\text{Spec}(U[w])$ . La construction de ces diagrammes est en général un problème difficile, dont le résultat dépend de la décomposition réduite  $(\star)$  choisie pour  $w$ , et qui n'est entièrement résolu que dans des cas très particuliers. Ainsi, on sait que les algèbres de matrices quantiques  $O_q(\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}))$  sont des algèbres  $U[w]$  particulières et, pour ces algèbres, G. Cauchon a construit la liste des diagrammes admissibles ([Cau03b]). Ce sont les  $\mathbb{J}$ -diagrammes qui ont permis à A. Postnikov ([Pos06]) de classer les cellules positives des grassmanniennes totalement non négatives de types  $A_n$  et de construire une bijection entre les  $\mathbb{J}$ -diagrammes et l'intervalle  $W^{\leq w} = \{w' \in W | w' \leq w\}$ , où  $\leq$  désigne l'ordre de Bruhat sur  $W$ .

Dans ce travail, nous commençons par mettre au point une méthode algorithmique qui permet de construire tous les diagrammes de Cauchon lorsque  $w = w_0$ , l'élément de plus grande longueur de  $W$  (i.e.  $U[w] = U_q^+(\mathfrak{g})$ ), et lorsque la décomposition réduite de  $w_0$  définit un ordre de Lusztig sur  $\Phi^+$ . Cela signifie que l'ordre induit sur  $\Pi$  est un bon ordre et que chaque colonne est ordonnée dans l'ordre décroissant des hauteurs de Lusztig de ses éléments ([Lus90b]).

Cette méthode est basée sur la géométrie des plans admissibles de Lusztig ([Lus90b]). Elle permet de décrire complètement les diagrammes de Cauchon (premier théorème fondamental (théorème 4.1.13)) et, en particulier, de vérifier que leur nombre est égal au cardinal  $|W|$  du groupe de Weyl (théorème 4.3.1). Cette égalité peut facilement se déduire des résultats de M. Gorelik ([Gor00], [AD08]), sous réserve de supposer que  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle et que  $q$  est transcendant.

Ces résultats ont été déposés sur ArXiv ([Mér08]) et soumis à publication en février 2009.

Dans un second temps, nous généralisons les résultats cités ci-dessus de A. Postnikov du cas  $U[w] = O_q(\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}))$ , au cas général. En effet, sans hypothèse particulière sur  $w$  ni sur sa décomposition réduite  $(\star)$ , nous démontrons que les diagrammes de Cauchon coïncident avec les diagrammes positifs de R. Marsh et K. Rietsch ([MR04]), c'est à dire les diagrammes distingués sans défaut de V. Deodhar ([Deo90] et [Deo77]). Par les résultats de R. Marsh et K. Rietsch sur les variétés de drapeaux totalement non négatives ([MR04]) et les résultats classiques de V. Deodhar sur la combinatoire des groupes de Weyl ([Deo90] et [Deo77]), les diagrammes de Cauchon classent les cellules positives des variétés de drapeaux totalement non négatives dans le cas général, et sont en correspondance biunivoque naturelle avec l'intervalle  $W^{\leq w}$ .

Ces résultats ont été déposés sur ArXiv ([CM08]) et soumis à publication en juillet 2008.

Comme les diagrammes de Cauchon sont aussi en bijection naturelle avec les idéaux premiers  $H$ -invariants de  $U[w]$  ([Cau03a]), on en déduit une bijection entre l'ensemble  $H$ -Spec  $(U[w])$  de ces idéaux et l'ensemble  $W^{\leq w}$ . Lorsque  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle et que  $q$  est transcendant, M. Yakimov (preprint avril 2009) a récemment construit un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre  $H$ -Spec  $(U[w])$  et  $W^{\leq w}$  par une méthode différente basée sur les résultats de M. Gorelik ([Gor00]).

On décrit à présent de façon succincte le contenu de chaque chapitre.

Le premier chapitre traite exclusivement des systèmes de racines et des groupes de Weyl associés. La section 1.1 est entièrement dédiée à décrire le cadre d'application de la théorie des plans admissibles de Lusztig (définition 1.1.20), à savoir l'ordre de Lusztig sur l'ensemble des racines positives (définition 1.1.7). La section 1.2 introduit quant à elle la notion de diagramme positif (définition 1.2.6) et permet de démontrer la proposition 1.2.16 qui sera cruciale dans le chapitre 4.

Le deuxième chapitre est en majeure partie composé de résultats connus sur les algèbres enveloppantes quantifiées. La section 2.1 rappelle les différentes constructions des bases de PBW par Jantzen et Lusztig ainsi que le lien entre ces deux constructions, il s'agit essentiellement de pouvoir appliquer la théorie des plans admissibles à la construction de Jantzen. La section 2.2 revient sur les sous-algèbres  $U[w]$  et décrit en détail l'exemple important de l'algèbre des matrices quantiques.

Le troisième chapitre contient les notations et rappels nécessaires à l'application de l'effacement des dérivations aux algèbres enveloppantes quantifiées. La section 3.1 décrit en détail les notations et le cadre d'application de l'algorithme. La section 3.2 contient la démonstration de deux nouveaux résultats, la proposition 3.1.4 qui servira à démontrer le premier théorème fondamental et la proposition 3.2.20 qui est centrale dans la démonstration du second théorème fondamental car elle permet de relier l'effacement des dérivations aux diagrammes positifs.

Le quatrième chapitre contient la description d'un algorithme qui permet de calculer explicitement la forme des diagrammes de Cauchon. La définition 4.1.10 introduit la notion de contraintes provenant d'un plan admissible et le premier théorème fondamental (théorème 4.1.13) établit que les diagrammes de Cauchon sont les diagrammes qui vérifient les contraintes provenant des plans admissibles. On calcule ensuite explicitement la forme des diagrammes pour chaque type d'algèbre de Lie simple dans la section 4.2 et on en déduit qu'il y a autant de diagrammes de Cauchon que d'éléments du groupe de Weyl dans la section 4.3.

Le cinquième et dernier chapitre explicite le lien entre les diagrammes de Cauchon et la combinatoire du groupe de Weyl. Le second théorème fondamental (théorème 5.3.1) établit que les diagrammes de Cauchon coïncident avec les diagrammes positifs. On en déduit une série de corollaires, dont le fait qu'il existe une bijection naturelle entre les diagrammes de Cauchon de  $U[w]$  et l'ensemble  $W^{\leq w} = \{u \in W \mid u \leq w\}$  (corollaire 5.3.3).

Enfin, l'annexe présente, dans le cas des familles infinies, une description de la bijection précédente en utilisant un outil combinatoire appelé "pipe dreams", qui permet de faire le lien entre un diagramme de Cauchon et une permutation (signée ou non) grâce à une tresse plane.

# Chapitre 1

## Combinatoire dans les groupes de Weyl

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à la combinatoire du groupe de Weyl  $W$  associé à une algèbre de Lie simple complexe  $\mathfrak{g}$ .

Dans la première partie, nous rappelons les notations ainsi que quelques propriétés élémentaires des systèmes de racines et de l'action du groupe de Weyl sur ceux-ci. De plus, nous expliquons la notion de *bonne numérotations* de la base  $\Pi$  d'un système de racines  $\Phi$  puis celle d'ordre de Lusztig sur la partie positive  $\Phi^+$  de  $\Phi$ . Ces deux notions ont été introduites par Lusztig ([Lus90b]) dans le cadre de la théorie des *plans admissibles* ; celle-ci sera utilisée dans le chapitre 2 pour obtenir des relations de commutations dans  $U_q^+(\mathfrak{g})$ .

La seconde partie de ce chapitre est destinée à introduire la notion de sous-expression positive d'une décomposition réduite d'un élément de  $W$ . Cette notion, introduite par V. V. Deodhar ([Deo90]), est utilisée par R.J. Marsh et K. Rietsch ([MR04]) pour décrire la stratification de la partie totalement positive de la variété de drapeaux  $\frac{G}{B}$ . Chaque sous-expression peut être décrite au moyen d'un diagramme ([Deo90] et section 1.2). Nous démontrons dans cette seconde partie quelques propriétés élémentaires des diagrammes associés aux sous-expressions positives (diagrammes positifs).

### 1.1 Système de racines

#### 1.1.1 Résultats classiques sur les systèmes de racines

Les notations suivantes sont celles de [Jan96, chap4].

##### *Notations.*

- On note  $\Phi$  un système de racines et  $E = \text{Vect}(\Phi)$  ( $\dim E = n$ ). Quand on fixe une base  $\Pi := \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  de  $\Phi$ , il existe une décomposition  $\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$ , où  $\Phi^+$  (resp.  $\Phi^-$ ) désigne, comme d'habitude, l'ensemble des racines positives (resp. négatives).
- On note  $W$  le groupe de Weyl associé au système de racines  $\Phi$ , il est engendré par les **réflexions simples**  $s_i := s_{\epsilon_i}, 1 \leq i \leq n$ . L'élément de plus grande longueur de  $W$  est noté  $w_0$ .

##### **Définition 1.1.1.**

Un système de racines  $\Phi$  est **réductible** si  $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$  où  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont deux systèmes de racines orthogonaux. Sinon  $\Phi$  est dit **irréductible**.

Rappelons qu'il y a une correspondance bijective entre les systèmes de racines irréductibles et les algèbres de Lie simples complexes de dimension finie. On dira que  $\mathfrak{g}$ , algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, est d'un type donné si le système de racines associé à  $\mathfrak{g}$  est de ce type. Les définitions et résultats qui suivent proviennent de [Lus90b].

##### **Définition 1.1.2.**

Soient  $\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  une base de  $\Phi$  et  $j$  un entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. **La colonne  $j$**  est l'ensemble  $C_j := \{\beta \in \Phi^+ | \beta = k_1\epsilon_1 + \dots + k_j\epsilon_j, k_i \in \mathbb{N}, k_j \neq 0\}$ ;
2. On dit qu'une racine  $\beta = k_1\epsilon_1 + \dots + k_j\epsilon_j \in C_j$  est **ordinaire** si  $k_j = 1$ ; elle est dite **exceptionnelle** si  $k_j = 2$ ;
3. Une colonne  $C_j$  est appelée **ordinaire** si toute racine  $\beta$  de  $C_j$  est ordinaire; cette colonne est dite **exceptionnelle** si toute racine  $\beta$  de  $C_j$  est ordinaire sauf une seule racine note  $\beta_{ex}$  qui est exceptionnelle.

**Définition 1.1.3.**

Le numérotation  $\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$  est **bonne** si toute colonne  $C_j$  est ordinaire ou exceptionnelle.

**Exemple 1.1.4 (Le cas  $G_2$ ).** Le système de racines de type  $G_2$  est de rang 2, il a 2 racines simples  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  avec  $\|\epsilon_2\| = \sqrt{3}\|\epsilon_1\|$ .  $\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  est une base de ce système de racine. La numérotation  $\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  est bonne car  $C_1 = \{\epsilon_1\}$  est ordinaire et  $C_2 = \{\epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2, 2\epsilon_1 + \epsilon_2, 3\epsilon_1 + \epsilon_2, 3\epsilon_1 + 2\epsilon_2\}$  est exceptionnelle.

Par contre, la numérotation  $\Pi = \{\epsilon_2, \epsilon_1\}$  n'est pas bonne. En effet, pour cette numérotation,  $C_1 = \{\epsilon_2\}$  est ordinaire mais  $C_2 = \{\epsilon_1, \epsilon_2 + \epsilon_1, \epsilon_2 + 2\epsilon_1, \epsilon_2 + 3\epsilon_1, 2\epsilon_2 + 3\epsilon_1\}$  n'est ni ordinaire ni exceptionnelle.

**Proposition 1.1.5.**

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple de dimension finie. Les numérotations ci-dessous du système des racines simples  $\Pi$  sont des exemples de bonnes numérotations.

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_n$ , de diagramme de Dynkin :  $\epsilon_1 - \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$ ,

$$\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $B_n$ , de diagramme de Dynkin :  $\epsilon_1 \leftarrow \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$ ,

$$\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $C_n$ , de diagramme de Dynkin :  $\epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$ ,

$$\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $D_n$ , de diagramme de Dynkin :



$$\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n\}.$$

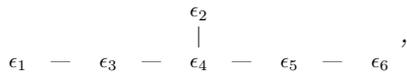
- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $G_2$ , de diagramme de Dynkin :  $\epsilon_1 \Leftarrow \epsilon_2$ ,

$$\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $F_4$ , de diagramme de Dynkin :  $\epsilon_1 - \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_3 - \epsilon_4$ ,

$$\Pi = \{\epsilon_4, \epsilon_3, \epsilon_2, \epsilon_1\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $E_6$ , de diagramme de Dynkin :



$$\Pi = \{\epsilon_2, \epsilon_5, \epsilon_4, \epsilon_3, \epsilon_1, \epsilon_6\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $E_7$ , de diagramme de Dynkin :



$$\Pi = \{\epsilon_2, \epsilon_5, \epsilon_4, \epsilon_3, \epsilon_1, \epsilon_6, \epsilon_7\}.$$

- Si  $\mathfrak{g}$  est de type  $E_8$ , de diagramme de Dynkin :

$$\begin{array}{cccccccc} & & \epsilon_2 & & & & & & \\ & & | & & & & & & \\ \epsilon_1 & - & \epsilon_3 & - & \epsilon_4 & - & \epsilon_5 & - & \epsilon_6 & - & \epsilon_7 & - & \epsilon_8 \end{array},$$

$$\Pi = \{\epsilon_2, \epsilon_5, \epsilon_4, \epsilon_3, \epsilon_1, \epsilon_6, \epsilon_7, \epsilon_8\}.$$

**Démonstration :** Les colonnes correspondant à ces numérotations seront données explicitement dans la section 4.2 et on constatera que chaque colonne est bien, soit ordinaire soit exceptionnelle, ce qui démontrera la proposition. □

Il existe a priori bien d'autres bonnes numérotations de l'ensemble des racines simples  $\Pi$ . **Dans tout ce qui suit, on supposera que l'on a choisi une bonne numérotation de  $\Pi$ .**

### 1.1.2 Ordre de Lusztig

**Notations.**

- Pour  $\beta = k_1\epsilon_1 + \dots + k_j\epsilon_j \in C_j$ , on appelle **hauteur de  $\beta$**  l'entier  $h(\beta) := k_1 + \dots + k_j$  et on appellera **hauteur de Lusztig de  $\beta$** , le nombre rationnel  $h'(\beta) := \frac{1}{k_j}h(\beta)$ . [Lus90b, section 4.3]
- Si  $t \in h'(C_j)$ , l'ensemble  $B^{j,t} := \{\beta \in C_j | h'(\beta) = t\}$  est appelé **la boîte de hauteur  $t$  dans la colonne  $C_j$ .**

**Remarque 1.1.6.**

$$C_j = \bigsqcup_{t \in \mathbb{N}^*} B^{j,t}.$$

**Définition 1.1.7 (Ordre de Lusztig sur  $\Phi^+$ ).**

On définit un ordre partiel sur  $\Phi^+$  comme suit :

Soient  $\beta_1$  et  $\beta_2$  deux racines de  $\Phi^+$ ,

- Si  $\beta_1 \in C_{j_1}$  et  $\beta_2 \in C_{j_2}$  avec  $j_1 < j_2$ , alors  $\beta_1 < \beta_2$ .
- Si  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont dans la même colonne  $C_j$  et si  $h'(\beta_2) < h'(\beta_1)$ , alors  $\beta_1 < \beta_2$ .

On peut raffiner l'ordre partiel précédent en un ordre total en choisissant un ordre arbitraire à l'intérieur des boîtes. Comme il y a plusieurs façons d'ordonner chaque boîte on dira que l'ordre obtenu est "**un**" ordre de Lusztig.

**Remarque 1.1.8.**

L'ordre ci-dessus est l'ordre inverse de celui utilisé par  $G$ . Lusztig ([Lus90b, section 4.3]).

**Observation 1.1.9.** •  $\epsilon_j$  est la plus grande racine de  $C_j$  pour l'ordre ci-dessus.

- Les racines positives d'une même boîte sont consécutives pour un tel ordre :  $B^{j,t} = \{\beta_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+l}\}$ .

**Proposition 1.1.10.**

Soient  $C_j$  une colonne exceptionnelle et  $\beta_{ex}$  sa racine exceptionnelle.

1.  $\beta_{ex} \perp (C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{j-1})$
2. Si  $D = \langle \beta_{ex} \rangle$  et si  $s_D$  est la symétrie orthogonale par rapport  $D$ , on a :
  - $s_D(C_j) = C_j$  et  $\forall \beta \in C_j \setminus \{\beta_{ex}\}$  on a  $\beta + s_D(\beta) = \beta_{ex}$ .
  - Pour toute boîte  $B^{j,t}$  différente de la boîte contenant  $\beta_{ex}$ ,  $s_D$  transforme  $B^{j,t}$  en  $B^{j,h(\beta_{ex})-t}$ .

**Démonstration :**

1. Soit  $\beta \in C_1 \cup \dots \cup C_{j-1}$ . Si  $\beta$  n'est pas orthogonale  $\beta_{ex}$ , alors  $s_\beta(\beta_{ex}) = \beta_{ex} + k\beta$  ( $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ) est une racine de  $C_j$  dont le coefficient en  $\epsilon_j$  est égal à 2. Ceci contredit l'unicité de la racine exceptionnelle.
2. Observons que  $s_D = -s_{\beta_{ex}}$ , de sorte que  $s_D(\Phi) = \Phi$ .
  - Soit  $\beta$  une racine non exceptionnelle de  $C_j$ . On peut écrire

$$\beta = a_1\epsilon_1 + \dots + a_{j-1}\epsilon_{j-1} + \frac{1}{2}\beta_{ex} \quad (a_i \in \mathbb{Q}).$$

Il résulte de 1. que  $s_D(\beta) = -a_1\epsilon_1 \dots - a_{j-1}\epsilon_{j-1} + \frac{1}{2}\beta_{ex} = \beta_{ex} - \beta$ . Ceci est une racine d'après l'observation ci-dessus. Elle est dans  $C_j$  puisque  $\beta$  est dans  $C_j \setminus \{\beta_{ex}\}$ .

- Par le point précédent,  $s_D$  transforme deux éléments de  $B^{j,t}$  en deux racines de même hauteur. On en déduit (au moyen de l'involutivité de  $s_D$ ) que  $s_D(B^{j,t})$  est une boîte  $B^{j,s}$ . La formule  $t + s = h(\beta_{ex})$  résulte immédiatement du premier point.

□

**Définition 1.1.11.**

Le support d'une racine  $\beta = a_1\epsilon_1 + \dots + a_j\epsilon_j \in C_j$  est l'ensemble  $\mathbf{Supp}(\beta) := \{\epsilon_i \in \Pi | a_i \neq 0\}$ . En particulier, pour  $\beta \in C_j$ , on a  $\mathbf{Supp}(\beta) \subset \{1, \dots, j\}$ .

On va à présent démontrer la

**Proposition 1.1.12.**

Supposons qu'il existe une colonne exceptionnelle  $C_j$  ( $1 < j \leq n$ ) et notons  $\beta_{ex}$  sa racine exceptionnelle. Alors  $h'(\beta_{ex}) \notin \mathbb{N}$  de sorte que  $\beta_{ex}$  est seule dans sa boîte.

**Démonstration :** On note  $\Pi_j = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_j\}$  et  $\Phi_j = \Phi \cap \text{Vect}(\Pi_j)$ . On vérifie facilement que  $\Phi_j$  est un système de racines de base  $\Pi_j$  et que  $\Phi_j^+ = \Phi^+ \cap \text{Vect}(\Pi_j)$ .

Considérons d'abord le cas où  $\Phi_j$  est irréductible. On a alors

**Observation 1.** Si  $\beta$  est une racine de  $\Phi_j^+$  de hauteur maximale alors  $\beta \in C_j$ .

On suppose  $\beta \in C_i$  avec  $i < j$ . Dans le diagramme de Dynkin de  $\Phi_j$  qui est connexe ( $\Phi_j$  est irréductible), on peut construire un chemin de  $\epsilon_i$  à  $\epsilon_j$ . On note ce chemin  $P = (\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_t})$ , où  $i_1 = i$  et  $i_t = j$ . On sait que  $\epsilon_i \in \text{Supp}(\beta)$  et que  $\epsilon_j \notin \text{Supp}(\beta)$ . Ainsi il existe un plus petit indice  $l$  tel que  $\epsilon_{i_l} \in \text{Supp}(\beta)$  et  $\epsilon_{i_{l+1}} \notin \text{Supp}(\beta)$ . Ainsi, pour tout  $\epsilon \in \text{Supp}(\beta)$  on a  $\langle \epsilon, \epsilon_{i_{l+1}} \rangle \leq 0$  et, puisque  $\epsilon_{i_l}$  et  $\epsilon_{i_{l+1}}$  sont deux éléments consécutifs de  $P$ ,  $\langle \epsilon_{i_l}, \epsilon_{i_{l+1}} \rangle < 0$ . De l,  $\langle \beta, \epsilon_{i_{l+1}} \rangle < 0$  donc  $\beta + \epsilon_{i_{l+1}} \in \Phi_j^+$  ce qui contredit la maximalité de la hauteur  $\beta$ .

**Observation 2.**  $\beta_{ex}$  est la racine de hauteur maximale dans  $\Phi_j$ .

Soit  $\beta$  une racine de hauteur maximale dans  $\Phi_j$ . Supposons  $\beta \neq \beta_{ex}$ . Par l'observation précédente,  $\beta \in C_j$  et, par la proposition 1.1.10,  $\beta_{ex} = \beta + s_D(\beta)$  est une somme de deux racines positives donc de hauteur plus grande que  $\beta$ . Donc  $\beta$  est nécessairement égale  $\beta_{ex}$ .

L'existence d'une racine exceptionnelle entraîne que  $\Phi_j$  n'est pas de type  $A_j$ . Par suite  $\Phi_j$  est de type  $B_j, C_j, D_j, E_6, E_7, E_8, F_4$  ou  $G_2$  et, en se référant aux planches de [Bou68], on voit que la hauteur de la racine de plus grande hauteur est toujours impair. Par l'observation 2.  $\beta_{ex}$  est de hauteur impair, et donc  $h'(\beta_{ex}) \notin \mathbb{N}$ .

Supposons à présent  $\Phi_j$  réductible. Notons  $\Gamma_j$  le diagramme dont les sommets sont  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_j$ , et dont les arêtes sont celles qui proviennent du diagramme de Dynkin de  $\Phi$  et notons  $\Pi'$  la composante connexe de  $\epsilon_j$  dans  $\Gamma_j$  ;

$$\Pi' := \{\epsilon_i \in \Pi_j | \text{il existe un chemin dans } \Gamma_j \text{ reliant } \epsilon_i \text{ et } \epsilon_j\}.$$

Notons  $\Phi' = \Phi \cap \text{Vect}(\Pi')$ . C'est un système de racines de base  $\Pi'$  et  $\Phi'^+ = \Phi^+ \cap \text{Vect}(\Pi')$ .

**Observation 3.**  $C_j \subset \Phi'^+$ .

Sinon, il existe des racines dans  $C_j \setminus \Phi'^+$ . Si  $\beta$  est une telle racine, son support contient des racines simples qui sont dans  $\Pi_j \setminus \Pi'$ . Comme le support de  $\beta$  contient aussi  $\epsilon_j \in \Pi'$ , on peut écrire  $\beta = u + v$  avec  $u = \epsilon_{i_1} + \dots + \epsilon_{i_l}$  support dans  $\Pi_j \setminus \Pi'$  et  $v = \epsilon_{i_{l+1}} + \dots + \epsilon_{i_p}$  support dans  $\Pi'$ . Choisissons  $\beta$  de manière que l'entier  $l$  ainsi défini soit minimal.

- Si  $l = 1, \beta = \epsilon_{i_1} + v$ . Comme  $\epsilon_{i_1} \notin \Pi'$ , il n'existe aucune liaison entre  $\epsilon_{i_1}$  et les éléments du support de  $v$ . Donc  $s_{i_1}(\beta) = -\epsilon_{i_1} + v \in \Phi$ , ce qui est impossible puisque les coordonnées dans  $\Pi$  de cette racine ne sont pas toutes de même signe.

- Donc  $l \geq 2$ . Comme  $\langle u, u \rangle > 0$ , il existe une racine simple du support de  $u$ , par exemple  $\epsilon_{i_l}$ , vérifiant  $\langle u, \epsilon_{i_l} \rangle > 0$ . Comme ci dessus, on a :

$$\langle v, \epsilon_{i_l} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \beta, \epsilon_{i_l} \rangle > 0 \Rightarrow \beta' = \beta - \epsilon_{i_l} \in C_j \setminus \Phi'^+,$$

ce qui contredit la minimalité de  $l$ .

On a donc bien  $C_j \subset \Phi'^+$ .

Ainsi  $C_j$  est une colonne exceptionnelle de  $\Phi'$  qui est irréductible par construction. L'étude ci-dessus montre que sa racine exceptionnelle  $\beta_{ex}$  vérifie  $h'(\beta_{ex}) \notin \mathbb{N}$ .

□

On peut maintenant montrer la

**Proposition 1.1.13.**

"<" est un ordre convexe sur  $\Phi^+$

**Démonstration :** Soient  $\beta_1 < \beta_2$  deux racines positives telles que  $\beta_1 + \beta_2 \in \Phi^+$ .

- Si les deux racines  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ne sont pas dans la même colonne, alors  $\beta_1 + \beta_2$  est dans la même colonne que  $\beta_2$ . Dans ce cas, ni  $\beta_2$ , ni  $\beta_1 + \beta_2$  ne sont exceptionnelles et on a :

$$h'(\beta_1 + \beta_2) = h(\beta_1 + \beta_2) = h(\beta_1) + h'(\beta_2) > h'(\beta_2).$$

On en déduit que  $\beta_1 < \beta_1 + \beta_2 < \beta_2$ .

- Si les deux racines sont dans la même colonne, alors  $\beta_1 + \beta_2$  est une racine exceptionnelle. D'après la proposition 1.1.10, on a  $h'(\beta_1 + \beta_2) = \frac{h'(\beta_1) + h'(\beta_2)}{2}$ . La proposition 1.1.12 exclut le cas  $h'(\beta_1 + \beta_2) = h'(\beta_1) = h'(\beta_2)$  car la racine exceptionnelle est seule dans sa boîte. On a donc  $h'(\beta_1) > h'(\beta_1 + \beta_2) > h'(\beta_2)$  ce qui implique  $\beta_1 < \beta_1 + \beta_2 < \beta_2$ .

□

Si on considère une décomposition réduite de  $w_0 = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_N}$  avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \Pi$  (l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl), on sait (cf, par exemple, [BG02, I.5.1]) que  $\beta_j := s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j)$  décrit  $\Phi^+$  lorsque  $j$  décrit  $\llbracket 1, N \rrbracket$ . Pour chaque entier  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on dit que  $\alpha_j$  est **la racine simple associée à la racine positive**  $\beta_j$ .

On ordonne alors  $\Phi^+$  en posant  $\beta_i < \beta_j$  lorsque  $i < j$ . On dit que "<" est **l'ordre associé la décomposition réduite de**  $w_0 = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_N}$ .

Dans [Pap94, Théorème et remarque page 662], il est démontré que cet ordre est convexe et que l'on définit, de cette manière, une correspondance biunivoque entre les décompositions réduites de  $w_0$  et les ordres convexes sur  $\Phi^+$ .

**Ainsi, l'ordre "<" de Lusztig étant convexe, il existe une unique décomposition réduite de  $w_0 = s_{\alpha'_1} \circ s_{\alpha'_2} \circ \dots \circ s_{\alpha'_N}$  dont l'ordre associé est "<". Dans ce texte, on choisira systématiquement cette décomposition pour  $w_0$ .**

La prochaine proposition provient de [Lus90b, section 4.3] et précise comment sont disposées les racines l'intérieur des boîtes.

**Proposition 1.1.14.**

A l'intérieur de chaque boîte ne contenant pas la racine exceptionnelle, les racines sont orthogonales 2 à 2. De plus, les racines simples associées aux racines d'une boîte donnée sont orthogonales 2 à 2.

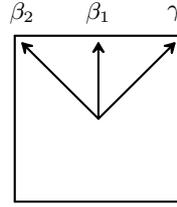
**Démonstration :** Le cas d'un système de type  $G_2$  se déduit simplement de l'étude de l'exemple 1.1.4. On suppose donc que  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie simple de dimension finie et de type différent de  $G_2$ . Soient  $\beta_1$  et  $\beta_2$  deux racines consécutives d'une boîte B de la colonne  $C_j$ . On note  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les racines simples respectivement associées  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

Supposons que  $\alpha_1$  n'est pas orthogonale à  $\alpha_2$ , de sorte que  $\lambda = -\langle \alpha_1^\vee, \alpha_2 \rangle = 1$  ou  $2$ .

On peut donc écrire  $\beta_2 = w \circ s_{\alpha_1}(\alpha_2) = w(\lambda\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda\beta_1 + w(\alpha_2)$ . Comme  $w(\alpha_2) \in \Phi$ , on a nécessairement  $\lambda = 2$ , sinon  $h(w(\alpha_2)) = h(\beta_2) - h(\beta_1) = 0$ , ce qui est absurde.

Mais alors  $\gamma = -w(\alpha_2) = 2\beta_1 - \beta_2 \in C_j$  et  $h(\gamma) = 2h(\beta_1) - h(\beta_2) = h(\beta_1)$ .  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont deux racines positives

distinctes donc non colinéaires. La trace  $\Phi'$  de  $\Phi$  sur le plan  $\text{Vect}(\beta_1, \beta_2)$  est donc un système de racines de rang 2 contenant  $\beta_1, \beta_2, \gamma$  et leurs opposées. L'égalité  $2\beta_1 = \gamma + \beta_2$  permet d'affirmer que  $\Phi'$  est de type  $B_2$  et qu'on est dans la situation ci-dessous :



Il en résulte que  $\gamma - \beta_1 \in \Phi$ , avec  $h(\gamma - \beta_1) = h(\gamma) - h(\beta_1) = 0$ . Ce qui est impossible. On a donc  $\alpha_1 \perp \alpha_2$ . On en déduit que  $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = \langle w(\alpha_1), w(s_{\alpha_1}(\alpha_2)) \rangle = \langle \alpha_1, s_{\alpha_1}(\alpha_2) \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ . □

**Convention.**

Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\delta_j$  la première racine de  $C_j$ . On rappelle que  $\epsilon_j$  est la dernière racine de  $C_j$ .

**Proposition 1.1.15.**

$\delta_j$  et  $\epsilon_j$  sont seules dans leur boîtes.

**Démonstration :** La racine  $\epsilon_j$  est seule dans sa boîte car c'est la seule racine de  $C_j$  de hauteur égale à 1.

Pour démontrer que  $\delta_j$  est seule dans sa boîte, on va se servir du

**Lemme 1.1.16.**

Soit  $1 \leq l \leq N$  et  $1 \leq m \leq n$ . On pose  $\Pi_m := \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$ . Si  $\beta_l = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{l-1}}(\alpha_l)$  est dans la colonne  $C_m$ , alors  $\alpha_j \in \Pi_m$  pour  $j \in \llbracket 1, l \rrbracket$ .

**Démonstration :** On raisonne par récurrence sur  $l$ .

Si  $l = 1$  :  $\beta_1 = \alpha_1 = \epsilon_1 \in \Pi_1$ .

Si  $l \geq 2$ ,  $\beta_{l-1}$  est dans la colonne  $C_m$  ou  $C_{m-1}$ . Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que  $\alpha_t \in \Pi_m$  (ou  $\alpha_t \in \Pi_{m-1} \subset \Pi_m$ ) pour  $t \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket$ . On observe que  $\beta_l = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{l-1}}(\alpha_l) = \alpha_l + n_{l-1}\alpha_{l-1} + \dots + n_1\alpha_1$  où chaque  $n_t$  est dans  $\mathbb{Z}$ . Comme  $\beta_l \in C_m$ , nécessairement  $\alpha_l \in \Pi_m$ . □

**Retour à la démonstration de la proposition :**

Il existe un entier  $1 \leq l \leq N$  tel que  $\delta_j = \beta_l = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{l-1}}(\alpha_l)$ . comme ci-dessus,  $\beta_l = \alpha_l + n_{l-1}\alpha_{l-1} + \dots + n_1\alpha_1$  ( $n_t \in \mathbb{Z}$ ) avec, puisque  $\beta_{l-1} \in C_{j-1}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$  dans  $\Pi_{j-1}$ . Comme  $\beta_l \in C_j$ , on en déduit que  $\alpha_l = \epsilon_j$ . Si  $\delta_j (= \beta_l)$  n'est pas seule dans sa boîte, alors  $\beta_{l+1}$  est aussi dans cette boîte et on a (proposition 1.1.14)  $\alpha_l \perp \alpha_{l+1}$ . Par le lemme précédent, on en déduit que  $\alpha_{l+1} \in \Pi_j \setminus \{\epsilon_j\} = \Pi_{j-1}$  et  $\beta_{l+1} = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{l-1}} \circ s_{\alpha_l}(\alpha_{l+1}) = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{l-1}}(\alpha_{l+1}) = \alpha_{l+1} + n'_{l-1}\alpha_{l-1} + \dots + n'_1\alpha_1$  ( $n'_t \in \mathbb{Z}$ ), ce qui contredit l'hypothèse  $\beta_{l+1} \in C_j$ . □

Rappelons le résultat classique suivant (cf par exemple, [Hum78, lemme 9.4]).

**Lemme 1.1.17.**

Soient  $\beta$  et  $\delta$  deux racines distinctes de  $\Phi^+$  telles que  $\langle \beta, \delta \rangle \neq 0$

- Si  $\langle \beta, \delta \rangle > 0$ , alors  $\beta - \delta \in \Phi$ .
- Si  $\langle \beta, \delta \rangle < 0$ , alors  $\beta + \delta \in \Phi$ .

**Proposition 1.1.18.**

Soit  $\beta$  une racine ordinaire de la colonne  $C_j$ . Notons (comme dans la démonstration de la proposition 1.1.12)  $\Gamma_j$  le diagramme dont les sommets sont  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_j$ , et dont les arêtes sont celles qui proviennent du diagramme de Dynkin de  $\Phi$ . On note  $\Omega_j$  la composante connexe de  $\epsilon_j$  dans  $\Gamma_j$ .

1. Si  $\beta \neq \epsilon_j$ , alors il existe  $\epsilon \in \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}\}$  telle que  $\beta - \epsilon \in C_j$ .
2.  $\text{Supp } \beta \subset \Omega_j$ .
3. Si  $\beta \neq \delta_j$ , alors il existe  $\epsilon \in \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{j-1}\}$  telle que  $\beta + \epsilon \in C_j$ .

**Démonstration :** On vérifie que cette proposition est vraie dans le cas  $G_2$  à l'aide de la description des colonnes donnée dans l'exemple 1.1.4. On suppose maintenant que le système de racines considéré n'est pas de type  $G_2$ .

Dans cette démonstration, on note  $\Pi_j = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_j\}$ .

1. S'il existe  $\epsilon \in \Pi_j \setminus \{\epsilon_j\}$  tel que  $\langle \beta, \epsilon \rangle > 0$ , on conclut avec le lemme 1.1.17. On suppose donc que  $\forall \epsilon \in \Pi_j \setminus \{\epsilon_j\}, \langle \beta, \epsilon \rangle \leq 0$ .

Comme  $\langle \beta, \beta \rangle > 0$  alors,  $\langle \beta, \epsilon_j \rangle > 0$  et  $\beta - \epsilon_j = \gamma_1 \in \Phi^+$  avec  $\epsilon_j \notin \text{Supp}(\gamma_1)$ . On peut donc écrire  $\beta = \beta_1 + \gamma_1$  avec  $\beta_1 = \epsilon_j \in C_j$  et, puisque  $\beta$  est ordinaire,  $\epsilon_j \notin \text{Supp}(\gamma_1)$ . Puisque  $\beta \neq \epsilon_j$ , on a  $h(\beta) \geq 2$  et on se propose de montrer par récurrence que, pour chaque entier  $i \in \llbracket 1, h(\beta) - 1 \rrbracket$ , on a  $\beta = \beta_i + \gamma_i$  avec  $\beta_i \in C_j, \gamma_i \in \Phi^+$  et  $h(\beta_i) = i$ .

- Comme  $h(\beta_1) = h(\epsilon_j) = 1$ , on a le résultat au rang  $i = 1$ .
- Supposons le résultat démontré au rang  $i$  avec  $1 \leq i < h(\beta) - 1$  et observons que, puisque  $\beta$  est ordinaire,  $\gamma_i \notin C_j$  de sorte que  $\text{Supp}(\gamma_i) \subset \Pi_{j-1}$ . Comme  $\langle \gamma_i, \gamma_i \rangle > 0$ , il existe  $\epsilon \in \Pi_{j-1}$  telle que  $\langle \gamma_i, \epsilon \rangle > 0$ . Comme  $i < h(\beta) - 1$ , on a  $h(\gamma_i) > 1 \Rightarrow \gamma_i \neq \epsilon \Rightarrow \gamma_{i+1} := \gamma_i - \epsilon \in \Phi^+$  (lemme 1.1.17). Alors  $\langle \beta, \epsilon \rangle = \langle \beta_i, \epsilon \rangle + \langle \gamma_i, \epsilon \rangle$  et, puisque  $\langle \beta, \epsilon \rangle \leq 0$ , on a  $\langle \beta_i, \epsilon \rangle < 0$ . Ceci entraîne que (lemme 1.1.17)  $\beta_{i+1} := \beta_i + \epsilon \in C_j$ . Ainsi,  $\beta = \beta_{i+1} + \gamma_{i+1}$  avec  $\beta_{i+1} \in C_j$  et  $h(\beta_{i+1}) = h(\beta_i) + 1$ .

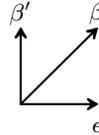
On a donc bien le résultat annoncé et, pour  $i = h(\beta) - 1$ , on a  $h(\gamma_i) = 1$ . Donc, puisque  $\beta$  est ordinaire,  $\epsilon := \gamma_i \in \Pi_{j-1}$  et  $\beta - \epsilon = \beta_i \in C_j$ .

2. On raisonne par récurrence sur  $h(\beta)$ .

Si  $h(\beta) = 1$ , on a  $\beta = \epsilon_j \in \Omega_j$ .

Si  $h(\beta) > 1$ , il résulte de 1. qu'il existe  $\epsilon \in \Pi_{j-1}$  telle que  $\beta' := \beta - \epsilon \in C_j$ .  $\beta'$  est alors ordinaire et de hauteur  $h(\beta') = h(\beta) - 1$  de sorte que, par l'hypothèse de récurrence,  $\text{Supp } \beta' \subset \Omega_j$ . Il reste donc à montrer que  $\epsilon \in \Omega_j$ .

Si  $\epsilon \notin \Omega_j$ , alors  $\epsilon \perp \epsilon$  pour tout  $\epsilon \in \text{Supp } \beta'$ . Il en résulte que  $\epsilon \perp \beta'$ . Considérons le plan  $P = \langle \beta, \epsilon \rangle$  et observons que  $\Phi_P = \Phi \cap P$  est un système de racines de rang 2. Comme  $\Phi \neq G_2$ , on a  $\Phi_P \neq G_2$  et, nécessairement,  $\Phi_P$  est de type  $B_2$ . On a donc la configuration suivante :



Il en résulte que  $\beta' - \epsilon$  est une racine. Comme  $\text{Supp } \beta' \subset \Omega_j$ , on a  $\epsilon \notin \text{Supp } \beta'$  ce qui est contradictoire avec le fait que  $\beta' - \epsilon$  soit une racine. On a donc bien  $\epsilon \in \Omega_j$  et par suite,  $\text{Supp } \beta \subset \Omega_j$ .

3. Soit  $\beta$  une racine de  $C_j$  différente de  $\delta_j$ . S'il existe  $\epsilon \in \Pi_{j-1}$  telle que  $\langle \beta, \epsilon \rangle < 0$  alors on conclut par le lemme 1.1.17.

Supposons que  $\langle \beta, \epsilon \rangle \geq 0$  pour tout  $\epsilon \in \Pi_{j-1}$ . Si  $\langle \beta, \epsilon_j \rangle < 0$ , alors  $C_j$  est exceptionnelle et  $\beta + \epsilon_j = \beta_{ex}$ . Il résulte de la proposition 1.1.10 que  $s_D$  échange  $\epsilon_j$  et  $\delta_j$ , de sorte que,  $\beta_{ex} = \epsilon_j + \delta_j$ . On en déduit que  $\beta = \delta_j$  ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc  $\langle \beta, \epsilon_j \rangle \geq 0$  et, par suite,  $\langle \beta, \epsilon \rangle \geq 0$  pour tout  $\epsilon \in \Pi_j$ .

**Observation 1.**  $\text{Supp}(\delta_j) = \Omega_j$ .

**preuve :**

Par 2. on a  $\text{Supp } (\delta_j) \subset \Omega_j$ . Supposons cette inclusion stricte et considérons  $\epsilon \in \Omega_j \setminus \text{Supp}(\delta_j)$ . Comme  $\Omega_j$  est connexe, il existe  $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_s$  dans  $\Omega_j$ , avec  $s \geq 2, \epsilon'_1 = \epsilon, \epsilon'_s \in \text{Supp}(\delta_j)$  et, pour  $1 \leq i < s, \langle \epsilon'_i, \epsilon'_{i+1} \rangle < 0$ .

Soit  $k$  le plus grand entier tel que  $\epsilon'_k \notin \text{Supp}(\delta_j)$ . On a  $k < s$  et  $\epsilon'_{k+1} \in \text{Supp}(\delta_j)$ . Comme  $\delta_j$  est alors une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de racines simples différentes de  $\epsilon'_k$  et, comme le produit

scalaire de deux racines simples distinctes est négatif ou nul, on a :

$$\langle \epsilon'_k, \delta_j \rangle \leq \langle \epsilon'_k, \epsilon'_{k+1} \rangle < 0.$$

On en déduit par le lemme 1.1.17 que  $\delta_j + \epsilon'_k \in C_j \setminus \{\beta_{ex}\}$ , ce qui contredit le fait que  $\delta_j$  est la première racine de  $C_j$ .

**Observation 2.**  $\langle \beta, \delta_j \rangle > 0$

**preuve :**

Comme  $\langle \beta, \beta \rangle > 0$ , il existe  $\epsilon \in \text{Supp}(\beta)$  telle que  $\langle \beta, \epsilon \rangle > 0$ . Par le point 2. et l'observation 1, on a  $\epsilon \in \text{Supp} \delta_j$ . Comme (voir ci-dessus)  $\langle \beta, \epsilon \rangle \geq 0$  pour tout  $\epsilon \in \Pi_j$ , on a  $\langle \beta, \epsilon \rangle \geq 0$  pour tout  $\epsilon \in \text{Supp} \delta_j = \Omega_j \subset \Pi_j \Rightarrow \langle \beta, \delta_j \rangle \geq \langle \beta, \epsilon \rangle > 0$ .

Par l'observation 2 et le lemme 1.1.17  $\gamma_1 := \delta_j - \beta \in \Phi^+$  et, puisque  $\beta$  et  $\delta_j$  sont des racines ordinaires de  $C_j$ ,  $\text{Supp}(\gamma_1) \subset \Pi_{j-1}$ .

On se propose de démontrer, par récurrence descendante, que, pour chaque entier  $i \in \llbracket 1, h(\delta_j - \beta) \rrbracket$ , il existe  $\rho_i \in \Phi^+$  avec  $\text{Supp}(\rho_i) \subset \Pi_{j-1}$ ,  $h(\rho_i) = i$  et  $\beta + \rho_i \in C_j$ .

- Pour  $i = h(\delta_j - \beta)$ , on a le résultat avec  $\rho_i = \gamma_1$ .
- Supposons démontrée l'existence de  $\rho_i$  avec  $2 \leq i \leq h(\delta_j - \beta)$ , de sorte  $\eta_i = \beta + \rho_i \in C_j$ . Comme  $\langle \rho_i, \rho_i \rangle > 0$ , il existe  $\epsilon \in \text{Supp}(\rho_i) \subset \Pi_{j-1}$  telle que  $\langle \rho_i, \epsilon \rangle > 0$ . Comme on a (voir ci-dessus),  $\langle \beta, \epsilon \rangle \geq 0$ , on en déduit que  $\langle \eta_i, \epsilon \rangle > 0$ . Donc (lemme 1.1.17)  $\eta_{i-1} := \eta_i - \epsilon \in C_j$  et  $\rho_{i-1} := \rho_i - \epsilon \in \Phi^+$ . On a alors clairement  $\text{Supp}(\rho_{i-1}) \subset \Pi_{j-1}$ ,  $h(\rho_{i-1}) = i - 1$  et  $\beta + \rho_{i-1} = \eta_{i-1} \in C_j$ .  
On a donc bien le résultat annoncé et, pour  $i = 1$ ,  $\epsilon := \rho_1 \in \Pi_{j-1}$  et  $\beta + \epsilon \in C_j$ .

□

**Proposition 1.1.19.**

Soit un entier  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Si  $C_j$  est ordinaire, alors  $h'(C_j)$  est un intervalle de  $\mathbb{N}^*$  de la forme  $\llbracket 1, t \rrbracket$  ;
2. Si  $C_j$  est exceptionnelle, alors  $h'(C_j \setminus \{\beta_{ex}\})$  est un intervalle de la forme  $\llbracket 1, 2t \rrbracket$  ( $t \in \mathbb{N}$ ).  
On a  $h'(\beta_{ex}) = t + \frac{1}{2}$ .

**Démonstration :** Le fait que  $h'(C_j)$  dans le cas ordinaire (resp.  $h'(C_j \setminus \{\beta_{ex}\})$  dans le cas exceptionnel) soit un intervalle de  $\mathbb{N}$  résulte de la proposition 1.1.18. Il contient  $1 = h(\epsilon_j)$ , ce qui démontre le premier point. Supposons  $C_j$  exceptionnelle. On note  $B_1, \dots, B_t$  les boîtes contenant les racines inférieurs à  $\beta_{ex}$  dans l'ordre de Lusztig. Pour toutes ces boîtes, on a  $h'(B_i) > h'(\beta_{ex})$ . Mais la relation  $h(B_i) + h(B'_i) = h(\beta_{ex})$ , pour l'image  $B'_i$  de  $B_i$  par  $s_D$ , implique  $h'(B_i) > h'(\beta_{ex}) > h'(B'_i)$ . On a donc exactement  $t$  boîtes apparaissant après  $\beta_{ex}$  et l'intervalle  $h'(C_j \setminus \{\beta_{ex}\})$  est bien de la forme  $\llbracket 1, 2t \rrbracket$  ( $t \in \mathbb{N}$ ).

De plus  $h(\beta_{ex}) = h(\epsilon_n + s_D(\epsilon_n)) = 1 + 2t$  et finalement  $h'(\beta_{ex}) = t + \frac{1}{2}$ .

□

On définit ci-dessous les plans admissibles introduit par G. Lusztig dans [Lus90b, section 6.1].

**Définition 1.1.20.**

On appelle **plan admissible**  $P := \langle \beta, \beta' \rangle$  tout plan engendré par deux racines positives  $\beta$  et  $\beta'$  telles que :

**ou bien**  $\beta$  appartient à une colonne exceptionnelle  $C_j$  et  $\beta' = s_D(\beta)$  est telle que  $h'(\beta') = h'(\beta) + 1$  (dans ce cas on a  $\beta > \beta'$ ,  $\beta + \beta' = \beta_{ex}$  et  $h'(\beta_{ex}) = h'(\beta) + \frac{1}{2}$ ).

**ou bien**  $\beta$  appartient à une colonne  $C_j$  (exceptionnelle ou non) et  $\beta' = \epsilon_i$  avec  $i < j$ .

On note  $\Phi_P := \Phi \cap P$  et  $\Phi_P^+ := \Phi^+ \cap P$ .

**Remarque 1.1.21.**

Si  $\Phi_P = G_2$  alors  $\Phi = G_2$  (à cause de la longueur des racines).

Si  $\Phi \neq G_2$  alors la première condition donne lieu à deux types de plans admissibles pour lesquels  $\Phi_P^+$  est donné par :

Type (1.1)	Type (1.2)
$A_2$	$B_2$
$\beta > \beta_{ex} > \beta'$	$\beta > \beta_{ex} > \beta' > \epsilon_i$

La seconde condition donne lieu à quatre types de plans admissibles pour lesquels  $\Phi_P^+$  est donné par :

Type (2.1)	Type (2.2)	Type (2.3)	Type (2.4)
$A_2$	$B_2$ avec $\epsilon_i$ longue	$B_2$ avec $\epsilon_i$ courte	$A_1 \times A_1$
$\beta_1 > \beta_2 > \epsilon_i$	$\beta_1 > \beta_{ex} > \beta_2 > \epsilon_i$	$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \epsilon_i$	$\beta > \epsilon_i$

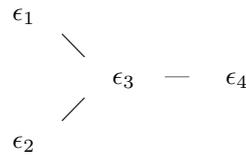
On remarque que les types (1.2) et (2.2) sont les mêmes.

**On prendra garde que la notation  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) ne désigne pas, dans cette remarque, la  $i^{\text{ème}}$  racine de  $\Phi^+$  muni de l'ordre de Lusztig associé.**

**Observation 1.1.22.** Si  $P$  est de type (1.1) ou (1.2) et si  $\beta, \beta'$  sont comme dans la remarque ci-dessus, alors  $\beta$  appartient à la boîte  $B$  qui suit la boîte  $\{\beta_{ex}\}$ .

**Démonstration :** On sait (voir définition 1.1.20) que  $h'(\beta_{ex}) = h'(\beta) + \frac{1}{2}$ . Ceci entraîne que  $\beta$  appartient à la boîte  $B$  qui suit la boîte  $\{\beta_{ex}\}$ . □

**Exemple 1.1.23.** Considérons une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de type  $D_4$ , de diagramme de Dynkin :



L'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl admet la décomposition réduite suivante :

$$w_0 = s_1 s_2 s_4 s_3 s_4 s_2 s_1 s_3 s_4 s_2 s_1 s_3$$

et l'ordre convexe sur  $\Phi^+$  induit par cette décomposition est :

$$\beta_1 = \epsilon_1 < \beta_2 = s_1(\epsilon_2) = \epsilon_2 < \beta_3 = s_1 s_2(\epsilon_4) = \epsilon_4 < \beta_4 = s_1 s_2 s_4(\epsilon_3) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 <$$

$$\beta_5 = s_1 s_2 s_4 s_3(\epsilon_4) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 < \beta_6 = s_1 s_2 s_4 s_3 s_4(\epsilon_2) = \epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_4 < \beta_7 = \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 <$$

$$\beta_8 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + \epsilon_4 < \beta_9 = \epsilon_3 + \epsilon_4 < \beta_{10} = \epsilon_2 + \epsilon_3 < \beta_{11} = \epsilon_1 + \epsilon_3 < \beta_{12} = \epsilon_3$$

Les colonnes correspondant à la numérotation ci-dessus des racines simples sont alors :

$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_2 = \epsilon_2$	$\beta_3 = \epsilon_4$	$\beta_4 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_3$
			$\beta_5 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$
			$\beta_6 = \epsilon_1 + \epsilon_4 + \epsilon_3$
			$\beta_7 = \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_3$
			$\beta_8 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_4 + 2\epsilon_3$
			$\beta_9 = \epsilon_4 + \epsilon_3$
			$\beta_{10} = \epsilon_2 + \epsilon_3$
			$\beta_{11} = \epsilon_1 + \epsilon_3$
			$\beta_{12} = \epsilon_3$

Les colonnes  $C_1, C_2, C_3$  sont ordinaires tandis que la colonne  $C_4$  est exceptionnelle à cause de la racine  $\beta_8 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_4 + 2\epsilon_3$ , de sorte que la numérotation choisie sur  $\Pi$  est bonne. On constate que la hauteur de Lusztig  $h'$  est bien décroissante sur chaque colonne, de sorte que l'ordre induit sur  $\Phi^+$  est un bon ordre. Le premier et le dernier élément de la colonne  $C_4$  sont seuls dans leur boîte, ainsi que la racine exceptionnelle. On a deux boîtes qui contiennent trois éléments,  $\{\beta_5, \beta_6, \beta_7\}$  et  $\{\beta_9, \beta_{10}, \beta_{11}\}$ , dont on vérifie facilement que les racines sont orthogonales deux à deux. Les racines simples correspondantes ( $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4\}$  dans les deux cas) sont également orthogonales deux à deux.

## 1.2 Sous-expressions positives

### 1.2.1 Diagrammes

Soit  $w \in W$ . On pose  $t = l(w)$  et on considère une décomposition réduite

$$w = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_t} \quad (\alpha_i \in \Pi \text{ pour } 1 \leq i \leq t) \quad (1.1)$$

Il est bien connu que

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = s_{\alpha_1}(\alpha_2), \dots, \beta_t = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)$$

sont des racines positives distinctes et que l'ensemble  $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  ne dépend pas de la décomposition réduite (1.1) de  $w$ .

On pose

$$v = w^{-1} = s_{\alpha_t} \circ \dots \circ s_{\alpha_1} \quad (1.2)$$

#### Définition 1.2.1.

Un **diagramme** pour (1.1) est un sous-ensemble quelconque  $\Delta$  de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ . (S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on omettra de préciser "pour (1.1)".)

Dans la suite, on omettra parfois aussi le symbole  $\circ$  dans la composition des applications.

On considère un diagramme  $\Delta$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, \dots, t \rrbracket$ , on pose

$$s_{\alpha_i}^\Delta = \begin{cases} s_{\alpha_i} & \text{si } i \in \Delta \\ Id & \text{si } i \notin \Delta \end{cases}$$

et on note

- $w^\Delta = s_{\alpha_1}^\Delta \dots s_{\alpha_t}^\Delta$ ,
- $v^\Delta = (w^\Delta)^{-1} = s_{\alpha_t}^\Delta \dots s_{\alpha_1}^\Delta$ ,
- Pour  $i \in \llbracket 1, t+1 \rrbracket$ ,  $w_i^\Delta = s_{\alpha_i}^\Delta \dots s_{\alpha_t}^\Delta$  ( $w_1^\Delta = w^\Delta$ ,  $w_{t+1}^\Delta = Id$ ),
- Pour  $i \in \llbracket 0, 1, \dots, t \rrbracket$ ,  $v_i^\Delta = (w_{t-i+1}^\Delta)^{-1} = s_{\alpha_t}^\Delta \dots s_{\alpha_{t-i+2}}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}^\Delta$  ( $v_0^\Delta = (w_{t+1}^\Delta)^{-1} = Id$ ,  $v_t^\Delta = v^\Delta$ ).

On note  $\leq$  l'ordre de Bruhat ([Deo77]) sur le groupe de Weyl  $W$ . Puisque (1.1) est une décomposition réduite de  $w$ , on en déduit que (1.2) est une décomposition réduite de  $v$ . Rappelons ([Deo77], Theorem 1.1)

qu'un élément  $u$  de  $W$  vérifie  $u \leq w$  (resp.  $u \leq v$ ) si et seulement si il peut être écrit comme un produit de réflexions simples obtenues en enlevant certaines des  $s_{\alpha_i}$  dans la décomposition réduite (1.1) (resp. (1.2)). On a donc immédiatement :

**Lemme 1.2.2.**

1. L'application :  $\Delta \mapsto u = w^\Delta$  (resp.  $u = v^\Delta$ ) est surjective de l'ensemble des diagrammes dans l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq w\}$  (resp.  $\{u \in W \mid u \leq v\}$ ).
2. L'application  $u \mapsto u^{-1}$  est une bijection de  $\{u \in W \mid u \leq w\}$  sur  $\{u \in W \mid u \leq v\}$ .

**Définition 1.2.3 ([Deo90], Définition 2.1).**

Une suite  $(\sigma_0, \dots, \sigma_t) \in W^{t+1}$  est une sous-expression de (1.1) si :

1.  $\sigma_0 = id$ ,
2.  $\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j \in \{id, s_{\alpha_j}\}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .

**Lemme 1.2.4.**

$\mathbf{v}^\Delta := (v_0^\Delta, v_1^\Delta, \dots, v_t^\Delta)$  est une sous-expression de (1.2) au sens de Deodhar .

**Démonstration :** C'est parce que  $v_{i-1}^\Delta = s_{\alpha_t}^\Delta \dots s_{\alpha_{t-i+2}}^\Delta \implies v_i^\Delta = v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}^\Delta$  avec

$$s_{\alpha_{t-i+1}}^\Delta = \begin{cases} s_{\alpha_{t-i+1}} & \text{si } t-i+1 \in \Delta \\ Id & \text{si } t-i+1 \notin \Delta \end{cases}.$$

□

**Lemme 1.2.5.**

Si  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_t)$  est une sous-expression de (1.2), il existe un unique diagramme  $\Delta$  tel que  $\mathbf{v}^\Delta = \mathbf{u}$ . Donc, l'application  $\Delta \mapsto \mathbf{v}^\Delta$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes dans l'ensemble des sous-expressions de  $v$ .

**Démonstration :** Comme  $\mathbf{u}$  est une sous-expression de  $v$ , on a  $u_0 = Id$  et

$$(\forall i \in \llbracket 1, \dots, t \rrbracket) \quad (u_{i-1})^{-1}u_i \in \{s_{t-i+1}, Id\}.$$

Pour tout diagramme  $\Delta$ , on a  $\mathbf{v}^\Delta = (v_0^\Delta, v_1^\Delta, \dots, v_t^\Delta)$ . Puisque  $v_0^\Delta = u_0 = Id$ , on a  $\mathbf{v}^\Delta = \mathbf{u}$  si et seulement si

$$(\forall i \in \llbracket 1, \dots, t \rrbracket) \quad (u_{i-1})^{-1}u_i = (v_{i-1}^\Delta)^{-1}v_i^\Delta = s_{\alpha_{t-i+1}}^\Delta.$$

Or il existe un unique diagramme  $\Delta$  qui vérifie ces conditions. Il est défini par

$$(\forall i \in \llbracket 1, \dots, t \rrbracket) \quad (t-i+1 \in \Delta) \Leftrightarrow (u_{i-1})^{-1}u_i = s_{t-i+1}.$$

□

**Définition 1.2.6.**

On dit qu'un diagramme  $\Delta$  est **positif** pour la décomposition réduite (1.1) (ou que  $\Delta$  est positif s'il n'y a pas d'ambiguïté) si  $\mathbf{v}^\Delta = (v_0^\Delta, v_1^\Delta, \dots, v_t^\Delta)$  est une sous-expression positive de (1.2) au sens de Marsh et Rietsch [MR04, Définition 3.4], c'est à dire si :

$$v_{i-1}^\Delta < v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}} \quad (\forall i \in \llbracket 1, t \rrbracket)$$

**Remarque 1.2.7.**

La notion de sous-expression positive de (1.2) au sens de Marsh et Rietsch [MR04, Définition 3.4] coïncide avec la notion de sous-expression de défaut 0 au sens de Deodhar [Deo90, Définition 2.2]

**Observation 1.2.8.** Le diagramme complet ( $\Delta = \llbracket 1, t \rrbracket$ ) et le diagramme vide sont tous les deux positifs.

**Démonstration :**

- Si  $\Delta = \llbracket 1, t \rrbracket$  est le diagramme complet, on a  $v_{i-1}^\Delta = s_{\alpha_t} \dots s_{\alpha_{t-i+2}}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$  ( $v_0^\Delta = Id$ ). Comme (1.2) est une décomposition réduite de  $v$ ,  $s_{\alpha_t} \dots s_{\alpha_{t-i+2}} s_{\alpha_{t-i+1}}$  est une décomposition réduite de  $v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}$ . Ainsi, on a clairement  $v_{i-1}^\Delta < v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}$ .
- Si  $\Delta = \emptyset$ , on a  $v_{i-1}^\Delta = Id$ , et donc  $v_{i-1}^\Delta < v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}$ .

□

Considérons un entier  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , posons  $j = t - i + 1$  et  $\{j_1 < \dots < j_s\} = \Delta \cap \llbracket j + 1, t \rrbracket = \Delta \cap \llbracket t - i + 2, t \rrbracket$ , de sorte que  $v_{i-1}^\Delta = s_{\alpha_t} \dots s_{\alpha_{t-i+2}} = s_{\alpha_{j_s}} \dots s_{\alpha_{j_1}}$  et  $v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}} = s_{\alpha_{j_s}} \dots s_{\alpha_{j_1}} s_{\alpha_j}$ .

Si  $w_1$  et  $w_2$  sont dans  $W$ , il résulte de ([Deo77], Theorem 1.1) que

$$\begin{aligned} (w_1 < w_2) &\Leftrightarrow (w_1 \neq w_2 \text{ et } w_1 \text{ est obtenu en enlevant certaines réflexions} \\ &\quad \text{simples d'une décomposition réduite de } w_2) \\ &\Leftrightarrow (w_1^{-1} < w_2^{-1}). \end{aligned}$$

Ainsi, avec  $w_1 = v_{i-1}^\Delta$  et  $w_2 = v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}$ , on obtient :

$$(v_{i-1}^\Delta < v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}) \Leftrightarrow (s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}} < s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}})$$

Posons  $u = s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}$  et rappelons que  $l(s_{\alpha_j} u) = l(u) \pm 1$ . On sait ([Deo77], Theorem 1.1) que  $(u \leq s_{\alpha_j} u) \Leftrightarrow (l(u) \leq l(s_{\alpha_j} u))$  et, par suite,

$$(v_{i-1}^\Delta < v_{i-1}^\Delta s_{\alpha_{t-i+1}}) \Leftrightarrow l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + l(s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}).$$

Puisque l'application  $i \mapsto j = t - i + 1$  est une bijection de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on conclut :

**Lemme 1.2.9.**

Le diagramme  $\Delta$  est positif si et seulement si, pour tout  $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ ,

$$\Delta \cap \llbracket j + 1, t \rrbracket = \{j_1 < \dots < j_s\} \Rightarrow l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + l(s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}).$$

Maintenant, on peut prouver la caractérisation suivante des diagrammes positifs.

**Proposition 1.2.10.**

Le diagramme  $\Delta$  est positif si et seulement si, pour tout  $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ ,

$$\Delta \cap \llbracket j + 1, t \rrbracket = \{j_1 < \dots < j_s\} \Rightarrow l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + s.$$

**Démonstration :** Supposons que  $\Delta$  est positif, prenons  $j, j_1, \dots, j_s$  comme ci-dessus, et considérons un entier  $l$  avec  $1 < l < s$ . On a  $\Delta \cap \llbracket j_l + 1, t \rrbracket = \{j_{l+1} < \dots < j_s\}$  et, par le lemme 1.2.9,  $l(s_{\alpha_{j_l}} s_{\alpha_{j_{l+1}}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + l(s_{\alpha_{j_{l+1}}} \dots s_{\alpha_{j_s}})$ . On en déduit que  $l(s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = s$  et, encore par le lemme 1.2.9,  $l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + s$ .

Réciproquement, supposons que cette égalité est toujours vérifiée et choisissons  $j, j_1, \dots, j_s$  comme ci-dessus. On a  $\Delta \cap \llbracket j_1 + 1, t \rrbracket = \{j_2 < \dots < j_s\}$  et, par hypothèse,  $l(s_{\alpha_{j_1}} s_{\alpha_{j_2}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + (s - 1) = s$ . Donc,  $l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = 1 + l(s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}})$  et  $\Delta$  est positif par le lemme 1.2.9.

□

**Exemple 1.2.11.** Supposons  $\mathfrak{g}$  de type  $A_2$ , posons  $\Pi = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  et cherchons les diagrammes positifs pour la décomposition réduite suivante :

$$w_0 = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_2} \circ s_{\alpha_3} \quad (\alpha_1 = \epsilon_1, \alpha_2 = \epsilon_2, \alpha_3 = \epsilon_1).$$

Si  $\Delta = \{3\}$  ou  $\{1, 3\}$  et si  $j = 1$ , on a  $\Delta \cap \llbracket j + 1, t \rrbracket = \{j_1\}$  avec  $j_1 = 3$ , de sorte que  $s_{\alpha_j} \circ s_{\alpha_{j_1}} = s_{\alpha_1} \circ s_{\alpha_3} = Id$ . Donc  $l(s_{\alpha_j} \circ s_{\alpha_{j_1}}) = 0$  et, par la proposition 1.2.10,  $\Delta$  n'est pas positif.

On peut vérifier, toujours au moyen de la proposition 1.2.10, que les autres diagrammes, à savoir  $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2\}, \{2, 3\}$ , sont tous positifs.

### 1.2.2 Quelques propriétés des diagrammes positifs

Dans cette partie, on utilise les même conventions que dans la partie 1.2.1.

**Proposition 1.2.12.**

1. L'application  $\Delta \mapsto u = v^\Delta$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes positifs dans l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq v\}$ .
2. L'application  $\Delta \mapsto u = w^\Delta$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes positifs dans l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq w\}$ .

**Démonstration :**

1. Par le lemme 1.2.2,  $f : \Delta \mapsto u = v^\Delta$  est une application de l'ensemble des diagrammes positifs dans l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq v\}$ . Considérons  $u \in W$  tel que  $u \leq v$ . Par ([MR04], Lemme 3.5.), il existe une unique sous-expression positive  $\mathbf{u}^+ = (u_0, u_1, \dots, u_t)$  de (1.2) avec  $u_t = u$ . Par le lemme 1.2.5, il existe un unique diagramme  $\Delta$  qui vérifie  $\mathbf{v}^\Delta = (v_0^\Delta, v_1^\Delta, \dots, v_t^\Delta) = \mathbf{u}^+$ . Donc,  $\Delta$  est positif (définition 1.2.6) et  $v^\Delta = v_t^\Delta = u_t = u$ . Ceci démontre que  $f$  est surjective.  
Si  $\Delta'$  est un diagramme positif tel que  $v^{\Delta'} = u$ , alors  $\mathbf{v}^{\Delta'} = (v_0^{\Delta'}, v_1^{\Delta'}, \dots, v_t^{\Delta'})$  est une sous-expression positive de (1.2) avec  $v_t^{\Delta'} = v^{\Delta'} = u$ . On a donc  $\mathbf{v}^{\Delta'} = \mathbf{u}^+ \Rightarrow \mathbf{v}^{\Delta'} = \mathbf{v}^\Delta$  et, par le lemme 1.2.5,  $\Delta' = \Delta$ . Ceci démontre que  $f$  est bijective.
2. Notons  $g$  la bijection  $u \mapsto u^{-1}$  de  $\{u \in W \mid u \leq w\}$  dans  $\{u \in W \mid u \leq v\}$  (lemme 1.2.2). Alors  $g^{-1} \circ f : \Delta \mapsto u = (v^\Delta)^{-1} = w^\Delta$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes positifs dans l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq w\}$ . □

On considère un entier  $p \in \llbracket 1, t \rrbracket$ ,  $p \neq 1, t$ , et on pose

$$w_1 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_p} \tag{1.3}$$

$$w_2 = s_{\alpha_{p+1}} \dots s_{\alpha_t} \tag{1.4}$$

On a  $w = w_1 w_2$  et, puisque (1.1) est une décomposition réduite de  $w$ , (1.3) et (1.4) sont respectivement des décompositions réduites de  $w_1$  et  $w_2$ .

Notons  $\Delta$  un sous ensemble de  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , de sorte que  $\Delta$  est un diagramme pour (1.3) et aussi pour (1.1).

**Proposition 1.2.13.**

$(\Delta \text{ est positif pour (1.3)}) \Leftrightarrow (\Delta \text{ est positif pour (1.1)})$

**Démonstration :** Supposons que  $\Delta$  est positif pour (1.1) et considérons un entier  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On a  $\Delta \cap \llbracket j+1, p \rrbracket = \Delta \cap \llbracket j+1, t \rrbracket$  et, en utilisant la caractérisation des diagrammes positifs de la proposition 1.2.10, on en déduit que  $\Delta$  est positif pour (1.3).

Supposons que  $\Delta$  est positif pour (1.3) et considérons un entier  $j \in \llbracket 1, \dots, t \rrbracket$ . Si  $j \leq p$ , on a  $\Delta \cap \llbracket j+1, \dots, t \rrbracket = \Delta \cap \llbracket j+1, \dots, p \rrbracket$ , de sorte que la caractérisation donnée dans la proposition 1.2.10 est satisfaite. Si  $j > p$ , on a  $\Delta \cap \llbracket j+1, \dots, t \rrbracket = \emptyset$ , de sorte que la caractérisation donnée dans la proposition 1.2.10 est encore satisfaite. □

Considérons à présent un diagramme  $\Delta$  positif (pour (1.1)) et deux entiers  $j, m$  dans  $\llbracket 1, \dots, t \rrbracket$  avec  $j < m$  et  $m \in \Delta$ . Rappelons que  $(\beta_1, \dots, \beta_t)$  est la suite des racines positives associées à la décomposition réduite (1.1) de  $w$  (section 1.2.1) et notons :

- $\overline{\Delta} = \llbracket 1, \dots, t \rrbracket \setminus \Delta$ ,
- $\overline{\Delta} \cap \llbracket j+1, \dots, m-1 \rrbracket = \{j_1 < \dots < j_r\}$  (lorsque cet ensemble est non vide),
- $\overline{\Delta} \cap \llbracket j+1, \dots, m-1 \rrbracket = \{l_1 < \dots < l_p\}$  (lorsque cet ensemble est non vide),

- $(\gamma_1, \dots, \gamma_p, \gamma_{p+1})$  la suite des racines (non nécessairement positive) définies par récurrence par  $\gamma_{p+1} = \beta_m$  et, pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\gamma_i = s_{\beta_{l_i}}(\gamma_{i+1})$ ,
- $a_i = (\beta_{l_i}^\vee, \gamma_{i+1})$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que  $\overline{\Delta} \cap \llbracket j+1, \dots, m-1 \rrbracket$  est non vide, de sorte que  $p$  et les racines  $\gamma_i$  ( $1 \leq i \leq p+1$ ) sont bien définies.

**Lemme 1.2.14.**

$$\gamma_1 = \beta_m - a_p \beta_{l_p} - \dots - a_1 \beta_{l_1}$$

**Démonstration :** Pour  $1 \leq i \leq p$ , on a  $\gamma_i = \gamma_{i+1} - a_i \beta_{l_i}$ . En ajoutant ces égalités, on obtient  $\gamma_1 = \gamma_{p+1} - a_p \beta_{l_p} - \dots - a_1 \beta_{l_1}$  et, par définition,  $\gamma_{p+1} = \beta_m$ . □

Posons

$$w' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{m-1}} \quad (1.5)$$

et observons que, puisque (1.1) est une décomposition réduite de  $w$ , (1.5) est une décomposition réduite de  $w'$ .

**Lemme 1.2.15.**

Soit  $i \in \llbracket 1, \dots, p \rrbracket$ . Notons  $w'_i$  l'élément de  $W$  obtenu en enlevant  $s_{\alpha_{l_i}}, \dots, s_{\alpha_{l_p}}$  dans (1.5).

On a alors  $\gamma_i = w'_i(\alpha_m)$ .

**Démonstration :** Supposons que  $i = p$  et posons  $u_p = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{p-1}}$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} w' &= u_p s_{\alpha_{l_p}} s_{\alpha_{l_{p+1}}} \dots s_{\alpha_{m-1}} \Rightarrow u_p^{-1} w' = s_{\alpha_{l_p}} s_{\alpha_{l_{p+1}}} \dots s_{\alpha_{m-1}} \\ &\Rightarrow u_p s_{\alpha_{l_p}} u_p^{-1} w' = u_p s_{\alpha_{l_{p+1}}} \dots s_{\alpha_{m-1}} = w'_p. \end{aligned}$$

Comme  $u_p(\alpha_{l_p}) = \beta_{l_p}$ , on a  $u_p s_{\alpha_{l_p}} u_p^{-1} = s_{\beta_{l_p}}$ , de sorte que  $w'_p = s_{\beta_{l_p}} w'$ . Donc

$$w'_p(\alpha_m) = s_{\beta_{l_p}} w'(\alpha_m) = s_{\beta_{l_p}}(\beta_m) = \gamma_p.$$

Supposons  $i < p$ ,  $\gamma_{i+1} = w'_{i+1}(\alpha_m)$ , et posons  $u_i = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}}$ . On a  $w'_{i+1} = u_i s_{\alpha_{l_i}} \sigma$  avec  $\sigma \in W$  et  $w'_i = u_i \sigma$ . De là, on déduit (comme dans le cas  $i = p$ ) que  $u_i s_{\alpha_{l_i}} u_i^{-1} w'_{i+1} = w'_i$ . Donc

$$w'_i(\alpha_m) = s_{\beta_{l_i}} w'_{i+1}(\alpha_m) = s_{\beta_{l_i}}(\gamma_{i+1}) = \gamma_i. \quad \square$$

A présent on peut démontrer :

**Proposition 1.2.16.**

Supposons que

$$\beta_j + \beta_m = a_p \beta_{l_p} + \dots + a_1 \beta_{l_1}.$$

Alors  $\Delta$  n'est pas positif (pour (1.1)).

**Démonstration :** Par le lemme 1.2.14, on a  $\beta_j = -\gamma_1$  et, par le lemme 1.2.15, on peut écrire  $\beta_j = -w'_1(\alpha_m)$ . Rappelons que  $w'_1$  est obtenu en enlevant  $s_{\alpha_{l_1}}, \dots, s_{\alpha_{l_p}}$  dans la décomposition réduite (1.5) de  $w'$  et que  $\{l_1 < \dots < l_p\} = \overline{\Delta} \cap \llbracket j+1, m-1 \rrbracket$ .

- Supposons que  $\Delta \cap \llbracket j+1, m-1 \rrbracket = \{j_1 < \dots < j_r\}$  est non vide. On a alors  $\{l_1 < \dots < l_p\} = \llbracket j+1, m-1 \rrbracket \setminus \{j_1 < \dots < j_r\}$  et

$$w'_1 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}} s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_r}} = \eta s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_r}}$$

avec  $\eta = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}}$ .

Puisque  $\beta_j = \eta(\alpha_j)$ , on a  $\beta_j = -w'_1(\alpha_m) \Rightarrow \alpha_j = -s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_r}}(\alpha_m) \Rightarrow s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_r}}(\alpha_m) = -\alpha_j$  est une racine négative. Par ([Hum78], Lemme 10.2.C), ceci implique que  $l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_r}} s_{\alpha_m}) < r + 2$ .

Comme  $m \in \Delta$ , on a  $\Delta \cap \llbracket j+1, \dots, t \rrbracket = \{j_1 < \dots < j_s\}$  avec  $s > r$  et  $j_{r+1} = m$ . Ainsi,  $l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) \leq l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_r}} s_{\alpha_m}) + s - (r+1) < r + 2 + s - (r+1) = s + 1$  et, par la proposition 1.2.10,  $\Delta$  n'est pas positif.

- Si  $\Delta \cap \llbracket j+1, m-1 \rrbracket = \emptyset$ , on a  $\{l_1 < \dots < l_p\} = \llbracket j+1, m-1 \rrbracket$  et

$$w'_1 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}} s_{\alpha_j} = \eta s_{\alpha_j}.$$

avec  $\eta = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}}$ .

Comme ci-dessus, on en déduit que  $s_{\alpha_j}(\alpha_m) = -\alpha_j$  de sorte que  $\alpha_j = \alpha_m$  et  $\Delta \cap \llbracket j+1, t \rrbracket = \{j_1 < \dots < j_s\}$  avec  $j_1 = m$ . Par suite  $l(s_{\alpha_j} s_{\alpha_{j_1}} \dots s_{\alpha_{j_s}}) = l(s_{\alpha_m} s_{\alpha_m} \dots s_{\alpha_{j_s}}) \leq s-1$  et, par la proposition 1.2.10,  $\Delta$  n'est pas positif. □

On verra dans la suite que la condition nécessaire énoncée dans la proposition précédente est centrale dans la démonstration de la bijection entre les diagrammes de Cauchon de  $U[w]$  et les sous-expressions positives de  $w$  pour une décomposition donnée de  $w$ . Voyons tout de même une application de cette proposition sur un exemple.

**Exemple 1.2.17.** *Considérons une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de type  $A_3$ . Pour le diagramme de Dynkin ci-dessous, on utilise la décomposition de  $w_0$  suivante :*

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 \quad w_0 = s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$$

L'ordre convexe sur  $\Phi^+$  induit par cette décomposition réduite de  $w_0$  est :

$$\beta_1 = \epsilon_1 < \beta_2 = s_1(\epsilon_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2 < \beta_3 = s_1 s_2(\epsilon_1) = \epsilon_2 < \beta_4 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\beta_5 = s_1 s_2 s_1 s_3(\epsilon_2) = \epsilon_2 + \epsilon_3 < \beta_6 = s_1 s_2 s_1 s_3 s_2(\epsilon_1) = \epsilon_3$$

L'ordre choisi sur les racines simples est donc  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  et les colonnes correspondantes sont alors :

$C_1$	$C_2$	$C_3$
$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$\beta_4 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$
	$\beta_3 = \epsilon_2$	$\beta_5 = \epsilon_2 + \epsilon_3$
		$\beta_6 = +\epsilon_3$

Soit  $\Delta$  un diagramme positif pour la décomposition  $w_0 = s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1$ . On va chercher quelles sont les conditions que doit vérifier  $\Delta$ .

Si  $\Delta$  est un diagramme tel que  $6 \in \Delta$  et  $5 \notin \Delta$ . Appliquons les résultats de cette partie avec  $j = 3$  et  $m = 6$ .

- Considérons dans un premier temps le cas  $4 \in \Delta$ . On a alors  $\Delta \cap \{4, 5\} = 4$ ,  $\overline{\Delta} \cap \{4, 5\} = 5$ ,  $\gamma_2 = \beta_6$  ( et  $\gamma_1 = \beta_6 - (\beta_5^\vee, \beta_6)\beta_5 = \epsilon_3 - (\epsilon_2 + \epsilon_3) = -\epsilon_2$ ). On peut alors calculer  $a_1 = (\beta_5^\vee, \beta_6) = 1$  et comme  $\beta_6 + \beta_3 = a_1 \beta_5 = \beta_5$  on déduit de la proposition 1.2.16 que  $\Delta$  n'est pas positif ce qui contredit l'hypothèse.
- On a donc  $4 \notin \Delta$ . On a alors  $\Delta \cap \{4, 5\} = \emptyset$ ,  $\overline{\Delta} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\}$ ,  $\gamma_3 = \beta_6$  et  $\gamma_2 = \beta_6 - (\beta_5^\vee, \beta_6)\beta_5 = \epsilon_3 - (\epsilon_2 + \epsilon_3) = -\epsilon_2$  ( et  $\gamma_1 = \gamma_2 - (\beta_4^\vee, \gamma_2)\beta_4 = -\epsilon_2$ ). On peut alors calculer  $a_1 = (\beta_4^\vee, \gamma_2) = 0$  et  $a_2 = (\beta_5^\vee, \gamma_3) = 1$ . Comme  $\beta_6 + \beta_3 = a_1 \beta_4 + a_2 \beta_5 = \beta_5$ , on déduit comme précédemment de la proposition 1.2.16 que  $\Delta$  n'est pas positif ce qui contredit l'hypothèse.

On en déduit que  $(\beta_6 \in \Delta \Rightarrow \beta_5 \in \Delta)$ .

De même, comme  $\beta_5 + \beta_1 = \beta_4$ , on démontre par une méthode similaire que  $(\beta_5 \in \Delta \Rightarrow \beta_4 \in \Delta)$ . Enfin, comme  $\beta_3 + \beta_1 = \beta_2$ , on démontre, encore par la même méthode, que  $(\beta_3 \in \Delta \Rightarrow \beta_2 \in \Delta)$ .

Pour résumer, si  $\Delta$  est positifs, il doit vérifier  $(\beta_6 \in \Delta \Rightarrow \beta_5 \in \Delta \Rightarrow \beta_4 \in \Delta)$  et  $(\beta_3 \in \Delta \Rightarrow \beta_2 \in \Delta)$ .

Ces conditions permettent d'affirmer que dans ce cas, **les diagrammes positifs sont des réunions de colonnes tronquées.**

Comme il existe  $4 \times 3 \times 2$  diagrammes composés de réunions de colonnes tronquées, que l'ensemble des diagrammes positifs est en bijection avec  $\{w \in W \mid w \leq w_0\} = W$  (proposition 1.2.12), et que  $|W| = 4!$ . On peut conclure que dans ce cas, les diagrammes positifs sont exactement les réunions de colonnes tronquées.

## Chapitre 2

# Les algèbres enveloppantes quantifiées

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique différente de 2 et 3, et  $q$  un élément de  $\mathbb{K}^*$  qui n'est pas une racine de l'unité. Ce chapitre est destiné à définir les algèbres  $U_q(\mathfrak{g})$  puis les sous algèbres  $U_q^+(\mathfrak{g})$  et  $U[w]$ . On donnera ensuite des résultats d'engendrement et un moyen d'obtenir des relations de commutations dans  $U_q^+(\mathfrak{g})$ .

Dans une première partie, on rappelle les définitions de  $U_q(\mathfrak{g})$  et  $U_q^+(\mathfrak{g})$  en utilisant les notations de [Jan96, chap4]. On rappelle également la construction des bases de Poincaré-Birkhoff-Witt de  $U_q(\mathfrak{g})$  au moyen des automorphismes de Lusztig. Nous présentons ici la construction de G. Lusztig ([Lus90b, section 3]), puis celle J. Jantzen ([Jan96, section 8.14]), qui est la même que celle de De Concini, Kac et Procesi ([DCKP95, section 2.1]). Nous faisons ensuite le lien entre ces deux constructions, ce qui nous permet de transférer au cas des bases introduites par J. Jantzen, les relations de commutations obtenues par G. Lusztig en liaison avec les plans admissibles.

La seconde partie est consacrée aux sous-algèbres  $U[w]$ . Après avoir rappelé leur construction et quelques propriétés fondamentales, on démontrera que l'on peut réaliser l'algèbre des matrices quantiques  $O_q(M_{p,m}(\mathbb{K}))$  comme une algèbre  $U[w]$  avec  $\mathfrak{g}$  de type  $A_n$  et  $w$  bien choisi. Dans ce cas particulier, on fera le lien entre les diagrammes de  $U[w] = O_q(M_{p,m}(\mathbb{K}))$  et les pipe dreams au sens de A. Postnikov ([Pos06]).

## 2.1 L'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$

### 2.1.1 Rappels sur $U_q(\mathfrak{g})$

#### *Notations.*

Considérons  $r \in \mathbb{K}^*$ ,  $r$  non racine de l'unité. Pour tous entiers naturels  $a$  et  $m$  avec  $a \geq m \geq 0$ , on note :

$$[m]_r = \frac{r^m - r^{-m}}{r - r^{-1}}, \quad [m]_r! = [m]_r [m-1]_r \dots [2]_r [1]_r, \quad \left[ \begin{matrix} a \\ m \end{matrix} \right]_r = \frac{[a]_r!}{[m]_r! [a-m]_r!}.$$

Pour tout  $\alpha \in \Pi$ , on note  $r_\alpha = r^{d_\alpha}$  avec  $d_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2}$ .

#### **Définition 2.1.1** ( $U_q(\mathfrak{g})$ et $U_q^+(\mathfrak{g})$ ).

- L'algèbre enveloppante quantique  $U_q(\mathfrak{g})$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par les générateurs  $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha$  et  $K_\alpha^{-1}$  pour tout  $\alpha$  dans  $\Pi$ , soumis aux relations suivantes : ( $\forall \alpha, \beta \in \Pi$ )

$$K_\alpha K_\alpha^{-1} = 1 = K_\alpha^{-1} K_\alpha \quad K_\alpha K_\beta = K_\beta K_\alpha \quad (2.1)$$

$$K_\alpha E_\beta K_\alpha^{-1} = q^{(\alpha, \beta)} E_\beta \quad (2.2)$$

$$K_\alpha F_\beta K_\alpha^{-1} = q^{-(\alpha, \beta)} F_\beta \quad (2.3)$$

$$E_\alpha F_\beta - F_\beta E_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \frac{K_\alpha - K_\alpha^{-1}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} \quad (2.4)$$

et, pour  $\alpha \neq \beta$  :

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ s \end{bmatrix}_{q_\alpha} E_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-s} E_\beta E_\alpha^s = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ s \end{bmatrix}_{q_\alpha} F_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-s} F_\beta F_\alpha^s = 0 \quad (2.6)$$

où  $a_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$  pour toutes racines simples  $\alpha, \beta \in \Pi$ .

- On note  $U_q^+(\mathfrak{g})$  la sous-algèbre de  $U_q(\mathfrak{g})$  engendrée par les seuls  $E_\alpha$  avec  $\alpha \in \Pi$ .

Pour tout vecteur  $\rho = \sum_{\alpha \in \Pi} m_\alpha \alpha$  ( $m_\alpha \in \mathbb{Z}$ ) dans le réseau des racines  $\mathbb{Z}\Pi$ , on pose  $K_\rho = \prod_{\alpha \in \Pi} K_\alpha^{m_\alpha}$ . Le groupe multiplicatif  $T = \{K_\rho \mid \rho \in \mathbb{Z}\Pi\}$  s'appelle le Tore (de  $U_q(\mathfrak{g})$ ). Il agit sur l'algèbre  $U_q(\mathfrak{g})$  par

$$K_\rho \cdot u = K_\rho^{-1} u K_\rho \quad (\forall u \in U_q(\mathfrak{g})),$$

de sorte que pour tout  $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$ , l'application

$$h_\rho : u \mapsto K_\rho \cdot u$$

est un automorphisme de  $U_q(\mathfrak{g})$ .

Rappelons deux résultats important démontrés par exemple dans [BG02, section I.6].

**Théorème 2.1.2.**

1.  $U_q^+(\mathfrak{g})$  est noethérien.
2.  $U_q^+(\mathfrak{g})$  est gradué par  $\mathbb{Z}\Pi$ . ( $wt(E_\alpha) = \alpha, wt(F_\alpha) = -\alpha$  et  $wt(K_\alpha^{\pm 1}) = 0$ )

On en déduit que, pour tout élément homogène  $u$  de  $U_q(\mathfrak{g})$  de degré  $\deg(u) = \gamma \in \mathbb{Z}\Pi$ , on a  $K_\rho \cdot u = q^{-(\rho, \gamma)} u$ .

### 2.1.2 La construction de Jantzen sur $\mathbb{K}$

Par [Jan96, section 8.14], on sait qu'il existe, pour chaque  $\alpha \in \Pi$ , un unique automorphisme  $T_\alpha$ , appelé automorphisme de tresse ou de Lusztig, de l'algèbre  $U_q(\mathfrak{g})$  qui vérifie :

$$T_\alpha E_\alpha = -F_\alpha K_\alpha, \quad T_\alpha F_\alpha = -K_\alpha^{-1} E_\alpha, \quad T_\alpha K_\beta = K_\beta K_\alpha^{-a_{\alpha\beta}} \quad (\beta \in \Pi)$$

et pour  $\beta \neq \alpha$  :

$$T_\alpha E_\beta = \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^s q_\alpha^{-s} E_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)} E_\beta E_\alpha^s$$

$$T_\alpha F_\beta = \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^s q_\alpha^s F_\alpha^{(s)} F_\beta F_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)}$$

$$\text{où } E_\alpha^{(m)} := \frac{E_\alpha^m}{[m]_{q_\alpha}!} \text{ et } F_\alpha^{(m)} := \frac{F_\alpha^m}{[m]_{q_\alpha}!}.$$

**Définition 2.1.3 (Automorphismes de Lusztig).**

Les automorphisme  $T_\alpha$  ( $1 \leq i \leq n$ ) s'appellent les automorphismes de Lusztig de l'algèbre  $U_q(\mathfrak{g})$ .

Rappelons (cf section 1.1.2) que pour une décomposition réduite donnée  $w_0 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_N}$ , l'application  $j \mapsto \beta_j = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j)$  ( $\beta_1 = \alpha_1$  par convention) est une bijection de  $\llbracket 1, N \rrbracket$  sur  $\Phi^+$ . Cette décomposition induit un ordre " $<$ " sur  $\Phi^+$  en posant  $\beta_i < \beta_j$  si et seulement si  $i < j$ . On utilisera cet ordre jusqu'à la fin de la section 2.1.2 (Dans cette section, on ne suppose pas que cet ordre est un ordre de Lusztig).

**Définition 2.1.4 ([Jan96, Remarks section 8.24]).**

On pose  $X_{\beta_1} := E_{\beta_1}$ ,  $Y_{\beta_1} := F_{\beta_1}$  ( $\beta_1 = \alpha_1$ ) et pour tout  $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,  $X_{\beta_j} := T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_{j-1}}(E_{\alpha_j})$ ,  $Y_{\beta_j} := T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_{j-1}}(F_{\alpha_j})$ .

En utilisant les résultats [Jan96, théorème 4.21] et [Jan96, théorème section 8.24], il vient :

**Théorème 2.1.5.**

- Si  $\epsilon \in \Pi$ , on a  $X_\epsilon = E_\epsilon$  ([Jan96, Proposition 8.20]).
- Les monômes  $X_{\beta_1}^{k_1} \dots X_{\beta_N}^{k_N}$  (resp.  $X_{\beta_N}^{k_N} \dots X_{\beta_1}^{k_1}$ ) ( $k_i \in \mathbb{N}$ ) forment une base de PBW de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ .
- Les monômes  $X_{\beta_1}^{k_1} \dots X_{\beta_N}^{k_N} K_{\epsilon_1}^{m_1} \dots K_{\epsilon_n}^{m_n} Y_{\beta_1}^{l_1} \dots Y_{\beta_N}^{l_N}$  (resp.  $K_{\epsilon_1}^{m_1} \dots K_{\epsilon_n}^{m_n} Y_{\beta_1}^{l_1} \dots Y_{\beta_N}^{l_N} X_{\beta_1}^{k_1} \dots X_{\beta_N}^{k_N}$ , resp.  $Y_{\beta_1}^{l_1} \dots Y_{\beta_N}^{l_N} K_{\epsilon_1}^{m_1} \dots K_{\epsilon_n}^{m_n} X_{\beta_1}^{k_1} \dots X_{\beta_N}^{k_N}$ ), ( $k_i, l_i \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{Z}$ ) forment une base de  $U_q(\mathfrak{g})$ .

La proposition ci-dessous a été démontrée par Levendorskiï et Soibelman [LS91, Proposition 5.5.2] dans un cadre légèrement différent. On trouve d'autres formulations dans la littérature dont certaines comportent des inexactitudes. Pour cette raison, nous allons la redémontrer dans le cadre de ce travail. Les idées utilisées dans cette démonstration proviennent essentiellement de [LS91, Proposition 5.5.2].

**Théorème 2.1.6 (de Levendorskiï et Soibelman).**

Avec les notations précédentes, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers tels que  $1 \leq i < j \leq N$

$$X_{\beta_i} X_{\beta_j} - q^{(\beta_i, \beta_j)} X_{\beta_j} X_{\beta_i} = \sum_{\substack{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}$$

avec  $c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} \in \mathbb{K}$  et  $c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} \neq 0 \Rightarrow \text{wt}(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) := k_1 \times \gamma_1 + \dots + k_p \times \gamma_p = \beta_i + \beta_j$

Avant de démontrer ce théorème, rappelons quelques résultats classiques sur les automorphismes de Lusztig et les racines positives.

**Lemme 2.1.7 ([Jan96] section 4.6).**

1. Il existe une unique automorphisme  $\omega$  de  $U_q(\mathfrak{g})$  tel que  $\omega(E_\epsilon) = F_\epsilon$ ,  $\omega(F_\epsilon) = E_\epsilon$  et  $\omega(K_\epsilon) = K_\epsilon^{-1}$ . On a  $\omega^2 = 1$ .
2. Il existe une unique anti-automorphisme  $\tau$  de  $U_q(\mathfrak{g})$  tel que  $\tau(E_\epsilon) = E_\epsilon$ ,  $\tau(F_\epsilon) = F_\epsilon$  et  $\tau(K_\epsilon) = K_\epsilon^{-1}$ . On a  $\tau^2 = 1$ .

Pour  $w \in W$ , on choisit une décomposition réduite  $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_t}$  de cet élément. On démontre [Jan96, section 8.18] que  $T_w := T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_t}$  ne dépend pas de la décomposition réduite de  $w$  choisie.

**Proposition 2.1.8 ([Jan96] section 8.20).**

Soient  $w \in W$  et  $\epsilon \in \Pi$ . Si  $w(\epsilon) > 0$ , alors  $T_w(E_\epsilon) \in \mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ ,  $T_w(F_\epsilon) \in \mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g})$  et, de plus,  $T_w(E_\epsilon)$  (resp.  $T_w(F_\epsilon)$ ) est homogène de poids  $w(\epsilon)$  (resp.  $-w(\epsilon)$ ).

Comme (toujours d'après [Jan96, section 8.18]) on a  $T_w^{-1} = \tau \circ T_{w^{-1}} \circ \tau$  et comme  $\tau$  laisse stable  $\mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g})$  et  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ , la proposition précédente peut se ré-écrire :

**Proposition 2.1.9.**

Soient  $w \in W$  et  $\epsilon \in \Pi$ . Si  $w^{-1}(\epsilon) > 0$ , alors  $T_w^{-1}(F_\epsilon) \in \mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g})$  et  $T_w^{-1}(E_\epsilon) \in \mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ .

**Lemme 2.1.10.**

Soient  $\beta_l$  et  $\beta_p$  deux racines positives telles que  $\beta_l \leq \beta_p$  dans  $\Phi^+$  (où  $\leq$  désigne l'ordre induit par la décomposition de  $w_0$  sur  $\Phi_+$ ). On note  $w'_{\beta_l}$  l'élément de  $W$  tel que  $w'_{\beta_l}(\alpha_l) = \beta_l$ .

1.  $T_{w'_{\beta_l}}^{-1}(X_{\beta_p})$  est dans  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$  et homogène de poids  $w'_{\beta_l}(\beta_p)$ .
2.  $T_{w'_{\beta_p}}^{-1}(X_{\beta_l})$  est dans  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ .

**Démonstration :**

1. Par la proposition 2.1.8,  $T_{w'_{\beta_l}}^{-1}(X_{\beta_p}) = T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_1}}^{-1} T_{\epsilon_{i_1}} \dots T_{\epsilon_{i_{p-1}}} (E_{\epsilon_{i_p}}) = T_{\epsilon_{i_1}} \dots T_{\epsilon_{i_{p-1}}} (E_{\epsilon_{i_p}})$  est un élément de  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ , homogène de poids  $s_{i_l} \circ \dots \circ s_{i_{p-1}}(\epsilon_p) = w'_{\beta_l}(\beta_p)$ .

2.

$$\begin{aligned}
 T_{w'_{\beta_p}}^{-1}(X_{\beta_i}) &= T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_l}}^{-1} T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_1}}^{-1} T_{\epsilon_{i_1}} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}} (E_{\epsilon_{i_l}}) \\
 &= T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_l}}^{-1} (E_{\epsilon_{i_l}}) \\
 &= T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} (-K_{\epsilon_{i_l}}^{-1} F_{\epsilon_{i_l}}) \\
 &= T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} (-K_{\epsilon_{i_l}}^{-1}) T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} (F_{\epsilon_{i_l}})
 \end{aligned}$$

$T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} (-K_{\epsilon_{i_l}}^{-1}) = -K_{s_{i_p} \dots s_{i_{l-1}}(\epsilon_{i_l})}^{-1}$  est dans  $\mathcal{U}_q^0(\mathfrak{g})$  car c'est un produit de  $K_{\epsilon}^{-1}$ .

Comme  $s_{i_p} \dots s_{i_{l-1}}(\epsilon_{i_l})$  est une racine positive, on sait (cf proposition 2.1.9) que  $T_{\epsilon_{i_p}}^{-1} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}}^{-1} (F_{\epsilon_{i_l}})$  est dans  $\mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g})$ . □

**Lemme 2.1.11.**

On note ici  $\leq$  l'ordre sur les racines positives associée à la décomposition de  $w_0$  choisie ci-dessus.

Soient  $\beta_i \leq \beta_{i+1} \leq \dots \leq \beta_{i+p}$ ,  $p$  racines positives non nécessairement distinctes ( $p \geq 1$ ). Si  $\beta := \beta_i + \dots + \beta_{i+p}$  est une racine positive, alors  $\beta_i < \beta < \beta_{i+p}$ .

**Démonstration :** On démontre ce résultat par récurrence sur  $p$  :

**Initialisation :** Rappelons que l'ordre sur les racines positives induit par une décomposition de  $w_0$  est toujours convexe (voir par exemple [Pap94]). Ceci donne le résultat pour  $p = 1$ .

**Recursiveité :** On suppose que  $\beta := \beta_i + \dots + \beta_{i+p} \in \Phi^+$ , il existe  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $\langle \beta_{i+k}, \beta \rangle > 0$  (car  $\langle \beta, \beta \rangle > 0$ ).

D'après le lemme 1.1.17, on a  $\gamma := \beta - \beta_{i+k} \in \Phi$  et, puisque  $\gamma = \beta_i + \dots + \widehat{\beta_{i+k}} + \dots + \beta_{i+p}$ ,  $\gamma \in \Phi^+$ . Par le cas  $p = 1$ , on a :

$$\beta = \gamma + \beta_{i+k} \Rightarrow \gamma < \beta < \beta_{i+k} \text{ ou } \beta_{i+k} < \beta < \gamma$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a  $\beta_i < \gamma < \beta_{i+p}$  et, dans les deux cas, on en déduit que  $\beta_i < \beta < \beta_{i+p}$ . □

**Démonstration du théorème 2.1.6 :** Soient  $i$  et  $j$  deux entiers tels que  $1 \leq i < j \leq N$ . Comme les monômes ordonnés en les  $X_{\beta}, \beta \in \Phi^+$ , forment une base de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  (Théorème 2.1.5), on a :

$$X_{\beta_j} X_{\beta_i} = \sum_{\substack{\gamma_1 < \dots < \gamma_p, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p} \quad (\star)$$

Rappelons que  $U_q^+(\mathfrak{g})$  est graduée par  $\mathbb{Z}\Phi$  et que  $wt(X_{\beta}) = \beta$  pour tout  $\beta \in \Phi^+$ . On a donc  $c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} \neq 0 \Rightarrow wt(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) := k_1 \times \gamma_1 + \dots + k_p \times \gamma_p = \beta_i + \beta_j$ . Il reste donc à démontrer que :

$$c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} = 0 \quad \text{si } \gamma_1 < \beta_i; \quad (1)$$

$$c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} = 0 \quad \text{si } \beta_j < \gamma_p; \quad (2)$$

$$c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} = 0 \quad \text{si } \gamma_1 = \beta_i \text{ et } \gamma_p < \beta_j; \quad (3)$$

$$c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} = 0 \quad \text{si } \gamma_1 > \beta_i \text{ et } \gamma_p = \beta_j; \quad (4)$$

$$c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} = q^{-(\beta_i, \beta_j)} \quad \text{si } p = 2, \gamma_1 = \beta_i \text{ et } \gamma_2 = \beta_j; \quad (5)$$

Dans la suite, pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note  $w_k := s_{i_1} \dots s_{i_k}$ . Soit  $t$  le plus petit entier tel qu'il existe un monôme du second membre de l'égalité  $(\star)$  (coefficient non nul) commençant par  $X_{\gamma_1}$  avec  $\gamma_1 = \beta_t$ . De même, soit  $u$  le plus grand entier tel qu'il existe un monôme du second membre de l'égalité  $(\star)$  finissant par  $X_{\gamma_p}$  avec  $\gamma_p = \beta_u$ . Comme dans [Jan96], on note  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}^+)$  (resp  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ ) la sous algèbre de  $U_q(\mathfrak{g})$  engendrée par les éléments  $E_{\epsilon}$  (resp.  $F_{\epsilon}$ ) et  $K_{\epsilon}^{\pm}$  ( $\epsilon \in \Pi$ ).

• Si  $t < i$ , en appliquant  $T_{w_t}^{-1}$  aux deux membres de  $(\star)$ , on obtient :

$$T_{w_t}^{-1}(X_{\beta_j} X_{\beta_i}) = \sum_{\beta_t = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_p} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} T_{w_t}^{-1}(X_{\beta_t}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) + \sum_{\beta_t < \gamma_1 < \dots < \gamma_p} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} T_{w_t}^{-1}(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) \quad (\star\star)$$

Observons que si  $l > t$ , on a  $T_{w_t}^{-1}(X_{\beta_l}) = T_{w_t}^{-1} T_{w_{l-1}}(E_{\epsilon_{i_l}}) = T_{\epsilon_{i_{t+1}}} \dots T_{\epsilon_{i_{l-1}}}(E_{\epsilon_{i_l}})$ . Comme l'écriture  $s_{i_{t+1}} \dots s_{i_l}$  est réduite, on a  $s_{i_{t+1}} \dots s_{i_{l-1}}(\epsilon_{i_l}) \in \Phi^+$ . On en déduit, par la proposition 2.1.9, que  $T_{w_t}^{-1}(X_{\beta_l}) \in U_q^+(\mathfrak{g})$ . Puisque  $i > t$ , il en résulte que le premier membre ainsi que la deuxième somme T du second membre de  $(\star\star)$

sont dans  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . Comme ci-dessus, on a  $T_{w_t}^{-1}(X_{\beta_t}) = T_{\epsilon_{it}}^{-1}(E_{\epsilon_{it}}) = \tau \circ T_{\epsilon_{it}} \circ \tau(E_{\epsilon_{it}})$  ([Jan96, section 8.18])  
 $= -K_{\epsilon_{it}}^{-1}F_{\epsilon_{it}} = -K_{\epsilon_{it}}^{-1}Y_{\epsilon_{it}}$ . La première somme  $S$  du second membre de ( $\star\star$ ) est donc une somme finie de produits  $Y_{\epsilon_{it}}^{k_1} K_{\epsilon_{it}}^{-k_1} S_{k_1}$  avec  $S_{k_1} \in U_q^+(\mathfrak{g})$  et  $k_1 \in \mathbb{N}^*$ . D'autre part, on a  $S = T_{w_t}^{-1}(X_{\beta_j} X_{\beta_i}) - T \in U_q^+(\mathfrak{g})$ . Par le théorème 2.1.5, on a donc  $S=0$ , ce qui contredit la définition de  $t$ . De 1, on a  $t \geq i$ , ce qui démontre (1).

- Si  $j < u$ , on applique alors  $T_{w_j}^{-1}$  aux deux membres de ( $\star$ ) :

$$T_{w_j}^{-1}(X_{\beta_j} X_{\beta_i}) = \sum_{\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_p \leq \beta_j} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} T_{w_j}^{-1}(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) + \sum_{\gamma_1 < \dots < \gamma_{r-1} < \beta_j < \gamma_r < \dots < \gamma_p} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} T_{w_j}^{-1}(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p})$$

On déduit du lemme 2.1.10 que le premier membre et la première somme du second membre de l'égalité précédente sont dans  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}^-)$ . La seconde somme de cette même égalité n'est pas un élément de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{b}^-)$  car la proposition 2.1.9 implique (par un raisonnement analogue à celui du premier point) que  $T_{w_j}^{-1}(X_{\gamma_r}^{k_r} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) \in U_q^+(\mathfrak{g})$  pour  $\beta_j < \gamma_r \dots < \gamma_p$ . Cette troisième somme est donc nulle par le théorème 2.1.5. En composant par  $T_{w_j}$ , on en déduit que :

$$\sum_{\gamma_1 < \dots < \gamma_{r-1} < \beta_j < \gamma_r < \dots < \gamma_p} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p} = 0.$$

Du théorème 2.1.5 on déduit à nouveau que chacun des monômes de cette somme est nul, ce qui contredit la définition de  $u$  et démontre le point (2).

- Pour le point (3), on raisonne par l'absurde. Si un tel  $c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}}$  est non nul, un monôme de la forme  $X_{\beta_i}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}$  avec  $\beta_i < \gamma_p < \beta_j$  apparait dans la relation. Par suite  $(k_1 - 1) \times \beta_i + \dots + k_p \times \beta_p = \beta_j$ , ce qui contredit le lemme 2.1.11.
- Le point (4) se démontre comme le point (3).
- A ce stade, on a donc démontré qu'il existe  $a \in \mathbb{K}$  tel que

$$X_{\beta_j} X_{\beta_i} - a X_{\beta_i} X_{\beta_j} = \sum_{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}$$

Il reste à calculer la valeur de  $a$ . On compose chaque membre par  $T_{w_i}^{-1}$  :

$$T_{w_i}^{-1}(X_{\beta_j}) T_{w_i}^{-1}(X_{\beta_i}) - a T_{w_i}^{-1}(X_{\beta_i}) T_{w_i}^{-1}(X_{\beta_j}) = \sum_{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p \leq \beta_j} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} T_{w_i}^{-1}(X_{\gamma_1}^{k_1}) \dots T_{w_i}^{-1}(X_{\gamma_p}^{k_p}) \quad (2.7)$$

et on note  $X := T_{w_i}^{-1}(X_{\beta_j})$ . C'est un élément de  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$  par la proposition 2.1.9. De même, le second membre  $X'$  est un élément de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  et puisque  $T_{w_i}^{-1}(X_{\beta_i}) := T_{\epsilon_i}^{-1}(E_{\epsilon_i}) = -K_{\epsilon_i}^{-1}F_{\epsilon_i}$ , on a :

$$-X K_{\epsilon_i}^{-1}F_{\epsilon_i} + a K_{\epsilon_i}^{-1}F_{\epsilon_i} X = X'$$

Par le lemme 2.1.10,  $X$  est homogène de poids  $w_i^{-1}(\beta_j)$ , de sorte que

$$-X K_{\epsilon_i}^{-1}F_{\epsilon_i} = -q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}X F_{\epsilon_i}$$

Compte tenu des relations de commutation entre les  $F_\epsilon$  et les  $E_\epsilon$  (cf définition 2.1.1), on a :

$$X F_{\epsilon_i} = F_{\epsilon_i} X + K_1 X_1 + X_2, \text{ avec } K_1 \in \mathcal{U}_q^0(\mathfrak{g}), X_1 \text{ et } X_2 \in U_q^+(\mathfrak{g})$$

Comme  $F_{\epsilon_i} = Y_{\epsilon_i}$ , l'égalité (2.7) s'écrit :

$$-q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}Y_{\epsilon_i} X + -q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}K_1 X_1 + -q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}X_2 + a K_{\epsilon_i}^{-1}Y_{\epsilon_i} X = X',$$

de sorte que

$$-q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}Y_{\epsilon_i} X + a K_{\epsilon_i}^{-1}Y_{\epsilon_i} X = q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}K_1 X_1 + q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} K_{\epsilon_i}^{-1}X_2 + X'$$

Comme  $X, X', X_1$  et  $X_2$  sont dans  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ , il résulte du théorème 2.1.5 que les deux membres de cette égalité sont nuls, de sorte que  $a = q^{(\epsilon_i, w_i^{-1}(\beta_j))} = q^{-(w_i^{-1}(\beta_i), w_i^{-1}(\beta_j))} = q^{-(\beta_i, \beta_j)}$ . Ceci démontre le point (5).  $\square$

### 2.1.3 La construction de Lusztig sur $\mathbb{Q}(v)$

Dans [Lus90b], G. Lusztig travaille avec le corps de base  $\mathbb{Q}(v)$  des fractions rationnelles en l'indéterminée  $v$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Il définit la  $\mathbb{Q}(v)$ -algèbre  $U = \mathbb{Q}(v) \langle \widehat{E}_i, \widehat{F}_i, \widehat{K}_i, \widehat{K}_i^{-1} \rangle$  engendrée par les indéterminées  $\widehat{E}_i, \widehat{F}_i, \widehat{K}_i$  et  $\widehat{K}_i^{-1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) soumises aux relations :

$$\widehat{K}_i \widehat{K}_i^{-1} = 1 = \widehat{K}_i^{-1} \widehat{K}_i \quad \widehat{K}_i \widehat{K}_j = \widehat{K}_j \widehat{K}_i \quad (2.8)$$

$$\widehat{K}_i \widehat{E}_j \widehat{K}_i^{-1} = v^{(\epsilon_i, \epsilon_j)} \widehat{E}_j \quad (2.9)$$

$$\widehat{K}_i \widehat{F}_j \widehat{K}_i^{-1} = v^{-(\epsilon_i, \epsilon_j)} \widehat{F}_j \quad (2.10)$$

$$\widehat{E}_i \widehat{F}_j - \widehat{F}_j \widehat{E}_i = \delta_{ij} \frac{\widehat{K}_i - \widehat{K}_i^{-1}}{v_i - v_i^{-1}} \quad (2.11)$$

et, pour  $i \neq j$  :

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{v_i} \widehat{E}_i^{1-a_{ij}-s} \widehat{E}_j \widehat{E}_i^s = 0 \quad (2.12)$$

$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{v_i} \widehat{F}_i^{1-a_{ij}-s} \widehat{F}_j \widehat{F}_i^s = 0 \quad (2.13)$$

avec  $v_i = v^{d_i}$  où  $d_i = \frac{\|\epsilon_i\|^2}{2}$  et  $a_{ij} = 2(\epsilon_i, \epsilon_j)/(\epsilon_i, \epsilon_i)$ .

#### Notations.

On note  $U^+$  (resp.  $U^-$ ) la sous- $\mathbb{Q}(v)$ -algèbre de  $U$  engendrée par les  $\widehat{E}_i$  (resp.  $\widehat{F}_i$ ) avec  $1 \leq i \leq n$ .

Par [Lus90b, Theorem 3.1], on sait qu'il existe, pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , un unique automorphisme  $\widehat{T}_i$  de l'algèbre  $U$  qui vérifie :

$$\widehat{T}_i \widehat{E}_i = -\widehat{F}_i \widehat{K}_i, \quad \widehat{T}_i \widehat{F}_i = -\widehat{K}_i^{-1} \widehat{E}_i, \quad \widehat{T}_i \widehat{K}_j = \widehat{K}_j \widehat{K}_i^{-a_{ij}} \quad (j \in \llbracket 1, n \rrbracket)$$

et pour  $j \neq i$  :

$$\widehat{T}_i \widehat{E}_j = \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r v^{-d_i s} \widehat{E}_i^{(r)} \widehat{E}_j \widehat{E}_i^{(s)}$$

$$\widehat{T}_i \widehat{F}_j = \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r v^{d_i s} \widehat{F}_i^{(s)} \widehat{F}_j \widehat{F}_i^{(r)}$$

où  $\widehat{E}_i^{(m)} := \frac{\widehat{E}_i^m}{[m]!_{v_i}}$  et  $\widehat{F}_i^{(m)} := \frac{\widehat{F}_i^m}{[m]!_{v_i}}$ .

#### Conventions.

Pour tout  $\alpha = \epsilon_i \in \Pi$  ( $1 \leq i \leq n$ ) on note :

- $v_\alpha = v^{d_\alpha}$  où  $d_\alpha = \frac{\|\alpha\|^2}{2}$ ,
- $\widehat{E}_\alpha = \widehat{E}_i, \widehat{E}_\alpha^{(m)} = \frac{\widehat{E}_i^m}{[m]!_{v_\alpha}} = \widehat{E}_i^{(m)}$ ,
- $\widehat{F}_\alpha = \widehat{F}_i, \widehat{F}_\alpha^{(m)} = \frac{\widehat{F}_i^m}{[m]!_{v_\alpha}} = \widehat{F}_i^{(m)}$ ,
- $\widehat{K}_\alpha^{\pm 1} = \widehat{K}_i^{\pm 1}$ ,
- $\widehat{T}_\alpha = \widehat{T}_i$ .

#### Définition 2.1.12 (Automorphismes de Lusztig).

Les automorphismes  $\widehat{T}_\alpha$  ( $\alpha \in \Pi$ ) s'appellent les automorphismes de Lusztig de l'algèbre  $U$ .

On observe, avec ces conventions que l'on a

$$\widehat{T}_\alpha \widehat{E}_\alpha = -\widehat{F}_\alpha \widehat{K}_\alpha, \quad \widehat{T}_\alpha \widehat{F}_\alpha = -\widehat{K}_\alpha^{-1} \widehat{E}_\alpha, \quad \widehat{T}_\alpha \widehat{K}_\beta = \widehat{K}_\beta \widehat{K}_\alpha^{-a_{\alpha\beta}} \quad (\beta \in \Pi)$$

et pour  $\beta \neq \alpha$  :

$$\begin{aligned}\widehat{T}_\alpha \widehat{E}_\beta &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{(-a_{\alpha\beta}-s)} v_\alpha^{-s} \widehat{E}_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)} \widehat{E}_\beta \widehat{E}_\alpha^{(s)} \\ \widehat{T}_\alpha \widehat{F}_\beta &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{(-a_{\alpha\beta}-s)} v_\alpha^s \widehat{F}_\alpha^{(s)} \widehat{F}_\beta \widehat{F}_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)}\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, l'ensemble  $\Phi^+$  des racines positives est muni d'un ordre de Lusztig (définition 1.1.7) ; les colonnes et les boîtes sont définies dans le chapitre 1. Le résultat suivant est énoncé par G. Lusztig dans [Lus90b, section 4.3] :

**Proposition 2.1.13.**

Il existe une unique fonction  $\Phi^+ \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\beta \rightarrow i_\beta)$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $s_{i_{\beta_1}}$  et  $s_{i_{\beta_2}}$  commutent dans  $W$  si  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont dans la même boîte. Ainsi pour une boîte  $B$ , le produit des  $s_{i_\beta}$  pour  $\beta \in B$  est un élément bien défini  $s(B)$  de  $W$ , indépendant de l'ordre de ses facteurs.
2.  $i_{\epsilon_j} = j$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
3. Si  $\beta \in C_j$  et si  $B_1, \dots, B_k$  sont les boîtes de  $C_j$  dont les éléments sont strictement plus grands que  $\beta$  pour l'ordre de Lusztig alors  $s(B_1)s(B_2)\dots s(B_k)(\epsilon_{i_\beta}) = \beta$ .

On pose alors  $w_\beta := s(B_1)s(B_2)\dots s(B_k)$ .

On construit à présent  $\widehat{T}_{w_\beta}$  l'aide du théorème suivant ([Lus90b, théorème 3.2])

**Théorème 2.1.14.**

Soit  $w \in W$  et  $s_{i_1} \dots s_{i_p}$  une décomposition réduite de  $w$ . Alors l'automorphisme  $\widehat{T}_w := \widehat{T}_{\epsilon_{i_1}} \dots \widehat{T}_{\epsilon_{i_p}}$  ne dépend pas de la décomposition réduite choisie, il dépend uniquement de l'élément  $w \in W$ .

**Notation.**

Pour toute racine positive  $\beta$ , on note  $\widehat{E}_\beta := \widehat{T}_{w_\beta}(\widehat{E}_{i_\beta})$ .

On rappelle ([Lus90b, proposition 4.2]) que les  $\widehat{E}_\beta$  sont dans  $U^+$  et que les monômes ordonnés en les  $\widehat{E}_\beta$  (relativement à l'ordre de Lusztig sur les  $\beta$ ) forment une base de PBW de  $U^+$ .

**Notations.**

- Si  $\beta > \beta'$  sont deux racines positives, on note  $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\beta'}]_v = \widehat{E}_\beta \widehat{E}_{\beta'} - v^{(\beta, \beta')} \widehat{E}_{\beta'} \widehat{E}_\beta$ .
- Pour tout plan vectoriel  $P$  de  $E$  ( $= \text{Vect}(\Phi)$ ) contenant deux racines positives distinctes  $\beta > \beta'$ , on note  $\Phi_P := \Phi \cap P$ . On observe que ceci est un système de racines de rang 2.
- On note  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$  l'ensemble des polynômes de Laurent en l'indéterminée  $v$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et  $\underline{\mathcal{A}}$  l'ensemble des polynômes de  $\mathcal{A}$  qui sont de la forme  $v^a \prod_{b \in F} (v^b - 1)[c]_v$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $c \in \mathbb{N}^*$  et  $F$  une partie finie (éventuellement vide) de  $\mathbb{N}^*$ .

**Proposition 2.1.15.**

Supposons  $\Phi = G_2$ , notons  $\epsilon_1$  la racine simple courte et  $\epsilon_2$  la racine simple longue. On obtient ainsi la bonne numérotation de l'ensemble des racines simples (cf exemple 1.1.4).  $w_0$  a pour décomposition réduite  $s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2$  ( $s_i = s_{\epsilon_i}$ ). L'ordre convexe induit sur  $\Phi^+$  est alors

$$\Phi^+ = \{\beta_1 = \epsilon_1 < \beta_2 = 3\epsilon_1 + \epsilon_2 < \beta_3 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 < \beta_4 = 3\epsilon_1 + 2\epsilon_2 < \beta_5 = \epsilon_1 + \epsilon_2 < \beta_6 = \epsilon_2\}.$$

La première colonne  $C_1$  est réduite à  $\{\beta_1\}$ , la seconde colonne  $C_2 = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$  est exceptionnelle ( $\beta_{ex} = \beta_4$ ). On a alors, d'après [Lus90b, section 5.2] :

- $[\widehat{E}_{\beta_3}, \widehat{E}_{\beta_1}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_2}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
- $[\widehat{E}_{\beta_4}, \widehat{E}_{\beta_1}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_3}^2$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
- $[\widehat{E}_{\beta_5}, \widehat{E}_{\beta_1}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_3}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
- $[\widehat{E}_{\beta_6}, \widehat{E}_{\beta_1}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_5}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
- $[\widehat{E}_{\beta_3}, \widehat{E}_{\beta_1}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_2}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
- $[\widehat{E}_{\beta_5}, \widehat{E}_{\beta_3}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_4}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ .

Si  $\Phi$  n'est pas de type  $G_2$  et si  $P$  est un plan vectoriel de  $E$  contenant deux racines positives distinctes, le système de racines  $\Phi_P$  n'est jamais de type  $G_2$ . Si de plus  $P$  est un plan admissible, il résulte de [Lus90b, Section 5.2 et Théorème 6.6] que :

**Proposition 2.1.16** ( $\Phi \neq G_2$ ).

- Si  $P = \langle \beta, \beta' \rangle$  est un plan admissible de type (1.1) avec  $h'(\beta') = h'(\beta) + 1$ , alors  $\Phi_P^+ = \{\beta > \beta_{ex} = \beta + \beta' > \beta'\}$  et :
  - $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\beta'}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_{ex}}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\beta_{ex}}]_v = [\widehat{E}_{\beta_{ex}}, \widehat{E}_{\beta'}]_v = 0$ .
- Si  $P = \langle \beta, \beta' \rangle$  est un plan admissible de type (1.2) avec  $h'(\beta') = h'(\beta) + 1$ , alors  $\Phi_P^+ = \{\beta > \beta_{ex} = \beta + \beta' > \beta' > \epsilon_i\}$  et on a les relations :
  - $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\beta'}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_{ex}}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_{\beta_{ex}}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = \lambda' \widehat{E}_{\beta'}^2$  avec  $\lambda' \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = \lambda'' \widehat{E}_{\beta'}$  avec  $\lambda'' \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\beta_{ex}}]_v = [\widehat{E}_{\beta_{ex}}, \widehat{E}_{\beta'}]_v = [\widehat{E}_{\beta'}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = 0$ .
- Si  $P = \langle \beta, \epsilon_i \rangle$  est un plan admissible de type (2.1), alors  $\Phi_P^+ = \{\beta_1 > \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_i > \epsilon_i\}$  ( $\beta = \beta_1$  ou  $\beta_2$ ) et :
  - $[\widehat{E}_{\beta_1}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_2}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_{\beta_1}, \widehat{E}_{\beta_2}]_v = [\widehat{E}_{\beta_2}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = 0$ .
- Si  $P = \langle \beta, \epsilon_i \rangle$  est un plan admissible de type (2.2), alors  $\Phi_P^+ = \{\beta_1 > \beta_{ex} = \beta_1 + \beta_2 > \beta_2 > \epsilon_i\}$  ( $\beta = \beta_1, \beta_2$  ou  $\beta_{ex}$ ) et on a les mêmes relations que dans le type (1.2) en remplaçant  $\beta$  par  $\beta_1$  et  $\beta'$  par  $\beta_2$ .
- Si  $P = \langle \beta, \epsilon_i \rangle$  est un plan admissible de type (2.3), alors  $\Phi_P^+ = \{\beta_1 > \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_i > \beta_3 = \beta_1 + 2\epsilon_i > \epsilon_i\}$  ( $\beta = \beta_1, \beta_2$  ou  $\beta_3$ ) et on a les relations :
  - $[\widehat{E}_{\beta_2}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta_3}$  avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_{\beta_1}, \widehat{E}_{\beta_3}]_v = \lambda' \widehat{E}_{\beta_2}^2$  avec  $\lambda' \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_{\beta_1}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = \lambda'' \widehat{E}_{\beta_2}$  avec  $\lambda'' \in \underline{\mathcal{A}}$ ,
  - $[\widehat{E}_{\beta_1}, \widehat{E}_{\beta_2}]_v = [\widehat{E}_{\beta_2}, \widehat{E}_{\beta_3}]_v = [\widehat{E}_{\beta_3}, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = 0$
- Si  $P = \langle \beta, \epsilon_i \rangle$  est un plan admissible de type (2.4), alors  $\Phi_P^+ = \{\beta > \epsilon_i\}$ ,  $\beta \perp \epsilon_i$  et, si  $\beta$  est non exceptionnelle, on a  $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = 0$ .

Comme dans la remarque 1.1.21, on prendra garde que la notation  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) ne désigne pas, dans cette proposition, la  $i^{\text{ème}}$  racine de  $\Phi^+$  muni de l'ordre de Lusztig associé.

Le cas où  $P = \langle \beta, \epsilon_i \rangle$  est un plan admissible de type (2.4) avec  $\beta = \beta_{ex}$  sera traité ultérieurement (proposition 4.1.9).

**Corollaire 2.1.17** ( $\Phi \neq G_2$ ).

Soient  $i, l$  deux entiers tels que  $1 \leq i < l \leq n$  et  $\eta \in C_l$

1. Si  $(\eta, \epsilon_i) > 0$ , alors  $[\widehat{E}_\eta, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = 0$ .
2. Si  $\eta + \epsilon_i = m\gamma$  avec  $\gamma \in \Phi^+$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , alors  $[\widehat{E}_\eta, \widehat{E}_{\epsilon_i}]_v = \lambda \widehat{E}_\gamma^m$ , avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ .
3. Si  $\eta = \eta_1 + \eta_2$  avec  $\eta_1$  et  $\eta_2$  dans  $C_l$  telles que  $h(\eta_1) + 1 = h(\eta_2)$  alors  $[\widehat{E}_{\eta_1}, \widehat{E}_{\eta_2}]_v = \lambda \widehat{E}_\eta$ , avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ .

**Démonstration :**  $P = \text{Vect}(\eta, \epsilon_i)$  est un plan admissible de type (2.1), (2.2), (2.3) ou (2.4) par définition.

1.  $P$  n'est pas de type (2.4) puisque  $(\eta, \epsilon_i) \neq 0$ . Il nous reste donc à envisager les cas suivants :
  - $P$  est de type (2.1). On voit alors (en utilisant les notations 1.1.21) que,  $\eta = \beta_2$ . D'où le résultat par la proposition 2.1.16.
  - $P$  est de type (2.2). On voit alors que  $\eta = \beta'$ . D'où le résultat par la proposition 2.1.16.
  - $P$  est de type (2.3). On voit alors que  $\eta = \beta_3$ . D'où le résultat par la proposition 2.1.16.
2. Puisque  $m \neq 0$ , on a  $\gamma \in P \cap \Phi^+ = \Phi_P^+$  de sorte que  $P$  n'est pas non plus de type (2.4). Il nous reste donc à envisager les cas suivants :
  - $P$  est de type (2.1). On voit alors que  $m = 1$ ,  $\eta = \beta_1$  et  $\gamma = \beta_2$ . D'où le résultat par la proposition 2.1.16.
  - $P$  est de type (2.2). On voit alors que l'on a deux possibilités :
    - $m = 1$ ,  $\eta = \beta$  et  $\gamma = \beta'$ .
    - $m = 2$ ,  $\eta = \beta_{ex}$  et  $\gamma = \beta'$ .

D'où le résultat par la proposition 2.1.16.

- $P$  est de type (2.3). On voit alors qu'on a  $m = 1$ ,  $\eta = \beta_1$  (resp.  $\eta = \beta_2$ ) et  $\gamma = \beta_2$  (resp.  $\gamma = \beta_3$ ). D'où le résultat par la proposition 2.1.16.
3. Considérons le plan  $P := \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ . Il est admissible (cf définition 1.1.20)  $\Phi_P^+$  est égal à  $\{\eta_1, \eta, \eta_2\}$  (type 1.1) ou  $\{\eta_1, \eta, \eta_2, \epsilon_i\}$  avec  $i < l$  (type 1.2). Il résulte alors de la proposition précédente que  $[\widehat{E}_{\eta_1}, \widehat{E}_{\eta_2}]_v = \lambda \widehat{E}_{\eta}$ , avec  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ .

□

## 2.1.4 La construction de Lusztig sur $\mathbb{K}$

Rappelons les notations suivantes :

**Notations.**

- $U_q(\mathfrak{g})$  la  $K$ -algèbre de J.C. Jantzen [Jan96, p. 52-53],
- $U$  la  $\mathbb{Q}(v)$ -algèbre de G. Lusztig [Lus90b],
- $\mathcal{U}$  la  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -algèbre de [Lus90b].

**Rappel.**

$\mathcal{U}$  est la  $\mathcal{A}$ -sous-algèbre de  $U$  engendrée par les

$$\widehat{E}_\alpha^{(N)} = \frac{\widehat{E}_\alpha^N}{[N]_\alpha!}, \quad \widehat{F}_\alpha^{(N)} = \frac{\widehat{F}_\alpha^N}{[N]_\alpha!} \quad (N \geq 0), \quad \widehat{K}_\alpha^{\pm 1} \quad (\alpha \in \Pi, v_\alpha = v^{\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2}})$$

**Observation 2.1.18 ([CP94, p. 297]).**

$$\text{Les } \left[ \begin{array}{c} \widehat{K}_\alpha; c \\ r \end{array} \right]_{v_\alpha} = \prod_{s=1}^r \frac{\widehat{K}_\alpha v_\alpha^{c+1-s} - \widehat{K}_\alpha^{-1} v_\alpha^{-(c+1-s)}}{v_\alpha^s - v_\alpha^{-s}} \quad (\alpha \in \Pi, c \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}^*) \text{ appartient à } \mathcal{U}.$$

$$\left( \left[ \begin{array}{c} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{array} \right]_{v_\alpha} = \frac{\widehat{K}_\alpha - \widehat{K}_\alpha^{-1}}{v_\alpha - v_\alpha^{-1}}, \left[ \begin{array}{c} \widehat{K}_\alpha; c \\ 0 \end{array} \right]_{v_\alpha} = 1 \right)$$

**Proposition 2.1.19 ([CP94, lemme 9.3.2]).**

( $\forall \alpha \in \Pi$ )  $\widehat{T}_\alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$  (où  $\widehat{T}_\alpha$  est l'automorphisme de tresse de Lusztig relatif à  $\alpha$ ).

**Notation.**

On note  $\mathcal{U}^+$  la  $\mathcal{A}$ -sous-algèbre de  $\mathcal{U}$  engendrée par les  $\widehat{E}_\alpha^{(N)}$  ( $\alpha \in \Pi, N \geq 0$ ).

Soit  $w_0 = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_N}$  une décomposition réduite de l'élément de plus grande longueur de  $W$  ( $\alpha_j \in \Pi$ ).

Si  $1 \leq j \leq n$ , on pose  $\beta_j = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j)$ ,  $\widehat{X}_{\beta_j} = \widehat{T}_{\alpha_1} \circ \dots \circ \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}(\widehat{E}_{\alpha_j})$  ( $1 \geq j \geq N$ ) et  $\widehat{Y}_{\beta_j} = \widehat{T}_{\alpha_1} \circ \dots \circ \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}(\widehat{F}_{\alpha_j})$  ( $1 \geq j \geq N$ ). Pour tout entier  $r \in \mathbb{N}$ , on définit les puissances divisées  $\widehat{X}_{\beta_j}^{(r)} := \widehat{T}_{\alpha_1} \circ \dots \circ \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}(\widehat{E}_{\alpha_j}^{(r)}) = \frac{\widehat{X}_{\beta_j}^r}{[r]_{v_{\alpha_j}}}$  et  $\widehat{Y}_{\beta_j}^{(r)} := \widehat{T}_{\alpha_1} \circ \dots \circ \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}(\widehat{F}_{\alpha_j}^{(r)}) = \frac{\widehat{Y}_{\beta_j}^r}{[r]_{v_{\alpha_j}}}$ .

**Proposition 2.1.20 ([CP94, prop 9.3.3]).**

1. Les monômes  $\widehat{X}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{X}_{\beta_1}^{(t_1)}$  ( $t_i \in \mathbb{N}$ ) forment une base de  $\mathcal{U}^+$  (comme  $\mathcal{A}$ -module). Notons  $\mathcal{B}^+$  cette base.

2. Les produits  $\widehat{Y}_{\beta_1}^{(u_1)} \dots \widehat{Y}_{\beta_N}^{(u_N)} \widehat{K}_{\alpha_1}^{\sigma_1} \dots \widehat{K}_{\alpha_n}^{\sigma_n} \left[ \begin{array}{c} \widehat{K}_{\alpha_1}; 0 \\ s_1 \end{array} \right]_{v_{\alpha_1}} \dots \left[ \begin{array}{c} \widehat{K}_{\alpha_n}; 0 \\ s_n \end{array} \right]_{v_{\alpha_n}} \widehat{X}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{X}_{\beta_1}^{(t_1)}$  ( $u_i, t_i, s_i \in \mathbb{N}, \sigma_i \in \{0, 1\}$ ) forment une  $\mathcal{A}$ -base de  $\mathcal{U}$ . Notons  $\mathcal{B}$  cette base.

Pour  $u_1 = \dots = u_n = \sigma_1 = \dots = \sigma_n = s_1 = \dots = s_n = 0$ , le produit ci-dessus est égal à  $\widehat{X}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{X}_{\beta_1}^{(t_1)}$ . De là

**Observation 2.1.21.**  $\mathcal{B}^+ \subset \mathcal{B}$ .

**Observation 2.1.22.** Comme  $q$  est non nul, il existe un (unique) homomorphisme d'anneaux  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$  qui transforme  $v$  en  $q$  (propriété universelle des anneaux de polynômes de Laurent).

Il en résulte que  $\mathbb{K}$  est muni d'une structure de  $\mathcal{A}$ -algèbre qui vérifie :

$$P(v) \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow P(v) \cdot \lambda = \varphi(P(v))\lambda = P(q)\lambda \in \mathbb{K}$$

Considérons alors la  $\mathbb{K}$ -algèbre  $R = \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}$  et notons  $E'_\alpha, F'_\alpha, K'_\alpha{}^{\pm 1}$  les tenseurs  $1 \otimes \widehat{E}_\alpha, 1 \otimes \widehat{F}_\alpha, 1 \otimes \widehat{K}_\alpha{}^{\pm 1}$ . On a immédiatement

**Observation 2.1.23.**  $E'_\alpha{}^{(N)} := \frac{E'_\alpha{}^N}{[N]_\alpha!} = 1 \otimes \widehat{E}_\alpha{}^{(N)}, F'_\alpha{}^{(N)} := \frac{F'_\alpha{}^N}{[N]_\alpha!} = 1 \otimes \widehat{F}_\alpha{}^{(N)}$ .

**Démonstration :** Par définition, on a  $\widehat{E}_\alpha^N = [N]_{v_\alpha}! \widehat{E}_\alpha{}^{(N)}$  dans  $\mathcal{U}$ .

Donc  $E'_\alpha{}^N = 1 \otimes \widehat{E}_\alpha^N = 1 \otimes [N]_{v_\alpha}! \widehat{E}_\alpha{}^{(N)} = [N]_{v_\alpha}! 1 \otimes \widehat{E}_\alpha{}^{(N)} = [N]_{q_\alpha}!(1 \otimes \widehat{E}_\alpha{}^{(N)}) \Rightarrow E'_\alpha{}^{(N)} = 1 \otimes \widehat{E}_\alpha{}^{(N)}$

De la même manière,  $F'_\alpha{}^{(N)} = 1 \otimes \widehat{F}_\alpha{}^{(N)}$ . □

**Observation 2.1.24.**

$$\frac{K'_\alpha - K'_\alpha{}^{-1}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} = 1 \otimes \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Démonstration :** Dans  $\mathcal{U}$ , on a  $(v_\alpha - v_\alpha^{-1}) \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \widehat{K}_\alpha - \widehat{K}_\alpha^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K'_\alpha - K'_\alpha{}^{-1} &= 1 \otimes (\widehat{K}_\alpha - \widehat{K}_\alpha^{-1}) = 1 \otimes (v_\alpha - v_\alpha^{-1}) \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (q_\alpha - q_\alpha^{-1}) \otimes \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (q_\alpha - q_\alpha^{-1}) \left( 1 \otimes \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$
□

**Proposition 2.1.25.**

$E'_\alpha, F'_\alpha, K'_\alpha{}^{\pm 1}$  vérifient (dans  $R$ ) les relations (R1) à (R5) de [Jan96, p 52-53].

**Démonstration :** (R1), (R2) et (R3) résultent des relations correspondantes dans  $\mathcal{U}$  (ce sont des relations dans  $U$  dont les deux membres sont dans  $\mathcal{U}$ ).

**(R4) :** Dans  $U$ , on a  $\widehat{E}_\alpha \widehat{F}_\alpha - \widehat{F}_\alpha \widehat{E}_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \frac{\widehat{K}_\alpha - \widehat{K}_\alpha^{-1}}{v_\alpha - v_\alpha^{-1}}$ . Cela s'écrit, dans  $\mathcal{U}$ ,  $\widehat{E}_\alpha \widehat{F}_\alpha - \widehat{F}_\alpha \widehat{E}_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

D'où, en tensorisant par 1 :

$$E'_\alpha F'_\alpha - F'_\alpha E'_\alpha = \delta_{\alpha\beta} 1 \otimes \begin{bmatrix} \widehat{K}_\alpha; 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta_{\alpha\beta} \frac{K'_\alpha - K'_\alpha{}^{-1}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} \text{ (observation 2.1.24).}$$

**(R5) :** Dans  $U$ , on a

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \frac{[1-a_{\alpha\beta}]_{v_\alpha}!}{[1-a_{\alpha\beta}-s]_{v_\alpha}! [s]_{v_\alpha}!} \widehat{E}_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-s} \widehat{E}_\beta \widehat{E}_\alpha^s = 0$$

Cela s'écrit dans  $\mathcal{U}$ ,

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s [1-a_{\alpha\beta}]_{v_\alpha}! \widehat{E}_\alpha^{(1-a_{\alpha\beta}-s)} \widehat{E}_\beta \widehat{E}_\alpha^{(s)} = 0$$

En tensorisant par 1, il vient (compte tenu de l'observation 2.1.23)

$$\sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s [1-a_{\alpha\beta}]_{q_\alpha}! E'_\alpha{}^{(1-a_{\alpha\beta}-s)} E'_\beta E'_\alpha{}^{(s)} = 0$$

D'où le résultat. (R6) se démontre de la même manière. □

On en déduit, par la propriété universelle des algèbres définies par générateurs et relations :

**Proposition 2.1.26.**

Il existe un (unique) homomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbre  $f : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow R = \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U}$  qui transforme  $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha^{\pm 1}$  en  $E'_\alpha, F'_\alpha, K_\alpha^{\pm 1}$  pour tout  $\alpha \in \Pi$ .

**Proposition 2.1.27.**

Pour tout  $\alpha \in \Pi$ , notons, comme dans [Jan96],  $\varphi_\alpha$  l'automorphisme de  $U_q(\mathfrak{g})$  qui vérifie, pour tout  $\beta \in \Pi$ ,  $\varphi_\alpha(E_\beta) = (-1)^{(\alpha^\vee, \beta)} E_\beta$ ,  $\varphi_\alpha(F_\beta) = (-1)^{(\alpha^\vee, \beta)} F_\beta$  et  $\varphi_\alpha(K_\beta^{\pm 1}) = K_\beta^{\pm 1}$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_q(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U} = R \\ T_\alpha \circ \varphi_\alpha \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \widehat{T}_\alpha \\ U_q(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{U} = R \end{array}$$

C'est à dire  $f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f$

L'expression des automorphismes de Lusztig sous la forme  $T_\alpha \circ \varphi_\alpha$  provient de [Jan96, p. 153].

**Démonstration :** Il suffit de montrer que les homomorphismes de  $\mathbb{K}$ -algèbres  $(1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f$  et  $f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha$  coïncident sur  $E_\beta, F_\beta, K_\beta$  ( $\beta \in \Pi$ ).

Cela résulte des formules (2), (3), (7), (8) de [Jan96, p. 153] :

$$(2) : T_\alpha \circ \varphi_\alpha(K_\beta) = K_\beta K_\alpha^{-\langle \alpha^\vee, \beta \rangle}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha(K_\beta) &= K'_\beta K'_\alpha^{-\langle \alpha^\vee, \beta \rangle} = 1 \otimes \widehat{K}_\beta \widehat{K}_\alpha^{-\langle \alpha^\vee, \beta \rangle} \\ &= (1 \otimes \widehat{T}_\alpha)(1 \otimes \widehat{K}_\beta) = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha)(K'_\beta) \\ &= (1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f(K_\beta) \end{aligned}$$

$$(3) : T_\alpha \circ \varphi_\alpha(E_\alpha) = (-1)^{(\alpha^\vee, \alpha)} T_\alpha(E_\alpha) = T_\alpha(E_\alpha) = -F_\alpha K_\alpha \Rightarrow f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha(E_\alpha) = -F'_\alpha K'_\alpha = 1 \otimes -\widehat{F}_\alpha \widehat{K}_\alpha = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha)(1 \otimes \widehat{E}_\alpha) = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f(E_\alpha).$$

De même,  $f \circ \widehat{T}_\alpha \circ \varphi_\alpha(F_\alpha) = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f(F_\alpha)$ .

$$(7) : \text{Pour } \beta \neq \alpha, \text{ on a } T_\alpha \circ \varphi_\alpha(E_\beta) = (-1)^{(\alpha^\vee, \beta)} T_\alpha(E_\beta) = (-1)^{a_{\alpha\beta}} \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^s q_\alpha^{-s} E_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)} E_\beta E_\alpha^{(s)}$$

$$= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{a_{\alpha\beta}+s} q_\alpha^{-s} E_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)} E_\beta E_\alpha^{(s)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha(E_\beta) &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{-a_{\alpha\beta}-s} q_\alpha^{-s} E'_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)} E'_\beta E'_\alpha^{(s)} \\ &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{-a_{\alpha\beta}-s} q_\alpha^{-s} (1 \otimes \widehat{E}_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)}) (1 \otimes \widehat{E}_\beta) (1 \otimes \widehat{E}_\alpha^{(s)}) \\ &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{-a_{\alpha\beta}-s} q_\alpha^{-s} (1 \otimes \widehat{E}_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)}) \widehat{E}_\beta \widehat{E}_\alpha^{(s)} \\ &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{-a_{\alpha\beta}-s} (q_\alpha^{-s} \otimes \widehat{E}_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)}) \widehat{E}_\beta \widehat{E}_\alpha^{(s)}. \end{aligned}$$

Comme, dans  $\mathbb{K}$  muni de sa structure de  $\mathcal{A}$  algèbre, on a  $q_\alpha^{-s} = 1 \times v_\alpha^{-s}$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha(E_\beta) &= \sum_{s=0}^{-a_{\alpha\beta}} (-1)^{-a_{\alpha\beta}-s} (1 \otimes v_\alpha^{-s} \widehat{E}_\alpha^{(-a_{\alpha\beta}-s)}) \widehat{E}_\beta \widehat{E}_\alpha^{(s)} \\ &= 1 \otimes \widehat{T}_\alpha(\widehat{E}_\beta) = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha)(1 \otimes \widehat{E}_\beta) = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f(E_\beta). \end{aligned}$$

De même (au moyen de (8)),  $f \circ T_\alpha \circ \varphi_\alpha(F_\beta) = (1 \otimes \widehat{T}_\alpha) \circ f(F_\beta)$ .

□

**Remarque 2.1.28.**

Soient  $\alpha \in \Pi$  et  $X \in U_q^+(\mathfrak{g})$  homogène de poids  $\gamma \in \Phi^+$ . On a  $\varphi_\alpha(X) = (-1)^{(\alpha^\vee, \gamma)} X$

**Démonstration :** Comme  $X \in U_q^+(\mathfrak{g})$  est homogène de poids  $\gamma$ , il s'écrit  $X = \sum_{\substack{a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p = \gamma \\ a_1, \dots, a_p, p \in \mathbb{N}}} c_{\underline{a}} E_{\alpha_1}^{a_1} \dots E_{\alpha_p}^{a_p}$

( $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Pi$  et  $c_{\underline{a}} \in \mathbb{K}$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(X) &= \sum_{\substack{a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p = \gamma \\ a_1, \dots, a_p, p \in \mathbb{N}}} c_{\underline{a}} \varphi_\alpha(E_{\alpha_1})^{a_1} \dots \varphi_\alpha(E_{\alpha_p})^{a_p} = \sum_{\substack{a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p = \gamma \\ a_1, \dots, a_p, p \in \mathbb{N}}} (-1)^{(\alpha^\vee, a_1\alpha_1 + \dots + a_p\alpha_p)} c_{\underline{a}} E_{\alpha_1}^{a_1} \dots E_{\alpha_p}^{a_p} \\ &= (-1)^{(\alpha^\vee, \gamma)} X. \end{aligned}$$

□

On en déduit

**Proposition 2.1.29.**

Les  $X_{\beta_j}$  ( $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ) de la définition 2.1.4, vérifient :

$$f(X_{\beta_j}) = \pm (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_j})$$

**Démonstration :** Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Par définition de  $X_{\beta_j}$ , on a  $f(X_{\beta_j}) = f \circ T_{\alpha_1} \circ \dots \circ T_{\alpha_{j-1}}(E_{\alpha_j})$ .

Par la proposition 2.1.27, on a  $f \circ T_{\alpha_1} \circ \varphi_{\alpha_1} = (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1}) \circ f \Rightarrow f \circ T_{\alpha_1} = (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1}) \circ f \circ \varphi_{\alpha_1} \Rightarrow$

$$f(X_{\beta_j}) = (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1}) \circ f \circ \varphi_{\alpha_1} \circ T_{\alpha_2} \circ \dots \circ T_{\alpha_{j-1}} \circ (E_{\alpha_j}).$$

Comme  $T_{\alpha_2} \circ \dots \circ T_{\alpha_{j-1}}(E_{\alpha_j})$  est homogène de degré  $\gamma := s_{\alpha_2} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) \in \Phi^+$ , on déduit de la remarque 2.1.28 que  $f(X_{\beta_j}) = \pm (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1}) \circ f \circ T_{\alpha_2} \circ \dots \circ T_{\alpha_{j-1}} \circ (E_{\alpha_j})$ . En itérant ce calcul, il vient :

$$\begin{aligned} f(X_{\beta_j}) &= \pm (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1}) \circ (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_2}) \circ \dots \circ (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}) \circ f(E_{\alpha_j}) \\ &= \pm (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1}) \circ (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_2}) \circ \dots \circ (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}) (1 \otimes \widehat{E}_{\alpha_j}) \\ &= \pm (1 \otimes \widehat{T}_{\alpha_1} \circ \widehat{T}_{\alpha_2} \circ \dots \circ \widehat{T}_{\alpha_{j-1}}(\widehat{E}_{\alpha_j})) \\ &= \pm (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_j}) \end{aligned}$$

□

**Observation 2.1.30.** Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $m \in \mathbb{N}$ . Si on note  $X_{\beta_j}^{(m)} = \frac{X_{\beta_j}^m}{[m]_{q_{\alpha_j}}!}$ , on a  $f(X_{\beta_j}^{(m)}) = \pm (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_j}^{(m)})$ .

**Démonstration :** Par la proposition 2.1.29, on a

$$f(X_{\beta_j}^{(m)}) = \pm (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_j}^{(m)}) = \pm (1 \otimes [m]_{v_{\alpha_j}}! \widehat{X}_{\beta_j}^{(m)}) = \pm ([m]_{q_{\alpha_j}}! \otimes \widehat{X}_{\beta_j}^{(m)}) = \pm [m]_{q_{\alpha_j}}! (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_j}^{(m)}).$$

□

**Observation 2.1.31.** Si  $i : \mathcal{U}^+ \rightarrow \mathcal{U}$  est l'injection canonique, alors  $1 \otimes i : \mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+ \rightarrow \mathbb{K} \otimes \mathcal{U}$  est un homomorphisme d'algèbres injectif.

**Démonstration :**  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{U}$  comme  $\mathcal{A}$ -module  $\Rightarrow 1 \otimes \mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}$  comme  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\Rightarrow 1 \otimes \mathcal{B}^+$  est un système libre (puisque extrait d'une base) de  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}$ .

Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{U}^+$ ,  $1 \otimes \mathcal{B}^+$  est aussi une base de  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$ . Donc  $1 \otimes i$  transforme une base en un système libre. Donc  $1 \otimes i$  est injectif.

□

Ceci permet d'identifier  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$  à son image par  $1 \otimes i$ , c'est à dire au  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de base  $1 \otimes \mathcal{B}^+ = (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{X}_{\beta_1}^{(t_1)})_{(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N}$ . Si  $(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N$ , on déduit de la proposition 2.1.29 que  $1 \otimes \widehat{X}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{X}_{\beta_1}^{(t_1)} = \pm f((X_{\beta_N}^{(t_N)} \dots X_{\beta_1}^{(t_1)}))$ . On sait ([Jan96, Théorème 8.24, p. 163]) que la famille  $(X_{\beta_N}^{t_N} \dots X_{\beta_1}^{t_1})_{(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N}$  est une base de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  (comme  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel). Il en résulte que la famille  $(X_{\beta_N}^{(t_N)} \dots X_{\beta_1}^{(t_1)})_{(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N}$  est aussi une base de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . Par l'observation 2.1.30,  $f$  transforme cette base en une famille  $(f(X_{\beta_N}^{(t_N)} \dots X_{\beta_1}^{(t_1)}))_{(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N} = (\pm (1 \otimes \widehat{X}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{X}_{\beta_1}^{(t_1)}))_{(t_N, \dots, t_1)}$  qui est une base de  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$ . On en déduit :

**Proposition 2.1.32.**

$f(U_q^+(\mathfrak{g})) = \mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$  et  $f : U_q^+(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$  est un isomorphisme d'algèbre.

Dans toute la suite de la section 2.1, on suppose que la décomposition réduite de  $w_0$  provient d'un ordre de Lusztig sur  $\Phi^+$  (on a vu dans la section 1.1.2 que si on choisit un ordre de Lusztig sur  $\Phi^+$ , il existe une décomposition réduite de  $w_0$  qui induit le même ordre). On peut alors considérer les éléments  $\widehat{E}_\beta$  ( $\beta \in \Phi^+$ ) construits par Lusztig (cf section 2.1.3) et on rappelle que

**Théorème 2.1.33** ([Lus90b, Théorème 6-7 pages 104]).

Les monômes  $\widehat{E}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{E}_{\beta_1}^{(t_1)}$  ( $(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N$ ) forment une base de  $\mathcal{U}^+$  (comme  $\mathcal{A}$ -algèbre).

Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

**Observation 2.1.34.** Si  $f$  désigne l'isomorphisme de la proposition 2.1.32 et si  $\beta_j \in \Pi$ , on a, par définition de  $f$ ,  $E_{\beta_j} = f^{-1}(1 \otimes \widehat{E}_{\beta_j})$ .

**Conventions.**

Dans le cas général, on convient de noter  $E_{\beta_j} := f^{-1}(1 \otimes \widehat{E}_{\beta_j})$  et, pour tout entier  $m$  positif ou nul, de poser  $E_{\beta_j}^{(m)} := f^{-1}(1 \otimes \widehat{E}_{\beta_j}^{(m)})$ .

On observe que  $E_{\beta_j}^{(m)} = \frac{E_{\beta_j}^m}{[m]_{q_{\alpha_j}}!}$  (car  $f(E_{\beta_j}^m) = 1 \otimes \widehat{E}_{\beta_j}^m = 1 \otimes [m]_{v_{\alpha_j}}! \widehat{E}_{\beta_j}^{(m)} = [m]_{q_{\alpha_j}}! (1 \otimes \widehat{E}_{\beta_j}^{(m)})$ ).

**Théorème 2.1.35.**

Les monômes ordonnés  $E_{\beta_N}^{t_N} \dots E_{\beta_1}^{t_1}$  ( $(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N$ ) forment une base de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ .

**Démonstration :** D'après le théorème ci-dessus, les  $1 \otimes \widehat{E}_{\beta_N}^{(t_N)} \dots \widehat{E}_{\beta_1}^{(t_1)}$  ( $(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N$ ) forment une base de  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$ . En transformant par  $f^{-1}$ , les monômes  $E_{\beta_N}^{(t_N)} \dots E_{\beta_1}^{(t_1)}$  ( $(t_N, \dots, t_1) \in \mathbb{N}^N$ ) forment donc une base de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . D'où le résultat.  $\square$

**Théorème 2.1.36.**

Les  $E_\beta$  ( $\beta \in \Phi^+ = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$ ) vérifient les formules de redressement des propositions 2.1.15, 2.1.16 et du corollaire 2.1.17, dans lesquelles on remplace  $v$  par  $q$ , chaque  $\widehat{E}_\beta$  par  $E_\beta$  et  $\underline{\mathcal{A}}$  par  $\mathbb{K}^*$ .

**Démonstration :** Cela résulte de l'observation suivante :

Considérons trois racines positives  $\beta, \beta', \beta''$  et supposons  $[\widehat{E}_\beta, \widehat{E}_{\beta'}]_v = \lambda \widehat{E}_{\beta''}^r$ , avec  $r \leq 1$ ,  $\lambda \in \underline{\mathcal{A}}$ , de sorte que  $\lambda = P(v)$  est un polynôme de Laurent de la forme  $v^a \prod_{b \in F} (v^b - 1)[c]_v$  avec  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $c \in \mathbb{N}^*$  et  $F$  une partie finie (éventuellement vide) de  $\mathbb{N}^*$ . On donc, dans  $\mathbb{K} \otimes \mathcal{U}^+$ ,  $1 \otimes \widehat{E}_\beta \widehat{E}_{\beta'} - 1 \otimes v^{(\beta, \beta')} \widehat{E}_{\beta'} \widehat{E}_\beta = 1 \otimes \lambda \widehat{E}_{\beta''}^r$ , soit :  $1 \otimes \widehat{E}_\beta \widehat{E}_{\beta'} - q^{(\beta, \beta')} (1 \otimes \widehat{E}_{\beta'} \widehat{E}_\beta) = \mu (1 \otimes \widehat{E}_{\beta''}^r)$ , avec  $\mu = P(q) \neq 0$  puisque  $q$  n'est pas une racine de l'unité. En transformant par  $f^{-1}$ , il vient  $[E_\beta, E_{\beta'}]_q = \mu E_{\beta''}^r$ , avec  $\mu \in \mathbb{K}^*$ .  $\square$

## 2.1.5 Relations de commutation entre les $X_\gamma$ dans les plans admissibles

Le but de cette partie est de démontrer que les  $X_\gamma$  ( $\gamma \in \Phi^+$ ) construits dans la section 2.1.2, vérifient également des formules de redressement analogues à celles des propositions 2.1.15, 2.1.16 et du corollaire 2.1.17. **On rappelle qu'on dispose d'un ordre de Lusztig sur  $\Phi^+$  avec  $\Pi = \{\epsilon_1 < \dots < \epsilon_n\}$  et qu'on lui associe une décomposition réduite de  $w_0 = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_N}$ .**

### 2.1.5.1 Construction d'une nouvelle famille de variables dans $U_q^+(\mathfrak{g})$

**Conventions.**

- Soit  $i$  un entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .  $\tau$  désignant l'anti-automorphisme de  $U_q(\mathfrak{g})$  défini au lemme 2.1.7 et  $T_{\epsilon_i}$  l'automorphisme de Lusztig associé à  $\epsilon_i$  (cf section 2.1.2), notons  $T'_{\epsilon_i} = \tau \circ T_{\epsilon_i} \circ \tau$ . Ceci est un automorphisme de  $U_q(\mathfrak{g})$  qui, par 2.1.2, vérifie les relations suivantes :

$$T'_{\epsilon_i} E_{\epsilon_i} = -K_{\epsilon_i}^{-1} F_{\epsilon_i}, \quad T'_{\epsilon_i} F_{\epsilon_i} = -E_{\epsilon_i} K_{\epsilon_i}, \quad T'_{\epsilon_i} K_{\epsilon_j} = K_{\epsilon_j} K_{\epsilon_i}^{-a_{ij}} \quad (j \in \llbracket 1, n \rrbracket)$$

et pour  $j \neq i$  :

$$T'_{\epsilon_i} E_{\epsilon_j} = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^s q^{-d_i s} E_{\epsilon_i}^{(s)} E_{\epsilon_j} E_{\epsilon_i}^{(-a_{ij}-s)}$$

$$T'_{\epsilon_i} F_{\epsilon_j} = \sum_{s=0}^{-a_{ij}} (-1)^s q^{d_i s} F_{\epsilon_i}^{(-a_{ij}-s)} F_{\epsilon_j} F_{\epsilon_i}^{(s)}$$

- Si  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on définit  $X'_{\beta_j} := T'_{\alpha_1} \dots T'_{\alpha_{j-1}}(E_{\alpha_j})$ .

**Observation 2.1.37.** Si  $\alpha \in \Pi$ , on a  $X'_\alpha = E_\alpha$ .

**Démonstration :** Notons  $\alpha = \beta_j$  avec  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , de sorte que

$$X'_\alpha = X'_{\beta_j} := T'_{\alpha_1} \dots T'_{\alpha_{j-1}}(E_{\alpha_j}) = \tau \circ T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_{j-1}} \circ \tau(E_{\alpha_j}) = \tau \circ T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_{j-1}}(E_{\alpha_j}) = \tau(E_\alpha) = E_\alpha$$

□

Le théorème de Levendorskiĭ et Soibelman (théorème 2.1.6) prend alors la forme suivante :

**Proposition 2.1.38.**

Avec les notations précédentes, si  $i$  et  $j$  sont deux entiers tels que  $1 \leq i < j \leq N$

$$X'_{\beta_i} X'_{\beta_j} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} X'_{\beta_j} X'_{\beta_i} = \sum_{\substack{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}$$

avec  $c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} \in \mathbb{K}$  et  $c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} \neq 0 \Rightarrow wt(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) := k_1 \times \gamma_1 + \dots + k_p \times \gamma_p = \beta_i + \beta_j$

**Démonstration :** On observe que, pour tout  $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on a :

$$X'_{\beta_l} = T'_{\alpha_1} \dots T'_{\alpha_{l-1}}(E_{\alpha_l}) = \tau \circ T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_{l-1}} \circ \tau(E_{\alpha_l}) = \tau(X_{\beta_l}).$$

Ainsi, compte tenu du théorème de Levendorskiĭ et Soibelman (théorème 2.1.6), on a :

$$\begin{aligned} X'_{\beta_i} X'_{\beta_j} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} X'_{\beta_j} X'_{\beta_i} &= \tau(X_{\beta_j} X_{\beta_i} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} X_{\beta_i} X_{\beta_j}) \\ &= -q^{-(\beta_i, \beta_j)} \tau(X_{\beta_i} X_{\beta_j} - q^{(\beta_i, \beta_j)} X_{\beta_j} X_{\beta_i}) \\ &= -q^{-(\beta_i, \beta_j)} \tau \left( \sum_{\substack{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} c_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p} \right) \\ &= \sum_{\substack{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} c'_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} \tau(X_{\gamma_p})^{k_p} \dots \tau(X_{\gamma_1})^{k_1} \\ &= \sum_{\substack{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} c'_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X_{\gamma_p}^{k_p} \dots X_{\gamma_1}^{k_1} \end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, il nous reste à montrer que, si  $1 < k < l < N$ , tout monôme  $M$  (désordonné) en  $X'_{\beta_k}, \dots, X'_{\beta_l}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes ordonnés en  $X'_{\beta_k}, \dots, X'_{\beta_l}$ . On raisonne par récurrence sur le nombre  $m := l - k + 1$  des variables considérées.

- Si  $m = 1$ , le résultat est évident.
- Supposons  $m \geq 2$  et le résultat vrai au rang  $m - 1$ . On raisonne alors par récurrence sur le nombre  $t$  d'occurrences de  $X'_{\beta_k}$  dans  $M$ .
  - Si  $t = 0$ ,  $M$  est un monôme en  $X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l}$  et on conclut par l'hypothèse de récurrence sur  $m$ .
  - Si  $t = 1$ , on a  $M = M_1 X'_{\beta_k} M_2$  avec  $M_1$  et  $M_2$  deux monômes en  $X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l}$ . On raisonne alors par récurrence sur  $p = dM_1$ , le degré de  $M_1$ .
    - Si  $p = 0$ , on a  $M = X'_{\beta_k} M_2$  avec  $M_2 \in \mathbb{K} \langle X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l} \rangle$  et on conclut par l'hypothèse de récurrence sur  $m$ .

- Supposons  $p \geq 1$  et le résultat vrai au rang  $p - 1$ . On a alors  $M_1 = M'_1 X'_{\beta_s}$  avec  $s \in \llbracket k + 1, l \rrbracket$  et  $M'_1 \in \mathbb{K}\langle X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l} \rangle$ , de degré  $p - 1$ . Le calcul effectué au début de la démonstration montre que  $X'_{\beta_k} X'_{\beta_s} = q^{-(\beta_k, \beta_s)} X'_{\beta_s} X'_{\beta_k} + P$  avec  $P \in \mathbb{K}\langle X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_{s-1}} \rangle \subset \mathbb{K}\langle X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l} \rangle$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} M &= M'_1 X'_{\beta_s} X'_{\beta_k} M_2 = q^{(\beta_k, \beta_s)} M'_1 X'_{\beta_k} X'_{\beta_s} M_2 - q^{(\beta_k, \beta_s)} M'_1 P M_2 \\ &= M'_1 X'_{\beta_k} M'_2 + M''_2 \end{aligned}$$

avec  $M'_1, M'_2, M''_2 \in \mathbb{K}\langle X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l} \rangle$  et  $dM'_1 = p - 1$ .

Par l'hypothèse de récurrence sur  $p$ ,  $M'_1 X'_{\beta_k} M'_2$  est une combinaison linéaire de monômes ordonnés en  $X'_{\beta_k}, \dots, X'_{\beta_l}$ . Par l'hypothèse de récurrence sur  $m$ ,  $M''_2$  est une combinaison linéaire de monômes ordonnés en  $X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l}$ . D'où le résultat.

- Supposons  $t \geq 2$  et le résultat vrai au rang  $t - 1$ . On a  $M = M_1 X'_{\beta_k} M_2$  avec  $M_2 \in \mathbb{K}\langle X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l} \rangle$ ,  $M_1 \in \mathbb{K}\langle X'_{\beta_k}, \dots, X'_{\beta_l} \rangle$  et le nombre d'occurrences de  $X'_{\beta_k}$  dans  $M_1$  égal à  $t - 1$ . Par l'hypothèse de récurrence sur  $t$  appliquée à  $M_1$ , on a  $M = \sum_i X'^{a_i}_{\beta_k} M'_i X'_{\beta_k} M_2$  avec  $a_i \in \mathbb{N}$  et  $M'_i$  monôme (ordonné) en  $X'_{\beta_{k+1}}, \dots, X'_{\beta_l}$ . On conclut alors par le cas  $t = 1$ . □

### 2.1.5.2 Relations entre les $E_\beta$ et les $X'_\beta$ .

Comme dans les paragraphes précédents,  $\Phi^+$  est muni d'un ordre de Lusztig associé une décomposition réduite  $w_0 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_N}$ . Dans ce cas, on peut préciser comme suit la version du théorème de Levendorskiï et Soibelman (proposition 2.1.38).

#### **Théorème 2.1.39.**

Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers tels que  $1 \leq i < j \leq N$ , on a :

$$X'_{\beta_i} X'_{\beta_j} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} X'_{\beta_j} X'_{\beta_i} = \sum_{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j} C_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}} X'^{k_1}_{\gamma_1} \dots X'^{k_p}_{\gamma_p}.$$

Les monômes du second membre apparaissant avec un coefficient  $C_{\bar{\mathbf{k}}, \bar{\gamma}}$  non nul vérifient :

- $wt(X'^{k_1}_{\gamma_1} \dots X'^{k_p}_{\gamma_p}) = \beta_i + \beta_j$  ;
- $\gamma_1$  n'est pas dans la même boîte que  $\beta_i$  ;
- $\gamma_p$  n'est pas dans la même boîte que  $\beta_j$ .

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur le lemme suivant :

#### **Lemme 2.1.40.**

Soit  $B = \{\beta_p, \dots, \beta_{p+l}\}$  une boîte et soit  $\alpha_p, \dots, \alpha_{p+l}$  les racines simples correspondantes. Alors  $\forall k \in \llbracket 0, l \rrbracket$ ,

$$T'_{\alpha_p} \dots T'_{\alpha_{p+k-1}} (E_{\alpha_{p+k}}) = E_{\alpha_{p+k}} = T'_{\alpha_p} \dots T'_{\alpha_{p+k-1}} T'_{\alpha_{p+k+1}} \dots T'_{\alpha_{p+l}} (E_{\alpha_{p+k}})$$

**Démonstration :** Soit  $\alpha_r$  et  $\alpha_s$  deux racines simples. Si  $\alpha_r$  et  $\alpha_s$  sont orthogonales, alors on sait (section 2.1.5.1) que  $T'_{\alpha_r} (E_{\alpha_s}) = E_{\alpha_s}$ . Comme  $\alpha_p, \dots, \alpha_{p+l}$  sont 2 à 2 orthogonales (cf proposition 1.1.14), on a immédiatement les formules ci-dessus. □

**Démonstration du théorème 2.1.39 :** Le premier point résulte du théorème 2.1.38. Si dans la décomposition de  $w_0$ , on change l'ordre des réflexions associées à des racines simples correspondant à une même boîte  $B$ , on trouve une nouvelle décomposition réduite de  $w_0$ . Les racines positives de  $B$  sont permutées de la même manière et les autres sont inchangés. Par le lemme ci-dessus, les  $X'_\beta$ ,  $\beta \in B$ , sont aussi permutées de la même manière mais non modifiées. Il reste à montrer que les  $X'_\gamma$ , pour  $\gamma \notin B$ , sont inchangées :

- Si  $\gamma$  est une racine plus petite que celles de  $B$  alors la partie de la décomposition utilisée pour construire  $\gamma$  et  $X'_\gamma$  n'a pas été modifiée.
- Si  $\gamma$  est une racine plus grande que celles de  $B$  alors la relation de tresse vérifiée par les  $s_\alpha$  étant aussi vérifiée par les  $T'_\alpha$ ,  $X'_\gamma$  n'est pas modifié.

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que  $\beta_i$  est maximale dans sa boîte et que  $\beta_j$  est minimale dans la sienne. Il en résulte que, si  $\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j$ , alors  $\gamma_1$  n'est pas dans la même boîte que  $\beta_i$  et  $\gamma_p$  n'est pas dans la même boîte que  $\beta_j$ .

□

**Remarque 2.1.41.**

La preuve du théorème précédent est aussi valable pour les éléments  $X_\beta, \beta \in \Phi^+$ , de sorte qu'on appliquera aussi le théorème 2.1.39 à ces éléments.

On peut à présent démontrer :

**Théorème 2.1.42.**

$$\forall \beta \in \Phi^+, \exists \lambda_\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tel que } X'_\beta = \lambda_\beta E_\beta$$

**Démonstration :** Soit  $\beta$  et  $\beta'$  deux racines positives telles que  $\beta > \beta'$ . On note (par analogie avec  $[E_\beta, E_{\beta'}]_q$ )  $[X'_\beta, X'_{\beta'}]_q = X'_\beta X'_{\beta'} - q^{(\beta, \beta')} X'_{\beta'} X'_\beta$ .

Traitons d'abord le cas  $\Phi = G_2$  et reprenons les conventions de la proposition 2.1.15. Par le théorème 2.1.36, les  $E_\beta$  vérifient des relations de commutation analogues à celles vérifiées par les  $\widehat{E}_\beta$  dans cette proposition. On sait (observation 2.1.37) que, puisque  $\beta_1$  et  $\beta_6$  sont simples, on a  $X'_{\beta_1} = E_{\epsilon_1} = E_{\beta_1}$  et  $X'_{\beta_6} = E_{\epsilon_2} = E_{\beta_6}$ .

On a donc

$$[X'_{\beta_6}, X'_{\beta_1}]_q = [E_{\beta_6}, E_{\beta_1}]_q = \lambda E_{\beta_5} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Par le théorème 2.1.39, on a aussi  $[X'_{\beta_6}, X'_{\beta_1}]_q = \mu X'_{\beta_5}$  avec  $\mu \in \mathbb{K}$  et, par suite,  $X'_{\beta_5} = \lambda_{\beta_5} E_{\beta_5}$  avec  $\lambda_{\beta_5} \in \mathbb{K}^*$ . De là,  $[X'_{\beta_5}, X'_{\beta_1}]_q = \lambda_{\beta_5} [E_{\beta_5}, E_{\beta_1}]_q = \nu E_{\beta_3}$  avec  $\nu \in \mathbb{K}^*$ . On en déduit comme ci-dessus que  $X'_{\beta_3} = \lambda_{\beta_3} E_{\beta_3}$  avec  $\lambda_{\beta_3} \in \mathbb{K}^*$ .

De la même manière, en considérant  $[X'_{\beta_3}, X'_{\beta_1}]_q = \lambda_{\beta_3} [E_{\beta_3}, E_{\beta_1}]_q$ , on montre que  $X'_{\beta_2} = \lambda_{\beta_2} E_{\beta_2}$  avec  $\lambda_{\beta_2} \in \mathbb{K}^*$ . Enfin, on a  $[X'_{\beta_5}, X'_{\beta_3}]_q = \lambda_{\beta_5} \lambda_{\beta_3} [E_{\beta_5}, E_{\beta_3}]_q = \nu E_{\beta_4}$  avec  $\nu \in \mathbb{K}^*$ , d'où on déduit que  $X'_{\beta_4} = \lambda_{\beta_4} E_{\beta_4}$  avec  $\lambda_{\beta_4} \in \mathbb{K}^*$ .

Supposons maintenant  $\Phi \neq G_2$ , considérons une colonne  $C_t$  ( $t \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) et démontrons le théorème pour toutes les racines de  $C_t$ . Comme dans le cas de  $G_2$ , on utilise les relations de commutations vérifiées par les  $E_\beta$  comme indiqué dans le théorème 2.1.36.

On étudie d'abord le cas des racines non exceptionnelles.

Soit donc  $\beta \in C_t$ ,  $\beta$  non exceptionnelle. Raisonnons par récurrence sur  $h(\beta)$ .

**Initialisation :** Si  $h(\beta) = 1$ , alors  $\beta = \epsilon_t$  et d'après les conventions de  $X'_\beta = E_{\epsilon_t} = E_\beta$ .

**Hérédité :** Supposons  $h(\beta) > 1$  et le résultat vrai pour chaque  $\delta \in C_t$ ,  $\delta$  non exceptionnelle telle que  $h(\delta) < h(\beta)$ . Par la proposition 1.1.18, il existe une racine simple  $\epsilon_i$  ( $i < t$ ) telle que  $\beta - \epsilon_i = \gamma \in C_t$ . De plus,  $\gamma$  n'est pas exceptionnelle car, sinon  $\beta = \gamma + \epsilon_i$  le serait.  $P := \langle \epsilon_i, \beta \rangle$  est alors un plan admissible de type (2.1), (2.2) ou (2.3) et on a par la proposition 2.1.16,  $[E_\gamma, E_{\epsilon_i}]_q = c E_\beta$  ( $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ).

Comme  $h(\gamma) = h(\beta) - 1 < h(\beta)$ , on a  $X'_\gamma = \lambda_\gamma E_\gamma$  ( $\lambda_\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ), et comme  $E_{\epsilon_i} = X'_{\epsilon_i}$ , on a :

$$[X'_\gamma, X'_{\epsilon_i}]_q = \lambda_\gamma [E_\gamma, E_{\epsilon_i}]_q = \lambda_\gamma c E_\beta.$$

Par le théorème 2.1.39,  $E_\beta$  est une combinaison linéaire de monômes  $X'_{\delta_1} \dots X'_{\delta_s}$  avec  $\epsilon_i < \delta_1 \leq \dots \leq \delta_s < \gamma$ ,  $\delta_s$  n'appartient pas à la boîte de  $\gamma$ ,  $\delta_1$  n'appartient pas à la boîte de  $\epsilon_i$  et

$$\delta_1 + \dots + \delta_s = \epsilon_i + \gamma = \beta \quad (\star).$$

Pour chacun de ces monômes,  $\delta_s \in C_t$  et  $\delta_s$  n'est pas exceptionnelle (puisque  $\beta \in C_t$  et  $\beta$  n'est pas exceptionnelle). Comme  $\delta_s < \gamma$  et  $\delta_s$  n'appartient pas à la boîte de  $\gamma$ , on a  $h(\delta_s) > h(\gamma) \Rightarrow h(\delta_s) \geq h(\beta) \Rightarrow (s = 1 \text{ et } \delta_1 = \beta) \Rightarrow E_\beta = a X'_\beta$  avec  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , d'où le résultat.

Supposons à présent que  $\beta$  est la racine exceptionnelle de  $C_t$  (cf figure ci-contre). Soit  $\gamma$  l'élément de  $C_t$  qui précède  $\beta$  dans l'ordre de Lusztig et soit  $\delta = s_D(\gamma)$ , de sorte que  $\delta + \gamma = \beta$ . Par la proposition 1.1.19, on a  $h'(\beta) = m + \frac{1}{2}$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $h'(C_t) = \llbracket 1, 2m \rrbracket$ . Si  $B$  est la boîte de  $C_t$  qui précède  $\beta$ , on a donc  $h'(B) = h(B) = m + 1$ . Comme la boîte de  $\beta$  est réduite à un élément, on a  $\gamma \in B$ , donc  $h(\gamma) = m + 1$  et, par suite,  $h(\delta) = m$ .  $P = Vect(\gamma, \delta)$  est alors un plan admissible de type (1.1) ou (1.2), et  $[E_\delta, E_\gamma]_q = cE_\beta$  ( $c \neq 0$ ) par la proposition 2.1.16.

Comme  $\gamma$  et  $\delta$  sont non exceptionnelles, on sait déjà (voir ci dessus) que  $X'_\gamma = \lambda_\gamma E_\gamma$  et  $X'_\delta = \lambda_\delta E_\delta$  ( $\lambda_\gamma \neq 0, \lambda_\delta \neq 0$ ). Ainsi, on a :

$$[X'_\delta, X'_\gamma]_q = \lambda_\delta \lambda_\gamma [E_\delta, E_\gamma]_q = \lambda_\delta \lambda_\gamma c E_\beta \quad (\lambda_\gamma \neq 0, \lambda_\delta \neq 0).$$

Comme ci-dessus,  $E_\beta$  est une combinaison linéaire de monômes  $X'_{\delta_1} \dots X'_{\delta_s}$  avec  $\gamma < \delta_1 \leq \dots \leq \delta_s < \delta$ ,  $\delta_s$  n'appartient pas à la boîte de  $\delta$  et  $\delta_1$  n'appartient pas à la boîte de  $\gamma$ . Comme  $\beta$  est la seule racine de  $C_t$  vérifiant  $\gamma < \beta < \delta$ ,  $\beta$  n'appartient pas à la boîte de  $\delta$  et  $\beta$  n'appartient pas à la boîte de  $\gamma$ , on en déduit que  $s = 1$  et  $\delta_1 = \beta$ . Donc  $E_\beta = aX'_\beta$  avec  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . □

Des théorèmes 2.1.39 et 2.1.42, on en déduit :

**Corollaire 2.1.43.**

Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers tels que  $1 \leq i < j \leq N$ , on a :

$$E_{\beta_i} E_{\beta_j} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} E_{\beta_j} E_{\beta_i} = \sum_{\substack{\beta_i < \gamma_1 < \dots < \gamma_p < \beta_j, \\ p \geq 1, k_i \in \mathbb{N}}} C'_{\mathbf{k}, \overline{\gamma}} E_{\gamma_1}^{k_1} \dots E_{\gamma_p}^{k_p}.$$

Les monômes du second membres apparaissant avec un coefficient  $C'_{\mathbf{k}, \overline{\gamma}}$  non nul vérifient :

- $wt(X_{\gamma_1}^{k_1} \dots X_{\gamma_p}^{k_p}) = \beta_i + \beta_j$  ;
- $\gamma_1$  n'est pas dans la même boîte que  $\beta_i$  ;
- $\gamma_p$  n'est pas dans la même boîte que  $\beta_j$ .

### 2.1.5.3 Lien avec la construction de Jantzen

**Proposition 2.1.44.**

Soient  $\beta_1 < \beta_2$  deux racines positives.

1. Si  $E_{\beta_1} E_{\beta_2} - q^{-(\beta_1, \beta_2)} E_{\beta_2} E_{\beta_1} = k E_\gamma^m$  ( $k \in \mathbb{K}^*, m \geq 1$  et  $\gamma \in \Phi^+$ ), alors  $X_{\beta_1} X_{\beta_2} - q^{+(\beta_1, \beta_2)} X_{\beta_2} X_{\beta_1} = k' X_\gamma^m$  ( $k' \in \mathbb{K}^*$ ).
2. Si  $E_{\beta_1} E_{\beta_2} - q^{-(\beta_1, \beta_2)} E_{\beta_2} E_{\beta_1} = k E_\gamma E_\delta$  ( $k \in \mathbb{K}^*, \gamma, \delta \in \Phi^+, \gamma$  et  $\delta$  appartenant à une même boîte), alors  $X_{\beta_1} X_{\beta_2} - q^{+(\beta_1, \beta_2)} X_{\beta_2} X_{\beta_1} = k' X_\gamma X_\delta$  ( $k' \in \mathbb{K}^*$ ).

**Démonstration :** Soit  $\beta \in \Phi^+$ . Rappelons (preuve de la proposition 2.1.38) que  $X_\beta = \tau(X'_\beta)$ . Rappelons également (théorème 2.1.42) que  $X'_\beta = \lambda_\beta E_\beta$  avec  $\lambda_\beta \in \mathbb{K}^*$ .

Soient  $\beta_1 < \beta_2$  deux racines positives.

1. Si  $E_{\beta_1}E_{\beta_2} - q^{-(\beta_1, \beta_2)}E_{\beta_2}E_{\beta_1} = kE_{\gamma}^m$  ( $k \in \mathbb{K}^*, \gamma \in \Phi^+$ ), alors :

$$\begin{aligned}
 X_{\beta_1}X_{\beta_2} - q^{+(\beta_1, \beta_2)}X_{\beta_2}X_{\beta_1} &= \tau(X'_{\beta_1})\tau(X'_{\beta_2}) - q^{+(\beta_1, \beta_2)}\tau(X_{\beta_2})\tau(X_{\beta_1}) \\
 &= \tau(X'_{\beta_2}X'_{\beta_1} - q^{+(\beta_1, \beta_2)}X'_{\beta_1}X'_{\beta_2}) \\
 &= -q^{+(\beta_1, \beta_2)}\tau(X'_{\beta_1}X'_{\beta_2} - q^{-(\beta_1, \beta_2)}X'_{\beta_2}X'_{\beta_1}) \\
 &= -q^{+(\beta_1, \beta_2)}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\beta_2}\tau(E_{\beta_1}E_{\beta_2} - q^{-(\beta_1, \beta_2)}E_{\beta_2}E_{\beta_1}) \\
 &= -q^{+(\beta_1, \beta_2)}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\beta_2}\tau(kE_{\gamma}^m) \\
 &= \frac{-q^{+(\beta_1, \beta_2)}\lambda_{\beta_1}\lambda_{\beta_2}k}{\lambda_{\gamma}}\tau((X'_{\gamma})^m) \\
 &= k'X_{\gamma}^m \text{ avec } k' \in \mathbb{K}^*
 \end{aligned}$$

2. Si  $E_{\beta_1}E_{\beta_2} - q^{-(\beta_1, \beta_2)}E_{\beta_2}E_{\beta_1} = kE_{\gamma}E_{\delta}$  ( $k \in \mathbb{K}^*, \gamma, \delta \in \Phi^+, \gamma$  et  $\delta$  appartenant à une même boîte) alors, en effectuant le même calcul qu'en 1., on trouve :

$$X_{\beta_1}X_{\beta_2} - q^{+(\beta_1, \beta_2)}X_{\beta_2}X_{\beta_1} = k'\tau(X'_{\gamma}X'_{\delta}) = k'X_{\delta}X_{\gamma} \quad (k' \in \mathbb{K}^*)$$

Comme  $\gamma$  et  $\delta$  sont dans la même boîte, on sait (proposition 1.1.14) que  $(\delta, \gamma) = 0$ , de sorte que, par le théorème 2.1.6,  $X_{\gamma}X_{\delta} = X_{\delta}X_{\gamma}$ , ce qui termine la démonstration. □

## 2.2 Les sous-algèbres $U[w]$

### 2.2.1 Définition et propriétés

On prend  $w \in W$  quelconque, on pose  $t = l(w)$  et on considère une décomposition réduite

$$w = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_t} \quad (\alpha_i \in \Pi \text{ pour } 1 \leq i \leq t) \quad (2.14)$$

Il est bien connu que

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = s_{\alpha_1}(\alpha_2), \dots, \beta_t = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{t-1}}(\alpha_t)$$

sont des racines positives distinctes et que l'ensemble  $\{\beta_1, \dots, \beta_t\}$  ne dépend pas de la décomposition réduite (2.14) de  $w$ . Pour tout  $\alpha \in \Pi$ , on utilise l'automorphisme de tresse  $T_{\alpha}$  de l'algèbre  $U_q^+(\mathfrak{g})$ , de la définition 2.1.12, et on pose

$$X_{\beta_1} = E_{\alpha_1}, X_{\beta_2} = T_{\alpha_1}(E_{\alpha_2}), \dots, X_{\beta_t} = T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_{t-1}}(E_{\alpha_t}).$$

Dans le cas  $w = w_0$ , on retrouve les  $X_{\beta}$  de la définition 2.1.4. Les résultats suivants sont classiques ([Jan96], chapter 8) :

- $X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_t}$  sont des éléments de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  et chaque  $X_{\beta_i}$  ( $1 \leq i \leq t$ ) est homogène de degré  $\beta_i$ .
- On note  $U[w]$  la sous-algèbre de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  engendrée par  $X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_t}$ . Cette algèbre ne dépend pas de la décomposition réduite (2.14) de  $w$  (bien que les variables  $X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_t}$  en dépendent).
- Les monômes ordonnés  $X^{\underline{a}} := X_{\beta_1}^{a_1} \dots X_{\beta_t}^{a_t}$ ,  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_t) \in \mathbb{N}^t$ , sont une base de  $U[w]$  (comme  $\mathbb{K}$  espace vectoriel).
- Comme les générateurs  $X_{\beta_i}$  ci-dessus sont homogènes, la  $\mathbb{Z}\Pi$ -graduation de  $U_q(\mathfrak{g})$  induit une  $\mathbb{Z}\Pi$ -graduation de  $U[w]$  et l'action du Tore  $T$  sur  $U_q(\mathfrak{g})$  induit, par restriction, une action de  $T$  sur  $U[w]$ , de sorte que  $\forall \rho \in \mathbb{Z}\Pi$ , l'automorphisme  $h_{\rho}$  induit (par restriction) un automorphisme (encore noté  $h_{\rho}$ ) de  $U[w]$ .
- En considérant une décomposition réduite de  $w_0$  qui "commence" par 2.14 (ceci est possible d'après [Hum90][p. 16]),  $X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_t}$  apparaissent comme les  $t$  premiers générateurs canoniques de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ , de sorte qu'on dispose encore du théorème de Levendorskii et Soibelman (2.1.6) ci-après.

- Si  $1 \leq i < j \leq t$ , on a la formule de redressement suivante :

$$X_{\beta_j} X_{\beta_i} - q^{-(\beta_i, \beta_j)} X_{\beta_i} X_{\beta_j} = P_{j,i} \text{ où} \quad (2.15)$$

$$P_{j,i} = \sum_{\underline{a} = (a_{i+1}, \dots, a_{j-1})} c_{\underline{a}} X_{\beta_{i+1}}^{a_{i+1}} \dots X_{\beta_{j-1}}^{a_{j-1}}. \quad (2.16)$$

avec  $\underline{a} \in \mathbb{N}^{j-i-1}$ ,  $c_{\underline{a}} \in \mathbb{K}$  et  $c_{\underline{a}} \neq 0$  pour un nombre fini de  $\underline{a}$  vérifiant  $a_{i+1}\beta_{i+1} + \dots + a_{j-1}\beta_{j-1} = \beta_i + \beta_j$ .

- Quand  $w = w_0$ , on a  $t = N$ ,  $\{\beta_1, \dots, \beta_t\} = \Phi^+$  et  $U[w] = U_q^+(\mathfrak{g})$ .

## 2.2.2 Un exemple où $U[w] = O_q(M_{p,m}(\mathbb{K}))$

Supposons, pour simplifier, que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  est le corps des complexes, que  $\mathfrak{g}$  est de type  $A_n$  avec  $n \geq 3$  et que les racines simples  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  sont ordonnées de façon que le diagramme de Dynkin soit :

$$\epsilon_1 \text{ --- } \epsilon_2 \text{ --- } \epsilon_3 \text{ --- } \dots \text{ --- } \epsilon_{n-1} \text{ --- } \epsilon_n$$

Considérons la décomposition particulière de l'élément de plus grande longueur de  $W$  suivante :

$$w_0 = s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_j} \circ s_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_n} \circ s_{\epsilon_{n-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_1}) \quad (2.17)$$

On vérifie facilement (longueur de la décomposition et nombre d'inversions cohérents) que cette décomposition est réduite et on note  $Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{2,3}, \dots, Y_{1,j+1}, Y_{2,j+1}, \dots, Y_{j,j+1}, \dots, Y_{1,n+1}, Y_{2,n+1}, \dots, Y_{n,n+1}$  les générateurs canoniques de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  construits comme ci-dessus au moyen de cette décomposition réduite. On observe que :

**Lemme 2.2.1.**

1.  $Y_{j,j+1} = E_{\epsilon_j}$  pour  $1 \leq j \leq n$ .
2.  $Y_{i,j+1} = Y_{i,j} Y_{j,j+1} - q^{-1} Y_{j,j+1} Y_{i,j}$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ .

**Démonstration :**

1. Cela résulte de l'égalité

$$s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_j} \circ s_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_2})(\epsilon_1) = \epsilon_j.$$

2. Rappelons que

$$Y_{i,j+1} = T_{\epsilon_1} \circ (T_{\epsilon_2} \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_{j-1}} \circ T_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_1}) \circ (T_{\epsilon_j} \circ T_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+2-i}})(E_{\epsilon_{j+1-i}}).$$

Comme  $\{\epsilon_{j-i}, \dots, \epsilon_1\} \perp \{\epsilon_j, \dots, \epsilon_{j+2-i}\}$  et  $\{\epsilon_{j-i-1}, \dots, \epsilon_1\} \perp \epsilon_{j+1-i}$ ,  $Y_{i,j+1}$  est égal à

$$T_{\epsilon_1} \circ (T_{\epsilon_2} \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_{j-1}} \circ T_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+1-i}}) \circ (T_{\epsilon_j} \circ T_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+2-i}}) \circ T_{\epsilon_{j-i}}(E_{\epsilon_{j+1-i}})$$

avec, par [Jan96, section 8.16],

$$T_{\epsilon_{j-i}}(E_{\epsilon_{j+1-i}}) = E_{\epsilon_{j-i}} E_{\epsilon_{j+1-i}} - q^{-1} E_{\epsilon_{j+1-i}} E_{\epsilon_{j-i}}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} & s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_{j-1}} \circ s_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_{j+1-i}}) \circ (s_{\epsilon_j} \circ s_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_{j+2-i}})(\epsilon_{j+1-i}) \\ &= s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_{j-1}} \circ s_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_{j+1-i}})(\epsilon_{j+1-i} + \epsilon_{j+2-i} + \dots + \epsilon_j) \\ &= s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_{j-2}} \circ s_{\epsilon_{j-3}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_1})(\epsilon_j) = \epsilon_j. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$T_{\epsilon_1} \circ (T_{\epsilon_2} \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_{j-1}} \circ T_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+1-i}}) \circ (T_{\epsilon_j} \circ T_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+2-i}})(E_{\epsilon_{j+1-i}})$$

$$= E_{\epsilon_j} = Y_{j,j+1}.$$

Comme  $\{\epsilon_j, \epsilon_{j-1}, \dots, \epsilon_{j+2-i}\} \perp \epsilon_{j-i}$ , on a

$$\begin{aligned} & T_{\epsilon_1} \circ (T_{\epsilon_2} \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_{j-1}} \circ T_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+1-i}}) \circ (T_{\epsilon_j} \circ T_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+2-i}})(E_{\epsilon_{j-i}}) \\ &= T_{\epsilon_1} \circ (T_{\epsilon_2} \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_{j-1}} \circ T_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j+1-i}})(E_{\epsilon_{j-i}}) = Y_{i,j}. \end{aligned}$$

□

Notons  $v$  une racine carré de  $q$  et, comme dans [AD08], notons  $e_{i,j}$  les générateurs de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  construits par H. Yamane [Yam89]. On sait que :

- $e_{j,j+1} = E_{\epsilon_j}$  pour  $1 \leq j \leq n$ .
- $e_{i,j+1} = ve_{i,j}e_{j,j+1} - v^{-1}e_{j,j+1}e_{i,j}$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ .

Ceci implique :

- $v^{i-j}e_{i,j+1} = (v^{i-j+1}e_{i,j})e_{j,j+1} - e_{j,j+1}q^{-1}(v^{i-j+1}e_{i,j})$  pour  $1 \leq i < j \leq n$  et, d'après le lemme précédent, on en déduit (par récurrence sur  $j-i$ ) :

**Lemme 2.2.2.**

$$Y_{i,j+1} = v^{i-j}e_{i,j+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Considérons un entier  $p$  avec  $1 \leq p \leq n$  et posons

$$w = (s_{\epsilon_p} \circ s_{\epsilon_{p-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_1}) \circ (s_{\epsilon_{p+1}} \circ s_{\epsilon_p} \circ \dots \circ s_{\epsilon_2}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_n} \circ s_{\epsilon_{n-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_{n-p+1}}) \quad (2.18)$$

Si  $p < j < n$ , on observe que

$$\{\epsilon_{j-p}, \dots, \epsilon_1\} \perp \{\epsilon_{j+1}, \dots, \epsilon_{j+1-p+1}, \dots, \epsilon_n, \dots, \epsilon_{n-p+1}\}.$$

Ceci implique

$$w_0 = w_1 \circ w \circ w_2$$

avec

$$w_1 = s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_{p-1}} \circ s_{\epsilon_{p-2}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_1}),$$

$$w_2 = s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (s_{\epsilon_{n-p}} \circ s_{\epsilon_{n-p-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_1}).$$

Si  $d, d_1, d_2$  représentent le nombre de réflexions simples qui apparaissent respectivement dans les décompositions de  $w, w_1, w_2$  donnés ci-dessus, on observe que  $d + d_1 + d_2$  est égal à la longueur de  $w_0$ . On peut alors vérifier (en utilisant les calculs effectués pour la démonstration du lemme précédent) :

**Lemme 2.2.3.**

1. (2.18) est une décomposition réduite de  $w$ .
2. Si  $p \leq j \leq n$ , alors

$$T_{w_1} \circ (T_{\epsilon_p} \circ T_{\epsilon_{p-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_{j-1}} \circ T_{\epsilon_{j-2}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j-p+1}})(E_{\epsilon_j}) = Y_{j,j+1}.$$

3. Si  $p \leq j \leq n$  et  $1 \leq i \leq p$ , alors

$$T_{w_1} \circ (T_{\epsilon_p} \circ T_{\epsilon_{p-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_1}) \circ \dots \circ (T_{\epsilon_j} \circ T_{\epsilon_{j-1}} \circ \dots \circ T_{\epsilon_{j-i+2}})(E_{\epsilon_{j-i+1}}) = Y_{i,j+1}.$$

Ceci implique que les générateurs canoniques  $X_{i,j+1}$  de  $U[w]$  vérifient

$$X_{i,j+1} = T_{w_1}^{-1}(Y_{i,j+1})$$

pour  $p \leq j \leq n$  et  $1 \leq i \leq p$ .

Comme les générateurs de Yamane  $e_{i,j+1}$  ( $p \leq j \leq n$ ,  $1 \leq i \leq p$ ) vérifient les relations de commutations des matrices quantiques, il résulte du lemme 2.2.2 que les générateurs  $Y_{i,j+1}$  vérifient la même propriété. Comme  $T_{w_1}^{-1}$  est un automorphisme de  $U_q(\mathfrak{g})$  et comme les monômes ordonnés en les variables  $X_{i,j+1}$  (où l'ordre de ces variables est défini par l'ordre lexicographique inverse sur les indices  $(i, j+1)$ ) forment une base de  $U[w]$ , on en conclut que

**Proposition 2.2.4.**

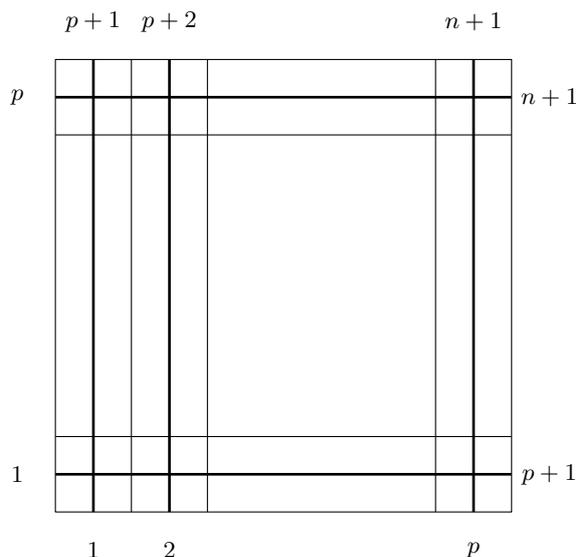
$U[w]$  est l'algèbre  $O_q(M_{p,m}(\mathbb{K}))$ , avec  $m = n - p + 1$ , dont les générateurs canoniques sont les variables  $X_{i,j+1}$  ( $p \leq j \leq n$ ,  $1 \leq i \leq p$ ).

**Remarque 2.2.5 (Notion de diagramme dans ce cas).**

Posons  $m = n - p + 1$ , de sorte que  $t = l(w) = mp$ , et considérons le tableau rectangulaire consistant en  $p \times m$  boîtes numérotées de 1 à  $mp$  comme dans la figure suivante.

1	$p + 1$		$(m - 1)p + 1$ ↓
$p$	$2p$		$mp$

Comme dans A. Postnikov [Pos06, section 19], remplissons ce tableau avec  $p$  brins horizontaux traversant les lignes de la gauche vers la droite et  $m$  brins verticaux traversant les colonnes du haut vers le bas, et numérotions les extrémités de ces brins de 1 à  $n + 1$  comme dans la figure suivante.



Identifions, comme d'habitude,  $W$  au groupe symétrique  $\mathcal{S}_{n+1}$  de manière que chaque  $s_{\epsilon_i}$  soit la transposition  $(i, i+1)$ . Le permutation définie par le "pipe dream" construit ci-dessus est alors égale à  $v = w^{-1}$ .  
 Considérons un diagramme  $\Delta$ , c'est à dire un sous-ensemble de  $\llbracket 1, mp \rrbracket$  (définition 1.2.1). Colorions en noir les cases du tableau dont le numéro est dans  $\Delta$  et remplaçons, à l'intérieur des boîtes non coloriées, les croisements par des coudes :



Si  $\Delta = \{i_1 < \dots < i_l\}$ , on observe que la permutation définie par le nouveau "pipe dream" ainsi construit est égale à  $s_{\epsilon_{i_l}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_{i_1}} = v^\Delta$  (cf section 1.2.1).

On observe que :

1.  $v$  est l'élément de  $W$  correspondant au pipe dream complet  $\Delta = \llbracket 1, t \rrbracket$ .
2.  $Id$  est l'élément de  $W$  correspondant au pipe dream vide  $\Delta = \emptyset$ .

# Chapitre 3

## Effacement des dérivations dans $U[w]$

L'algorithme d'effacement des dérivations, pour une algèbre  $R$  de type fini vérifiant des hypothèses convenables ([Cau03a]), consiste en une succession de changements de variables dans  $\text{Frac}(R)$ . Cette méthode, introduite par G. Cauchon ([Cau03a]), permet d'obtenir une description de la  $H$ -stratification de K. R. Goodearl et E. S. Letzter ([GL98]) des spectres premier et primitif de  $R$  en terme d'objets combinatoires (remplissages de tableaux par des cases noires et blanches) appelés *diagrammes de Cauchon*. Ces diagrammes ont été explicitement calculés pour l'algèbre des matrices quantiques par G. Cauchon ([Cau03b]), ils ont été utilisés pour décrire le spectre  $H$ -premier (ensemble des idéaux premiers invariants sous l'action d'un tore  $H$ ) de la grassmannienne quantique par S. Launois, T. Lenagan et L. Rigal ([LLR08]).

La première partie 3.1 a pour but d'introduire les notations nécessaires à la construction de l'algorithme d'effacement des dérivations dans  $U[w]$  et de rappeler les résultats standards liés à cet algorithme ([Cau03a]).

La partie 3.2 présente de nouveaux résultats liés à l'effacement des dérivations pour les idéaux premiers  $H$ -invariants.

### 3.1 Contexte de l'algorithme d'effacement des dérivations

#### 3.1.1 Conventions

Dans cette partie, on utilise les conventions de la section 2.2.1 et on pose  $R = U[w]$ . Pour simplifier les notations, on pose

- $X_i = X_{\beta_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , de sorte que  $R = \mathbb{K} \langle X_1, \dots, X_t \rangle$ . De plus,  $X_1, \dots, X_t$  sont appelés les générateurs canoniques (par rapport à la décomposition réduite (2.14)) de  $R$ .
- Rappelons (section 2.2.1) que  $R$  est  $\mathbb{Z}\Pi$ -graduée, que pour tout élément homogène  $u$  de degré  $\gamma$  dans  $R$  et pour tout  $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$ , on a  $h_\rho(u) = q^{-(\rho, \gamma)}u$ , de sorte que l'application  $h_\rho : u \mapsto K_\rho \cdot u$  est dans  $\text{Aut}(R)$ , le groupe des automorphismes de l'algèbre  $R$ .
- Notons  $H = \{h_\rho \mid \rho \in \mathbb{Z}\Pi\}$  et observons que c'est un sous-groupe abélien de  $\text{Aut}(R)$ .
- Pour tout  $(i, j) \in (\llbracket 1, t \rrbracket)^2$ , posons  $\lambda_{i,j} = q^{-(\beta_i, \beta_j)}$ ,  $q_i = \lambda_{i,i} = q^{-\|\beta_i\|^2}$ , et observons que  $q_i$  n'est pas une racine de l'unité.
- Si  $1 \leq i < j \leq t$ , la formule de Levendorskii-Soibelman (section 2.2.1) peut être écrite :

$$X_j X_i - \lambda_{j,i} X_i X_j = P_{j,i} \text{ où} \quad (3.1)$$

$$P_{j,i} = \sum_{\underline{a} = (a_{i+1}, \dots, a_{j-1})} c_{\underline{a}} X_{i+1}^{a_{i+1}} \dots X_{j-1}^{a_{j-1}}. \quad (3.2)$$

avec  $\underline{a} \in \mathbb{N}^{j-i-1}$ ,  $c_{\underline{a}} \in \mathbb{K}$ , et  $c_{\underline{a}} \neq 0$  pour un nombre fini de  $\underline{a}$ . De plus,  $P_{j,i}$  est homogène de degré  $\beta_i + \beta_j$  de sorte que, si  $c_{\underline{a}} \neq 0$ , on a  $a_{i+1}\beta_{i+1} + \dots + a_{j-1}\beta_{j-1} = \beta_i + \beta_j$ . Il en résulte, en particulier que, lorsque  $j = i + 1$ , on a  $P_{j,i} = 0$ .

- Puisque  $\beta_i$  et  $\beta_j$  sont des racines positives,  $\beta_i + \beta_j$  est non nul. Donc, si  $c_{\underline{a}} \neq 0$ , alors  $\underline{a}$  est non nul.

- Il résulte des points précédents que les générateurs  $X_1, \dots, X_t$  de  $R$  vérifient les égalités et les hypothèses de 6.1.1. de ([Cau03a], section 6.1.).
- De plus, comme les monômes ordonnés  $X^{\underline{a}} := X_1^{a_1} \dots X_t^{a_t}$ ,  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_t) \in \mathbb{N}^t$ , forment une base de  $R$  (cf section 2.2.1, il résulte de ([Cau03a], propositions 6.1.1. et 6.1.2.) que  $R$  vérifie les conventions de ([Cau03a], section 3.1.). En particulier,  $R$  est une extension de Ore itérée du corps de base  $\mathbb{K}$  (de la forme  $R = \mathbb{K}[X_1][X_2; \sigma_2, \delta_2] \dots [X_t; \sigma_t, \delta_t]$ ) et donc,  $R$  est noetherien.
- On note  $F = \text{Fract}(R)$  le corps des fractions de  $R$ .
- Par ([Cau03a], proposition 6.1.1.), on obtient aussi que  $R$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par les "variables"  $X_1, \dots, X_t$  soumises aux relations (3.1).
- Pour tout  $l \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on pose  $h_l := h_{\beta_l} \in H$ , et on observe que, si  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $h_l(X_i) = \lambda_{l,i} X_i$ .
- Comme chaque  $X_i$  est homogène, c'est un  $H$ -vecteur propre et, puisque  $\lambda_{1,1} = q^{-(\beta_1, \beta_1)}$  n'est pas une racine de l'unité, l'hypothèse 4.1.2. de [Cau03a] est vérifiée. Comme chaque  $\lambda_{i,j}$  est une puissance de  $q$ , l'hypothèse 4.1.1. de [Cau03a] est aussi vérifiée. Comme expliqué dans [Cau03a] (preuve du lemme 4.2.2.), ceci implique que tout idéal premier de  $R$  est complètement premier.
- Rappelons que chaque automorphisme  $h \in H$  peut être prolongé en un (unique) automorphisme (encore noté  $h$ ) de  $F$ , de sorte que  $H$  peut être vu comme un sous-groupe de  $\text{Aut}(F)$ .

### 3.1.2 Les algèbres $R^{(m)}$

Rappelons ([Cau03a], section 3.) que, pour tout  $m \in \llbracket 2, t+1 \rrbracket$ , il existe une famille  $(X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)})$  de nouvelles "variables" de  $F$ , appelées générateurs canoniques (pour la décomposition réduite (2.14)) de l'algèbre  $R^{(m)} = \mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)} \rangle$ , et qui vérifient les propriétés suivantes :

- Si  $1 \leq i < j \leq t$ , on a la formule simplifiée de Levendorskii-Soibelman suivante :

$$X_j^{(m)} X_i^{(m)} - \lambda_{j,i} X_i^{(m)} X_j^{(m)} = P_{j,i}^{(m)} \quad (3.3)$$

avec

$$\diamond \quad m \leq j \Rightarrow P_{j,i}^{(m)} = 0. \quad (3.4)$$

$$\diamond \quad j < m \Rightarrow P_{j,i}^{(m)} = \sum_{\underline{a} = (a_{i+1}, \dots, a_{j-1})} c_{\underline{a}} (X_{i+1}^{(m)})^{a_{i+1}} \dots (X_{j-1}^{(m)})^{a_{j-1}} \quad (3.5)$$

où les coefficients  $c_{\underline{a}}$  sont les mêmes que dans (3.2).

(Donc  $P_{j,i}^{(m)} = 0$  dans le cas  $i+1 = j < m$  et, dans le cas général, si  $c_{\underline{a}} \neq 0$ , on a  $a_{i+1}\beta_{i+1} + \dots + a_{j-1}\beta_{j-1} = \beta_i + \beta_j$ , de sorte que  $\underline{a}$  est non nul.)

- Ceci implique que les générateurs  $X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)}$  de  $R^{(m)}$  vérifient toujours les égalités de l'hypothèse 6.1.1. de ([Cau03a], section 6.1.).
- Les monômes ordonnés  $(X^{(m)})^{\underline{a}} := (X_1^{(m)})^{a_1} \dots (X_t^{(m)})^{a_t}$ ,  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_t) \in \mathbb{N}^t$ , forment une base de  $R^{(m)}$ . Donc  $R^{(m)}$  vérifie toujours les conventions de ([Cau03a], section 3.1.). En particulier,  $R^{(m)}$  est une extension de Ore itérée sur le corps de base  $\mathbb{K}$ , et donc  $R^{(m)}$  est noetherien.
- On a  $\text{Fract}(R^{(m)}) = \text{Fract}(R) = F$ .
- Par ([Cau03a], proposition 6.1.1.),  $R^{(m)}$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par les "variables"  $X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)}$  soumises aux relations (3.3).
- Pour tout  $\rho$  dans le réseau des racines  $\mathbb{Z}\Pi$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a toujours  $h_\rho(X_i^{(m)}) = q^{-(\rho, \beta_i)} X_i^{(m)}$ . Ceci implique que  $h_\rho(R^{(m)}) = R^{(m)}$ . Donc  $H$  peut toujours être vu comme un sous-groupe de  $\text{Aut}(R^{(m)})$  et tout  $X_i^{(m)}$  est un  $H$  vecteur propre. Si  $l$  et  $i$  sont dans  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $h_l(X_i^{(m)}) = \lambda_{l,i} X_i^{(m)}$  et, comme ci-dessus, ceci implique que  $R^{(m)}$  vérifie les hypothèses 4.4.2. et 4.4.1. de [Cau03a]. Comme expliqué dans ([Cau03a], preuve du lemme 4.2.2), ceci implique que tout idéal premier de  $R^{(m)}$  est complètement premier.
- Si  $u \in F$  et si  $\gamma \in \mathbb{Z}\Pi$ , on dit que  $u$  est homogène de degré  $\gamma$ , si  $h_\rho(u) = q^{-(\rho, \gamma)} u$  pour tout  $\rho$  de  $\mathbb{Z}\Pi$ . Donc, par exemple, tout  $X_i^{(m)}$  est homogène de degré  $\beta_i$ .
- Si  $u_1, \dots, u_r$  sont aussi homogènes de même degré  $\gamma$ , alors toute combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_r$  (avec coefficients dans  $\mathbb{K}$ ) est homogène de degré  $\gamma$ .

- Clairement, si  $u_1$  est homogène de degré  $\gamma_1$  et  $u_2$  est homogène de degré  $\gamma_2$ , alors  $u_1 u_2$  est homogène de degré  $\gamma_1 + \gamma_2$ .
- De même, si  $u$  est non nul et de degré  $\gamma$ , alors  $u^{-1}$  est homogène de degré  $-\gamma$ .
- Donc, si  $u_1, \dots, u_r$  sont non nuls et homogènes de degré  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  respectivement, si  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ , alors  $u^{\underline{a}} := u_1^{a_1} \dots u_r^{a_r}$  est homogène de degré  $a_1 \gamma_1 + \dots + a_r \gamma_r$ .
- Pour tout  $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on note  $\delta_j^{(m)}$  la  $h_j$ -dérivation à gauche de  $R^{(m)}$  définie par  $X_j^{(m)}$ . Ceci signifie que, pour tout  $a \in R^{(m)}$ ,  $\delta_j^{(m)}(a) := X_j^{(m)} a - h_j(a) X_j^{(m)}$ .
- Si  $j \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a

$$h_j(\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle) = \mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle,$$

$$\delta_j^{(m)}(\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle) \subset \mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle.$$

Donc,  $h_j$  induit un automorphisme, toujours noté  $h_j$ , de l'algèbre  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$ . C'est l'unique automorphisme de  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$  qui vérifie  $h_j(X_i^{(m)}) = \lambda_{j,i} X_i^{(m)}$  pour tout  $i$ .

De même,  $\delta_j^{(m)}$  induit une  $h_j$ -dérivation à gauche de  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$ , toujours notée  $\delta_j^{(m)}$ . Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Si  $1 \leq i < j$ , on a  $\delta_j^{(m)}(X_i^{(m)}) = P_{j,i}^{(m)}$ .  
Ceci implique que  $\delta_j^{(m)}$  est nulle sur  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$  et donc, que  $X_j^{(m)} a = h_j(a) X_j^{(m)}$  pour tout  $a$  dans  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$  dès que  $j \geq m$ .
2.  $\delta_j^{(m)}$  est localement nilpotente sur  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$ .
3.  $R^{(m)}$  est une extension itérée de la forme :

$$R^{(m)} = \mathbb{K}[X_1^{(m)}][X_2^{(m)}; h_2, \delta_2^{(m)}] \dots [X_{m-1}^{(m)}; h_{m-1}, \delta_{m-1}^{(m)}] [X_m^{(m)}; h_m] \dots [X_t^{(m)}; h_t].$$

- Pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $X_i^{(t+1)} = X_i$ , de sorte que  $R^{(t+1)} = R$ .

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que  $m \in \llbracket 2, t \rrbracket$ .

- Rappelons que  $q_m = \lambda_{m,m}$  n'est pas une racine de l'unité, ce qui permet de définir des  $q$ -entiers  $[l]_{q_m}$  (resp.  $q$ -factorielles)  $[l]_{q_m}!$  pour  $l \in \mathbb{N}$ , comme dans ([Cau03a], section 2).
- Pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a

$$1. \quad m \leq i \Rightarrow X_i^{(m)} = X_i^{(m+1)}. \text{ En particulier, on a } X_m^{(m)} = X_m^{(m+1)}.$$

2.

$$i < m \Rightarrow X_i^{(m)} = X_i^{(m+1)} + \sum_{l=1}^{+\infty} C_l^{(m+1)} (X_m^{(m+1)})^{-l}$$

avec

$$C_l^{(m+1)} = \frac{(1 - q_m)^{-l}}{[l]_{q_m}!} \lambda_{m,i}^{-l} (\delta_m^{(m+1)})^l (X_i^{(m+1)}).$$

- On observe que, comme  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$  est  $\delta_m^{(m+1)}$ -stable, on a  $C_l^{(m+1)} \in \mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$  et, comme  $\delta_m^{(m+1)}$  est localement nilpotente sur  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$ , seuls un nombre fini de  $C_l^{(m+1)}$  sont non nuls.
- Si  $i < m$  et  $X_m^{(m+1)} X_i^{(m+1)} - \lambda_{m,j} X_i^{(m+1)} X_m^{(m+1)} = P_{m,i}^{(m+1)} = 0$ , alors  $\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)}) = 0$  et donc,  $X_i^{(m)} = X_i^{(m+1)}$ .
- Il existe un unique homomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbre

$$\Theta^{(m)} : \mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)} \rangle$$

qui vérifie  $\Theta^{(m)}(X_i^{(m+1)}) = X_i^{(m)}$  pour  $1 \leq i \leq m-1$ . En outre, on peut démontrer que  $\Theta^{(m)}$  est un isomorphisme.

- Quand  $m = 2$ , on pose
  1.  $Z_i = X_i^{(2)}$  pour  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .
  2.  $\bar{R} = R^{(2)}$ .
- $\bar{R} = \mathbb{K} \langle Z_1, \dots, Z_t \rangle$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par les variables  $Z_1, \dots, Z_t$  soumises aux relations :

$$(1 \leq i < j \leq t) \Rightarrow Z_j Z_i = \lambda_{j,i} Z_i Z_j \quad (3.6)$$

- Pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $X_i^{(2)} = \dots = X_i^{(i+1)} = Z_i$ .
- $S_m = \{(X_m^{(m+1)})^l \mid l \in \mathbb{N}\} = \{(X_m^{(m)})^l \mid l \in \mathbb{N}\}$  est un système multiplicatif d'éléments réguliers dans  $R^{(m)}$  et dans  $R^{(m+1)}$ . Il satisfait la condition de Ore (des deux côtés) dans chacun de ces anneaux et on a  $R^{(m)} S_m^{-1} = R^{(m+1)} S_m^{-1}$ .

### 3.1.3 Spectres premier et $H$ -premier de $R^{(m)}$ , diagrammes admissibles

Considérons un entier  $m \in \llbracket 2, t+1 \rrbracket$ . Comme d'habitude, on note  $\text{Spec}(R^{(m)})$  (resp.  $H\text{-Spec}(R^{(m)})$ ) l'ensemble de tous les idéaux premiers (resp. premiers  $H$ -invariants) de  $R^{(m)}$ . Rappelons (voir partie 3.1.2) que tout idéal premier de  $R^{(m)}$  est complètement premier. Si  $m \in \llbracket 2, t \rrbracket$ , on note

$$\phi_m : \text{Spec}(R^{(m+1)}) \rightarrow \text{Spec}(R^{(m)})$$

l'injection canonique définie dans ([Cau03a], section 4.3).

Si  $m' \leq m+1$  et si  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R^{(m+1)})$ , alors  $\mathcal{P}' = \phi_{m'} \circ \dots \circ \phi_m(\mathcal{P})$  est appelé l'image canonique de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Spec}(R^{(m')})$ . (Si  $m' = m+1$ , cette image canonique est  $\mathcal{P}$  lui-même.)

On notera

$$\phi := \phi_2 \circ \dots \circ \phi_t : \text{Spec}(R) (= \text{Spec}(R^{(t+1)})) \rightarrow \text{Spec}(\bar{R}) (= \text{Spec}(R^{(2)})).$$

Cette application est injective. On l'appelle l'injection canonique de  $\text{Spec}(R)$  vers  $\text{Spec}(\bar{R})$ .

Rappelons maintenant les propriétés principales des applications  $\phi_m$ .

**Proposition 3.1.1.**

Soit  $\mathcal{P}^{(m+1)}$  un idéal premier de  $\text{Spec}(R^{(m+1)})$ . On pose  $\mathcal{P}^{(m)} = \phi_m(\mathcal{P}^{(m+1)})$ .

1. Si  $X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{P}^{(m+1)}$ , alors  $\mathcal{P}^{(m+1)} \cap S_m = \emptyset$  et

$$\mathcal{P}^{(m)} = R^{(m)} \cap \mathcal{P}^{(m+1)} S_m^{-1}.$$

Dans ce cas,  $X_m^{(m)} = X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{P}^{(m)}$ .

2. Si  $X_m^{(m+1)} \in \mathcal{P}^{(m+1)}$ , il existe un unique homomorphisme d'algèbre  $g : R^{(m)} \rightarrow R^{(m+1)}/\mathcal{P}^{(m+1)}$  qui vérifie  $g(X_i^{(m)}) = X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}^{(m+1)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , et  $\mathcal{P}^{(m)} = \text{Ker}(g)$ .

Dans ce cas,  $X_m^{(m)} = X_m^{(m+1)} \in \mathcal{P}^{(m)}$ .

3. Pour tout  $h \in H$ , on a  $h(\mathcal{P}^{(m)}) = \phi_m(h(\mathcal{P}^{(m+1)}))$  ([Cau03a], Lemme 5.5.5.) de sorte que, par injectivité de  $\phi_m$ ,  $\mathcal{P}^{(m+1)}$  est  $H$ -invariant si et seulement si  $\mathcal{P}^{(m)}$  est  $H$ -invariant.

On peut à présent définir la notion de diagramme de Cauchon (ou admissible) qui nous intéresse. On rappelle qu'un diagramme  $\Delta$  est, par définition (1.2.1), un sous ensemble quelconque de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ .

**Définition 3.1.2.**

Un diagramme  $\Delta$  est dit de Cauchon (ou admissible) (pour la décomposition réduite (2.14)) s'il existe un idéal premier  $\mathcal{P}$  de  $R (= R^{(t+1)})$  dont l'image canonique  $\mathcal{P}^{(2)}$  dans  $\text{Spec}(\bar{R}) (= \text{Spec}(R^{(2)}))$  vérifie :

$$\mathcal{P}^{(2)} \cap \{Z_i \mid 1 \leq i \leq t\} = \{Z_i \mid i \in \Delta\}.$$

Par ([Cau03a], proposition 5.5.1.), on a

**Proposition 3.1.3.**

Considérons un diagramme  $\Delta$  et notons  $\mathcal{P}_\Delta^{(2)} = (\{Z_i \mid i \in \Delta\})$  l'idéal engendré par les variables  $Z_i$  avec  $i \in \Delta$ .

1.  $\mathcal{P}_\Delta^{(2)} \in H - \text{Spec}(R^{(2)})$ .
2. Réciproquement, pour tout  $\mathcal{Q} \in H - \text{Spec}(R^{(2)})$ , il existe un (unique) diagramme  $\Delta$  tel que  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_\Delta^{(2)}$ , plus précisément  $\Delta = \{i \in \llbracket 1, t \rrbracket \mid Z_i \in \mathcal{Q}\}$ .

La caractérisation suivante nous servira à déterminer les diagrammes de Cauchon dans le cas  $w = w_0$ .

**Proposition 3.1.4.**

1. Un diagramme  $\Delta$  est de Cauchon si et seulement si il existe  $\mathcal{P}_\Delta \in \text{Spec}(R)$  ( $= \text{Spec}(R^{(t+1)})$ ) tel que

$$\mathcal{P}_\Delta^{(2)} = \phi(\mathcal{P}_\Delta) \quad (\phi := \phi_2 \circ \dots \circ \phi_t).$$

S'il en est ainsi,  $\mathcal{P}_\Delta$  est unique.

2. L'application  $\Delta \mapsto \mathcal{P}_\Delta$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes de Cauchon dans l'ensemble  $H - \text{Spec}(R)$  ( $= H - \text{Spec}(R^{(t+1)})$ ).

**Démonstration :**

1. On sait ([Cau03a], début du paragraphe 5.5) que  $\mathcal{P}_\Delta^{(2)}$  vérifie l'égalité de la définition 3.1.2. Par suite, l'existence de  $\mathcal{P}_\Delta$  entraîne que  $\Delta$  est de Cauchon. Réciproquement, si  $\Delta$  est de Cauchon, l'existence de  $\mathcal{P}_\Delta$  résulte de [Cau03a, Théorème 5.5.1]. De plus,  $\mathcal{P}_\Delta$  est unique par l'injectivité de  $\phi$ .
2. Si  $\Delta$  est de Cauchon, alors  $\mathcal{P}_\Delta$  est  $H$ -invariant par le point 3. de la proposition 3.1.1 (puisque  $\mathcal{P}_\Delta^{(2)} = \phi(\mathcal{P}_\Delta)$  est clairement  $H$ -invariant). Donc,  $\Delta \mapsto \mathcal{P}_\Delta$  est une application de l'ensemble des diagrammes de Cauchon dans  $H - \text{Spec}(R)$ . Elle est injective car l'application  $\Delta \mapsto \mathcal{P}_\Delta^{(2)}$  est injective. Si  $\mathcal{P} \in H - \text{Spec}(R)$ , alors, par le point 3. de la proposition 3.1.1,  $\phi(\mathcal{P}) \in H - \text{Spec}(R^{(2)})$ . Donc, par la proposition 3.1.3,  $\phi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_\Delta^{(2)}$  avec  $\Delta$  diagramme de Cauchon tel que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Delta$ . □

On a enfin, par [Cau03a, Théorèmes 5.1.1, 5.5.1 et 5.5.2] :

**Proposition 3.1.5.**

Pour tout diagramme  $\Delta$  (pour la décomposition réduite (2.14)), on note :

$$\text{Spec}_\Delta(\overline{R}) := \{\mathcal{Q} \in \text{Spec}(\overline{R}) \mid \mathcal{Q} \cap \{Z_{\beta_1}, \dots, Z_{\beta_t}\} = \{Z_\beta \mid \beta \in \Delta\}\}.$$

1. Si  $\Delta$  est un diagramme de Cauchon, on a  $\phi(\text{Spec}_\Delta(R)) = \text{Spec}_\Delta(\overline{R})$  et  $\phi$  induit un homéomorphisme bi-croissant de  $\text{Spec}_\Delta(R)$  sur  $\text{Spec}_\Delta(\overline{R})$ .
2. La famille  $\text{Spec}_\Delta(R)$  (avec  $\Delta$  diagramme de Cauchon) coïncide avec la  $H$ -stratification de Goodearl-Letzter de  $\text{Spec}(R)$  ([BG02]).

## 3.2 Nouveaux résultats sur les idéaux premiers $H$ -invariants

Cette section est consacrée à la démonstration de deux propositions (propositions 3.2.1 et 3.2.2) qui permettent par la suite d'établir les théorèmes fondamentaux. Si la première proposition se démontre sans trop de difficultés (section 3.2.1), la seconde est le résultat d'un enchaînement de lemmes et de propositions (sections 3.2.2, 3.2.3 et 3.2.4) qui ne seront pas réutilisés en dehors de ce chapitre. Ces résultats sont techniques et utilisent de façon profonde la théorie de l'effacement des dérivations.

Dans cette partie, on considère un entier  $m \in \llbracket 2, t+1 \rrbracket$  et on note  $\mathcal{P}^{(m)}$  un idéal premier  $H$ -invariant. On pose  $A^{(m)} = R^{(m)}/P^{(m)}$  et on observe que cette algèbre est un anneau noetherien intègre (puisque  $R^{(m)}$  est noetherienne et que  $P^{(m)}$  est complètement premier). Notons  $D_m = \text{Frac}(A^{(m)})$  son corps des fractions,  $f_m : R^{(m)} \rightarrow A^{(m)}$  l'homomorphisme canonique et, pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , notons  $x_i^{(m)} = f_m(X_i^{(m)})$  l'image canonique de  $X_i^{(m)}$  dans  $A^{(m)}$ . Si  $h$  est un élément du groupe  $H$ , on a (par définition)  $h(\mathcal{P}^{(m)}) = \mathcal{P}^{(m)}$ , de sorte que  $h$  induit un automorphisme de l'algèbre  $A^{(m)}$ , noté  $\overline{h}$ , qui vérifie  $\overline{h} \circ f_m = f_m \circ h$ . Cet automorphisme induit un automorphisme, toujours noté  $\overline{h}$ , du corps des fractions  $D_m$ .

### 3.2.1 Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{P}^{(m)}$ soit dans $Im(\phi_m)$

Supposons que  $m \leq t$  et rappelons (section 3.1.2) que  $R^{(m)}$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par les variables  $X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)}$  soumises aux relations (3.3) :

$$X_j^{(m)} X_i^{(m)} - \lambda_{j,i} X_i^{(m)} X_j^{(m)} = P_{j,i}^{(m)}(X_{i+1}^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)})$$

pour  $i < j$ , avec  $P_{j,i}^{(m)}(X_{i+1}^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)}) \in \mathbb{K} \langle X_{i+1}^{(m)}, \dots, X_{j-1}^{(m)} \rangle$ .

**Proposition 3.2.1.**

$\mathcal{P}^{(m)} \in Im(\phi_m)$  si et seulement si une des deux conditions suivantes est satisfaite

- a)  $X_m^{(m)} \notin \mathcal{P}^{(m)}$ .
- b)  $X_m^{(m)} \in \mathcal{P}^{(m)}$  et  $\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}$  pour  $1 \leq i \leq m-1$ .

**Démonstration :** Supposons que  $\mathcal{P}^{(m)} \in Im(\phi_m)$ , de sorte que  $\mathcal{P}^{(m)} = \phi_m(\mathcal{P}^{(m+1)})$  avec  $\mathcal{P}^{(m+1)} \in Spec(R^{(m+1)})$ , et supposons que la condition a) n'est pas satisfaite. Ceci implique que  $\mathcal{P}^{(m)} = ker(g)$  où  $g : R^{(m)} \rightarrow R^{(m+1)}/\mathcal{P}^{(m+1)}$  est l'homomorphisme qui transforme chaque  $X_i^{(m)}$  en  $x_i^{(m+1)} = X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}^{(m+1)}$ . Considérons un entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ .

Rappelons que  $\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)}) = \bar{P}_{m,i}^{(m+1)}(X_{i+1}^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)})$  et que  $\Theta^{(m)} : \mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)} \rangle$  est l'homomorphisme qui transforme chaque  $X_l^{(m+1)}$  en  $X_l^{(m)}$ . Puisque  $X_m^{(m)} \in \mathcal{P}^{(m)}$ , on a  $X_m^{(m+1)} \in \mathcal{P}^{(m+1)}$  ([Cau03a], proposition 4.3.1.) et donc,  $\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)}) \in \mathcal{P}^{(m+1)}$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned} g(\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)}))) &= g(\Theta^{(m)}(P_{m,i}^{(m+1)}(X_{i+1}^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)}))) \\ &= g(P_{m,i}^{(m+1)}(X_{i+1}^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)})) \\ &= P_{m,i}^{(m+1)}(x_{i+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)}) \\ &= P_{m,i}^{(m+1)}(X_{i+1}^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)}) [\mathcal{P}^{(m+1)}] \\ &= \delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)}) [\mathcal{P}^{(m+1)}] = 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que  $\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)})) \in ker(g) = \mathcal{P}^{(m)}$ , de sorte que la condition b) est satisfaite.

Si la condition a) est satisfaite, alors  $\mathcal{P}^{(m)} \in Im(\phi_m)$  par ([Cau03a], Lemme 4.3.1.).

Supposons que la condition b) est satisfaite. Donc, si  $1 \leq i \leq m-1$ , on a, comme précédemment,  $P_{m,i}^{(m+1)}(X_{i+1}^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)}) = \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}$ . Donc, dans  $A^{(m)} = R^{(m)}/\mathcal{P}^{(m)}$ , on a  $P_{m,i}^{(m+1)}(x_{i+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)}) = 0$ .

Puisque  $P_{m,i}^{(m)} = 0$  (voir section 3.1.2), on peut écrire  $x_m^{(m)} x_i^{(m)} - \lambda_{m,i} x_i^{(m)} x_m^{(m)} = P_{m,i}^{(m)}(x_{i+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)}) = 0 = P_{m,i}^{(m+1)}(x_{i+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)})$ .

Si  $1 \leq i \leq j-1$  avec  $j \neq m$ , on a (voir section 3.1.2)

$$x_j^{(m)} x_i^{(m)} - \lambda_{j,i} x_i^{(m)} x_j^{(m)} = P_{j,i}^{(m)}(x_{i+1}^{(m)}, \dots, x_{j-1}^{(m)}) = P_{j,i}^{(m+1)}(x_{i+1}^{(m)}, \dots, x_{j-1}^{(m)}).$$

Donc, par la propriété universelle des algèbres définies par générateurs et relations, il existe un (unique) homomorphisme  $\epsilon : R^{(m+1)} \rightarrow A^{(m)}$  qui transforme chaque  $X_l^{(m+1)}$  en  $x_l^{(m)}$ . Cet homomorphisme est surjectif et son noyau  $ker(\epsilon) = \mathcal{P}^{(m+1)}$  est un idéal premier de  $R^{(m+1)}$ . On observe que, puisque  $X_m^{(m)} \in \mathcal{P}^{(m)}$ , on a  $X_m^{(m+1)} \in \mathcal{P}^{(m+1)}$ , et que  $\epsilon$  induit un isomorphisme

$$\bar{\epsilon} : R^{(m+1)}/\mathcal{P}^{(m+1)} \rightarrow A^{(m)} = R^{(m)}/\mathcal{P}^{(m)}$$

qui transforme chaque  $x_i^{(m+1)}$  en  $x_i^{(m)}$ . Rappelons que  $f_m : R^{(m)} \rightarrow R^{(m)}/\mathcal{P}^{(m)}$  représente l'homomorphisme canonique, de sorte que  $g = (\bar{\epsilon})^{-1} \circ f_m : R^{(m)} \rightarrow R^{(m+1)}/\mathcal{P}^{(m+1)}$  est l'homomorphisme qui transforme chaque  $X_l^{(m)}$  en  $x_l^{(m+1)}$ . Comme  $ker(g) = ker(f_m) = \mathcal{P}^{(m)}$ , on conclut que  $\mathcal{P}^{(m)} = \phi_m(\mathcal{P}^{(m+1)})$ . □

**Corollaire 3.2.2.**

Supposons que  $2 \leq m \leq t+1$  et considérons un idéal  $\mathcal{Q} \in \text{Spec}(R^{(m)})$ .

Supposons que  $X_m^{(m)} \notin \mathcal{Q}$ , ...,  $X_t^{(m)} \notin \mathcal{Q}$ .

Alors il existe  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R)$  tel que  $\mathcal{Q}$  soit l'image canonique de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Spec}(R^{(m)})$ . De plus, si  $\mathcal{P}^{(2)}$  est l'image canonique de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Spec}(R^{(2)})$ , alors

$$\mathcal{P}^{(2)} \cap \{Z_m, \dots, Z_t\} = \emptyset.$$

**Démonstration :** On prouve ceci par récurrence descendante sur  $m$ .

- Si  $m = t+1$ , on a  $\mathcal{Q} \in \text{Spec}(R)$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$  vérifie les propriétés requises.
- Supposons  $2 \leq m \leq t$ . Par la proposition 3.2.1, on a  $\mathcal{Q} = \phi_m(\mathcal{Q}')$  avec  $\mathcal{Q}' \in \text{Spec}(R^{(m+1)})$ . Comme  $X_m^{(m)} \notin \mathcal{Q}$ , on a (voir section 3.1.3)  $X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{Q}'$  et, si on pose  $S_m = \{(X_m^{(m+1)})^d \mid d \in \mathbb{N}\}$ ,

$$\mathcal{Q} = R^{(m)} \cap \mathcal{Q}' S_m^{-1}.$$

Supposons  $X_j^{(m+1)} \in \mathcal{Q}'$  avec  $j \geq m$ . Comme  $X_j^{(m+1)} = X_j^{(m)}$  (voir section 3.1.2), on a  $X_j^{(m)} \in R^{(m)} \cap \mathcal{Q}' \subseteq R^{(m)} \cap \mathcal{Q}' S_m^{-1} = \mathcal{Q}$ , ce qui est faux. On a donc :

- $X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{Q}'$ .
- $X_{m+1}^{(m+1)} \notin \mathcal{Q}'$ , ...,  $X_t^{(m+1)} \notin \mathcal{Q}'$  et, par l'hypothèse de récurrence, il existe  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R)$  tel que  $\mathcal{Q}'$  soit l'image canonique de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Spec}(R^{(m+1)})$ . Ceci implique que  $\mathcal{Q} = \phi_m(\mathcal{Q}')$  est l'image canonique de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Spec}(R^{(m)})$ . De plus, encore par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathcal{P}^{(2)} \cap \{Z_{m+1}, \dots, Z_t\} = \emptyset.$$

Comme  $X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{Q}'$ , on sait ([Cau03a], proposition 5.2.1.) que  $Z_m \notin \mathcal{P}^{(2)}$ . □

### 3.2.2 Quelques propriétés de $A^{(m)}$

Pour tout entier  $j \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket$ , on pose  $\mathcal{P}^{(j)} = \phi_j \circ \dots \circ \phi_{m-1}(\mathcal{P}^{(m)})$ . Construisons d'abord dans  $A^{(m)}$  une nouvelle version de l'algorithme d'effacement des dérivations.

**Proposition 3.2.3.**

Pour tout entier  $j \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket$ , il existe une famille  $(x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)})$  dans  $D_m = \text{Frac}(A^{(m)})$  et une sous-algèbre  $A^{(j)} = \mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)} \rangle$  de  $D_m$  qui vérifient les propriétés suivantes.

1. Si  $l$  et  $i$  sont dans  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $\overline{h}_l(x_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} x_i^{(j)}$ ,  $\overline{h}_l(A^{(j)}) = A^{(j)}$  et  $\overline{h}_l$  induit, par restriction, un automorphisme ( toujours noté  $\overline{h}_l$ ) de  $A^{(j)}$ .
2. Prenons  $l \in \llbracket 1, t \rrbracket$  et notons  $d_l^{(j)}$  la  $\overline{h}_l$ -dérivation à gauche de  $A^{(j)}$  associée à  $x_l^{(j)}$  ( $d_l^{(j)}(a) = x_l^{(j)} a - \overline{h}_l(a) x_l^{(j)}$  pour tout  $a \in A^{(j)}$ ). Alors  $d_l^{(j)}(\mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle) \subset \mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$  et  $d_l^{(j)}$  est localement nilpotente sur  $\mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$ .
3. Il existe un unique homomorphisme  $f_j : R^{(j)} \rightarrow A^{(j)}$  qui transforme chaque  $X_i^{(j)}$  en  $x_i^{(j)}$  ( $1 \leq i \leq t$ ).  $f_j$  est surjectif et  $\ker(f_j) = \mathcal{P}^{(j)}$ .
4. Si  $l \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $d_l^{(j)} \circ f_j = f_j \circ \delta_l^{(j)}$  et  $\overline{h}_l \circ f_j = f_j \circ h_l$ .
5. Si  $l, e \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $\overline{h}_l \circ \overline{h}_e = \overline{h}_e \circ \overline{h}_l$  et  $\overline{h}_l \circ d_e^{(j)} = \lambda_{l,e} d_e^{(j)} \circ \overline{h}_l$ .
6. Si  $x_j^{(j+1)} = 0$ , alors  $x_i^{(j)} = x_i^{(j+1)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .
7. Si  $x_j^{(j+1)} \neq 0$ , et  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , alors

(a)  $j \leq i \Rightarrow x_i^{(j)} = x_i^{(j+1)}$ . En particulier, on a  $x_j^{(j)} = x_j^{(j+1)}$ .

(b)  $i < j \Rightarrow x_i^{(j)} = x_i^{(j+1)} + \sum_{d=1}^{+\infty} c_d^{(j+1)} (x_j^{(j+1)})^{-d}$  avec  $c_d^{(j+1)} = \frac{(1-q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} (d_j^{(j+1)})^d (x_i^{(j+1)})$ .

(On observe que, comme  $\mathbb{K} \langle x_1^{(j+1)}, \dots, x_{j-1}^{(j+1)} \rangle$  est  $d_j^{(j+1)}$ -stable, on a  $c_d^{(j+1)} \in \mathbb{K} \langle x_1^{(j+1)}, \dots, x_{j-1}^{(j+1)} \rangle$  et, comme  $d_j^{(j+1)}$  est localement nilpotente sur  $\mathbb{K} \langle x_1^{(j+1)}, \dots, x_{j-1}^{(j+1)} \rangle$ , seulement un nombre fini des  $c_d^{(j+1)}$  sont non nuls.)

### Démonstration :

Observons d'abord que, si 3. est vérifiée et si  $\overline{h}_l \circ f_j = f_j \circ h_l$  (en tant que morphismes de  $R^{(j)}$  dans  $D_m$ ) pour tout  $l$ , alors les propriétés 1. à 5. sont toutes vérifiées. En effet,

1. Pour tout  $l$  et  $i$  dans  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $\overline{h}_l(x_i^{(j)}) = \overline{h}_l \circ f_j(X_i^{(j)}) = f_j \circ h_l(X_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} f_j(X_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} x_i^{(j)}$ . Ceci implique immédiatement que  $\overline{h}_l(A^{(j)}) = A^{(j)}$  et  $\overline{h}_l$  induit, par restriction, un automorphisme de  $A^{(j)}$ .
4. Si  $P \in R^{(j)}$ , on a  $d_l^{(j)}(f_j(P)) = x_l^{(j)} f_j(P) - \overline{h}_l(f_j(P)) x_l^{(j)} = f_j(X_l^{(j)} P - h_l(P) X_l^{(j)}) = f_j \circ \delta_l^{(j)}(P)$ . Ceci démontre que  $d_l^{(j)} \circ f_j = f_j \circ \delta_l^{(j)}$ .
2. Par 4., on a  $d_l^{(j)}(\mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle) = d_l^{(j)}(f_j(\mathbb{K} \langle X_1^{(j)}, \dots, X_{l-1}^{(j)} \rangle)) = f_j(\delta_l^{(j)}(\mathbb{K} \langle X_1^{(j)}, \dots, X_{l-1}^{(j)} \rangle)) \subset f_j(\mathbb{K} \langle X_1^{(j)}, \dots, X_{l-1}^{(j)} \rangle) = \mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$ . De plus, si  $a \in \mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$ , on peut écrire  $a = f_j(P)$  avec  $P \in \mathbb{K} \langle X_1^{(j)}, \dots, X_{l-1}^{(j)} \rangle$ . Comme  $\delta_l^{(j)}$  est localement nilpotente sur  $\mathbb{K} \langle X_1^{(j)}, \dots, X_{l-1}^{(j)} \rangle$ , on a  $(\delta_l^{(j)})^r(P) = 0$  pour un certain  $r \in \mathbb{N}$ , et  $(d_l^{(j)})^r(a) = (d_l^{(j)})^r \circ f_j(P) = f_j \circ (\delta_l^{(j)})^r(P) = 0$ . Donc,  $d_l^{(j)}$  est localement nilpotente sur  $\mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$ .
5. Si  $i$  appartient à  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $\overline{h}_l \circ \overline{h}_e(x_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} \lambda_{e,i} x_i^{(j)} = \overline{h}_e \circ \overline{h}_l(x_i^{(j)})$  et, comme  $A^{(j)}$  est engendrée par les éléments  $x_i^{(j)}$ , on a  $\overline{h}_l \circ \overline{h}_e = \overline{h}_e \circ \overline{h}_l$ .  
Considérons deux éléments  $a, b$  de  $A^{(j)}$  tels que les applications  $\overline{h}_l \circ d_e^{(j)}$  et  $\lambda_{l,e} d_e^{(j)} \circ \overline{h}_l$  coïncident sur  $a$  et  $b$ . Alors, on a  $\overline{h}_l \circ d_e^{(j)}(ab) = \overline{h}_l(d_e^{(j)}(ab) + \overline{h}_e(a) d_e^{(j)}(b)) = \lambda_{l,e} d_e^{(j)}(\overline{h}_l(a)) \overline{h}_l(b) + \lambda_{l,e} \overline{h}_e(\overline{h}_l(a)) d_e^{(j)}(\overline{h}_l(b)) = \lambda_{l,e} d_e^{(j)} \circ \overline{h}_l(ab)$ . Donc, il suffit de montrer que  $\overline{h}_l \circ d_e^{(j)}$  et  $\lambda_{l,e} d_e^{(j)} \circ \overline{h}_l$  coïncident sur chaque  $x_i^{(j)}$ . Or  $\overline{h}_l \circ d_e^{(j)}(x_i^{(j)}) = \overline{h}_l(x_e^{(j)} x_i^{(j)} - \lambda_{e,i} x_i^{(j)} x_e^{(j)}) = \lambda_{l,e} \lambda_{l,i} (x_e^{(j)} x_i^{(j)} - \lambda_{e,i} x_i^{(j)} x_e^{(j)}) = \lambda_{l,e} \lambda_{l,i} d_e^{(j)}(x_i^{(j)}) = \lambda_{l,e} d_e^{(j)}(\overline{h}_l(x_i^{(j)}))$ , de sorte que l'on a bien  $\overline{h}_l \circ d_e^{(j)} = \lambda_{l,e} d_e^{(j)} \circ \overline{h}_l$ .

Pour  $j \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket$ , on note  $\mathcal{H}_j$  l'hypothèse suivante :

Il existe une famille  $(x_1^{(j+1)}, \dots, x_t^{(j+1)}) \in (D_m)^t$  et une sous-algèbre  $A^{(j+1)} = \mathbb{K} \langle x_1^{(j+1)}, \dots, x_t^{(j+1)} \rangle$  de  $D_m$  qui vérifie les analogues des propriétés 1. à 5. obtenues en changeant  $j$  en  $j+1$ .

Observons que l'hypothèse  $\mathcal{H}_{m-1}$  est satisfaite. En effet, les constructions de  $f_m$  et des variables  $x_i^{(m)}$  (voir le début de la section 3.2) impliquent directement la propriété 3. et l'égalité  $\overline{h} \circ f_m = f_m \circ h$  pour tout  $h$  dans  $H$ .

Supposons à présent que  $\mathcal{H}_j$  est satisfaite, définissons les éléments  $x_i^{(j)}$  comme dans 6. et 7. et posons  $A^{(j)} = \mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_t^{(j)} \rangle$ . Il reste à prouver que la propriété 3. est satisfaites et que  $\overline{h}_l \circ f_j = f_j \circ h_l$ .

- Supposons que  $x_j^{(j+1)} = 0$ , de sorte que  $X_j^{(j+1)} \in \text{Ker}(f_{j+1}) = \mathcal{P}^{(j+1)}$ . Rappelons que, dans ce cas,  $\mathcal{P}^{(j)}$  est le noyau du morphisme  $g : R^{(j)} \rightarrow R^{(j+1)}/\mathcal{P}^{(j+1)}$  qui transforme chaque  $X_i^{(j)}$  en  $X_i^{(j+1)} + \mathcal{P}^{(j+1)}$ .  
Par l'hypothèse  $\mathcal{H}_j$ ,  $f_{j+1} : R^{(j+1)} \rightarrow A^{(j+1)}$  induit un isomorphisme  $\widehat{f_{j+1}} : R^{(j+1)}/\mathcal{P}^{(j+1)} \rightarrow A^{(j+1)}$  qui transforme chaque  $X_i^{(j+1)} + \mathcal{P}^{(j+1)}$  en  $x_i^{(j+1)}$ . Donc  $f_j = \widehat{f_{j+1}} \circ g : R^{(j)} \rightarrow A^{(j+1)}$  est l'homomorphisme qui transforme chaque  $X_i^{(j)}$  en  $x_i^{(j+1)}$ , et on a  $\text{ker}(f_j) = \text{ker}(g) = \mathcal{P}^{(j)}$ . Comme,

dans ce cas, on a  $x_i^{(j)} = x_i^{(j+1)}$  pour tout  $i$ , on obtient que  $f_j$  satisfait la propriété 3. De plus, si  $l$  et  $i$  sont dans  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $\overline{h}_l \circ f_j(X_i^{(j)}) = \overline{h}_l(x_i^{(j)}) = \overline{h}_l(x_i^{(j+1)}) = \lambda_{l,i}(x_i^{(j+1)}) = \lambda_{l,i}(x_i^{(j)}) = f_j \circ h_l(X_i^{(j)})$ . Donc,  $\overline{h}_l \circ f_j = f_j \circ h_l$ .

- Supposons que  $x_j^{(j+1)} \neq 0$ , de sorte que  $X_j^{(j+1)} \notin \text{Ker}(f_{j+1}) = \mathcal{P}^{(j+1)}$ . Posons  $S_j = \{(X_j^{(j+1)})^l \mid l \in \mathbb{N}\}$  et rappelons que

$$\mathcal{P}^{(j)} = \mathcal{P}^{(j+1)} S_j^{-1} \cap R^{(j)}.$$

Comme  $f_{j+1}(X_j^{(j+1)}) = x_j^{(j+1)}$  est inversible dans  $D_m$ ,  $f_{j+1}$  peut être étendu en un homomorphisme  $\widetilde{f}_{j+1} : R^{(j+1)} S_j^{-1} \rightarrow D_m$  ( $\widetilde{f}_{j+1}(Q(X_j^{(j+1)})^{-l}) = f_{j+1}(Q)(x_j^{(j+1)})^{-l}$  pour tout  $Q$  dans  $R^{(j+1)}$  et  $l$  dans  $\mathbb{N}$ ) et on a  $\text{ker}(\widetilde{f}_{j+1}) = \mathcal{P}^{(j+1)} S_j^{-1}$ . Rappelons que  $R^{(j)} \subset R^{(j+1)} S_j^{-1}$  et calculons  $\widetilde{f}_{j+1}(X_i^{(j)})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .

- Si  $j \leq i$ , alors on a  $X_i^{(j)} = X_i^{(j+1)}$  (voir section 3.1.2) et  $\widetilde{f}_{j+1}(X_i^{(j)}) = x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)}$ .
- Si  $i < j$ , alors on a

$$X_i^{(j)} = X_i^{(j+1)} + \sum_{d=1}^{+\infty} C_d^{(j+1)} (X_j^{(j+1)})^{-d}$$

avec

$$C_d^{(j+1)} = \frac{(1 - q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} (\delta_j^{(j+1)})^d (X_i^{(j+1)}).$$

Comme  $C_d^{(j+1)} \in R^{(j+1)}$ , on a  $\widetilde{f}_{j+1}(C_d^{(j+1)}) = f_{j+1}(C_d^{(j+1)}) = \frac{(1 - q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} f_{j+1} \circ (\delta_j^{(j+1)})^d (X_i^{(j+1)})$   
 $= \frac{(1 - q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} (d_j^{(j+1)})^d \circ f_{j+1}(X_i^{(j+1)}) = \frac{(1 - q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} (d_j^{(j+1)})^d (x_i^{(j+1)}) = c_d^{(j+1)}$ . Donc, on a

$$\widetilde{f}_{j+1}(X_i^{(j)}) = x_i^{(j+1)} + \sum_{d=1}^{+\infty} c_d^{(j+1)} (x_j^{(j+1)})^{-d} = x_i^{(j)}$$

Ainsi, on a  $\widetilde{f}_{j+1}(X_i^{(j)}) = x_i^{(j)}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , de sorte que la restriction  $f_j$  de  $\widetilde{f}_{j+1}$  à  $R^{(j)}$  est l'unique homomorphisme de  $R^{(j)}$  dans  $A^{(j)}$  qui transforme chaque  $X_i^{(j)}$  en  $x_i^{(j)}$ .  $f_j$  est surjectif et  $\text{ker}(f_j) = \text{ker}(\widetilde{f}_{j+1}) \cap R^{(j)} = \mathcal{P}^{(j+1)} S_j^{-1} \cap R^{(j)} = \mathcal{P}^{(j)}$ . Ceci montre que  $f_j$  satisfait la propriété 3, et il reste à vérifier que, pour tout  $l$  dans  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , on a  $\overline{h}_l \circ f_j = f_j \circ h_l$ . Comme  $h_l(X_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} X_i^{(j)}$ , il suffit de vérifier que  $\overline{h}_l(x_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} x_i^{(j)}$  pour tout  $i$ .

Si  $j \leq i$ , on a  $\overline{h}_l(x_i^{(j)}) = \overline{h}_l(x_i^{(j+1)}) = \lambda_{l,i} x_i^{(j+1)} = \lambda_{l,i} x_i^{(j)}$ .

Supposons  $i < j$ .

Par l'hypothèse  $\mathcal{H}_j$ , on peut utiliser la propriété 5. au rang  $j + 1$ , de sorte que

$$\overline{h}_l \circ d_j^{(j+1)} = \lambda_{l,j} d_j^{(j+1)} \circ \overline{h}_l.$$

Pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , on a donc, compte tenu de la propriété 1. au rang  $j + 1$

$$\begin{aligned} \overline{h}_l(c_d^{(j+1)}) &= \overline{h}_l\left(\frac{(1 - q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} (d_j^{(j+1)})^d (x_i^{(j+1)})\right) \\ &= \frac{(1 - q_j)^{-d}}{[d]_{q_j}!} \lambda_{j,i}^{-d} \lambda_{l,j}^d (d_j^{(j+1)})^d \circ \overline{h}_l(x_i^{(j+1)}) = \lambda_{l,i} \lambda_{l,j}^d c_d^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, toujours au moyen de la propriété 1. au rang  $j + 1$ , on a  $\overline{h}_l(c_d^{(j+1)}(x_j^{(j+1)})^{-d}) = \lambda_{l,i} c_d^{(j+1)}(x_j^{(j+1)})^{-d}$ , de sorte que  $\overline{h}_l(x_i^{(j)}) = \lambda_{l,i} x_i^{(j)}$ . □

Rappelons (voir section 3.1.3) que, comme  $\mathcal{P}^{(m)}$  est  $H$ -invariant, chaque  $\mathcal{P}^{(j)}$  ( $2 \leq j \leq m$ ) est  $H$ -invariant. En particulier,  $\mathcal{P}^{(2)}$  est  $H$ -invariant. Notons

$$\Delta = \{i \in \llbracket 1, t \rrbracket \mid Z_i \in \mathcal{P}^{(2)}\} = \{j_1 < \dots < j_s\} \text{ (lorsque cet ensemble est non vide)}$$

et

$$\overline{\Delta} = \llbracket 1, t \rrbracket \setminus \Delta = \{l_1 < \dots < l_e\} \text{ (lorsque cet ensemble est non vide)}.$$

Rappelons que  $\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}_{\Delta}^{(2)}$  (voir section 3.1.3),  $\overline{R} = R^{(2)}$  et posons  $\overline{A} = A^{(2)}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ , posons  $z_i = x_i^{(2)}$  et observons que  $f_2 : \overline{R} \rightarrow \overline{A}$  transforme chaque  $Z_i = X_i^{(2)}$  en  $z_i$ . On peut donc aussi décrire  $\Delta$  et  $\overline{\Delta}$  comme suit :

$$\Delta = \{i \in \llbracket 1, t \rrbracket \mid z_i = 0\}$$

$$\overline{\Delta} = \{i \in \llbracket 1, t \rrbracket \mid z_i \neq 0\}$$

**Observation 3.2.4.**

Si  $\overline{\Delta}$  est vide alors  $x_i^{(m)}$  est nul pour tout  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .

**Démonstration :** Si  $\overline{\Delta}$  est vide, on a  $x_j^{(j+1)} = z_j = 0$  pour chaque  $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ . Par le point 6. de la proposition 3.2.3, ceci implique que, si  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ , on a  $x_i^{(j+1)} = x_i^{(j)}$ . Donc, chaque  $x_i^{(m)} = x_i^{(2)} = z_i = 0$ . □

Jusqu'à la fin de la section 3.2.2, on suppose que  $\overline{\Delta}$  est non vide. Alors, on a :

**Proposition 3.2.5.**

1.  $\overline{A} = \mathbb{K} \langle z_{l_1}, \dots, z_{l_e} \rangle$ .
2. Si  $1 \leq i < d \leq e$ , on a  $z_{l_d} z_{l_i} = \lambda_{l_d, l_i} z_{l_i} z_{l_d}$ .
3.  $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$  sont tous non nuls et les polynômes de Laurent (ordonnés)  $z^{\underline{a}} = z_{l_1}^{a_1} \dots z_{l_e}^{a_e}$  ( $\underline{a} = (a_1, \dots, a_e) \in \mathbb{Z}^e$ ) sont  $\mathbb{K}$ -linéairement indépendants.

**Démonstration :**

1.  $\overline{A} = \mathbb{K} \langle z_1, \dots, z_t \rangle$  (voir proposition 3.2.3) et, pour  $i \notin \{l_1, \dots, l_e\}$ , on a  $i \in \Delta \Rightarrow Z_i \in \mathcal{P}^{(2)} = \ker(f_2) \Rightarrow z_i = 0$ .
2. On sait (section 3.1.2) que  $Z_{l_d} Z_{l_i} = \lambda_{l_d, l_i} Z_{l_i} Z_{l_d}$ . Si on transforme par  $f_2$ , on obtient l'égalité voulue.
3. On note  $\widehat{R} = \mathbb{K} \langle Z_{l_1}, \dots, Z_{l_e} \rangle$  la sous-algèbre de  $\overline{R}$  engendrée par  $Z_{l_1}, \dots, Z_{l_e}$ . Par la propriété 1.,  $f_2$  induit (par restriction) un homomorphisme surjectif  $\widehat{f}_2 : \widehat{R} \rightarrow \overline{A}$  et  $\ker(\widehat{f}_2) = \widehat{R} \cap \mathcal{P}^{(2)}$ . Comme chaque  $P \in \mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}_{\Delta}^{(2)} = (\{Z_{j_1}, \dots, Z_{j_s}\})$  est une combinaison linéaire de monômes dans laquelle au moins l'une des variables  $Z_{j_i}$  avec  $1 \leq i \leq s$  apparaît, cette intersection est réduite à zéro. Donc  $\widehat{f}_2$  est un isomorphisme qui transforme chaque  $Z_{l_i}$  en  $z_{l_i}$ . Comme les monômes ordonnés en  $Z_{l_1}, \dots, Z_{l_e}$  sont linéairement indépendants, on a la même propriété pour les monômes ordonnés en  $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$ . Par suite,  $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$  sont non nuls et les monômes de Laurent ordonnés en  $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$  sont aussi linéairement indépendants. □

### 3.2.3 Chaque $x_i^{(m)}$ est un polynôme de Laurent en $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$

Les conventions sont les mêmes que dans la section 3.2.2 et on suppose toujours que  $\overline{\Delta}$  est non vide.

Considérons un entier  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .

Si  $u \in D_m$  et si  $\gamma \in \mathbb{Z}\Pi$ , on dit (comme dans la section 3.1.2) que  $u$  est homogène de degré  $\gamma$  si  $\overline{h}_\rho(u) = q^{-(\rho, \gamma)}u$  pour tout  $\rho$  dans  $\mathbb{Z}\Pi$ . Comme  $q$  n'est pas une racine de l'unité, et comme  $E$  est engendré par  $\Pi$ , le degré d'un élément homogène non nul est défini de manière unique. De plus, on a immédiatement les propriétés suivantes :

- Si  $u_1, \dots, u_r$  sont homogènes de même degré  $\gamma$ , alors toute combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_r$  (dont les coefficients sont dans  $\mathbb{K}$ ) est homogène de degré  $\gamma$ .
- Si  $u_1$  est homogène de degré  $\gamma_1$  et  $u_2$  est homogène de degré  $\gamma_2$ , alors  $u_1 u_2$  est homogène de degré  $\gamma_1 + \gamma_2$ .
- De même, si  $u$  est non nul et homogène de degré  $\gamma$ , alors  $u^{-1}$  est homogène de degré  $-\gamma$ .
- Donc, si  $u_1, \dots, u_r$  sont non nuls et homogènes de degré  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  respectivement, si  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ , alors  $u^{\underline{a}} := u_1^{a_1} \dots u_r^{a_r}$  est homogène de degré  $a_1 \gamma_1 + \dots + a_r \gamma_r$ .

#### Lemme 3.2.6.

Considérons un entier  $j \in \llbracket 2, m \rrbracket$ .

1. Si  $j \leq i+1$ , alors  $x_i^{(j)} = z_i$ . En particulier,  $x_i^{(i+1)} = z_i$ .
2. Si  $1 \leq i < l \leq t$ , alors  $x_l^{(j)} x_i^{(j)} - \lambda_{l,i} x_i^{(j)} x_l^{(j)} = d_l^{(j)}(x_i^{(j)}) = f_j(P_{l,i}^{(j)}) \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$ . De plus, si  $l \geq j$  ou  $l = i+1$ , alors  $d_l^{(j)}(x_i^{(j)}) = 0$ .
3. Si  $U \in R^{(j)}$  est homogène de degré  $\gamma$ , alors  $f_j(U)$  est homogène de même degré  $\gamma$ . En particulier,  $x_i^{(j)}$  est homogène de degré  $\beta_i$ .
4. Si  $j \leq l \leq t$  et  $u \in \mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$ , alors  $z_l u = \overline{h}_l(u) z_l$ .

#### Démonstration :

1. Par la proposition 3.2.3, on a  $x_i^{(i+1)} = x_i^{(i)} = \dots = x_i^{(2)} = z_i$ .
2. Par la proposition 3.2.3, on a  $x_l^{(j)} x_i^{(j)} - \lambda_{l,i} x_i^{(j)} x_l^{(j)} = x_l^{(j)} x_i^{(j)} - \overline{h}_l(x_i^{(j)}) x_l^{(j)} = d_l^{(j)}(x_i^{(j)}) = d_l^{(j)} \circ f_j(X_i^{(j)}) = f_j \circ \delta_l^{(j)}(X_i^{(j)})$  et on sait (voir section 3.1.2) que  $\delta_l^{(j)}(X_i^{(j)}) = P_{l,i}^{(j)} \in \mathbb{K} \langle X_{i+1}^{(j)}, \dots, X_{l-1}^{(j)} \rangle$ . De plus, si  $l \geq j$  ou  $l = i+1$ , on sait (voir section 3.1.2) que  $P_{l,i}^{(j)} = 0$ . En appliquant  $f_j$ , on a le résultat voulu.
3. Considérons  $\rho$  dans  $\mathbb{Z}\Pi$ . Par la proposition 3.2.3, on a  $\overline{h}_\rho(f_j(U)) = f_j(h_\rho(U)) = q^{-(\rho, \gamma)} f_j(U)$ .
4. Par 1., on a  $z_l = x_l^{(j)}$ . Donc,  $z_l u - \overline{h}_l(u) z_l = x_l^{(j)} u - \overline{h}_l(u) x_l^{(j)} = d_l^{(j)}(u)$ . Comme  $j \leq l$ , il résulte de 2. que  $d_l^{(j)}(x_i^{(j)}) = 0$  pour tout  $i < l$ . Ceci implique que  $d_l^{(j)}$  est nulle sur  $\mathbb{K} \langle x_1^{(j)}, \dots, x_{l-1}^{(j)} \rangle$  et, en particulier,  $d_l^{(j)}(u) = 0$ . □

#### Lemme 3.2.7.

Considérons un entier  $j \in \llbracket 2, m \rrbracket$ .

1. Si  $j \leq l_1$ , alors  $x_i^{(j)} = z_i$ .
2. Supposons que  $l_1 < j$  et notons  $d$  le plus grand entier tel que  $l_d < j$  ( $1 \leq d \leq p$ ). Alors  $x_i^{(j)} = x_i^{(l_d+1)}$ .

**Démonstration :**

2. On prouve ceci par récurrence sur  $j$ . Si  $j = l_d + 1$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons que  $j > l_d + 1$  et posons  $j' = j - 1 > l_d$ . Par le lemme 3.2.6, on a  $x_{j'}^{(j'+1)} = z_{j'} = 0$  (car  $j' \in \Delta$ ). Donc, par la proposition 3.2.3,  $x_i^{(j)} = x_i^{(j'+1)} = x_i^{(j')} = x_i^{(l_d+1)}$  (par l'hypothèse de récurrence).
1. La preuve est la même ( en observant qu'il n'y a rien à démontrer si  $j = 2$ ).

□

Supposons que  $l_1 < m$  et notons  $p$  le plus grand entier tel que  $l_p < m$ .

**Proposition 3.2.8.**

Considérons un entier  $j \in \llbracket 2, m \rrbracket$  et supposons que  $i < j$ .

1. Si  $i < j \leq l_1$ , alors  $x_i^{(j)} = z_i = 0$ .

Supposons que  $l_1 < j$  et notons  $d$  le plus grand entier tel que  $l_d < j$  ( $1 \leq d \leq p$ ).

2. (a) Si  $l_d \leq i < j$ , alors  $x_i^{(j)} = z_i$ .

- (b) Si  $i < l_d < j$ , alors

$$x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)} + Q_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_K z_{l_d}^{-K}$$

avec  $K \geq 1$  et :

- Si  $d = 1$ , alors chaque  $Q_l = 0$  (i.e.  $x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)}$ ).
- Si  $d > 1$  et  $i \geq l_{d-1}$ , alors chaque  $Q_l = 0$  (i.e.  $x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)}$ ).
- Si  $d > 1$  et  $i < l_{d-1}$ , alors chaque  $Q_l \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ .

**Démonstration :**

1. Par le lemme 3.2.7 (1.), on a  $x_i^{(j)} = z_i$  et, comme  $i < l_1$ , on a  $i \in \Delta$ , de sorte que  $z_i = 0$ .
2. (a) Par le lemme 3.2.7 (2.), on a  $x_i^{(j)} = x_i^{(l_d+1)}$  et, comme  $l_d + 1 \leq i$ , c'est aussi égal à  $z_i$ .
- (b) On démontre ce résultat par récurrence descendante sur  $i$ .

Comme dans 2.a., on a  $x_i^{(j)} = x_i^{(l_d+1)}$  et, comme  $x_{l_d}^{(l_d+1)} = z_{l_d} \neq 0$ , il résulte de la proposition 3.2.3 (7.(b)) que

$$x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)} + P_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + P_L z_{l_d}^{-L}$$

avec  $L \geq 1$  et chaque  $P_l = \mu_l (d_{l_d}^{(l_d+1)})^l (x_i^{(l_d+1)})$  ( $\mu_l \in \mathbb{K}^*$ ). Par le lemme 3.2.6, chaque  $P_l \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d+1)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d+1)} \rangle = \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(j)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(j)} \rangle$  (compte tenu du lemme 3.2.7).

Supposons que  $i = l_d - 1$ . Alors, par le lemme 3.2.6, on a  $d_{l_d}^{(l_d+1)} (x_i^{(l_d+1)}) = 0$ . Ceci implique que  $P_l = 0$  pour chaque  $l$ . Donc,  $x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)}$  et la démonstration est finie.

Supposons à présent que  $i < l_d - 1$  et, pour  $i + 1 \leq h \leq l_d - 1$ ,

$$x_h^{(j)} = x_h^{(l_d)} + Q_{1,h} z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_{M,h} z_{l_d}^{-M}$$

avec  $M \geq 1$ , et :

- chaque  $Q_{l,h} = 0$  si  $d = 1$ ,
- chaque  $Q_{l,h} = 0$  si  $d > 1$  et  $h \geq l_{d-1}$ ,
- chaque  $Q_{l,h} \in \mathbb{K} \langle x_{h+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$  si  $d > 1$  et  $h < l_{d-1}$ .

Ceci implique les résultats suivants :

- Si  $d = 1$ , alors chaque  $x_h^{(j)} = x_h^{(l_d)}$  ( $i + 1 \leq h \leq l_d - 1$ ).

- Si  $d > 1$  et  $l_{d-1} \leq h \leq l_d - 1$ , alors  $x_h^{(j)} = x_h^{(l_d)}$ .
  - Si  $d > 1$  et  $i + 1 \leq h < l_{d-1}$ , alors  $x_h^{(j)} \in \mathbb{K} \langle x_h^{(l_d)}, x_{h+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)}, z_{l_d}^{-1} \rangle$ .
- Il en résulte que chaque  $P_l \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)}, z_{l_d}^{-1} \rangle$ .

- Si  $d = 1$  et  $h < l_d$ , on a (par le premier point de la proposition)  $x_h^{(l_d)} = z_h = 0$ . Donc, dans ce cas, chaque  $P_l \in \mathbb{K}$  et

$$x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)} + Q_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_K z_{l_d}^{-K}$$

avec  $K \geq 1$  et chaque  $Q_l$  appartient à  $\mathbb{K}$ . Comme  $x_i^{(j)}$  et  $x_i^{(l_d)}$  sont homogènes de poids  $\beta_i$ , il en est de même pour  $Q_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_K z_{l_d}^{-K}$ . Comme  $z_{l_d}$  est homogène de degré  $\beta_{l_d}$  et comme les monômes  $z_{l_d}^a$ , ( $a \in \mathbb{Z}$ ) sont  $\mathbb{K}$ -linéairement indépendants, on voit immédiatement que  $Q_1 = \dots = Q_K = 0$ .

- Supposons maintenant que  $d > 1$ .

Si  $l_{d-1} < h \leq l_d - 1$ , on a (par 2.a.)  $x_h^{(l_d)} = z_h = 0$  (car  $h \in \Delta$ ). Donc,

- Si  $i \geq l_{d-1}$ , chaque  $P_l \in \mathbb{K}$  et comme ci-dessus

$$x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)}$$

- Si  $i < l_{d-1}$ , chaque  $P_l \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)}, z_{l_d}^{-1} \rangle$ . Comme, par le lemme 3.2.6,  $z_{l_d} = x_{l_d}^{(l_d)}$   $q$ -commute avec  $x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)}$ , chaque  $P_l$  peut s'écrire comme suit :

$$P_l = S_{0,l} + S_{1,l} z_{l_d}^{-1} + \dots + S_{E,l} z_{l_d}^{-E}$$

avec  $E \geq 1$  et chaque  $S_{j,l} \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ . On en déduit que

$$x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)} + Q_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_K z_{l_d}^{-K}$$

avec  $K \geq 1$  et chaque  $Q_l$  appartient à  $\mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ .

□

### Proposition 3.2.9.

Considérons un entier  $j \in \llbracket 2, m \rrbracket$ , supposons que  $i+1 < j$  et considérons un élément  $u$  de  $\mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(j)}, \dots, x_{j-1}^{(j)} \rangle$ .

1. Si  $j \leq l_1$ , alors  $u \in \mathbb{K}$ .
2. Supposons que  $l_1 < j$  et notons  $d$  le plus grand entier tel que  $l_d < j$  ( $1 \leq d \leq p$ ).

(a) Si  $l_d \leq i$ , alors  $u \in \mathbb{K}$ .

(b) Si  $i < l_d$ , alors

$$u = u_1 z_{l_d}^{a_1} + \dots + u_K z_{l_d}^{a_K}$$

avec  $K \geq 1$ ,  $(a_1, \dots, a_K) \in \mathbb{Z}^K$  et :

- Si  $d = 1$ , alors chaque  $u_l \in \mathbb{K}$ .
- Si  $d > 1$  et  $i \geq l_{d-1}$ , alors chaque  $u_l \in \mathbb{K}$ .
- Si  $d > 1$  et  $i < l_{d-1}$ , alors chaque  $u_l \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ .

#### Démonstration :

1. Par la proposition 3.2.8 (1.), on a  $x_h^{(j)} = 0$  pour tout  $h < j$ . Donc,  $u \in \mathbb{K}$ .

2. (a) Considérons un entier  $h$  avec  $i < h < j$ .

Comme  $l_d \leq i$ , on déduit de la proposition 3.2.8 (2.a.) que  $x_h^{(j)} = z_h = 0$  (car  $h \in \Delta$ ). Donc  $u \in \mathbb{K}$ .

(b) Considérons à nouveau un entier  $h$  avec  $i < h < j$ .

Si  $l_d < h$ , alors, comme en 2.a., on a  $x_h^{(j)} = 0$ . Si  $h = l_d$ , alors, encore par la proposition 3.2.8 (2.a.), on a  $x_h^{(j)} = z_h = z_{l_d}$ .

Il en résulte que

$$u \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(j)}, \dots, x_{l_d-1}^{(j)}, z_{l_d} \rangle. \quad (3.7)$$

• Supposons  $d = 1$ .

Si  $h < l_d$ , alors, par la proposition 3.2.8 (2.b. et 1.), on a

$$x_h^{(j)} = x_h^{(l_d)} = 0$$

Il en résulte donc que  $u \in \mathbb{K} \langle z_{l_d} \rangle$ , il en résulte que

$$u = u_1 z_{l_d}^{a_1} + \dots + u_K z_{l_d}^{a_K}$$

avec  $N \geq 1$ ,  $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N$  et chaque  $u_l \in \mathbb{K}$ .

• Supposons  $d > 1$  et  $i \geq l_{d-1}$ .

Si  $i < h < l_d$ , on a  $l_{d-1} < h < l_d$  et, par la proposition 3.2.8 (2.b. et 2.a.),

$$x_h^{(j)} = x_h^{(l_d)} = z_h = 0 \quad (h \in \Delta)$$

Comme ci-dessus, on conclut que

$$u = u_1 z_{l_d}^{a_1} + \dots + u_K z_{l_d}^{a_K}$$

avec  $K \geq 1$ ,  $(a_1, \dots, a_K) \in \mathbb{N}^K$  et chaque  $u_l \in \mathbb{K}$ .

• Supposons que  $d > 1$  et  $i < l_{d-1}$ . Si  $i < h < l_d$ , on a, toujours par la proposition 3.2.8 (2.b.),

$$x_h^{(j)} = x_h^{(l_d)} + Q_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_M z_{l_d}^{-M}$$

avec  $M \geq 1$  et :

•• Si  $l_{d-1} < h$ , on conclut comme ci-dessus que  $x_h^{(j)} = 0$ . On en déduit par (3.7)

$$u \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(j)}, \dots, x_{l_d-1}^{(j)}, z_{l_d} \rangle. \quad (3.8)$$

•• Par la proposition 3.2.8 (2.b.), on a  $x_{l_{d-1}}^{(j)} = x_{l_{d-1}}^{(l_d)}$ .

•• Si  $h < l_{d-1}$ , alors chaque  $Q_l \in \mathbb{K} \langle x_{h+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)} \rangle$  et, par conséquent,

$$x_h^{(j)} \in \mathbb{K} \langle x_h^{(l_d)}, x_{h+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)}, z_{l_d}^{-1} \rangle \subset \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, x_{h+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)}, z_{l_d}^{-1} \rangle.$$

Il en résulte que  $u \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)}, z_{l_d}^{\pm 1} \rangle$ . Comme, par le lemme 3.2.6,  $z_{l_d} = x_{l_d}^{(l_d)}$   $q$ -commute avec  $x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)}$ , on en déduit que

$$u = u_1 z_{l_d}^{a_1} + \dots + u_K z_{l_d}^{a_K}$$

avec  $K \geq 1$ ,  $(a_1, \dots, a_K) \in \mathbb{Z}^K$  et chaque  $u_l \in \mathbb{K} \langle x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)} \rangle$ .

□

**Proposition 3.2.10.**

Considérons un entier  $j$  de  $\llbracket 2, m \rrbracket$  avec  $i < j$ .

1. Si  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket i+1, j-1 \rrbracket = \emptyset$ , alors  $x_i^{(j)} = z_i$ .

2. Supposons que  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket i+1, j-1 \rrbracket \neq \emptyset$  et posons  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket i+1, j-1 \rrbracket = \{l_c < \dots < l_d\}$ . Alors, on a

$$x_i^{(j)} = z_i + \sum_{\underline{a} = (a_c, \dots, a_d) \in F} \eta(\underline{a}) z_{l_c}^{a_c} \dots z_{l_d}^{a_d},$$

où

- $F$  est un sous-ensemble fini (qui peut être vide) de  $\mathbb{Z}^{d-c+1}$ .
- Si  $\leq$  représente l'ordre lexicographique inverse dans  $\mathbb{Z}^{d-c+1}$ , alors, pour tout  $\underline{a}$  dans  $F$ , on a  $\underline{a} < 0$  (ie.  $\underline{a} = (a_c, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$  avec  $a_r < 0$ ).
- Pour chaque  $\underline{a}$  dans  $F$ , on a  $\eta(\underline{a}) \in \mathbb{K}^*$ .

**Démonstration :**

1. On suppose donc que  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket i+1, j-1 \rrbracket = \emptyset$ , et on observe qu'il y a deux possibilités :

- (a)  $j \leq l_1$ . Par la proposition 3.2.8, on sait que  $x_i^{(j)} = z_i$ .
- (b)  $l_1 < j$  et, si  $d$  est le plus grand entier tel que  $l_d < j$ , alors  $l_d \leq i < j$ . Encore, par la proposition 3.2.8, on sait que  $x_i^{(j)} = z_i$ .

2. On démontre cette assertion par récurrence sur  $j - i$ .

Supposons  $j - i = 1$ . Dans ce cas, on a  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket i+1, j-1 \rrbracket = \emptyset$  et l'égalité à démontrer résulte de 1.

Supposons  $j - i > 1$ . Comme l'assertion 1. est déjà prouvée, on peut supposer que  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket i+1, j-1 \rrbracket = \{l_c < \dots < l_d\}$  est non vide. Donc, on a  $l_1 < j$ ,  $d$  est le plus grand entier tel que  $l_d < j$  et  $i < l_d < j$ . Par la proposition 3.2.8, on peut écrire :

$$x_i^{(j)} = x_i^{(l_d)} + Q_1 z_{l_d}^{-1} + \dots + Q_K z_{l_d}^{-K}$$

avec  $K \geq 1$  et il y a trois cas possibles :

- (a)  $d = 1$ . Alors chaque  $Q_l = 0$  et, comme  $x_i^{(l_d)} = z_i$  (proposition 3.2.8, 1.), le résultat est démontré.
- (b)  $d > 1$  et  $i \geq l_{d-1}$ . Alors chaque  $Q_l = 0$  et, comme  $x_i^{(l_d)} = z_i$  (voir proposition 3.2.8, 2.a.), le résultat est démontré.
- (c)  $d > 1$  et  $i < l_{d-1}$  (de sorte que  $c \leq d-1$ ). Dans ce cas, chaque  $Q_l \in \mathbb{K} < x_{i+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} >$ .

Comme  $l_d < j$ , il résulte de l'hypothèse de récurrence que la proposition est vraie pour chaque  $x_h^{(l_d)}$  avec  $i \leq h < l_d$ . Ceci implique que

- Si  $i+1 \leq h \leq l_{d-1}$ , on a  $x_h^{(l_d)} \in \mathbb{K} < z_{l_c}^{\pm 1}, \dots, z_{l_{d-1}}^{\pm 1} >$  (car  $\{l_1, \dots, l_p\} \cap \llbracket h+1, l_d-1 \rrbracket \subseteq \{l_c < \dots < l_{d-1}\}$  et  $z_h$  est soit nul soit égal à  $z_{l_r}$  avec  $c \leq r \leq d-1$ ). Donc, chaque  $Q_l \in \mathbb{K} < z_{l_c}^{\pm 1}, \dots, z_{l_{d-1}}^{\pm 1} >$ .
- 

$$x_i^{(l_d)} = z_i + \sum_{\underline{a} = (a_c, \dots, a_{d-1}) \in F_1} \eta(\underline{a}) z_{l_c}^{a_c} \dots z_{l_{d-1}}^{a_{d-1}},$$

où

- ◊  $F_1$  est un sous ensemble fini (peut être vide) de  $\mathbb{Z}^{d-c}$ .
- ◊ Pour chaque  $\underline{a}$  dans  $F_1$ , on a  $\underline{a} < 0$  et  $\eta(\underline{a}) \in \mathbb{K}^*$ .

Comme chaque  $Q_l$  est une somme de monômes de Laurent (ordonnés) en les  $z_{l_c}, \dots, z_{l_{d-1}}$ , on en déduit que

$$x_i^{(j)} = z_i + \sum_{\underline{a} = (a_c, \dots, a_d) \in F} \eta(\underline{a}) z_{l_c}^{a_c} \dots z_{l_d}^{a_d},$$

où

- ◊  $F$  est un sous-ensemble fini (peut être vide) de  $\mathbb{Z}^{d-c+1}$ .

◇ Pour chaque  $\underline{a}$  dans  $F$ , on a  $\underline{a} \prec 0$  et  $\eta(\underline{a}) \in \mathbb{K}^*$ . □

Cette proposition implique immédiatement

**Corollaire 3.2.11.**

Considérons un entier  $d$  avec  $1 < d \leq p$ . Si  $1 \leq i < l_d$ , alors  $x_i^{(l_d)} \in \mathbb{K} \langle z_{l_1}^{\pm 1}, \dots, z_{l_{d-1}}^{\pm 1} \rangle$ .

**Démonstration :** Par la proposition 3.2.10,  $x_i^{(l_d)} = z_i + Q$  avec  $Q$  un polynôme de Laurent (peut être égal à 0) en les  $z_{l_1}, \dots, z_{l_{d-1}}$ . Comme  $z_i$  est soit 0 ou  $z_{l_r}$  avec  $1 \leq r \leq d-1$ , la démonstration est terminée. □

**Corollaire 3.2.12.**

Considérons un entier  $d$  avec  $1 < d \leq p$ . Dans  $D_m$ , considéré comme un module à gauche sur  $\mathbb{K} \langle x_1^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ , les monômes de Laurent  $z_{l_d}^{a_d} \dots z_{l_p}^{a_p}$  ( $a_d, \dots, a_p$  dans  $\mathbb{Z}$ ) sont linéairement indépendents.

**Démonstration :** Par le corollaire 3.2.11, on a  $\mathbb{K} \langle x_1^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle \subseteq \mathbb{K} \langle z_{l_1}^{\pm 1}, \dots, z_{l_{d-1}}^{\pm 1} \rangle$ . Donc le corollaire résulte immédiatement de l'indépendance  $\mathbb{K}$ -linéaire des monômes de Laurent ordonnés en les  $z_{l_1}, \dots, z_{l_e}$  (voir proposition 3.2.5). □

**3.2.4 Une nouvelle condition suffisante pour que  $\mathcal{P}^{(m)}$  appartienne à  $Im(\phi_m)$**

Les notations sont les mêmes que pour les sections précédentes, mais on ne suppose plus que  $\overline{\Delta}$  est non vide a priori.

Supposons  $m \leq t$  et supposons que  $\mathcal{P}^{(m)}$  n'appartiennent pas à  $Im(\phi_m)$  de sorte que, par la proposition 3.2.1,  $X_m^{(m)} \in \mathcal{P}^{(m)}$  et il existe un entier  $j$  de  $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$  tel que

$$U = \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})) \notin \mathcal{P}^{(m)}.$$

Choisissons un tel  $j$  maximal. Alors, on a

$$\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}$$

pour tout  $i$  dans  $\llbracket j+1, m-1 \rrbracket$  et on observe que, comme  $U \notin \mathcal{P}^{(m)}$ , on a  $u := f_m(U) \neq 0$  dans  $A^{(m)}$ .

Rappelons que

$$\Delta = \{i \in \llbracket 1, t \rrbracket \mid Z_i \in \mathcal{P}^{(2)}\} = \{j_1 < \dots < j_s\} \text{ (si cet ensemble est non vide),}$$

$$\overline{\Delta} = \llbracket 1, t \rrbracket \setminus \Delta = \{l_1 < \dots < l_e\} \text{ (si cet ensemble est non vide).}$$

**Lemme 3.2.13.**

$\overline{\Delta}$  est non vide,  $l_1 < m$ ,  $m \notin \overline{\Delta}$  et, si  $p$  est le plus grand entier tel que  $l_p < m$ , on a  $j < l_p < m$ .

**Démonstration :** Tout d'abord, rappelons que :

- Si  $\overline{\Delta}$  est vide, alors (observation 3.2.4) chaque  $x_l^{(m)}$  ( $l \in \llbracket 1, t \rrbracket$ ) est nul.
- $\delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) = P_{m,j}^{(m+1)}$ . Cet élément est 0 si  $m = j+1$  ou une somme (finie)

$$\sum_{\underline{a} = (a_{j+1}, \dots, a_{m-1})} c_{\underline{a}} (X_{j+1}^{(m+1)})^{a_{j+1}} \dots (X_{m-1}^{(m+1)})^{a_{m-1}}$$

avec chaque  $\underline{a}$  dans  $\mathbb{N}^{m-1-j}$  si  $m > j+1$ . De plus,  $\underline{a}$  est non nul quand  $c_{\underline{a}} \neq 0$ .

- $\Theta^{(m)} : \mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle X_1^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)} \rangle$  est un homomorphisme d'algèbre qui transforme chaque  $X_l^{(m+1)}$  en  $X_l^{(m)}$ .

Supposons que  $m = j + 1$ . Dans ce cas, on a

$$\delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) = 0 \Rightarrow U = \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})) = 0 \in \mathcal{P}^{(m)}$$

et on obtient une contradiction.

Donc, on a  $m > j + 1$ , et

$$\begin{aligned} \delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) &= \sum_{\underline{a} = (a_{j+1}, \dots, a_{m-1})} c_{\underline{a}}(X_{j+1}^{(m+1)})^{a_{j+1}} \dots (X_{m-1}^{(m+1)})^{a_{m-1}} \Rightarrow \\ U = \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})) &= \sum_{\underline{a} = (a_{j+1}, \dots, a_{m-1})} c_{\underline{a}}(X_{j+1}^{(m)})^{a_{j+1}} \dots (X_{m-1}^{(m)})^{a_{m-1}} \Rightarrow \\ u = f_m(U) &= \sum_{\underline{a} = (a_{j+1}, \dots, a_{m-1})} c_{\underline{a}}(x_{j+1}^{(m)})^{a_{j+1}} \dots (x_{m-1}^{(m)})^{a_{m-1}}. \end{aligned}$$

Supposons que  $\bar{\Delta}$  est vide. Alors, chaque  $x_l^{(m)}$  est nul et, comme  $\underline{a}$  est non nul quand  $c_{\underline{a}} \neq 0$ , on déduit que  $u = 0$ . Donc  $U \in \text{Ker} f_m = \mathcal{P}^{(m)}$  et on a encore une contradiction. Ainsi  $\bar{\Delta}$  est non vide.

Si  $l_1 \geq m$ , alors, pour tout  $l \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ , on a (lemme 3.2.7, puisque  $l < l_1$ )  $x_l^{(m)} = z_l = 0$ . Comme ci-dessus, ceci implique que  $u = 0$  et on a encore une contradiction. Donc  $l_1 < m$ .

Comme  $X_m^{(m)} \in \mathcal{P}^{(m)}$ , on a  $x_m^{(m)} = 0$ . Comme  $x_m^{(m)} = z_m$  (lemme 3.2.6), on a  $Z_m \in \mathcal{P}^{(2)}$  et donc,  $m \in \Delta$ . De plus, si  $l_p \leq j$ , alors, pour tout  $l \in \llbracket j+1, m-1 \rrbracket$ , on a (proposition 3.2.8 2.a., puisque  $l_p < l < m$ )  $x_l^{(m)} = z_l = 0$ . Comme ci-dessus, ceci implique que  $u = 0$  et on a encore une contradiction. Donc,  $j < l_p$ .  $\square$

On pose  $V = \delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) = X_m^{(m+1)} X_j^{(m+1)} - q^{-(\beta_m, \beta_j)} X_j^{(m+1)} X_m^{(m+1)}$  (voir section 3.1.2), de sorte que  $U = \Theta^{(m)}(V)$ .

**Lemme 3.2.14.**

Considérons un entier  $l$  avec  $j < l < m$ . Alors on a, dans  $R^{(m+1)}$ ,

$$\begin{aligned} X_l^{(m+1)} V &= q^{(\beta_l, \beta_m - \beta_j)} V X_l^{(m+1)} \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} [ q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} X_j^{(m+1)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) - \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)} ] \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}). \end{aligned}$$

**Démonstration :** On observe que, comme chaque  $X_i^{(m+1)}$  est homogène de degré  $\beta_i$  (voir section 3.1.2), on a

$$\begin{aligned} \delta_l^{(m+1)}(V) &= \delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) X_j^{(m+1)} + q^{-(\beta_l, \beta_m)} X_m^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) \\ &- q^{-(\beta_m, \beta_j)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) X_m^{(m+1)} - q^{-[(\beta_m, \beta_j) + (\beta_l, \beta_j)]} X_j^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}). \end{aligned}$$

Donc, on peut écrire

$$\delta_l^{(m+1)}(V) = A + B - C - D$$

avec

$$A = \delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) X_j^{(m+1)},$$

$$\begin{aligned} B &= q^{-(\beta_l, \beta_m)} X_m^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}), \\ C &= q^{-(\beta_m, \beta_j)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) X_m^{(m+1)}, \\ D &= q^{-[(\beta_m, \beta_j) + (\beta_l, \beta_j)]} X_j^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}). \end{aligned}$$

Calculons séparément A, B, C et D :

- $\delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) = X_l^{(m+1)} X_m^{(m+1)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)} X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)}$ . Comme on a aussi  $\delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) = X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)} X_l^{(m+1)} X_m^{(m+1)}$ , on peut écrire  $X_l^{(m+1)} X_m^{(m+1)} = q^{(\beta_l, \beta_m)} [X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)} - \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)})]$ .  
Donc

$$\delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) = (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)} - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}).$$

- De là, on déduit que

$$\delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) X_j^{(m+1)} = (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)} X_j^{(m+1)} - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}.$$

Mais on a aussi

$$\delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) = X_l^{(m+1)} X_j^{(m+1)} - q^{-(\beta_l, \beta_j)} X_j^{(m+1)} X_l^{(m+1)}, \text{ de sorte que } \delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) X_j^{(m+1)} = (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) X_m^{(m+1)} [q^{-(\beta_l, \beta_j)} X_j^{(m+1)} X_l^{(m+1)} + \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})] - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}.$$

Donc, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) q^{-(\beta_l, \beta_j)} X_m^{(m+1)} X_j^{(m+1)} X_l^{(m+1)} \\ &\quad + (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) X_m^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) \\ &\quad - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}. \end{aligned}$$

- On en déduit que

$$\begin{aligned} A + B - C &= (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) q^{-(\beta_l, \beta_j)} X_m^{(m+1)} X_j^{(m+1)} X_l^{(m+1)} \\ &\quad + q^{(\beta_l, \beta_m)} X_m^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) - q^{-(\beta_m, \beta_j)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) X_m^{(m+1)} \\ &\quad - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)} \\ &= (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) q^{-(\beta_l, \beta_j)} X_m^{(m+1)} X_j^{(m+1)} X_l^{(m+1)} \\ &\quad + q^{(\beta_l, \beta_m)} [X_m^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) - q^{-(\beta_m, \beta_l + \beta_j)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) X_m^{(m+1)}] \\ &\quad - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Comme  $\delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})$  est homogène de degré  $\beta_l + \beta_j$ , on a

$$X_m^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) - q^{-(\beta_m, \beta_l + \beta_j)} \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) X_m^{(m+1)} = \delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} A + B - C &= (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) q^{-(\beta_l, \beta_j)} X_m^{(m+1)} X_j^{(m+1)} X_l^{(m+1)} \\ &\quad + q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}. \end{aligned}$$

- En utilisant le calcul de  $\delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)})$  fait dans le premier point ci-dessus, on peut écrire :

$$D = q^{-[(\beta_m, \beta_j) + (\beta_l, \beta_j)]} X_j^{(m+1)} \delta_l^{(m+1)}(X_m^{(m+1)}) = q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} X_j^{(m+1)} [(q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)} - q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)})],$$

de sorte que

$$D = q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} (q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) X_j^{(m+1)} X_m^{(m+1)} X_l^{(m+1)} - q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} q^{(\beta_l, \beta_m)} X_j^{(m+1)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}).$$

- On en déduit

$$\begin{aligned} \delta_l^{(m+1)}(V) &= A+B-C-D = q^{-(\beta_j, \beta_l)}(q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)})[X_m^{(m+1)} X_j^{(m+1)} - q^{-(\beta_j, \beta_m)} X_j^{(m+1)} X_m^{(m+1)}] X_l^{(m+1)} \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} [q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} X_j^{(m+1)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) - \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}] \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \delta_l^{(m+1)}(V) &= q^{-(\beta_j, \beta_l)}(q^{(\beta_l, \beta_m)} - q^{-(\beta_l, \beta_m)}) V X_l^{(m+1)} \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} [q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} X_j^{(m+1)} \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) - \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) X_j^{(m+1)}] \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} \delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) \end{aligned}$$

Comme  $V$  est homogène de degré  $\beta_j + \beta_m$ , on a aussi

$$\delta_l^{(m+1)}(V) = X_l^{(m+1)} V - q^{-(\beta_l, \beta_j + \beta_m)} V X_l^{(m+1)},$$

ce qui donne la formule annoncée.  $\square$

Observons que, si  $j < l < m$ , on a les résultats suivants :

- $\delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}) \in \mathbb{K} \langle X_{l+1}^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$  (ou est nul si  $l = m - 1$ ) (voir section 3.1.2).
- De même,  $V = \delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) \in \mathbb{K} \langle X_{j+1}^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$  ( $j < m - 1$  par le lemme 3.2.13).
- $\delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) \in \mathbb{K} \langle X_{j+1}^{(m+1)}, \dots, X_{l-1}^{(m+1)} \rangle$  (ou est nul si  $l = j + 1$ ), ce qui implique que  $\delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) \in \mathbb{K} \langle X_{j+1}^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$ .

Donc,  $V, \delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)}), \delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}), X_l^{(m+1)}, X_j^{(m+1)}$  sont tous dans  $\mathbb{K} \langle X_1^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)} \rangle$  et, si on transforme l'égalité du lemme 3.2.14 par l'homomorphisme d'algèbre  $\Theta^{(m)}$ , on obtient :

**Lemme 3.2.15.**

$$\begin{aligned} X_l^{(m)} U &= q^{(\beta_l, \beta_m - \beta_j)} U X_l^{(m)} \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} [q^{-(\beta_j, \beta_l + \beta_m)} X_j^{(m)} \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)})) - \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)})) X_j^{(m)}] \\ &+ q^{(\beta_l, \beta_m)} \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})). \end{aligned}$$

Supposons toujours  $j < l < m$  et observons que

- Par définition de  $j$ , on a  $\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_l^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}$ .
- On suppose que  $l > j + 1$ , de sorte que (par la section 3.1.2)

$$\delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}) = \sum_{\underline{a} = (a_{j+1}, \dots, a_{l-1})} c_{\underline{a}} (X_{j+1}^{(m+1)})^{a_{j+1}} \dots (X_{l-1}^{(m+1)})^{a_{l-1}}$$

avec chaque  $c_{\underline{a}} \in \mathbb{K}$ .

Comme tout  $X_i^{(m+1)}$  est un  $h_m$ -vecteur propre, chaque  $\delta_m^{(m+1)}((X_{j+1}^{(m+1)})^{a_{j+1}} \dots (X_{l-1}^{(m+1)})^{a_{l-1}})$  est une combinaison linéaire de produits  $M_1 \delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)}) M_2$  avec  $j < i < l$  et  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) un monôme ordonné en les  $X_{j+1}^{(m+1)}, \dots, X_i^{(m+1)}$  (resp. en les  $X_i^{(m+1)}, \dots, X_{l-1}^{(m+1)}$ ). Ceci implique que  $\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)}))$  est une combinaison linéaire de produits  $N_1 \Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)})) N_2$  avec  $j < i < l$  et  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) un monôme ordonné en les  $X_{j+1}^{(m)}, \dots, X_i^{(m)}$  (resp. en les  $X_i^{(m)}, \dots, X_{l-1}^{(m)}$ ).

Comme  $\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)}(X_i^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}$  pour  $j < i < m$ , on conclut que

$$\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}.$$

On observe que ce résultat est aussi vrai quand  $l = j + 1$  car, dans ce cas,  $\delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})$  est nul (voir section 3.1.2). On a donc, pour  $j < l < m$ ,

- $\Theta^{(m)}(\delta_m^{(m+1)} \circ \delta_l^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})) \in \mathcal{P}^{(m)}$ .

On en déduit, par le lemme 3.2.15,

- $X_l^{(m)}U - q^{(\beta_l, \beta_m - \beta_j)}UX_l^{(m)} \in \mathcal{P}^{(m)}$ .

En transformant par l'homomorphisme d'algèbre  $f_m$ , on obtient :

**Lemme 3.2.16** ( $j < l < m$ ).

$$x_l^{(m)}u = q^{(\beta_l, \beta_m - \beta_j)}ux_l^{(m)}. \quad (3.9)$$

Rappelons (voir section 3.1.2) que  $V = \delta_m^{(m+1)}(X_j^{(m+1)})$  est un polynôme homogène en  $X_{j+1}^{(m+1)}, \dots, X_{m-1}^{(m+1)}$  de degré  $\beta_m + \beta_j$ . Donc, comme  $\Theta^{(m)}$  transforme chaque  $X_i^{(m+1)}$  ( $1 \leq i < m$ ) en  $X_i^{(m)}$ ,  $U = \Theta^{(m)}(V)$  est un polynôme homogène en  $X_{j+1}^{(m)}, \dots, X_{m-1}^{(m)}$  de degré  $\beta_m + \beta_j$ . Ceci implique :

**Lemme 3.2.17.**

$u$  est un polynôme non nul, homogène de degré  $\beta_m + \beta_j$ , en  $x_{j+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)}$ .

**Démonstration :**  $u = f_m(U)$  est non nul car  $U \notin \mathcal{P}^{(m)}$ . Comme  $f_m$  transforme chaque  $X_i^{(m+1)}$  en  $x_i^{(m)}$ ,  $u$  est un polynôme en  $x_{j+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)}$ . De plus,  $U$  étant homogène de degré  $\beta_m + \beta_j$ ,  $u = f_m(U)$  est homogène de degré  $\beta_m + \beta_j$  par le lemme 3.2.6. □

Rappelons (lemme 3.2.13) que  $j < l_p$  et que  $p$  est le plus grand entier tel que  $l_p < m$ . Notons  $c$  le plus petit entier tel que  $j < l_c$  ( $1 \leq c \leq p$ ). Comme  $u \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(m)}, \dots, x_{m-1}^{(m)} \rangle$ , il résulte de la proposition 3.2.9 (2.b.) que

$$u = u_1 z_{l_p}^{a_1} + \dots + u_M z_{l_p}^{a_M}$$

avec  $M \geq 1$ ,  $(a_1, \dots, a_M) \in \mathbb{Z}^M$  et :

- Si  $p = 1$ , alors chaque  $u_i \in \mathbb{K}$ .
- Si  $p > 1$  et  $j \geq l_{p-1}$ , alors chaque  $u_i \in \mathbb{K}$ .
- Si  $p > 1$  et  $j < l_{p-1}$ , alors chaque  $u_i \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_p)}, \dots, x_{l_{p-1}}^{(l_p)} \rangle$ ,

de sorte que l'on peut écrire

- Si  $c = p$ , alors chaque  $u_i \in \mathbb{K}$ .
- Si  $c < p$ , alors chaque  $u_i \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_p)}, \dots, x_{l_{p-1}}^{(l_p)} \rangle$ .

Dans les deux cas, on peut supposer que  $u_1, \dots, u_M$  sont tous non nuls et que  $a_1 < \dots < a_M$ . On observe alors que

- Chaque  $u_i \in \mathbb{K} \langle x_1^{(l_p)}, \dots, x_{l_{p-1}}^{(l_p)} \rangle \setminus \{0\}$ .
- Chaque  $u_i$  est homogène de degré  $\beta_m + \beta_j - a_i \beta_{l_p}$ .

En effet, comme  $u$  est homogène de degré  $\beta_m + \beta_j$  et  $z_{l_p} = x_{l_p}^{(l_p)}$  est homogène de degré  $\beta_{l_p}$ , on a, pour tout  $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$ ,

$$\overline{h}_\rho(u) = q^{-(\rho, a_1 \beta_{l_p})} \overline{h}_\rho(u_1) z_{l_p}^{a_1} + \dots + q^{-(\rho, a_M \beta_{l_p})} \overline{h}_\rho(u_M) z_{l_p}^{a_M}$$

$$= q^{-(\rho, \beta_m + \beta_j)} [u_1 z_{l_p}^{a_1} + \dots + u_M z_{l_p}^{a_M}].$$

Le corollaire 3.2.12 permet d'identifier les coefficients des  $z_{l_p}^{a_i}$  pour chaque  $i$ . Ainsi  $q^{-(\rho, a_i \beta_{l_p})} \overline{h_\rho}(u_i) = q^{-(\rho, \beta_m + \beta_j)} u_i$ , de sorte que  $\overline{h_\rho}(u_i) = q^{-(\rho, \beta_m + \beta_j - a_i \beta_{l_p})} u_i$  pour chaque  $i$ .

□

Par la proposition 3.2.10 (1.), on a  $x_{l_p}^{(m)} = z_{l_p} = x_{l_p}^{(l_p)}$ . Donc, au moyen du lemme 3.2.16 avec  $l = l_p$ , on obtient :

$$z_{l_p} u = q^{(\beta_{l_p}, \beta_m - \beta_j)} u z_{l_p} \quad (3.10)$$

et, par le lemme 3.2.6 (4.),

$$z_{l_p} u = z_{l_p} [u_1 z_{l_p}^{a_1} + \dots + u_M z_{l_p}^{a_M}] = \overline{h_{l_p}}(u_1) z_{l_p}^{a_1+1} + \dots + \overline{h_{l_p}}(u_M) z_{l_p}^{a_M+1}.$$

Chaque  $u_i$  étant homogène de degré  $\beta_m + \beta_j - a_i \beta_{l_p}$ , on en déduit

$$z_{l_p} u = [q^{-(\beta_{l_p}, \beta_m + \beta_j - a_1 \beta_{l_p})} u_1 z_{l_p}^{a_1} + \dots + q^{-(\beta_{l_p}, \beta_m + \beta_j - a_M \beta_{l_p})} u_M z_{l_p}^{a_M}] z_{l_p}. \quad (3.11)$$

Par les égalités (3.10) et (3.11), et après simplification par  $z_{l_p}$ , on obtient

$$q^{(\beta_{l_p}, \beta_m - \beta_j)} [u_1 z_{l_p}^{a_1} + \dots + u_M z_{l_p}^{a_M}] = q^{-(\beta_{l_p}, \beta_m + \beta_j - a_1 \beta_{l_p})} u_1 z_{l_p}^{a_1} + \dots + q^{-(\beta_{l_p}, \beta_m + \beta_j - a_M \beta_{l_p})} u_M z_{l_p}^{a_M}.$$

Si  $1 \leq i \leq M$ , en identifiant les coefficients de  $z_{l_p}^{a_i}$  (corollaire 3.2.12), il vient (puisque  $u_i \neq 0$  et  $q$  non racine de l'unité)

$$-(\beta_{l_p}, \beta_m + \beta_j - a_i \beta_{l_p}) = (\beta_{l_p}, \beta_m - \beta_j).$$

De là,  $a_i \|\beta_{l_p}\|^2 = 2(\beta_{l_p}, \beta_m)$  et, par suite,  $a_i = (\beta_{l_p}^\vee, \beta_m)$ .

Comme par construction, les  $a_i$  sont supposés deux à deux distincts, ceci implique que  $M = 1$  et on conclut :

**Lemme 3.2.18.**

$$u = u_p z_{l_p}^{a_p}$$

avec

- Si  $c = p$ , alors  $u_p \in \mathbb{K}^*$ .
- Si  $c < p$ , alors  $u_p \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_p)}, \dots, x_{l_p-1}^{(l_p)} \rangle \setminus \{0\}$ .
- $a_p = (\beta_{l_p}^\vee, \beta_m)$ .
- $u_p$  est homogène de degré  $\beta_m + \beta_j - a_p \beta_{l_p} = \gamma_p + \beta_j$  avec  $\gamma_p = s_{\beta_{l_p}}(\beta_m)$ .

Cela va nous permettre de démontrer

**Lemme 3.2.19.**

Pour chaque entier  $d$  avec  $c \leq d \leq p$ , on a

$$u = u_d z_{l_d}^{a_d} \dots z_{l_p}^{a_p}$$

avec

- Si  $c = d$ , alors  $u_d \in \mathbb{K}^*$ .
- Si  $c < d$ , alors  $u_d \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_d-1}^{(l_d)} \rangle \setminus \{0\}$ .
- Notons  $(\gamma_d, \dots, \gamma_p, \gamma_{p+1})$  la suite des racines (non nécessairement positives) définie par  $\gamma_{p+1} = \beta_m$  et, pour  $d \leq i \leq p$ ,  $\gamma_i = s_{\beta_{l_i}}(\gamma_{i+1})$ . Alors, chaque  $a_i = (\beta_{l_i}^\vee, \gamma_{i+1})$ .
- $u_d$  est homogène de degré  $\gamma_d + \beta_j$ .

**Démonstration :**

On procède par récurrence descendante sur  $d$ .

Si  $d = p$ , tout résulte du lemme 3.2.18.

Supposons que  $c \leq d < p$  et que le lemme est vrai au rang  $d + 1$ , c'est à dire :

$$u = u_{d+1} z_{l_{d+1}}^{a_{d+1}} \dots z_{l_p}^{a_p}$$

avec

- $u_{d+1} \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_{d+1})}, \dots, x_{l_d}^{(l_{d+1})} \rangle \setminus \{0\}$ .
- Si  $(\gamma_{d+1}, \dots, \gamma_p, \gamma_{p+1})$  est la suite des racines (non nécessairement positives) définie par  $\gamma_{p+1} = \beta_m$  et, pour  $d + 1 \leq i \leq p$ ,  $\gamma_i = s_{\beta_{l_i}}(\gamma_{i+1})$ , alors, chaque  $a_i = (\beta_{l_i}^\vee, \gamma_{i+1})$ .
- $u_{d+1}$  est homogène de degré  $\gamma_{d+1} + \beta_j$ .

Par la proposition 3.2.9 (2.b. avec  $j = l_d$ ), on a :

$$u_{d+1} = v_1 z_{l_d}^{b_1} + \dots + v_M z_{l_d}^{b_M}$$

avec  $M \geq 1$ ,  $(b_1, \dots, b_M) \in \mathbb{Z}^M$  et :

- Si  $d = c$ , alors chaque  $v_i \in \mathbb{K}$ .
- Si  $d > c$ , alors chaque  $v_i \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ .

Comme ci-dessus, on peut supposer que  $v_1, \dots, v_M$  sont tous non nuls et que  $b_1 < \dots < b_M$ . Comme  $u_{d+1}$  est homogène de degré  $\gamma_{d+1} + \beta_j$  et chaque  $z_{l_d}^{b_i}$  est homogène de degré  $b_i \beta_{l_d}$ , on déduit du corollaire 3.2.12 (par un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus pour les  $u_i$ ) que

- chaque  $v_i$  est homogène de degré  $\gamma_{d+1} + \beta_j - b_i \beta_{l_d}$ .

Par la proposition 3.2.10 (2.), on a

$$x_{l_d}^{(m)} = z_{l_d} + \sum_{\underline{s} = (s_{d+1}, \dots, s_p) \in F} \eta(\underline{s}) z_{l_{d+1}}^{s_{d+1}} \dots z_{l_p}^{s_p}, \quad (3.12)$$

où

- $F$  est un sous-ensemble fini (éventuellement vide) de  $\mathbb{Z}^{p-d}$ .
- Si  $\preceq$  représente l'ordre lexicographique inverse de  $\mathbb{Z}^{p-d}$ , alors, pour tout  $\underline{s}$  dans  $F$ , on a  $\underline{s} \prec 0$ .
- Pour tout  $\underline{s}$  dans  $F$ , on a  $\eta(\underline{s}) \in \mathbb{K}^*$ .

Par le lemme 3.2.6 (4.), on a (au moyen de (3.12))

$$z_{l_d} u_{d+1} = \overline{h_{l_d}}(v_1) z_{l_d}^{b_1+1} + \dots + \overline{h_{l_d}}(v_M) z_{l_d}^{b_M+1}.$$

Pour chaque  $\underline{e} = (e_{d+1}, \dots, e_p) \in \mathbb{Z}^{p-d}$ , notons  $z^{\underline{e}} := z_{l_{d+1}}^{e_{d+1}} \dots z_{l_p}^{e_p}$  et observons, au moyen du lemme 3.2.6 (4.) et compte tenu de l'homogénéité des  $v_i$ , que

$$z^{\underline{e}} u_{d+1} = \lambda_{\underline{e},1} v_1 z_{l_d}^{b_1} z^{\underline{e}} + \dots + \lambda_{\underline{e},M} v_M z_{l_d}^{b_M} z^{\underline{e}}.$$

avec  $(\lambda_{\underline{e},1}, \dots, \lambda_{\underline{e},M}) \in (\mathbb{K}^*)^M$ .

Si on pose  $\underline{a} = (a_{d+1}, \dots, a_p)$ , on a

$$x_{l_d}^{(m)} u = (1) + (2)$$

avec

$$\begin{aligned}
 (1) &= z_{l_d} u_{d+1} z^{\underline{a}} = \overline{h_{l_d}}(v_1) z_{l_d}^{b_1+1} z^{\underline{a}} + \dots + \overline{h_{l_d}}(v_M) z_{l_d}^{b_M+1} z^{\underline{a}} \\
 &= q^{-(\beta_{l_d}, \gamma_{d+1} + \beta_j - b_1 \beta_{l_d})} v_1 z_{l_d}^{b_1+1} z^{\underline{a}} + \dots + q^{-(\beta_{l_d}, \gamma_{d+1} + \beta_j - b_M \beta_{l_d})} v_M z_{l_d}^{b_M+1} z^{\underline{a}}
 \end{aligned}$$

et

$$(2) = \left( \sum_{\underline{s} \in F} \eta(\underline{s}) z^{\underline{s}} \right) u_{d+1} z^{\underline{a}} = \sum_{\underline{s} \in F} \eta(\underline{s}) (\lambda_{\underline{s},1} v_1 z_{l_d}^{b_1} z^{\underline{s}} + \dots + \lambda_{\underline{s},M} v_M z_{l_d}^{b_M} z^{\underline{s}}) z^{\underline{a}}.$$

D'autre part, on a aussi

$$u x_{l_d}^{(m)} = (1') + (2')$$

avec

$$\begin{aligned}
 (1') &= u_{d+1} z^{\underline{a}} z_{l_d} = v_1 z_{l_d}^{b_1} z^{\underline{a}} z_{l_d} + \dots + v_M z_{l_d}^{b_M} z^{\underline{a}} z_{l_d} \\
 &= q^{-(a_{d+1} \beta_{l_{d+1}} + \dots + a_p \beta_{l_p}, \beta_{l_d})} (v_1 z_{l_d}^{b_1+1} + \dots + v_M z_{l_d}^{b_M+1}) z^{\underline{a}}
 \end{aligned}$$

et

$$(2') = u_{d+1} z^{\underline{a}} \left[ \sum_{\underline{s} \in F} \eta(\underline{s}) z^{\underline{s}} \right] = \sum_{\underline{s} \in F} \eta(\underline{s}) (v_1 z_{l_d}^{b_1} z^{\underline{a}} z^{\underline{s}} + \dots + v_M z_{l_d}^{b_M} z^{\underline{a}} z^{\underline{s}}).$$

En utilisant le lemme 3.2.16 et avec  $l = l_d$ , on obtient :

$$(1) + (2) = q^{(\beta_{l_d}, \beta_m - \beta_j)} [(1') + (2')].$$

On observe que (1) et (1') sont des combinaisons linéaires à gauche de monômes du type  $z_{l_d}^h z^{\underline{a}}$  ( $h \in \mathbb{Z}$ ) dont les coefficients sont dans  $A = \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle$ , alors que (2) et (2') sont des combinaisons linéaires à gauche de monôme du type  $z_{l_d}^h z^{\underline{e}}$  ( $h \in \mathbb{Z}$ ,  $\underline{e} = \underline{a} + \underline{s}$ ,  $s \in F$ ) dont les coefficients sont dans  $A$ . Rappelons que, pour tout  $\underline{s} \in F$ , on a  $\underline{s} \prec 0 \Rightarrow \underline{e} = \underline{a} + \underline{s} \prec \underline{a}$ . Donc, par le corollaire 3.2.12, on a (1) =  $q^{(\beta_{l_d}, \beta_m - \beta_j)}(1')$ , ce qui implique que, si  $1 \leq i \leq M$ ,

$$q^{-(\beta_{l_d}, \gamma_{d+1} + \beta_j - b_i \beta_{l_d})} = q^{(\beta_{l_d}, \beta_m - \beta_j)} q^{-(a_{d+1} \beta_{l_{d+1}} + \dots + a_p \beta_{l_p}, \beta_{l_d})}.$$

Rappelons que, pour  $d+1 \leq h \leq p$ , on a  $\gamma_h = s_{\beta_{l_h}}(\gamma_{h+1}) = \gamma_{h+1} - (\beta_{l_h}^\vee, \gamma_{h+1}) \beta_{l_h} = \gamma_{h+1} - a_h \beta_{l_h}$ . Si on ajoute toutes ces égalités, on obtient  $\gamma_{d+1} = \gamma_{p+1} - (a_{d+1} \beta_{l_{d+1}} + \dots + a_p \beta_{l_p})$ . Comme  $\gamma_{p+1} = \beta_m$ , on obtient la formule

$$-(\beta_{l_d}, \gamma_{d+1} + \beta_j - b_i \beta_{l_d}) = (\beta_{l_d}, \beta_m - \beta_j) - (\beta_m - \gamma_{d+1}, \beta_{l_d})$$

pour tout  $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ .

Ceci implique que  $b_i \|\beta_{l_d}\|^2 - (\beta_{l_d}, \gamma_{d+1}) = (\beta_{l_d}, \gamma_{d+1})$ . Donc, comme les entiers  $b_i$  sont distincts, on a nécessairement  $M = 1$ ,  $b_1 = (\beta_{l_d}^\vee, \gamma_{d+1})$  et  $v_1$  est homogène de degré  $\gamma_{d+1} - b_1 \beta_{l_d} + \beta_j = \gamma_d + \beta_j$  si on pose  $\gamma_d := \gamma_{d+1} - b_1 \beta_{l_d} = s_{\beta_{l_d}}(\gamma_{d+1})$ .

Donc

$$u = u_d z_{l_d}^{a_d} z_{l_{d+1}}^{a_{d+1}} \dots z_{l_p}^{a_p}$$

avec  $u_d = v_1 \neq 0$ , de sorte que

- si  $d = c$ ,  $u_d \in \mathbb{K}^*$ ,
- si  $d > c$ , alors  $u_d \in \mathbb{K} \langle x_{j+1}^{(l_d)}, \dots, x_{l_{d-1}}^{(l_d)} \rangle \setminus \{0\}$ ,
- $a_d = b_1 = (\beta_{l_d}^\vee, \gamma_{d+1})$ ,
- $u_d$  est homogène de degré  $\gamma_d + \beta_j$  avec  $\gamma_d = s_{\beta_{l_d}}(\gamma_{d+1})$ .

□

Dans le cas particulier  $d = c$ , le lemme 3.2.19 permet d'écrire :

$$u = u_c z_{l_c}^{a_c} \dots z_{l_p}^{a_p}$$

avec

- $u_c \in \mathbb{K}^*$ .
- Si  $(\gamma_c, \dots, \gamma_p, \gamma_{p+1})$  est la suite des racines (non nécessairement positives) définies récursivement par  $\gamma_{p+1} = \beta_m$  et, pour  $c \leq i \leq p$ ,  $\gamma_i = s_{\beta_{l_i}}(\gamma_{i+1})$ , alors chaque  $a_i = (\beta_{l_i}^\vee, \gamma_{i+1})$ .

Comme  $u_c \in \mathbb{K}^*$  et comme chaque  $z_{l_d} = x_{l_d}^{(l_d)}$  est homogène de degré  $\beta_{l_d}$  (voir lemme 3.2.6),  $u$  est aussi homogène de degré  $a_c \beta_{l_c} + \dots + a_p \beta_{l_p}$ . Donc, comme le degré de  $u$  est défini de façon unique, on a

$$\beta_m + \beta_j = a_c \beta_{l_c} + \dots + a_p \beta_{l_p}.$$

Par la proposition 1.2.16, on conclut :

**Proposition 3.2.20.**

Si  $\mathcal{P}^{(m)}$  n'est pas dans  $\text{Im}(\phi_m)$ , alors

$$\Delta = \{i \in \llbracket 1, t \rrbracket \mid Z_i \in \mathcal{P}^{(2)}\}$$

n'est pas un diagramme positif pour (2.14) au sens de la définition 1.2.6.

## Chapitre 4

# Diagrammes de Cauchon dans $U_q^+(\mathfrak{g})$ avec un ordre de Lusztig

Les diagrammes de Cauchon de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  sont étroitement liés à la décomposition de  $w_0$  utilisée pour construire les générateurs canoniques ( $E_\beta, X_\beta$  ou  $X'_\beta$  du chapitre 2). À l'aide de la théorie des plans admissibles de Lusztig (voir section 2.1.3), des résultats démontrés dans la section 2.1.5 et des nouveaux résultats obtenus dans le cadre de l'effacement des dérivations (chapitre 3), nous décrivons dans ce chapitre ces diagrammes.

La première partie est dédiée à la démonstration du résultat suivant (premier théorème fondamental) :

Un diagramme  $\Delta$  vérifie toutes les contraintes provenant des plans admissibles (notion à définir) si et seulement si  $\Delta$  est un diagramme de Cauchon (au sens de la définition 3.1.2) .

La seconde partie présente un calcul explicite des contraintes pour chaque type d'algèbre de Lie simple avec une décomposition de  $w_0$  bien choisie. Ce calcul explicite permet de déterminer le nombre de diagramme de Cauchon dans chaque cas car ce nombre, égal au cardinal du spectre H-premier, est indépendant de la décomposition de  $w_0$  choisie. En particulier, on établit ici que :

$$|H - \text{Spec } U_q^+(\mathfrak{g})| = |\{\text{Diagrammes de Cauchon de } U_q^+(\mathfrak{g})\}| = |W|$$

### 4.1 Construction algorithmique des diagrammes

#### 4.1.1 Contraintes dans un diagramme

On utilise à nouveau les notations de la section 3.1 mais, comme on se place dans le cas  $w = w_0$ , on a  $t = N = |\Phi^+|$  et  $R = U[w_0] = U_q^+(\mathfrak{g})$ . On munit  $\Phi^+$  d'un ordre de Lusztig et on considère la décomposition de  $w_0$  associée à cet ordre.

On rappelle qu'un diagramme est une partie (quelconque)  $\Delta$  de l'ensemble des indices  $\llbracket 1, N \rrbracket$ . **Afin de faire le lien entre les diagrammes de Cauchon et la géométrie des systèmes de racines, nous sommes conduits (dans ce chapitre uniquement) à faire la convention suivante.**

#### **Convention.**

L'application  $i \mapsto \beta_i$  étant une bijection de  $\llbracket 1, N \rrbracket$  sur  $\Phi^+$  (section 1.1.2), nous identifions ces deux ensembles. Ainsi les diagrammes seront identifiés aux parties  $\Delta$  de  $\Phi^+$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et tout  $r \in \llbracket 2, N + 1 \rrbracket$ , nous noterons indifféremment  $X_i$  ou  $X_{\beta_i}$  (respectivement  $X_i^{(r)}$  ou  $X_{\beta_i}^{(r)}$ ) le  $i^{\text{ème}}$  générateur canonique de  $R$  (respectivement  $R^{(r)}$ ).

#### **Lemme 4.1.1.**

Soit  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soient  $l \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}^{(l+1)}$  un idéal premier de  $R^{(l+1)}$  et  $\mathcal{P}^{(l)} = \varphi_l(\mathcal{P}^{(l+1)})$ .

1. Si  $X_j^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$  alors  $X_j^{(l)} \in \mathcal{P}^{(l)}$ .
2. Si  $X_j^{(l+1)} = X_j^{(l)}$  (donc, en particulier, si  $j \geq l$ ), on a  $X_j^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)} \Leftrightarrow X_j^{(l)} \in \mathcal{P}^{(l)}$ .

**Démonstration :** Le 2. se démontre comme [Cau03a, lemme 4.3.4]. Montrons donc le 1. lorsque  $j < l$ .

1<sup>er</sup> cas : Si le pivot  $\varpi := X_l^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ , rappelons (cf. section 3.2.1) qu'il existe un homomorphisme d'algèbres surjectif

$$g : R^{(l)} \rightarrow \frac{R^{(l+1)}}{(\mathcal{P}^{(l+1)})}$$

qui vérifie  $g(X_i^{(l)}) = \overline{X_i^{(l+1)}} (:= X_i^{(l+1)} + (\mathcal{P}^{(l+1)}))$  pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Comme  $X_j^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ , on a  $g(X_j^{(l)}) \in \frac{\mathcal{P}^{(l+1)}}{(X_l^{(l+1)})}$  de sorte que  $X_j^{(l)} \in g^{-1}\left(\frac{\mathcal{P}^{(l+1)}}{(X_l^{(l+1)})}\right) := \mathcal{P}^{(l)}$ .

2<sup>nd</sup> cas : Supposons que le pivot  $\varpi := X_l^{(l+1)} \notin \mathcal{P}^{(l+1)}$  et notons  $S_l := \{\varpi^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Rappelons (cf section 3.1.3) que l'on a alors  $\mathcal{P}^{(l)} = R^{(l)} \cap (\mathcal{P}^{(l+1)} S_l^{-1})$ .

Notons  $\mathcal{J} := \bigcap_{h \in H} h(\mathcal{P}^{(l+1)})$  et observons que  $\mathcal{J}$  est un idéal bilatère  $H$ -invariant par construction. Comme

$R^{(l+1)}$  vérifie l'hypothèse 4.1.2 de [Cau03a] (section 3.1.2),  $X_j^{(l+1)}$  est un  $H$ -vecteur propre. De là, puisque  $X_j^{(l+1)}$  appartient à  $\mathcal{P}^{(l+1)}$ , il appartient aussi à  $\mathcal{J}$ .

**Observation 4.1.2.**  $h_l^{(l+1)}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$  et  $\delta_l^{(l+1)}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$ .

En effet,  $\mathcal{J}$  est un idéal bilatère  $H$ -invariant par construction donc  $h_l^{(l+1)}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$ . Et si  $J \in \mathcal{J}$ ,  $\delta_l^{(l+1)}(J) = X_l^{(l)} J - h_l^{(l+1)}(J) X_l^{(l)} \in \mathcal{J}$ .

Par l'observation ci-dessus, on en déduit que  $(\delta_l^{(l+1)})^n \circ (h_l^{(l+1)})^{-n} (X_j^{(l+1)}) \in \mathcal{J} \subset \mathcal{P}^{(l+1)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il en résulte que :

$$X_j^{(l)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{(1-ql)^{-n}}{[n]!_{q_l}} (\delta_l^{(l+1)})^n \circ (h_l^{(l+1)})^{-n} (X_j^{(l+1)}) \right] (X_l^{(l+1)})^{-n} \in \mathcal{P}^{(l+1)} S_l^{-1}.$$

Ainsi,  $X_j^{(l)} \in R^{(l)} \cap (\mathcal{P}^{(l+1)} S_l^{-1}) = \mathcal{P}^{(l)}$ . □

**Lemme 4.1.3.**

Soient  $l \in \llbracket 2, N \rrbracket$  et  $\mathcal{P}^{(l+1)}$  un idéal premier de  $R^{(l+1)}$ . Considérons un entier  $j$  avec  $2 \leq j < l$  et notons  $\mathcal{P}^{(j)} = \phi_j \circ \dots \circ \phi_l(\mathcal{P}^{(l+1)})$ .

1. Supposons que  $\beta_j$  est dans la boîte de  $\beta_l$  ou dans la boîte précédente. Alors

- $X_j^{(j+1)} = X_j^{(j+2)} = \dots = X_j^{(l+1)}$ ,
- $X_j^{(j+1)} \in \mathcal{P}^{(j+1)} \Rightarrow X_j^{(j+2)} \in \mathcal{P}^{(j+2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X_j^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ .

2. Supposons que les boîtes  $B$  et  $B'$  de  $\beta_j$  et  $\beta_l$  (respectivement) soient séparées par une boîte  $B''$  réduite à un élément  $\beta_e$  tel que  $X_e^{(e+1)} \in \mathcal{P}^{(e+1)}$ . Alors  $X_j^{(j+1)} \in \mathcal{P}^{(j+1)} \Rightarrow X_j^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ .

**Démonstration :**

1. Soit  $k \in \llbracket j+1, l \rrbracket$  de sorte que  $\beta_k$  est, soit dans la boîte de  $\beta_j$ , soit dans celle de  $\beta_l$ . Comme ces boîtes sont consécutives, grâce au théorème 2.1.39, on a  $X_k X_j = q^{-\langle \beta_k, \beta_j \rangle} X_j X_k$ , de sorte que par la formule (3.3) de la section 3.1.2,  $X_k^{(k+1)} X_j^{(k+1)} = q^{-\langle \beta_k, \beta_j \rangle} X_j^{(k+1)} X_k^{(k+1)}$ . On a donc  $\delta_k^{(k+1)}(X_j^{(k+1)}) = 0$  et, encore par la section 3.1.2, on a :

$$\begin{aligned} X_j^{(k)} &= \sum_{s=0}^{+\infty} \lambda_s (\delta_k^{(k+1)})^s \circ (h_k^{(k+1)})^{-s} (X_j^{(k+1)}) (X_k^{(k+1)})^{-s} \\ &= \sum_{s=0}^{+\infty} \lambda'_s (\delta_k^{(k+1)})^s (X_j^{(k+1)}) (X_k^{(k+1)})^{-s} = X_j^{(k+1)} \end{aligned}$$

$(\lambda_s, \lambda'_s \in \mathbb{K})$ .

Ceci montre le premier point. Le second point résulte du lemme 4.1.1.

2.  $B$  et  $B''$  étant consécutives, il résulte du point 1. que  $X_j^{(j+1)} = \dots = X_j^{(e+1)}$  et que  $X_j^{(j+1)} \in \mathcal{P}^{(j+1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X_j^{(e+1)} \in \mathcal{P}^{(e+1)}$ . Pour terminer montrons, par récurrence sur  $k$ , que :

$$X_j^{(k)} \in \mathcal{P}^{(k)} \Rightarrow X_j^{(k+1)} \in \mathcal{P}^{(k+1)} \text{ pour } e+1 \leq k \leq l$$

On écrit comme dans le 1. :

$$X_j^{(k)} = X_j^{(k+1)} + \sum_{s=1}^{+\infty} \lambda_s \left( \delta_k^{(k+1)} \right)^s \circ \left( h_k^{(k+1)} \right)^{-s} \left( X_j^{(k+1)} \right) \left( X_k^{(k+1)} \right)^{-s} \quad (\lambda_s \in \mathbb{K})$$

- Si  $\delta_k^{(k+1)}(X_j^{(k+1)}) = 0$ , alors on a  $X_j^{(k)} = X_j^{(k+1)}$  et on conclut par le lemme 4.1.1.
- Sinon, on a  $\delta_k^{(k+1)}(X_j^{(k+1)}) = \lambda \left( X_e^{(k+1)} \right)^m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ) par la formule (3.3) de la section 3.1.2 et, puisque  $B'$  et  $B''$  sont adjacentes (théorème 2.1.39),

$$\begin{aligned} \delta_k^{(k+1)} \left( X_e^{(k+1)} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \left( \delta_k^{(k+1)} \right)^s \left( X_j^{(k+1)} \right) &= \lambda \left( \delta_k^{(k+1)} \right)^{s-1} \left( \left( X_e^{(k+1)} \right)^m \right) = 0 \text{ pour } s > 1 \\ \Rightarrow X_j^{(k)} &= X_j^{(k+1)} + \lambda' \left( X_e^{(k+1)} \right)^m \left( X_k^{(k+1)} \right)^{-1} \text{ avec } \lambda' \in \mathbb{K}^*. \end{aligned}$$

- Si  $X_k^{k+1} \in \mathcal{P}^{(k+1)}$ , on considère l'homomorphisme  $g : R^{(k)} \rightarrow \frac{R^{(k+1)}}{(\mathcal{P}^{(k+1)})}$  qui vérifie  $g(X_i^{(k)}) = \overline{X_i^{(k+1)}}$  pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Par définition de  $\phi_k$  ([Cau03a, Notation 4.3.1.]), on a  $\mathcal{P}^{(k)} = g^{-1} \left( \frac{\mathcal{P}^{(k+1)}}{(X_k^{(k+1)})} \right)$ . Donc

$$X_j^{(k)} \in \mathcal{P}^{(k)} \Rightarrow g(X_j^{(k)}) = \overline{X_j^{(k+1)}} \in \frac{\mathcal{P}^{(k+1)}}{(X_k^{(k+1)})} \Rightarrow X_j^{(k+1)} \in \mathcal{P}^{(k+1)}$$

- Par le 1., on a  $X_e^{(e+1)} = \dots = X_e^{(k)} = X_e^{(k+1)}$  et  $X_e^{(e+1)} \in \mathcal{P}^{(e+1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X_e^{(k)} \in \mathcal{P}^{(k)} \Rightarrow X_e^{(k+1)} \in \mathcal{P}^{(k+1)}$ . Posons, comme dans [Cau03a, Théorème 3.2.1],  $S_k := \{ (X_k^{(k+1)})^n \mid n \in \mathbb{N} \}$  de sorte que  $\mathcal{P}^{(k+1)} = R^{(k+1)} \cap (\mathcal{P}^{(k)} S_k^{-1})$  par définition de  $\phi_k$  [Cau03a, Notation 4.3.1.]. On a alors :

$$\begin{aligned} X_j^{(k+1)} &= X_j^{(k)} - \lambda' \left( X_e^{(k+1)} \right)^m \left( X_k^{(k+1)} \right)^{-1} \\ &= X_j^{(k)} - \lambda' \left( X_e^{(k)} \right)^m \left( X_k^{(k+1)} \right)^{-1} \in \mathcal{P}^{(k)} S_k^{-1}. \end{aligned}$$

Comme  $X_j^{(k+1)}$  est aussi dans  $R^{(k+1)}$ , on a bien  $X_j^{(k+1)} \in \mathcal{P}^{(k+1)}$ . □

Pour trouver la forme des diagrammes de Cauchon, nous utilisons la proposition 5.2.1 de [Cau03a]. Avec les notations utilisées ici, cette proposition s'énonce :

**Proposition 4.1.4.**

Soit  $\Delta$  un diagramme de Cauchon et soit  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R)$ . Pour que  $\mathcal{P}$  appartienne à  $\text{Spec}_\Delta(R)$  il faut et il suffit qu'il vérifie le critère ci-dessous :

$$(\forall l \in \llbracket 1, N \rrbracket) \quad (X_l^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)} \Leftrightarrow \beta_l \in \Delta)$$

Ceci permet de démontrer :

**Proposition 4.1.5.**

Soient  $\Delta$  un diagramme de Cauchon et  $\beta_l \in \Delta$  ( $1 \leq l \leq N$ ). Supposons qu'il existe un entier  $k \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket$  vérifiant  $X_{\beta_l} X_{\beta_k} - q^{-(\beta_l, \beta_k)} X_{\beta_k} X_{\beta_l} = c X_{\beta_{i_1}} \dots X_{\beta_{i_s}}$  avec  $c \in \mathbb{K}^*$ ,  $s \geq 1$  et  $k < i_1 \leq \dots \leq i_s < l$ . Alors l'un des  $\beta_{i_r}$  ( $1 \leq r \leq s$ ) appartient à  $\Delta$ .

**Démonstration :** Soit  $\mathcal{P} \in \text{Spec}_\Delta(R)$ . Par la formule 3.3, on a :

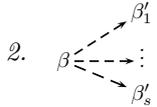
$$X_l^{(l+1)} X_k^{(l+1)} - q^{-(\beta_l, \beta_k)} X_k^{(l+1)} X_l^{(l+1)} = c X_{\beta_{i_1}}^{(l+1)} \dots X_{\beta_{i_s}}^{(l+1)} := M.$$

Par la proposition 4.1.4, on a  $X_l^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ , de sorte que  $M \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ . Comme  $\mathcal{P}^{(l+1)}$  est un idéal premier de  $R^{(l+1)}$ , on sait (section 3.1.2) que  $\mathcal{P}^{(l+1)}$  est complètement premier de sorte qu'il existe  $r \in \llbracket 1, s \rrbracket$  tel que  $X_{\beta_{i_r}}^{(l+1)} \in \mathcal{P}^{(l+1)}$ . Par le lemme 4.1.1, on en déduit  $X_{i_r}^{(i_r+1)} \in \mathcal{P}^{(i_r+1)}$  et, par la proposition 4.1.4,  $\beta_{i_r} \in \Delta$ .  $\square$

**Conventions.**

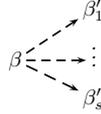
On appelle *contrainte* tout graphe orienté (coloré) de l'un des deux types suivants :

1.  $\beta \rightarrow \beta'$  avec  $\beta$  et  $\beta'$  deux éléments (distincts) de  $\Phi^+$ .

2.  avec  $s \geq 2$  et  $\beta, \beta'_1, \dots, \beta'_s, s+1$  éléments (distincts) de  $\Phi^+$ .

On dit qu'un diagramme  $\Delta$  vérifie la contrainte 1. (ou que la flèche pleine  $\beta \rightarrow \beta'$  est une contrainte pour  $\Delta$ ) si  $\beta \in \Delta \Rightarrow \beta' \in \Delta$ .

On dit qu'un diagramme  $\Delta$  vérifie la contrainte 2. (ou que le système de flèches pointillées



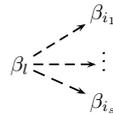
est une contrainte pour  $\Delta$ ) si  $\beta \in \Delta \Rightarrow (\beta'_1 \in \Delta \text{ ou } \dots \text{ ou } \beta'_s \in \Delta)$ .

La proposition 4.1.5 peut donc se réécrire :

**Proposition 4.1.6.**

Soient  $\Delta$  un diagramme de Cauchon et  $\beta_l \in \Delta$  ( $1 \leq l \leq N$ ). Supposons qu'il existe un entier  $k \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket$  vérifiant  $X_{\beta_l} X_{\beta_k} - q^{-(\beta_l, \beta_k)} X_{\beta_k} X_{\beta_l} = c X_{\beta_{i_1}}^{m_1} \dots X_{\beta_{i_s}}^{m_s}$  avec  $c \in \mathbb{K}^*$ ,  $s \geq 1$ ,  $k < i_1 < \dots < i_s < l$  et  $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}^*$ . Alors

1. Si  $s = 1$ , la flèche pleine  $\beta_l \rightarrow \beta_{i_1}$  est une contrainte pour  $\Delta$ .
2. Si  $s \geq 2$ , le système



est une contrainte pour  $\Delta$ .

Dans les trois propriétés qui suivent, on considère  $\Delta$  un diagramme de Cauchon.

**Proposition 4.1.7.**

Soient  $1 \leq l \leq n$  et  $\beta \in C_l$ . S'il existe  $i \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket$  tel que  $\beta + \epsilon_i = m\beta'$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta' \in \Phi^+$ , alors  $\beta \rightarrow \beta'$  est une contrainte (pour  $\Delta$ ).

**Démonstration :** On sait (théorème 2.1.36 et, proposition 2.1.15 lorsque  $\Phi = G_2$ , corollaire 2.1.17 lorsque  $\Phi \neq G_2$ ) que l'on dispose alors d'une formule de redressement de la forme  $E_\beta E_{\epsilon_i} - q^{(\beta, \epsilon_i)} E_{\epsilon_i} E_\beta = k E_{\beta'}^m$  avec  $k \neq 0$  (où les  $E_\gamma$  sont les générateurs de Lusztig de  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ ).

Il résulte alors de la proposition 2.1.44 que  $X_\beta X_{\epsilon_i} - q^{-(\beta, \epsilon_i)} X_{\epsilon_i} X_\beta = k' X_{\beta'}^m$  avec  $k' \neq 0$  puis, de la proposition 4.1.6, que  $\beta \rightarrow \beta'$  est une contrainte.  $\square$

**Proposition 4.1.8.**

Soit  $C_l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) une colonne exceptionnelle. Si  $\beta \in C_l$  est dans la boîte qui suit celle de la racine exceptionnelle  $\beta_{ex}$ , alors  $\beta \rightarrow \beta_{ex}$  est une contrainte (pour  $\Delta$ ).

**Démonstration :** Supposons d'abord que  $\Phi$  est de type  $G_2$ . Avec les notations de la proposition 2.1.15, on a donc  $l = 2$ ,  $\beta_{ex} = \beta_4$ ,  $\beta = \beta_5$  et on dispose (au moyen du théorème 2.1.36) d'une formule de redressement de la forme  $E_{\beta_5} E_{\beta_3} - q^{(\beta_3, \beta_5)} E_{\beta_3} E_{\beta_5} = k E_{\beta_4}$  avec  $k \in \mathbb{K}^*$ . On en déduit, par la proposition 4.1.6 que  $\beta = \beta_5 \rightarrow \beta_{ex} = \beta_4$  est une contrainte.

Supposons maintenant  $\Phi \neq G_2$ . On sait (proposition 1.1.19) que  $h'(\beta_{ex}) = t + \frac{1}{2}$  ( $t \in \mathbb{N}^*$ ), de sorte que  $h'(\beta) = h(\beta) = t$ . On sait également (proposition 1.1.10) que si  $D = \text{Vect}(\beta_{ex})$ , on a  $\beta' = s_D(\beta) = \beta_{ex} - \beta \in C_l$ , de sorte que  $h'(\beta') = h(\beta') = h(\beta_{ex}) - h(\beta) = t + 1$ . Il en résulte (définition 1.1.20 et remarque 1.1.21) que  $P = \text{Vect}(\beta, \beta')$  est un plan admissible de type (1.1) ou (1.2). Par la proposition 2.1.16 (et le théorème 2.1.36), on dispose alors d'une formule de redressement de la forme  $E_{\beta} E_{\beta'} - q^{(\beta, \beta')} E_{\beta'} E_{\beta} = k E_{\beta_{ex}}$  avec  $k \in \mathbb{K}^*$ . On en déduit, par la proposition 4.1.6, que  $\beta \rightarrow \beta_{ex}$  est une contrainte.  $\square$

**Proposition 4.1.9.**

Soit  $C_l$  ( $1 \leq l \leq n$ ) une colonne exceptionnelle et  $\beta_{ex}$  sa racine exceptionnelle. Supposons qu'il existe  $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$  tel que  $\beta_{ex} + \epsilon_i = \beta'_{i_1} + \beta'_{i_2}$  avec  $\beta'_{i_1} \neq \beta'_{i_2}$  dans la boîte qui précède celle de  $\beta_{ex}$ . Alors le système

$$\begin{array}{c} \beta_{ex} \text{---} \beta'_{i_1} \\ \beta_{ex} \text{---} \beta'_{i_2} \end{array}$$

est une contrainte.

**Démonstration :** Comme, par hypothèse,  $\beta'_{i_1} \neq \beta'_{i_2}$  sont dans la boîte qui précède celle de  $\beta_{ex}$ , le système de racines n'est pas de type  $G_2$  (cf exemple 1.1.4).

Comme dans la preuve proposition 4.1.7, il suffit de montrer que :

$$[E_{\beta_{ex}}, E_{\epsilon_i}]_q := E_{\beta_{ex}} E_{\epsilon_i} - q^{(\beta_{ex}, \epsilon_i)} E_{\epsilon_i} E_{\beta_{ex}} = \lambda E_{\beta'_{i_1}} E_{\beta'_{i_2}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}^*$$

Rappelons (proposition 1.1.10) que  $\beta_{ex} \perp \epsilon_i$ , de sorte que :

$$(\epsilon_i, \beta'_{i_1} + \beta'_{i_2}) = (\epsilon_i, \beta_{ex} + \epsilon_i) = \|\epsilon_i\|^2 \Rightarrow (\epsilon_i, \beta'_{i_1}) > 0 \text{ ou } (\epsilon_i, \beta'_{i_2}) > 0.$$

On peut donc supposer, sans perte de généralité, que  $(\epsilon_i, \beta'_{i_2}) > 0$ , de sorte que (corollaire 2.1.17 (et théorème 2.1.36))  $[E_{\beta'_{i_2}}, E_{\epsilon_i}]_q = 0$ .

Comme dans la preuve de la proposition précédente, on a :

- $h'(\beta_{ex}) = t + \frac{1}{2}$  ( $t \in \mathbb{N}^*$ ) et  $h'(\beta'_{i_1}) = h'(\beta'_{i_2}) = t + 1$ ,
- $\beta_{i_1} = s_D(\beta'_{i_1})$  et  $\beta_{i_2} = s_D(\beta'_{i_2})$  sont alors dans  $C_l$  et vérifient  $h'(\beta_{i_1}) = h'(\beta_{i_2}) = t$ ,
- $E_{\beta_{i_2}} E_{\beta'_{i_2}} - q^{(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2})} E_{\beta'_{i_2}} E_{\beta_{i_2}} = k E_{\beta_{ex}}$  avec  $k \neq 0$ .  $(\star)$

Par définition de  $\beta_{i_2}$ , on a  $\beta_{ex} = \beta_{i_2} + \beta'_{i_2}$ , de sorte que

$$\beta'_{i_1} + \beta'_{i_2} = \beta_{ex} + \epsilon_i = \beta_{i_2} + \beta'_{i_2} + \epsilon_i \Rightarrow \beta'_{i_1} = \beta_{i_2} + \epsilon_i.$$

Par le corollaire 2.1.17, on a donc  $[E_{\beta_{i_2}}, E_{\epsilon_i}]_q := h E_{\beta'_{i_1}}$  ( $h \neq 0$ ).

On sait que  $U_q^+(\mathfrak{g})$  est  $\mathbb{Z}\Phi$ -graduée. Il existe donc un (unique) automorphisme  $\sigma$  de  $U_q^+(\mathfrak{g})$  qui vérifie pour tout  $Q \in U_q^+(\mathfrak{g})$ , homogène de degré  $\beta$ ,  $\sigma(Q) = q^{(\beta, \epsilon_i)} Q$ .

Notons  $\delta$  la  $\sigma$ -dérivation intérieure à droite associée à  $E_{\epsilon_i}$ , de sorte que

$$\delta(Q) = QE_{\epsilon_i} - E_{\epsilon_i}\sigma(Q) \quad (\forall Q \in U_q^+(\mathfrak{g}))$$

Si  $\beta \in C_l$ , on a  $\delta(E_{\beta}) = E_{\beta} E_{\epsilon_i} - q^{(\beta, \epsilon_i)} E_{\epsilon_i} E_{\beta} = [E_{\beta}, E_{\epsilon_i}]_q$  et, de là :  $\delta(E_{\beta'_{i_2}}) = 0$  et  $\delta(E_{\beta_{i_2}}) = h E_{\beta'_{i_1}}$ . On déduit alors de  $(\star)$  que

$$\begin{aligned} k[E_{\beta_{ex}}, E_{\epsilon_i}]_q &= k\delta(E_{\beta_{ex}}) = \delta(E_{\beta_{i_2}} E_{\beta'_{i_2}}) - q^{(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2})} \delta(E_{\beta'_{i_2}} E_{\beta_{i_2}}) \\ &= E_{\beta_{i_2}} \delta(E_{\beta'_{i_2}}) + \delta(E_{\beta_{i_2}}) \sigma(E_{\beta'_{i_2}}) - q^{(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2})} (E_{\beta'_{i_2}} \delta(E_{\beta_{i_2}}) + \delta(E_{\beta'_{i_2}}) \sigma(E_{\beta_{i_2}})) \\ &= h[q^{(\beta'_{i_2}, \epsilon_i)} E_{\beta'_{i_1}} E_{\beta'_{i_2}} - q^{(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2})} E_{\beta'_{i_2}} E_{\beta'_{i_1}}] \end{aligned}$$

Comme  $\beta'_{i_2}$  et  $\beta'_{i_1}$  sont dans une même boîte, on sait (corollaire 2.1.43) que  $E_{\beta'_{i_1}} E_{\beta'_{i_2}} = E_{\beta'_{i_2}} E_{\beta'_{i_1}}$ , de sorte que :

$$k[E_{\beta_{ex}}, E_{\epsilon_i}]_q = h(q^{(\beta'_{i_2}, \epsilon_i)} - q^{(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2})}) E_{\beta'_{i_1}} E_{\beta'_{i_2}}$$

Puisque  $\beta_{i_2} + \beta'_{i_2} = \beta_{ex}$ ,  $P = \text{Vect}(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2})$  est un plan admissible de type (1.1) ou (1.2) (remarque 1.1.21) avec  $\{\beta_{i_2}, \beta'_{i_2}\} = \{\beta, \beta'\}$ , de sorte que  $(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2}) \leq 0$ . Comme on a supposé  $(\epsilon_i, \beta'_{i_2}) > 0$ , on a  $(\beta_{i_2}, \beta'_{i_2}) \neq (\epsilon_i, \beta'_{i_2})$  de sorte que le coefficient ci-dessus de  $E_{\beta'_{i_1}} E_{\beta'_{i_2}}$  est non nul. De là :

$$[E_{\beta_{ex}}, E_{\epsilon_i}]_q = \lambda E_{\beta'_{i_1}} E_{\beta'_{i_2}} \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

□

### 4.1.2 Contraintes provenant d'un plan admissible

On définit ici la notion de contrainte provenant d'un plan admissible  $P$  et on va vérifier que les diagrammes de Cauchon vérifient toute les contraintes provenant des plans admissibles. Rappelons d'abord les notations utilisées.

#### Notations.

- On note  $C_1, \dots, C_n$  les sous ensembles de  $\Phi^+$  représentant les colonnes.
- Dans la suite, on considère un diagramme  $\Delta$ , c'est à dire une partie de  $\Phi^+$
- On considère un entier  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\Delta_j := \Delta \cap C_j = \{\beta_{u_1}, \dots, \beta_{u_l}\} \subset C_j = \{\beta_k, \dots, \beta_r\}$ . On note ensuite, lorsqu'elles existent,  $\beta_{ex}$  la racine exceptionnelle et  $B_{ex} := \{\beta_{ex}\}$  la boîte qui la contient. S'il en est ainsi, on note  $B_1$  la boîte de  $C_j$  qui précède  $B_{ex}$  et,  $B'_1$  celle qui suit  $B_{ex}$ ; de sorte que  $s_D(B_1) = B'_1$ .

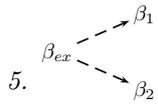
Dans les propositions 4.1.7, 4.1.8 et 4.1.9, on a établi l'existence de contraintes en utilisant des plans admissibles. On va formaliser ce fait dans la définition de "contrainte provenant d'un plan admissible" suivante :

#### Définition 4.1.10.

Soit  $\beta$  une racine de la colonne  $C_j$  telle que  $h'(\beta) = l$  et  $P$  un plan admissible (cf G. Lusztig [Lus90b] et [Lus90a]) de l'un des types suivants avec  $\Phi_P^+ = \Phi^+ \cap P$  :

1.  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta + \epsilon_i, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ . type (2.1)
2.  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta + \epsilon_i, \beta + 2\epsilon_i, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ . type (2.3)
3.  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta + \beta' = \beta_{ex}, \beta'\}$ ,  $\beta' \in C_j$  et  $h(\beta') = h(\beta) + 1$ . type (1.1)
4.  $\Phi_P^+ = \{\beta, \epsilon_i + 2\beta = \beta_{ex}, \epsilon_i + \beta, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ ,  $h'(\epsilon_i + 2\beta) = \frac{2l+1}{2}$  et  $h(\beta) = l$ . type (1.2) ou type (2.2)
5.  $\Phi_P^+ = \{\beta = \beta_{ex}, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ ,  $\epsilon_i \perp \beta$  et il existe  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $B_1$  telles que  $\beta + \epsilon_i = \beta_1 + \beta_2$ . type (2.4) ( $\beta_1 \neq \beta_2$  sinon  $\beta_1 \in \Phi_P^+$  et  $\beta_1 \neq \beta$  et  $\epsilon_i$ )
6.  $\Phi_P^+ = \Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_6\}$  est la partie positive d'un système de racines de type  $G_2$  (notations de la proposition 2.1.15).

Dans chacun des cas ci-dessus, on appelle contrainte(s) provenant de  $P$ , la ou les contraintes suivantes :

1.  $\beta \rightarrow \beta + \epsilon_i$ .
2.  $\beta \rightarrow \beta + \epsilon_i$  et  $\beta + \epsilon_i \rightarrow \beta + 2\epsilon_i$ .
3.  $\beta \rightarrow \beta + \beta'$ .
4.  $\beta \rightarrow \epsilon_i + \beta$ ,  $\beta \rightarrow \epsilon_i + 2\beta$  et  $\epsilon_i + 2\beta \rightarrow \epsilon_i + \beta$ .
5. 
6.  $\beta_6 \rightarrow \beta_5, \beta_5 \rightarrow \beta_4, \beta_5 \rightarrow \beta_3, \beta_4 \rightarrow \beta_3, \beta_3 \rightarrow \beta_2$ .

#### Lemme 4.1.11.

Soit  $\beta \in C_j$ .

1. Si  $C_j$  est exceptionnelle et si  $\beta$  appartient à la boîte qui suit  $\{\beta_{ex}\}$ , alors  $\beta \rightarrow \beta_{ex}$  est une contrainte provenant d'un plan admissible.

2. S'il existe  $i < j$  tel que  $\gamma = \beta + \epsilon_i \in \Phi^+$  alors  $\beta \rightarrow \gamma$  est une contrainte provenant d'un plan admissible.
3. Soit  $\beta \rightarrow \gamma$  une contrainte provenant d'un plan admissible ( $\gamma \in \Phi^+$ ). Alors  $\gamma \in C_j$ ,  $\gamma < \beta$  et, si aucune des racines  $\beta$  et  $\gamma$  n'est exceptionnelle, alors  $\gamma = \beta + \epsilon_i$  avec  $i < j$ .

**Démonstration :** Le résultat est immédiat dans le cas où  $\Phi$  est de type  $G_2$ . Dans la suite de la démonstration on considère donc un système de racines qui n'est pas de type  $G_2$ .

1. Soit  $P = \langle \beta, \beta_{ex} \rangle$ . Alors  $\beta' = s_D(\beta) = \beta_{ex} - \beta$  (proposition 1.1.10) appartient à  $P$ , de sorte qu'on a aussi  $P = \langle \beta, \beta' \rangle$ . Par la proposition 1.1.19, on a  $h'(\beta_{ex}) = t + \frac{1}{2}$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) et, puisque  $\beta$  est dans la boîte qui suit  $\beta_{ex}$ ,  $h'(\beta) = t$ . Il en résulte que  $h'(\beta') = h(\beta') = h(\beta_{ex}) - h(\beta) = 2t + 1 - t = t + 1 = h'(\beta) + 1$ . Donc (définition 1.1.20)  $P$  est un plan admissible de l'un des types suivants :

- type 1.1 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta_{ex} = \beta + \beta', \beta'\}$ .
- type 1.2 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta_{ex} = \epsilon_i + 2\beta, \beta' = \epsilon_i + \beta, \epsilon_i\}$  ( $i < j$ ).

Dans chaque cas,  $\beta \rightarrow \beta_{ex}$  est une contrainte provenant de  $P$  par définition.

2. Le plan  $P = \langle \beta, \epsilon_i \rangle$  est admissible (définition 1.1.20), de l'un des types suivants (remarque 1.1.21) :

- type 2.1 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta_1, \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_i, \epsilon_i\}$ ,  $\beta = \beta_1$  ou  $\beta_2$ .
- type 2.2 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta_1, \beta_{ex} = \epsilon_i + 2\beta_1, \beta_2 = \epsilon_i + \beta_1, \epsilon_i\}$  ( $i < j$ ),  $\beta = \beta_1, \beta_2$  ou  $\beta_{ex}$ .
- type 2.3 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta_1, \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_i, \beta_3 = \beta_2 + \epsilon_i, \epsilon_i\}$ ,  $\beta = \beta_1, \beta_2$  ou  $\beta_3$ .
- type 2.4 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta, \epsilon_i\}$ .

Comme  $\gamma = \beta + \epsilon_i$  est une racine, alors on n'est pas dans le type 2.4. Si on est dans le type 2.1, alors  $\beta = \beta_1$ . Si on est dans le type 2.2, alors  $\beta = \beta_1$ . Si on est dans le type 2.3, alors  $\beta = \beta_1$  ou  $\beta_2$ . Dans ces quatre cas,  $\beta \rightarrow \beta + \epsilon_i$  est une contrainte provenant de  $P$  par définition.

3. C'est une conséquence immédiate de la définition.

□

#### Proposition 4.1.12.

Soit  $\Delta$  un diagramme de Cauchon.  $\Delta$  vérifie toutes les contraintes (au sens de la section 4.1.1) provenant des plans admissibles.

**Démonstration :** Soit  $\beta \in C_j$ . Supposons que  $\beta \in \Delta$  et soit  $P$  un plan admissible contenant  $\beta$ . Notons, comme dans la définition 4.1.10,  $\Phi_P^+ = \Phi^+ \cap P$ .

1. Si  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta + \epsilon_i, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ , alors, d'après la proposition 4.1.7,  $\Delta$  vérifie la contrainte  $\beta \rightarrow \beta + \epsilon_i$ .
2. Si  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta + \epsilon_i, \beta + 2\epsilon_i, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ , alors, d'après la proposition 4.1.7 appliquée à  $\beta$  et  $\beta + \epsilon_i$ ,  $\Delta$  vérifie les contraintes  $\beta \rightarrow \beta + \epsilon_i$  et  $\beta + \epsilon_i \rightarrow \beta + 2\epsilon_i$ .
3. Si  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta + \beta' = \beta_{ex}, \beta'\}$  avec  $\beta' \in C_j$  et  $h(\beta') = h(\beta) + 1$ , alors, d'après la proposition 4.1.8,  $\Delta$  vérifie la contrainte  $\beta \rightarrow \beta + \beta'$ .
4. Si  $\Phi_P^+ = \{\epsilon_i, \epsilon_i + \beta, \epsilon_i + 2\beta = \beta_{ex}, \beta\}$  avec  $i < j$  et  $h'(\epsilon_i + 2\beta) = \frac{2l+1}{2}$ , alors, d'après les propositions 4.1.7, 4.1.8 et 4.1.9,  $\Delta$  vérifie respectivement les contraintes  $\beta \rightarrow \epsilon_i + \beta$ ,  $\beta \rightarrow \epsilon_i + 2\beta$  et  $\epsilon_i + 2\beta \rightarrow \epsilon_i + \beta$ .
5. Si  $\Phi_P^+ = \{\beta = \beta_{ex}, \epsilon_i\}$  avec  $i < j$ ,  $\epsilon_i \perp \beta$  et s'il existe  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $B_1$  tels que  $\beta + \epsilon_i = \beta_1 + \beta_2$ , alors,

d'après la proposition 4.1.9,  $\Delta$  vérifie la contrainte

$$\beta \begin{array}{l} \nearrow \beta_1 \\ \searrow \beta_2 \end{array}.$$

6. Si  $\Phi_P^+ = \Phi^+$  est de type  $G_2$ , la proposition 4.1.7 implique que  $\Delta$  vérifie les contraintes  $\beta_6 \rightarrow \beta_5, \beta_5 \rightarrow \beta_3, \beta_4 \rightarrow \beta_3, \beta_3 \rightarrow \beta_2$ . La proposition 4.1.8 implique quant à elle que  $\Delta$  vérifie la contrainte  $\beta_5 \rightarrow \beta_4$ .

□

### 4.1.3 Le premier théorème fondamental

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

#### Théorème 4.1.13.

Soit  $\Delta$  un diagramme (c'est à dire une partie de  $\Phi^+$ ). C'est un diagramme de Cauchon si et seulement si il vérifie toutes les contraintes provenant des plans admissibles.

Soit  $\beta \in \Phi^+$ , une racine positive de la colonne  $C_j$  avec  $1 < j < n$ . On note  $B_0$  la boîte de  $\beta$ ,  $B_1$  la boîte qui précède  $B_0$  (si elle existe) et  $B_2$  celle qui précède  $B_1$  (si elle existe) dans la colonne  $C_j$ .

On pose  $\Phi_\beta^+ = \{\epsilon_i \mid i < j\} \cup \{\gamma < \beta \mid \gamma \in B_0\} \cup B_1 \cup (B_2 \text{ si } B_1 = \{\beta_{ex}\})$ . Si  $\gamma \in \Phi^+$ , il existe  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  tel que  $\gamma = \beta_k$  et on rappelle (cf section 3.1.1) que  $X_\gamma = X_k$ .

On pose enfin  $D_\beta = \mathbb{K} \langle X_\gamma \mid \gamma < \beta \rangle$ .

**Lemme 4.1.14.**

$$D_\beta = \mathbb{K} \langle X_\gamma \mid \gamma \in \Phi_\beta^+ \rangle$$

**Démonstration :** On pose  $D'_\beta = \mathbb{K} \langle X_\gamma \mid \gamma \in \Phi_\beta^+ \rangle \subset D_\beta$ . Commençons par montrer que pour  $i < j$ ,  $\{X_\gamma, \gamma \in C_i\} \subset D'_\beta$ . Si  $\Phi$  est de type  $G_2$ ,  $\{X_\gamma, \gamma \in C_i\}$  est soit vide, soit réduit à  $X_{\epsilon_1} \in D'_\beta$ . Pour  $\Phi \neq G_2$ , on démontre ce résultat par récurrence sur  $h(\gamma)$ .

**Si  $h(\gamma) = 1$  :** alors  $\gamma = \epsilon_i$  et  $X_\gamma \in D'_\beta$  par définition de  $\Phi_\beta^+$ .

**Si  $h(\gamma) > 1$  et  $\gamma$  non exceptionnelle :** Par la proposition 1.1.18, il existe  $l < i$  tel que  $\gamma' = \gamma - \epsilon_l \in \Phi^+$ , de sorte que, par le corollaire 2.1.17 et la proposition 2.1.44, on a  $X_\gamma \in \mathbb{K} \langle X_{\gamma'}, X_{\epsilon_l} \rangle \subset D'_\beta$  (hypothèse de récurrence).

**Si  $h(\gamma) > 1$  et  $\gamma$  exceptionnelle :** On sait (proposition 1.1.10) que dans ce cas, il existe deux racines non exceptionnelles de  $C_i$ ,  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , telles que  $\eta_1 + \eta_2 = \gamma$  et  $h(\eta_2) = h(\eta_1) + 1$ . On en déduit par le corollaire 2.1.17 et la proposition 2.1.44 que  $X_\gamma \in \mathbb{K} \langle X_{\eta_1}, X_{\eta_2} \rangle \subset D'_\beta$  ( $X_{\eta_1}$  et  $X_{\eta_2}$  sont dans  $D'_\beta$  car  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont non exceptionnelle).

Reste à montrer que  $\{X_\gamma \mid \gamma \in C_j, \gamma < \beta\} \subset D'_\beta$ .

Si  $h(\gamma) = h(\beta)$  avec  $\gamma < \beta$ , alors  $\gamma \in \Phi_\beta^+$ . Donc  $X_\gamma \in D'_\beta$ .

On raisonne à nouveau par récurrence (sur  $h(B)$ ) pour montrer que pour toute boîte non exceptionnelle  $B$  de  $C_j$  telle que  $B < B_0$  (i.e. toute racine  $\beta$  de  $B$  est inférieure strictement à toutes les racines de  $B_0$ ), on a  $\{X_\gamma \mid \gamma \in B\} \subset D'_\beta$ .

• **Supposons  $B_1$  non exceptionnelle.**

**Initialisation :** Le résultat est vrai pour la boîte  $B_1$  puisque  $B_1 \subset \Phi_\beta^+$ .

**Hérédité :** Soient  $B$  une boîte non exceptionnelle de  $C_j$  telle que  $h(B) > h(B_1)$  et  $\gamma \in B$ . Par la proposition 1.1.18, il existe  $\epsilon_l \in \Pi$  ( $l < j$ ) tel que  $\gamma - \epsilon_l \in \Phi^+$ .  $\gamma' := \gamma - \epsilon_l$  est dans une boîte  $B'$  non exceptionnelle de  $C_j$  telle que  $h(B) = h(B') + 1 > h(B') \geq h(B_1) > h(B_0)$  et on a  $X_{\gamma'} \in D'_\beta$  par l'hypothèse de récurrence. Si  $\Phi \neq G_2$ , on déduit du corollaire 2.1.17 et de la proposition 2.1.44 que  $[X_{\gamma'}, X_{\epsilon_l}]_q = kX_\gamma$  avec  $k \in \mathbb{K}^*$ . Comme  $X_{\epsilon_l} \in D'_\beta$ , on en déduit que  $X_\gamma \in D'_\beta$ .

Si  $\Phi = G_2$ , on déduit des propositions 2.1.15 et 2.1.44 que  $[X_{\gamma'}, X_{\epsilon_l}]_q = kX_\gamma$  avec  $k \in \mathbb{K}^*$ . Comme  $X_{\epsilon_l} \in D'_\beta$ , on en déduit que  $X_\gamma \in D'_\beta$ .

• **Supposons  $B_1$  exceptionnelle.**

**Initialisation :** Le résultat est vrai pour la boîte  $B_2$  puisque, dans ce cas,  $B_2 \subset \Phi_\beta^+$ .

**Hérédité :** On fait le même raisonnement que ci-dessus en remplaçant  $B_1$  par  $B_2$ .

Reste à montrer que si  $B = \{\beta_{ex}\}$  est une boîte exceptionnelle de  $C_j$  telle  $B < B_0$ , on a  $X_{\beta_{ex}} \in D'_\beta$ .

Si  $B = B_1$ , on a  $B \subset \Phi_\beta^+$ , d'où le résultat.

Supposons donc  $B < B_1$ . Comme ci-dessus, on a  $\beta_{ex} = \eta_1 + \eta_2$  avec  $\eta_1$  et  $\eta_2$  deux racines non exceptionnelle de  $C_j$  telles que  $h(\eta_2) = h(\eta_1) + 1$ . Les boîtes de  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont non exceptionnelles, de part et d'autre de  $B$ , donc inférieures ou égales à  $B_1$ , donc inférieures strictement à  $B_0$ . Le résultat étant vrai pour les boîtes non exceptionnelles,  $X_{\eta_1} \in D'_\beta$  et  $X_{\eta_2} \in D'_\beta$ .

Si  $\Phi \neq G_2$ , on déduit (comme ci-dessus) du corollaire 2.1.17 et de la proposition 2.1.44 que  $X_{\beta_{ex}} \in D'_\beta$ .

Si  $\Phi = G_2$ , on déduit (comme ci-dessus) des propositions 2.1.15 et 2.1.44 que  $X_{\beta_{ex}} \in D'_\beta$ .

On a donc bien  $D_\beta = D'_\beta$ . □

On rappelle que  $R = U_q^+(\mathfrak{g}) = \mathbb{K} \langle X_{\beta_i} \mid i \in \llbracket 1, N \rrbracket \rangle := \mathbb{K} \langle X_i \mid i \in \llbracket 1, N \rrbracket \rangle$ . Soient  $\beta_r$  et  $\beta_{r+1}$  ( $1 \leq r \leq N-1$ ) deux racines consécutives de  $\Phi^+$  ( $\beta_r < \beta_{r+1}$ ). On rappelle que  $R^{(r+1)} = \mathbb{K} \langle X_i^{(r+1)} \rangle$  et  $R^{(r)} = \mathbb{K} \langle X_i^{(r)} \rangle$  ( $1 < r < N$ ) désignent les algèbres déduites de  $R$  par l'algorithme d'effacement des dérivations de la section 3.1.2.

**Lemme 4.1.15.**

Soit  $\beta_r \in \Phi^+$ , une racine positive de la colonne  $C_j$  et  $D_{\beta_r}^{(r+1)} = \mathbb{K} \langle X_\gamma^{(r+1)} \mid \gamma < \beta_r \rangle$ . Alors

$$D_{\beta_r}^{(r+1)} = \mathbb{K} \langle X_\gamma^{(r+1)} \mid \gamma \in \Phi_{\beta_r}^+ \rangle$$

**Démonstration :** Par les formules (3.3) de la section 3.1.2, les formules de redressement entre les  $X_\gamma^{(r+1)}$  lorsque  $\gamma \leq \beta_r$  sont les mêmes que les formules de redressement entre les  $X_\gamma$  avec  $\gamma \leq \beta_r$ . Il suffit donc de réécrire la démonstration du lemme 4.1.14, en remplaçant chaque  $X_\gamma$  par  $X_\gamma^{(r+1)}$ .  $\square$

Notons, comme dans la section 3.1,  $\phi : \text{Spec } R \hookrightarrow \text{Spec } (\overline{R})$  ( $\overline{R} = R^{(2)}$ ) l'injection canonique, c'est à dire la composée des injections canoniques  $\phi_r : \text{Spec } (R^{(r+1)}) \hookrightarrow \text{Spec } (R^{(r)})$  pour  $r \in \llbracket 2, N \rrbracket$ , et rappelons qu'un sous-ensemble  $\Delta$  de  $\Phi^+$  est un diagramme de Cauchon si et seulement si  $(\exists \mathcal{P} \in \text{Spec}(R)) (\phi(\mathcal{P}) = \langle Z_\gamma \mid \gamma \in \Delta \rangle)$ .

**Démonstration du théorème 4.1.13 :** Par la proposition 4.1.12, il nous suffit de démontrer que si  $\Delta$  vérifie les contraintes provenant des plans admissibles, c'est un diagramme de Cauchon.

Supposons donc que  $\Delta$  vérifie (toutes) les contraintes provenant des plans admissibles. Posons  $\mathcal{Q} := \langle Z_\gamma \mid \gamma \in \Delta \rangle$ . Par [Cau03a, Section 5.5.], c'est un idéal  $H$ -premier, donc complètement premier, de  $R^{(2)} = \overline{R}$  et si  $\beta \in \Phi^+ \setminus \Delta$ ,  $Z_\beta$  est régulier modulo  $\mathcal{Q}$ . Par suite,  $\mathcal{Q} \cap \{Z_\gamma \mid \gamma \in \Phi^+\} = \{Z_\gamma \mid \gamma \in \Delta\}$ .

Montrons par récurrence, que pour chaque  $r \in \llbracket 2, N+1 \rrbracket$ , il existe  $\mathcal{P}^{(r)} \in \text{Spec } (R^{(r)})$  tel que  $\mathcal{Q} = \phi_2 \circ \dots \circ \phi_{r-1}(\mathcal{P}^{(r)})$ .

**Initialisation :** Si  $r = 2$ , dans ce cas, on a  $\phi_2 \circ \dots \circ \phi_{r-1} = \text{Id}_{\text{Spec}(\overline{R})}$  et  $\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{Q}$  convient.

**Considérons un entier  $r \in \llbracket 2, N \rrbracket$ , supposons qu'il existe  $\mathcal{P}^{(r)} \in \text{Spec}(R^{(r)})$  tel que  $\phi_2 \circ \dots \circ \phi_{r-1}(\mathcal{P}^{(r)}) = \mathcal{Q}$  et montrons qu'il existe  $\mathcal{P}^{(r+1)} \in \text{Spec}(R^{(r+1)})$  tel que  $\phi_r(\mathcal{P}^{(r+1)}) = \mathcal{P}^{(r)}$ . Il en résultera que  $\phi_2 \circ \dots \circ \phi_r(\mathcal{P}^{(r+1)}) = \mathcal{Q}$ .**

- Si  $X_r^{(r)} \notin \mathcal{P}^{(r)}$ , cela résulte du premier point de la proposition 3.2.1.
- Supposons donc que  $X_r^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ . D'après le second point de la proposition 3.2.1, tout revient à montrer que

$$\Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) \right) \in \mathcal{P}^{(r)} \text{ pour } 1 \leq i \leq r-1.$$

**Observation 4.1.16.** Il suffit de démontrer que  $\Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) \right) \in \mathcal{P}^{(r)}$  pour chaque  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$  tel que  $\beta_i \in \Phi_{\beta_r}^+$ .

**Démonstration de l'observation :** Soit  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ . D'après le lemme 4.1.15, on a :

$$X_i^{(r+1)} = \sum_{j_1, \dots, j_s \in \Gamma} m_{j_1, \dots, j_s} X_{j_1}^{(r+1)} \dots X_{j_s}^{(r+1)} \text{ où } \Gamma := \{j \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \mid \beta_j \in \Phi_{\beta_r}^+\} \text{ et } m_{j_1, \dots, j_s} \in \mathbb{K}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) &= \sum m_{j_1, \dots, j_s} \delta_r^{(r+1)}(X_{j_1}^{(r+1)} \dots X_{j_s}^{(r+1)}) \\ &= \sum m_{j_1, \dots, j_s} \left[ \delta_r^{(r+1)}(X_{j_1}^{(r+1)}) X_{j_2}^{(r+1)} \dots X_{j_s}^{(r+1)} + \sigma_r^{(r+1)}(X_{j_1}^{(r+1)}) \delta_r^{(r+1)}(X_{j_2}^{(r+1)}) \dots X_{j_s}^{(r+1)} + \dots + \sigma_r^{(r+1)}(X_{j_1}^{(r+1)} \dots X_{j_{s-1}}^{(r+1)}) \delta_r^{(r+1)}(X_{j_s}^{(r+1)}) \right] \\ &= \sum m_{j_1, \dots, j_s} \left[ \delta_r^{(r+1)}(X_{j_1}^{(r+1)}) X_{j_2}^{(r+1)} \dots X_{j_s}^{(r+1)} + \lambda_{r, j_1} X_{j_1}^{(r+1)} \delta_r^{(r+1)}(X_{j_2}^{(r+1)}) \dots X_{j_s}^{(r+1)} + \dots + \lambda_{r, j_1} \dots \lambda_{r, j_{s-1}} X_{j_1}^{(r+1)} \dots X_{j_{s-1}}^{(r+1)} \delta_r^{(r+1)}(X_{j_s}^{(r+1)}) \right]. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) \right) &= \sum m_{j_1, \dots, j_s} \left[ \Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_{j_1}^{(r+1)}) \right) X_{j_2}^{(r)} \dots X_{j_s}^{(r)} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{r, j_1} X_{j_1}^{(r)} \Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_{j_2}^{(r+1)}) \right) \dots X_{j_s}^{(r)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{r, j_1} \dots \lambda_{r, j_{s-1}} X_{j_1}^{(r)} \dots X_{j_{s-1}}^{(r)} \Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_{j_s}^{(r+1)}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme chaque  $\Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_{j_i}^{(r+1)}) \right) \in \mathcal{P}^{(r)}$  par hypothèse, on a bien  $\Theta^{(r)} \left( \delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) \right) \in \mathcal{P}^{(r)}$ .

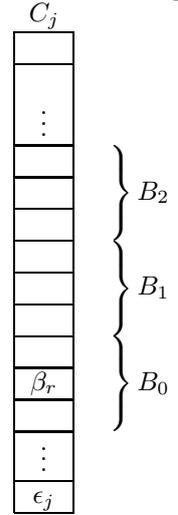
□

**Retour à la démonstration du théorème 4.1.13 :**

 Pour chaque  $s \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$ , on notera  $\mathcal{P}^{(s)} = \varphi_s \circ \dots \circ \varphi_{r-1}(\mathcal{P}^{(r)})$ .

**Observation 4.1.17.**  $\beta_r \in \Delta$ .

 En effet, comme  $X_r^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ , on déduit du lemme 4.1.1 que l'on a, successivement  $X_r^{(r-1)} \in \mathcal{P}^{(r-1)}$ , ...,  $X_r^{(2)} \in \mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{Q}$ . Comme  $\mathcal{Q} \cap \{Z_\beta \mid \beta \in \Phi^+\} = \{Z_\gamma \mid \gamma \in \Delta\}$ , on a  $Z_{\beta_r} (= X_r^{(2)}) \in \mathcal{Q} \Rightarrow \beta_r \in \Delta$ .

 On rappelle que, si  $\beta_r \in C_j$ ,  $\Phi_{\beta_r}^+ = \{\epsilon_i \mid i < j\} \cup \{\gamma < \beta_r \mid \gamma \in B_0\} \cup B_1 \cup (B_2 \text{ si } B_1 = \{\beta_{ex}\})$  ( $B_0$  est la boîte qui contient  $\beta_r$ ,  $B_1$  est la boîte qui précède  $B_0$  dans  $C_j$  quand elle existe et  $B_2$  la boîte qui précède  $B_1$  dans  $C_j$  lorsqu'elle existe).

 Soit  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$  tel que  $\beta_i \in \Phi_{\beta_r}^+$ .

- Si  $\beta_i \in B_0 \cup B_1$ , il résulte du théorème 2.1.39 (et de la remarque qui suit) que  $\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) = 0$ . Par suite  $\Theta^{(r)}(\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)})) = 0 \in \mathcal{P}^{(r)}$ .
- Supposons que  $B_1 = \{\beta_{ex}\}$  avec  $\beta_{ex} = \beta_e$  ( $e < r$ ), et que  $\beta_i \in B_2$ . D'après le théorème 2.1.39,  $\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) = P_{r,i}^{(r+1)}$  est homogène de poids  $\beta_r + \beta_i$  et les variables  $X_l^{(r+1)}$  apparaissant dans  $P_{r,i}^{(r+1)}$  sont telles que  $\beta_l \in B_1 = \{\beta_e\}$ . Par suite  $P_{r,i}^{(r+1)}$  est nul ou de la forme  $\lambda X_e^m$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  et  $m\beta_{ex} = \beta_r + \beta_i$ , de sorte que (en identifiant les coefficients de  $\epsilon_j$ ) on a  $m = 1$ . Si  $P_{r,i}^{(r+1)} = 0$ , on a  $\Theta^{(r)}(\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)})) = 0 \in \mathcal{P}^{(r)}$ .

 Sinon, supposons  $P_{r,i}^{(r+1)} = \lambda X_e^m$ . Comme  $\Delta$  vérifie les contraintes provenant des plans admissibles, il résulte du lemme 4.1.11 que  $\Delta$  vérifie la contrainte  $\beta_r \rightarrow \beta_{ex}$  et, puisque  $\beta_r \in \Delta$ , on a  $\beta_{ex} \in \Delta$ .

 On a donc  $X_e^{(2)} \in \mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(2)}$  et par le lemme 4.1.1,  $X_e^{(e+1)} \in \mathcal{P}^{(e+1)}$ . Comme  $\beta_e$  et  $\beta_r$  sont dans des boîtes adjacentes par construction, on déduit du lemme 4.1.3 que

$$X_e^{(e+1)} \in \mathcal{P}^{(e+1)} \Rightarrow X_e^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}.$$

 Par suite,  $\Theta^{(r)}(\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)})) = \Theta^{(r)}(\lambda X_e^{(r+1)}) = \lambda X_e^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ .

- Considérons à présent le cas  $\beta_i = \epsilon_k$  avec  $k < j$ . Si  $\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) = 0$ , on a  $\Theta^{(r)}(\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)})) = 0 \in \mathcal{P}^{(r)}$ .

 Supposons  $\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) \neq 0$ . D'après le théorème 2.1.39, on a

$$\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)}) = \sum_{i < j_1 \leq \dots \leq j_s < r} c_{j_1, \dots, j_s} X_{j_1}^{(r+1)} \dots X_{j_s}^{(r+1)} \quad (c_{j_1, \dots, j_s} \in \mathbb{K})$$

$$c_{j_1, \dots, j_s} \in \mathbb{K}^* \Rightarrow (\beta_{j_1} + \dots + \beta_{j_s} = \beta_r + \epsilon_k \text{ et } \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s} \notin B_0)$$

On a alors

$$\Theta^{(r)}(\delta_r^{(r+1)}(X_i^{(r+1)})) = \sum_{i < j_1 \leq \dots \leq j_s < r} c_{j_1, \dots, j_s} X_{j_1}^{(r)} \dots X_{j_s}^{(r)}$$

 et tout revient à démontrer que, si  $c_{j_1, \dots, j_s} \in \mathbb{K}^*$ , on a  $X_{j_1}^{(r)} \dots X_{j_s}^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ .

 Supposons donc  $c_{j_1, \dots, j_s} \neq 0$ . En considérant le coefficient de  $\epsilon_j$  dans l'égalité

$$\beta_{j_1} + \dots + \beta_{j_s} = \beta_r + \epsilon_k \tag{4.1}$$

 on voit que  $\beta_{j_s} \in C_j$ . Comme  $\beta_{j_s} \notin B_0$  et  $j_s < r$ , la boîte  $B_1$  existe.

Distinguons plusieurs cas.

- $B_0$  et  $B_1$  sont ordinaires. Comme  $j_s < r$  et  $\beta_{j_s} \notin B_0$ , on a  $h(\beta_r) < h(\beta_{j_s})$ . Par (4.1), on a aussi  $h(\beta_{j_s}) \leq h(\beta_r + \epsilon_k) = h(\beta_r) + 1$ . Il en résulte que  $s = 1$  et que  $\beta_{j_s} \in B_1$ . On dispose alors (lemme 4.1.11) de la contrainte  $\beta_r \rightarrow \beta_{j_s}$ . Comme  $\beta_r \in \Delta$ , on a  $\beta_{j_s} \in \Delta$  et, comme ci-dessus,  $X_{j_s}^{(j_s+1)} \in \mathcal{P}^{(j_s+1)}$  puis, de là,  $X_{j_s}^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ . Le monôme considéré est donc bien dans  $\mathcal{P}^{(r)}$ .
- $B_0$  est ordinaire et  $B_1$  est exceptionnelle de sorte que  $B_2$  existe. Comme dans le cas précédent, on vérifie que  $s = 1$  et que  $\beta_{j_s} \in B_2$ . On dispose donc encore (lemme 4.1.11) de la contrainte  $\beta_r \rightarrow \beta_{j_s}$ . On dispose aussi (lemme 4.1.11) de la contrainte  $\beta_r \rightarrow \beta_e$ . Comme  $\beta_r \in \Delta$ , on a  $\beta_e, \beta_{j_s} \in \Delta$ , de sorte que  $X_e^{(e+1)} \in \mathcal{P}^{(e+1)}$  et  $X_{j_s}^{(j_s+1)} \in \mathcal{P}^{(j_s+1)}$ . Par le second point du lemme 4.1.3, on en déduit que  $X_{j_s}^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ . Le monôme considéré est donc bien dans  $\mathcal{P}^{(r)}$ .
- $B_0$  est exceptionnelle. Puisque  $\beta_{j_s} \notin B_0$ ,  $\beta_{j_s}$  est ordinaire dans  $C_j$ . Par l'égalité (4.1), on a  $s \geq 2$  et  $\beta_{j_{s-1}}$  ordinaire dans  $C_j$ . Si on note  $h(\beta_r) = 2l + 1$  ( $l \geq 1$ ), on sait que  $h(\beta_{j_{s-1}}) \geq l + 1$ ,  $h(\beta_{j_s}) \geq l + 1$  et  $h(\beta_r + \epsilon_k) = 2l + 2$ . On en déduit que  $s = 2$  et que  $\beta_{j_{s-1}}, \beta_{j_s} \in B_1$ . L'égalité (4.1) s'écrit alors  $\beta_r + \epsilon_k = \beta_{j_{s-1}} + \beta_{j_s}$ .
  - Supposons  $\beta_{j_{s-1}} \neq \beta_{j_s}$ , de sorte que  $\beta_{j_{s-1}}$  et  $\beta_{j_s}$  étant dans la même boîte  $B_1$ , elles sont orthogonales. Il en résulte que  $\Phi$  n'est pas de type  $G_2$  (dans le cas  $G_2$ , les boîtes sont réduites à un élément). Notons  $P = \langle \beta_{j_s}, \beta_{j_{s-1}} \rangle$  le plan engendré par  $\beta_{j_s}, \beta_{j_{s-1}}$ , et supposons  $\Phi_P^+ \neq \{\beta_{j_{s-1}}, \beta_{j_s}\}$ . Alors, puisque  $\Phi_P \neq G_2$ ,  $\Phi_P$  est de type  $A_2$  ou  $B_2$ . Comme  $\beta_{j_{s-1}}$  et  $\beta_{j_s}$  sont orthogonales,  $\Phi_P$  est de type  $B_2$  et il existe  $\beta \in \Phi^+$  telle que  $\beta_r + \epsilon_k = \beta_{j_{s-1}} + \beta_{j_s} = m\beta$  avec  $m = 1$  ou  $2$ .  
 Si  $m = 1$ , alors  $\beta$  et  $\beta_r$  sont deux racines exceptionnelles distinctes de  $C_j$ , ce qui est impossible.  
 Supposons  $m = 2$ . On a alors  $\beta_r + \epsilon_k = \beta_{j_{s-1}} + \beta_{j_s} = 2\beta$ . On en déduit que  $h(\beta) = l + 1$ , de sorte que  $\beta$  est aussi un élément de  $B_1$  différent de  $\beta_{j_{s-1}}$  et  $\beta_{j_s}$ . Il en résulte que  $\beta, \beta_{j_{s-1}}, \beta_{j_s}$  sont deux à deux orthogonales, ce qui est contradictoire avec l'égalité  $\beta_{j_{s-1}} + \beta_{j_s} = 2\beta$ .  
 On a donc  $\Phi_P^+ = \{\beta_{j_{s-1}}, \beta_{j_s}\}$  et il résulte de la définition 4.1.10 que l'on dispose de la contrainte
 

$$\begin{array}{c} \beta_{j_{s-1}} \\ \nearrow \text{---} \\ \beta_r \\ \searrow \text{---} \\ \beta_{j_s} \end{array}$$

 . L'une des deux racines  $\beta_{j_s}$  ou  $\beta_{j_{s-1}}$  est alors dans  $\Delta$ . Si, par exemple,  $\beta_{j_s} \in \Delta$ , on a successivement, comme dans le premier cas,  $X_{j_s}^{(j_s+1)} \in \mathcal{P}^{(j_s+1)}$  et  $X_{j_s}^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ . Le monôme considéré est donc bien dans  $\mathcal{P}^{(r)}$ .
  - Si  $\beta_{j_{s-1}} = \beta_{j_s}$  alors l'égalité (4.1) s'écrit alors  $\beta_r + \epsilon_k = 2\beta_{j_s}$ . Si on pose  $\beta = s_D(\beta_{j_s}) = \beta_r - \beta_{j_s} \in \Phi^+$  et si on retranche  $\beta_{j_s}$  à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient  $\beta + \epsilon_k = \beta_{j_s}$ . Notons  $P = \langle \beta_r, \beta_{j_s} \rangle$  le plan engendré par  $\beta_r$  et  $\beta_{j_s}$ .  
 Supposons  $\Phi$  de type  $G_2$ . Alors on a  $\beta_r = \beta_4, \epsilon_k = \beta_1$  et  $\beta_{j_s} = \beta_3$ . Par la définition 4.1.10, on dispose donc de la contrainte  $\beta_r \rightarrow \beta_{j_s}$ .  
 Supposons que  $\Phi$  n'est pas de type  $G_2$ . Il résulte de l'égalité  $\beta_r + \epsilon_k = 2\beta_{j_s}$  que  $\Phi_P$  est de type  $B_2$ , de sorte que  $\Phi_P^+ = \{\epsilon_k, \epsilon_k + \beta = \beta_{j_s}, \epsilon_k + 2\beta = \beta_r, \beta\}$  avec  $h(\beta) = h(\beta_r) - h(\beta_{j_s}) = 2l + 1 - (l + 1) = l$ .  $P$  est donc un plan admissible de type 4 au sens de la définition 4.1.10. On dispose donc à nouveau de la contrainte  $\beta_r \rightarrow \beta_{j_s}$ .  
 Ainsi, dans tous les cas, on a  $\beta_{j_s} \in \Delta$ . On a donc successivement, comme dans le premier cas,  $X_{j_s}^{(j_s+1)} \in \mathcal{P}^{(j_s+1)}$  et  $X_{j_s}^{(r)} \in \mathcal{P}^{(r)}$ . Le monôme considéré est donc bien dans  $\mathcal{P}^{(r)}$ , ce qui termine la démonstration.

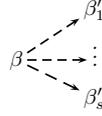
□

## 4.2 Forme des diagrammes pour une décomposition de $w_0$ particulière.

Dans ce paragraphe, on note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des diagrammes de Cauchon et, pour une décomposition particulière de  $w_0$ , on donne une description explicite de tous les  $\Delta$  appartenant à  $\mathcal{D}$ . Nous traiterons tous les types de systèmes de racines irréductibles. Pour chaque racine  $\beta \in \Phi^+$ , on va chercher à exprimer la liste des contraintes de la forme  $\beta \rightarrow \beta'$  avec  $\beta' \in \Phi^+$ . C'est pourquoi on introduit la

**Définition 4.2.1.**

Soit  $\beta \in \Phi^+$ . On appelle contrainte issue de  $\beta$  toute contrainte de la forme  $\beta \rightarrow \beta'$  ou de la forme



provenant d'un plan admissible (définition 4.1.10).

Comme toute contrainte provenant d'un plan admissible est de la forme ci-dessus, on peut donc remarquer :

**Observation 4.2.2.** Les contraintes provenant des plans admissibles sont les contraintes issues de toutes les racines  $\beta$  de  $\Phi^+$ .

Nous sommes maintenant en mesure de donner une description précise de ces contraintes :

**Lemme 4.2.3.**

On suppose que  $\Phi$  est un système de racine qui n'est pas de type  $G_2$ .

1. Soit  $C_l$  une colonne non exceptionnelle. Si  $\beta \in C_l$ , alors les contraintes issues de  $\beta$  sont :

$$\beta \rightarrow \beta' \text{ avec } \beta' \in C_l, \beta' = \beta + \epsilon_i \ (i < l)$$

2. Soit  $C_l$  une colonne exceptionnelle et  $\beta \in C_l$ .

- (a) Si  $\beta \neq \beta_{ex}$  et si  $\beta$  n'appartient pas à  $B$ , la boîte qui suit  $\{\beta_{ex}\}$ , alors les contraintes issues de  $\beta$  sont les suivantes :

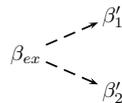
$$\beta \rightarrow \beta' \text{ avec } \beta' \in C_l, \beta' = \beta + \epsilon_i \ (i < l).$$

- (b) Si  $\beta \in B$ , la boîte qui suit  $\{\beta_{ex}\}$ , alors les contraintes issues de  $\beta$  sont les suivantes :

- $\beta \rightarrow \beta'$  avec  $\beta' \in C_l, \beta' = \beta + \epsilon_i \ (i < l)$ ,
- $\beta \rightarrow \beta_{ex}$ .

3. Soit  $C_l$  une colonne exceptionnelle,  $\beta_{ex}$  sa racine exceptionnelle et  $B_1$  la boîte qui précède  $\{\beta_{ex}\}$ . Les contraintes issues de  $\beta$  sont alors les suivantes :

- $\beta_{ex} \rightarrow \beta'$  avec  $\beta' \in B_1$  telle que  $P = \langle \beta_{ex}, \beta' \rangle$  soit un plan admissible de type 2.2 (i.e.  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta_{ex} = \epsilon_i + 2\beta, \beta' = \epsilon_i + \beta, \epsilon_i\}$  avec  $i < l$  et  $\beta \in B$  la boîte qui suit  $\{\beta_{ex}\}$ ).
- 



avec  $\beta'_1, \beta'_2 \in B_1, \beta'_1 + \beta'_2 = \beta_{ex} + \epsilon_i \ (i < l)$  et  $P = \langle \beta_{ex}, \epsilon_i \rangle$  est un plan admissible de type 2.4 (i.e.  $\Phi_P^+ = \{\beta_{ex}, \epsilon_i\}$ ).

**Démonstration :**

1. Soit  $\beta' \in C_l$  de la forme  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  avec  $i < l$ . D'après le lemme 4.1.11,  $\beta \rightarrow \beta'$  est une contrainte provenant d'un plan admissible. C'est donc une contrainte issue de  $\beta$ .  
Réciproquement, considérons une contrainte  $\beta \rightarrow \beta'$  issue de  $\beta$ , de sorte que  $\beta' \in C_l$  (lemme 4.1.11). Comme  $C_l$  est non exceptionnelle,  $\beta$  et  $\beta'$  sont non exceptionnelles et, par le lemme 4.1.11, on a  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  avec  $i < l$ .

2. (a) Soit  $\beta' \in C_l$  de la forme  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  avec  $i < l$ . D'après le lemme 4.1.11,  $\beta \rightarrow \beta'$  est une contrainte provenant d'un plan admissible. C'est donc une contrainte issue de  $\beta$ .  
Réciproquement, considérons une contrainte  $\beta \rightarrow \beta'$  issue de  $\beta$ , de sorte que  $\beta' \neq \beta, P = \langle \beta, \beta' \rangle$  est un plan admissible et  $\beta \rightarrow \beta'$  est une contrainte provenant de  $P$ . Par le lemme 4.1.11, on sait que  $\beta' \in C_l$ .

Supposons que  $\beta' = \beta_{ex}$ , de sorte que  $P$  est de l'un des types suivants :

- type 1.1 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta_1, \beta_{ex} = \beta_1 + \beta_2, \beta_2\}, \beta_1 > \beta_{ex} > \beta_2$ .
- type 1.2 avec  $\Phi_P^+ = \{\beta_1, \beta_{ex} = 2\beta_1 + \epsilon_i, \beta_2 = \beta_1 + \epsilon_i, \epsilon_i\} \ (i < l)$ , et  $\beta_1 > \beta_{ex} > \beta_2 > \epsilon_i$ .

Comme  $\beta \rightarrow \beta_{ex} = \beta'$  est une contrainte, il résulte de la définition 4.1.10 que  $\beta = \beta_1$ . On en déduit par l'observation 1.1.22 que  $\beta$  est dans la boîte qui suit  $\beta_{ex}$ , ce qui contredit notre hypothèse. Par suite,  $\beta' \neq \beta_{ex}$ .

Comme de plus,  $\beta \neq \beta_{ex}$ , il résulte du lemme 4.1.11 que  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  avec  $i < l$ .

(b) Comme  $\beta \in B$ , la contrainte  $\beta \rightarrow \beta_{ex}$  résulte du lemme 4.1.11. Si  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  est une racine, la contrainte  $\beta \rightarrow \beta'$  résulte également du lemme 4.1.11.

Réciproquement, soit  $\beta \rightarrow \beta'$  une contrainte issue de  $\beta$ . Par le lemme 4.1.11, on sait que  $\beta' \in C_l$ .

Si  $\beta' = \beta_{ex}$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, comme  $\beta \neq \beta_{ex}$ , on a  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  avec  $i < l$  par le lemme 4.1.11.

3. Si  $\beta' \in B_1$  vérifie les conditions de l'énoncé, il résulte de la définition 4.1.10 que  $\beta_{ex} \rightarrow \beta'$  est une contrainte associée au plan admissible P.

Si  $\beta'_1, \beta'_2$  appartiennent à  $B_1$  et vérifient les conditions de l'énoncé, il résulte de la définition 4.1.10 que

$$\begin{array}{c} \beta_{ex} \dashrightarrow \beta'_1 \\ \beta_{ex} \dashrightarrow \beta'_2 \end{array}$$

est une contrainte associée au plan admissible P.

Par ailleurs, il résulte de la définition 4.1.10 que toute contrainte issue de  $\beta_{ex}$  provient d'un plan admissible P de type 1.2 ou 2.4.

- Si P est de type 1.2, on a  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta_{ex} = 2\beta + \epsilon_1, \beta' = \beta + \epsilon_i, \epsilon_i\}$  ( $i < l$ ) et  $\beta > \beta_{ex} > \beta' > \epsilon_i$ . Dans ce cas, la seule contrainte issue de  $\beta_{ex}$  et provenant de P, est  $\beta_{ex} \rightarrow \beta'$  avec  $\langle \beta_{ex}, \beta' \rangle = P$  plan admissible de type 1.2.
- Si P est de type 2.4, on a  $P = \langle \beta_{ex}, \epsilon_i \rangle$  et  $\Phi_P^+ = \{\beta_{ex}, \epsilon_i\}$  ( $i < l$ ). Il résulte de la définition 4.1.10 que toute contrainte provenant de P est de la forme

$$\begin{array}{c} \beta_{ex} \dashrightarrow \beta'_1 \\ \beta_{ex} \dashrightarrow \beta'_2 \end{array}$$

où  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$  appartiennent à  $B_1$  et vérifient  $\beta'_1 + \beta'_2 = \beta_{ex} + \epsilon_i$ .

□

## 4.2.1 Le cas des familles infinies

### 4.2.1.1 Le cas $A_n$ , $n \geq 1$

#### Conventions.

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 - \cdots - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n.$$

On sait (voir par exemple [Lit98, Section 5]) que l'écriture  $w_0 = s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1}) \cdots \circ (s_{\epsilon_n} \circ s_{\epsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ s_{\epsilon_1})$  est une décomposition réduite qui induit l'ordre ci-dessous sur les racines positives.

$C_1$	$C_2$		$C_n$
$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$\cdots$	$\beta_{N-n+1} = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
	$\beta_3 = \epsilon_2$	$\cdots$	$\vdots$
		$\ddots$	$\vdots$
			$\beta_N = \epsilon_n$

On constate que ceci est un ordre de Lusztig, qu'aucune des colonnes  $C_1, \dots, C_n$  n'est exceptionnelle et que si  $\beta, \beta'$  sont deux racines d'une même colonne  $C_l$  avec  $\beta > \beta'$ , on a

$$\beta' = \beta + \epsilon_i \quad (i < l) \quad \Leftrightarrow \quad \beta' \text{ et } \beta \text{ sont consécutives}$$

On en déduit, au moyen du premier théorème fondamental (théorème 4.1.13) et du lemme 4.2.3 (1.),

**Proposition 4.2.4.**

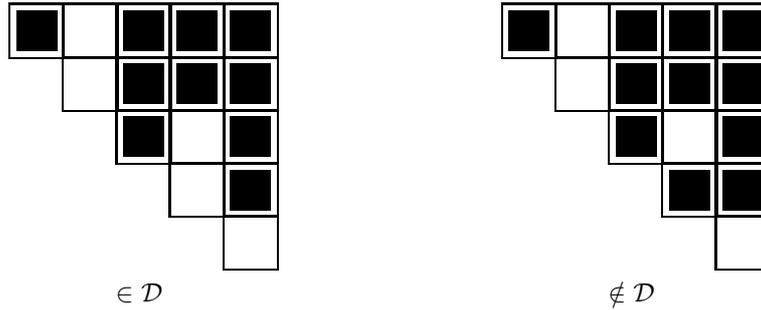
Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie toutes les contraintes de la forme  $\beta_{j+1} \rightarrow \beta_j$  où  $\beta_j$  et  $\beta_{j+1}$  sont deux racines consécutives d'une même colonne  $C_l$ .

**Convention.**

Si  $C_l = \{\beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_r = \epsilon_l\}$  est la colonne  $l$  avec  $1 \leq l \leq n$ , les colonnes tronquées contenues dans  $C_l$  sont les parties de la forme  $\{\beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_t\}$ ,  $t \in \llbracket s, r \rrbracket$ .

La proposition 4.2.4 permet d'affirmer que les diagrammes de Cauchon sont les diagrammes  $\Delta$  qui sont des réunions de colonnes tronquées.

Dans la figure ci dessous, on représente une racine positive  $\beta$  appartenant au diagramme  $\Delta$  par une case noire à l'emplacement de  $\beta$  dans le tableau représentant l'ordre induit par la décomposition de  $w_0$  choisie. On utilisera cette convention dans le reste du document.



**Proposition 4.2.5.**

L'ensemble des diagrammes de Cauchon  $\mathcal{D}$  a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Pour tout  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|C_l| = l$ , de sorte que le nombre de colonnes tronquées extraites de la colonne  $C_l$  est égale à  $l + 1$ . Il en résulte que  $|\mathcal{D}| = 2 \times 3 \times \dots \times (n + 1) = (n + 1)! = |W|$ . □

**4.2.1.2 Le cas  $B_n$ ,  $n \geq 2$**

**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :

$$\epsilon_1 \leftarrow \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$$

On sait (voir par exemple [Lit98, Section 6]) que l'écriture

$$w_0 = s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2}) \cdots \circ (s_{\epsilon_n} \circ s_{\epsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ \cdots \circ s_{\epsilon_n})$$

est une décomposition réduite qui induit l'ordre ci-dessous sur les racines positives.

$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_2 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2$	$\beta_{(n-1)^2+1} = 2\epsilon_1 + \dots + 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
	$\beta_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$\vdots$
	$\beta_4 = \epsilon_2$	$\vdots$
		$\beta_{N-n} = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
		$\beta_{N-n+1} = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
		$\beta_{N-n+2} = \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
		$\vdots$
		$\beta_N = \epsilon_n$

On constate que ceci est un ordre de Lusztig et qu'aucune des colonnes n'est exceptionnelle, et que si  $\beta, \beta'$  sont deux racines d'une même colonne  $C_l$  avec  $\beta > \beta'$ , on a

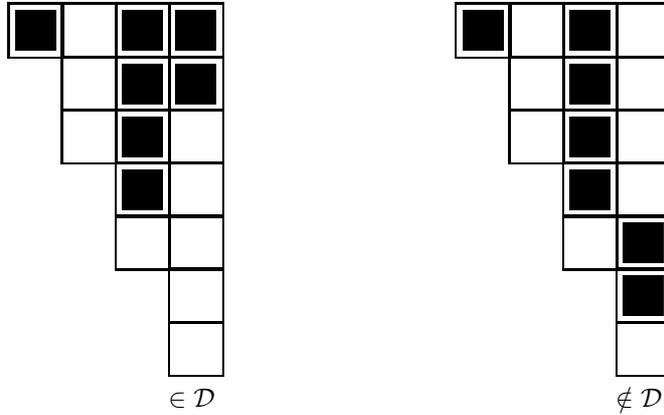
$$\beta' = \beta + \epsilon_i \quad (i < l) \quad \Leftrightarrow \quad \beta' \text{ et } \beta \text{ sont consécutives}$$

On en déduit, au moyen du premier théorème fondamental (théorème 4.1.13) et du lemme 4.2.3 (1.),

**Proposition 4.2.6.**

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie toutes les contraintes de la forme  $\beta_{j+1} \rightarrow \beta_j$  où  $\beta_j$  et  $\beta_{j+1}$  sont deux racines consécutives d'une même colonne  $C_l$ .

La notion de colonne tronquée étant définie comme dans le cas  $A_n$ , on en déduit que les diagrammes de Cauchon sont les diagrammes  $\Delta$  qui sont des réunions de colonnes tronquées (voir figure ci-dessous).



**Proposition 4.2.7.**

L'ensemble des diagrammes de Cauchon  $\mathcal{D}$  a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Pour tout  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|C_l| = 2l - 1$ , de sorte que le nombre de colonnes tronquées extraites de la colonne  $C_l$  est égale à  $2l$ . Il en résulte que  $|\mathcal{D}| = 2 \times 4 \times \dots \times 2n = 2^n(n!) = |W|$ . □

**4.2.1.3 Le cas  $C_n$ ,  $n \geq 3$**

**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :

$$\epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_2 - \dots - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$$

On sait (voir par exemple [Lit98, Section 6]) que l'écriture

$$w_0 = s_{\epsilon_1} \circ (s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2}) \cdots \circ (s_{\epsilon_n} \circ s_{\epsilon_{n-1}} \circ \dots \circ s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ \dots \circ s_{\epsilon_n})$$

est une décomposition réduite qui induit l'ordre ci-dessous sur les racines positives.

$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$\beta_{(n-1)^2+1} = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \dots + 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
	$\beta_3 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2$	$\vdots$
	$\beta_4 = \epsilon_2$	$\vdots$
		$\beta_{N-n} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
		$\beta_{N-n+1} = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \dots + 2\epsilon_{n-1} + 2\epsilon_n$
		$\beta_{N-n+2} = \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
		$\vdots$
		$\beta_N = \epsilon_n$

On constate que ceci est un ordre de Lusztig et que toutes les colonnes, à l'exception de la première, sont exceptionnelles. On a immédiatement :

**Observation 4.2.8.** Soit  $\beta \in C_l \setminus \{\beta_{ex}\}$  avec  $l \leq 2$ . Soit  $\beta' \in C_l$ .

1. Si  $\beta$  n'est pas la racine qui suit  $\beta_{ex} = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \dots + 2\epsilon_l$ , on a :

$$\beta' = \beta + \epsilon_i \quad (i < l) \quad \Leftrightarrow \quad \beta' \text{ et } \beta \text{ sont consécutives}$$

2. Si  $\beta$  est la racine qui suit  $\beta_{ex}$ , on a :

$$\beta' = \beta + \epsilon_i \quad (i < l) \quad \Leftrightarrow \quad \beta' = \beta + \epsilon_1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta' \text{ est la racine de } C_l \text{ qui précède } \beta_{ex}$$

On en déduit, par le lemme 4.2.3,

**Conséquence :** Soit  $\beta \in C_l \setminus \{\beta_{ex}\}$  ( $l \geq 2$ ). Supposons que  $\beta$  ne soit pas le premier élément de  $C_l$ .

1. Si  $\beta$  n'est pas la racine qui suit  $\beta_{ex}$ , il existe une unique contrainte  $\beta \rightarrow \beta'$  issue de  $\beta$  avec  $\beta'$  la racine de  $C_l$  qui précède  $\beta$ .
2. Si  $\beta$  est la racine qui suit  $\beta_{ex}$ , alors il existe exactement deux contraintes issues de  $\beta$ , à savoir :
  - $\beta \rightarrow \beta_{ex}$
  - $\beta \rightarrow \beta'$  avec  $\beta' = \beta + \epsilon_1$  la racine qui précède  $\beta_{ex}$ .

**Observation 4.2.9.** Il existe exactement une contrainte issue de la racine exceptionnelle  $\beta_{ex}$  de la colonne  $C_l$  ( $l \geq 2$ ), à savoir  $\beta_{ex} \rightarrow \beta'$  ou  $\beta'$  est la racine de  $C_l$  qui précède  $\beta_{ex}$ .

**Démonstration :** Si  $\beta'$  est la racine de  $C_l$  qui précède  $\beta_{ex}$  on constate que  $P = \langle \beta_{ex}, \beta' \rangle$  est un plan admissible de type 1.2 (puisque  $\Phi_P^+ = \{\beta, \beta_{ex} = 2\beta + \epsilon_1, \beta' = \beta + \epsilon_1, \epsilon_1\}$ ). Il résulte alors du lemme 4.2.3 que  $\beta_{ex} \rightarrow \beta'$  est une contrainte issue de  $\beta_{ex}$ . Comme la boîte  $B_1$  (qui précède  $\{\beta_{ex}\}$ ) est réduite à un élément, il résulte du lemme 4.2.3 que  $\beta_{ex} \rightarrow \beta'$  est l'unique contrainte issue de  $\beta_{ex}$ . □

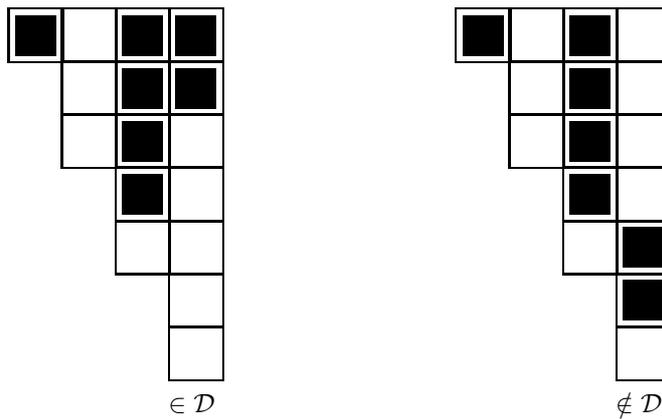
On déduit alors immédiatement du premier théorème fondamental (théorème 4.1.13) :

**Proposition 4.2.10.**

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie, pour tout  $l \geq 2$ ,

- toutes les contraintes de la forme  $\beta_{j+1} \rightarrow \beta_j$  où  $\beta_j$  et  $\beta_{j+1}$  sont deux racines consécutives de  $C_l$  ;
- la contrainte  $\beta \rightarrow \beta'$  où  $\beta$  est la racine qui suit  $\beta_{ex}$  et  $\beta'$  est celle qui précède  $\beta_{ex}$  dans  $C_l$ .

On en déduit que les diagrammes de Cauchon sont les diagrammes  $\Delta$  qui sont des réunions de colonnes tronquées (voir figure ci-dessous).



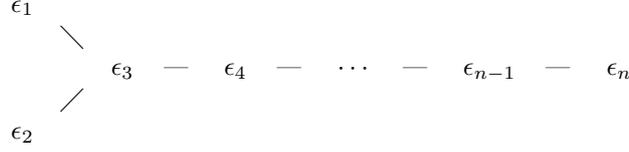
**Proposition 4.2.11.**

L'ensemble des diagrammes de Cauchon  $\mathcal{D}$  a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Pour tout  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $|C_l| = 2l - 1$ , de sorte que le nombre de colonnes tronquées extraites de la colonne  $C_l$  est égale à  $2l$ . Il en résulte que  $|\mathcal{D}| = 2 \times 4 \times \dots \times 2n = 2^n(n!) = |W|$ . □

4.2.1.4 Le cas  $D_n$ ,  $n \geq 4$ 
**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :



On sait (voir par exemple [Lit98, Section 6]) que l'écriture :

$$w_0 = s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ (s_{\epsilon_3} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_3}) \cdots \circ (s_{\epsilon_n} \circ s_{\epsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ s_{\epsilon_3} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_3} \circ \cdots \circ s_{\epsilon_n})$$

est une décomposition réduite qui induit l'ordre ci-dessous sur les racines positives.

$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_2 = \epsilon_2$	$\beta_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	$\cdots$	$\beta_{N-2n+1} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3 \cdots + 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
		$\beta_4 = \epsilon_2 + \epsilon_3$		$\vdots$
		$\beta_5 = \epsilon_1 + \epsilon_3$		$\vdots$
		$\beta_6 = \epsilon_3$		$\beta_{N-n-1} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \cdots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
				$\beta_{N-n} = \epsilon_1 \text{ ou } \epsilon_2 + \epsilon_3 \cdots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
				$\beta_{N-n+1} = \epsilon_2 \text{ ou } \epsilon_1 + \epsilon_3 \cdots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
				$\beta_{N-n+2} = \epsilon_3 + \cdots + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$
				$\vdots$
				$\beta_N = \epsilon_n$

$\star$  : selon la parité de la colonne

On constate que ceci est un ordre de Lusztig et qu'aucune des colonnes n'est exceptionnelle.

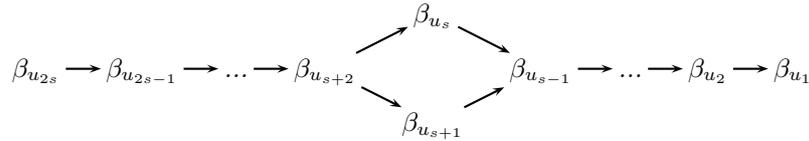
**Observation 4.2.12.** Soit  $l \geq 3$ .

- La colonne  $C_l$  comporte un nombre pair de racines, de sorte qu'il existe  $s \in \mathbb{N}$  ( $s = l - 1$ ) tel que  $C_l = \{\beta_{u_1} < \dots < \beta_{u_s} < \beta_{u_{s+1}} < \dots < \beta_{u_{2s}}\}$ .
- Soit  $\beta$  un élément de  $C_l$  différent de  $\beta_{u_1}$ .
  - Si  $\beta = \beta_{u_{s+2}}$ , il existe exactement 2 racines de  $C_l$  de la forme  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  ( $i < l$ ), à savoir  $\beta_{u_s}$  et  $\beta_{u_{s+1}}$ .
  - Si  $\beta \neq \beta_{u_{s+2}}$ , il existe une unique racine de  $C_l$  de la forme  $\beta' = \beta + \epsilon_i$  ( $i < l$ ), à savoir
    - si  $\beta \neq \beta_{u_{s+1}}$ ,  $\beta'$  est la racine qui précède  $\beta$ .
    - si  $\beta = \beta_{u_{s+1}}$ ,  $\beta' = \beta_{u_{s-1}}$ .

Comme il n'existe pas de colonne exceptionnelle, on déduit du premier théorème fondamental (théorème 4.1.13) et du lemme 4.2.3 (1.),

**Proposition 4.2.13.**

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie toutes les contraintes ci-dessous, pour chaque entier  $l \in \llbracket 3, n \rrbracket$ , en notant  $C_l = \{\beta_{u_1} < \dots < \beta_{u_s} < \beta_{u_{s+1}} < \dots < \beta_{u_{2s}}\}$  ( $s = l - 1$ ) :



La proposition 4.2.13 permet d'affirmer que les diagrammes de Cauchon sont les ensembles

$$\Delta = \bigsqcup_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket} \Delta_l$$

où,  $\Delta_1$  est une colonne tronquée extraite de  $C_1$ ,  $\Delta_2$  est une colonne tronquée extraite de  $C_2$  et, pour  $l \in \llbracket 3, n \rrbracket$ , en notant  $C_l = \{\beta_{u_1} < \dots < \beta_{u_s} < \beta_{u_{s+1}} < \dots < \beta_{u_{2s}}\}$  ( $s = l - 1$ ),  $\Delta_l$  est

- soit une colonne tronquée  $\{\beta_{u_1} < \dots < \beta_{u_{j-1}} < \beta_{u_j}\}$  extraite de  $C_l$ ,
- soit l'ensemble  $\{\beta_{u_1} < \dots < \beta_{u_{s-1}} < \beta_{u_{s+1}}\} \subset C_l$ .

Ainsi :



**Proposition 4.2.14.**

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :**  $\Delta_1$  prend deux valeurs ( $\emptyset$  ou  $C_1$ ).  $\Delta_2$  prend deux valeurs ( $\emptyset$  ou  $C_2$ ). Si  $l \in \llbracket 3, n \rrbracket$ , on a  $|C_3| = 2l - 2$ . On peut donc extraire  $2l - 1$  colonne tronquée de  $C_l$  de sorte que  $\Delta_l$  prend  $2l$  valeurs. Il en résulte que  $|\mathcal{D}| = 2 \times 2 \times 6 \times \dots \times 2n = 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 2n = 2^{n-1}(n!) = |W|$ . □

### 4.2.2 Les cas exceptionnels

#### 4.2.2.1 Le cas $G_2$

**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :

$$\epsilon_1 \Leftrightarrow \epsilon_2$$

On sait que l'écriture  $w_0 = s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2} \circ s_{\epsilon_1} \circ s_{\epsilon_2}$  est une décomposition réduite de  $w_0$  qui induit l'ordre suivant sur les racines positives.

	$\beta_2 = 3\epsilon_1 + \epsilon_2$
	$\beta_3 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2$
$\beta_1 = \epsilon_1$	$\beta_4 = 3\epsilon_1 + 2\epsilon_2$
	$\beta_5 = \epsilon_1 + \epsilon_2$
	$\beta_6 = \epsilon_2$

**Remarque 4.2.15.**

D'après la définition 4.1.10, les contraintes provenant de  $P = \text{Vect } \Phi^+$  sont

$$\beta_6 \longrightarrow \beta_5 \longrightarrow \beta_4 \longrightarrow \beta_3 \longrightarrow \beta_2$$

La remarque précédente permet d'affirmer que les diagrammes de Cauchon sont les diagrammes  $\Delta$  qui sont des réunions de colonnes tronquées

**Proposition 4.2.16.**

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Comme  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des diagrammes  $\Delta$  qui sont des réunions de colonnes tronquées

$$|\mathcal{D}| = 2 \times 6 = 12 = |W|.$$

□

4.2.2.2 Le cas  $F_4$

**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon_3 - \epsilon_4$$

On choisit la décomposition réduite de l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl suivante :

$$w_0 = s_4 s_3 s_4 s_2 s_3 s_4 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_4 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1 s_3 s_4 s_2 s_3 s_2 s_1$$

Cette décomposition induit l'ordre convexe suivant sur les racines positives :

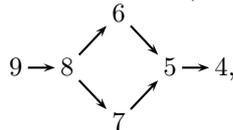
			$\beta_{10}(1, 3, 4, 2)$
			$\beta_{11}(1, 2, 4, 2)$
			$\beta_{12}(1, 2, 3, 2)$
			$\beta_{13}(1, 2, 3, 1)$
		$\beta_4(0, 1, 2, 2)$	$\beta_{14}(1, 2, 2, 2)$
		$\beta_5(0, 1, 2, 1)$	$\beta_{15}(1, 2, 2, 1)$
	$\beta_2(0, 0, 1, 1)$	$\beta_6(0, 1, 1, 1)$	$\beta_{16}(1, 1, 2, 2)$
$\beta_1(0, 0, 0, 1)$	$\beta_3(0, 0, 1, 0)$	$\beta_7(0, 1, 2, 0)$	$\beta_{17}(2, 3, 4, 2)$
		$\beta_8(0, 1, 1, 0)$	$\beta_{18}(1, 2, 2, 0)$
		$\beta_9(0, 1, 0, 0)$	$\beta_{19}(1, 1, 2, 1)$
			$\beta_{20}(1, 1, 1, 1)$
			$\beta_{21}(1, 1, 2, 0)$
			$\beta_{22}(1, 1, 1, 0)$
			$\beta_{23}(1, 1, 0, 0)$
			$\beta_{24}(1, 0, 0, 0)$

Les trois premières colonnes sont ordinaires et la quatrième est exceptionnelle. L'ordre induit par la décomposition de  $w_0$  est bien un ordre de Lusztig. Par le lemme 4.2.3, on peut donner la liste des contraintes (en représentant chaque racine  $\beta_i$  par son indice  $i$ ) :

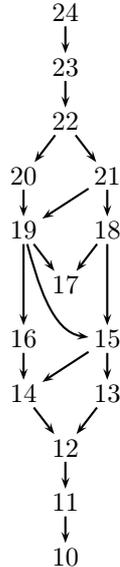
- Les contraintes issues des racines de la deuxième colonne (qui est ordinaire) sont :

$$3 \rightarrow 2$$

- Les contraintes issues des racines de la troisième colonne (qui est ordinaire) sont :



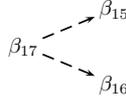
- Les contraintes issues des racines ordinaires de la dernière colonne (qui est exceptionnelle) sont :



4.2. Forme des diagrammes pour une décomposition de  $w_0$  particulière.

---

Cherchons les contraintes issues de la racine  $\beta_{17}$ . La boîte qui précède  $\{\beta_{17}\}$  est  $B_1 = \{\beta_{16}, \beta_{15}\}$ . Le plan  $P_1 = \langle \beta_{17}, \beta_{16} \rangle$  vérifie  $\Phi_{P_1}^+ = \{\beta_{18} = \beta_{17} - \beta_{16}, \beta_{17}, \beta_{16}\}$ , il est de type 1.1. Le plan  $P_2 = \langle \beta_{17}, \beta_{15} \rangle$  vérifie  $\Phi_{P_2}^+ = \{\beta_{19}, \beta_{17}, \beta_{15}, \epsilon_2, \beta_{16}\}$ , il est de type 1.2 de sorte que  $\beta_{17} \rightarrow \beta_{15}$  est une contrainte issue de  $\beta_{17}$ . Il résulte donc du lemme 4.2.3 que les contraintes issues de  $\beta_{17}$  sont  $\beta_{17} \rightarrow \beta_{15}$  et aucune autre sauf possiblement

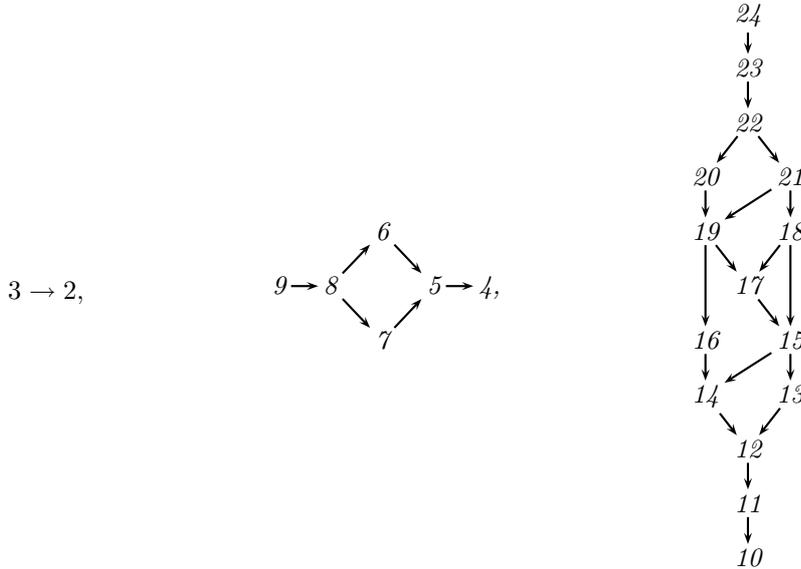


qui est redondante (pour la caractérisation des diagrammes de Cauchon par le premier théorème fondamental) avec la précédente.

La contrainte  $\beta_{19} \rightarrow \beta_{15}$  est également redondante avec les deux contraintes  $\beta_{19} \rightarrow \beta_{17}$  et  $\beta_{17} \rightarrow \beta_{15}$ . On en déduit, par le premier théorème fondamental,

**Proposition 4.2.17.**

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie les contraintes ci-dessous :



Ceci nous permet d'affirmer que les diagrammes de Cauchon sont les ensembles

$$\Delta = \bigsqcup_{l \in \llbracket 1, 4 \rrbracket} \Delta_l$$

où  $\Delta_1$  est une colonne tronquée extraite de  $C_1$ ,  $\Delta_2$  est une colonne tronquée extraite de  $C_2$ ,  $\Delta_3$  et  $\Delta_4$  sont des sous-ensembles de  $C_3$  et  $C_4$  respectivement qui vérifient les contraintes de la proposition 4.2.17.

**Proposition 4.2.18.**

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Comme dans le cas  $A_n$ ,  $\Delta_1$  prend deux valeurs ( $\emptyset$  ou  $C_1$ ) et  $\Delta_2$  prend trois valeurs ( $\emptyset$ ,  $\{\beta_2\}$  ou  $C_2$ ). Comme dans le cas  $D_n$ ,  $\Delta_3$  prend 8 valeurs.

On obtient le nombre de valeurs prises par  $\Delta_4$  au moyen du tableau suivant :

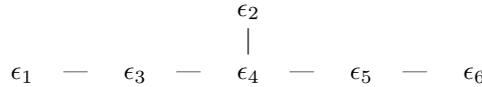
Plus grand élément de $\Delta_4$ :	Nombre de valeurs possibles pour $\Delta_4$ :
$\Delta_4 = \emptyset$	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	2
15	1
16	3
17	2
18	2
19	2
20	2
21	2
22	1
23	1
24	1
<b>TOTAL</b>	<b>24</b>

On dénombre donc :  $2 \times 3 \times 8 \times 24 = 2^7 \times 3^2$  diagrammes soit le cardinal du groupe de Weyl. □

#### 4.2.2.3 Le cas $E_6$

##### Conventions.

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :



Observons que les racines  $\epsilon_1$  à  $\epsilon_5$  engendrent un système de type  $D_5$ . Si on note  $\tau$  l'élément de plus grande longueur utilisé ci-dessus pour le type  $D_5$ , alors la décomposition

$$w_0 = \tau s_6 s_5 s_4 s_2 s_3 s_1 s_4 s_3 s_5 s_4 s_6 s_2 s_5 s_4 s_3 s_1$$

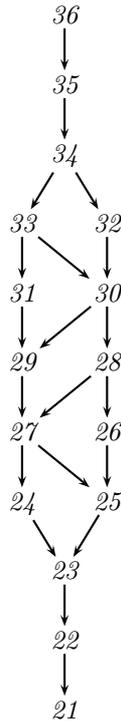
induit l'ordre convexe suivant sur les racines positives :

					$\beta_{21} = (1, 2, 2, 3, 2, 1)$
					$\beta_{22} = (1, 1, 2, 3, 2, 1)$
					$\beta_{23} = (1, 1, 2, 2, 2, 1)$
					$\beta_{24} = (1, 1, 2, 2, 1, 1)$
				$\beta_{13} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 2\epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_{25} = (1, 1, 1, 2, 2, 1)$
		$\beta_7 = \epsilon_2 + \epsilon_3 + 2\epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_{14} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + 2\epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_{16} = \epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_{26} = (0, 1, 1, 2, 2, 1)$
	$\beta_3 = \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_8 = \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_{15} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5$		$\beta_{27} = (1, 1, 1, 2, 1, 1)$
$\beta_1 = \epsilon_2$	$\beta_2 = \epsilon_5$	$\beta_4 = \epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_9 = \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$	$\beta_{17} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$	$\beta_{28} = (0, 1, 1, 2, 1, 1)$
		$\beta_5 = \epsilon_2 + \epsilon_4$	$\beta_{10} = \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5$	$\beta_{18} = \epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_4$	$\beta_{29} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$
		$\beta_6 = \epsilon_4$	$\beta_{11} = \epsilon_3 + \epsilon_4$	$\beta_{19} = \epsilon_1 + \epsilon_3$	$\beta_{30} = (0, 1, 1, 1, 1, 1)$
			$\beta_{12} = \epsilon_3$	$\beta_{20} = \epsilon_1$	$\beta_{31} = (1, 0, 1, 1, 1, 1)$
					$\beta_{32} = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$
					$\beta_{33} = (0, 0, 1, 1, 1, 1)$
					$\beta_{34} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$
					$\beta_{35} = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$
					$\beta_{36} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$

On observe que ceci est un ordre de Lusztig et que toutes les colonnes sont ordinaires. On en déduit, par le lemme 4.2.3 (1.) et le premier théorème fondamental (théorème 4.1.13),

##### Proposition 4.2.19.

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie toutes les contraintes de la proposition 4.2.13 pour les 5 premières colonnes, ainsi que les contraintes ci-dessous pour la dernière colonne.



**Proposition 4.2.20.**

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Pour tout diagramme  $\Delta$ , notons  $\Delta_1, \dots, \Delta_6$  les intersections respectives de  $\Delta$  avec  $C_1, \dots, C_6$ . Lorsque  $\Delta$  décrit  $\mathcal{D}$ , le nombre de valeurs prises par la suite  $(\Delta_1, \dots, \Delta_5)$  s'obtient comme dans la proposition 4.2.14 avec  $n = 5$ . Ce nombre est donc égal à  $4 \times 6 \times 8 \times 10 = 2^7 \times 3 \times 5$ . On obtient le nombre de valeurs prises par  $\Delta_6$  au moyen du tableau suivant :

Plus grand élément de $\Delta_6$ :	Nombre de valeurs possibles pour $\Delta_6$ :
$\Delta_6 = \emptyset$	1
21	1
22	1
23	1
24	1
25	2
26	2
27	2
28	1
29	3
30	1
31	4
32	2
33	2
34	1
35	1
36	1
<b>TOTAL</b>	<b><math>27 = 3^3</math></b>

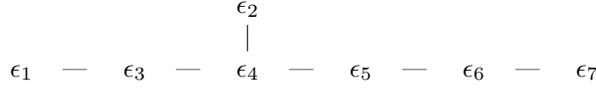
On obtient donc  $2^7 \times 3 \times 5 \times 3^3 = 2^7 \times 3^4 \times 5$  diagrammes de Cauchon, et on a bien  $|\mathcal{D}| = |W|$ .

□

4.2.2.4 Le cas  $E_7$

**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :



Observons que les racines  $\epsilon_1$  à  $\epsilon_6$  enendent un système de racines de type  $E_6$ . Si on note  $\sigma$ , l'élément de plus grande longueur utilisé ci-dessus pour le type  $E_6$ , la décomposition

$$w_0 = \sigma s_7 s_6 s_5 s_4 s_2 s_3 s_1 s_4 s_3 s_5 s_4 s_6 s_2 s_5 s_7 s_4 s_6 s_3 s_5 s_1 s_4 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7$$

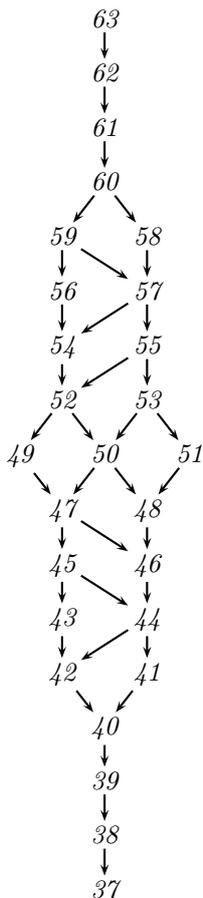
induit l'ordre convexe suivant sur les racines positives. (Pour pouvoir stocker toutes les informations sur une page, on remplace les vecteurs par leurs coordonnées dans la base  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_7)$  en ne mettant que les coordonnées utiles.)

									$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6, \epsilon_7$			
									$\beta_{37}(2, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$			
									$\beta_{38}(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$			
									$\beta_{39}(1, 2, 2, 4, 3, 2, 1)$			
									$\beta_{40}(1, 2, 2, 3, 3, 2, 1)$			
									$\beta_{41}(1, 1, 2, 3, 3, 2, 1)$			
								$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$	$\beta_{42}(1, 2, 2, 3, 2, 2, 1)$			
								$\beta_{21}(1, 2, 2, 3, 2, 1)$	$\beta_{43}(1, 2, 2, 3, 2, 1, 1)$			
								$\beta_{22}(1, 1, 2, 3, 2, 1)$	$\beta_{44}(1, 1, 2, 3, 2, 2, 1)$			
								$\beta_{23}(1, 1, 2, 2, 2, 1)$	$\beta_{45}(1, 1, 2, 3, 2, 1, 1)$			
								$\beta_{24}(1, 1, 2, 2, 1, 1)$	$\beta_{46}(1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)$			
					$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$			$\beta_{13}(1, 1, 2, 2, 1)$	$\beta_{25}(1, 1, 1, 2, 2, 1)$	$\beta_{47}(1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)$		
					$\epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$			$\beta_7(1, 1, 2, 1)$	$\beta_{14}(1, 1, 1, 2, 1)$	$\beta_{26}(0, 1, 1, 2, 2, 1)$	$\beta_{48}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1)$	
					$\epsilon_2, \epsilon_4, \epsilon_5$			$\beta_3(1, 1, 1)$	$\beta_8(1, 1, 1, 1)$	$\beta_{15}(1, 1, 1, 1, 1)$	$\beta_{27}(1, 1, 1, 2, 1, 1)$	$\beta_{49}(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)$
		$\epsilon_2, \epsilon_5$						$\beta_4(0, 1, 1)$	$\beta_9(1, 1, 1, 0)$	$\beta_{16}(1, 0, 1, 1, 1)$	$\beta_{28}(0, 1, 1, 2, 1, 1)$	$\beta_{50}(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1)$
	$\beta_1(1, 0)$	$\beta_2(0, 1)$						$\beta_5(1, 1, 0)$	$\beta_{10}(0, 1, 1, 1)$	$\beta_{17}(1, 1, 1, 1, 0)$	$\beta_{29}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$\beta_{51}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 1)$
								$\beta_6(0, 1, 0)$	$\beta_{11}(0, 1, 1, 0)$	$\beta_{18}(1, 0, 1, 1, 0)$	$\beta_{30}(0, 1, 1, 1, 1, 1)$	$\beta_{52}(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$
									$\beta_{12}(0, 1, 0, 0)$	$\beta_{19}(1, 0, 1, 0, 0)$	$\beta_{31}(1, 0, 1, 1, 1, 1)$	$\beta_{53}(0, 1, 1, 2, 2, 1, 1)$
										$\beta_{20}(1, 0, 0, 0, 0)$	$\beta_{32}(0, 1, 0, 1, 1, 1)$	$\beta_{54}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
											$\beta_{33}(0, 0, 1, 1, 1, 1)$	$\beta_{55}(0, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$
											$\beta_{34}(0, 0, 0, 1, 1, 1)$	$\beta_{56}(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
											$\beta_{35}(0, 0, 0, 0, 1, 1)$	$\beta_{57}(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
											$\beta_{36}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\beta_{58}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$
												$\beta_{59}(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
												$\beta_{60}(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$
												$\beta_{61}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$
												$\beta_{62}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$
												$\beta_{63}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$

On observe que ceci est un ordre de Lusztig et que toutes les colonnes sont ordinaires. On en déduit, par le lemme 4.2.3 (1.) et le premier théorème fondamental (theorem 4.1.13),

**Proposition 4.2.21.**

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie toutes les contraintes de la proposition 4.2.19 pour les 6 premières colonnes, ainsi que les contraintes ci-dessous pour la dernière colonne.



**Proposition 4.2.22.**

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Pour tout diagramme  $\Delta$ , notons  $\Delta_1, \dots, \Delta_7$  les intersections respectives de  $\Delta$  avec  $C_1, \dots, C_7$ . Lorsque  $\Delta$  décrit  $\mathcal{D}$ , le nombre de valeurs prises par la suite  $(\Delta_1, \dots, \Delta_6)$  s'obtient comme dans la proposition 4.2.20. Ce nombre est donc égal à  $2^7 \times 3^4 \times 5$ . On obtient le nombre de valeurs prises par  $\Delta_7$  au moyen du tableau suivant :

Plus grand élément de $\Delta_7$ :	Nombre de valeurs possibles pour $\Delta_7$ :
$\Delta_7 = \emptyset$	1
37	1
38	1
39	1
40	1
41	1
42	2
43	2
44	2
45	1
46	3
47	1
48	4
49	2
50	2
51	6
52	2
53	4
54	3
55	2
56	4
57	2
58	2
59	2
60	1
61	1
62	1
63	1
TOTAL	$56 = 2^3 \times 7$

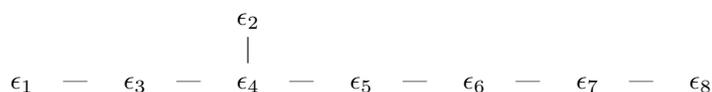
On obtient donc  $2^7 \times 3^4 \times 5 \times 2^3 \times 7 = 2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7$  diagrammes de Cauchon, et on a bien  $|\mathcal{D}| = |W|$ .

□

#### 4.2.2.5 Le cas $E_8$

**Conventions.**

On numérote les racines simples de manière que le diagramme de Dynkin soit :



On observe que les racines  $\epsilon_1$  à  $\epsilon_7$  forment un système de racines de type  $E_7$ . On note  $\sigma_7$ , l'élément de plus grande longueur utilisé ci-dessus pour le type  $E_7$  et on vérifie que la décomposition réduite suivante

$$w_0 = \sigma_7 s_8 s_7 s_6 s_5 s_4 s_2 s_3 s_1 s_4 s_3 s_5 s_4 s_6 s_2 s_5 s_7 s_4 s_6 s_8 s_3 s_5 s_7 s_1 s_4 s_6 s_3 s_2 s_5 s_4 s_5 s_2 s_3 s_6$$

$$s_1 s_4 s_7 s_3 s_5 s_8 s_4 s_6 s_2 s_5 s_7 s_4 s_6 s_3 s_5 s_1 s_4 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8.$$

induit l'ordre convexe suivant sur les racines positives (on ne fait apparaître ici que la dernière colonne et pour chacune des racines  $\beta_i$ , on calcule  $h'(\beta_i)$ ) :

$\beta_i$	$h'(\beta_i)$	$\beta_i$	$h'(\beta_i)$
$\beta_{64}(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 1)$	28	$\beta_{93}(1, 1, 2, 3, 2, 2, 2, 1)$	14
$\beta_{65}(2, 3, 4, 6, 5, 4, 2, 1)$	27	$\beta_{94}(1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 1)$	14
$\beta_{66}(2, 3, 4, 6, 5, 3, 2, 1)$	26	$\beta_{95}(1, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 1)$	14
$\beta_{67}(2, 3, 4, 6, 4, 3, 2, 1)$	25	$\beta_{96}(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$	13
$\beta_{68}(2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1)$	24	$\beta_{97}(1, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1)$	13
$\beta_{69}(2, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 1)$	23	$\beta_{98}(1, 1, 2, 3, 2, 2, 1, 1)$	13
$\beta_{70}(2, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 1)$	23	$\beta_{99}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)$	12
$\beta_{71}(1, 3, 3, 5, 4, 3, 2, 1)$	22	$\beta_{100}(1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 1)$	12
$\beta_{72}(2, 2, 3, 5, 4, 3, 2, 1)$	22	$\beta_{101}(1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$	12
$\beta_{73}(1, 2, 3, 5, 4, 3, 2, 1)$	21	$\beta_{102}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1)$	11
$\beta_{74}(2, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)$	21	$\beta_{103}(1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$	11
$\beta_{75}(1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)$	20	$\beta_{104}(1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)$	11
$\beta_{76}(2, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 1)$	20	$\beta_{105}(1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$	10
$\beta_{77}(1, 2, 2, 4, 4, 3, 2, 1)$	19	$\beta_{106}(1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)$	10
$\beta_{78}(1, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 1)$	19	$\beta_{107}(0, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1)$	10
$\beta_{79}(2, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 1)$	19	$\beta_{108}(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$	9
$\beta_{80}(1, 2, 2, 4, 3, 3, 2, 1)$	18	$\beta_{109}(0, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1)$	9
$\beta_{81}(1, 2, 3, 4, 3, 2, 2, 1)$	18	$\beta_{110}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	8
$\beta_{82}(2, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1)$	18	$\beta_{111}(0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$	8
$\beta_{83}(1, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 1)$	17	$\beta_{112}(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	7
$\beta_{84}(1, 2, 2, 4, 3, 2, 2, 1)$	17	$\beta_{113}(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	7
$\beta_{85}(1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1)$	17	$\beta_{114}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$	6
$\beta_{86}(1, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 1)$	16	$\beta_{115}(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	6
$\beta_{87}(1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 1)$	16	$\beta_{116}(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$	5
$\beta_{88}(1, 2, 2, 4, 3, 2, 1, 1)$	16	$\beta_{117}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$	4
$\beta_{89}(1, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 1)$	15	$\beta_{118}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$	3
$\beta_{90}(1, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1)$	15	$\beta_{119}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$	2
$\beta_{91}(1, 2, 2, 3, 3, 2, 1, 1)$	15	$\beta_{120}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	1
$\beta_{92}(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2)$	29/2		

On observe que ceci est un ordre de Lusztig, que les 7 premières colonnes sont ordinaires et la huitième exceptionnelle. Sa racine exceptionnelle est  $\beta_{ex} = \beta_{92}$ .

Cherchons les contraintes issues de  $\beta_{ex}$ .

Comme le système de racines est simplement lacé, il n'existe pas de plan admissible de type 1.2. Les contraintes issues de  $\beta_{ex}$  sont donc les contraintes de la forme

$$\beta_{92} \begin{cases} \rightarrow \beta'_1 \\ \rightarrow \beta'_2 \end{cases}$$

avec  $\beta'_1, \beta'_2$  dans la boîte  $B_1 = \{\beta_{89}, \beta_{90}, \beta_{91}\}$ , vérifiant  $\beta'_1 + \beta'_2 = \beta_{ex} + \epsilon_i$  ( $i < 8$ ) et  $P = \langle \beta_{ex}, \epsilon_i \rangle$  de type 2.4. Si  $i < 8$ , on sait que  $\beta_{ex} \perp \epsilon_i$ , de sorte que, puisque  $\Phi^+$  est simplement lacé,  $P = \langle \beta_{ex}, \epsilon_i \rangle$  est toujours de type 2.4.

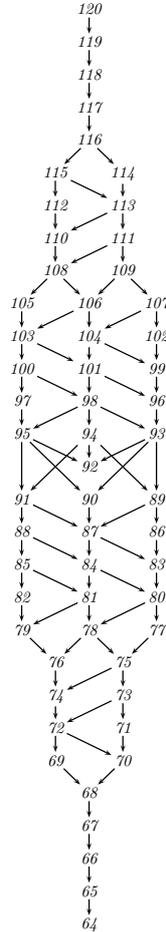
Par ailleurs, on a les égalités  $\beta_{90} + \beta_{91} = \beta_{92} + \epsilon_2$ ,  $\beta_{89} + \beta_{91} = \beta_{92} + \epsilon_5$ ,  $\beta_{89} + \beta_{90} = \beta_{92} + \epsilon_7$ . Il en résulte donc :

**Observation 4.2.23.** Les contraintes issues de la racine exceptionnelle  $\beta_{92}$  sont :

$$\beta_{92} \begin{cases} \rightarrow \beta_{90} \\ \rightarrow \beta_{91} \end{cases} \quad \beta_{92} \begin{cases} \rightarrow \beta_{89} \\ \rightarrow \beta_{91} \end{cases} \quad \beta_{92} \begin{cases} \rightarrow \beta_{90} \\ \rightarrow \beta_{89} \end{cases}$$

On déduit du lemme 4.2.3 (2.) la liste des contraintes issues des racines non exceptionnelles de la colonne  $C_8$  :

**Observation 4.2.24.** Les contraintes issues des racines ordinaires de  $C_8$  sont :



On en déduit, par le premier théorème fondamental (theorème 4.1.13) :

**Proposition 4.2.25.**

Soit  $\Delta$  un diagramme. Pour que  $\Delta$  soit un diagramme de Cauchon, il faut et il suffit qu'il vérifie toutes les contraintes de la proposition 4.2.21 pour les 7 premières colonnes, ainsi que les contraintes des observations 4.2.23 et 4.2.24 pour la dernière colonne.

**Proposition 4.2.26.**

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon a même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ .

**Démonstration :** Pour tout diagramme  $\Delta$ , notons  $\Delta_1, \dots, \Delta_8$  les intersections respectives de  $\Delta$  avec  $C_1, \dots, C_8$ . Lorsque  $\Delta$  décrit  $\mathcal{D}$ , le nombre de valeurs prises par la suite  $(\Delta_1, \dots, \Delta_7)$  s'obtient comme dans la proposition 4.2.22. Ce nombre est donc égal à  $2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7$ . On obtient le nombre de valeurs prises par  $\Delta_8$  au moyen du tableau suivant :

### 4.3. Nombre de diagrammes de Cauchon dans le cas général

Plus grand élément de $\Delta_8$ :	Nombre de valeurs prises par $\Delta_8$ :	Plus grand élément de $\Delta_8$ :	Nombre de valeurs prises par $\Delta_8$ :
$\Delta_8 = \emptyset$	1	93	5
64	1	94	3
65	1	95	6
66	1	96	8
67	1	97	8
68	1	98	4
69	1	99	12
70	2	100	3
71	2	101	6
72	2	102	16
73	1	103	3
74	3	104	8
75	1	105	5
76	4	106	4
77	2	107	7
78	2	108	3
79	7	109	3
80	2	110	4
81	3	111	2
82	11	112	5
83	5	113	2
84	4	114	2
85	6	115	2
86	9	116	1
87	6	117	1
88	5	118	1
89	4	119	1
90	12	120	1
91	6		
92	8		
		TOTAL	$240 = 2^4 \times 3 \times 5$

On obtient donc  $(2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7) \times (2^4 \times 3 \times 5) = 2^{14} \times 3^4 \times 5^2 \times 7$  diagrammes de Cauchon, et on a bien  $|\mathcal{D}| = |W|$ .

□

### 4.3 Nombre de diagrammes de Cauchon dans le cas général

On suppose toujours que  $w = w_0$ , c'est à dire que  $R = U_q^+(\mathfrak{g})$ , mais on ne fait plus d'hypothèse particulière sur la décomposition réduite (2.14) de  $w$ . L'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon étant en bijection avec les idéaux premiers  $H$ -invariants de  $R$  (proposition 3.1.4), son cardinal est indépendant de cette décomposition réduite. On déduit donc des propositions 4.2.5, 4.2.7, 4.2.11, 4.2.14, 4.2.16, 4.2.18, 4.2.20, 4.2.22 et 4.2.26 :

***Théorème 4.3.1.***

*$\mathcal{D}$  désignant l'ensemble des diagrammes de Cauchon, on a toujours*

$$|\mathcal{D}| = |H - \text{Spec}(U_q^+(\mathfrak{g}))| = |W|$$

## Chapitre 5

# Liens entre les diagrammes de Cauchon et les diagrammes positifs

Soit  $w \in W$ . L'algèbre  $R = U[w]$  est définie comme dans la section 2.2. Les diagrammes de Cauchon (pour la décomposition réduite (2.14)) sont définis comme dans la section 3.1.

On sait [Hum90, p. 16] que le plus grand élément  $w_0$  possède une décomposition réduite de la forme :

$$w_0 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_N} \quad (\alpha_i \in \Pi \text{ pour } 1 \leq i \leq N = |\Phi^+|) \quad (5.1)$$

où  $s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_t}$  est la décomposition réduite (2.14) de  $w$ .

Dans cette partie, on utilisera les conventions suivantes :

- On note  $R_0 = U[w_0]$  ( $= U_q^+(\mathfrak{g})$ ) l'algèbre associée à la décomposition réduite (5.1) décrite dans la section 2.2 et on note  $F_0 = \text{Fract}(R_0)$  son corps des fractions.
- Comme dans la section 3.1.1, on pose  $X_i = X_{\beta_i}$  pour  $1 \leq i \leq N$  et on observe que  $X_1, \dots, X_t$  sont aussi les générateurs de  $R = U^+[w]$  définis dans la section 2.2, de sorte que  $R = \mathbb{K} \langle X_1, \dots, X_t \rangle$  est une sous-algèbre de  $R_0 = \mathbb{K} \langle X_1, \dots, X_N \rangle$ .
- Pour tout  $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$ , on note encore  $h_\rho$  l'automorphisme de  $R_0$  défini comme dans la section 3.1.1.
- Chaque  $h_\rho$  peut être étendu de manière unique en un automorphisme, toujours noté  $h_\rho$ , de  $F_0$ .
- On note encore  $H$  l'ensemble de tous les automorphismes  $h_\rho$  de  $F_0$  ( $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$ ). C'est un sous-groupe de  $\text{Aut}(F_0)$ .
- Pour tout  $m$  dans  $\llbracket 2, N+1 \rrbracket$ , on définit l'algèbre  $R_0^{(m)}$  et ses générateurs canoniques  $X_1^{(m)}, \dots, X_N^{(m)}$  comme dans la section 3.1.2.

### 5.1 Une propriété des diagrammes de Cauchon

Considérons  $\Delta$  un diagramme pour (2.14) (ie. un sous ensemble de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ ). C'est aussi un diagramme pour (5.1) mais il n'est pas tout à fait clair que les propriétés " $\Delta$  est de Cauchon pour (2.14)" et " $\Delta$  est de Cauchon pour (5.1)" sont équivalentes. Dans cette partie, on se propose de clarifier ce point.

**Lemme 5.1.1.**

1. Il existe un unique isomorphisme d'algèbre  $g : R = \mathbb{K} \langle X_1, \dots, X_t \rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)} \rangle \subset R_0^{(t+1)}$  qui transforme chaque  $X_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ) en  $X_i^{(t+1)}$ .
2. Pour tout  $\rho \in \mathbb{Z}\Pi$  et  $B \in R$ , on a  $g \circ h_\rho(B) = h_\rho \circ g(B)$ .
3. L'application  $\mathcal{P} \mapsto g(\mathcal{P})$  est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers  $H$ -invariants de  $R$  dans l'ensemble des idéaux premiers  $H$ -invariants de  $\mathbb{K} \langle X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)} \rangle$ .

**Démonstration :**

1. On sait (voir section 3.1.1) que  $R$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre engendrée par les variables  $X_1, \dots, X_t$  soumises aux relations de Levendorskii - Soibelman (3.1) et (3.2). Comme  $X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)}$  vérifient les "mêmes" relations (3.3) et (3.5) (voir section 3.1.2), il existe un unique homomorphisme  $g : R = \mathbb{K} \langle X_1, \dots, X_t \rangle \rightarrow \mathbb{K} \langle X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)} \rangle \subset R_0^{(t+1)}$  qui transforme chaque  $X_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ) en  $X_i^{(t+1)}$ .  $g$  est surjectif et il transforme la base des monômes ordonnés en  $X_1, \dots, X_t$  en le système des monômes ordonnés en  $X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)}$ . Ce système est libre car extrait de la base des monômes ordonnées en  $X_1^{(t+1)}, \dots, X_N^{(t+1)}$  de  $R_0^{(t+1)}$  (cf. section 3.1.2). Donc  $g$  est un isomorphisme.
2. Pour  $1 \leq i \leq t$ , on a  $g \circ h_\rho(X_i) = q^{-(\rho, \beta_i)} g(X_i) = q^{-(\rho, \beta_i)} X_i^{(t+1)} = h_\rho(X_i^{(t+1)}) = h_\rho \circ g(X_i)$ . Ceci implique que les homomorphismes  $g \circ h_\rho$  et  $h_\rho \circ g$  coïncident sur  $R$ .
3. Résulte directement de 1. et 2.

□

Jusqu'à la fin de cette section, on identifie les générateurs canoniques  $X_1, \dots, X_t$  de  $R$  avec  $X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)}$  respectivement, de sorte que  $R$  est identifié avec la sous-algèbre  $\mathbb{K} \langle X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)} \rangle$  de  $R_0^{(t+1)}$ ,  $H - \text{Spec}(R)$  est identifié avec l'ensemble des idéaux premiers  $H$ -invariants de  $\mathbb{K} \langle X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)} \rangle$  et le corps des fractions  $F = \text{Fract}(R)$  est identifié avec la sous-algèbre de  $F_0$  définie comme suit :  $F = \{as^{-1} \mid a \in R, s \in R \setminus \{0\}\}$ . ( $R$  et  $F$  sont tous deux  $H$ -invariants.)

**Lemme 5.1.2.**

Considérons un entier  $m$  avec  $2 \leq m \leq t+1$ .

Si  $X_1^{(m)}, \dots, X_N^{(m)}$  sont les générateurs de  $R_0^{(m)}$ , alors  $X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)}$  sont les générateurs canoniques de  $R^{(m)}$ .

**Démonstration :** On procède par récurrence descendante sur  $m$ .

- Si  $m = t+1$ ,  $X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)}$  sont les générateurs canoniques de  $R$  par l'identification précédente. Donc, ils sont aussi les générateurs canoniques de  $R^{(t+1)}$  par la définition de cette algèbre.
- Supposons que  $2 \leq m \leq t$  et que  $X_1^{(m+1)}, \dots, X_t^{(m+1)}$  sont les générateurs canoniques de  $R^{(m+1)}$ . Notons (temporairement)  $X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)}$  les générateurs canoniques de  $R^{(m)}$ .
- Soit  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ .
  1. Si  $m \leq i$ , on a  $X_i^{(m)} = X_i^{(m+1)} = X_i^{(m)}$  (cf. section 3.1.2).
  2. Supposons  $i < m$  et notons  $h'_m$  l'unique automorphisme de  $R^{(m+1)}$  qui vérifie  $h'_m(X_j^{(m+1)}) = \lambda_{m,j} X_j^{(m+1)}$  ( $\lambda_{m,j} = q^{-(\beta_m, \beta_j)}$ ) pour  $1 \leq j \leq t$  (cf. section 3.1.2). On a

$$X_i^{(m)} = X_i^{(m+1)} + \sum_{l=1}^{+\infty} C_l^{(m+1)} (X_m^{(m+1)})^{-l}$$

avec

$$C_l^{(m+1)} = \frac{(1-q_m)^{-l}}{[l]!_{q_m}} \lambda_{m,i}^{-l} (\delta_m^{(m+1)})^l (X_i^{(m+1)}),$$

où  $\delta_m^{(m+1)} : R^{(m+1)} \mapsto R^{(m+1)}$  est la  $h'_m$ -dérivation à gauche définie par

$$\delta_m^{(m+1)}(a) = X_m^{(m+1)} a - h'_m(a) X_m^{(m+1)}$$

pour tout  $a \in R^{(m+1)}$ .

De la même manière, si on note  $h_m (= h_{\beta_m})$  l'automorphisme de  $R_0^{(m+1)}$  qui vérifie  $h_m(X_j^{(m+1)}) = \lambda_{m,j} X_j^{(m+1)}$  pour  $1 \leq j \leq N$  (cf. section 3.1.2), on a

$$X_i^{(m)} = X_i^{(m+1)} + \sum_{l=1}^{+\infty} C_l^{(m+1)} (X_m^{(m+1)})^{-l}$$

avec

$$C_l^{(m+1)} = \frac{(1-q_m)^{-l}}{[l]_{q_m}!} \lambda_{m,i}^{-l} (\delta_m^{(m+1)})^l (X_i^{(m+1)}),$$

où  $\delta_m^{(m+1)} : R_0^{(m+1)} \mapsto R_0^{(m+1)}$  est la  $h_m$ -dérivation à gauche définie par

$$\delta_m^{(m+1)}(a) = X_m^{(m+1)}a - h_m(a)X_m^{(m+1)}$$

pour tout  $a \in R_0^{(m+1)}$ .

On observe que  $h'_m(X_j^{(m+1)}) = h_m(X_j^{(m+1)}) = \lambda_{m,j} X_j^{(m+1)}$  pour  $1 \leq j \leq t$ . Par suite,  $h'_m$  coïncide avec  $h_m$  sur  $R^{(m+1)}$ , donc  $\delta'_m$  coïncide avec  $\delta_m$  sur  $R^{(m+1)}$ , donc on a  $C_l'^{(m+1)} = C_l^{(m+1)}$  pour tout  $l$ , donc  $X_i'^{(m)} = X_i^{(m)}$ .

□

Rappelons (voir sections 3.1.1 et 3.1.2) que chaque idéal premier de  $R_0^{(t+1)}$  (resp.  $R$ ) est complètement premier. Donc, si  $\mathcal{Q}$  est un idéal premier donné de  $R_0^{(t+1)}$ , alors  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap R$  est un idéal premier de  $R$ . De plus, comme  $R = \mathbb{K} \langle X_1^{(t+1)}, \dots, X_t^{(t+1)} \rangle$  est  $H$ -invariant, on a : ( $\mathcal{Q}$  est  $H$ -invariant)  $\Rightarrow$  ( $\mathcal{P}$  est  $H$ -invariant).

**Lemme 5.1.3.**

Si  $\mathcal{P}$  est un idéal premier  $H$ -invariant de  $R$ , il existe un idéal premier  $H$ -invariant  $\mathcal{Q}$  de  $R_0^{(t+1)}$ , tel que

- $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap R$ .
- $\mathcal{Q} \cap \{X_{t+1}^{(t+1)}, \dots, X_N^{(t+1)}\} = \emptyset$ .

**Démonstration :**

Posons

$$\mathcal{Q} = \sum_{\underline{a} = (a_{t+1}, \dots, a_N)} \mathcal{P} \times (X^{(t+1)})^{\underline{a}} \subset R_0^{(t+1)}$$

avec  $\underline{a} \in \mathbb{N}^{N-t}$  et  $(X^{(t+1)})^{\underline{a}} := (X_{t+1}^{(t+1)})^{a_{t+1}} \dots (X_N^{(t+1)})^{a_N}$ .

Observons que, par les résultats rappelés en 3.1.2, la famille  $((X^{(t+1)})^{\underline{a}})$  ( $\underline{a} = (a_{t+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^{N-t}$ ) est une base de  $R_0^{(t+1)}$  comme  $R$ -module à gauche. Ceci implique que  $\mathcal{Q} \cap R = \mathcal{P}$  et, comme  $1 \notin \mathcal{P}$ , que chaque  $(X^{(t+1)})^{\underline{a}} \notin \mathcal{Q}$  ( $\underline{a} \in \mathbb{N}^{N-t}$ ). En particulier,  $\mathcal{Q} \cap \{X_{t+1}^{(t+1)}, \dots, X_N^{(t+1)}\} = \emptyset$ .

Pour chaque  $\underline{a} = (a_{t+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^{N-t}$  et chaque  $u \in R$ , on a  $(X^{(t+1)})^{\underline{a}} u = h_{\underline{a}}(u) (X^{(t+1)})^{\underline{a}}$  avec  $h_{\underline{a}} = h_{\beta_{t+1}}^{a_{t+1}} \circ \dots \circ h_{\beta_N}^{a_N} \in H$  (voir section 3.1.2).

Comme  $R$  est  $H$ -invariant, on a  $h_{\underline{a}}(R) = R$ , de sorte que  $\mathcal{Q}$  est un  $R$ -bimodule.

Comme, pour tous  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  dans  $\mathbb{N}^{N-t}$ , on a  $(X^{(t+1)})^{\underline{a}} (X^{(t+1)})^{\underline{b}} = \lambda (X^{(t+1)})^{\underline{c}}$  avec  $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\mathcal{Q}$  est un  $R_0^{(t+1)}$ -module à droite. De plus, comme  $(X^{(t+1)})^{\underline{a}} \mathcal{P} = h_{\underline{a}}(\mathcal{P}) (X^{(t+1)})^{\underline{a}} = \mathcal{P} (X^{(t+1)})^{\underline{a}}$ , on en déduit que  $\mathcal{Q}$  est un idéal de  $R_0^{(t+1)}$ .

Considérons  $A, B$  dans  $R_0^{(t+1)}$  et supposons que  $AB \in \mathcal{Q}$ . Comme dans la section 3.2.3, notons  $\preceq$  l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{N}^{N-t}$  et supposons que, ni  $A$ , ni  $B$  ne sont des éléments de  $\mathcal{Q}$ . Ecrivons

$$A = \sum_{\underline{a} \in F} A_{\underline{a}} (X^{(t+1)})^{\underline{a}}$$

avec  $F$  un sous-ensemble non-vide de  $\mathbb{N}^{N-t}$  et chaque  $A_{\underline{a}}$  dans  $R$ . Comme,  $A \notin \mathcal{Q}$ , l'un au moins des coefficients  $A_{\underline{a}}$  n'est pas dans  $\mathcal{P}$ . Si on choisit un tel coefficient avec  $\underline{a}$  minimal, on obtient :

$$A = A_1 + A_{\underline{a}}(X^{(t+1)})^{\underline{a}} + \sum_{\underline{a}' \in F'} A_{\underline{a}'}(X^{(t+1)})^{\underline{a}'}$$

avec  $A_1 \in \mathcal{Q}$  et  $\underline{a} \prec \underline{a}'$  pour tout  $\underline{a}'$  dans  $F'$ . De même, on a

$$B = B_1 + B_{\underline{b}}(X^{(t+1)})^{\underline{b}} + \sum_{\underline{b}' \in G'} B_{\underline{b}'}(X^{(t+1)})^{\underline{b}'}$$

avec  $B_1 \in \mathcal{Q}$ ,  $B_{\underline{b}}$  n'est pas dans  $\mathcal{P}$  et  $\underline{b} \prec \underline{b}'$  pour tous  $\underline{b}'$  dans  $G'$ .

On a alors

$$(A - A_1)(B - B_1) = \lambda A_{\underline{a}} B_{\underline{b}} (X^{(t+1)})^{\underline{c}} + \sum_{\underline{c}' \in E'} C_{\underline{c}'} (X^{(t+1)})^{\underline{c}'}$$

avec  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}^*$ ,  $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ , chaque  $C_{\underline{c}'}$  appartient à  $R$  et, pour chaque  $\underline{c}'$  dans  $E'$ ,  $\underline{c} \prec \underline{c}'$ . Comme  $(A - A_1)(B - B_1) \in \mathcal{Q}$ , ceci implique que  $A_{\underline{a}} B_{\underline{b}} \in \mathcal{P}$ , ce qui est impossible puisque  $\mathcal{P}$  est complètement premier. Il en résulte que  $\mathcal{Q}$  est (complètement) premier.

Comme  $\mathcal{P}$  est  $H$ -invariant, et comme chaque monôme  $(X^{(t+1)})^{\underline{a}}$  ( $\underline{a} \in \mathbb{N}^{N-t}$ ) est un  $H$ -vecteur propre,  $\mathcal{Q}$  est  $H$ -invariant. □

**Lemme 5.1.4.**

Considérons  $\mathcal{P}_0 \in \text{Spec}(R_0)$  et  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R)$ .

Supposons que  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap R$  avec  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_0^{(t+1)} = \text{l'image canonique de } \mathcal{P}_0 \text{ dans } \text{Spec}(R_0^{(t+1)})$ .

Pour tout  $m \in \llbracket 2, t+1 \rrbracket$ , on note  $\mathcal{P}^{(m)}$  (resp.  $\mathcal{P}_0^{(m)}$ ) l'image canonique de  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{P}_0$ ) dans  $\text{Spec}(R^{(m)})$  (resp.  $\text{Spec}(R_0^{(m)})$ ) et on rappelle que, par le lemme 5.1.2,  $R^{(m)}$  est la sous-algèbre de  $R_0^{(m)}$  engendrée par ses  $t$  premiers générateurs canoniques  $X_1^{(m)}, \dots, X_t^{(m)}$ . Alors

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}_0^{(m)} \cap R^{(m)}.$$

**Démonstration :** On démontre ceci par récurrence descendante sur  $m$ .

- Si  $m = t+1$ , on a  $R^{(m)} = R$ ,  $\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_0^{(m)} = \mathcal{Q}$ . Donc, on a l'égalité requise par hypothèse.
- Supposons que  $m \leq t$  et  $\mathcal{P}^{(m+1)} = \mathcal{P}_0^{(m+1)} \cap R^{(m+1)}$ .

- Supposons que  $X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{P}_0^{(m+1)}$ , de sorte que  $X_m^{(m+1)} \notin \mathcal{P}^{(m+1)}$ .

Posons  $S_m = \{(X_m^{(m+1)})^d \mid d \in \mathbb{N}\}$  et rappelons (sections 3.1.2 et 3.1.3) que

- ◇  $R^{(m)} S_m^{-1} = R^{(m+1)} S_m^{-1}$ ,
- ◇  $\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{(m+1)} S_m^{-1} \cap R^{(m)}$ ,
- ◇  $\mathcal{P}_0^{(m)} = \mathcal{P}_0^{(m+1)} S_m^{-1} \cap R_0^{(m)}$ .

Comme  $R^{(m)} \subseteq R_0^{(m)}$  et  $\mathcal{P}^{(m+1)} \subseteq \mathcal{P}_0^{(m+1)}$ , on a

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{(m+1)} S_m^{-1} \cap R^{(m)} \subseteq \mathcal{P}_0^{(m+1)} S_m^{-1} \cap R_0^{(m)} = \mathcal{P}_0^{(m)}.$$

Ceci implique que

$$\mathcal{P}^{(m)} \subseteq \mathcal{P}_0^{(m)} \cap R^{(m)}.$$

Considérons un élément  $u$  de  $\mathcal{P}_0^{(m)} \cap R^{(m)}$ .

On a  $\mathcal{P}_0^{(m)} \subseteq \mathcal{P}_0^{(m+1)} S_m^{-1} \Rightarrow u (X_m^{(m+1)})^{d_1} \in \mathcal{P}_0^{(m+1)}$  avec  $d_1 \in \mathbb{N}$ .

On a  $R^{(m)} \subseteq R^{(m+1)} S_m^{-1} \Rightarrow u (X_m^{(m+1)})^{d_2} \in R^{(m+1)}$  avec  $d_2 \in \mathbb{N}$ .

Comme  $m \leq t$ ,  $X_m^{(m+1)}$  est dans  $R^{(m+1)}$  et donc, avec  $d = \max(d_1, d_2)$ , on obtient

$$u(X_m^{(m+1)})^d \in \mathcal{P}_0^{(m+1)} \cap R^{(m+1)} = \mathcal{P}^{(m+1)} \Rightarrow u \in \mathcal{P}^{(m+1)} S_m^{-1} \cap R^{(m)} = \mathcal{P}^{(m)}.$$

On a donc bien

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}_0^{(m)} \cap R^{(m)}.$$

- Supposons que  $X_m^{(m+1)} \in \mathcal{P}_0^{(m+1)}$ , de sorte que, comme  $m \leq t$ ,

$$X_m^{(m+1)} \in \mathcal{P}_0^{(m+1)} \cap R^{(m+1)} = \mathcal{P}^{(m+1)}.$$

On note

$$g : R^{(m)} \rightarrow \frac{R^{(m+1)}}{\mathcal{P}^{(m+1)}}$$

l'unique homomorphisme d'algèbre qui transforme chaque  $X_i^{(m)}$  ( $1 \leq i \leq t$ ) en  $g(X_i^{(m)}) = X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}^{(m+1)}$  (l'image canonique de  $X_i^{(m+1)}$  dans  $\frac{R^{(m+1)}}{\mathcal{P}^{(m+1)}}$ ). On rappelle (section 3.1.3) que

$$\mathcal{P}^{(m)} = \ker(g).$$

On note

$$g_0 : R_0^{(m)} \rightarrow \frac{R_0^{(m+1)}}{\mathcal{P}_0^{(m+1)}}$$

l'unique homomorphisme d'algèbre qui transforme chaque  $X_i^{(m)}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) en  $g_0(X_i^{(m)}) = X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}_0^{(m+1)}$  (l'image canonique de  $X_i^{(m+1)}$  dans  $\frac{R_0^{(m+1)}}{\mathcal{P}_0^{(m+1)}}$ ), de sorte que

$$\mathcal{P}_0^{(m)} = \ker(g_0).$$

L'homomorphisme canonique  $R_0^{(m+1)} \rightarrow \frac{R_0^{(m+1)}}{\mathcal{P}_0^{(m+1)}}$  restreint à  $R^{(m+1)}$  a pour noyau  $\mathcal{P}_0^{(m+1)} \cap R^{(m+1)} = \mathcal{P}^{(m+1)}$ . Il induit donc un homomorphisme injectif

$$\epsilon : \frac{R^{(m+1)}}{\mathcal{P}^{(m+1)}} \rightarrow \frac{R_0^{(m+1)}}{\mathcal{P}_0^{(m+1)}}$$

qui transforme chaque  $X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}^{(m+1)}$  ( $1 \leq i \leq t$ ) en  $X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}_0^{(m+1)}$ . Donc

$$\epsilon \circ g : R^{(m)} \rightarrow \frac{R_0^{(m+1)}}{\mathcal{P}_0^{(m+1)}}$$

est un homomorphisme d'algèbre qui transforme chaque  $X_i^{(m)}$  ( $1 \leq i \leq t$ ) en  $X_i^{(m+1)} + \mathcal{P}_0^{(m+1)} = g_0(X_i^{(m)})$ . Ceci implique que  $\epsilon \circ g$  est la restriction de  $g_0$  à  $R^{(m)}$  et donc, que  $\text{Ker}(\epsilon \circ g) = \mathcal{P}_0^{(m)} \cap R^{(m)}$ . Comme  $\epsilon$  est injectif, on a aussi  $\text{Ker}(\epsilon \circ g) = \text{Ker}(g) = \mathcal{P}^{(m)}$ , d'où l'égalité

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}_0^{(m)} \cap R^{(m)}.$$

□

**Proposition 5.1.5.**

Considérons un diagramme  $\Delta$  pour (2.14) (ie. un sous-ensemble de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ ), de sorte que  $\Delta$  est aussi un diagramme pour (5.1). Alors  $\Delta$  est de Cauchon pour (2.14) si et seulement si  $\Delta$  est de Cauchon pour (5.1).

**Démonstration :**

- Supposons que  $\Delta$  est de Cauchon pour (5.1). Ceci signifie (voir section 3.1.3) qu'il existe  $\mathcal{P}_0$  dans  $\text{Spec}(R_0)$  dont l'image canonique  $\mathcal{P}_0^{(2)}$  dans  $\text{Spec}(R_0^{(2)})$  vérifie :

$$\mathcal{P}_0^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_N\} = \{Z_i \mid i \in \Delta\}.$$

Notons par  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_0^{(t+1)}$  l'image canonique de  $\mathcal{P}_0$  dans  $\text{Spec}(R_0^{(t+1)})$  et posons  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap R$ . On sait que  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R)$  et, par le lemme 5.1.4, que son image canonique  $\mathcal{P}^{(2)}$  dans  $\text{Spec}(R^{(2)})$  vérifie

$$\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}_0^{(2)} \cap R^{(2)}.$$

Donc

$$\mathcal{P}^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_t\} = \mathcal{P}_0^{(2)} \cap R^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_t\} = \mathcal{P}_0^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_t\}.$$

Comme  $\Delta$  est un sous-ensemble de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ , ceci implique que

$$\mathcal{P}^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_t\} = \{Z_i \mid i \in \Delta\}.$$

Donc  $\Delta$  est de Cauchon par rapport à (2.14).

- Supposons que  $\Delta$  est de Cauchon pour (2.14). Ceci implique (proposition 3.1.4) qu'il existe  $\mathcal{P}$  dans  $H - \text{Spec}(R)$  dont l'image canonique  $\mathcal{P}^{(2)} \in \text{Spec}(R^{(2)})$  est l'idéal de  $R^{(2)}$  engendré par  $\{Z_i \mid i \in \Delta\}$  ( $\mathcal{P}^{(2)} = 0$  si  $\Delta = \emptyset$ ).

Comme  $\mathcal{P}$  est  $H -$  invariant, il résulte du lemme 5.1.3 qu'il existe un idéal premier ( $H -$  invariant)  $\mathcal{Q}$  de  $R_0^{(t+1)}$ , tel que

- ◊  $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap R$ .
- ◊  $\mathcal{Q} \cap \{X_{t+1}^{(t+1)}, \dots, X_N^{(t+1)}\} = \emptyset$ .

Par le corollaire 3.2.2, il existe  $\mathcal{P}_0$  dans  $\text{Spec}(R_0)$  dont l'image canonique  $\mathcal{P}_0^{(t+1)}$  dans  $\text{Spec}(R_0^{(t+1)})$  est égale à  $\mathcal{Q}$ , et dont l'image canonique  $\mathcal{P}_0^{(2)}$  dans  $\text{Spec}(R_0^{(2)})$  ne rencontre pas l'ensemble  $\{Z_{t+1}, \dots, Z_N\}$ .

Comme précédemment, par le lemme 5.1.4, on a

$$\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}_0^{(2)} \cap R^{(2)}.$$

Comme  $\mathcal{P}_0^{(2)}$  ne rencontre pas l'ensemble  $\{Z_{t+1}, \dots, Z_N\}$ , on a

$$\mathcal{P}_0^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_N\} = \mathcal{P}_0^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_t\}.$$

Donc, comme  $\{Z_1, \dots, Z_t\} \subseteq R^{(2)}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_N\} &= \mathcal{P}_0^{(2)} \cap R^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_t\} \\ &= \mathcal{P}^{(2)} \cap \{Z_1, \dots, Z_N\} = \{Z_i \mid i \in \Delta\}. \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\Delta$  est de Cauchon pour (5.1). □

## 5.2 Le cas $w = w_0$

### Lemme 5.2.1.

Pour chaque diagramme  $\Delta$  (pour (2.14)) on a :

$$\Delta \text{ positif} \Rightarrow \Delta \text{ de Cauchon.}$$

**Démonstration :** Comme dans la section 3.1.3, on note  $\mathcal{P}_\Delta^{(2)}$  l'idéal de  $\overline{R} = R^{(2)}$  engendré par les générateurs canoniques  $Z_i$  avec  $i \in \Delta$  ( $\mathcal{P}_\Delta^{(2)} = 0$  si  $\Delta = \emptyset$ ). Rappelons (voir section 3.1.3) que  $\mathcal{P}_\Delta^{(2)} \in H - \text{Spec}(R^{(2)})$ .

Considérons un entier  $m$  avec  $2 \leq m \leq t+1$ . On montre d'abord, par récurrence sur  $m$ , qu'il existe un idéal

premier  $\mathcal{P}^{(m)} \in \text{Spec}(R^{(m)})$  tel que  $\mathcal{P}_{\Delta}^{(2)}$  soit l'image canonique de  $\mathcal{P}^{(m)}$  dans  $\text{Spec}(R^{(2)})$ .

- Si  $m = 2$ , il suffit de prendre  $\mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}_{\Delta}^{(2)}$ .
- Supposons que  $2 \leq m \leq t$  et qu'il existe un idéal premier  $\mathcal{P}^{(m)} \in \text{Spec}(R^{(m)})$  dont  $\mathcal{P}_{\Delta}^{(2)}$  soit l'image canonique de  $\mathcal{P}^{(m)}$  dans  $\text{Spec}(R^{(2)})$ . Comme  $\Delta$  est positif, on déduit de la proposition 3.2.20 que  $\mathcal{P}^{(m)} = \phi_m(\mathcal{P}^{(m+1)})$  avec  $\mathcal{P}^{(m+1)} \in \text{Spec}(R^{(m+1)})$ .

Ainsi  $\mathcal{P}_{\Delta}^{(2)}$  est l'image canonique de  $\mathcal{P}^{(m+1)}$  dans  $\text{Spec}(R^{(2)})$ , et l'affirmation est démontrée.

En particulier, il existe  $\mathcal{P} \in \text{Spec}(R^{(t+1)}) = \text{Spec}(R)$  tel que  $\mathcal{P}_{\Delta}^{(2)}$  est l'image canonique de  $\mathcal{P}$  dans  $\text{Spec}(R^{(2)})$ . Ceci signifie (voir section 3.1.3) que  $\Delta$  est un diagramme de Cauchon. □

**Proposition 5.2.2.**

Supposons  $w = w_0$  (de sorte que les décompositions (5.1) et (2.14) coïncident).

Les diagrammes positifs (pour (2.14)) coïncident avec les diagrammes de Cauchon (pour (2.14)).

**Démonstration :** Par le lemme 5.2.1 précédent, l'ensemble des diagrammes positifs est contenu dans l'ensemble des diagrammes de Cauchon. Par la proposition 1.2.12 et par le théorème 4.3.1, ces deux ensembles ont même cardinal que le groupe de Weyl  $W$ . Ils sont donc égaux. □

Observons que dans cette preuve, on utilise le fait que le nombre de diagrammes de Cauchon (qui est aussi le cardinal de  $H - \text{Spec}(U^+)$ ) est égal à  $|W|$  (théorème 4.3.1). Cette égalité peut aussi être obtenue en utilisant les résultats de M. Gorelik, N. Andruskiewitsch et F. Dumas ([Gor00] et [AD08]) ou T. J. Hodges et T. Lévasseur et M. Toro [HLT97], mais ces résultats nécessitent quelques restrictions (mineures) supplémentaires sur le choix du corps de base  $\mathbb{K}$  ( $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ ) ou sur le paramètre  $q$  ( $q$  transcendant).

### 5.3 Le cas général (deuxième théorème fondamental)

On peut à présent prouver, dans le cas général (ie.  $w$  n'est plus forcément l'élément de plus grande longueur  $W$ ) :

**Théorème 5.3.1.**

Les diagrammes positifs (pour (2.14)) coïncident avec les diagrammes de Cauchon (pour (2.14)).

**Démonstration :**

Considérons un diagramme  $\Delta$  pour (2.14) (ie. un sous-ensemble de  $\llbracket 1, t \rrbracket$ ), de sorte que  $\Delta$  est aussi un diagramme pour (5.1). On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} \Delta \text{ est positif (pour (2.14))} &\Leftrightarrow \Delta \text{ est positif pour (5.1)} && \text{(proposition 1.2.13)} \\ \Delta \text{ est positif pour (5.1)} &\Leftrightarrow \Delta \text{ est de Cauchon pour (5.1)} && \text{(proposition 5.2.2)} \\ \Delta \text{ est de Cauchon pour (5.1)} &\Leftrightarrow \Delta \text{ est de Cauchon pour (2.14)} && \text{(proposition 5.1.5)} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\Delta \text{ est positif (pour (2.14))} \Leftrightarrow \Delta \text{ est de Cauchon pour (2.14).}$$

□

On en déduit, avec les conventions de la section 1.2,

**Corollaire 5.3.2.**

1. L'application  $\zeta : \Delta = \{j_1, \dots, j_s\} \mapsto u = w^{\Delta} = s_{\alpha_{j_1}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes de Cauchon dans l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq w\}$  ( $\zeta(\emptyset) = Id$ ).
2. Considérons un diagramme de Cauchon  $\Delta = \{j_1, \dots, j_s\}$  et un entier  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ . Posons  $\Delta \cap \llbracket i+1, t \rrbracket = \{j_c, \dots, j_s\}$  ( $1 \leq c \leq s$ ). Alors l'expression  $s_{\alpha_i} \circ s_{\alpha_{j_c}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}$  est réduite. En particulier,  $s_{\alpha_{j_1}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}$  est une décomposition réduite de  $\zeta(\Delta)$ .

3. Considérons un élément  $u \in W$  avec  $u \leq w$ . Alors, le seul diagramme de Cauchon  $\Delta$  tel que  $\zeta(\Delta) = u$  est défini récursivement comme suit :

- $1 \in \Delta \Leftrightarrow l(s_{\alpha_1} \circ u) = l(u) - 1 \Leftrightarrow u^{-1}(\alpha_1)$  est une racine négative.
- Considérons un entier  $i \in \llbracket 1, t-1 \rrbracket$  et supposons que  $\Delta \cap \llbracket 1, i \rrbracket = \{j_1, \dots, j_d\}$ .  
Posons  $u_i = s_{\alpha_{j_d}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_2}} \circ s_{\alpha_{j_1}} \circ u$  ( $u_i = u$  si  $\Delta \cap \llbracket 1, i \rrbracket = \emptyset$ ). Alors  
 $i+1 \in \Delta \Leftrightarrow l(s_{\alpha_{i+1}} \circ u_i) = l(u_i) - 1 \Leftrightarrow u_i^{-1}(\alpha_{i+1})$  est une racine négative.

**Démonstration :**

Comme les diagrammes de Cauchon coïncident avec les diagrammes positifs, 1. est la proposition 1.2.12 (assertion 2.) et 2. est la proposition 1.2.10. Maintenant, prouvons 3.

- Supposons que  $1 \in \Delta$ , de sorte que  $\Delta = \{j_1, \dots, j_s\}$  avec  $j_1 = 1$ . Comme  $u = \zeta(\Delta) = s_{\alpha_{j_1}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}$ , on a  $l(s_{\alpha_1} \circ u) = l(s_{\alpha_{j_2}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}) = s - 1 = l(u) - 1$ . Réciproquement, supposons que  $l(s_{\alpha_1} \circ u) = l(u) - 1$ . Si  $1 \notin \Delta$ , alors  $\Delta \cap \llbracket 2, t \rrbracket = \Delta$  et, par 2.,  $l(s_{\alpha_1} \circ u) = l(u) + 1$ . Donc, nécessairement,  $1 \in \Delta$ . Classiquement, on a :  $l(s_{\alpha_1} \circ u) = l(u) - 1 \Leftrightarrow l(u^{-1} \circ s_{\alpha_1}) = l(u^{-1}) - 1 \Leftrightarrow u^{-1}(\alpha_1)$  est une racine négative.
- Supposons que  $i+1 \in \Delta$ , de sorte que  $\Delta \cap \llbracket i+1, t \rrbracket = \{j_{d+1}, \dots, j_s\}$  avec  $j_{d+1} = i+1$ . Comme  $u_i = s_{\alpha_{j_d}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_2}} \circ s_{\alpha_{j_1}} \circ u = s_{\alpha_{j_{d+1}}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}$ , on a  $l(s_{\alpha_{i+1}} \circ u) = l(s_{\alpha_{j_{d+2}}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_s}}) = s - (d+1) = l(u_i) - 1$ . Réciproquement, supposons que  $l(s_{\alpha_{i+1}} \circ u_i) = l(u_i) - 1$ . Si  $i+1 \notin \Delta$ , alors  $\Delta \cap \llbracket i+2, t \rrbracket = \{j_{d+1}, \dots, j_s\}$  et, par 2.,  $l(s_{\alpha_{i+1}} \circ u_i) = l(u_i) + 1$ . Donc, nécessairement,  $i+1 \in \Delta$ .

□

Du corollaire 5.3.2 (assertions 1. et 2.) et du lemme 1.2.2 (assertion 2.), on déduit :

**Corollaire 5.3.3.**

1. L'application  $\zeta' : \Delta = \{j_1, \dots, j_s\} \mapsto u' = v^\Delta = s_{\alpha_{j_s}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_1}}$  est une bijection de l'ensemble des diagrammes de Cauchon sur l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq v = w^{-1}\}$  ( $\zeta'(\Delta) = (\zeta(\Delta))^{-1}$ ,  $\zeta'(\emptyset) = Id$ ).
2. Considérons un diagramme de Cauchon  $\Delta = \{j_1, \dots, j_s\}$  et un entier  $i \in \llbracket 1, t \rrbracket$ . Posons  $\Delta \cap \llbracket i+1, t \rrbracket = \{j_c, \dots, j_s\}$  ( $1 \leq c \leq s$ ). Alors l'expression  $s_{\alpha_{j_s}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_c}} \circ s_{\alpha_i}$  est réduite. En particulier,  $s_{\alpha_{j_s}} \circ \dots \circ s_{\alpha_{j_1}}$  est une décomposition réduite de  $\zeta'(\Delta)$ .

Si  $w$  et sa décomposition réduite sont choisies comme dans l'exemple de la section 2.2.2, on sait (proposition 2.2.4) que  $U[w]$  est l'algèbre des matrices quantiques  $O_q(M_{p,m}(k))$  avec  $m = n - p + 1$  et avec les mêmes générateurs canoniques. Donc, par [Cau03b], les diagrammes de Cauchon peuvent être considérés (comme dans le chapitre 4) comme des remplissages d'un tableau rectangulaire de taille  $m \times p$  par des cases noires et blanches. On constate alors qu'ils coïncident avec les  $\mathbb{J}$ -diagrammes de A. Postnikov. Dans ce cas, le corollaire 5.3.3 a aussi été prouvé (par des méthodes différentes) par A. Postnikov ([Pos06], theorem 19.1.) et par T. Lam and L. Williams ([LW08], theorem 5.3.).

Dans le cas général, en utilisant la bijection entre l'ensemble des diagrammes de Cauchon et  $H - Spec(U[w])$  rappelée dans la section 3.1.3, les deux bijections de la proposition 1.2.12, ainsi que la coïncidence des diagrammes de Cauchon avec les diagrammes positifs (théorème 5.3.1), on obtient, avec les notations de la section 3.1.3,

**Corollaire 5.3.4.**

1. Il existe une bijection naturelle de l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq v = w^{-1}\}$  sur  $H - Spec(U[w])$ . Elle est définie par

$$v^\Delta \mapsto \mathcal{P}_\Delta$$

où  $\Delta$  décrit l'ensemble des diagrammes de Cauchon.

2. Il existe une bijection naturelle de l'ensemble  $\{u \in W \mid u \leq w\}$  dans  $H - \text{Spec}(U[w])$ . Elle est définie par

$$w^\Delta \mapsto \mathcal{P}_\Delta$$

où  $\Delta$  décrit l'ensemble des diagrammes de Cauchon.

# Annexe A

## Description des $w^\Delta$ à l'aide de pipe dreams

A partir d'une décomposition réduite (arbitraire) de  $w$ , on a construit (corollaire 5.3.2) une bijection  $\Delta \mapsto v^\Delta$  entre l'ensemble  $\mathcal{D}$  des diagrammes de Cauchon et  $\{u \in W \mid u \leq v = w^{-1}\}$ . Dans le cas de l'exemple de la section 2.2.2,  $W$  est le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$  et A. Postnikov [Pos06, section 6 et 19] a construit une bijection entre les "I-diagrams", qui sont ici les diagrammes de Cauchon [Cau03b], par l'intermédiaire d'objets combinatoires appelés "pipe dreams". On vérifie sans difficulté que la bijection de A. Postnikov coïncide avec la bijection  $\Delta \mapsto v^\Delta$  ci-dessus.

Dans cette annexe, nous considérons le cas des exemples traités dans la section 4.2.1. Dans ces exemples on a  $w = w_0$ , de sorte que  $\Delta \mapsto v^\Delta$  est une bijection de  $\mathcal{D}$  sur  $W$ . Dans le premier d'entre eux ( $A_n$ ), on a  $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ , dans les trois autres exemples ( $B_n, C_n$  et  $D_n$ )  $W$  peut se décrire en termes de permutations signées. Le but de cette annexe est de s'inspirer de la construction de A. Postnikov pour obtenir un lien entre les diagrammes de Cauchon et le groupe de Weyl dans ces quatre exemples. La difficulté première vient du fait que la forme des tableaux n'est pas connue a priori et que celle-ci dépend de la décomposition de  $w_0$  choisie. Nous allons utiliser les tableaux qui contenaient les racines simples dans la section 4.2.1 et placer les réflexions simples de la décomposition réduite de  $w_0$  dans les cases à la place des racines. Nous explicitons ensuite comment coder un diagramme de Cauchon par un pipe dreams puis par une permutation (signée ou non en fonction des cas). Les preuves sont techniques mais ne présentent pas de difficultés majeures, nous ne les faisons pas figurer dans cette annexe.

### A.1 Le type $A_n$

La décomposition réduite considérée ici est

$$w_0 = s_1 \circ (s_2 \circ s_1) \circ (s_3 \circ s_2 \circ s_1) \circ \dots \circ (s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_2 \circ s_1) \quad (s_i := s_{\epsilon_i})$$

On la représente au moyen du tableau  $T$  (qui est le tableau contenant les racines positives de la section 4.2.1.1) ci-dessous dans lequel on lit les réflexions simples colonne par colonne (en partant de la colonne de gauche) et du haut vers le bas.

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\cdots$	$s_n$
	$s_1$	$s_2$	$\cdots$	$s_{n-1}$
		$s_1$	$\cdots$	$s_{n-2}$
			$\ddots$	$\vdots$
				$s_1$

On rappelle que,  $W$  étant identifié à  $\mathfrak{S}_{n+1}$  ([Hum78, section 12.1]),  $s_i$  est la transposition  $(i, i + 1)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Considérons un diagramme  $\Delta$ , c'est à dire un ensemble de cases du tableau ci-dessus. Colorions ces cases en noir et construisons, dans chacune d'elles, deux flèches croisées comme ci-dessous



(croisement)

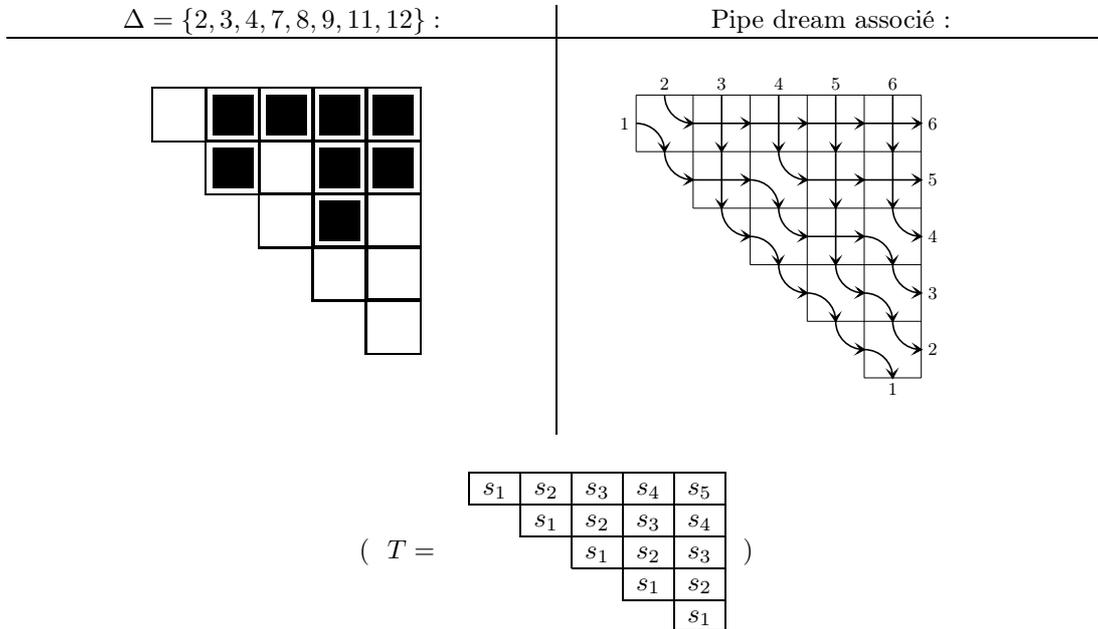
Construisons, dans chacune des autres cases (blanches), deux arcs fléchés comme ci-dessous



(coude)

De plus, deux cases consécutives de la diagonales sont systématiquement reliées par un arc fléché de la gauche vers la droite.

On obtient ainsi un "pipe dream" comme dans l'exemple ci-dessous en type  $A_5$ .



Ce pipe dream définit une permutation et on peut démontrer :

**Proposition A.1.1.**

Si  $\Delta$  est un diagramme de Cauchon, la permutation construite ci-dessus n'est autre que  $v^\Delta$ .

Dans le cas de l'exemple ci-dessus, cette permutation est égale à  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . On peut vérifier qu'elle est bien égale à  $v^\Delta = s_4 \circ s_5 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2$ .

## A.2 Les types $B_n$ et $C_n$

La décomposition réduite considérée ici est

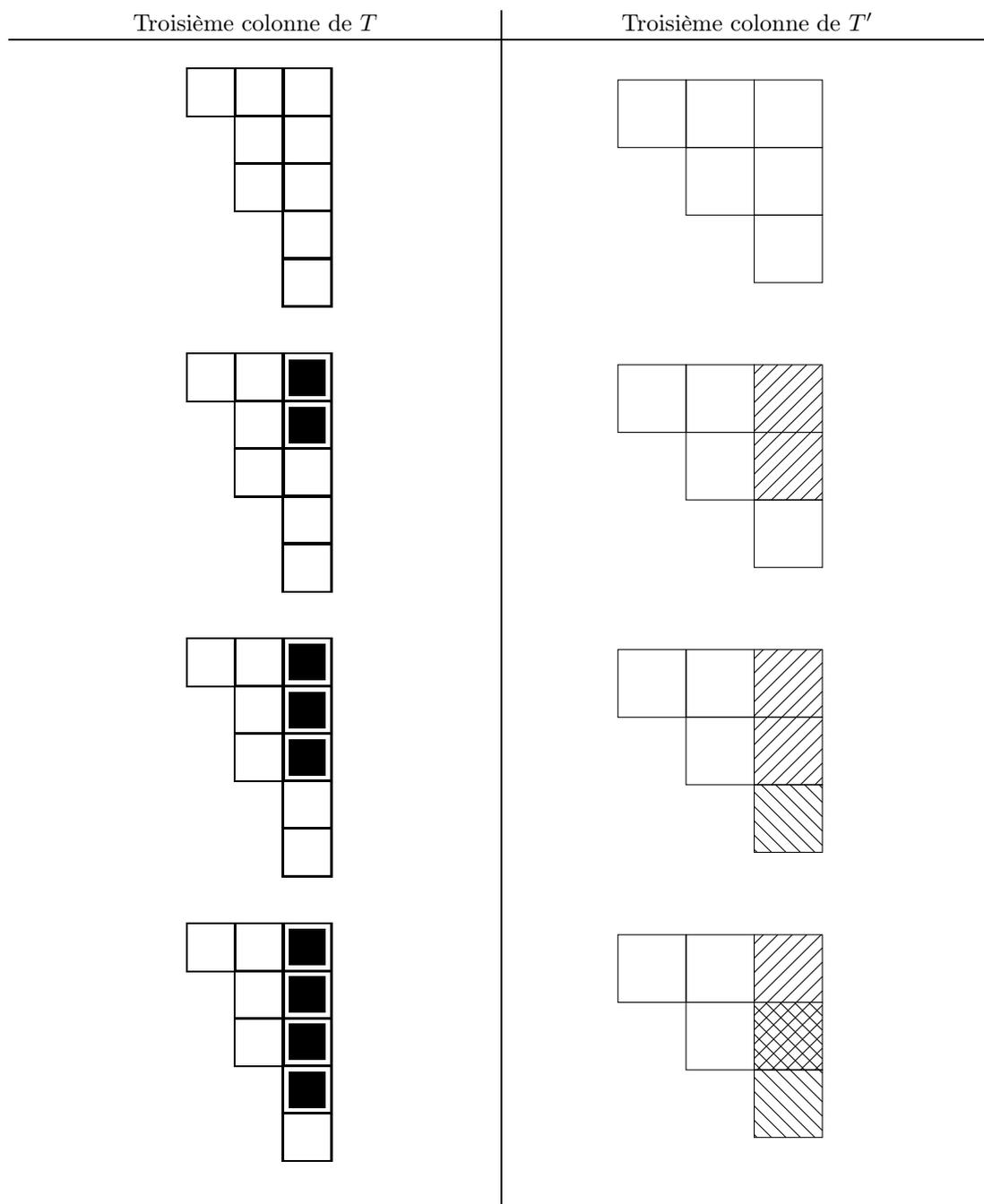
$$w_0 = s_1 \circ (s_2 \circ s_1 \circ s_2) \circ (s_3 \circ s_2 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3) \circ \dots \circ (s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_2 \circ s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_{n-1} \circ s_n)$$

On la représente au moyen du tableau  $T$  (qui est le tableau contenant les racines positives de la section 4.2.1.2) ci-dessous (cas  $n = 5$ ) dans lequel on lit les réflexions simples colonne par colonne (en partant de la colonne de

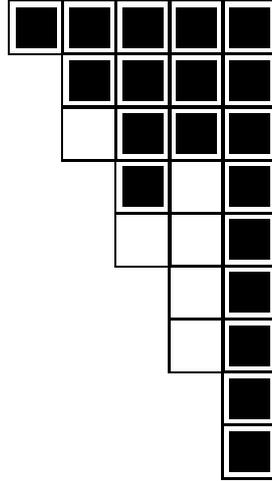
gauche) et du haut vers le bas.

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
	$s_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
		$s_2$	$s_1$	$s_2$
		$s_3$	$s_2$	$s_1$
			$s_3$	$s_2$
			$s_4$	$s_3$
				$s_4$
				$s_5$

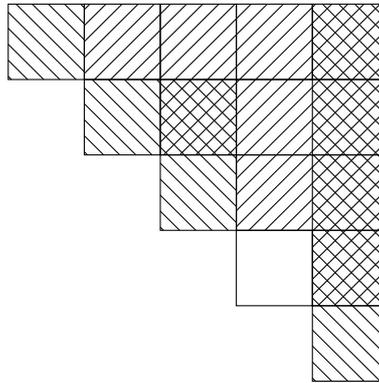
On rappelle que,  $W$  étant identifié au groupe des permutations signées de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  ([Hum78, section 12.1]),  $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ -1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  et, pour  $i > 1$ ,  $s_i$  est la transposition  $(i - 1, i)$ . Considérons un diagramme de Cauchon  $\Delta$ , c'est à dire un ensemble de cases du tableau  $T$  qui est une réunion de colonnes tronquées. Colorions ces cases en noir. On associe à ce coloriage un tableau  $T'$  de type  $A_n$  où chaque case est soit blanche, soit hachurée. Cette construction s'opère colonne par colonne. Pour une colonne donnée  $C$  de  $T$ , la manière de colorier la colonne correspondante de  $T'$  est différente selon que la dernière case noire de  $C$  est au dessus de la diagonale, sur la diagonale ou au dessous de la diagonale. Ce processus est décrit ci-dessous (lorsque  $C$  est la troisième colonne de  $T$ ) :



Par exemple, si  $n = 5$  et  $\Delta = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$ , on obtient le coloriage suivant pour  $T$



auquel on associe le tableau  $T'$  :



Chaque case de  $T'$  est ensuite fléchée, comme dans le cas  $A_n$ , par un croisement ou un coude, mais les flèches peuvent être pleines ou pointillées. Le processus de fléchage est le suivant :

- Chaque case blanche est fléchée par un coude sans changement de style (plein ou pointillé) des flèches.  
(Si une case est située en haut d'une colonne, la flèche d'arrivée supérieure est considérée par défaut en style plein. Si la case est située à l'extrémité gauche d'une ligne, la flèche d'arrivée à gauche est considérée par défaut en style plein.)
- Chaque case hachurée vers la droite (  ) ou hachurée dans les deux sens est fléchée par un coude avec changement de style des flèches.
- Chaque case hachurée vers la gauche (  ) est fléchée par un croisement sans changement de style des flèches.

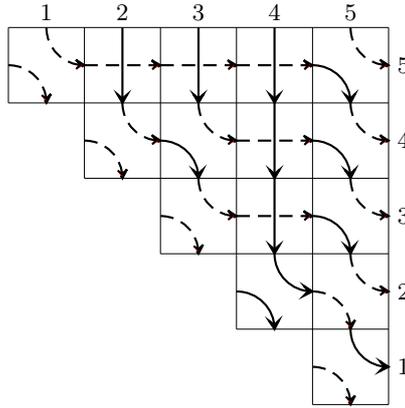
On obtient ainsi un "pipe dream" auquel on peut associer une permutation signée, l'image de  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) étant affecté d'un signe "+" si la flèche d'arrivée est pleine et d'un signe "-" si elle est pointillée.

On peut démontrer

**Proposition A.2.1.**

Si  $\Delta$  est un diagramme de Cauchon, la permutation signée construite ci-dessus n'est autre que  $v^\Delta$ .

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le pipe dream obtenu est le suivant :



Il définit la permutation signée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier qu'elle est bien égale à

$$v^\Delta = s_5 s_4 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_2 s_3 s_4 s_2 s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1.$$

### A.3 Le type $D_n$

La décomposition réduite considérée ici est

$$w_0 = s_1 \circ s_2 \circ (s_3 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3) \circ (s_4 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_4) \circ \dots \circ (s_n \circ s_{n-1} \circ \dots \circ s_3 \circ s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ \dots \circ s_{n-1} \circ s_n)$$

On la représente au moyen du tableau  $T$  (qui est le tableau contenant les racines positives de la section 4.2.1.4) ci-dessous (cas  $n = 5$ ) dans lequel on lit les réflexions simples colonne par colonne (en partant de la colonne de gauche) et du haut vers le bas.

$s_1$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
$s_2$	$s_1$	$s_3$	$s_4$
	$s_2$	$s_1$	$s_3$
	$s_3$	$s_2$	$s_1$
		$s_3$	$s_2$
		$s_4$	$s_3$
			$s_4$
			$s_5$

On rappelle que,  $W$  étant identifié au groupe des permutations signés de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  ([Hum78, section 12.1]),  $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ -2 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}$  et, pour  $i > 1$ ,  $s_i$  est la transposition  $(i - 1, i)$ .

Considérons un diagramme de Cauchon  $\Delta$ , c'est à dire un ensemble de cases du tableau  $T$  vérifiant les contraintes de la section 4.2.1.4. Colorions ces cases en noir. On associe à ce coloriage un tableau  $T'$  de type  $A_n$  où chaque case est soit blanche, soit hachurée. Comme dans la section précédente, cette construction s'opère colonne par colonne.

Etant donnée une colonne  $C$  de  $T$ , Le processus de coloriage de la colonne correspondante  $C'$  de  $T'$  est le suivant :

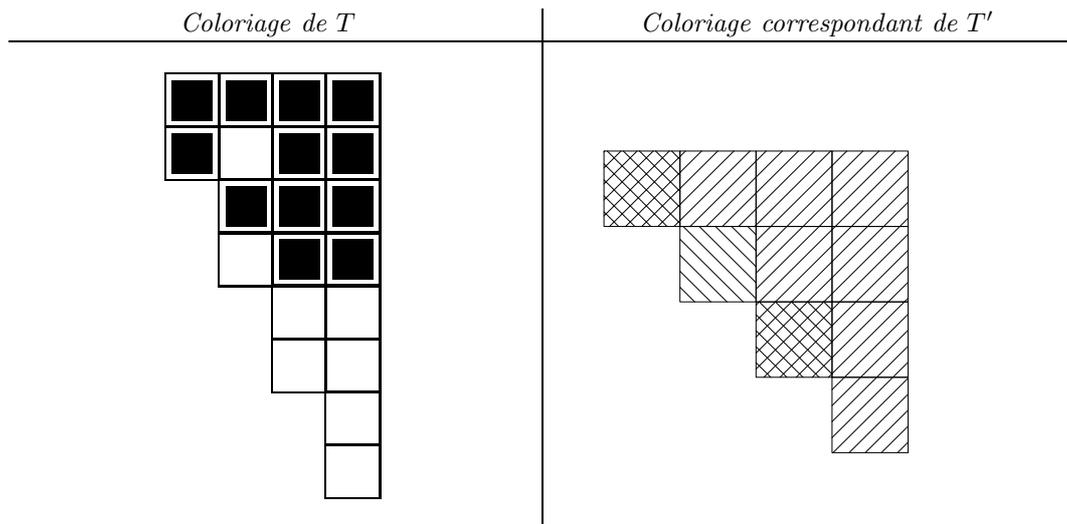
- Pour chaque case noire, située au dessus de la ligne médiane, on hachure la case correspondante de  $C'$  vers la gauche ( ).

- Pour chaque case noire, située au dessous de la ligne médiane, on hachure la case de  $C'$  correspondant à sa symétrique par rapport à la ligne médiane vers la droite (  ).

**Exemple A.3.1.** Si on considère le diagramme de Cauchon

$$\Delta := \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{15}, \beta_{16}\},$$

on obtient



Chaque case de  $T'$  est ensuite fléchée, comme dans les cas  $B_n$  et  $C_n$ , par un croisement ou un coude avec des flèches pleines ou pointillées. Le processus de fléchage est maintenant le suivant :

- Chaque case blanche est fléchée par un coude sans changement de style (plein ou pointillé) des flèches. (Si une case est située en haut d'une colonne, la flèche d'arrivée supérieure est considérée par défaut en style plein. Si la case est située à l'extrémité gauche de la première ligne, la flèche d'arrivée à gauche est considérée par défaut en style plein.)
- Deux cases consécutives de la diagonales sont systématiquement reliées par un arc fléché de la gauche vers la droite sans changement de style.
- Chaque case hachurée vers la droite (  ) est fléchée par un croisement avec changement de style des flèches.
- Chaque case hachurée vers la gauche (  ) est fléchée par un croisement sans changement de style des flèches.
- Chaque case hachurée dans les deux sens (  ) est fléchée par un coude avec changement de style des flèches.

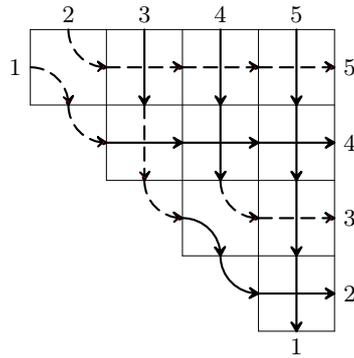
On obtient ainsi un "pipe dream" auquel on peut associer une permutation signée, l'image de  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) étant affecté d'un signe "+" si la flèche d'arrivée est pleine et d'un signe "-" si elle est pointillée.

On peut démontrer

**Proposition A.3.2.**

Si  $\Delta$  est un diagramme de Cauchon, la permutation signée construite ci-dessus n'est autre que  $v^\Delta$ .

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le pipe dream obtenu est le suivant :



Il définit la permutation signée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -5 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier qu'elle est bien égale à

$$v^\Delta = s_1 s_3 s_4 s_5 s_2 s_1 s_3 s_4 s_2 s_3 s_2 s_1.$$

# Bibliographie

- [AD08] N. Andruskiewitsch and F. Dumas. On the automorphisms of  $u_q^+(\mathfrak{g})$ . In *Quantum groups.*, volume 12 of *Zürich : European Mathematical Society. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, pages 108–133. Enriquez, Benjamin, 2008.
- [BG02] K. A. Brown and K. R. Goodearl. *Lectures on algebraic quantum groups*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [Cau03a] G. Cauchon. Effacement des dérivations et spectres premiers des algèbres quantiques. *J. Algebra*, 260(2) :476–518, 2003.
- [Cau03b] G. Cauchon. Spectre premier de  $O_q(M_n(k))$  : image canonique et séparation normale. *J. Algebra*, 260(2) :519–569, 2003.
- [CM08] G. Cauchon and A. Mériaux. Admissible diagrams and combinatoric properties of weyl groups. *preprint*, 2008.
- [CP94] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [DCKP95] C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi. Some quantum analogues of solvable Lie groups. In *Geometry and analysis (Bombay, 1992)*, pages 41–65. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1995.
- [Deo77] Vinay V. Deodhar. Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function. *Invent. Math.*, 39(2) :187–198, 1977.
- [Deo90] Vinay V. Deodhar. A combinatorial setting for questions in Kazhdan-Lusztig theory. *Geom. Dedicata*, 36(1) :95–119, 1990.
- [GL98] K. R. Goodearl and E. S. Letzter. Prime and primitive spectra of multiparameter quantum affine spaces. In *Trends in ring theory (Miskolc, 1996)*, volume 22 of *CMS Conf. Proc.*, pages 39–58. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [Gor00] M. Gorelik. The prime and the primitive spectra of a quantum Bruhat cell translate. *J. Algebra*, 227(1) :211–253, 2000.
- [HLT97] Timothy J. Hodges, Thierry Levasseur, and Margarita Toro. Algebraic structure of multiparameter quantum groups. *Adv. Math.*, 126(1) :52–92, 1997.
- [Hum78] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Jan96] J. C. Jantzen. *Lectures on quantum groups*, volume 6 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [Lit98] P. Littelmann. Cones, crystals, and patterns. *Transform. Groups*, 3(2) :145–179, 1998.
- [LLR08] S. Launois, T. H. Lenagan, and L. Rigal. Prime ideals in the quantum Grassmannian. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(4) :697–725, 2008.
- [LS91] S. Levendorskiĭ and Y. Soibelman. Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori. *Comm. Math. Phys.*, 139(1) :141–170, 1991.

- 
- [Lus90a] G. Lusztig. Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(1) :257–296, 1990.
- [Lus90b] G. Lusztig. Quantum groups at roots of 1. *Geom. Dedicata*, 35(1-3) :89–113, 1990.
- [LW08] Thomas Lam and Lauren Williams. Total positivity for cominuscule Grassmannians. *New York J. Math.*, 14 :53–99, 2008.
- [MR04] R. J. Marsh and K. Rietsch. Parametrizations of flag varieties. *Represent. Theory*, 8 :212–242 (electronic), 2004.
- [Mér08] A. Mériaux. Les diagrammes de cauchon pour  $\mathcal{U}_q^+(\mathfrak{g})$ . 2008. <http://arxiv.org/abs/0807.1012>.
- [Pap94] P. Papi. A characterization of a special ordering in a root system. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3) :661–665, 1994.
- [Pos06] A. Postnikov. Total positivity, grassmannians, and networks. 2006. <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:math/0609764>.
- [Yam89] Hiroyuki Yamane. A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quantized universal enveloping algebras of type  $A_N$ . *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 25(3) :503–520, 1989.

Etude des spectres premier et primitif de l'analogue quantique de la partie positive de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple complexe.

RESUMÉ : Soit  $\Phi$  un système de racines irréductible de rang  $n \geq 1$  dans un espace vectoriel euclidien  $E$ , correspondant à une algèbre de Lie simple complexe  $\mathfrak{g}$ . Choisissons une base  $\Pi = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de  $\Phi$ , notons  $\Phi^+$  (resp.  $\Phi^-$ ) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) et posons  $N = |\Phi^+|$  ( $1 \leq n \leq N$ ).

Notons  $W$  le groupe de Weyl de  $\Phi$  et, pour tout  $\beta \in \Phi$ , notons  $s_\beta$  la réflexion par rapport à l'hyperplan normal à  $\beta$ . Soit  $\mathbb{K}$  un corps (commutatif) de caractéristique différente de 2 (et différente de 3 si  $\Phi$  est de type  $G_2$ ), et  $q$  un élément de  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  qui n'est pas une racine de l'unité.

L'algèbre  $U_q(\mathfrak{g})$  et ses générateurs canoniques  $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha^{\pm 1}$  sont définis comme dans le livre de Jantzen et on note  $U_q^+(\mathfrak{g})$  la sous-algèbre engendrée par les  $E_\alpha$  ( $\alpha \in \Pi$ ). Si  $w \in W$ , on lui associe une sous algèbre  $U[w]$  de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . A chaque décomposition réduite  $w = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_t}$  ( $\alpha_i \in \Pi$ ) correspond une famille de générateurs "canoniques"  $X_1, \dots, X_t$  de  $U[w]$ .

Nous démontrons que, dans le cas où la décomposition de  $w_0$  (élément de plus grande longueur de  $W$ ) induit sur  $\Phi^+$  un bon ordre au sens de G. Lusztig, on peut décrire par un procédé récursif l'ensemble des diagrammes de Cauchon de  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . Ces diagrammes de Cauchon fournissent une description combinatoire de la H-stratification du spectre premier au sens de K. Brown et K. Goodearl. A l'aide d'une décomposition particulière de  $w_0$  pour chaque type d'algèbre de Lie simple, nous retrouvons et généralisons le résultat démontré par M. Gorelik dans le cas où  $q$  n'est pas une racine de l'unité : l'ensemble des idéaux premiers H-invariants et le groupe de Weyl ont même cardinal.

Nous établissons aussi que les diagrammes de Cauchon de l'algèbre  $U[w]$  sont en correspondance bi-univoque naturelle avec l'ensemble des sous-décompositions positives de  $w$  au sens de R. Marsh et K. Rietsch et par la même occasion construisons une bijection explicite entre les diagrammes de Cauchon de  $U[w]$  et l'ensemble  $W^{\leq w} = \{u \in W | u \leq w\}$  où " $\leq$ " désigne l'ordre de Bruhat sur  $W$ .

---

Study of the prime and primitive spectrum of the positive part of the quantized envelopping algebra of a simple Lie algebra over  $\mathbb{C}$ .

ABSTRACT : Let  $\Phi$  be an irreducible root system of rank  $n \geq 1$  in a euclidian vector space  $E$ , corresponding to  $\mathfrak{g}$  a simple lie algebra over  $\mathbb{C}$ . Set a basis  $\Pi = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  of  $\Phi$ , denote by  $\Phi^+$  (resp.  $\Phi^-$ ) the set of positive roots (resp. negatives) and set  $N = |\Phi^+|$  ( $1 \leq n \leq N$ ).

Denote the Weyl group by  $W$  and, for all  $\beta \in \Phi$ ,  $s_\beta$  is the reflexion with respect to  $\beta$ . Let  $\mathbb{K}$  be a (commutative) field with characteristic not equal to 2 (and not equal to 3 if the type of  $\Phi$  is  $G_2$ ), and  $q$  an element of  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  which is not a root of unity.

The algebra  $U_q(\mathfrak{g})$  and its canonical generators  $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha^{\pm 1}$  are defined as in Jantzen's book and denote by  $U_q^+(\mathfrak{g})$  the subalgebra generated by the  $E_\alpha$ 's ( $\alpha \in \Pi$ ). For  $w \in W$ , one constructs the subalgebra  $U[w]$  of  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . Each reduced decomposition  $w = s_{\alpha_1} \circ \dots \circ s_{\alpha_t}$  ( $\alpha_i \in \Pi$ ) corresponds to a family of "canonicals" generators  $X_1, \dots, X_t$  Of  $U[w]$ .

We prove that, when the decomposition of  $w_0$  (longest Weyl word) induced on  $\Phi^+$  a good order as defined by G. Lusztig, we can describe by a recursive procedure the set of Cauchon diagrams of  $U_q^+(\mathfrak{g})$ . These diagrams give a combinatorial description of the H-stratification of the prime spectrum as defined by K. Brown et K. Goodearl. Thanks to a particular decomposition of  $w_0$  in each type of simple Lie algebra, we prove again and generalize a result from M. Gorelik to the case of  $q$  is not a root of unity : the set of H-prime ideal and the Weyl group have the same cardinality.

We also prove that the Cauchon diagrams of  $U[w]$  are in one to one correspondance with the set of positive subexpressions of  $w$  as defined by R. Marsh and K. Rietsch and by the same time we construct an explicit bijection between the cauchon diagrams of  $U[w]$  and the set  $W^{\leq w} = \{u \in W | u \leq w\}$  where " $\leq$ " is the Bruhat order on  $W$ .

---

DISCIPLINE : Mathématiques.

---

MOTS-CLES : Groupes quantiques, Algèbres enveloppantes quantifiées, Idéaux premiers, H-stratification, Effacement des dérivations.

---

Laboratoire de Mathématiques - FRE 3111, Université de Reims  
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France.