

Modélisation numérique des structures composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin)

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 03 Octobre 2008

pour l'obtention du

Grade de DOCTEUR de l'Université de Reims
Champagne-Ardenne

Spécialité : Mécanique

par

Mme SAKAMI SIHAM

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pr. BENJEDDOU AYECH	SUPMECA de Paris
	Pr. POLIT OLIVIER	Directeur de LAMI, Paris x
<i>Examineurs :</i>	Pr. GELIN JEAN CLAUDE	Directeur de l'ENSMM, Besançon
	Pr. AYAD REZAK	Directeur de thèse, ESIEC, URCA
	Dr. SABHI HAMID	Co-encadrant de thèse, IFTS, URCA
	Pr. LODINI ALAIN	Directeur du laboratoire LACM, URCA
	B. MANGAINT	Directeur technique, Rotoplus Groupe Sofilab

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire d'Analyse des Contraintes Mécanique (LACM) à l'IFTS de Charleville Mézières et l'ESIEC de REIMS.

Je remercie profondément mon directeur de thèse le professeur AYAD Rezak qui a su me diriger tout au long de cette thèse avec patience, rigueur et bonne humeur. Sans lui, la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Sa patience et ses approches toujours à la fois scientifique et pratique ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

J'exprime également toute ma reconnaissance à mon encadrant de thèse Monsieur SABHI Hamid, je le remercie profondément pour l'aide qu'il m'a offerte durant ma thèse.

Je remercie Monsieur Nabil TALBI qui a apporté un soutien scientifique important à mon travail de recherche.

Je remercie LODINI Alain de m'avoir accueilli au Laboratoire d'Analyse des Contraintes Mécaniques. Je remercie très chaleureusement mes deux rapporteurs, Messieurs BENJEDDOU Aych et Olivier POLIT qui ont pris le temps d'examiner avec une attention bienveillante mon travail et d'apporter quelques critiques constructives.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur LODINI Alain qui a accepté de présider mon jury de thèse. Mes plus vifs remerciements vont également à Monsieur GELIN Jean Claude qui a accepté d'examiner ma thèse et à monsieur MANGAINT Bernard qui a accepté de participer au jury.

J'adresse tout particulièrement, mes remerciements au Conseil Général des Ardennes de m'avoir fourni les moyens financiers pour que ces travaux de recherche se déroulent dans de bonnes conditions. Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Abellino Poletti, Conseiller Général, pour m'avoir fait l'honneur d'assister à la soutenance.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les doctorants de l'IFTS, et à mes collègues de l'ESIEC avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces trois années une belle étape de ma vie.

Je remercie de tout mon cœur ma famille qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études et par conséquent, ce mémoire de thèse.

*A mes parents SAKAMI Moha et Allam Ytto
A mes frères et soeurs
A mon mari*

Table des matières

	i
Table des figures	5
Liste des tableaux	9
Notations	13
Introduction générale et objectifs	15

1

Analyse bibliographique

1.1	Evolution des théories aux éléments finis	19
1.2	Synthèse bibliographique	22
1.2.1	Approche monocouche équivalente	22
1.2.2	Approche par couche	27
1.2.3	Approche par développement asymptotique	31
1.3	Facteurs de correction du CT	32
1.4	Modèles éléments finis	33
1.4.1	Approches géométriques	33
1.4.2	Modèles éléments finis de plaques et de coques composites	35
1.5	Conclusion	38

2

Le modèle de plaques composites DMQP ml

2.1	Introduction	39
-----	------------------------	----

2.2	Formulation théorique du DMQP ml	40
2.2.1	Rappel du modèle isotrope. L'élément DMQP iso	40
2.2.2	Formulation du nouveau modèle de plaque multicouche	50
2.2.3	Expressions finales des courbures de flexion $\{\chi\}$ et des déformations de CT $\{\gamma_0\}$	52
2.3	Matrice de rigidité globale	53
2.4	Relations contraintes-déformations et efforts résultants	53
2.4.1	Expressions des efforts résultants	53
2.4.2	Calcul des contraintes planes et de cisaillement transversal	54
2.5	Matrice masse élémentaire	57
2.6	Conclusion :	58

3

Validation numérique du DMQPml
--

3.1	Performances et précision de l'élément isotrope	59
3.1.1	Examen des modes de déformations constantes	59
3.1.2	Examen de la précision en fonction du maillage	60
3.2	Résultats des cas-tests de plaques composites multicouches	66
3.2.1	Rappel des techniques de calcul des facteurs de correction de CT	66
3.2.2	Plaque composite à 3 et 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal	67
3.2.3	Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme	78
3.2.4	Confrontation de l'élément DMQP ml à des modèles basés sur des théories d'ordre supérieur	82
3.3	Vibrations libres de structures isotropes et composites	101
3.3.1	Plaque carrée isotrope simplement supportée	101
3.3.2	Plaque carrée sandwich simplement supportée	103
3.3.3	Application aux vibrations libres d'une plaque en carton ondulé	103

4

Formulation théorique des modèles de coques DDM

4.1	Présentation générale du modèle DDM	109
4.1.1	Description géométrique de l'élément de coque DMQS . . .	109
4.1.2	Représentation du champ de déplacements	110
4.1.3	Approximation du champ de déformations	112
4.2	Formulation théorique du modèle DMQS iso	112
4.2.1	Déformations de membrane	112
4.2.2	Déformations de flexion (courbures)	113
4.2.3	Déformations de Cisaillement Transversal	113
4.2.4	Expressions finales des déformations $\{\varepsilon_1\}$ et $\{\gamma_0\}$	119
4.3	Formulation théorique du modèle DMQS ml	120
4.3.1	Tenseurs de déformation	120
4.3.2	Hypothèses discrètes modifiées de mindlin	120
4.3.3	Expression finale des matrices de rigidité modifiées de flexion et de CT	122
4.4	Matrice de rigidité élémentaire	123
4.4.1	Matrice de rigidité du modèle DMQS iso	123
4.4.2	Matrice de rigidité du modèle multicouche DMQS ml : . . .	124
4.4.3	Rigidité fictive pour θ_z :	125
4.4.4	Passage dans le repère global	126
4.5	Conclusion	127

5

Validation numérique

5.1	Introduction	129
5.2	Résultats des cas-tests standards de coques isotropes	129
5.2.1	Cylindre pincé avec diaphragmes rigides	129
5.2.2	Poutre vrillée avec chargements plan et hors plan	132
5.2.3	Coque hémisphérique pincée	133
5.2.4	Paraboloïde hyperbolique	135
5.3	Application aux coques composites orthotropes et multicouches . .	137
5.3.1	Cylindre orthotrope sous pression interne	137

5.3.2	Étude d'une plaque sandwich non-symétrique	138
5.3.3	Cylindre stratifié simplement supporté sous chargement sinusoidal	140
5.3.4	Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoidal	142
5.4	Étude des vibrations libres de structures composites	143
5.4.1	Vibrations libres d'une pale de ventilateur isotrope	143
5.4.2	Vibrations libres de panneaux composites	145

6**Conclusions générales & perspectives****Bibliographie****151****Annexes****A****Rappel sur les coques isoparamétriques**

A.1	Cinématique des coques de forme quelconque	163
A.1.1	Description de la surface moyenne	163
A.1.2	Description d'un point quelconque	165
A.2	Champ des déplacements virtuels	168
A.3	Champ des déformations virtuelles	169

B**Lois de comportement des plaques et des coques**

B.1	Matériau isotrope	173
B.2	Matériau orthotrope	174
B.2.1	Matériau orthotrope dans le plan LT et isotrope dans le plan Tz	174
B.2.2	Rotations des contraintes et des déformations	175
B.3	Matériau composite	176
B.3.1	Définition	176
B.3.2	Calcul de la matrice de CT	178

Table des figures

1.1	Approximation des contraintes de CT : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur)	20
1.2	Distribution des contraintes de CT σ_{xz} selon 3 théories	21
1.3	Cinématique de Love-Kirchhoff	23
1.4	Cinématique de Reissner-Mindlin	25
1.5	Cinématique d'ordre supérieur	26
1.6	Champ de déplacements pour les deux catégories de modèles. Approche cinématique	28
1.7	Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [29]	29
1.8	Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [29]	29
1.9	Représentation des déplacements et des fonctions d'interpolation Lagrangienne globales utilisées dans la théorie LWT. [29]	30
2.1	Géométrie d'une plaque	41
2.2	Géométrie de l'élément DMQP	41
2.3	Cinématique d'un point d'une plaque en flexion/CT.	43
2.4	Cosinus directeurs sur un bord élémentaire k	43
2.5	Variation des rotations	44
2.6	Déformations de CT de bords	47
2.7	Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire $i-j$	49
2.8	Efforts résultants d'une plaque	54
2.9	Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène	55
3.1	Patch-test mécanique. Moments constants	60
3.2	Plaque biaise simplement supportée ($\alpha = 30^\circ$) sous charge uniforme	61
3.3	Plaque circulaire isotrope sous charge uniforme. Données et maillage	63
3.4	Plaque circulaire simplement supportée ($R/h = 50$)	64
3.5	Stratification d'une plaque composite à 3 et 9 couches. Données du problème	67
3.6	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Déplacement au centre de la plaque en fonction de L/h	74

3.7	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes planes à travers l'épaisseur ($L/h = 10$)	75
3.8	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes planes à travers l'épaisseur ($L/h = 10$)	75
3.9	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur	76
3.10	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur	77
3.11	Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Données du problème	79
3.12	Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Résultats des contraintes de CT maximales	81
3.13	Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Géométrie du problème	84
3.14	Plaque carrée sous chargement sinusoïdal. Données et propriétés mécaniques	90
3.15	Plaque carrée sandwich 3-couches simplement supportée sous chargement uniforme. Données du problème	92
3.16	Plaque sandwich ($f/c/f$)	94
3.17	Déplacement au centre de la plaque en fonction de L/h	97
3.18	Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur z/h	98
3.19	Plaque carrée sandwich à cinq couches sous chargement uniforme. Géométrie et données du problème	99
3.20	Vibrations libres d'une plaque carrée isotrope simplement supportée. Influence du CT sur la fréquence propre	102
3.21	Structure du carton ondulé	104
3.22	Vibrations libres d'une plaque rectangulaire en carton ondulé encastée. Montage expérimental et données	105
3.23	Essai du lâché	106
3.24	Plaque de longueur $L = 200\text{mm}$. Accélération et amplitude enregistrées du signal	107
3.25	Pulsations propres en fonction de la longueur de la plaque. Comparaison avec l'expérience	108
4.1	Élément de coque courbe isotrope à 4 nœuds DMQS	110
4.2	Cinématique virtuelle d'une fibre quelconque pq	111
4.3	Déformations naturelles de CT projetées sur les côtés	115
4.4	Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire $i-j$	116
4.5	Variation des rotations tangentielles suivant s	117

4.6	Hypothèses de Mindlin sur un bord multicouche élémentaire i - j .	121
5.1	Cylindre pincé avec diaphragmes. Données	130
5.2	Cylindre pincé. Convergence de \overline{W}_C	131
5.3	Cylindre pincé. Convergence de \overline{V}_D	131
5.4	Poutre vrillée sous charges concentrées. Données du problème	132
5.5	Coque hémisphérique pincée. Données du problème	134
5.6	Coque hémisphérique pincée. Convergence de U_A	135
5.7	Paraboloïde hyperbolique sous pression externe. Données du problème	136
5.8	Paraboloïde hyperbolique. Convergence du déplacement normal W_o	136
5.9	Cylindre orthotrope sous pression interne. Données du problème	137
5.10	Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous chargement uniforme. Données du problème	139
5.11	Cylindre stratifié simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Géométrie et données	140
5.12	Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Données du problème	142
5.13	Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Données du problème	144
5.14	Vibrations libres de panneaux composites. Données du problème	145
B.1	Système d'axes local et global	175

Liste des tableaux

2.1	Fonctions d'interpolation bi-linéaires et quadratiques incomplètes de l'élément initial DMQS β	42
2.2	Nœuds $i - j$ du bord k	50
3.1	Plaque biaise ($\alpha = 30^\circ$). Flèche et moment au centre de la plaque pour ($L/h = 1000$)	62
3.2	Plaque biaise ($\alpha = 30^\circ$). Flèche et moment au centre de la plaque pour ($L/h = 100$)	62
3.3	Plaque circulaire simplement supportée sous chargement uniforme. Déplacement au centre de la plaque	65
3.4	Plaque circulaire encastree sous chargement uniforme. Déplacement au centre de la plaque	65
3.5	Plaque circulaire simplement supportée sous chargement uniforme. Moment M_r au centre de la plaque	65
3.6	Plaque circulaire encastree sous chargement uniforme. Moment M_r au centre de la plaque	65
3.7	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats des contraintes planes maximales	70
3.8	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT maximum	71
3.9	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats des contraintes planes maximales	72
3.10	Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT maximum	73
3.11	Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme. Comparaison des déplacements maximum au point C	80
3.12	Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Contrainte $\bar{\sigma}_{xC}$ maximale pour différents rapports L/h	80

3.13	Plaque rectangulaire ($b/a = 3$) composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) de même épaisseur simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats des contraintes planes maximales « cas-1 »	85
3.14	Plaque rectangulaire ($b/a = 3$) composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) de même épaisseur simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT « cas-1 »	86
3.15	Plaque carrée composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) “même épaisseur” simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats des contraintes planes maximales « cas-2 »	87
3.16	Plaque carrée composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) “même épaisseur” simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT « cas-2 »	88
3.17	Plaque carrée composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) “même épaisseur” simplement supportées sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximums « cas-3 »	89
3.18	Flexion centrale d’une plaque rectangulaire sous chargement sinusoïdal : $\bar{w} = \frac{100E_2h^3}{q_0a^4}w_c$	91
3.19	Plaque carrée sandwich ($f/c/f$). Résultats de la flèche au centre de la plaque	93
3.20	Plaque carrée sandwich ($f/c/f$). Résultats des contraintes de CT maximales	93
3.21	Plaque carrée sandwich ($f/c/f$) simplement supportée sous chargement sinusoïdal. Déplacement central et contrainte de CT	96
3.22	Plaque carrée sandwich ($f/c/f$) simplement supportée sous chargement sinusoïdal. Contraintes normales	97
3.23	Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme. Flèche au point C des contraintes planes et des contraintes de CT maximales	100
3.24	Plaque carrée isotrope simplement supportée ($L/h = 10$). Comparaison des 4 premières fréquences propres	102
3.25	Plaque carrée isotrope simplement supportée. Influence de L/h sur la fréquence fondamentale	102
3.26	Plaque carrée sandwich simplement supportée ($L/h=10$). Comparaison des fréquences propres fondamentales	103
3.27	Vibrations libres d’une plaque en carton ondulé. Pulsations propres expérimentales en fonction de la longueur de la plaque	106
3.28	Résultats numériques des pulsations propres. Comparaison avec l’expérience	108
4.1	Fonctions d’interpolation bi-linéaires et quadratiques incomplètes de l’élément initial DMQS β	111

4.2	Nœuds $i-j$ du bord k	119
5.1	Poutre vrillée. Résultats des déplacements en A pour $h = 0,32$.	133
5.2	Poutre vrillée. Résultats des déplacements en A, pour $h = 0,0032$	133
5.3	Cylindre orthotrope sous pression interne. Déplacement maximum	138
5.4	Plaque carrée Sandwich non symétrique simplement supportée sous chargement uniforme. Déplacement maximum	139
5.5	Cylindre simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Flèche au point C	141
5.6	Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinu- soïdal. Convergence de la flèche au centre	143
5.7	Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Fréquences propres (Hz)	144
5.8	Vibrations libres de panneaux composites. Fréquences propres (Hz)	146

Notations

x, y, z	Repère local de l'élément
X, Y, Z	Repère cartésien global
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	Base du repère global
L, T, z	Repère d'orthotropie
U, V, W	Déplacements globaux
u, v, w	Déplacements locaux
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Rotations autour des axes x, y, z
dV	Élément de volume
dA	Élément de surface moyenne de la coque ou de la plaque
ds	Élément de longueur de la coque ou de la plaque
h	Épaisseur de la coque ou de la plaque
σ_{ij}, τ_{ij}	Composantes du tenseur des contraintes
$\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}$	Composantes du tenseur des déformations
$\langle \sigma \rangle$	Vecteur des contraintes planes
$\langle \tau \rangle$	Vecteur des contraintes de cisaillement transversal
$\langle \varepsilon \rangle$	Vecteur des déformations planes
$\langle \gamma \rangle$	Vecteur des déformations de cisaillement transversal
$\langle e \rangle, \langle \chi \rangle$	Vecteur des déformations de membrane et des courbures de flexion
*	Symbole relatif à une quantité virtuelle
$f_{,x}$	Dérivée d'une fonction f par rapport à x
\sum	Symbole de sommation
∂	Dérivée partielle
$\langle N \rangle$	Efforts de membrane
$\langle M \rangle$	Moments de flexion
$\langle T \rangle$	Efforts tranchants ou de cisaillement transversal
$\langle U_n \rangle, \langle u_n \rangle$	Vecteur des degrés de liberté nodaux dans les repères global et local
$[H]$	Matrice de comportement élastique (rigidité) dans le repère de calcul
$[G]$	Matrice de comportement (rigidité) en cisaillement transversal
$[H_m], [H_{mf}]$	Rigidités de membrane et de couplage membrane-flexion
$[H_f], [H_c]$	Rigidités de flexion et de cisaillement transversal
E_L, E_T, E_z	Modules d'Young dans les directions d'orthotropie L, T, z
G_{LT}, G_{Lz}, G_{Tz}	Modules de cisaillement dans les plans L - T, L - z, T - z
$\nu_{LT}, \nu_{Lz}, \nu_{Tz}$	Coefficients de Poisson

k_{11}, k_{22}, k_{12}	Coefficients de correction du cisaillement transversal
W_{int}	Travail virtuel des efforts internes
W_{ext}	Travail virtuel des forces externes
$[K]$	Matrice de rigidité
$()^e$	e : lettre traduisant une quantité élémentaire
$[K_m]$	Matrice de rigidité de membrane
$[K_f]$	Matrice de rigidité de flexion
$[K_{mf}]$	Matrice de rigidité de couplage membrane-flexion
$[K_{ct}]$	Matrice de rigidité de cisaillement transversal
$[M]$	Matrice masse
ddl	Degrés de liberté
CT	Cisaillement Transversal

Introduction générale et objectifs

Cette étude doctorale à caractère scientifique et technologique a pour objet la formulation théorique, la mise en œuvre numérique et l'évaluation d'un nouveau modèle d'éléments finis du premier ordre (théorie de Reissner/Mindlin) pour les problèmes de plaques et de coques isotropes et composites. Elle s'inscrit dans le cadre du développement d'un outil d'aide à la conception et à l'optimisation des structures composites. Associé à des lois de comportement appropriées, ce modèle sera en mesure de fournir des résultats précis en déplacements, en déformations et en contraintes, pour un dimensionnement optimal des structures composites. Les applications pourront concerner l'ensemble des secteurs utilisant des matériaux composites multicouches. Nous citons en particulier les secteurs de l'automobile, de l'aéronautique, de la défense ou de l'emballage.

Le modèle à développer concernera un élément fini de plaque et de coque courbe géométriquement simple (4 nœuds), basé sur une nouvelle approche variationnelle appelée DDM (Displacement Discrete Mindlin). Il prend en compte l'effet du cisaillement transversal CT à travers l'épaisseur. Le modèle DDM introduit de manière discrète deux hypothèses de Mindlin. La première hypothèse est cinématique, elle consiste à introduire sous la forme d'une intégrale de contour une équation cinématique de la déformation de CT. Elle permet l'élimination du verrouillage en CT sans introduire des fonctions bulles ou sans recourir à l'intégration réduite ou selective. Il s'agit de l'approche des déformations de CT de substitution, connue sous le nom de « ANS method : Assumed Natural Strains ». La seconde hypothèse fait appel à deux lois de comportement, l'une en flexion et l'autre en CT, et deux équations d'équilibre d'une plaque en flexion/CT. Elle a pour principal avantage une élimination locale des degrés de libertés de rotation, introduits initialement au milieu d'un bord élémentaire par le biais d'une approximation quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne. Les deux hypothèses seront développées en détail dans cette présente étude doctorale. Elles peuvent être adaptées à des matériaux isotropes ou anisotropes, et plus particulièrement à des matériaux orthotropes à plusieurs couches.

Les performances des deux modèles d'éléments finis développés sont confrontées à celles des modèles existants dans la littérature, qu'ils soient basés sur la théorie du premier ordre de Reissner/Mindlin ou sur des théories d'ordre supérieur.

L'objectif de l'étude doctorale initialement défini était la formulation du modèle de coque multicouche avec la prise en compte des non linéarités géométriques. En effet, les difficultés que nous avons rencontrées au niveau de l'implémentation du modèle isotrope de coque courbe nous ont conduit à reformuler l'élément de plaque homogène isotrope, développé par Katili [71], pour une validation en premier lieu sur des plaques considérées comme cas particuliers de modèles de coque courbe, et au second lieu pour une extension au cas des plaques composites multicouches.

Ainsi, trois nouveaux éléments finis ont été développés sur la base du modèle DDM :

- DMQP $_{ml}$: Discrete Mindlin Quadrilateral for Plates multilayered (Élément fini de plaque composite multicouche, quadrilatéral à 4 nœuds et 3 ddl par nœuds, basé sur des hypothèses discrètes de Mindlin) ;
- DMQS $_{iso}$: Discrete Mindlin Quadrilateral for isotropic Shells (Élément fini de coque courbe isotrope, avec ou sans gauchissement, quadrilatéral à 4 nœuds, basé sur des hypothèses discrètes de Mindlin) ;
- DMQS $_{ml}$: Discrete Mindlin Quadrilateral for multilayered Shells (Élément fini de coque courbe composite multicouche, avec ou sans gauchissement, quadrilatéral à 4 nœuds, basé sur des hypothèses discrètes de Mindlin).

Les trois éléments finis développés sont basés sur une interpolation initiale quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne, faisant dériver prématurément un élément de départ à 8 nœuds, très peu recommandable sur le plan pratique. Deux hypothèses discrètes de Mindlin, que nous développons dans cette étude, sont introduites localement pour éliminer 4 nœuds et ne garder que les 4 nœuds « sommets » avec les ddl classiques d'une plaque : le déplacement transversal w et les rotations de la normale à la surface moyenne β_x et β_y .

- Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique sur les approches existantes de plaques multicouches, avec leurs avantages et inconvénients. Ainsi, nous présentons dans ce chapitre un ensemble d'éléments finis sophistiqués basés en particulier sur des théories dites d'ordre supérieur.
- Dans le second chapitre, nous présentons la formulation théorique et l'évaluation d'un nouvel élément fini du premier ordre pour les plaques composites multicouches. Il est basé sur un modèle variationnel en déplacement que nous considérons comme discret, dans la mesure où l'on introduit localement, et de manière discrète, deux hypothèses cinématique et mécanique. Ce modèle que nous appelons DDM (Displacement Discrete Mindlin) fournit un élément fini géométriquement simple (un quadrilatère à 4 nœuds et 3 ddl par nœud) et efficace. Ainsi, une courbure de flexion approchée li-

néairement est le résultat d'une représentation quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne. Le nouvel élément de plaque, baptisé DMQP ml (Discrete Mindlin Quadrilateral Plate multilayer), est une extension au cas multicouche du modèle isotrope DKMQ proposé par Katili [71]. Nous avons introduit localement deux hypothèses modifiées de Mindlin dans l'élément DKMQ, pour prendre en compte le caractère multicouche des plaques composites. Le modèle DMQP ml prend en compte les effets de CT à travers l'épaisseur et reproduit les résultats de plaques minces quelque soit l'élanement (absence de verrouillage en CT). Les contraintes de CT sont calculées en intégrant suivant l'épaisseur les équations d'équilibre ; elles vérifient les conditions aux limites et la continuité aux interfaces. Elles sont linéaires à travers l'épaisseur, d'où la nécessité d'introduire des facteurs de correction de CT. Ces facteurs sont calculés par équivalence de l'énergie de CT associée à la théorie du premier ordre avec celle due aux contraintes de CT. Des modèles d'ordre supérieur ont fait l'objet de comparaison avec notre modèle dans le chapitre 3. Les résultats obtenus sont encourageants, voire meilleurs dans certains cas.

- Le chapitre 3 est consacré à la validation de l'élément de plaque DMQP ml sur des cas-tests standards de plaques isotropes, sandwichs et stratifiées.
- Le chapitre 4 est consacré au développement du modèle DMQS iso (Discrete Mindlin Quadrilateral for isotropic Shells). Il est formulé sur la base d'un élément quadrilatéral à 4 nœuds et 6 ddl par nœud. Il est basé sur l'approche isoparamétrique (courbe) du solide tridimensionnel dégénéré dans l'épaisseur. Il prend en compte les effets de gauchissement ; sa formulation est de type déplacement avec une représentation naturelle des déformations de CT au niveau élémentaire. Il est enrichi en introduisant initialement une approximation quadratique incomplète des rotations autour de la normale à la surface moyenne. Une des conséquences de ce type d'interpolation est l'apparition de ddl supplémentaires au milieu des côtés. Ceux-ci sont éliminés par l'introduction d'hypothèses discrètes, que nous développons dans ce chapitre, sans altérer la précision de l'élément quadratique initial. Nous aboutissons en conséquence à un élément fini isoparamétrique courbe, géométriquement simple (quadrangle à 4 nœuds), pouvant atteindre des précisions appréciables, proches de ses homologues à huit nœuds, voire meilleures dans certaines situations. Celui-ci est libre de tout verrouillage, passe l'ensemble des patch-tests de déformations et de contraintes constantes, ne présente pas de modes parasites et demeure peu sensible aux distorsions géométriques des maillages. Il peut être considéré comme une alternative aux éléments finis de coques minces courbes, dits de Kirchoff discrets, qui ont largement fait leurs preuves dans des applications industrielles aux structures non sensibles au CT. Pour formuler le

modèle multicouche $DMQS_{ml}$, nous conservons dans une première étape l'expression de l'hypothèse cinématique utilisée dans la formulation du modèle isotrope $DMQS_{iso}$, à partir du moment où elle ne fait pas intervenir des termes liés au comportement mécanique d'une coque. Nous proposons dans une seconde étape une modification de l'hypothèse mécanique pour prendre en compte les propriétés d'une section de coque multicouche. Le modèle de coque isotrope améliore sensiblement les résultats de coques présentant des comportements assez complexes en flexion.

- Le chapitre 5 est consacré à la validation numérique des éléments de coque proposés. Une série de cas-tests standards considérés par les ingénieurs comme des outils importants de validation d'éléments de coque, est utilisée par la suite. Différents types de sollicitations statiques et dynamiques (vibrations libres) sont traités pour des structures composites stratifiées et sandwichs.
- Le chapitre 6 fournit une conclusion globale mettant en évidence les capacités et les limites de nos modèles de premier ordre. Des perspectives à ce travail doctoral y sont présentées par la suite.

Chapitre 1

Analyse bibliographique

1.1 Evolution des théories aux éléments finis pour la modélisation des composites multicouches

La théorie des structures minces la plus ancienne est celle de Kirchoff [77] qui néglige l'effet de CT. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre classique, communément associée à Reissner [123] ou Mindlin [91] qui furent les premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du CT à travers l'épaisseur. Elle conduit, de part l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de CT constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/CT (Fig. 1.1). Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du CT y sont introduits.

Il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc.) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple, facile et peu coûteuse en temps de calcul. Une modélisation adéquate pour la prise en compte des déformations de CT, dans les plaques composites et dans les sandwiches est un des domaines actifs de recherche au cours de ces dernières années. Les théories de plaques classiques basées sur les hypothèses de Kirchoff [124, 147], négligeant les effets de CT, ne sont adéquates que pour l'analyse des plaques composites minces. Ces théories prévoient mal les réponses des structures multicouches modernes épaisses avec un degré d'anisotropie élevé : cela est dû au faible module de cisaillement de ces matériaux par rapport à leur rigidité d'extension, qui les a rendus faibles en cisaillement, ce qui induit une distribution complexe des contraintes de CT à travers l'épaisseur dans les plaques. Dans ce contexte, plusieurs modèles de plaques 2D ont été proposés pour prendre en compte l'effet du CT. On peut regrouper ces théories de plaque

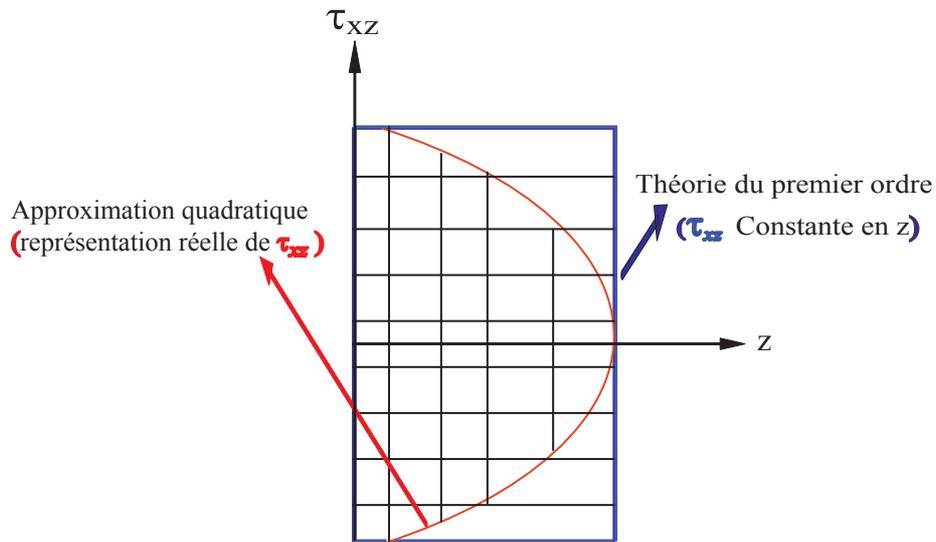


FIG. 1.1 – Approximation des contraintes de CT : constantes (théorie du premier ordre) et quadratiques (ordre supérieur)

2D en deux catégories : les modèles à monocouche équivalente (approximation globale) et les modèles à couches discrètes (approximation locale).

La première catégorie contient des théories du type Reissner-Mindlin [91] étendues aux multicouches où l'on remplace ces derniers par une plaque anisotrope homogène équivalente [144, 133]. Reddy et Chao [122] ont introduit l'effet de déformation de CT dans les plaques composites, en prenant une déformation de cisaillement uniforme constante sur l'ensemble de l'épaisseur de la plaque ; cette théorie est populairement connue sous l'appellation FSDT « First Order Shear Deformation Theory ». Elle exige un facteur arbitraire de correction de cisaillement, en raison de la variation non-linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur qui doit être supposée linéaire. On trouve également des théories d'ordre supérieur HSDT « Higher Order Shear Deformation Theory » basées sur l'approximation non linéaire des déplacements 3D, des contraintes 3D ou mixtes [42, 75, 146], ainsi que des théories plus fines appelées RHSDT « Refined Higher Order Shear Deformation Theory » [38]. Le principal objectif de toutes ces théories de plaque est plus ou moins le même, certaines se distinguent par rapport aux autres en terme de précisions, particulièrement sur les contraintes de CT.

Une prévision des déplacements et des contraintes des plaques sandwichs et stratifiées est donnée par Kim et Cho [75], en utilisant la théorie du premier ordre renforcée, basée sur une théorie variationnelle mixte appelée « EFSDTM (Enhanced first-order plate theory based on the mixed variational theorem) ». Dans la formulation mixte, les contraintes de CT sont basées sur une théorie de plaque d'ordre supérieur efficace appelée « EHOPT (Efficient Higher Order Plate

Theory) » qui fût développée par Cho et Paramerter [38].

Dans la deuxième catégorie, les modèles sont basés sur l'approche par couche et se distinguent par la linéarité ou la non-linéarité des champs dans l'épaisseur de chaque couche. Ce sont des modèles sophistiqués qui permettent d'étudier des réponses locales, notamment sur l'interface entre les couches. Bien évidemment le nombre de variables dépend du nombre de couches, ce qui augmente considérablement le volume de calcul. Di Sciuva [45, 46, 47] propose le modèle dit « Zig-Zag », source de nombreux travaux complémentaires. Celui-ci se base sur une approche par couche mais avec un nombre de variables indépendants du nombre de couches

Les caractéristiques de base de toutes ces théories sont la considération d'une variation parabolique des déformations et des contraintes de CT à travers l'épaisseur et, en même temps, la discontinuité des contraintes sur les couches « interfaces » du stratifié. Nous présentons sur la figure 1.2 la distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur, obtenue par trois théories différentes.

Des revues bibliographiques récentes sur les différentes théories pour la modélisation des structures multicouches sont données par [29, 68, 31, 32, 33, 43, 92, 61]. Une comparaison intéressante entre les différentes théories est donnée par [29, 61]. Des travaux très récents, basés sur la théorie du troisième ordre, ont également fait l'objet de publication [58].

Une synthèse sur les aspects « éléments finis » et le lien entre les théories du premier ordre et d'ordre supérieur sont développés dans la section suivante.

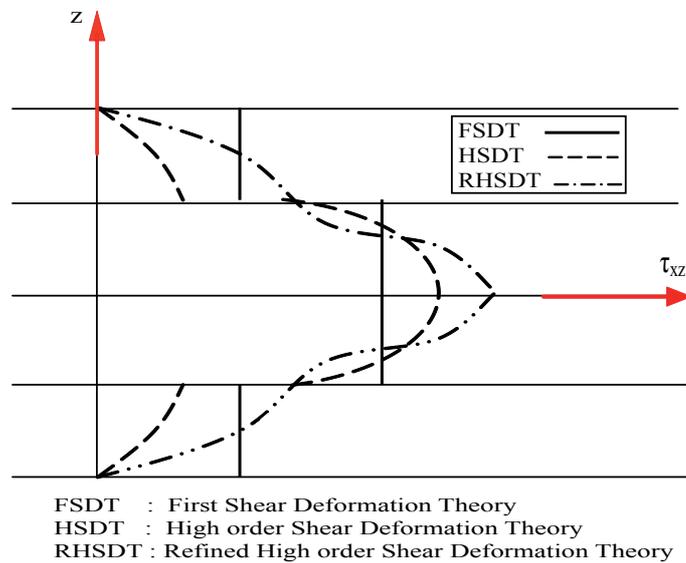


FIG. 1.2 – Distribution des contraintes de CT σ_{xz} selon 3 théories

1.2 Synthèse bibliographique sur les modèles de structures multicouches.

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de plusieurs matériaux de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à la performance des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice et d'un renfort constitué de fibres. La matrice est-elle même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.). Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice permet de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de les protéger vis-à-vis des agressions extérieures.

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de CT de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwichs) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transversaux. On trouve dans [98, 67, 28, 66, 29] des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [105, 106, 131, 130]. De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse, . . .) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces. Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des effets de CT ou des endommagements. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adoptée :

- Approche monocouche équivalente ;
- Approche par couche ;
- Approche par développement asymptotique.

1.2.1 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche. Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces, en passant par les modèles du premier ordre

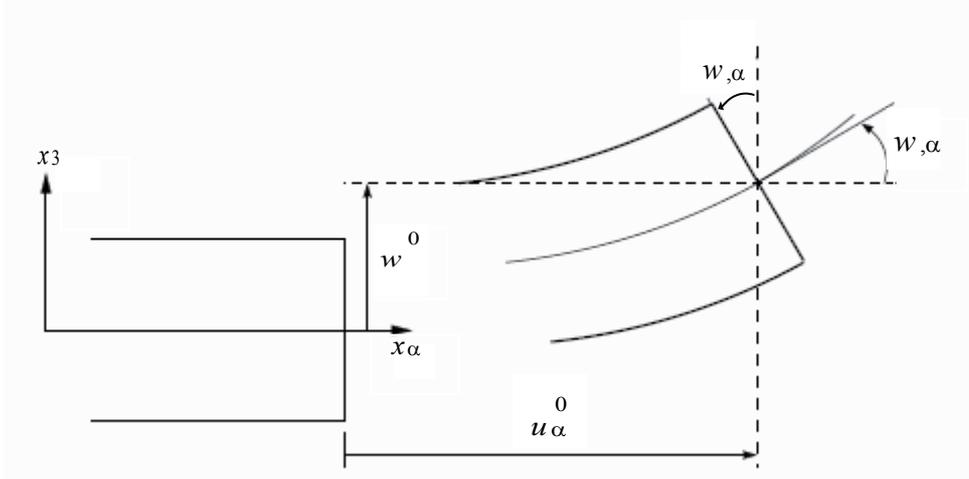


FIG. 1.3 – Cinématique de Love-Kirchhoff

de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous présentons dans les sections suivantes, les principaux modèles basés sur cette approche.

Les modèles classiques de Love-Kirchhoff

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur [124, 147]. L'hypothèse de contraintes planes adoptée est celle de Love-Kirchhoff [77], les déformations dues au CT étant négligées. La normale reste droite et perpendiculaire à la surface moyenne après déformation (Fig. 1.3).

$$u_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_1^0(x_1, x_2) - zw_{,x_1}(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3 = z) = u_2^0(x_1, x_2) - zw_{,x_2}(x_1, x_2) \quad (1.2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad (1.3)$$

avec ;

u_α^0 : le déplacement de membrane dans la direction $\alpha = 1, 2$;

w : le déplacement transversal ;

$w_{,x_\alpha}$: la rotation due à la flexion (sans cisaillement).

Les modèles de Reissner-Mindlin

L'hypothèse cinématique de Reissner-Mindlin [91, 123] est adoptée pour introduire l'effet du CT. Elle est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes :

➤ Hypothèses cinématiques

- H1 : Hypothèse des sections droites

« Les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite mais non nécessairement normale à la surface moyenne dans la configuration déformée »

- H2 : La composante transversale de la déformation suivant l'épaisseur est constante.

➤ Hypothèses mécaniques

- H3 : Hypothèse des contraintes planes

« La contrainte σ_z est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes »

- H4 : Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. Cette hypothèse considère z comme axe d'orthotropie de toutes les couches (orthotropie dans le plan LT)

➤ Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit (Fig. 1.4) :

$$u_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_1^0(x_1, x_2) + z\phi_1(x_1, x_2) \quad (1.4)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3 = z) = u_2^0(x_1, x_2) + z\phi_2(x_1, x_2) \quad (1.5)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad (1.6)$$

avec

ϕ_α : la rotation de la normale au plan moyen dans le plan $x_\alpha x_3$ ($\alpha = 1, 2$) ;

$\gamma_\alpha^0 = (w, \alpha + \phi_\alpha)$: la déformation de CT mesurée sur le plan moyen.

Avec ce choix des champs de déplacements, les déformations de CT γ_α sont constantes en z . Les contraintes de CT sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal.

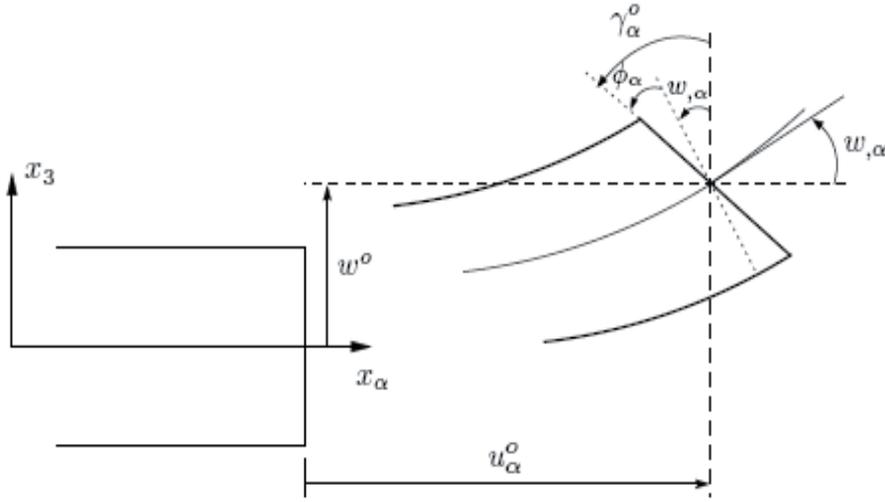


FIG. 1.4 – Cinématique de Reissner-Mindlin

Les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacements ou des contraintes dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Fig. 1.5).

La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent, avec $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (1.7)$$

Dans le cas des théories du premier ordre de Reissner-Mindlin, nous avons $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$. Pour réduire le nombre de paramètres des déplacements, plusieurs simplifications sont proposées afin d'aboutir à des modèles d'ordre supérieur. Souvent, on impose les conditions de nullité des contraintes de CT aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (1.7) est utilisé avec $(\phi_i^{0(4)} = \phi_i^{0(2)} = \phi_3^{0(3)} = \phi_3^{0(1)} = 0)$, $\phi_\alpha^{0(3)}$. $\alpha = \{1, 2\}$ dépendent à $\phi_\alpha^{0(3)}$ et $w_{,x\alpha}$. L'expression correspondante devient :

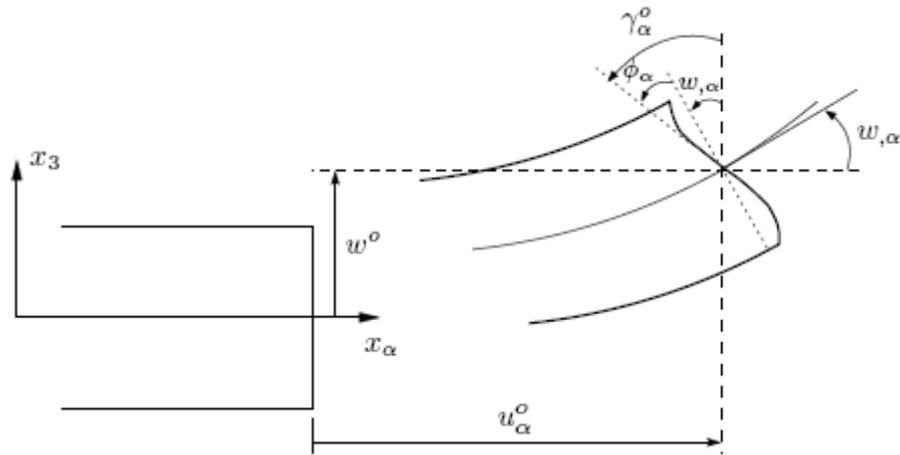


FIG. 1.5 – Cinématique d'ordre supérieur

$$u_1(x_1, x_2, x_3 = z) = u_1^0(x_1, x_2) - zw_{,x_1}(x_1, x_2) + f(z) \gamma_{x_1}^0(x_1, x_2) \quad (1.8)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3 = z) = u_2^0(x_1, x_2) - zw_{,x_2}(x_1, x_2) + f(z) \gamma_{x_2}^0(x_1, x_2) \quad (1.9)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \quad (1.10)$$

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques approches de la littérature associées à des modèles d'ordre supérieur. Elles diffèrent selon l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$:

► Approche de Ambartsumyan [5] :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) ;$$

► Approche de Reissner [123], Panc [109] et Kaczkowski [65] :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) ;$$

► Approche de Levinson [84], Murthy [95], Reddy [120] et [68] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$$

h étant l'épaisseur de la plaque multicouche.

Dans le modèle de Reddy [120], le champ des déplacements membranaires est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation des contraintes de CT par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution de ces contraintes est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de CT discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformations est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale sur l'interface des structures multicouches.

1.2.2 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface. Plusieurs modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [130, 45, 46, 94, 36, 27, 49, 2, 30, 42, 43]. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couches), mais permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles à couches discrètes, où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces, et les modèles Zig-Zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couches (Fig. 1.6).

Les modèles Zig-Zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnues, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle Zig-Zag du premier ordre [45, 46, 38]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ global des déplacements d'une théorie du premier ordre et d'une fonction Zig-Zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside) [52]. La fonction Zig-Zag donne une contribution des déplacements membranaires, continue en z , mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (Fig. 1.7). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de CT aux interfaces est assurée. L'avantage principal du champ de déplacements des modèles Zig-Zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction du CT est évité.

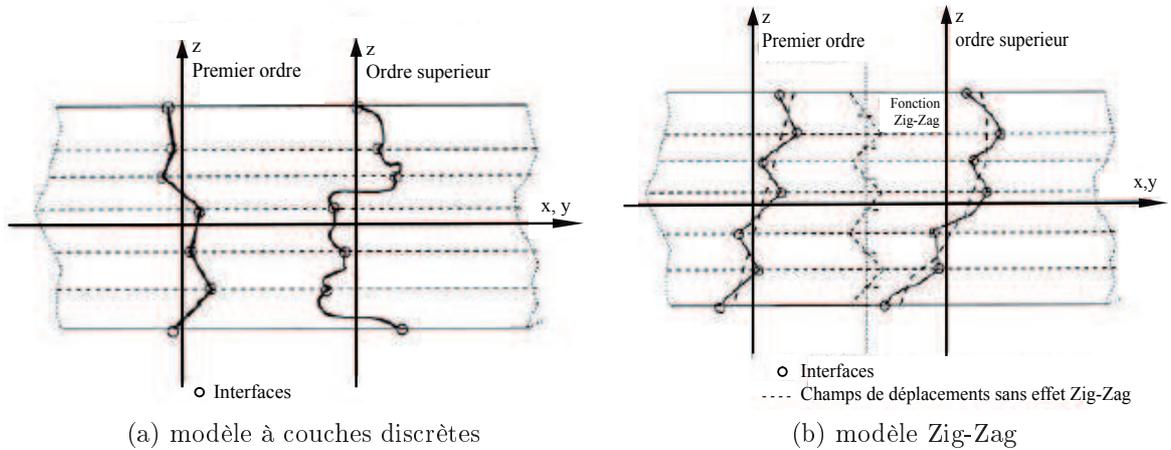


FIG. 1.6 – Champ de déplacements pour les deux catégories de modèles. Approche cinématique

En se basant sur le concept « Zig-Zag premier ordre » [45], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives du modèle en question [94, 10, 63, 29, 30, 68]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacements d'ordre supérieur (souvent cubique) [139, 138, 68, 75, 110] (Fig. 1.8). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle Zig-Zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Néanmoins, les modèles Zig-Zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. Le calcul des contraintes de CT par les équations constitutives des modèles Zig-Zag devient, moins précis quand le rapport d'élançement diminue [63]. Un autre inconvénient des modèles Zig-Zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur, est la continuité de type C^1 requise qui complique leur implémentation numérique.

Les modèles à couches discrètes

Les modèles à couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou Zig-Zag, puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (Figs. 1.6 et 1.9). En fait, avec les modèles à couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D)

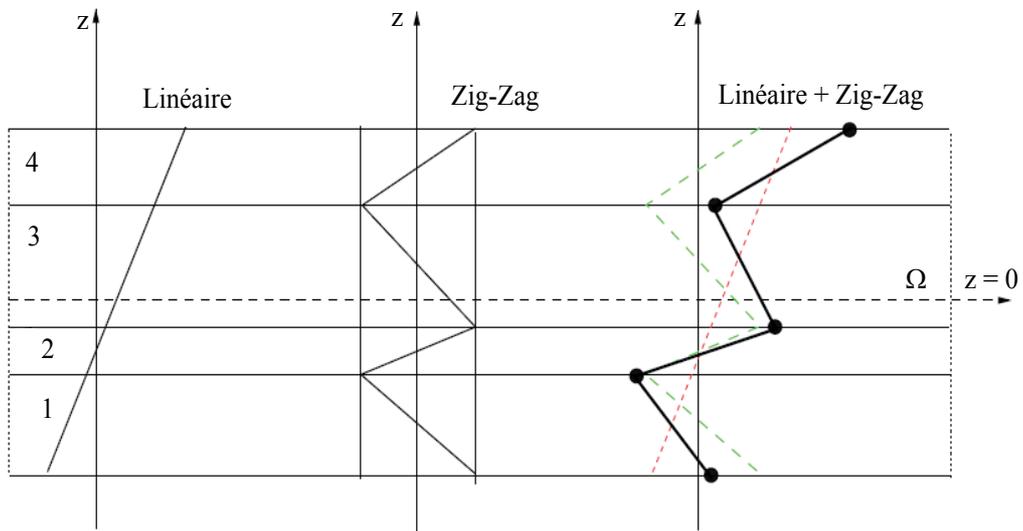


FIG. 1.7 – Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [29]

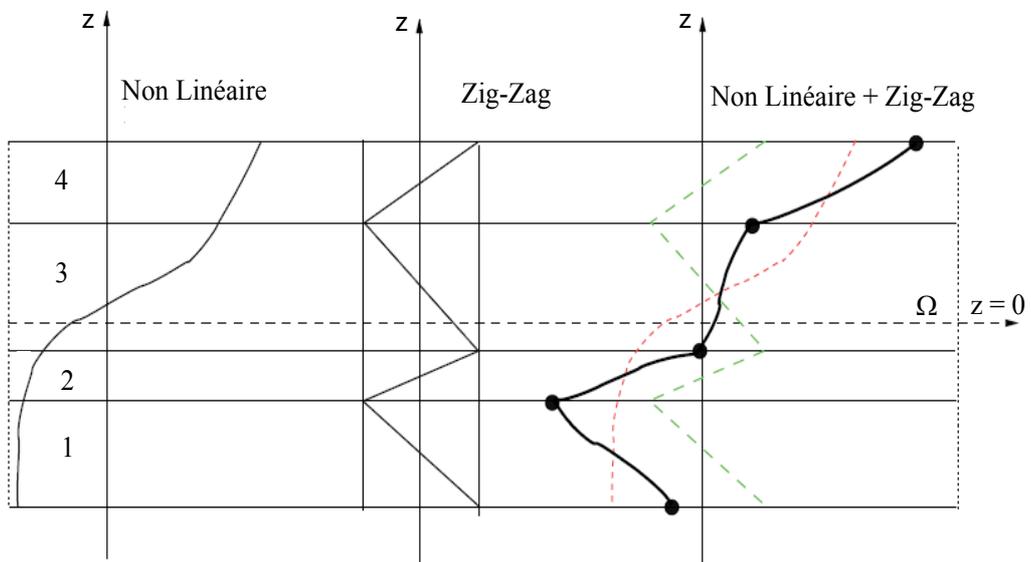


FIG. 1.8 – Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [29]

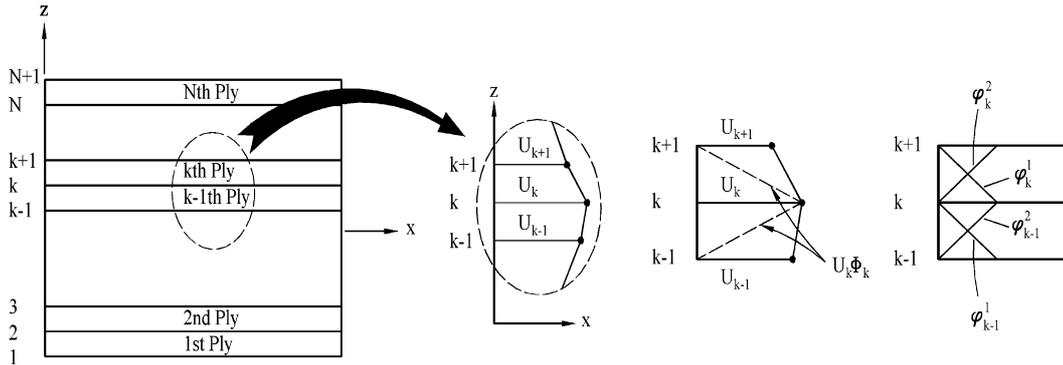


FIG. 1.9 – Représentation des déplacements et des fonctions d’interpolation Lagrangienne globales utilisées dans la théorie LWT. [29]

couplées par des efforts d’interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnues dépend du nombre de couches de la plaque composite.

- Dans leurs travaux [130, 121, 96, 135, 129, 146], les auteurs proposent une cinématique du premier ordre ou d’ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.
- Les travaux suivants [104, 125, 69, 114] et [148, 149] utilisent une approximation des champs de contraintes et de déplacements par couche ou une contrainte mixte cinématique :
 - [104] utilisent une fonction parabolique pour les contraintes de CT et le déplacement transversal. Ils développent un modèle basé sur l’approche discrète par couche en introduisant un élément fini lagrangien à 9 nœuds et l’élément Hétérosis ;
 - [125] utilisent un champ de contraintes dont la composante de CT est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces ;
 - [69] proposent une approche dans laquelle le champ de contraintes est construit sous la forme d’un produit de fonctions à variables séparées par couche, à partir de l’équilibre des forces et des moments. Les contraintes planes sont supposées constantes dans l’épaisseur ;
 - [148, 149] utilisent les fonctions de contraintes par couche [82] pour déterminer les contraintes interlaminaires. Elles sont approchées de façon polynômiale dans l’épaisseur ;
 - [114] proposent une approche dans laquelle le champ de déplacements

dans chaque couche discrète, à travers l'épaisseur du stratifié, inclut des distributions quadratiques et cubiques des déplacements plans, ajouté à cela des approximations linéaires associées à la théorie du premier ordre par couche.

- Parmi les modèles à couches discrètes existants, nous pouvons trouver des modèles multiparticulaires. Le premier travail semble être celui de Pagano [107] qui propose le modèle local. Celui-ci est construit à partir de la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner et d'une approximation polynômiale des champs de contraintes par couche. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratiques pour les contraintes de CT et donc cubiques pour les contraintes normales. La formulation variationnelle de Hellinger-Reissner, restreinte aux approximations de ces champs de contraintes, conduit à une cinématique du multicouche à n champs en $(x; y)$ (n étant le nombre de couches de la plaque). Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair. La formulation mixte de Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenant dans la formulation. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux, dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger la formulation tout en conservant un bon niveau de prédictibilité, nous citons en particulier les travaux développés dans les références [36, 26, 59, 48, 27, 97].

1.2.3 Approche par développement asymptotique

Le développement asymptotique est appliqué à des structures a priori peu épaisses, où le rapport entre l'épaisseur et la plus grande dimension est petit. Il est donc naturel d'envisager un développement asymptotique suivant ce rapport. Ce développement intervient au niveau de l'intégration des équations de l'élasticité (équations constitutives, équations de mouvement). Les références [78, 4, 150] utilisent les résultats de la théorie classique des plaques. Puis, au voisinage du bord, les auteurs correspondants posent le problème tridimensionnel de la détermination des champs (déplacements et contraintes). Ce problème est décomposé en problèmes bidimensionnels (couches limites perpendiculaires au bord). Ensuite, on introduit une approche mixte en contrainte-déplacement résolue par des développements en séries de Fourier par exemple. L'endommagement dans les couches et aux interfaces sont pris en compte.

1.3 Facteurs de correction du CT

Dans les années 70, le champ de déplacements d'un point quelconque de plaque fût basé sur la théorie du premier ordre. En optant pour ce choix, les chercheurs considéraient que les contraintes et les déformations de CT sont constantes à travers l'épaisseur. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de CT sont quadratiques à travers l'épaisseur (Fig. 1.1). Pour corriger la constance des contraintes de CT, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de correction sont introduits.

Les facteurs de correction sont calculés à l'aide d'une comparaison entre l'énergie de CT associée à la théorie du premier ordre et celle due aux contraintes de CT. Ces contraintes sont déduites des équations de l'équilibre tridimensionnel [80, 136, 23]. Un calcul plus exact [6] des facteurs de correction est obtenu en comparant l'énergie de cisaillement du premier ordre et celle associée à la théorie d'ordre supérieur. Dans le cas de la théorie du premier ordre, le coefficient correctif k permet d'estimer a priori la sensibilité des poutres au cisaillement transversal. Dans une section composite, cela permet d'optimiser les orientations des fibres quand il s'agit de matériau unidirectionnel ou les épaisseurs relatives des différentes couches dans les autres cas.

Les facteurs de correction k_{11} ; k_{22} ; k_{12} sont définis par :

Pour un matériau isotrope [15, 6], nous obtenons en général $U_{ct} = k\tilde{U}_{ct}$ (\tilde{U}_{ct} et U_{ct} sont les énergies de cisaillement obtenues par les équations d'équilibre et par la théorie du premier ordre « Mindlin » respectivement), ce qui donne ($k = k_{11} = k_{22} = 5/6$). Pour les matériaux composites, deux facteurs de correction k_{11} et k_{22} sont introduits :

$$U_{ct1} = k_{11}\tilde{U}_{ct1} \quad U_{ct2} = k_{22}\tilde{U}_{ct2} \quad (1.11)$$

U_{ct1} et \tilde{U}_{ct1} : énergies suivant l'axe x ;
 U_{ct2} et \tilde{U}_{ct2} : énergies suivant l'axe y.

Les facteurs peuvent devenir très petits pour les structures sandwichs. Vlachoutsis [141] propose une étude détaillée sur l'évolution de ces facteurs suivant le type de stratification. Il a notamment constaté que, quand on considère un multicouche à nombre de couches croissant, les facteurs de correction ne convergent pas vers $5/6$, mais vers une autre valeur, dépendant du matériau utilisé dans la couche élémentaire. Nous pouvons apporter une explication à ce phénomène. En effet, lorsque le nombre de couches augmente, les contraintes de CT tendent à devenir paraboliques (comme dans une plaque homogène). Par contre, les déformations de CT seront toujours paraboliques par morceaux, avec des discontinuités proportionnelles à G_{13}/G_{23} si les fibres sont successivement orientées à 0° et 90° . Or le facteur de correction, essentiellement basé sur un critère énergétique, utilise le produit de la contrainte par la déformation. Il ne peut tendre vers $5/6$

que si les deux distributions (contrainte et déformation) sont quadratiques, sans discontinuité.

- Bouabdllah [23] a développé une méthode de calcul des facteurs de correction du CT pour les coques cylindriques courbes. Il les identifie par une comparaison entre l'énergie de cisaillement résultante des équations d'équilibre et celle provenant de la déformation de CT de premier ordre (énergie effective). L'auteur a aussi étudié l'influence du rapport épaisseur/rayon (h/R) sur les facteurs de correction k_{xz} et k_{yz} . On note que R est le rayon de courbure de la coque. Il a conclu que plus h/R augmente, plus l'écart entre $k = 5/6$ « d'une plaque isotrope » et k_{xz} « d'une plaque multicouche » augmente ;
- Aurichio et al [6] ont adopté le principe d'équivalence entre l'énergie de CT calculée par la contrainte de CT τ^k (elle même obtenue par les relations constitutives de la théorie du premier ordre) et l'énergie de CT calculée en adoptant la contrainte $\hat{\tau}^{(k)}$ (récupérée par les équations d'équilibre tridimensionnelle) ;
- Choa et al [37] ont proposé une autre méthode de calcul des facteurs de correction en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre et celle déduite des équations d'équilibre, de façon à obtenir des facteurs de correction initiaux entre FSDT « First Shear Deformation Theory » et EHOST « Efficient High Order Shear Theory ». Cela permet de corriger les déformations de CT qui réduisent l'effet de rotation de l'angle de cisaillement γ .

1.4 Modèles éléments finis pour les structures isotropes et multicouches

Les solutions analytiques fournies par les approches décrites précédemment ne concernent que des cas de géométrie, chargement et empilement simples. Pour les cas complexes, plusieurs méthodes numériques ont été développées. On ne s'intéresse ici qu'à la méthode des éléments finis, outil d'ingénierie dominant pour l'analyse des structures. Les éléments finis sont généralement classés suivant le type de description géométrique (2D, 3D), la méthode de construction et le choix du type d'inconnues principales du modèle (déplacement, contrainte, mixte et hybride). Ci-dessous, nous présentons les approches géométriques nécessaires pour le développement des éléments finis et différentes contributions d'éléments finis relatives à des modèles mécaniques décrits précédemment.

1.4.1 Approches géométriques

Nous rappelons brièvement que la modélisation des coques par éléments finis repose sur trois approches distinctes :

1. Approche par facettes planes : Utilisée dès 1961 par Green et al [57], elle consiste à superposer à un élément de plaque (flexion) un élément de membrane. Cette approche présente certains avantages dont la simplicité de la formulation et la description géométrique ainsi que la représentation correcte des modes rigides. Parmi ses inconvénients, on compte la restriction aux éléments triangulaires lorsque les coques étudiées présentent des gauchissements importants. Les résultats qu'elle produit sont acceptables tant que les courbures ne sont pas importantes, car dans ces cas, il existe un couplage entre les comportements de membrane et de flexion qu'elle n'inclut pas.

L'élément de plaque que nous présentons dans cette étude utilise cette approche. Une représentation plus fidèle de la géométrie des coques et de leurs comportements est assurée par des éléments courbes dans les deux approches qui suivent.

2. Approche curviligne : la formulation des éléments correspondants repose sur une théorie de coque courbe et utilise un repère curviligne pour la définition des grandeurs cinématiques et statiques. La qualité des résultats obtenus à partir de cette approche dépend aussi bien du modèle numérique que de la théorie de coque utilisée. Différentes théories de coques, utilisant les mêmes hypothèses cinématiques, se distinguent par le degré d'approximation des grandeurs géométriques retenues dans la définition des relations déformations-déplacements. Les principaux problèmes rencontrés dans cette approche sont liés à la mauvaise représentation des modes de déformations constantes ou nulles, et aux blocages en membrane et/ou cisaillement.
3. Approche cartésienne : initiée au début des années 70 par Ahmad, Irons et Zienkiewicz [3], elle utilise des éléments isoparamétriques courbes ou tridimensionnels dégénérés. Cette approche consiste à discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique. On passe du problème 3D à un problème bidimensionnel en introduisant les hypothèses que les normales à la surface moyenne sont inextensibles et restent droites. Sa principale qualité réside dans la souplesse d'utilisation pour modéliser des coques de formes quelconques. Les éléments correspondants utilisent les mêmes approximations pour discrétiser la géométrie et la cinématique. L'approche du solide dégénéré trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures comme l'analyse linéaire des coques composites multicouches [104, 141, 142, 145, 118] ou la prise en compte des non-linéarités géométriques et matérielles [62, 54, 50, 19, 117, 127, 128, 39, 111, 22, 13]. Des travaux récents utilisant l'approche en question ont vu le jour, avec notamment des cinématiques particulières rendant les éléments robustes avec un minimum de nœuds et de $ddl/nœud$. Nous citons en particulier les travaux des références [151, 83, 81, 13, 12, 44, 76, 134]. L'élément de coque que nous présentons dans cette étude utilise cette dernière approche.

1.4.2 Modèles éléments finis de plaques et de coques composites

On ne peut aborder la littérature sur le sujet sans citer l'article de référence de Ahmad, Irons et Zienkiewicz [3]. Ces auteurs ont proposé pour la première fois un élément fini assez particulier : il s'agit d'un modèle de coque à 8 nœuds dérivant d'un solide 3D qui dégénère sur une surface moyenne, avec la possibilité de prendre en compte le gauchissement d'une coque. Ce travail pionnier a laissé place à un développement extraordinaire durant les quatre dernières décennies, en matière d'éléments finis à cinématique particulière. Une synthèse bibliographique est résumée par [73] et [88]. Un grand nombre d'auteurs, comme Bathe, Hughes, Zienkiewicz, Taylor, Dhatt, etc. ont apporté un savoir faire qui a permis de rendre la formulation d'éléments finis de Reissner-Mindlin simple et abordable.

Les premiers éléments finis multicouches sont construits en se basant sur les théories du premier ordre, notamment les modèles de premier ordre de Reissner-Mindlin avec des facteurs de correction [80, 7, 6, 11, 35, 8, 60, 9, 75, 43, 92]. Ces éléments finis possèdent 5 degrés de liberté par nœud. L'intégration numérique réduite est souvent utilisée pour éviter le phénomène de blocage en CT. Grâce à leurs avantages numériques (formulation simple, continuité C^0 , les degrés de liberté et les conditions limites physiquement faciles à interpréter, convergence rapide . . .) et leur précision en estimant des champs globaux, ces éléments finis restent les plus utilisés et sont présents dans tous les codes de calcul commerciaux. Un des inconvénients majeurs de ce type d'éléments réside dans l'estimation des facteurs de correction du CT pour modéliser des structures composites.

Eléments finis basés sur la théorie du premier ordre (FSDT : First order Shear Deformation Theory) :

Les dernières décennies ont vu le développement d'éléments finis, basés sur des théories du premier ordre (Reissner/Mindlin pour les plaques en flexion/CT et/ou Kirchhoff pour les plaques minces sans effet de CT), l'emporter sur celui d'éléments finis plus « exotiques », dits d'ordre supérieurs, qui à l'époque étaient encore à leur stade embryonnaire. Une liste non exhaustive d'éléments finis du premier ordre, en particulier pour les plaques épaisses en flexion/CT, mérite ainsi d'être citée :

- Les éléments DSQ et DST de Lardeur [80] sont basés sur un modèle variationnel mixte modifié. L'auteur calcule la déformation de CT en partant des équations d'équilibre ($\{\gamma\}$ constant, w cubique, β quadratique). Ensuite, il ajoute à chaque côté de l'élément deux variables cinématiques (w_x, w_y) et deux rotations au milieu (β_s et β_n). Il obtient par exemple 8β et $4w$ pour un quadrilatère qui seront éliminés par les équations d'équilibre. Les deux éléments éliminent le verrouillage et ne présentent pas de modes parasites. Cependant, la formulation théorique reste complexe et

- nous devons calculer pour chaque problème les facteurs de correction ;
- Bouabdallah [23] a utilisé une formulation mixte de type Hellinger-Reissner en contrainte. Toutes les contraintes sont définies dans un seul vecteur $\{\sigma\}$ qu'il exprime en termes des paramètres $\{\alpha\}$. Au moins 14 paramètres sont nécessaires pour pouvoir éviter l'apparition des modes parasites ; ils sont éliminés par condensation statique au niveau élémentaire. L'élément quadrilatéral à 4 nœuds donne de bons résultats sans modes parasites. Cependant, cette technique reste limitée à l'étude des structures courbes essentiellement cylindriques. D'autre part, elle fait appel aux facteurs de correction du CT pour simuler le comportement mécanique de structures composites multicouches ;
 - L'élément fini proposé par Katili [72] pour les plaques est basé sur la théorie des plaques épaisses de Reissner/Mindlin (théorie du premier ordre). La fonctionnelle utilisée est de type mixte modifié de Hu-Washizu. Les variables cinématiques (w, β_x, β_y) de continuité \mathbb{C}^0 sont interpolées de manière quadratique en introduisant des variables α_k au milieu du côté k . α_k sont éliminés par une technique utilisant les équations d'équilibre. L'élément fini, baptisé DST-BK élimine le verrouillage en CT et ne présente pas de modes parasites. Il utilise également les facteurs de correction du CT pour simuler le comportement mécanique de structures composites multicouches ;
 - ELM4 [6] est un élément à 4 nœuds et 5ddl/nœud. Celui-ci est obtenu via une approche mixte améliorée. La formulation variationnelle adoptée introduit des modes incompatibles pour améliorer la précision sur les déformations planes ;
 - DMTS « Discrete Mindlin Triangle for Shells » [11] est un élément de coque triangulaire à 3 nœuds, formulé sur la base du nouveau modèle variationnel DDM (Displacement Discrete Mindlin). On introduit de la même façon que pour DMQS deux hypothèses discrètes de Mindlin (cinématique et mécanique) au niveau de la plaque ou de la partie « flexion/CT ». DMTS utilise l'approche par « facettes planes » avec une combinaison de l'élément plan de membrane classique CST à celui de plaque en flexion/CT DKMT [70] ;
 - CTMQ20 [35] est un élément fini simple de plaque en flexion/CT à 4 nœuds et 20 ddl « 5 ddl / nœud » basé sur la théorie du premier ordre. Il est proposé pour l'analyse des plaques composites et stratifiées arbitraires. Cet élément est construit selon la procédure suivante :
 - les fonctions de variation de la rotation et de la déformation de CT le long de chaque côté de l'élément sont déterminées à l'aide de la théorie des poutres de Timochenko ;
 - les champs élémentaires des déplacements dans le plan et des rotations ainsi que le champ des déformations de CT sont déterminés par utilisation de la technique de l'interpolation améliorée. En outre, une procédure

hybride simple est également proposée pour améliorer les solutions de contrainte.

- Belinha et al [21] ont étendu puis utilisé la méthode « EFGM : Element Free Galerkin Method » pour l'analyse des plaques anisotropes et stratifiées, en considérant la théorie de Reissner-Mindlin (FSDT). Les fonctions d'approximation sont calculées sur la base d'une approche au sens des moindres carrés (MLS : Moving Least Square). Le verrouillage en CT est évité par l'utilisation de polynômes d'interpolation appropriés. La continuité étant bien évidemment assurée selon les auteurs ;
- NHMiSP4/ml [134] (Natural Hybrid Mixed with Shear Projection 4-node/MultiLayer) est un élément de coque quadrilatéral à 4 nœuds isoparamétrique courbe, avec une formulation variationnelle hybride naturelle (au sens de Pian modifié) pour la membrane et une formulation variationnelle mixte-hybride pour la flexion et le CT ;
- Dahia et al [43] ont développé un élément fini quadrilatéral à 4 nœuds et 5 ddl/nœud pour les plaques stratifiées, à partir de l'approche hybride des contraintes basée sur la théorie du premier ordre. Le nouvel élément appelé « HQ4 » est une extension de l'élément $9\beta Q4$ proposé par Miranda et Ubertini en 2006. Ces derniers l'ont reformulé pour introduire le couplage membrane-flexion des plaques stratifiées. L'élément est conçu pour être simple, stable et sans verrouillage. Les contraintes de CT à travers l'épaisseur du stratifié sont reconstruites par l'utilisation des équations d'équilibre tridimensionnelles ;
- Moleiro et al [92] ont récemment présenté un modèle d'élément fini mixte à 4 nœuds et 5 ddl/nœud pour l'analyse statique des plaques composites stratifiées. La formulation est basée sur un principe variationnel au sens des moindres carrés que les auteurs considèrent comme une approche alternative aux modèles éléments finis issus de formulations variationnelles faibles classiques.

Éléments finis basés sur les théories d'ordre supérieur :

- Engblom et Ochoa[51] ont développé le modèle QHD40 sur la base d'une théorie d'ordre supérieur en déplacement avec variation quadratique de u et v dans l'épaisseur. Il possède huit nœuds et sept degrés de liberté par nœud dans les coins (3 déplacements, deux rotations, deux termes d'ordre supérieur correspondant au déplacement dans le plan) et trois degrés de liberté par nœud aux milieux des côtés (déplacement transversal et deux rotations). Les contraintes de CT sont obtenues à partir des équations d'équilibre et les contraintes planes via les équations constitutives ;
- Topdar et al [139] ont développé un élément fini « PRHSDT : Present Refined Higher Order Shear Deformation Theory » basé sur la théorie des plaques proposée par Cho et Paramerter [38]. Celui-ci possède 4 nœuds et

7 ddl par nœud $(u, v, w, \beta_x, \beta_y, \phi_x, \phi_y)$, ϕ_x et ϕ_y étant les angles de gau-chissement. Le déplacement transversal w est approché par des fonctions d'interpolation bi-cubique d'Hermite, les autres variables sont approchées par des fonctions d'interpolation bilinéaires. L'élément fini proposé satisfait les conditions de continuité \mathbb{C}^1 du déplacement transversal aux interfaces et les conditions de contraintes nulles sur les deux faces inférieure et supé-rieure. Les continuités inter-élémentaires sont ainsi satisfaites ;

- Ferreira et al. [53] ont proposé un élément fini d'ordre supérieur formulé sur la base de la théorie de Reddy [120], mais avec une méthode sans maillage (Meshless Method) basée sur des fonctions de base multiquadratiques radiales RBFs ;
- Xiao et al. [146] ont développé deux modèles éléments finis, nommés MQ-MLPG et TPS-MLPG, pour l'analyse des plaques composites stratifiées épaisses élastiques. Pour développer leur modèle, les auteurs utilisent d'une part la méthode sans maillage (MLPG : Meshless Local Petrov–Galerkin) avec deux fonctions radiales MQ « MultiQuadratics » et TPS « Thin Plate Splines » et, d'autre part la théorie HOSNDPT (Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory) ;
- Pandit et al. [110] ont proposé un élément fini de plaque isoparamétrique quadrilatéral à 9 nœuds et 11 ddl par nœud, basé sur la théorie d'ordre supérieur dite « Zig-Zag », avec une variation cubique des déplacements plans ; le déplacement transversal étant quadratique.

1.5 Conclusion

Grâce à son caractère universel, la méthode des éléments finis (MEF) est l'outil d'ingénieur indispensable pour l'analyse des structures composites par les modèles décrits ci-dessus. La plupart des modèles EF raffinés basés sur les théories d'ordre supérieur ou de couches discrètes présentent un nombre de variables nodales, qui augmente avec le nombre de couches, ou des degrés de liberté non conventionnels, souvent difficiles à appliquer en pratique. L'ingénieur doit choisir entre les EF classiques, moins coûteux mais beaucoup moins précis au niveau local, et les EF raffinés, sophistiqués mais coûteux. Il s'agit bien là de l'objectif visé par ce mémoire ; à savoir proposer des modèles EF simples et robustes pour l'analyses des plaques et des coques composites et stratifiées.

Chapitre 2

Formulation théorique d'un modèle d'élément fini discret pour les plaques composites. Le modèle DDM

2.1 Introduction

L'objet de toute théorie de plaque est le calcul approché des grandeurs généralisées, sur la base d'équations d'équilibre, de compatibilité et de conditions aux limites. Ces équations sont complétées par une loi de comportement reliant les contraintes aux déformations généralisées. Rappelons encore une fois que l'on peut regrouper les théories de plaque multicouches en deux catégories générales. La première catégorie est relative aux théories du type Reissner-Mindlin [91] étendues aux multicouches, où l'on remplace le multicouche par une plaque homogène équivalente. Dans la deuxième catégorie, les modèles sont basés sur l'approche par couche et se distinguent par la linéarité ou non des champs dans l'épaisseur de chaque couche. Néanmoins en pratique, le modèle le plus répandu est le modèle classique [143] où l'on introduit des coefficients de correction sur les composantes de la matrice de comportement en cisaillement transversal, pour améliorer la représentativité de l'effort tranchant. Les résultats obtenus, en particulier pour les contraintes de CT, dépendent essentiellement du choix des coefficients correcteurs de CT et l'étude des plaques composites épaisses reste assez aléatoire par ce type d'approche cinématique. En effet, la démarche adoptée pour identifier ces coefficients correcteurs consiste à postuler l'égalité de certaines réponses globales (contraintes moyennes, énergie de déformation transverse, modes propres . . .), calculées par des théories du premier ordre, et celles obtenues par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Ces facteurs de correction, notés k_{11} , k_{22} , k_{12} , sont donc liés d'une part au matériau et d'autre part au chargement. Ils sont

évalués en considérant des hypothèses associées au matériau ou au chargement (flexion cylindrique) qui rendent l'identification possible, mais difficile à justifier dans les cas complexes. On trouvera dans les références [98, 136] quelques procédures de calcul pour prendre en compte le caractère multicouche des structures composites.

Dans ce chapitre, nous présentons la formulation théorique et l'évaluation d'un nouvel élément fini du premier ordre pour les plaques composites multicouches. Il est basé sur un modèle variationnel en déplacement que nous considérons comme discret, dans la mesure où l'on introduit localement et de manière discrète des hypothèses cinématiques et mécaniques. Ce modèle que nous appelons DDM (*Discrete Displacement Mindlin*) fournit un élément fini géométriquement simple (un quadrilatère à 4 nœuds et 3 ddl par nœud) et efficace par l'existence de courbures de flexion linéaires, issues d'une représentation quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne. Le nouvel élément de plaque, baptisé DMQPml (*Discrete Mindlin Quadrilateral Plate multilayer*), est une extension aux cas multicouches du modèle isotrope DKMQ proposé par Katili [71]. Nous avons introduit localement des hypothèses modifiées de Mindlin dans l'élément DKMQ, pour prendre en compte le caractère multicouche des composites. Il prend en compte les effets de CT à travers l'épaisseur et reproduit les résultats de plaques minces, quelque soit l'éclatement (absence de verrouillage en CT). Des modèles mixte-hybrides isotropes basés sur la même approche ont également été proposés par Ayad et ses collaborateurs [14, 11].

2.2 Formulation théorique de l'élément de plaques multicouches DMQPml

Dans cette section, nous développerons les parties géométriques, cinématiques et mécaniques nécessaires à la construction du modèle DMQPiso¹. L'extension au cas de plaques multicouches fera l'objet de la section 2.2.2.

2.2.1 Rappel du modèle isotrope. L'élément DMQPiso

Une plaque est un solide 3D défini par une surface de référence plane (plan xy noté A qui est généralement le plan moyen de la plaque) et par une épaisseur (notée h) petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur) (Fig. 2.1). Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie de plaque retenue dépend des caractéristiques géométriques. On admet généralement les hypothèses de Mindlin si $4 \leq L/h \leq 20$ et celles de Kirchhoff si $L/h \succ 50$ où L est une dimension caractéristique dans le plan xy . Le cas $20 < L/h \leq 50$ constitue

¹DMQPiso : Displacement Mindlin Quadrilateral plate isotropic

une transition pour laquelle la plaque peut-être considérée comme modérément épaisse.

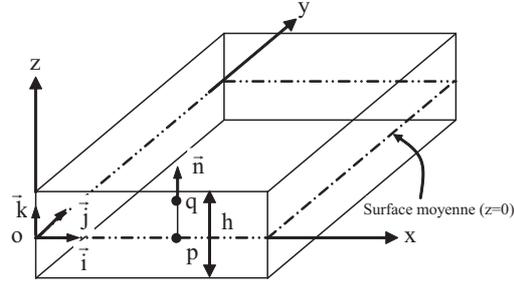


Figure 2.1: Géométrie d'une plaque

Approximation des variables cinématiques

- Géométrie de l'élément DMQP iso :

L'élément DMQP iso (Fig. 2.2) possède quatre nœuds et 3ddl par nœud ($w_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}$) : le déplacement transversal suivant l'axe z et les deux rotations de la normale à la surface moyenne dans les deux plans $x - z$ et $y - z$.

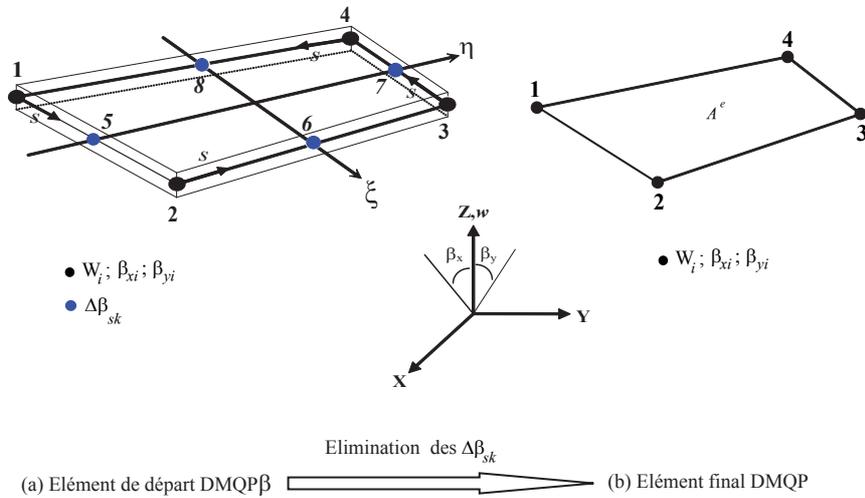


Figure 2.2: Géométrie de l'élément DMQP

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (2.1)$$

x_i, y_i sont les coordonnées des nœuds, N_i les fonctions d'interpolation bilinéaires classiques, données par :

$\{N_i\}$	$\{P_k\}$
$4N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$	$2P_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$4N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)$	$2P_6 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$4N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)$	$2P_7 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$4N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)$	$2P_8 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)$

Table 2.1: Fonctions d'interpolation bi-linéaires et quadratiques incomplètes de l'élément initial DMQS β

- Cinématique d'une plaque de Reissner-Mindlin :

Dans la configuration initiale \mathbb{C}^0 , le vecteur position du point quelconque q_0 est donné par :

$$\vec{x}_{q_0} = \vec{x}_{p_0} + z\vec{k} ; \{\vec{x}_{q_0}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

En considérant uniquement les effets de flexion et de CT, le vecteur position d'un point quelconque q de la plaque s'écrit dans la configuration déformée \mathbb{C} (Fig. 2.3) :

$$\vec{x}_q = \vec{x}_{p_0} + w(x, y)\vec{k} + z\vec{k}\Lambda\vec{\theta} ; \{\vec{\theta}\}^T = \langle \theta_x \theta_y \theta_z \rangle \quad (2.3)$$

- Champ des déplacements :

Le champ des déplacements virtuels correspondant, supposé petit entre les deux configurations \mathbb{C}^0 et \mathbb{C} , est défini par :

$$\vec{u}_q^*(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \vec{u}^*(x, y, z) \\ \vec{v}^*(x, y, z) \\ \vec{w}^*(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{w}^*(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_x^*(x, y) \\ \vec{\beta}_y^*(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

w, β_x, β_y sont respectivement le déplacement transversal et les deux rotations de la normale dans les plans x - z et y - z . Leur approximation doit satisfaire la condition de continuité \mathbb{C}^0 .

L'élément DMQP iso étant formulé seulement en flexion/CT, les composantes $u^*(x, y)$ et $v^*(x, y)$ du vecteur déplacement de membrane n'apparaissent donc pas dans l'expression de $\vec{u}_q^*(x, y)$. Nous proposons d'approcher les rotations β_x et β_y à l'aide d'une interpolation quadratique incomplète qui fera apparaître des accroissements de rotations $\Delta\beta_{sk}$ sur les quatre bords élémentaires.

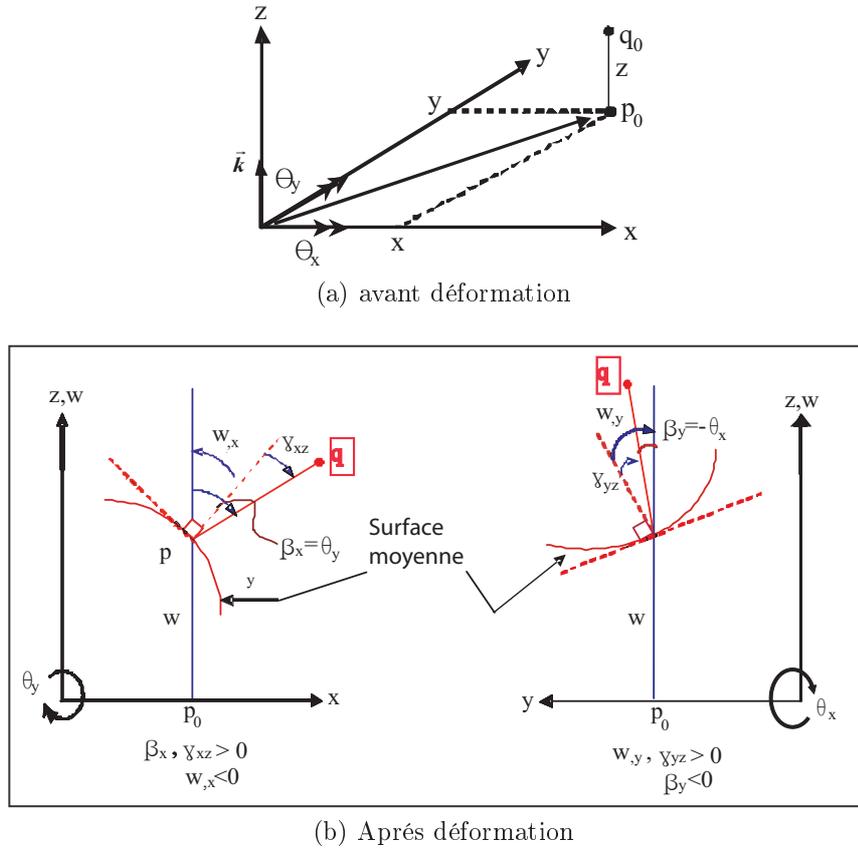


Figure 2.3: Cinématique d'un point d'une plaque en flexion/CT.

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 P_k \begin{Bmatrix} C_k \\ S_k \end{Bmatrix} \Delta\beta_{sk} \quad (2.5)$$

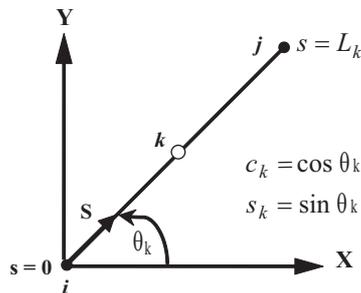


Figure 2.4: Cosinus directeurs sur un bord élémentaire k

$\Delta\beta_{sk}$ sont les variables associées à la représentation quadratique de β_x et β_y . Les coefficients C_k et S_k sont les cosinus directeurs d'un côté k associé aux nœuds

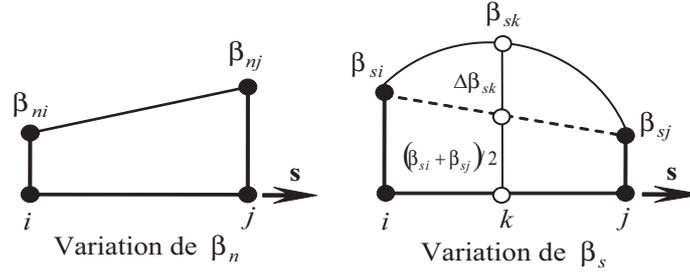


Figure 2.5: Variation des rotations

i et j (Fig. 2.4). A partir des coordonnées des nœuds, on peut définir ces coefficients de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_k &= \cos\theta_k = \frac{x_{ji}}{L_k} = \frac{x_j - x_i}{L_k} \\ S_k &= \sin\theta_k = \frac{y_{ji}}{L_k} = \frac{y_j - y_i}{L_k} \\ \text{avec : } L_k^2 &= x_{ji}^2 + y_{ji}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

La relation entre les rotations β_x et β_y et les rotations β_s et β_n devient ainsi possible grâce à ces deux coefficients :

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}_{i,j} \quad (2.7)$$

De façon plus générale, nous pouvons noter que, sur un côté de nœuds « extrémités » i et j et de nœud « milieu » k , l'approximation des rotations β_s et β_n s'écrit :

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{si} + \frac{s}{L_k}\beta_{sj} + 4\frac{s}{L_k}\left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\Delta\beta_{sk} \quad (2.8)$$

$$\beta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{ni} + \frac{s}{L_k}\beta_{nj} \quad (2.9)$$

Le lecteur pourra constater que les approximations retenues pour β_x et β_y sont telles que β_s est quadratique et β_n linéaire en fonction de s sur un côté (Fig. 2.5).

Champs des déformations

Dans le cadre des petites déformations et des petits déplacements entre les configurations initiale et finale, l'hypothèse de Mindlin/Reissner permet de définir les différentes composantes du vecteur des déformations comme suit :

$$\{\varepsilon_s\} = \{\varepsilon_0\} + z\{\varepsilon_1\} \quad (2.10)$$

$$\{\varepsilon_1\} = \{\chi\} , \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$\{\varepsilon_0\}$, $z\{\varepsilon_1\}$ et $\{\gamma\}$ sont respectivement les vecteurs déformations de membrane, de flexion et de CT. $\{\chi\}$ est le vecteur des courbures de flexion. Il est important de remarquer que dans la direction de l'épaisseur (axe z), les déformations de flexion sont linéaires et les déformations de CT sont constantes.

REMARQUE : On se limitera au cas d'une plaque de Reissner/Mindlin en flexion et CT, sans la prise en compte du comportement membranaire. Seules les courbures de flexion $\{\chi\}$ et les déformations de CT seront par conséquent considérées dans l'étude.

► **Courbures de flexion :**

L'écriture d'une représentation matricielle du vecteur des courbures de flexion nécessite l'approximation des termes $\beta_{x,x}$, $\beta_{x,y}$, $\beta_{y,y}$ et $\beta_{y,x}$. Un exemple d'approximation de $\beta_{x,x}$ à partir de l'interpolation de la rotation β_x (2.5) conduit à :

$$\beta_{x,x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \beta_{x1} + \frac{\partial N_2}{\partial x} \beta_{x2} + \frac{\partial N_3}{\partial x} \beta_{x3} + \frac{\partial N_4}{\partial x} \beta_{x4} + \frac{\partial P_5}{\partial x} c_5 \Delta \beta_{s5} + \frac{\partial P_6}{\partial x} c_6 \Delta \beta_{s6} + \frac{\partial P_7}{\partial x} c_7 \Delta \beta_{s7} + \frac{\partial P_8}{\partial x} c_8 \Delta \beta_{s8} \quad (2.13)$$

Les dérivées en x peuvent être obtenues en fonction des dérivées en ξ du système de référence à l'aide de la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta \xi}{\delta x} & \frac{\delta \eta}{\delta x} \\ \frac{\delta \xi}{\delta y} & \frac{\delta \eta}{\delta y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta \xi} \\ \frac{\delta}{\delta \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\delta}{\delta \xi} \\ \frac{\delta}{\delta \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

j_{11} ; j_{12} ; j_{21} ; j_{22} sont les composantes de la matrice $[j]$ inverse de la matrice Jacobienne $[J]$. Cette dernière s'écrit comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} \quad \{y_n\}] \quad (2.15)$$

$$\frac{\delta N_i}{\delta x} = N_{i,x} = j_{11} N_{i,\xi} + j_{12} N_{i,\eta} \quad \text{et} \quad \frac{\delta N_i}{\delta y} = N_{i,y} = j_{21} N_{i,\xi} + j_{22} N_{i,\eta} \quad (2.16)$$

et :

$$\frac{\delta P_k}{\delta x} = P_{k,\xi} j_{11} + P_{k,\eta} j_{12} \quad \text{et} \quad \frac{\delta P_k}{\delta y} = P_{k,\xi} j_{21} + P_{k,\eta} j_{22} \quad (2.17)$$

$N_{i,\xi}$, $N_{i,\eta}$, $P_{k,\xi}$ et $P_{k,\eta}$ sont les dérivées des fonctions N_i et P_k par rapport à ξ et à η respectivement. De la même manière, nous pouvons calculer $\beta_{x,y}$, $\beta_{y,y}$ et $\beta_{y,x}$. Nous obtenons finalement :

$$\{\chi\} = [B_f] \left\{ \begin{array}{c} U_n \\ \Delta\beta_n \end{array} \right\} = [B_{b\beta}] \{U_n\} + [B_{b\Delta\beta}] \{\Delta\beta_n\} \quad (2.18)$$

Avec:

$$[B_{b\beta}] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & a_i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_i & \dots \\ 0 & b_i & a_i & \dots \end{array} \right] \quad ; \quad \begin{array}{l} a_i = j_{11}N_{i,\xi} + j_{12}N_{i,\eta} \\ b_i = j_{21}N_{i,\xi} + j_{22}N_{i,\eta} \end{array} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.19)$$

et :

$$[B_{b\Delta\beta}] = \left[\begin{array}{cccc} \dots & (P_{k,\xi}j_{11} + P_{k,\eta}j_{12}) C_k & & \\ \dots & (P_{k,\xi}j_{21} + P_{k,\eta}j_{22}) S_k & & \dots k = 5, 6, 7, 8 \\ \dots & (P_{k,\xi}j_{21} + P_{k,\eta}j_{22}) C_k + (P_{k,\xi}j_{11} + P_{k,\eta}j_{12}) S_k & & \dots \end{array} \right] \quad (2.20)$$

$$\langle U_n \rangle = \langle w_1 \beta_{x1} \beta_{y1} \quad w_2 \beta_{x2} \beta_{y2} \quad w_3 \beta_{x3} \beta_{y3} \quad w_4 \beta_{x4} \beta_{y4} \rangle \quad (2.21)$$

$$\langle \Delta\beta_n \rangle = \langle \Delta\beta_{s5} \quad \Delta\beta_{s6} \quad \Delta\beta_{s7} \quad \Delta\beta_{s8} \rangle \quad (2.22)$$

Il est important de noter que les inconnues nodales w_i n'ont aucun terme associé dans la matrice $[B_f]$. Elles sont introduites naturellement lors de l'évaluation de l'équation (2.28).

- **Déformations naturelles de CT. Utilisation de la méthode des déformations de substitution (méthode ANS)**

Nous définissons les déformations cartésiennes de CT $\{\gamma_0\}$ en fonction des déformations isoparamétriques $\{\gamma_\xi\}$ que nous interpolons linéairement, deux à deux, sur les bords élémentaires (Fig. 2.6).

$$\{\gamma_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

$$\begin{array}{l} \gamma_{\xi z} = \frac{1}{2}(1 - \eta) \gamma_{\xi\zeta 5} + \frac{1}{2}(1 + \eta) \gamma_{\xi\zeta 7} \\ \gamma_{\eta z} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \gamma_{\eta\zeta 8} + \frac{1}{2}(1 + \xi) \gamma_{\eta\zeta 6} \end{array} \quad (2.24)$$

$\gamma_{\xi\zeta 5}$, $\gamma_{\eta\zeta 6}$, $\gamma_{\xi\zeta 7}$, $\gamma_{\eta\zeta 8}$ sont les déformations de CT isoparamétriques définies sur les quatre côtés (5, 6, 7, 8) respectivement. Elles sont reliées aux déformations tangentielles de bord γ_{s5} , γ_{s6} , γ_{s7} , γ_{s8} par :

$$\begin{array}{l} \gamma_{\xi\zeta 5} = (\det J_{s5}) x(\gamma_{s5}) = +\frac{L_5}{2} \gamma_{s5} \\ \gamma_{\eta\zeta 6} = (\det J_{s6}) x(\gamma_{s6}) = +\frac{L_6}{2} \gamma_{s6} \\ \gamma_{\xi\zeta 7} = (\det J_{s7}) x(\gamma_{s7}) = -\frac{L_7}{2} \gamma_{s7} \\ \gamma_{\eta\zeta 8} = (\det J_{s8}) x(\gamma_{s8}) = -\frac{L_8}{2} \gamma_{s8} \end{array} \quad (2.25)$$

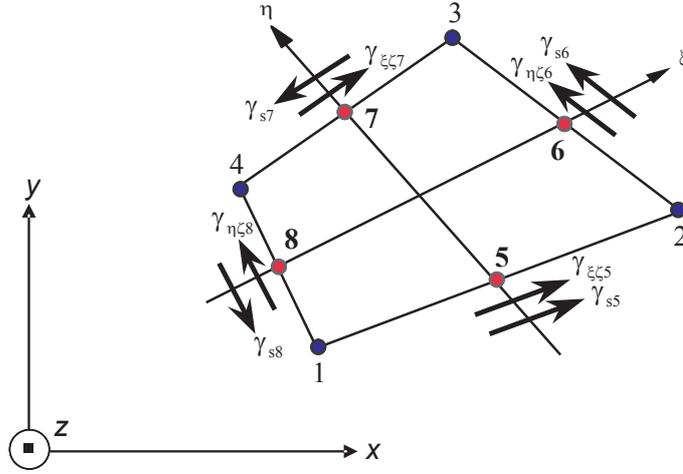


Figure 2.6: Déformations de CT de bords

Nous écrivons donc $\{\gamma_0\}$ en fonction de $\{\gamma_{sk}\}$ sous la forme matricielle suivante :

$$\{\gamma_0\} = [N_\gamma] \{\gamma_{sk}\} ; \{\gamma_{sk}\}^T = \langle \gamma_{s5} \quad \gamma_{s6} \quad \gamma_{s7} \quad \gamma_{s8} \rangle \quad (2.26)$$

$$[N_\gamma] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} j_{12} (1 - \eta) L_5 & j_{11} (1 + \xi) L_6 \\ j_{22} (1 - \eta) L_5 & j_{21} (1 + \xi) L_6 \\ -j_{12} (1 + \eta) L_7 & -j_{11} (1 - \xi) L_8 \\ -j_{22} (1 + \eta) L_7 & -j_{21} (1 - \xi) L_8 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Hypothèses discrètes de Mindlin

Nous introduisons les hypothèses discrètes de Mindlin, dans le but d'éliminer les rotations quadratiques $\{\Delta\beta_{sk}\}$ et d'écrire les déformations de flexion et de CT uniquement en fonction *des degrés de liberté élémentaires* $\{U_n\}$.

- **Hypothèse cinématique :**

Les déformations naturelles ou isoparamétriques de bord $\{\gamma_{sk}\}$ sont projetées sur les *degrés de liberté élémentaires* $\{U_n\}$ et $\{\Delta\beta_{sk}\}$ sous une forme discrète, définie par une intégrale de contour le long de chaque côté k :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sk} - \tilde{\gamma}_{sk}) ds = 0 \quad (\text{Hyp. cinématique}) \quad (2.28)$$

Cette équation nous indique que la différence entre les déformations réelles γ_s et celles exprimées sous forme discrète $\tilde{\gamma}_s$ doivent s'annuler sur chacun des côtés

d'un élément. L'expression de γ_{sk} sur un côté en fonction des déformations γ_{xk} et γ_{yk} est donnée par :

$$\gamma_{sk} = C_k \gamma_{xk} + S_k \gamma_{yk} = (w_{,s} + \beta_s)_k \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{sk} L_k &= w_j - w_i + \frac{L_k}{2}(\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3} L_k \Delta \beta_{sk} \\ \gamma_{sk} L_k &= w_j - w_i + \frac{L_k}{2}(C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi}) + \frac{L_k}{2}(C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k \Delta \beta_{sk} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\beta_{sm} = C_k \beta_{xm} + S_k \beta_{ym} \quad (2.31)$$

L'application de l'hypothèse cinématique (2.30) sur le côté k conduit à un élément à 8 nœuds avec *des degrés de liberté* additionnels aux nœuds milieux des côtés. Celui-ci possède encore les rotations $\{\Delta \beta_{sk}\}$ comme *ddl* dont l'utilisation est peu pratique car elle nécessite des maillages éléments finis adaptés. Ce problème a été signalé dans les travaux de Zienkiewicz et ses collaborateurs [152, 103] ainsi que ceux de Ayad et al.[14]. Nous avons opté pour une méthode heuristique qui consiste à utiliser une deuxième hypothèse modifiée de Mindlin, dans le but d'extraire ces mêmes rotations $\{\Delta \beta_{sk}\}$ et de les éliminer en les substituant dans l'expression des déformations de bords $\{\gamma_{sk}\}$.

- **Hypothèse mécanique :**

L'hypothèse mécanique, issue de la loi de comportement en CT, s'écrit pour un matériau homogène isotrope :

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{T_s}{D_{ct}} \quad (2.32)$$

Considérons les relations d'équilibre reliant l'effort T_s aux moments de flexion sur le bord k (Fig. 2.7) :

$$T_s = M_{s,s} + M_{sn,n} \quad (2.33)$$

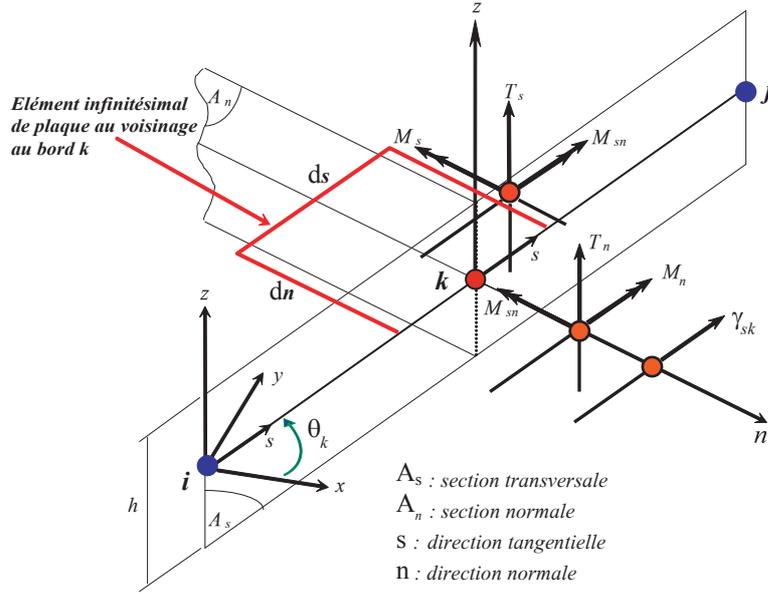
M_s et $M_{sn,n}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} M_s &= D_f (\beta_{s,s} + \nu \beta_{n,n}) \\ M_{sn} &= D_f \frac{1-\nu}{2} (\beta_{s,n} + \nu \beta_{n,s}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$D_{ct} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} k \text{ et } D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.35)$$

Il est possible d'obtenir l'hypothèse mécanique en fonction des rotations tangentielle β_s et normale β_n , par l'introduction des équations (2.33 et 2.34) dans l'équation (2.32). Nous écrivons :

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{D_f}{D_{ct}} \left[\beta_{s,ss} + \nu \beta_{n,ns} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{s,nn} + \nu \beta_{n,ns}) \right] \quad (2.36)$$

Figure 2.7: Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire i - j

Les expressions de β_s et β_n sont données par les deux équations (2.8, 2.9). Nous obtenons finalement l'expression de $\bar{\gamma}_{sk}$ en fonction seulement de la dérivée seconde de β_s par rapport à s :

$$\beta_{s,nn} = \beta_{n,ns} = 0 \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{sk} &= \frac{D_f}{D_{ct}} \beta_{s,ss} = -\frac{2}{3} \Phi_k \Delta \beta_{sk} \\ \Phi_k &= \frac{12 D_f}{L_k^2 D_{ct}} = \frac{1}{k(1-\nu)} \left(\frac{h^2}{L_k^2} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Φ_k est le facteur d'influence du CT. Finalement, nous aboutissons à une expression matricielle reliant les déformations de CT $\{\gamma_0\}$ aux rotations tangentielles $\{\Delta \beta_{sk}\}$

$$\{\gamma_0\} = [B_{s\Delta\beta}] \{\Delta\beta_n\} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} [B_{s\Delta\beta}] &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -j_{12}(1-\eta) L_5 \Phi_5 & -j_{11}(1+\xi) L_6 \Phi_6 \\ -j_{22}(1-\eta) L_5 \Phi_5 & -j_{21}(1+\xi) L_6 \Phi_6 \\ j_{12}(1+\eta) L_7 \Phi_7 & j_{11}(1-\xi) L_8 \Phi_8 \\ j_{22}(1+\eta) L_7 \Phi_7 & j_{21}(1-\xi) L_8 \Phi_8 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

La combinaison des équations (2.30 et 2.38) conduit à:

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi}) + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k (1 + \Phi_k) \Delta \beta_{sk} = 0 \quad (2.41)$$

$k : (\xi, \eta)$	$5 : (1,0)$	$6 : (0,1)$	$7 : (-1,0)$	$8 : (0,-1)$
nœud i	1	2	3	4
nœud j	2	3	4	1

Table 2.2: Nœuds $i - j$ du bord k

Une écriture matricielle des rotations $\{\Delta\beta_{sk}\}$ en fonction des *degrés de liberté élémentaires* $\{U_n\}$ est obtenue en appliquant l'équation (2.41) sur les quatre bords de l'élément. Nous écrivons :

$$\begin{aligned} \{\Delta\beta_n\} &= [A_n] \{U_n\} \\ [A_n] &= [A_\Phi]^{-1} [A_G] \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$[A_\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}L_5(1 + \Phi_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}L_6(1 + \Phi_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}L_7(1 + \Phi_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}L_8(1 + \Phi_8) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$[A_G] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & C_5L_5 & S_5L_5 & 2 & C_5L_5 & S_5L_5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & C_6L_6 & S_6L_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & C_8L_8 & S_8L_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & C_6L_6 & S_6L_6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & C_7L_7 & S_7L_7 & 2 & C_7L_7 & S_7L_7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & C_8L_8 & S_8L_8 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La substitution de $\{\Delta\beta_n\}$ dans l'expression des courbures de flexion et de CT conduit aux écritures finales suivantes :

$$\{\varepsilon_1\} = \{\chi\} = [B_f] \{U_n\} \quad ; \quad [B_f] = [B_1] + [B_{1\Delta\beta}] [A_n] \quad (2.45)$$

$$\{\gamma_0\} = [B_c] \{U_n\} \quad ; \quad [B_c] = [B_{s\Delta\beta}] [A_n] \quad (2.46)$$

2.2.2 Formulation du nouveau modèle de plaque multicouche

Nous avons introduit une hypothèse mécanique modifiée de Mindlin qui permet de prendre en compte le caractère multicouche des plaques composites. Elle s'écrit comme suit

$$\int_0^{L_k} \left(\gamma_{sk} - \langle H_{ck11}^{inv} \quad H_{ck12}^{inv} \rangle \left\{ \begin{matrix} T_s \\ T_n \end{matrix} \right\} \right) ds = 0 \quad (\text{hyp. mécanique}) \quad (2.47)$$

H_{ck11}^{inv} et H_{ck12}^{inv} sont deux termes de comportement en CT de la matrice inverse $[H_{ck}]^{-1}$, avec

$$[H_{ck}] = [P_k] [H_c] [P_k]^{-1} ; \quad [H_c] \text{ (équation B.25)}$$

$$[P_k] = [P_k]^{-1} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} ; \quad \begin{cases} C_k = \cos\theta_k \\ S_k = \sin\theta_k \end{cases}$$

Nous utilisons les relations d'équilibre sur la surface moyenne dans le cas où il n'y a pas de couplage membrane-flexion ($[H_{mf}] = 0$), pour déterminer les efforts tranchants (Fig. 2.7). Elles s'écrivent de la façon suivante :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{s,s} + M_{sn,n} \\ M_{sn,s} + M_{n,n} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Avec :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_n \\ M_{sn} \end{Bmatrix} = [H_f] \{\chi\} ; \quad ([H_f] : \text{B.21, voir annexe B}) \quad (2.49)$$

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_s = \beta_{s,s} \\ \chi_n = \beta_{n,n} \\ \chi_{sn} = \beta_{s,n} + \beta_{n,s} \end{Bmatrix}$$

Nous définissons les déformations $\{\gamma_{sk}\}$ en fonction des dérivées secondes de β_s et β_n par l'intermédiaire des équations d'équilibre (2.48), et de deux lois de comportement, en flexion et en cisaillement. Nous obtenons :

$$\gamma_{sk} = (H_{ck11}^{inv} H_{f11} + H_{ck12}^{inv} H_{f13}) \beta_{s,ss} ; \quad \beta_{s,ss} = -\frac{8}{L_k^2} \Delta\beta_{sk} \quad (2.50)$$

ou sous forme matricielle

$$\{\gamma_{sk}\} = [A_\phi^{ml}] \{\Delta\beta_{sk}\} ; \quad [A_\phi^{ml}] = \begin{bmatrix} -\phi_5^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_6^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_7^{ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_8^{ml} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Ainsi, le vecteur des déformations de CT s'écrit

$$\{\gamma_0\} = [N_\gamma] [A_\phi^{ml}] \{\Delta\beta_{sk}\} = [B_{sk}] \{\Delta\beta_{sk}\} \quad (2.52)$$

$$\phi_k^{ml} = 8 \left(H_{f11} \frac{H_{ck11}^{inv}}{L_k^2} + H_{f13} \frac{H_{ck12}^{inv}}{L_k^2} \right) ; \quad (\text{ml : multicouche}) \quad (2.53)$$

ϕ_k^{ml} est le facteur d'influence du CT.

La combinaison des deux équations (2.30 et 2.51) donne

$$\Delta\beta_{sk} = \frac{3}{2 + 3\phi_k^{ml}} \left(\frac{w_i - w_j}{L_k} - \frac{\beta_{si} + \beta_{sj}}{2} \right) \quad (2.54)$$

L'expression finale de γ_{sk} fera intervenir en conséquence uniquement les ddl nodaux classiques d'une plaque :

$$\gamma_{sk} = \frac{3\phi_k^{ml}}{2 + 3\phi_k^{ml}} \left(\frac{w_j - w_i}{L_k} + \frac{\beta_{si} + \beta_{sj}}{2} \right) \quad (2.55)$$

Notons que dans les situations de plaques très minces ($\phi_k^{ml} \rightarrow 0$), γ_{sk} diminue pour s'annuler, montrant ainsi l'absence du verrouillage en CT. L'équation (2.54) appliquée aux différents côtés élémentaires k conduit aux résultats suivants :

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n^{ml}] \{U_n\} \ ; \ [A_n^{ml}] = [A_\phi^{ml}]^{-1} [A_G] \quad (2.56)$$

La matrice $[A_G]$ reste inchangeable, la matrice $[A_\phi^{ml}]$ est donnée par :

$$[A_\phi^{ml}] = \begin{bmatrix} -L_5 \left(\frac{2}{3} + \phi_5^{ml} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_6 \left(\frac{2}{3} + \phi_6^{ml} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_7 \left(\frac{2}{3} + \phi_7^{ml} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_8 \left(\frac{2}{3} + \phi_8^{ml} \right) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.2.3 Expressions finales des courbures de flexion $\{\chi\}$ et des déformations de CT $\{\gamma_0\}$

Nous avons pu exprimer les variables $\{\Delta\beta_{sk}\}$ en fonction des variables nodales $\{U_n\}$ par l'introduction des deux hypothèses modifiées de Mindlin.

Courbures de flexion

Les courbures de flexion s'écrivent en fonction des degrés de liberté aux quatre nœuds sommets de l'élément quadrilatéral :

$$\{\chi\} = [B_f] \{ U_n \} \ ; \ [B_f] = [B_{b\beta}] + [B_{b\Delta\beta}] [A_n^{ml}] \quad (2.58)$$

$$\langle U_n \rangle = \langle w_i \ \beta_{xi} \ \beta_{yi} \ \dots \ i = 1 \text{ à } 4 \rangle \quad (2.59)$$

Déformations de Cisaillement Transversal

$$\{\gamma_0\} = [B_{ct}] \{ U_n \} \ ; \ [B_{ct}] = [N_\gamma] [A_\phi^{ml}] [A_n^{ml}] \quad (2.60)$$

2.3 Matrice de rigidité globale

En admettant l'existence d'une fonction scalaire dite énergie interne élémentaire de déformation W_{int} , celle-ci est donnée dans le cas des plaques en formulation « déplacement » avec l'hypothèse des contraintes planes ($\sigma_z = 0$) par :

$$W_{int} = W_{int}^f + W_{int}^{ct} = \frac{1}{2} \langle U_n \rangle [k^e] \{U_n\} \quad (2.61)$$

avec

$$W_{int}^f = \frac{1}{2} \int_A \langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \} dA \quad (2.62)$$

$$W_{int}^{ct} = \frac{1}{2} \int_A \langle \gamma_0 \rangle [H_c] \{ \gamma_0 \} dA \quad (2.63)$$

Les vecteurs $\{ \chi \}$ et $\{ \gamma_0 \}$ sont donnés par les deux équations (2.58) et (2.60). La matrice de rigidité finale $[k^e]$ est une somme des matrices de rigidité de flexion et de CT : (le couplage membrane-flexion n'étant pas considéré dans ce chapitre)

$$[k^e] = [k_f^e] + [k_{ct}^e] \quad (2.64)$$

avec ;

$$\begin{aligned} [k_f^e] &= \int_A [B_f]^T [H_f] [B_f] dA & ([H_f] : B.21, \text{voir annexe B}) \\ [k_{ct}^e] &= \int_A [B_{ct}]^T [H_c] [B_{ct}] dA & ([H_c] : B.23, \text{voir annexe B}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.4 Relations contraintes-déformations et efforts résultants

Pour une plaque constituée d'un matériau isotrope, orthotrope ou composite, nous écrivons les relations contraintes-déformations comme suit :

$$\{ \sigma(z) \} = [H(z)] \{ \varepsilon(z) \} \quad ; \quad \{ \tau \} = [H_\tau(z)] \{ \gamma \} \quad (2.66)$$

$$\{ \sigma(z) \} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{ \tau \} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

2.4.1 Expressions des efforts résultants

Les vecteurs $\{ \varepsilon \}$ et $\{ \gamma \}$ sont donnés par les équations (2.58) et (2.60). Les efforts normaux $\{ N \}$, les moments fléchissants $\{ M \}$ et les efforts tranchants $\{ T \}$ (Fig. 2.8) sont liés respectivement aux déformations de membrane $\{ e \}$, aux courbures de flexion $\{ \chi \}$ et aux déformations de CT $\{ \gamma \}$ par les relations suivantes :

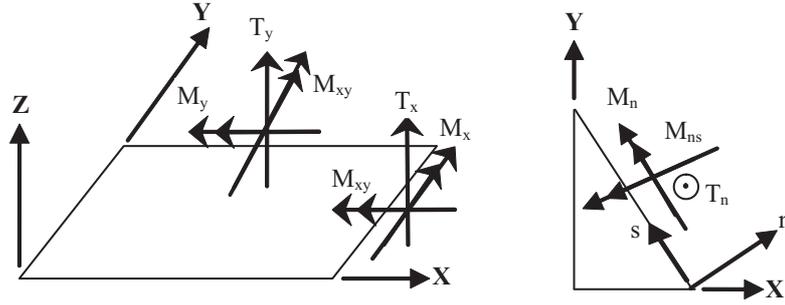


Figure 2.8: Efforts résultants d'une plaque

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\} \quad (2.67)$$

Dans la formulation du modèle de plaque, ces efforts sont supposés nuls.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\} \quad (2.68)$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = [H_c] \{\gamma_0\} \quad (2.69)$$

Le calcul en post-traitement des efforts $\{M\}$ et $\{T\}$, en l'absence du couplage membrane-flexion, fera intervenir les relations déformations-ddl nodaux :

$$\{M\} = [H_f] [B_f(\xi, \eta)] \{U_n\} \quad ; \quad \{T\} = [H_c] [B_{ct}(\xi, \eta)] \{U_n\}$$

2.4.2 Calcul des contraintes planes et de cisaillement transversal

La figure 2.9 montre les contraintes agissant sur les sections d'un élément différentiel de plaque, soumis à une charge extérieure q suivant l'axe z et constitué de matériau homogène linéairement élastique.

L'équilibre au point q d'une plaque considérée comme un solide 3D particulier est défini en général par :

$$\text{div} [\bar{\sigma}] + f_v = 0 \quad (2.70)$$

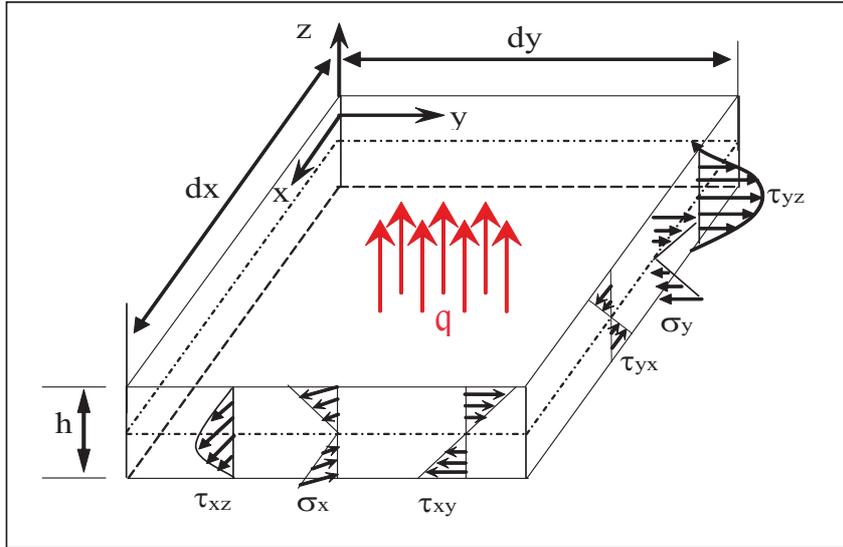


Figure 2.9: Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène

Cette forme tensorielle de l'équilibre en contraintes se traduit sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_{vx} &= 0 \\
 \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{yz,z} + f_{vy} &= 0 \\
 \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_{vz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

Contraintes planes σ_{xx} , σ_{yy} et τ_{xy}

Le calcul des contraintes planes est fait à partir de la relation (déformations - contraintes) suivante:

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\} &= [H] \{\varepsilon\} \\
 \{\sigma\} &= z [H] [B_f] \{U_n\} \\
 \{\sigma\} &= z [H] [H_f^{-1}] \{M\}
 \end{aligned}
 \tag{2.72}$$

$[H]$ est la matrice de comportement, elle est donnée en annexe B pour un matériau isotrope, orthotrope et multicouche.

Les contraintes normales (σ_x ; σ_y) et de cisaillement plan τ_{xy} varient linéairement selon z et sont associées aux moments de flexion (M_x ; M_y) et de torsion M_{xy} respectivement (Fig. 2.8).

Contraintes de CT τ_{xz} et τ_{yz}

Il est bien connu que l'estimation des contraintes de CT, dans un modèle de Reissner-Mindlin classique, par les équations de comportement n'est pas adéquate.

Une démarche souvent adoptée pour améliorer cette estimation consiste à intégrer les équations d'équilibre dans l'épaisseur du multicouche [99].

En intégrant les deux premières équations de l'équilibre tridimensionnel, les contraintes de CT s'écrivent :

$$\tau_{xz} = - \int_{-t}^z (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dz ; t = \frac{h}{2} \quad (2.73)$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-t}^z (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz ; t = \frac{h}{2} \quad (2.74)$$

Ces équations vérifient les conditions aux limites sur les peaux supérieure et inférieure de la plaque :

$$\tau_{xz} \left(x, y, \frac{-h}{2} \right) = \tau_{xz} \left(x, y, \frac{+h}{2} \right) = \tau_{yz} \left(x, y, \frac{-h}{2} \right) = \tau_{yz} \left(x, y, \frac{+h}{2} \right) = 0 \quad (2.75)$$

Numériquement, nous avons introduit les efforts de CT T_x et T_y dans l'expression des contraintes de CT en utilisant les deux équations d'équilibre associées aux moments de flexion :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

Nous obtenons le vecteur des contraintes de CT à travers l'épaisseur. Il s'écrit comme suit

$$\{\tau(z)\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [D_1] \{T\} + [D_2] \{\lambda\} \quad (2.77)$$

Les contraintes de CT varient quant à elles quadratiquement selon z et sont associées aux efforts de CT T_x et T_y (Fig. 2.8).

$$\begin{aligned} [D_1] &= - \int_{-t}^z \frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz \\ &= \sum_{i=1}^{nc} \frac{(t^2 - z^2)_i}{4} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix}_i \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} [D_2] &= - \int_{-t}^z \frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{2233} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz \\ &= \sum_{i=1}^{nc} \frac{(t^2 - z^2)_i}{4} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{2233} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix}_i \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\langle \lambda \rangle = \langle M_{x,x} - M_{xy,y} ; M_{xy,x} - M_{y,y} ; M_{y,x} ; M_{x,y} \rangle \quad (2.80)$$

A_{ij} sont les composantes de la matrice $[A(z)]$:

$$[A(z)] = [H(z)] [H_f^{-1}] \quad (2.81)$$

$[A(z)]$ est une matrice (3 x 3). Elle est à la fois caractéristique de chacune des couches et de la stratification globale.

- $[H(z)]$ est calculée pour chaque couche, nous écrivons :

$$[H(z)] = [T_1]^T [H_L] [T_1] \quad ([H_L] : B.12 \text{ et } [T_1] : B.11) \quad (2.82)$$

- $[H_f^{-1}]$ est l'inverse de la somme de $[H_{fi}]$:

$$[H_f^{-1}] = \left(\sum_{i=1}^{nc} \frac{(z_{i+1}^3 - z_i^3)}{3} [H]_i \right)^{-1} \quad (2.83)$$

2.5 Matrice masse élémentaire

Le travail virtuel externe élémentaire dû aux forces d'inertie s'écrit pour un élément de plaque composite comme suit :

$$W_{inertie}^e = \frac{1}{2} \int_A \left(w^* \rho_m \ddot{w} + \beta_x^* \rho_f \ddot{\beta}_x + \beta_y^* \rho_f \ddot{\beta}_y \right) dA \quad (2.84)$$

$$\rho_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho dz \quad \text{et} \quad \rho_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \rho z^2 dz \quad (2.85)$$

ρ_m et ρ_f sont les masses surfaciques du matériau et varient suivant z ;

w^* , β_x^* et β_y^* sont le déplacement transversal et les deux rotations d'un point quelconque de la plaque ;

\ddot{w} , $\ddot{\beta}_x$ et $\ddot{\beta}_y$ sont les accélérations d'un point quelconque de la plaque.

La matrice masse élémentaire $[M]$ est définie à partir l'équation (2.84) telle que :

$$W_{inertie}^e = - \langle \vec{u}_n^* \rangle [M] \{ \ddot{u}_n \} \quad (2.86)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_w] & [0] & [0] \\ [0] & [M_\beta] & [0] \\ [0] & [0] & [M_\beta] \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

\vec{u}_n^* et $\ddot{\vec{u}}_n$ représentent respectivement les vecteurs déplacements virtuels et accélération du point P.

Pour l'élément DMQP ml , nous adopterons une approximation bilinéaire classique des variables cinématiques et des accélérations virtuelles : (N_i , $i=1$ à 4 sont les fonctions d'interpolation bilinéaires de Lagrange)

$$w^* = \sum_{i=1,4} N_i w_i^* ; \beta_x^* = \sum_{i=1,4} N_i \beta_{xi}^* ; \beta_y^* = \sum_{i=1,4} N_i \beta_{yi}^* \quad (2.88)$$

$$\ddot{w} = \sum_{i=1,4} N_i \ddot{w}_i ; \ddot{\beta}_x = \sum_{i=1,4} N_i \ddot{\beta}_{xi} ; \ddot{\beta}_y = \sum_{i=1,4} N_i \ddot{\beta}_{yi} \quad (2.89)$$

$$[M_w] = \int_A \{N\} \rho_m \langle N \rangle dA ; [M_\beta] = \int_A \{N\} \rho_f \langle N \rangle dA \quad (2.90)$$

Pour notre modèle DMQP ml , nous avons adopté une matrice masse consistante avec les termes d'inertie de rotations ($[M_w] \neq 0$ et $[M_\beta] \neq 0$).

2.6 Conclusion :

L'originalité des travaux présentés dans ce chapitre est sans doute l'extension du modèle, proposé initialement par Katili [71] pour les plaques homogènes isotropes, au cas des plaques composites multicouches. Ceci a été possible grâce à l'introduction d'une nouvelle hypothèse mécanique discrète modifiée de Mindlin. L'élément final est simple de géométrie (4 nœuds et 3ddl/nœud) et présente des performances de précision très satisfaisantes, comparées à des éléments finis de la littérature, souvent couteux en temps de calcul (quadrilatères à 8 et à 9 nœuds ou éléments d'ordre supérieur). On notera qu'en raison d'absence de valeurs des facteurs de correction de CT sur certains tests, proposés pour valider des modèles d'ordre supérieurs, nous étions dans l'obligation de programmer une technique de calcul de ces facteurs. L'objectif est de les introduire dans les expressions des contraintes de CT, élaborées à partir des équations d'équilibre tridimensionnelles.

Chapitre 3

Validation numérique du modèle de plaque composite DMQP *ml*

Dans ce chapitre, nous proposons de valider le modèle « élément fini » de plaque DMQP *ml* à travers une série de cas-tests standards de plaques isotropes, sandwichs et stratifiées, connus dans la littérature. Il s'agit essentiellement d'évaluer les performances de précision sur les déplacements et les contraintes. Les résultats correspondants ainsi que ceux obtenus par d'autres éléments sont comparés à des solutions de référence, obtenues analytiquement ou expérimentalement.

3.1 Performances et précision de l'élément isotrope

3.1.1 Examen des modes de déformations constantes

Une étude détaillée sur les patch-tests cinématiques et mécaniques, pour reproduire des états de déformations et de contraintes constantes a été menée. Nous présentons dans cette section les résultats du patch-test mécanique, proposé par Irons [64] et considéré par celui-ci et par Taylor et al [137] comme une condition suffisante de convergence. Ce test permet de vérifier l'aptitude d'un maillage « grossier » avec un faible nombre d'éléments (figure 3.1) à reproduire un état de contrainte constant, et ce en imposant un nombre de ddl minimum nécessaire à l'élimination des mouvements de corps rigide.

Deux valeurs du rapport $2a/h$ (longueur/épaisseur) sont considérées ($2a/h = 10$ et 1000) correspondant à une plaque épaisse et mince. Les efforts résultants sont évalués au centre de gravité, aux nœuds et aux points d'intégration.

► $\bar{M}_n = 1$: ($M_x = M_y = 1$ et $M_{xy} = T_x = T_y = 0$)?

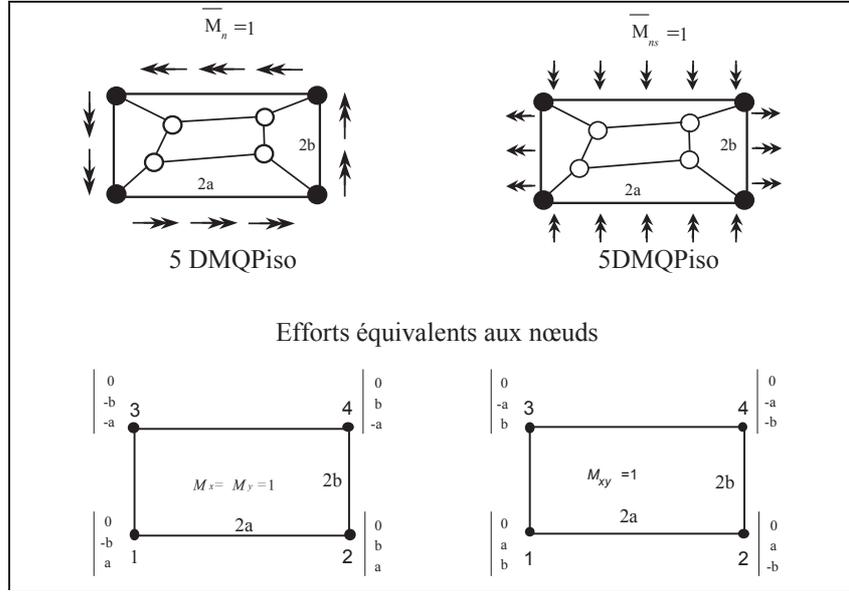
Pour $2a/h=10$ (plaque épaisse) et $2a/h = 1000$ (plaque mince), nous avons obtenu :

($M_x = M_y = 1$ et $M_{xy} = T_x = T_y = 10^{-13}$) en tout point du maillage.

► $\bar{M}_{ns} = 1$: ($M_{xy} = 1$ et $M_x = M_y = T_x = T_y = 0$)?

Pour $2a/h = 10$ (plaque épaisse) et $2a/h = 1000$ (plaque mince), nous avons obtenu :

($M_{xy} = 1$ et $M_x = M_y = 10^{-13}$ et $T_x = T_y = 10^{-14}$) en tout point du maillage.



Données : $E = 10^3$, $\nu = 0.3$, $k = 5/6$, $h = 4$ et 0.04 , $a = 20$, $b = 10$
 Conditions aux limites : $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ sur : BC

FIG. 3.1 – Patch-test mécanique. Moments constants

3.1.2 Examen de la précision en fonction du maillage

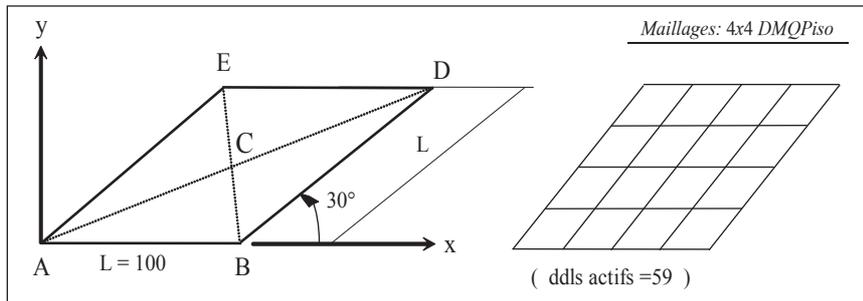
La précision de l'élément de plaque est étudiée à travers deux cas-tests standards de plaque dans des situations minces et épaisses : une plaque biaise à 30° simplement supportée sous chargement uniforme et une plaque circulaire sous charge uniforme. La solution élément fini est confrontée à la solution analytique et à celles d'autres éléments de plaque connus de la littérature. La vitesse de convergence de l'élément est mise en évidence en évaluant les performances de certaines grandeurs comme le déplacement transversal ou les efforts résultants en fonction du nombre d'éléments ou du nombre total de ddl.

Plaque biaise ($\alpha = 30^\circ$) mince simplement supportée sous chargement uniforme

Ce problème est considéré comme délicat par l'ensemble des chercheurs en éléments finis. Classiquement, une solution analytique de référence proposée par

Morley [93] est obtenue en utilisant la théorie de Kirchhoff. Nous avons étudié ce problème en considérant deux valeurs de l'éclatement ($L/h = 100$ et 1000) (Fig. 3.2). Les moments maximum et minimum et la flèche au centre de la plaque sont normalisées par rapport à la solution de référence de plaque mince (Morley). Les résultats obtenus par les éléments de notre modèle *DMQP_{iso}* comparés aux éléments MITC4 [18] pour les deux cas ($L/h = 1000$ et 100), sont reportés sur les tableaux 3.1 et 3.2. Les deux éléments convergent vers les solutions de référence.

- Dans le cas très mince ($L/h = 1000$) la convergence vers la solution de plaque mince [93] est obtenue par l'ensemble des éléments avec des vitesses différentes. Les résultats des éléments *DMQP_{iso}*, ne sont pas influencés par la distorsion du maillage comme c'est le cas par exemple de l'élément MITC4.
- Dans le cas limite ($L/h = 100$), Babuska et Scapolla [17] ont beaucoup investi sur ce problème. Ils proposent de le résoudre en le considérant comme un problème d'élasticité tridimensionnel. Leur solution 3D pour $L/h = 100$ est très proche de celle obtenue par nos éléments *DMQP_{iso}*, à l'exception de MITC4 qui reste toujours lent.



Données :	$E=10.92, \nu = 0.3, (L/h= 1000 \text{ et } 100)$
Conditions limites :	$w = 0$ sur ABDE
Charge :	Charge uniforme $q = 1$

FIG. 3.2 – Plaque biaise simplement supportée ($\alpha = 30^\circ$) sous charge uniforme

$\bar{w}_c = w_c \times 10^3 / qL^2$		$\bar{M}_{max} = M_{max} \times 10^3 / qL^2$		$\bar{M}_{min} = M_{min} \times 10^3 / qL^2$		
Maillage	DMQP iso	MITC4	DMQP iso	MITC4	DMQP iso	MITC4
4 x 4	0.760	0.358	23.39	16.69	17.51	9.21
8 x 8	0.507	0.343	20.74	17.33	12.76	9.57
16 x 16	0.443	0.343	19.84	17.17	11.66	8.74
32 x 32	0.425	0.362	19.50	17.77	11.37	9.23
Morley [93]	0.408		19.10		10.80	

TAB. 3.1 – Plaque biaise ($\alpha = 30^\circ$). Flèche et moment au centre de la plaque pour ($L/h = 1000$)

$\bar{w}_c = w_c \times 10^3 / qL^2$		$\bar{M}_{max} = M_{max} \times 10^3 / qL^2$		$\bar{M}_{min} = M_{min} \times 10^3 / qL^2$		
Maillage	DMQP iso	MITC4	DMQP iso	MITC4	DMQP iso	MITC4
4 x 4	0.757	0.359	23.30	16.70	17.40	9.21
8 x 8	0.504	0.357	20.73	17.82	12.67	9.99
16 x 16	0.441	0.383	19.84	18.44	11.66	10.46
32 x 32	0.423	0.404	19.45	18.94	11.35	10.76
Morley [93]	0.408		19.10		10.80	
Solution tridimensionnelle [17] : $\bar{w}_c = 0.4235$						

TAB. 3.2 – Plaque biaise ($\alpha = 30^\circ$). Flèche et moment au centre de la plaque pour ($L/h = 100$)

Etude d'une plaque circulaire sous chargement uniforme

La figure 3.3 montre la géométrie et les maillages éléments finis utilisés pour l'analyse d'une plaque circulaire isotrope épaisse et mince ($R/h = 2, 5$ et 50). Ce test met en évidence la distorsion géométrique des éléments. Un quart de plaque est discrétisé en tenant compte des conditions de symétrie et deux types de conditions aux limites sont considérés.

► Convergence de la flèche w_c et du moment M_r au centre (plaque mince) : En utilisant les maillages de la figure 3.3, nous avons évalué la flèche et le moment M_r au centre de la plaque pour le cas de la plaque simplement supportée et encastrée. Les résultats correspondants, obtenus par notre élément DMQP iso et comparés à ceux de l'élément MITC4 [18] et à une solution de référence, sont présentés dans les tableaux 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 et les deux figures 3.4-a et 3.4-b. Ils sont normalisés par rapport aux solutions de référence et donnés en fonction

du nombre des éléments finis. Les solutions de référence au centre de la plaque s'écrivent :

► Plaque encastree :

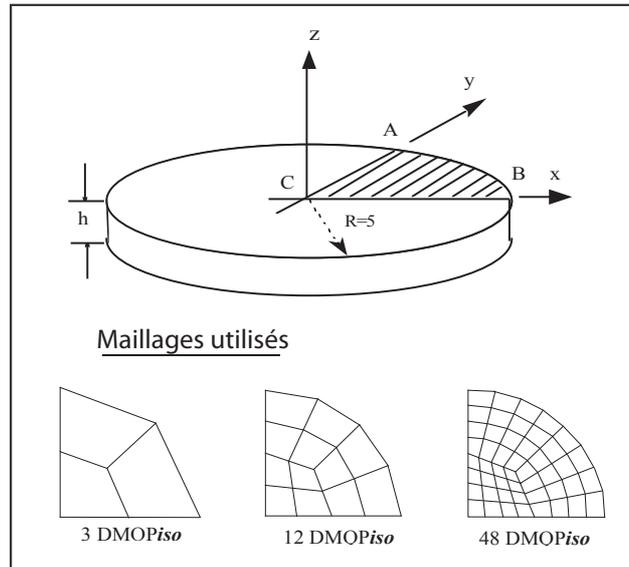
$$W_{Ref} = \frac{qR^4}{64D} (1 + \phi) \quad ; \quad M_{Ref} = \frac{qR^2}{16} (1 + \nu)$$

► Plaque simplement supportee :

$$W_{Ref} = \frac{qR^4}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \phi \right) \quad ; \quad M_{Ref} = \frac{qR^2}{16} (3 + \nu)$$

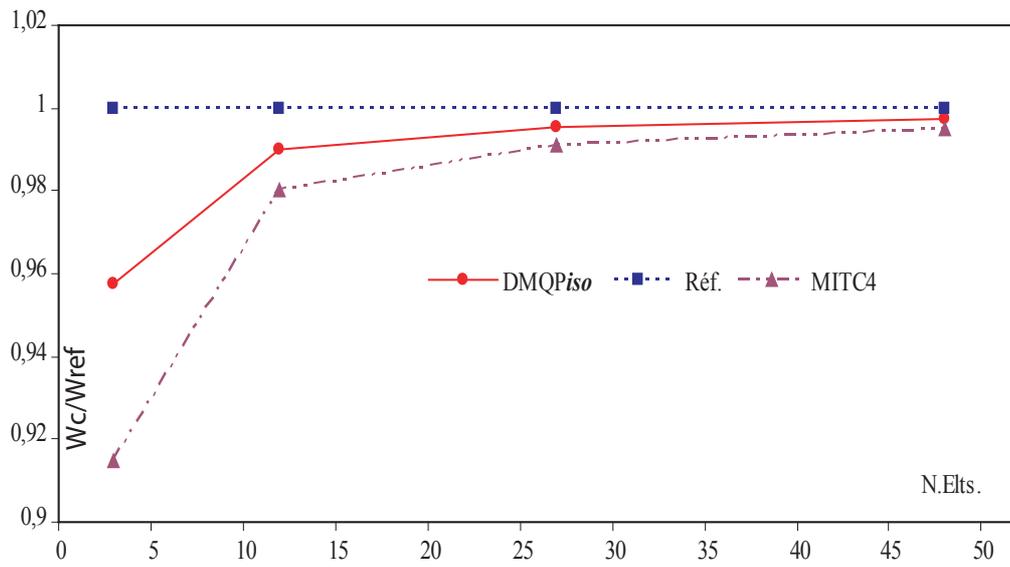
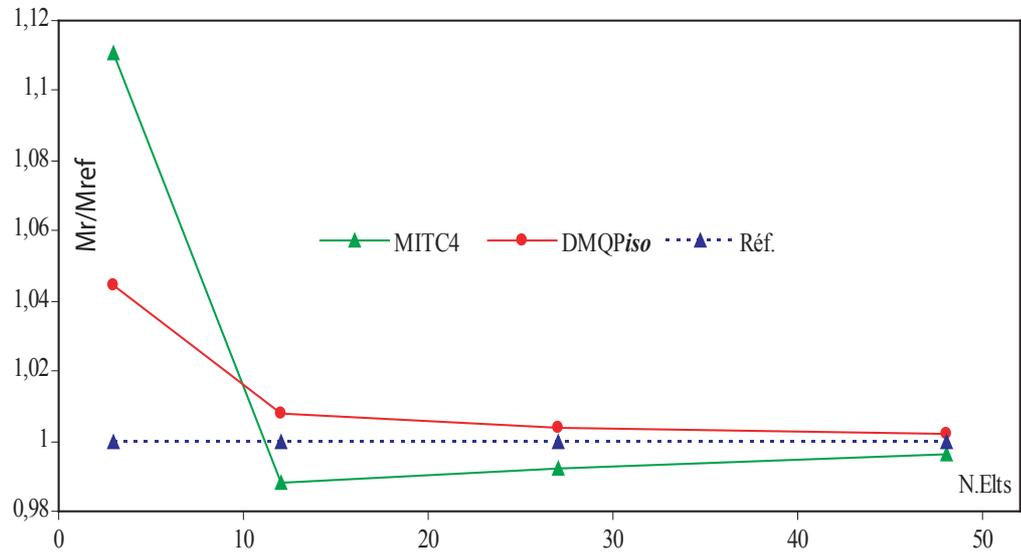
$$\phi = \frac{16}{5} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{1}{1 - \nu} \quad ; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Une très bonne convergence vers les solutions de référence, avec un faible nombre d'éléments, est obtenue par notre modèle DMQPiso.



Données :	$E = 3 \times 10^5$, $\nu = 0.3$, ($2R/h = 100$ et 10) Charge uniforme $q = 1$
Conditions limites :	symétrie : $\beta_y = 0$ sur BC et $\beta_x = 0$ sur AC encastrement : $w = \beta_x = \beta_y = 0$ sur AB appui simple : $w = 0$ sur AB

FIG. 3.3 – Plaque circulaire isotrope sous charge uniforme. Données et maillage

(a) Déplacement w au centre de la plaque(b) Moment principal M_r au centre de la plaqueFIG. 3.4 – Plaque circulaire simplement supportée ($R/h = 50$)

	R/h = 50		R/h = 5		R/h = 2	
N.Elt	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4
3	38132	36429	39.663	38.131	3.083	2.994
12	39433	39039	41.101	40.772	3.217	3.198
27	39651	39471	41.366	41.227	3.242	3.233
48	39734	39635	41.470	41.395	3.251	3.247
Exact	39831		41.599		3.262	

TAB. 3.3 – Plaque circulaire simplement supportée sous chargement uniforme. Déplacement au centre de la plaque

	R/h = 50		R/h = 5		R/h = 2	
N.Elt	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4
3	10771	9067.9	12.303	10.755	1.332	1.243
12	10093	9699.3	11.762	11.432	1.339	1.320
27	9917.6	9738.2	11.633	11.494	1.339	1.331
48	9865	9766.6	11.601	11.526	1.339	1.335
Exact	9783.51		11.551		1.339	

TAB. 3.4 – Plaque circulaire encastree sous chargement uniforme. Déplacement au centre de la plaque

	R/h = 50		R/h = 5		R/h = 2	
N.Elt	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4
3	5.39	5.73	5.40	4.78	5.44	4.82
12	5.20	5.10	5.23	5.09	5.24	5.09
27	5.18	5.12	5.19	5.13	5.19	5.13
48	5.17	5.14	5.18	5.14	5.18	5.15
Exact	5.16		5.16		5.16	

TAB. 3.5 – Plaque circulaire simplement supportée sous chargement uniforme. Moment M_r au centre de la plaque

	R/h = 50		R/h = 5		R/h = 2	
N.Elt	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4	DMQP _{iso}	MITC4
3	2.54	1.88	2.56	1.93	2.60	1.97
12	2.15	2.05	2.18	2.04	2.19	2.04
27	2.09	2.02	2.10	2.04	2.10	2.04
48	2.06	2.04	2.07	2.04	2.07	2.04
Exact	2.03		2.03		2.03	

TAB. 3.6 – Plaque circulaire encastree sous chargement uniforme. Moment M_r au centre de la plaque

3.2 Résultats des cas-tests de plaques composites multicouches

3.2.1 Rappel des techniques de calcul des facteurs de correction de CT

Nous avons choisi d'évaluer par une technique d'équivalence énergétique les facteurs k_i de correction du CT correspondant à des stratifications données. L'objectif est de corriger des matrices de déformation (flexion/CT) et de comportement en CT associées à une représentation tridimensionnelle des contraintes de CT τ_{xz} et τ_{yz} . La raison essentielle de ce choix est la volonté de confronter les performances de notre modèle DMQP ml à celles des modèles d'ordre supérieur, pour lesquels ces facteurs correctifs ne sont pas nécessaires. Une des références sur laquelle nous nous sommes basés pour évaluer les facteurs k_i est celle de [136]. Les méthodes dites de flexion et totale que nous rappelons dans cette section sont utilisées pour évaluer les facteurs k_i en post-traitement sur les contraintes de CT. Elles permettent de considérer quatre cas possibles :

Cas 1 : Méthode de flexion pour une correction des matrices de déformations de flexion/CT et de comportement en CT. Nous notons par DMQP ml_1 la version correspondante de l'élément de plaque.

Cas 2 : Méthode de flexion pour une correction de la matrice de comportement en CT. Nous notons par DMQP ml_2 la version correspondante de l'élément de plaque.

Cas 3 : Méthode totale pour une correction de la matrice de comportement en CT. Nous notons par DMQP ml_3 la version correspondante de l'élément de plaque.

Cas 4 : Méthode totale pour une correction des matrices de déformations de flexion/CT et de comportement en CT. Nous notons par DMQP ml_4 la version correspondante de l'élément de plaque.

Remarque : les cas 3 et 4 conduisent exactement aux mêmes résultats sur les contraintes de CT. Nous abandonnons en conséquence le cas 4 pour la suite des problèmes traités.

- Méthode totale : les facteurs de correction sont calculés par une comparaison entre l'énergie de CT associée à la théorie du premier ordre et celle due aux contraintes de CT. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre tridimensionnelles.
- Méthode de flexion : cette méthode est l'extension des méthodes de flexion cylindrique pour des cas où un couplage entre les deux contraintes de CT existe. Elle est valable uniquement pour des stratifiées symétriques sans couplage (membrane-flexion).

3.2.2 Plaque composite à 3 et 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal

Ce problème a été proposé et traité par Pagano et Hatfield [108]. Le matériau de base est un composite unidirectionnel fortement orthotrope. Nous avons étudié deux types de stratifications :

- 3 couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ (Stratification 1 - Sandwich)
- 9 couches $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ (Stratification 2 - Laminé)

Dans les deux cas, les épaisseurs totales de couches à 0° et 90° sont égales, et les couches de même orientation ont toutes la même épaisseur. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la plaque est maillé avec un maillage (6 x 6). Les données physiques du problème sont présentées sur la figure 3.5.

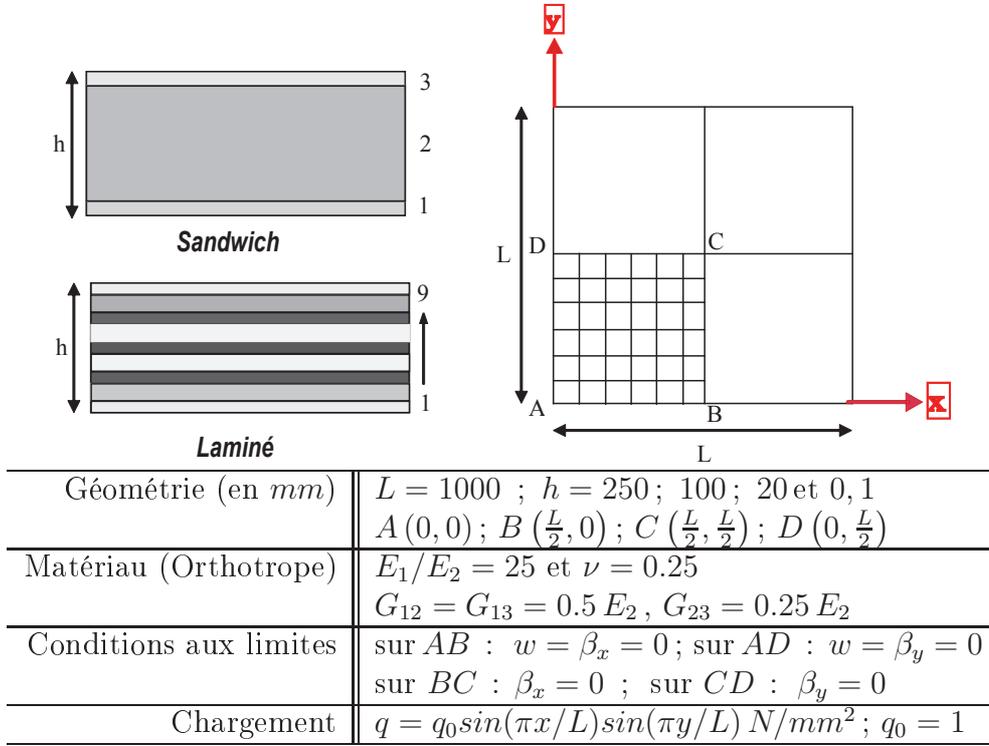


FIG. 3.5 – Stratification d'une plaque composite à 3 et 9 couches. Données du problème

Les valeurs des déplacements et des contraintes sont données sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{\pi^4 Q}{12 S^4 h q_0} w ; \quad Q = 4 G_{12} + \frac{[E_1 + E_2 (1 + 2\nu_{23})]}{(1 + \nu_{12}\nu_{21})} \quad \text{et} \quad S = \frac{L}{h} \quad (3.1)$$

$$(\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}) = \frac{1}{q_0 S^2} (\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}) ; \quad (\bar{\tau}_{xz} \quad \bar{\tau}_{yz}) = \frac{1}{q_0 S} (\tau_{xz} \quad \tau_{yz}) \quad (3.2)$$

Les valeurs suivantes des facteurs k_1 et k_2 correspondantes au trois cas précédents, sont considérées dans les calculs :

- Cas 1 : élément DMQP ml_1
 - 3 couches : $k_1 = 0.5952$ et $k_2 = 0.7205$
 - 9 couches : $k_1 = 0.6890$ et $k_2 = 0.6110$
- Cas 2 : élément DMQP ml_2
 - 3 couches : $k_1 = 0.5952$ et $k_2 = 0.7205$
 - 9 couches : $k_1 = 0.6890$ et $k_2 = 0.6110$
- Cas 3 : élément DMQP ml_3
 - 3 couches : $k_1 = 0.5700$ et $k_2 = 0.8820$
 - 9 couches : $k_1 = 0.6700$ et $k_2 = 0.6660$

Les contraintes planes et les contraintes de CT sont calculées directement aux nœuds « sommets » de chaque élément. Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par Lardeur [80] (élément en déplacement avec facteur de correction k_i , DSQ : Discrete Shear Quadrilateral), Tafla [134] (élément mixte-hybride sans facteur de correction de CT, MiSP4/ml : Mixed with Shear Projection 4-node multilayer) et E. O.² [51] (le modèle QHD40 : basé sur la théorie d'ordre supérieur en déplacement avec variation quadratique de u et v dans l'épaisseur. Il possède huit nœuds et dix degrés de liberté.

L'ensemble des résultats est comparé à la solution tridimensionnelle donnée par Pagano et Hatfield [108].

- Le déplacement transversal et les contraintes planes au centre de la plaque, obtenus pour les trois cas i (versions DMQP ml_i), sont présentés sur les tableaux 3.9 et 3.7 pour les deux stratifications. Les corrections introduites pour les matrices de déformations de flexion et de CT ont très peu d'influence sur l'ensemble des résultats. Nos résultats sont globalement en bon accord avec la solution analytique. La figure 3.6 montre la convergence du déplacement \bar{w}_C , pour la stratification 2, vers la solution CPT³ [132] dans le cas des plaques minces.
- Les contraintes de CT étant calculées à partir des équations d'équilibre, elles dépendent directement de la matrice de comportement de CT $[G]$.
 - Stratification 1 : d'après les résultats du tableau 3.8, nous constatons que les résultats des contraintes de CT, obtenus pour $L/h = 4, 10$ et 50 par le présent modèle, s'améliorent avec la correction des matrices de déformations de flexion et de CT utilisant la méthode totale. Pour $L/h \geq 100$ (cas des plaques minces où l'effet de CT est négligeable),

²Engblom & Ochoa

³“Classical Plate Theory”

les valeurs obtenues en utilisant des facteurs de correction, calculés par la méthode de flexion, sont proches des résultats de référence. Les figures 3.7 et 3.10 présentent la distribution des contraintes planes et des contraintes de CT à travers l'épaisseur. Les contraintes τ_{xz} sont linéaires sur les peaux et constantes sur le cœur.

- Stratification 2 : Les valeurs des contraintes de CT $\bar{\tau}_{xz}$ obtenues avec les facteurs de correction, calculés par la méthode de flexion avec ou sans correction des matrices de déformation, sont meilleures (Tab. 3.10), sauf pour $L/h = 4$ (plaque épaisse) où l'on trouve de meilleurs résultats avec les facteurs de correction calculés par la méthode totale. Sur les figures 3.8 et 3.9, nous présentons la distribution à travers l'épaisseur des contraintes planes pour $L/h = 10$ et de CT pour trois élancements différents (L/h). Les figures 3.9-a et 3.9-b montrent une bonne corrélation des contraintes de CT $\bar{\tau}_{xz}$ pour $L/h = 10$ avec les résultats de Pagano.
- Les figures 3.10-c, 3.10-d, 3.9-c et 3.9-d montrent la distribution des contraintes de CT $\bar{\tau}_{yz}$ en fonction de z/h . Un lissage est utilisé dans le but de montrer la distribution quadratique de ces mêmes contraintes. Une divergence est observée cependant pour un élancement ($L/h \geq 100$: plaque très mince) (Tabx. 3.8 et 3.10) pour les quatre versions de DMQPml_i et pour les deux types de stratification.

On peut distinguer dans les plaques composites stratifiées deux niveaux d'anisotropie : le premier niveau concerne la couche élémentaire, le second concerne les rigidités globales intégrées suivant z ; il dépend de ce fait de la stratification. Dans ce problème, le premier niveau d'anisotropie (assez élevé puisque $E_1/E_2 = 25$) est le même dans les deux cas de stratification, mais la stratification 1 est globalement très anisotrope, alors que la stratification 2 présente certaines caractéristiques d'isotropie (rigidités presque égales dans les directions x et y). Cela signifie que plus le nombre de couches est grand, moins la structure est sensible à l'effet de CT si l'épaisseur totale est constante. Or, c'est le niveau d'anisotropie qui provoque des difficultés, à la fois d'ordre théorique et numérique.

En conclusion, le modèle DMQPml de plaque multicouche donne globalement des résultats satisfaisants sur la flèche et sur les contraintes, pour les deux stratifications étudiées. L'observation de la distribution des contraintes de CT $\bar{\tau}_{xz}$ et $\bar{\tau}_{yz}$ permet de constater que plus le nombre de couches est faible, plus les résultats s'éloignent de ceux donnés par la théorie de plaque (pour un rapport L/h caractéristique d'une plaque épaisse $L/h \geq 4$).

En particulier, l'hypothèse de linéarité des contraintes $\bar{\tau}_{xz}$ dans les faces n'est plus acceptable (Figs. 3.10-a et 3.10-b). Ceci s'explique par une présence im-

portante du CT dans les structures multicouches épaisses. Le problème devient purement tridimensionnel.

L/h	Modèles	$\bar{\sigma}_{xC} (+\frac{h}{2})$	Err. %	$\bar{\sigma}_{yC} (+\frac{h}{4})$	Err. %	$\bar{\tau}_{xyA} (+\frac{h}{2})$	Err. %
4	DMQP ml_1	0.349	51.527	0.706	6.485	0.0348	24.017
	DMQP ml_2	0.349	51.527	0.706	6.485	0.0348	24.017
	DMQP ml_3	0.349	51.527	0.706	6.485	0.0348	24.017
	E. et O.	0.387	46.25	0.618	6.787	0.0326	28.821
	DSQ	0.369	48.75	0.662	0.151	-	-
	MiSP4/ml	0.327	54.583	0.734	10.709	-	-
	Elasticité	0.720		0.663		0.0458	-
10	DMQP ml_1	0.485	13.238	0.411	2.497	0.0255	7.6086
	DMQP ml_2	0.485	13.238	0.411	2.497	0.0255	7.6086
	DMQP ml_3	0.485	13.238	0.411	2.497	0.0255	7.6086
	E. et O.	0.488	12.701	0.388	3.241	0.0253	8.3333
	DSQ	0.475	15.027	0.425	5.985	-	-
	MiSP4/ml	0.462	17.352	0.400	0.249	-	-
	Elasticité	0.559		0.401		0.0276	-
50	DMQP ml_1	0.536	0.556	0.276	0	0.0213	1.3888
	DMQP ml_2	0.536	0.556	0.276	0	0.0213	1.3888
	DMQP ml_3	0.536	0.556	0.276	0	0.0213	1.3888
	E. et O.	0.54	0.185	0.271	1.812	0.0216	0
	DSQ	0.54	0.185	0.278	0.725	-	-
	MiSP4/ml	0.520	3.525	0.268	2.898	-	-
	Elasticité	0.539		0.276		0.0216	
100	DMQP ml_1	0.541	0.371	0.268	1.107	0.0211	1.4018
	DMQP ml_2	0.541	0.371	0.268	1.107	0.0211	1.4018
	DMQP ml_3	0.541	0.371	0.268	1.107	0.0211	1.4018
	E. et O.	0.542	0.556	0.266	1.845	0.0215	0.4673
	Elasticité	0.539		0.271		0.0214	
	CPT	0.539		0.269		0.0213	

TAB. 3.7 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats des contraintes planes maximales

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHESES71

L/h	Modèles	$\bar{w}_C(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{xzD}(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{yzB}(0)$	Err. %
4	DMQP ml_1	5.16	14.896	0.23975	9.4748	0.24375	16.524
	DMQP ml_2	5.16	14.896	0.239	9.1324	0.241	17.466
	DMQP ml_3	5.16	14.896	0.229	4.5662	0.295	1.027
	E. et O.	5.195	15.675	0.256	16.8949	0.302	3.425
	DSQ	4.834	7.637	0.245	11.8721	0.331	13.356
	MiSP4/ ml	4.847	7.927	0.230	5.0228	0.353	20.890
	Elasticité	4.491		0.219	-	0.292	-
10	DMQP ml_1	1.89	10.591	0.312	3.6545	0.147	25
	DMQP ml_2	1.89	10.591	0.311	3.3222	0.145	26.02
	DMQP ml_3	1.89	10.591	0.298	0.9966	0.179	8.673
	E. et O.	1.771	3.628	0.309	2.6578	0.195	0.5102
	DSQ	1.72	0.643	0.305	1.3289	0.204	4.0816
	MiSP4/ ml	1.771	3.628	0.302	0.3322	0.208	6.1224
	Elasticité	1.709		0.301	-	0.196	-
50	DMQP ml_1	1.12	8.632	0.344	2.0771	0.122	13.4751
	DMQP ml_2	1.12	8.632	0.334	0.8902	0.1124	20.2836
	DMQP ml_3	1.12	8.632	0.33	2.0771	0.142	0.7092
	E. et O.	1.034	0.291	0.336	0.2967	0.140	0.7092
	DSQ	1.025	0.582	0.332	1.4836	0.139	1.4184
	MiSP4/ ml	1.031	0	0.336	0.2967	0.141	0
	Elasticité	1.031		0.337		0.141	
100	DMQP ml_1	1.09	8.135	0.346	2.0648	0.183	31.6546
	DMQP ml_2	1.09	8.135	0.322	5.0147	0.149	7.1942
	DMQP ml_3	1.09	8.135	0.311	8.2595	0.198	42.4460
	E. et O.	1.01	0.198	0.337	0.5899	0.138	0.7194
	Elasticité	1.008		0.339		0.139	
CPT				0.339		0.138	

TAB. 3.8 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT maximum

L/h	Modèles	$\bar{\sigma}_{xC} (+\frac{h}{2})$	Err. %	$\bar{\sigma}_{yC} (+\frac{2h}{5})$	Err. %	$\bar{\tau}_{xyA} (+\frac{h}{2})$	Err. %
4	DMQP ml_1	0.475	30.555	0.505	19.586	0.0217	33.841
	DMQP ml_2	0.475	30.555	0.505	19.586	0.0217	33.841
	DMQP ml_3	0.475	30.555	0.505	19.586	0.0217	33.841
	DSQ	0.491	28.216	0.487	22.452	-	-
	MiSP4/ml	0.455	33.479	0.536	14.649	-	-
	Elasticité	0.684		0.628		0.0328	
10	DMQP ml_1	0.514	6.715	0.459	3.773	0.0213	8.5836
	DMQP ml_2	0.514	6.715	0.459	3.773	0.0213	8.5836
	DMQP ml_3	0.514	6.715	0.459	3.773	0.0213	8.5836
	DSQ	0.519	5.807	0.455	4.612	-	-
	MiSP4/ml	0.505	8.348	0.476	0.209	-	-
	Elasticité	0.551		0.477		0.0233	
50	DMQP ml_1	0.536	0.556	0.428	1.155	0.02108	1.4953
	DMQP ml_2	0.536	0.556	0.428	1.155	0.02108	1.4953
	DMQP ml_3	0.536	0.556	0.428	1.155	0.02108	1.4953
	DSQ	0.538	0.185	0.432	0.231	-	-
	MiSP4/ml	0.54	0.185	0.435	0.462	-	-
	Elasticité	0.539		0.433		0.0214	
100	DMQP ml_1	0.542	0.553	0.426	1.160	0.0211	0.9389
	DMQP ml_2	0.542	0.553	0.426	1.160	0.0211	0.9389
	DMQP ml_3	0.542	0.553	0.426	1.160	0.0211	0.9389
	Elasticité	0.539		0.431		0.0213	
CPT		0.539		0.431		0.0213	

TAB. 3.9 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats des contraintes planes maximales

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHES73

L/h	Modèles	$\bar{w}_C(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{xzD}(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{yzB}(0)$	Err. %
4	DMQP ml_1	4.53	11.056	0.230	3.139	0.229	2.690
	DMQP ml_2	4.53	11.056	0.230	3.139	0.228	2.242
	DMQP ml_3	4.53	11.056	0.224	0.448	0.2485	11.434
	DSQ	4.235	3.824	0.235	5.381	0.243	8.968
	MiSP4/ml	4.133	1.323	0.22	1.345	0.265	18.834
	Elasticité	4.079		0.223		0.223	
10	DMQP ml_1	1.64	8.465	0.248	0.404	0.211	6.637
	DMQP ml_2	1.64	8.465	0.248	0.404	0.210	7.079
	DMQP ml_3	1.64	8.465	0.241	2.429	0.229	1.327
	DSQ	1.516	0.264	0.246	0.404	0.228	0.885
	MiSP4/ml	1.512	0	0.242	2.024	0.237	4.867
	Elasticité	1.512		0.247		0.226	
50	DMQP ml_1	1.10	7.737	0.26	0.775	0.242	10.502
	DMQP ml_2	1.10	7.737	0.258	0	0.246	12.328
	DMQP ml_3	1.10	7.737	0.252	2.325	0.262	19.634
	DSQ	1.015	0.587	0.253	1.937	0.216	1.369
	MiSP4/ml	1.019	0.195	0.256	0.775	0.218	0.456
	Elasticité	1.021		0.258		0.219	
100	DMQP ml_1	1.09	8.457	0.260	0.386	0.384	74.885
	DMQP ml_2	1.09	8.457	0.256	1.158	0.398	81.735
	DMQP ml_3	1.09	8.457	0.252	2.703	0.416	89.954
	Elasticité	1.005		0.259		0.219	
	CPT	1		0.259		0.219	

TAB. 3.10 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT maximum

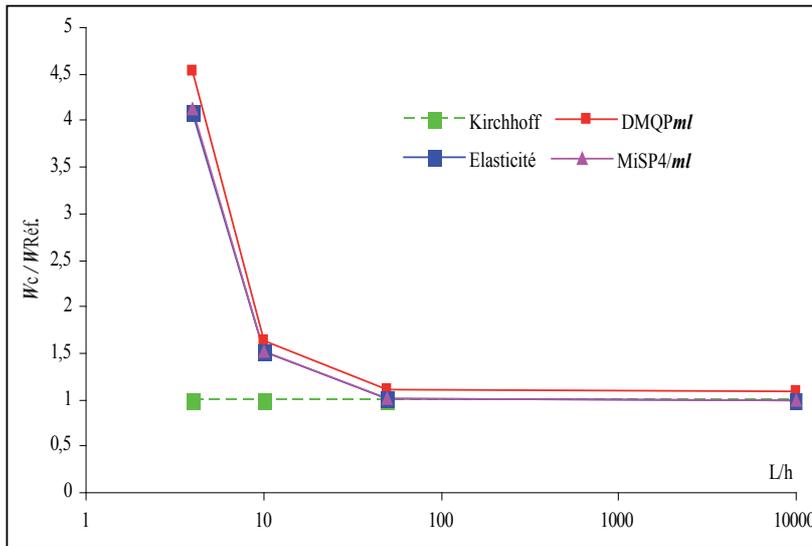


FIG. 3.6 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Déplacement au centre de la plaque en fonction de L/h

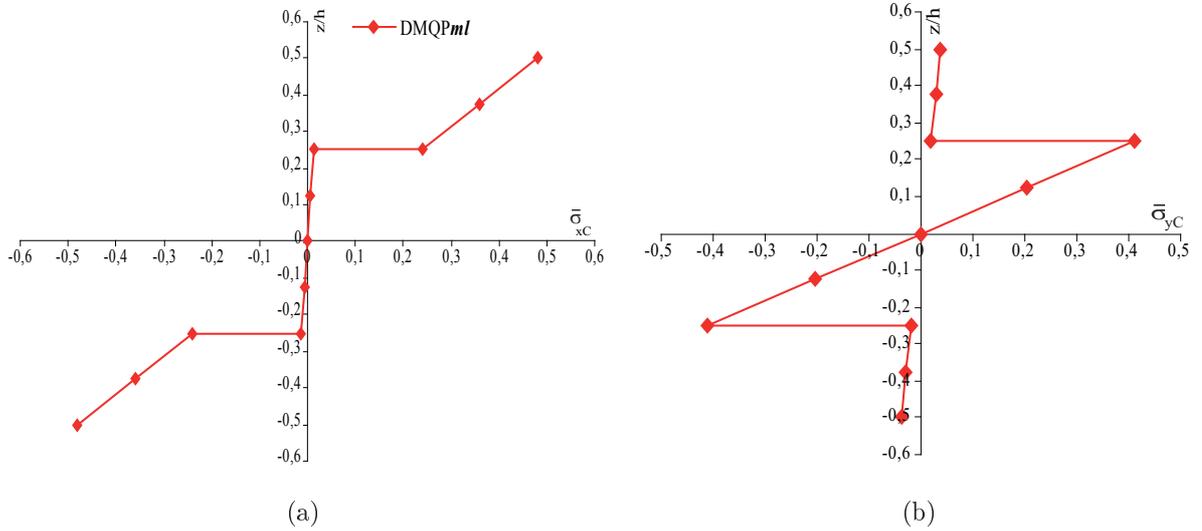


FIG. 3.7 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes planes à travers l'épaisseur ($L/h = 10$)

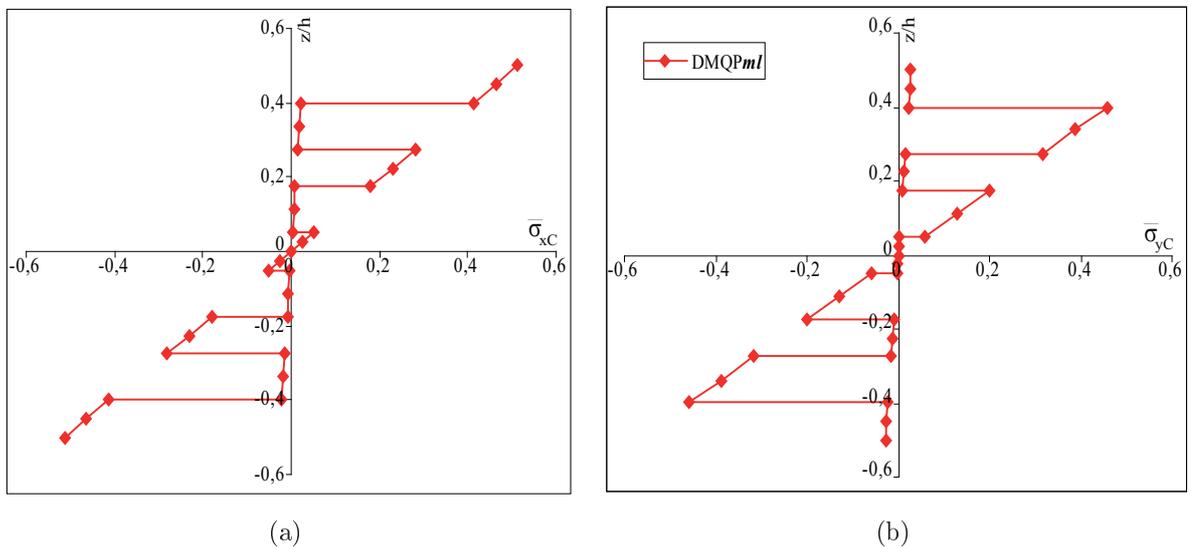


FIG. 3.8 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes planes à travers l'épaisseur ($L/h = 10$)

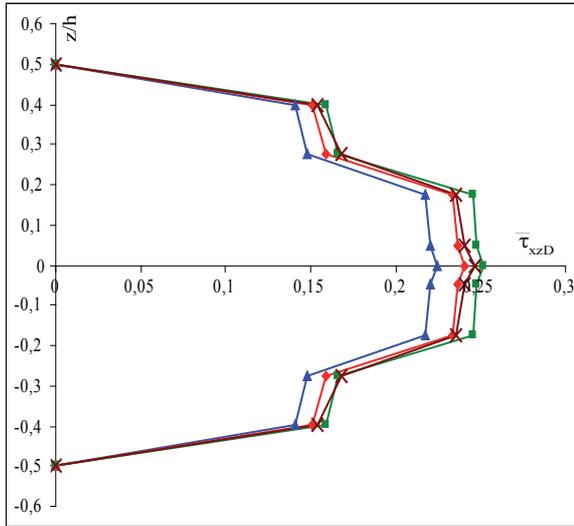
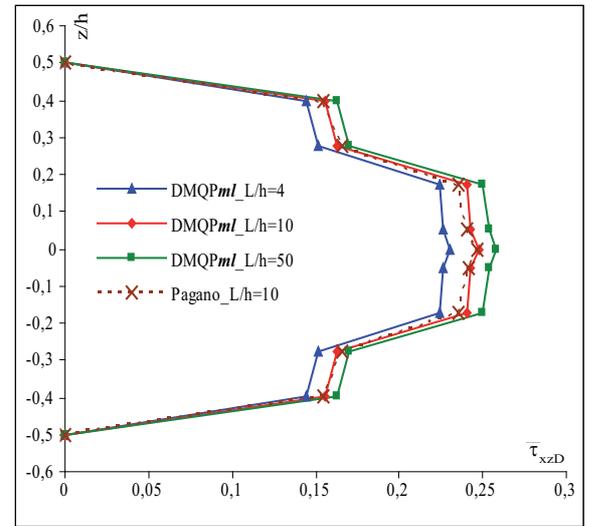
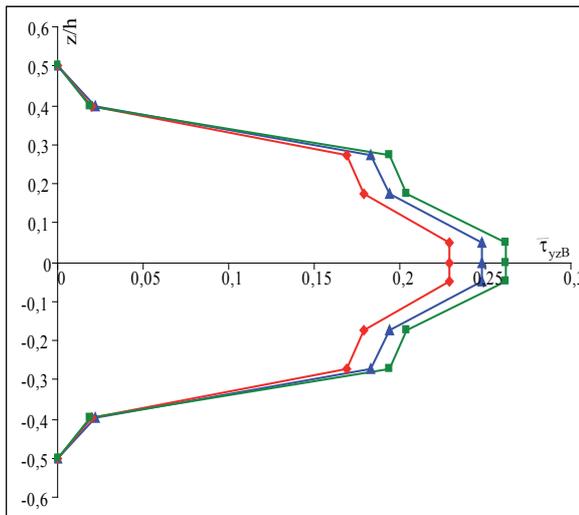
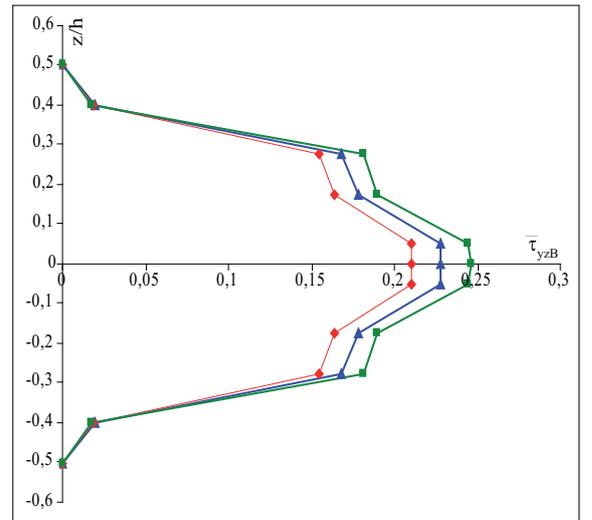
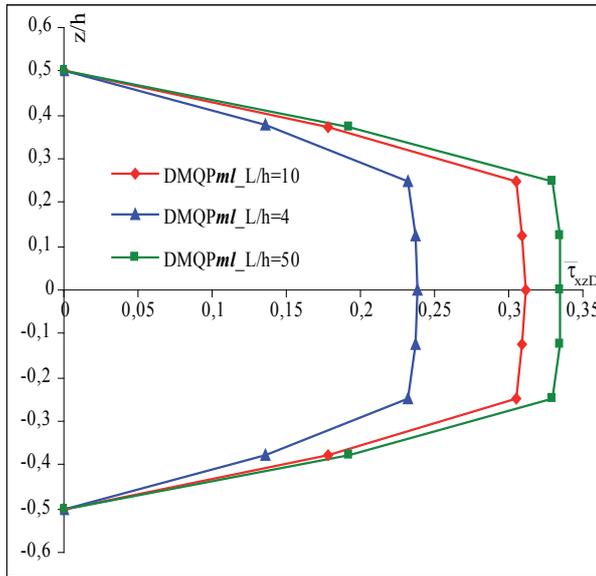
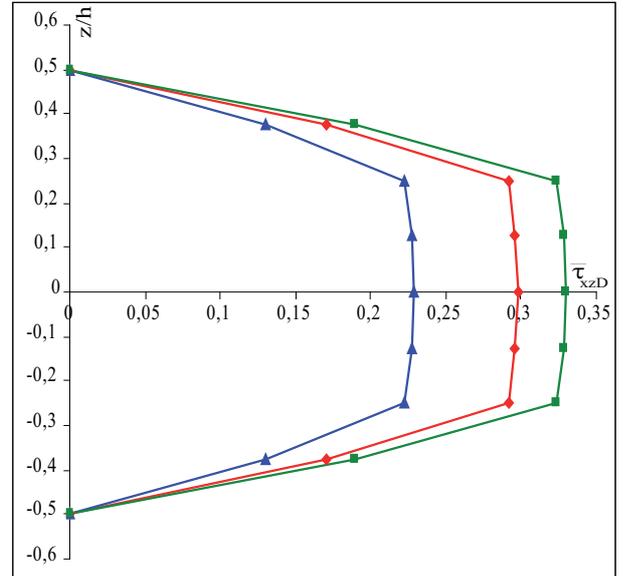
(a) $k_1 = 0.67$ et $k_2 = 0.666$ (cas 3)(b) $k_1 = 0.689$ et $k_2 = 0.611$ (cas 1-2)(c) $k_1 = 0.67$ et $k_2 = 0.666$ (cas 3)(d) $k_1 = 0.689$ et $k_2 = 0.611$ (cas 1-2)

FIG. 3.9 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 9-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur

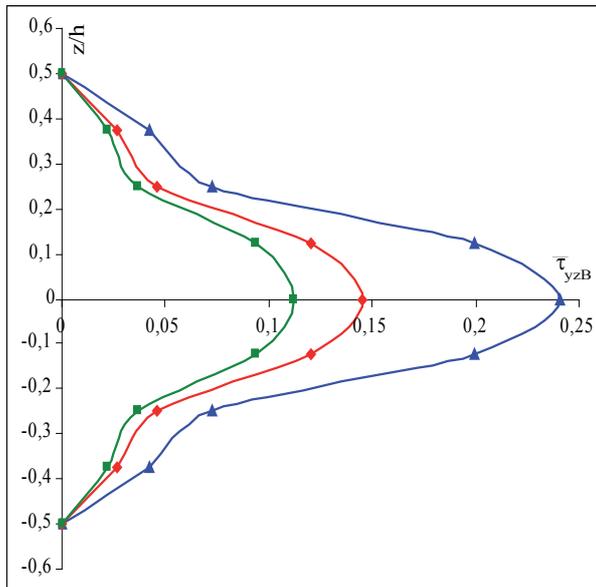
3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHES77



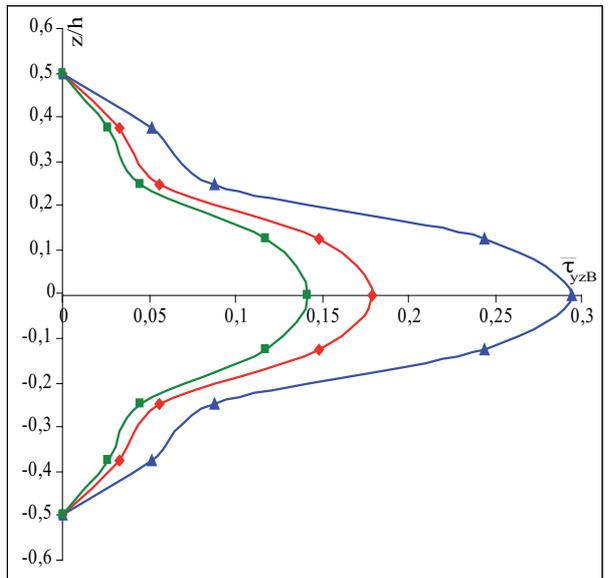
(a) $k_1 = 0.5952$ et $k_2 = 0.7205$ (cas 1-2)



(b) $k_1 = 0.570$ et $k_2 = 0.882$ (cas 3)



(c) $k_1 = 0.5952$ et $k_2 = 0.7205$ (cas 1-2)



(d) $k_1 = 0.570$ et $k_2 = 0.882$ (cas 3)

FIG. 3.10 – Plaque carrée simplement supportée sous chargement sinusoïdal 3-couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$). Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur

3.2.3 Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme

Ce test a été étudié par Srinivas [130] en proposant une solution analytique tridimensionnelle. Owen et Figueiras [104] l'ont traité avec un modèle, en introduisant un élément fini quadrilatéral à 9 nœuds combiné à l'élément heterosis avec l'utilisation d'une fonction parabolique pour le calcul des contraintes de CT et du déplacement transversal. Les propriétés mécaniques du matériau constituant le cœur sont proportionnelles à celles des peaux. Le coefficient C détermine le rapport de proportionnalité, il prend successivement les valeurs 1, 10 et 50 :

- $C = 1$: correspond à une plaque homogène orthotrope ;
- $C = 50$: correspond à une structure moyennement sandwich.

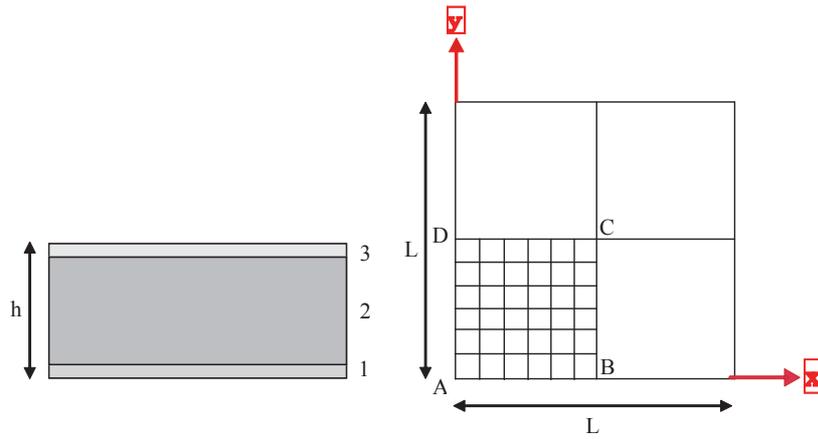
L'analyse est faite pour un seul rapport $L/h = 10$. Les données physiques du problème sont définies sur la figure 3.11. Un maillage (6 x 6) est utilisé pour modéliser le quart de la plaque, compte tenu de la symétrie du problème.

Les résultats du déplacement transversal au centre de la plaque sont donnés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{wG_{12}(2)}{hq_0} ; \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{q_0} \quad (3.3)$$

Les valeurs du déplacement w et des contraintes planes au centre de la plaque, obtenues par le présent modèle DMQP ml , les éléments DSQ [80], MiSP4/ ml [134] et Heterosis [104], comparées à la solution analytique 3D [130], sont illustrées sur les tableaux 3.11 et 3.12. Le modèle DQMP ml encadre globalement et de manière satisfaisante la solution 3D, à l'exception du cas $C = 50$ (structure sandwich) où le pourcentage d'erreur sur les contraintes planes au centre de la plaque est assez significatif (entre 12% et 27%). Cette même constatation est cependant commune aux autres modèles.

Sur la figure 3.12, nous présentons les distributions des contraintes $\bar{\sigma}_{xxC}$, $\bar{\tau}_{xzC}$ et $\bar{\tau}_{yzB}$ à travers l'épaisseur z/h pour les trois différentes valeurs de C (1, 10 et 50). Nous remarquons d'après la figure 3.12 que la valeur de C influe fortement sur les distributions de $\bar{\tau}_{xzC}$ et $\bar{\tau}_{yzC}$ à travers l'épaisseur. Pour $C = 1$, c'est à dire pour une plaque homogène orthotrope, nous retrouvons une distribution quadratique classique. Pour $C = 50$, τ_{xzC} et τ_{yzC} sont linéaires sur les peaux et constantes sur le cœur peu rigide. Ce résultat a été utilisé par [113] comme hypothèse de base pour développer des théories mixtes adaptées aux structures sandwichs. Nous retrouvons naturellement ce résultat avec notre modèle.



Géométrie (en mm)	$L = 1000$; $h = 100$ ($e_1 = e_2 = 10$ et $e_3 = 80$)
Matériau (Orthotrope)	$E_1 = 3.4156Pa$; $E_2 = 1.7931Pa$; $\nu = 0.44$ $G_{12} = 1Pa$; $G_{13} = 0.608Pa$; $G_{23} = 1.015Pa$
Conditions aux limites	sur AB : $w = \beta_x = 0$; sur AD : $w = \beta_y = 0$ sur BC : $\beta_x = 0$; sur CD : $\beta_y = 0$
Stratification	3 couches symétriques : $0^\circ/0^\circ/0^\circ$
C = 1	$k_1 = k_2 = 0.8333$
C = 10	$k_1 = k_2 = 0.3521$
C = 50	$k_1 = k_2 = 0.0938$
Chargement uniforme	$q = q_0$

FIG. 3.11 – Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Données du problème

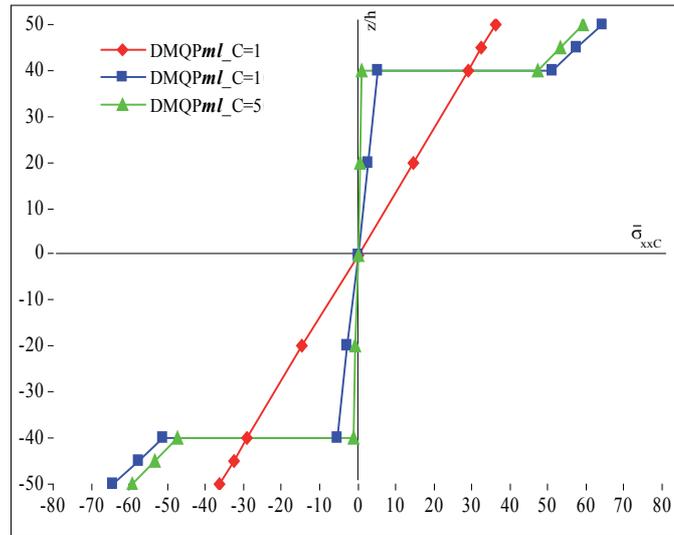
C	Modèles	$\bar{w}(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, 0)$	Err. %
1	DMQP <i>ml</i>	182.2	0.6351
	DSQ	181.42	0.2043
	Heterosis	183.99	1.6238
	MiSP4/ml	182	0.5247
	Elasticité	181.05	
10	DMQP <i>ml</i>	42.15	0.5726
	DSQ	42.04	0.3101
	Heterosis	41.92	0.0238
	MiSP4/ml	43.845	4.6170
	Elasticité	41.91	
50	DMQP <i>ml</i>	16.93	1.0746
	DSQ	16.89	0.8358
	Heterosis	16.85	0.5970
	MiSP4/ml	18.8	12.2388
	Elasticité	16.75	

TAB. 3.11 – Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme. Comparaison des déplacements maximum au point C

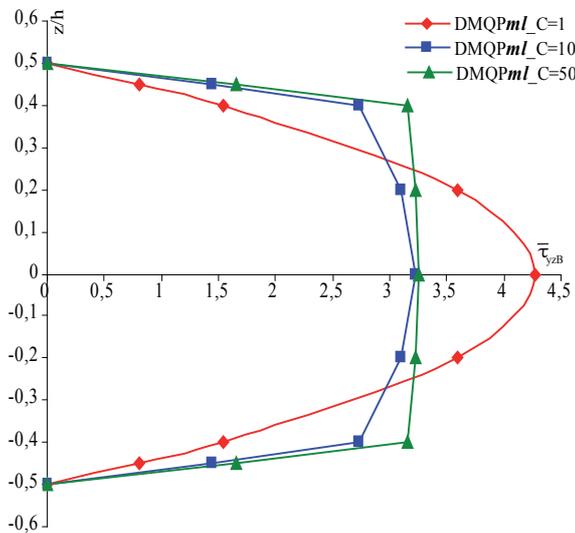
C	Modèles	$-\sigma_{xC}(\pm\frac{2h}{5}+)$	Err. %	$-\sigma_{xC}(\pm\frac{2h}{5}-)$	Err. %	$-\sigma_{xC}(\frac{h}{2})$	Err. %
1	DMQP <i>ml</i>	28.9	1.2436	28.9	1.2436	36.1	0.4452
	DSQ	28.73	0.6481	28.73	0.6481	35.91	0.0834
	Heterosis	28.98	1.5239	28.98	1.5239	36.22	0.7790
	MiSP4/ml	28.8	0.8933	28.8	0.8933	36	0.1669
	Elasticité	28.545		28.545		35.94	
10	DMQP <i>ml</i>	51.3	5.5338	5.13	5.5338	64.1	1.5058
	DSQ	50.88	4.6698	5.09	4.6698	63.60	2.2741
	Heterosis	48.73	0.2468	4.87	0.2468	65.23	0.2304
	MiSP4/ml	50.4	3.6823	5.04	3.6823	63.0	3.1960
	Elasticité	48.61		4.86		65.08	
50	DMQP <i>ml</i>	47.1	26.7833	0.943	27.4324	58.9	11,9581
	DSQ	46.69	25.6796	0.93	25.6756	58.37	12,7503
	Heterosis	46.65	25.5720	0.93	25.6756	58.31	12,8400
	MiSP4/ml	45.1	21.3997	0.905	22.2973	56.4	15,6950
	Elasticité	37.15		0.74		66.90	

TAB. 3.12 – Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Contrainte $\bar{\sigma}_{xC}$ maximale pour différents rapports L/h

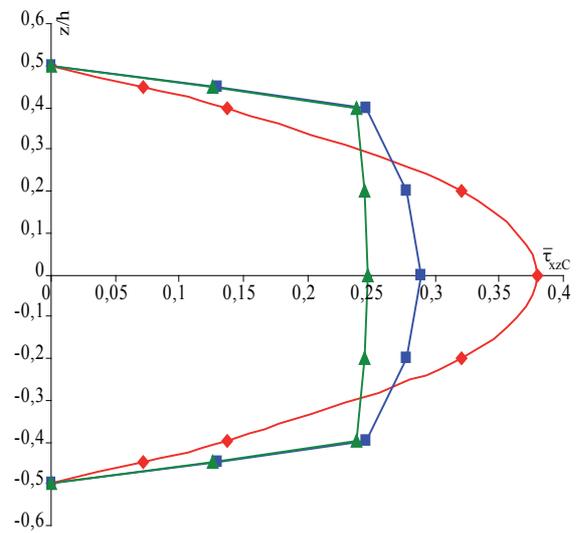
3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHES 81



(a) Contrainte plane au point C



(b) Contraintes de CT (point B)



(c) Contraintes de CT (point C)

FIG. 3.12 – Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Résultats des contraintes de CT maximales

3.2.4 Confrontation de l'élément DMQP ml à des modèles basés sur des théories d'ordre supérieur

Dans cette section, nous proposons de comparer les résultats de notre modèle DMQP ml à ceux obtenus par des éléments d'ordre supérieur. L'objectif est de tirer bénéfice de nos développements. Les éléments basés sur des théories d'ordre supérieur n'utilisent pas de facteurs de correction de CT. L'absence de ces facteurs dans certains tests de la littérature nous a contraint à implémenter une subroutine (fortran) pour le calcul de nos propres facteurs de correction k_i , pour chaque cas-test. Rappelons que ces facteurs correctifs dépendent des caractéristiques matérielles et du nombre de couches. Nous avons adopté la méthode totale [136] pour leur calcul.

Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal ($b/a = 3$)

Les données de problème sont similaires à celles de l'exemple précédent. La stratification, constituée de 3 couches de même épaisseur ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$), est soumise à un chargement uniforme q_0 ou doublement sinusoïdal q pour les trois cas traités dans cette section (figure 3.13). Le problème étant symétrique, nous avons étudié 1/4 de la plaque avec un maillage (6 x 6) et pour différentes valeurs de l'élanement L/h .

Les facteurs de correction de cisaillement utilisés sont ceux calculés par [79] : $k_1 = 0,5828$ et $k_2 = 0,8028$.

Les expressions des déplacements et des contraintes sont données sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{100E_2}{hq_0S^4}w \quad \text{avec} \quad S = \frac{a}{h} \quad (3.4)$$

$$(\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}) = \frac{1}{q_0S^2} (\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}) \quad ; \quad (\bar{\tau}_{xz} \quad \bar{\tau}_{yz}) = \frac{1}{q_0S} (\tau_{xz} \quad \tau_{yz}) \quad (3.5)$$

Dans les trois cas d'étude traités suivants, nous avons confronté nos résultats à ceux d'éléments finis multicouches basés sur les théories classiques du premier ordre FSMT et d'ordre supérieur HSMT. L'ensemble des résultats est comparé à la solution d'élasticité 3D [106] pour montrer la pertinence de notre modèle. Les contraintes de CT $\bar{\tau}_{xz}$ et $\bar{\tau}_{yz}$ sont calculées respectivement aux points D et B pour les cas 1 et 2, le déplacement transversal est quant à lui évalué au centre de la plaque pour les trois cas d'étude :

- Cas 1 : La plaque est rectangulaire et est soumise à un chargement sinusoïdal q . Les résultats des contraintes planes et de CT ont été comparés aux éléments DSQ [80], E.O.[51], PRHSMT⁴ [139] et HSMT⁵ [120]. Les valeurs

⁴PRHSMT : Present Refined Higher order Shear Deformation Theory

⁵HSMT : Higher order Shear Deformation Theory

du déplacement transversal et des contraintes de CT sont présentées sur les tableaux 3.14, celles des contraintes planes sont présentées sur le tableau 3.13.

La précision des différents modèles sur les contraintes planes (Tab. 3.13) semble être affectée pour σ_{xC} (cas d'une plaque épaisse $L/h = 4$). La solution obtenue pour σ_{yC} (plus petite par rapport aux contraintes associées selon x , compte-tenu de la géométrie de la structure) est en bon accord avec les résultats de référence, même remarque pour les contraintes τ_{xyA} . Le tableau 3.14 montre une bonne performance du modèle DMQP ml sur les valeurs du déplacement transversal, en particulier pour les élancements $L/h = 50$ et 100 (erreur 0%). Dans le cas d'une situation de plaque épaisse ($L/h = 4$), l'erreur est plus importante mais meilleure que celle produite par l'élément E.O. L'ensemble des résultats sur les contraintes de CT τ_{xz} et τ_{yz} reste satisfaisant, voire meilleure pour notre modèle DMQP ml comparativement aux éléments DSQ, EO et HSDT. Notons tout de même que la structure est à nouveau globalement anisotrope pour ce problème test.

- Cas 2 : La plaque est carrée ($b/a = 1$) et soumise à un chargement sinusoïdal. Les résultats ont été comparés à ceux de E.O [51], de l'élément HQ4 [43] et ceux de Carrera et Demasi [34]. Ces derniers ont traité le problème, pour le cas $L/h = 10$, avec un maillage de 5×5 éléments de premier ordre à 9 nœuds, labellisé ESL⁶ avec des variantes « ED1, EDZ1, EMC1 et EMZC1 ».

Les valeurs des contraintes planes, de CT et du déplacement transversal sont présentées respectivement sur les tableaux 3.15 et 3.16. Les résultats du modèle DMQP ml sont encourageants. Ils permettent globalement un bon encadrement de la solution analytique, à l'exception de la contrainte σ_{xC} pour $L/h = 4$ où notre modèle et celui de E.O donnent des résultats moins précis.

- ED1 et EDZ1 sont deux éléments à 9 nœuds basés sur la théorie du premier ordre, avec les effets « Zig-Zag » dans la formulation de EDZ1 ;
- EMC1 et EMCZ1 sont deux éléments à 9 nœuds basés sur la théorie du premier ordre mixte, avec, pour le modèle EMCZ1, un équilibre interlaminaire des contraintes transversales obtenu en utilisant les effets « Zig-Zag ».

- Cas 3 : La plaque considérée est carrée. Elle est soumise à un chargement uniforme q_0 . Deux types de maillages (8×8) et (12×12) pour deux élancements différents ($L/h = 4$ et 10) sont utilisés pour la modélisation. Le déplacement transversal \bar{w} , les contraintes planes $\bar{\sigma}_x$ et de CT $\bar{\tau}_{xz}$ sont

⁶ESL : Equivalent-Single Layer

évalués au centre de la plaque (point C). Les résultats estimés par notre modèle DMQP ml sont comparés à ceux donnés par les éléments PRHSDT, PHSDT et PFSDT, basés sur des théories du premier ordre FSDT [122] et d'ordre supérieur HSDT [120], qui ont été développées par [139].

Pour le cas 3, un calcul avec le logiciel commercial ABAQUS, considéré comme solution numérique de référence, est effectué par [146] avec un élanement $L/h=10$. L'élément fini utilisé est un hexaèdre à 20 nœuds. 4800 éléments ont ainsi été utilisés pour modéliser le quart de la plaque (20 éléments sur chacune des directions x et y et 12 éléments suivant l'axe z). Un autre modèle a retenu notre attention, celui de [146]. Nous l'avons aussi utilisé comme solution de comparaison pour nos résultats. [146] ont développé MQ-MLPG et TPS-MLPG à l'aide de la théorie HOSNDPT « Higher Order Shear and Normal Deformable Plate Theory », et la méthode MLPG « Meshless Local Petrov–Galerkin » avec l'utilisation des deux fonctions radiales ; MQ « multiquadrics » et TPS « Thin PLate Splines ».

L'ensemble des résultats converge vers une solution analytique de plaques minces CPT⁷ [124].

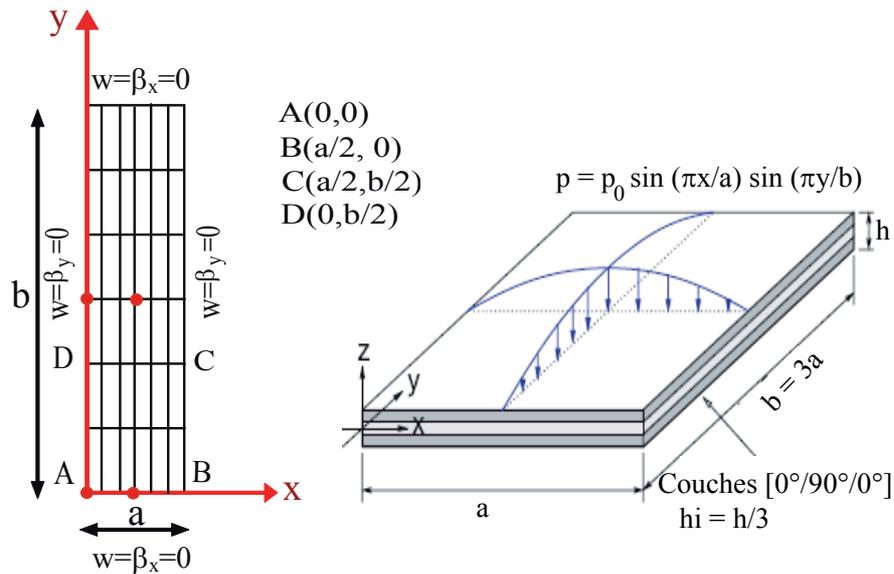


FIG. 3.13 – Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Géométrie du problème

⁷CPT : Classical Plate Theory

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHESES85

a/h	Modèles	$\bar{\sigma}_{xC} (+\frac{h}{2})$	Err. %	$\bar{\sigma}_{yC} (+\frac{h}{6})$	Err. %	$\bar{\tau}_{xyA} (+\frac{h}{2})$	Err. %
4	DMQP ml	0.611	46.403	0.128	7.563	0.0267	4.982
	DSQ	0.587	48.508	0.124	4.201	-	-
	E. O.	0.612	46.315	0.126	5.882	0.0284	1.067
	PRHSDT	1.153	1.140	0.1113	6.470	0.0283	0.711
	HSDT	1.0356	9.157	0.1028	13.613	0.0263	6.405
	FSDTZZ[52]	0.984	13.684	0.1103	7.3109	0.0266	5.338
	Elasticité	1.14		0.119		0.0281	
10	DMQP ml	0.624	13.931	0.0435	0	0.0115	6.504
	DSQ	0.620	14.482	0.044	1.149	-	-
	E. O.	0.625	13.793	0.0421	3.218	0.0121	1.626
	PRHSDT	0.7327	1.062	0.0432	0.689	0.0123	0
	HSDT	0.6924	4.496	0.0398	8.506	0.0115	6.504
	FSDTZZ[52]	0.703	3.034	0.0417	4.1379	0.0120	2.439
	Reddy (FEM)	0.603	16.828	0.0364	16.322	0.0102	17.073
	Elasticité	0.725		0.0435		0.0123	
50	DMQP ml	0.628	0	0.0256	1.158	0.00832	0.952
	DSQ	0.623	0.796	0.026	0.386	-	-
	E. O.	0.629	0.159	0.0237	8.494	0.00848	0.952
	PRHSDT	-	-	-	-	-	-
	HSDT	-	-	-	-	-	-
	FSDTZZ[52]	0.627	0.159	0.0258	0.386	0.0084	0
	Reddy (FEM)	0.604	3.974	0.0251	3.187	0.0081	0
	Elasticité	0.628		0.0259		0.0084	
100	DMQP ml	0.626	0.320	0.025	1.185	0.00822	0.9638
	DSQ	-	-	-	-	-	-
	E. O.	0.628	0.641	0.0231	8.695	0.00837	0.8433
	PRHSDT	0.6383	2.291	0.0259	2.371	0.0083	0
	HSDT	0.624	0	0.0253	0	0.0083	0
	FSDTZZ[52]	0.624	0	0.0253	0	0.0083	0
	Reddy (FEM)	0.603	3.365	0.0253	0.395	0.0080	3.6145
	Elasticité	0.624		0.0253		0.0083	0
CPT		0.623		0.0252		0.0083	

TAB. 3.13 – Plaque rectangulaire ($b/a = 3$) composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) de même épaisseur simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats des contraintes planes maximales « cas-1 »

a/h	Modèles (6x6)	$\bar{\tau}_{xzD}(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{yzB}(0)$	Err. %	\bar{w}_C	Err. %
4	DMQP ml	0.435	12.403	0.0385	15.269	3.222	14.255
	DSQ	0.429	10.852	0.048	43.712	3.146	11.560
	E. O.	0.431	11.369	0.0391	17.065	3.58	26.950
	PRHSDT	0.3928	1.498	0.0296	11.377	2.748	2.553
	HSDT	0.2724	29.612	0.0348	4.191	2.641	6.347
	Elasticité	0.387		0.0334		2.82	
10	DMQP ml	0.440	4.761	0.0158	3.947	0.943	2.611
	DSQ	0.433	3.095	0.0160	5.263	0.928	0.979
	E. O.	0.436	3.809	0.0160	5.263	1	8.813
	PRHSDT	0.4553	8.404	0.0149	1.973	0.9196	0.065
	HSDT	0.2859	31.928	0.0170	11.842	0.8622	6.180
	Elasticité	0.420		0.0152		0.919	
50	DMQP ml	0.44	0.227	0.010	9.091	0.520	0
	DSQ	0.434	1.138	0.008	27.272	0.518	0.518
	E. O.	0.437	0.455	0.011	0	0.524	0.524
	PRHSDT	-	-	-	-	-	-
	HSDT	-	-	-	-	-	-
	Elasticité	0.439		0.011		0.520	
100	DMQP ml	0.436	0.683	0.0425		0.508	0
	DSQ	-	-	-		-	-
	E. O.	0.437	0.455	0.0108	0	0.509	0.196
	PRHSDT	0.4696	6.970	0.111		0.5078	0.039
	HSDT	0.2886	34.259	0.0129	19.444	0.507	0.197
	Elasticité	0.439		0.0108		0.508	
CPT		0.44		0.0108		0.503	

TAB. 3.14 – Plaque rectangulaire ($b/a = 3$) composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) de même épaisseur simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT « cas-1 »

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHESES87

a/h	Modèle (6x6)	$\bar{\sigma}_{xC} (\mp \frac{h}{2})$	Err. %	$\bar{\sigma}_{yC} (\mp \frac{h}{6})$	Err. %	$\bar{\tau}_{xyA} (\mp \frac{h}{2})$	Err. %
4	DMQP ml	∓ 0.391	48.211	∓ 0.613	10.252	± 0.0439	13.069
	E. O.	∓ 0.391	48.211	∓ 0.572	2.877	± 0.0448	11.287
	Elasticité	-0.755		-0.556		0.0505	
		0.801		0.534		-0.0511	
10	DMQP ml	∓ 0.502	14.915	∓ 0.293	1.736	± 0.0271	6.228
	E. O.	∓ 0.500	15.254	∓ 0.279	3.125	± 0.0280	3.114
	HQ4	∓ 0.529	10.338	∓ 0.1827	36.563	± 0.0260	10.035
	ED1	-0.5096	13.627	-0.2376	17.500	0.0055	80.968
		0.5113	13.338	0.2382	16.421	-0.0055	80.968
	EDZ1	-0.5625	4.661	-0.2757	4.271	0.0076	73.702
		0.5642	4.373	0.2762	3.087	-0.0076	73.702
	EMC1	-0.5090	13.728	-0.2406	16.458	0.0051	82.353
		0.5106	13.457	0.2411	15.404	-0.0051	82.353
	EMZC1	-0.5658	4.102	-0.2741	4.826	0.0077	73.356
		0.5674	3.831	0.2747	3.614	-0.0077	73.356
	Elasticité	-0.5900		-0.288		0.0289	
0.5900			0.285		-0.0289		
50	DMQP ml	∓ 0.540	0.185	∓ 0.184	0.541	± 0.0214	8.547
	E. O.	∓ 0.541	0	∓ 0.164	11.351	± 0.0233	0.427
	Elasticité	∓ 0.541		∓ 0.185		± 0.0234	
100	DMQP ml	∓ 0.542	0.556	∓ 0.179	1.105	± 0.0212	0.468
	E. O.	∓ 0.542	0.556	∓ 0.167	7.735	± 0.0224	5.164
	Elasticité	∓ 0.539		∓ 0.181		± 0.0213	
CPT		∓ 0.539		∓ 0.180		± 0.0213	

TAB. 3.15 – Plaque carrée composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) “même épaisseur” simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats des contraintes planes maximales « cas-2 »

a/h	Modèles (6 x 6)	$\bar{\tau}_{xzD}(0)$	Err. %	$\bar{\tau}_{yzB}(0)$	Err. %	\bar{w}_c	Err. %
4	DMQP ml	0.3075	9.042	0.195	10.138	2.238	-
	E. O.	0.308	9.219	0.251	15.668	-	-
	Elasticité	0.282		0.217			
10	DMQP ml	0.373	4.482	0.1000	18.567	0.773	2.656
	E. O.	0.369	3.361	0.1300	5.863	-	-
	HQ4	0.3422	4.1456	0.1085	11.645	0.6319	16.082
	ED1	0.1538	54.186	0.1117	9.039	0.6312	16.175
	EDZ1	0.3777	5.798	0.1408	14.657	0.7417	1.501
	EMC1	0.1979	44.566	0.0723	41.124	0.6449	14.356
	EMZC1	0.3986	11.653	0.1546	25.896	0.7442	1.168
	Elasticité	0.357		0.1228		0.7530	
50	DMQP ml	0.394	0.254	0.0768	8.788	0.4456	-
	E. O.	0.392	0.254	0.0843	0.118	-	-
	Elasticité	0.393		0.0842			
100	DMQP ml	0.395	0	0.0805	2.778	0.4348	-
	E. O.	0.393	0.506	0.0827	0.121	-	-
	Elasticité	0.395		0.0828			
	CPT	0.395		0.0823			

TAB. 3.16 – Plaque carrée composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) “même épaisseur” simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats du déplacement transversal et des contraintes de CT « cas-2 »

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHESES89

Paramètres	Références	$a/h = 10$			$a/h = 4$	
		8x8	12x12	Err. %	8x8	12x12
\bar{w}_C	DMQP $_{ml}$	1.18	1.18	2.244	3.3618	3.35
	PRHSDT	1.1584	1.1584	0.372	3.0233	3.0238
	PHSDT	1.0902	1.0902	5.536	2.9099	2.9103
	PFSDT	1.022	1.022	11.446	2.6583	2.6587
	HSDT	-	1.0900	5.554	-	2.9091
	FSDT	-	1.0219	11.454	-	2.6596
	MQ-MLPG1		0.9465	17.988		
	TPS-MLPG1		0.9415	18.421		
	FEM-3D		1.1541			
$\bar{\sigma}_{xC}$	DMQP $_{ml}$	0.759	0.757	13.078	0.59	0.5887
	PRHSDT	0.878	0.8765	0.643	1.1801	1.1896
	PHSDT	0.8425	0.8406	3.479	0.9994	1.0086
	PFSDT	0.7755	0.7735	11.367	0.6367	0.6461
	HSDT	-	-			
	FSDT	-	0.7719	11.367		
	MQ-MLPG1		0.7660	12.045		
	TPS-MLPG1		0.7630	12.389		
	FEM-3D		0.8709			
$\bar{\tau}_{xzD}$	DMQP $_{ml}$	0.678	0.693	10	0.58	0.595
	PRHSDT	0.6649	0.6556	4.063	0.4681	0.4628
	PHSDT	0.4549	0.4492	28.698	0.3633	0.3582
	PFSDT	0.3106	0.3093	50.904	0.2817	0.2801
	HSDT	-	-			
	FSDT	-	0.755	19.841		
	MQ-MLPG1	-	0.660	4.762		
	TPS-MLPG1	-	0.637	1.111		
	FEM-3D		0.630			

TAB. 3.17 – Plaque carrée composite à 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) “même épaisseur” simplement supportées sous chargement uniforme. Comparaison du déplacement transversal et des contraintes maximums « cas-3 »

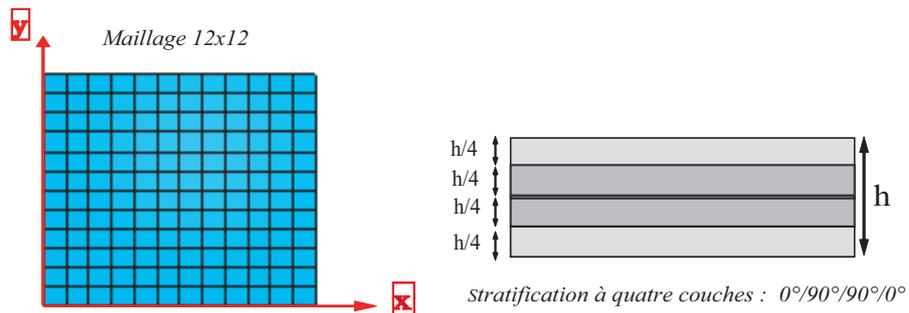
Etude d'une stratification à 4-couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)

Dans cet exemple, nous considérons une plaque rectangulaire stratifiée à quatre couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), simplement supportée sous un chargement sinusoïdal

($q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$). L'étude est réalisée pour trois élancements différents ($a/h = 4, 10$ et 100), avec différents types de maillage ($6 \times 6, 12 \times 12$ et 20×20), h étant l'épaisseur totale de la plaque. Les quatre couches ont une même épaisseur et des propriétés mécaniques identiques (figure 3.14).

Les valeurs du déplacement transversal au centre de la plaque \bar{w}_C , obtenues par notre modèle DMQP *ml*, sont comparées à celles obtenues par le modèle de Reddy basé sur la théorie du premier ordre [122], quatre modèles basés sur des théories d'ordre supérieur (PRHSdT de [138], HSdT de [120], TPS-MLPG1 (avec $K=5$) et MQ-MLPG1 (avec $K=5$) de [146]), ainsi que le modèle d'ordre supérieur de [53], proposé pour améliorer le modèle de Reddy [122]. Le tableau 3.18 montre assez clairement une convergence vers la solution analytique pour l'ensemble des modèles :

- Pour $a/h = 20$ (plaque modérément épaisse), les résultats de notre modèle sont assez proches de la solution analytique de Pagano, comparativement aux autres modèles, l'erreur est de l'ordre de 0.0967% .
- Pour $a/h = 10$ (plaque épaisse), les deux éléments DMQP *ml* et PRHSdT donnent de très bons résultats qui s'apprécient par rapport à ceux des autres modèles.
- Pour $a/h = 4$ (plaque très épaisse), le présent modèle donne des résultats assez correctes avec une erreur de 5.07% par rapport à la solution de Pagano.



$$(E_1/E_2 = 25, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2 \text{ et } \nu_{12} = 0.25)$$

FIG. 3.14 – Plaque carrée sous chargement sinusoïdal. Données et propriétés mécaniques

Modèles	a/h					
	4		10		20	
	h = 250	Err. %	h = 100	Err. %	h = 50	Err. %
DMQP $ml(6 \times 6)$	2,0578	-5.31	0,7525	-1.278	0.5165	-0.0967
DMQP $ml(12 \times 12)$	2.0531	-5.07	0.7517	-1.171	0.5165	-0.0967
DMQP $ml(20 \times 20)$	2,0531	-5.07	0,7516	-1.157	0.5165	-0.0967
PRHSDT (20x20)	1.9059	2.46	0.7359	0.955	0.512	0.9671
HSDT (20x20)	1.8937	3.08	0.7147	3.808	0.506	2.127
FSDT (20x20)	1.71	12.487	0.6628	10.79	0.4912	4.99
TPS-MLPG1 (K = 5) [146]	1.8898	3.285	0.7225	2.759	0.5036	2.591
MQ-MLPG1 (K = 5) [146]	1.8930	3.122	0.7245	2.489	0.5063	2.069
Ferreira et al.[53]	1.8864	3.459	0.5070	31.763	0.4365	15.571
Elastcité [106]	1.954		0.743		0.517	

TAB. 3.18 – Flexion centrale d'une plaque rectangulaire sous chargement sinusoïdal : $\bar{w} = \frac{100E_2h^3}{q_0a^4}w_c$

Etude d'une plaque carrée sandwich à 3-couches

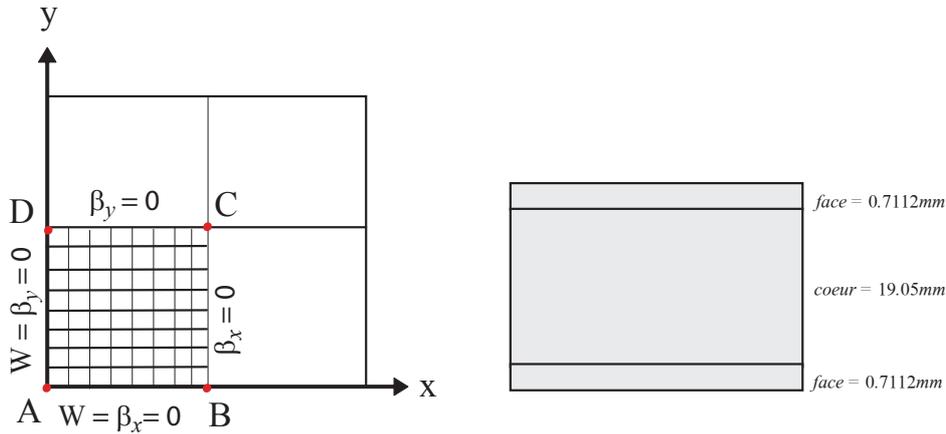
Il s'agit d'une plaque carrée sandwich ($\frac{b}{a} = 1$, $a = 0,254$) (face/cœur/face) simplement supportée et soumise à une charge uniformément répartie $q = 6,895 \text{ kPa}$. Nous avons pris une valeur de l'épaisseur totale h de la plaque, tel que : ($\frac{L}{h} = 12,41$), celle de la face supérieure ou inférieure est égale à $0,7112 \text{ mm}$. La plaque est analysée par le présent modèle, en utilisant un maillage (8 x 8).

Deux types de matériaux (Fig. 3.15) ont été étudiés. Les tableaux 3.19 et 3.20 présentent les résultats de la flèche w_C et les contraintes de CT, obtenus par notre modèle et comparés à ceux proposés par [139] (modèle de premier ordre FSDT et d'ordre supérieur HSDT et PRHSDT) et Khatua et Cheung [74]. L'ensemble des résultats approchés et comparés aux solutions de référence obtenues respectivement par Plantema [115] pour le matériau 1 et Azar [16] pour le matériau 2.

- Les valeurs du déplacement transversal w_C obtenues par notre modèle sont en bon accord avec les solutions analytiques, pour les deux types de matériaux. Elles le sont d'avantage pour le matériau 2.
- Les contraintes de CT τ_{xz} et τ_{yz} pour différentes valeurs du facteur k_i de correction du CT :
 - ($k_1 = k_2 = \frac{5}{6}$) : Les contraintes de CT approchées sont en accord avec celles données par les modèles FSDT et HSDT, pour les deux matériaux ;
 - ($k_1 = k_2 = 0,0938$) (Cas 1) : Les contraintes de CT approchées sont

- proches de celles obtenues par le modèle PRHSDT ;
- $\left(\begin{array}{l} k_1 = 2.31 \times 10^{-05} \\ k_2 = 9.23 \times 10^{-06} \end{array} \right)$ (Cas 2) : Les contraintes de CT approchées sont également en bon accord avec la solution approchée par le modèle PRHSDT.

Pour les deux matériaux étudiés dans cette section, nous remarquons que les valeurs des contraintes de CT obtenues par notre modèle DMQPML, en utilisant nos propres valeurs des facteurs de correction k_i , et par le modèle d'ordre supérieur PRHSDT présentent quelques différences par rapport à celles obtenues par les modèles PFSDT et PHSDT. Ceci est prévisible, puisque les rigidités de cisaillement transverse des faces et du cœur sont très différentes. Dans ces deux cas, la théorie associée à une seule couche homogénéisée de plaque, avec les modèles de premier ordre FSDT et d'ordre supérieur HSDT, n'est pas capable de prédire correctement les contraintes de CT entre les couches et de satisfaire les conditions de continuité de ces contraintes aux interfaces.



Géométrie	$\left(\frac{b}{a} = 1, a = 0,254 \right) ; A (0,0) ; B \left(\frac{a}{2}, 0 \right) ; C \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) ; D \left(0, \frac{b}{2} \right)$	
Matériaux	Face en MPa	Cœur en MPa
Cas 1	$E_x = E_y = 68950$ $\nu = \nu_{xy} = 0.3$ $G_{xy} = 26519$	$E_x = E_y = 6.895E - 10$ $\nu_{xy} = 0.3; G_{xy} = 2.652E - 10$ $G_{xz} = G_{yz} = 206.85$
Cas 2	$E_x = 68950 ; E_y = 27580$ $\nu_{xy} = 0.3$ $G_{xy} = 12928.125$ $G_{xz} = G_{yz} = 10^4 G_{xy}$	$E_x = E_y = 6.895E - 10$ $\nu_{xy} = 0.3$ $G_{xy} = 2.652E - 10$ $G_{xz} = 206.85 ; G_{yz} = 82.74$

FIG. 3.15 – Plaque carrée sandwich 3-couches simplement supportée sous chargement uniforme. Données du problème

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHESES93

Matériau	Modèles	$W_C \times 10^{-4}$	Erreur %
Cas 1	DMQP <i>ml</i>	18.88	0.532
	PRHSDT	18.791	0.0586
	Khatua	18.329	2.4015
	PHSDT	17.323	7.7583
	PFSDT	12.019	36.001
	Sol. analytique [115]	18.780	
Cas 2	DMQP <i>ml</i>	31.130	0.0321
	PRHSDT	31.013	0.4078
	Khatua	30.226	2.9351
	PHSDT	19.863	36.2138
	PFSDT	19.837	36.2974
	Sol. analytique [16]	31.140	

TAB. 3.19 – Plaque carrée sandwich ($f/c/f$). Résultats de la flèche au centre de la plaque

Matériau	Modèles	$\tau_{xzD} \times 10^{-3}$	$\tau_{yzB} \times 10^{-3}$
Cas 1	DMQP <i>ml</i> ($k_1 = k_2 = \frac{5}{6}$)	210	211
	DMQP <i>ml</i> ($k_1 = 0.0938$ $k_2 = 0.0938$)	25.1	25.2
	PRHSDT	23.2905	23.2905
	PHSDT	469.285	3.66112
		3.66112	469.285
	PFSDT	364.153	2.84064
		2.84064	364.153
Cas 2	DMQP <i>ml</i> ($k_1 = k_2 = \frac{5}{6}$)	3720	5890
	DMQP <i>ml</i> ($k_1 = 2, 31 \times 10^{-05}$ $k_2 = 9, 23 \times 10^{-06}$)	33.2	21.1
	PRHSDT	36.0182	23.5111
	PHSDT	7459.23	5173.41
		0.0138	0.00331
	PFSDT	592.77	410.603
		0.000945	0.000262

TAB. 3.20 – Plaque carrée sandwich ($f/c/f$). Résultats des contraintes de CT maximales

Plaque carrée sandwich à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal($f/c/f$)

Il s'agit d'une plaque carrée sandwich sous chargement sinusoïdal. La plaque est analysée en utilisant un maillage (8 x 8) pour deux élancements différents ($L/h = 4$ et 10). Les propriétés matérielles des faces et celles de cœur sont présentées sur la figure 3.16.

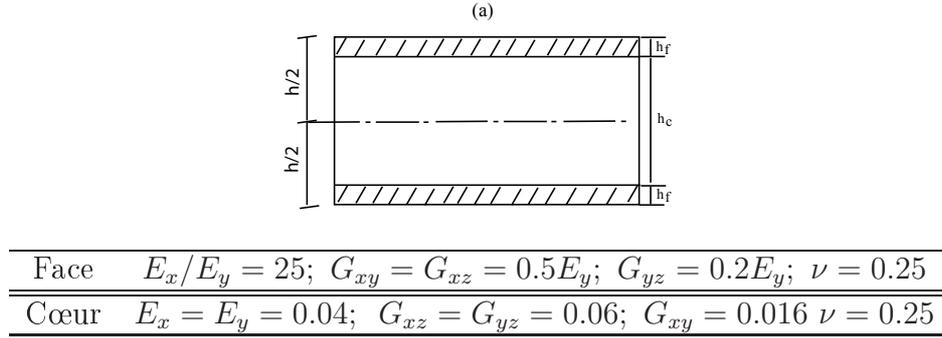


FIG. 3.16 – Plaque sandwich ($f/c/f$)

Les grandeurs suivantes, données sous forme adimensionnelle et calculées à des points d'intérêt de la plaque, sont considérées pour l'étude de comparaison :

$$\bar{w} = w_0 (100E_y h^3 / q_0 a^4) \quad (3.6)$$

$$\sigma_x^1 = \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right) h^2 / q_0 a^2 \quad (3.7)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{4h}{10} \right) h^2 / q_0 a^2 \quad (3.8)$$

$$\sigma_y^1 = \sigma_y \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right) h^2 / q_0 a^2; \quad \sigma_y^2 = \sigma_y \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{4h}{10} \right) h^2 / q_0 a^2 \quad (3.9)$$

$$\tau_{xz}^1 = \tau_{xz} \left(0, \frac{L}{2}, 0 \right) h / q_0 a \quad (3.10)$$

$$\tau_{xz}^2 = \tau_{xz} \left(0, \frac{L}{2}, \frac{4h}{10} \right) h / q_0 a \quad (3.11)$$

$$\tau_{yz}^1 = \tau_{yz} \left(\frac{L}{2}, 0, 0 \right) h / q_0 a; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy} \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) h^2 / q_0 a^2 \quad (3.12)$$

L'épaisseur de chaque face est égale à $0.1h$ et celle du cœur à $0.8h$. Une première étude de ce problème a été faite par Pagano en 1970 [106]. Elle a été reprise par Topdar en 2003 [139] en utilisant un modèle de plaque d'ordre supérieur, baptisé PRHSDT (Present Refined Higher Shear Deformation Theory).

Les valeurs des facteurs de correction du CT que nous avons calculés pour ce test sont :

$$k_1 = 0.4220 \text{ et } k_2 = 0.7243$$

Nous avons comparé nos résultats avec une solution de référence issue de l'élasticité 3D [106] et avec ceux des modèles d'ordre supérieur PRHSDTet PHSDT [139], HOZZT [110] et d'un modèle du premier ordre PFSDT [139]. Rappelons que le modèle HOZZT [110] est un élément fini isoparamétrique à 9 nœuds et 11ddl par nœud, basé sur la théorie d'ordre supérieur ; avec une variation cubique pour les déplacements plans et quadratique pour le déplacement transversal et l'adaptation d'une fonction Zig-Zag. Les résultats sont reportés sur les tableaux 3.21 et 3.22.

Les valeurs du déplacement maximum au centre de la plaque et des contraintes de CT « τ_{xz}^1 et τ_{yz}^1 », obtenues par notre modèle DMQP ml , sont en très bon accord avec celles de l'élasticité 3D pour les deux élancements de L/h . Elles le sont d'avantage pour $L/h = 10$. Une performance globalement satisfaisante est obtenue par notre modèle, comparativement aux résultats des modèles d'ordre supérieurs utilisés pour la comparaison (Tab. 3.21).

Le tableau 3.22 montre les valeurs des contraintes planes σ_x et σ_y obtenues par l'ensemble des modèles. Les valeurs des contraintes σ_x^1 et σ_x^2 approchées par le présent modèle restent éloignées de celles de Pagano pour $L/h = 4$, elles le sont moins pour $L/h = 10$.

Sur les figures 3.17 et 3.18, nous présentons la courbe de convergence du déplacement w en fonction de L/h , vers une solution de plaques minces (CPT) et la distribution des contraintes de CT τ_{xz}^1 et τ_{yz}^1 à travers l'épaisseur pour les deux élancements $L/h = 4$ et 10 . Les contraintes τ_{xz}^1 et τ_{yz}^1 sont constantes sur les peaux, τ_{xz}^1 est linéaire dans le cœur et τ_{yz}^1 quadratique.

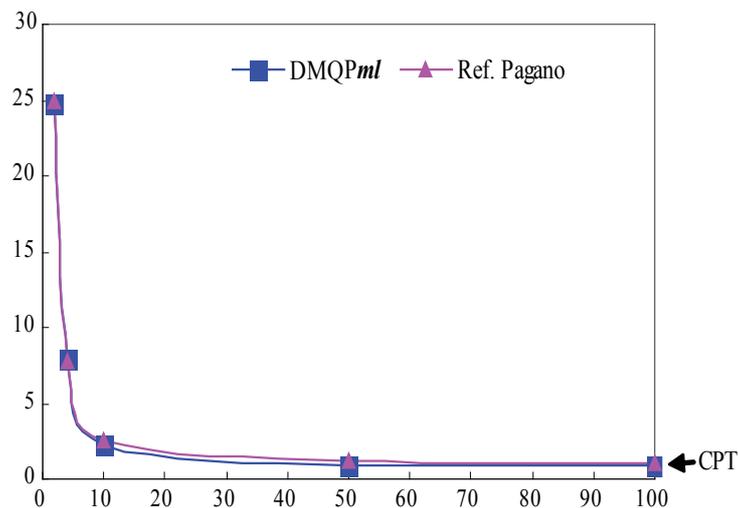
	DMQP $_{ml}$ 4nœuds 3 ddl/ nœud 243 <i>ddl</i>	DMQP $_{ml}$ 4nœuds 3 ddl/ nœud 1200 <i>ddl</i> (19x19)	HOZZT 9nœuds 11 ddl/ nœud 3564 <i>ddl</i>	PRHSDT 4nœuds 8 ddl/ nœud 648 <i>ddl</i>	PHSDT	PFSDT	Pagano
L/h = 4							
\bar{w}	7.89	7.8656	7.655	7.6042	7.0698	4.7602	7.5962
Er. %	3.8677	3.5465	0.783	2.5103	9.3615	38.9717	
σ_{xz}^1	0.2525	0.255	0.250	0.2592	0.2771	0.1259	0.239
Er. %	5.6485	6.6945	4.979	8.4519	15.941	47.3222	
σ_{xz}^2	0.2497	0.2525	-	0.2136	0.8313	1.0494	-
	0.2497	0.2525	-	0.2136	0.0998	0.1259	-
σ_{yz}^1	0.1172	0.11775	0.1151	-	-	-	0.1072
Er. %	9.375	9.8414	7.369	-	-	-	-
σ_{xy}^1	0.1269	0.1275	0.1462	-	-	-	0.1481
Er. %	14.989	13.909	1.282	-	-	-	
L/h = 10							
\bar{w}	2.22	2.217	2.2003	2.199	2.0622	1.5601	2.5
Er. %	11.2	11.32	11.988	12.04	17.512	37.596	
σ_{xz}^1	0.309	0.311	0.3146	0.3256	0.3386	0.1409	0.300
Er. %	3	3.666	4.866	8.5333	12.8667	53.033	
σ_{xz}^2	0.307	0.310	-	0.2683	1.0159	1.1745	
	0.307	0.310	-	0.2683	0.1219	0.1409	
σ_{yz}^1	0.0565	0.056	0.056	-	-	-	0.0527
Er. %	7.210	7.590	7.590	-	-	-	
σ_{xy}^1	0.0676	0.067	0.070	-	-	-	0.0717
Er. %	5.718	5.439	1.394	-	-	-	

TAB. 3.21 – Plaque carrée sandwich ($f/c/f$) simplement supportée sous chargement sinusoïdal. Déplacement central et contrainte de CT

3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHES97

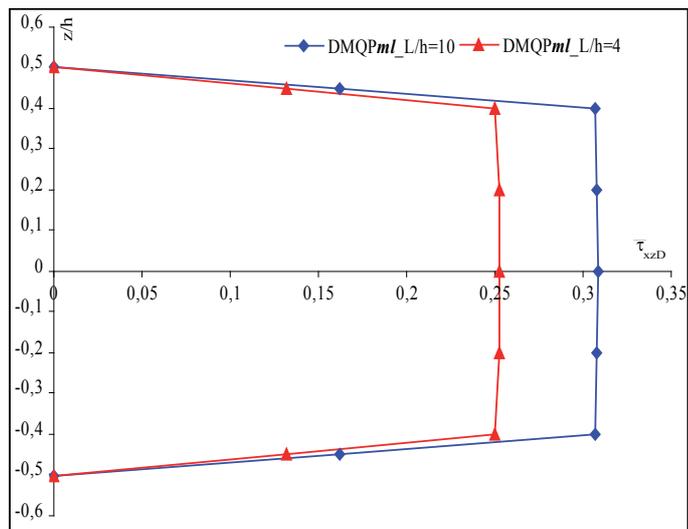
L/h		DMQP <i>ml</i> 4nœuds 3 ddl/ nœud 243 <i>ddl</i>	DMQP <i>ml</i> 4nœuds 3 ddl/ nœud 1200 <i>ddl</i> (19x19)	HOZZT 9nœuds 11 ddl/ nœud 3564 <i>ddl</i>	PRHSDT 4nœuds et 8 ddl/ nœud 648 <i>ddl</i>	PHSDT	PFSDT	Pagano
4	σ_x^1	0.7375	0.73125	1.5158	1.4539	1.3235	0.8385	1.556
	σ_x^2	0.588	0.586		0.3181	0.0089	0.6708	0.233
		0.0028	0.00286		0.012	0.0016	0.0024	
	σ_y^1	0.2343	0.235	0.2495	0.2522	0.2363	0.1565	0.2595
	σ_y^2	0.1875	0.188		0.1631	0.1600	0.1252	-
		0.008	0.008		0.0069	0.0068	0.0053	
10	σ_x^1	1	1.02	1.1438	1.1453	1.1226	1.0475	1.152
	σ_x^2	0.796	0.793		0.6193	0.6899	0.838	0.629
		0.00215	0.00215		0.0018	0.0019	0.002	
	σ_y^1	0.107	0.107	0.1082	0.1101	0.1039	0.0806	0.1099
	σ_y^2	0.0855	0.0855		0.0832	0.0796	0.0645	-
		0.00364	0.00364		0.0035	0.0034	0.0027	

TAB. 3.22 – Plaque carrée sandwich (*f/c/f*) simplement supportée sous chargement sinusoïdal. Contraintes normales

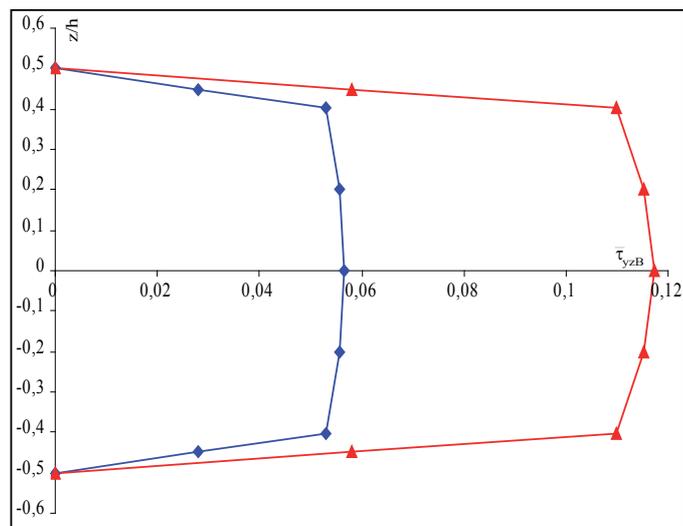


(a) Déplacement au centre de la plaque ($L/h = 10$)

FIG. 3.17 – Déplacement au centre de la plaque en fonction de L/h



(a)



(b)

FIG. 3.18 – Distribution des contraintes de CT à travers l'épaisseur z/h

Plaque carrée sandwich ($f(0/90)/c/f(90/0)$) sous chargement uniforme

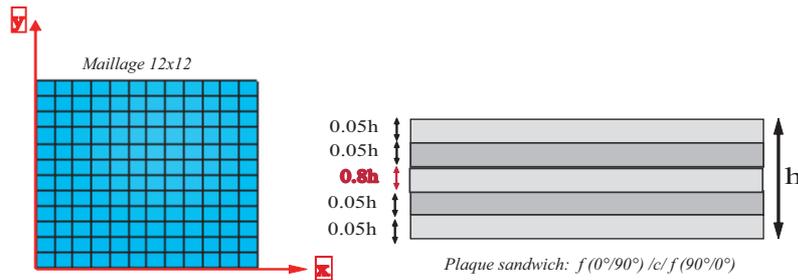
Une plaque carrée sandwich de longueur L , simplement supportée sous chargement uniforme q_0 est analysée par un maillage (12x12). L'analyse est faite pour différentes valeurs de l'épaisseur totale h de la plaque : 20, 50 et 100. L'épaisseur de la couche centrale est égale à $0.8h$, celle de chaque face est de 0.05 . La géomé-

trie et les propriétés matérielles de la plaque sont données par la figure 3.19. Dans le tableau 3.23, nous confrontons les résultats de la flèche et des contraintes planes au centre de la plaque et les contraintes de CT aux milieux des côtés, approchés par le présent modèle, à ceux donnés par le modèle d'ordre supérieur PRHSDT de [138]. L'ensemble des résultats est comparé à une solution élastique tridimensionnelle donnée par Pagano [106]. Bien que notre modèle DMQP *ml* soit du premier ordre, celui-ci permet, au même titre que le modèle d'ordre supérieur PRHSDT, un très bon encadrement de la solution 3D, avec une performance remarquable pour la contrainte τ_{xz} (Tab. 3.23). Rappelons que les expressions suivantes du déplacement transversal, des contraintes planes et de CT, données sous forme adimensionnelle, sont considérées dans l'étude de comparaison.

$$\bar{w} = \frac{100E_y(f)}{q_0hS^4}w\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right); S = \frac{L}{h} \quad (3.13)$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}\right)/q_0S^2 \quad (3.14)$$

$$\bar{\tau}_{xz}; \bar{\tau}_{yz} = \left(\tau_{xz}\left(0, \frac{L}{2}, \frac{4h}{10}\right); \tau_{yz}\left(\frac{L}{2}, 0, \frac{4h}{10}\right)\right)/q_0S \quad (3.15)$$



	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13}$
Face (GPa)	25	1	1	0.5	0.2	0.5	0.25
Cœur (GPa)	0.04	0.04	0.5	0.016	0.06	0.06	0.25
$k_1 = 0.5459$ et $k_2 = 0.5039$							

FIG. 3.19 – Plaque carrée sandwich à cinq couches sous chargement uniforme. Géométrie et données du problème

a/h	Modèles	Maillage	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$	
50	DMQP ml	(8 x 8 ; 243 ddl)	1.4544	1.68	0.362	0.386	
		(12 x 12 ; 507 ddl)	1.452	1.668	0.386	0.38	
		(19 x 19 ; 1200 ddl)	1.4512	1.664	0.368	0.358	
		Erreur %	0.0344	0.3712	1.4725	0.0559	
	PRHSDT	(8 x 8 ; 648 ddl)	1.4505	1.6723	0.3625	0.3460	
		(12 x 12 ; 1352 ddl)	1.4504	1.6704	0.373	0.3575	
		Erreur %	0.0137	0.0119	0.1338	0.0834	
		[106]	1.4507	1.6702	0.3735	0.3578	
	20	DMQP ml	(8 x 8 ; 243 ddl)	1.7162	1.655	0.359	0.3505
			(12 x 12 ; 507 ddl)	1.7112	1.6425	0.382	0.371
(19 x 19 ; 1200 ddl)			1.71	1.6425	0.3635	0.3545	
Erreur %			0.600	1.5406	1.7833	0.1689	
PRHSDT		(8 x 8 ; 648 ddl)	1.7063	1.6693	0.3613	0.3456	
		(12 x 12 ; 1352 ddl)	1.7063	1.6678	0.3718	0.3571	
		Erreur %	0.3824	0.0239	0.4593	0.5632	
		[106]	1.6998	1.6682	0.3701	0.3551	
10		DMQP ml	(8 x 8 ; 243 ddl)	2.652	1.61	0.35	0.346
			(12 x 12 ; 507 ddl)	2.639	1.6	0.373	0.369
	(19 x 19 ; 1200 ddl)		2.636	1.6	0.355	0.353	
	Erreur %		1.5251	5.4005	1.7833	0.1689	
	PRHSDT	(8 x 8 ; 648 ddl)	2.6228	1.6855	0.3609	0.3469	
		(12 x 12 ; 1352 ddl)	2.6228	1.6854	0.3713	0.3582	
		Erreur %	1.0167	0.3547	2.3147	2.6361	
		[106]	2.5964	1.6914	0.3629	0.3490	

TAB. 3.23 – Plaque carrée sandwich sous chargement uniforme. Flèche au point C des contraintes planes et des contraintes de CT maximales

3.3 Vibrations libres de structures isotropes et composites

3.3.1 Plaque carrée isotrope simplement supportée

Ce test a été initialement proposé par [85] et [119]. Il s'agit d'étudier l'influence du CT sur les fréquences propres d'une plaque carrée homogène et isotrope simplement supportée (longueur L et épaisseur h). Sur le contour du domaine, nous avons imposé : $w = \beta_s = 0$.

Les résultats sont donnés sous la forme : $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$.

Pour $L/h = 10$, nous avons analysé la variation de la valeur propre λ par rapport au mode de vibration.

Pour un élancement $L/h = 10$, les quatre premières fréquences propres calculées par notre modèle, ainsi que celles obtenues par les éléments DSQ [80] et MiSP4/ml [134] sont reportées sur le tableau 3.24 (m et n représentent le nombre d'ondes suivant x et y respectivement) et sur la figure 3.20-a. Une solution de référence 3D est proposée par [85]. Reddy [119] a proposé une solution de plaque épaisse. Ces deux solutions de référence sont utilisées pour comparaison de nos résultats.

- Les investigations ont conduit aux conclusions suivantes :
 - Nos résultats sont en bon accord avec les solutions de référence tridimensionnelles [85] et de plaque épaisse [119]. Le modèle DMQP ml donne de bons résultats dans tous les cas ;
 - Le cisaillement transversal a pour effet d'assouplir la structure et par conséquent, de baisser les fréquences propres ;
 - Quel que soit le rapport L/h , l'utilisation de maillages plus fins est nécessaire pour le calcul des modes supérieurs. Plus le mode est élevé, plus l'influence du CT est grande (0.246 % pour le premier mode et 10.6 % pour le quatrième mode) voir tableau 3.24 et figure 3.20 ;
 - Pour $L/h = 1$ (la structure est alors un cube), nous obtenons une fréquence propre avec moins de 1 % d'erreur par rapport à la solution de l'élasticité tridimensionnelle.

Nous avons étudié la fréquence fondamentale $\bar{\omega}$ en faisant varier le rapport L/h avec un maillage 6×6 . Les résultats sont reportés dans le tableau 3.25 et illustrés par la figure 3.20.

m	n	Elas. [85]	Mindlin [119]	CPT	DMQP ml 6 x 6	DMQP ml 10 x 10	DSQ 10x10	MiSP4/ ml 6x6
1	1	5.78	5.77	5.97	5.79	5.76	5.78	5.786
1	3	25.7	25.7	29.87	26.9	25.9	26.13	26.9
3	3	42.3	42.3	53.87	44.7	42.7	43.10	44.1
1	5	57.48	56.76	77.65	63.5	58.2	59.25	64

TAB. 3.24 – Plaque carrée isotrope simplement supportée ($L/h = 10$). Comparaison des 4 premières fréquences propres

$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$						
L/h	Elasticité	Mindlin	CPT	DMQP ml	DSQ	MiSP4/ ml
20	5.88	5.94	5.97	5.94	5.96	5.964
10	5.76	5.77	5.97	5.79	5.8	5.786
5	5.30	5.27	5.97	5.31	5.3	5.365
1	2.32	2.25	5.97	2.28	2.27	2.302

TAB. 3.25 – Plaque carrée isotrope simplement supportée. Influence de L/h sur la fréquence fondamentale

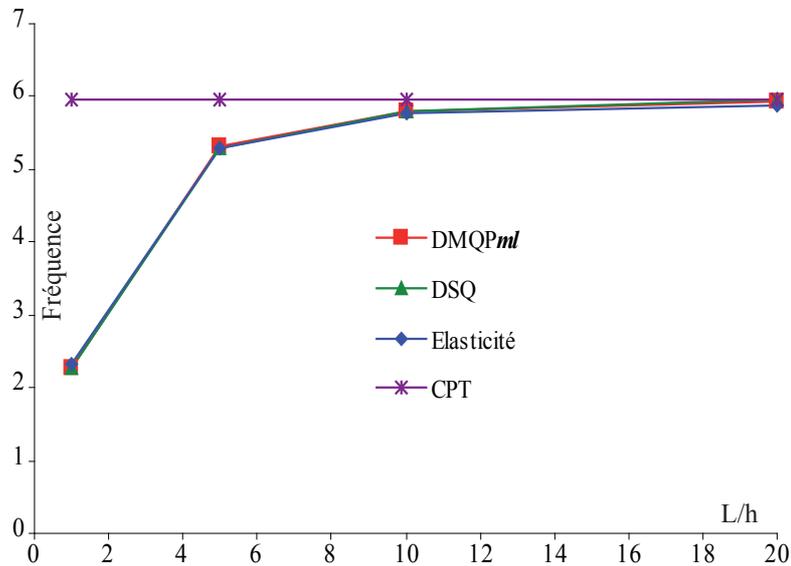


FIG. 3.20 – Vibrations libres d'une plaque carrée isotrope simplement supportée. Influence du CT sur la fréquence propre

3.3.2 Plaque carrée sandwich simplement supportée

Dans cet exemple, nous avons étudié les fréquences propres fondamentales de deux types de matériaux (isotrope et orthotrope). La structure a été étudiée dans le cas statique en section (3.2.3) (Fig. 3.11). L'analyse est faite pour un seul rapport $L/h=10$. Pour des raisons de symétrie, seul un quart de la plaque est modélisé par un maillage (6 x 6).

- Matériau isotrope : ($\nu = 0.29$, $E = 68.95 \times 10^9$, $\rho = 2832 \text{ Kg/m}^3$)

$$\bar{\omega}_f = \omega \sqrt{\frac{\rho(2) h^2}{G_{12}(2)}} : \text{fréquence propre fondamentale} \quad (3.16)$$

- Matériau orthotrope : Les caractéristiques mécaniques sont données par la figure 3.11. Dans ce cas, l'effet du CT est plus important. Nous avons remarqué ainsi que l'influence de gauchissement augmente avec le facteur de proportionnalité C entre les propriétés cœur-peaux, et il devient plus grand dans ce cas.

Les résultats calculés, comparés à ceux obtenus par DSQ [80] et MiSP4/ml [134] sont reportés dans le tableau 3.26. Dans les deux cas, nos résultats sont en bon accord avec les solutions de référence de l'élasticité 3D données par [130].

C	Elasticité [130]	DMQP ml	DSQ	MiSP4/ml
1	0.0931	0.0938	0.0936	0.09354
10	0.1986	0.200	0.2000	0.1962
50	0.3275	0.3280	0.3283	0.3123

a) Matériau isotrope

C	Elasticité [130]	DMQP ml	DSQ	MiSP4/ml
1	0.0925	0.0937	0.093	0.09294
10	0.1925	0.193	0.1922	0.1881
50	0.2995	0.301	0.3	0.284

b) Matériau orthotrope

TAB. 3.26 – Plaque carrée sandwich simplement supportée ($L/h=10$). Comparaison des fréquences propres fondamentales

3.3.3 Application aux vibrations libres d'une plaque en carton ondulé

Le carton ondulé. Aspects généraux

Le carton ondulé est une structure sandwich très utilisée par les industriels de l'emballage. Il présente une forte orthotropie, avec une ou plusieurs peaux qui lui donnent une rigidité en flexion, et une ou plusieurs ondulations intermédiaires

qui lui donnent une rigidité en cisaillement (Fig. 3.21). Sa structure globale lui confère une rigidité dans le sens transverse CD (Cross Direction) en général plus petite que la rigidité dans le sens machine MD (Machine Direction). Ces directions sont attribuées au carton lors de sa fabrication. Le sens machine correspond à la direction suivant laquelle la machine reçoit le papier de cannelure, l'ondule et le colle entre les deux peaux. Théoriquement, il peut être considéré comme un matériau composite ; la théorie de stratification peut ainsi être appliquée.

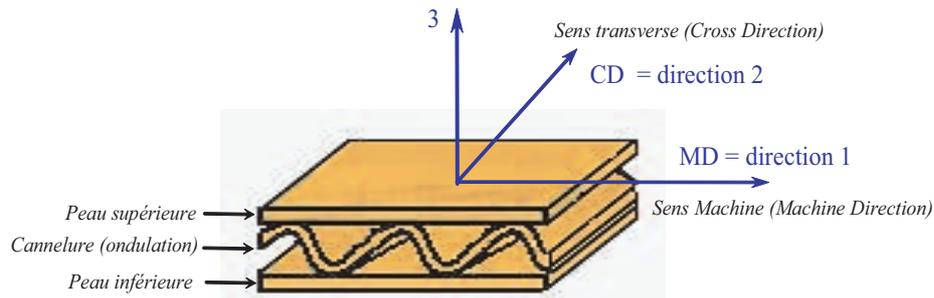


FIG. 3.21 – Structure du carton ondulé

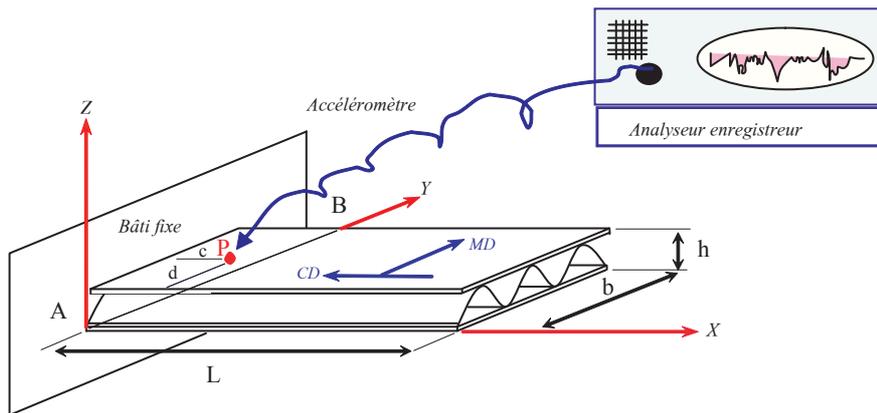
Une recherche bibliographique a conduit à la synthèse suivante : de nombreux travaux d'ordre théorique et expérimental ont été réalisés sur le carton ondulé. Ils étaient pour la plus part orientés vers la détermination de la rigidité de flexion du carton ondulé. Une synthèse assez complète sur ce sujet est faite par Luo [87]. Pour ce qui des outils de modélisation analytique et numérique appliqués à l'analyse du comportement mécanique du carton ondulé, il faudra remonter à la fin des années 70 pour voir une application des principes énergétiques [112], et à la fin des années 80 pour une application numérique utilisant la méthode des éléments finis [116]. Ces derniers ont étudié la rigidité de flexion du carton ondulé par la méthode des éléments finis basée sur un modèle élastique. Ils ont utilisé le même modèle élément fini pour prédire la force de compression d'une caisse en carton ondulé sur la face supérieure et inférieure. Nordstrand et al [100] ont développé une analyse sur le module de cisaillement transverse de plusieurs ondulations médianes, utilisant la théorie curviligne des poutres. Bronkhorst et al [25] et Nordstrand et al [101] ont développé un modèle élément fini orthotrope obéissant à une loi viscoélastique. Très peu de travaux existent sur des modèles utilisant des lois plastiques ou viscoplastiques. Gilchrist et Suhling [56] ont effectué une analyse non-linéaire du carton ondulé en utilisant la méthode des éléments finis. Ils ont eu recours à des essais expérimentaux pour caractériser le comportement non-linéaire des peaux et des ondulations. Les propriétés orthotropes mesurées du matériau ont servi pour élaborer leur modèle.

Description de l'essai

Un test de vibration libre d'une plaque rectangulaire en carton ondulé a été réalisé en 2002 en partenariat avec le CERME (Centre d'Etude et de Recherche en Matériaux et Emballages, ESIEC). Des échantillons de plaque ont été découpés sur des caisses en carton ondulé fournies par le Groupe Smurfit-Socar (Leader mondial du carton). La structure possède une seule couche (cannelure moyenne) d'épaisseur $h = 4.02 \text{ mm}$, elle est encastrée à une extrémité, l'autre étant libre. Voir figure 3.22.

Un analyseur numérique doté d'un accéléromètre fixé sur la structure au point P, nous permet d'enregistrer l'accélération en ce point en fonction du temps, après avoir effectué un essai de lâché 3.23. Le test est réalisé pour différentes valeurs de la longueur ($L = 100 ; 130 ; 170 ; 200 ; 230$ et 250 mm).

La technique d'homogénéisation, proposée par [1] et adaptée en carton ondulé, nous a permis d'obtenir les propriétés mécaniques homogénéisées de la structure globale (Fig. 3.21) à partir de celles mesurées sur les peaux et l'ondulation.



Géométrie (mm)	$L = 100, 130, 170, 200, 230$ et 250 ; $b=70, h=4.02, c=10, d=35$
Condition limite	sur AB : $U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z$
Matériau	1 cannelure moyenne de carton ondulé (type c) 1 couche orthotrope
Propriétés homogénéisées	$E_1 = E_{MD} = 863.05 \text{ MPa}$, $E_2 = E_{CD} = 545 \text{ MPa}$, $\nu_{12} = 0.27$ $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 244.26 \text{ MPa}$ et $\rho = 745.43 \times 10^{-6}$
N.B : Carton ondulé de type Test-Liner/Mi-chimique à 100% FCR (Groupe Smurfit-Socar)	

FIG. 3.22 – Vibrations libres d'une plaque rectangulaire en carton ondulé encastrée. Montage expérimental et données

Détermination des fréquences propres expérimentales

Le signal enregistré par l'analyseur numérique correspond à l'accélération du point P (Fig. 3.22). La fréquence propre est calculée à partir de la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform) appliquée à ce signal.

Sur la figure 3.24, nous présentons respectivement le signal « accélération du point P » et sa transformée de Fourier, pour une plaque de longueur $L = 200 \text{ mm}$. La distribution temporelle de l'accélération montre qu'au delà de 0.5 secondes, la structure est quasiment au repos. L'effet de l'amortissement du carton ondulé est très important : une caractéristique recherchée pour un matériau d'emballage. Le spectre de Fourier nous fournit la fréquence de l'accélération du point P, qui correspond à la première fréquence propre de la structure. Le graphe affiche une valeur de 19.46 Hz . Les pulsations propres expérimentales en fonction de la longueur de la plaque sont résumées dans le tableau 3.27 :

Longueur de la plaque (<i>en mm</i>)	100	130	150	170	200	230	250
Pulsation propre 1 ^{er} mode (<i>rad.s⁻¹</i>)	354.13	236.07	182.75	155.99	122.27	96.96	75.86

TAB. 3.27 – Vibrations libres d'une plaque en carton ondulé. Pulsations propres expérimentales en fonction de la longueur de la plaque

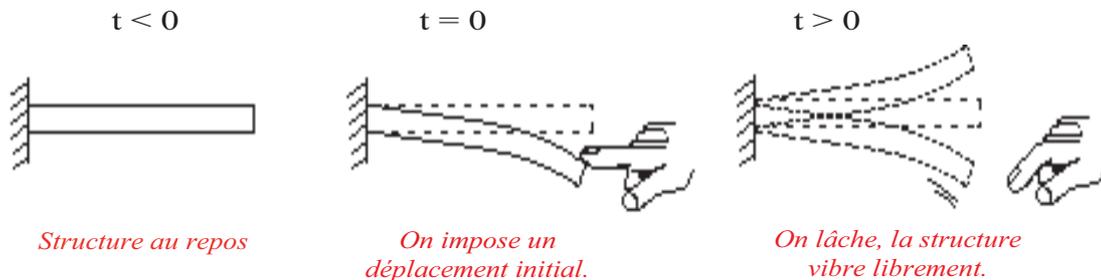
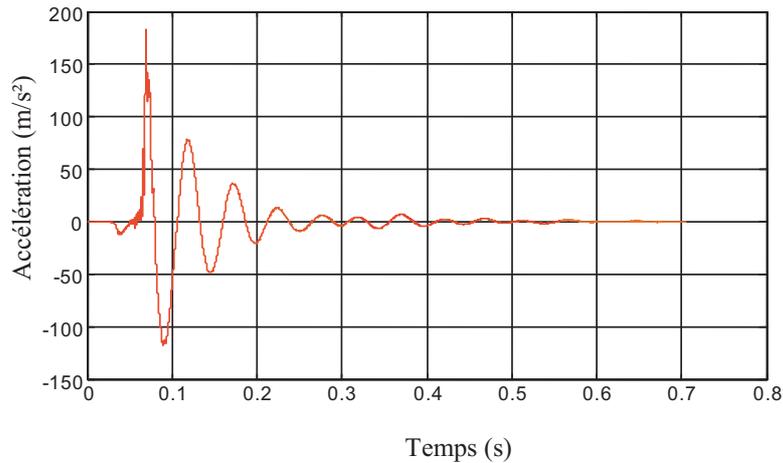
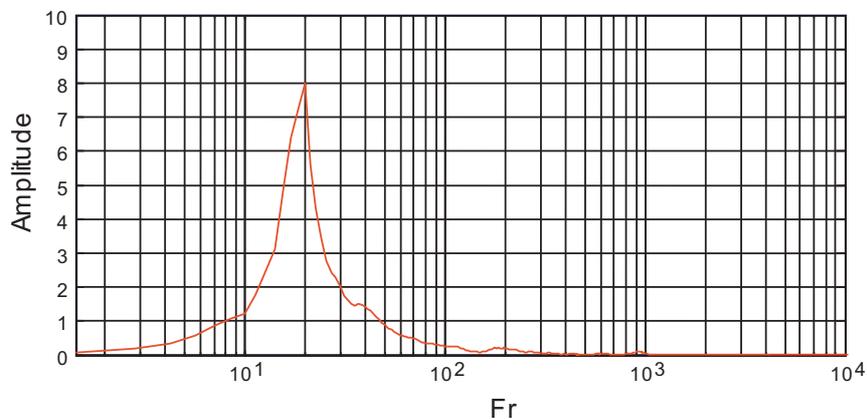


FIG. 3.23 – Essai du lâché



(a) Accélération du point P



(b) FFT de l'accélération du point P

FIG. 3.24 – Plaque de longueur $L = 200\text{mm}$. Accélération et amplitude enregistrées du signal

Validation numérique

Dans cette section, nous présentons les résultats DMQP *ml*, par l'utilisation d'un maillage (12×2) . Le tableau 3.28 présente les résultats numériques des fréquences propres obtenues avec notre modèle DMQP *ml*, ainsi que ceux donnés par l'élément DMTS [11]. Ils sont comparés aux résultats expérimentaux. Pour une meilleure visualisation, nous avons représenté graphiquement les résultats obtenus par la figure 3.25. Nous obtenons globalement une bonne corrélation entre les fréquences calculées et les fréquences expérimentales. La différence entre ces résultats peut être justifiée d'une part, par une remarque faite par Verchery à propos de la loi de comportement et des phénomènes de vibrations qui peuvent notablement modifier les modules d'Young : l'utilisation des modules déterminés statiquement pour un calcul dynamique peut produire une mauvaise évaluation

des fréquences propres, et d'autres part, nous rappelons que le comportement du carton ondulé est sensiblement lié aux variations de la température et de l'humidité de l'atmosphère ambiante. Ces deux paramètres n'ont pas été pris en compte dans cette étude. Ces résultats encourageants nous confortent dans l'idée de considérer une structure en carton ondulé comme un matériau orthotrope, avec des propriétés homogénéisées à partir de celles mesurées sur les peaux et l'ondulation.

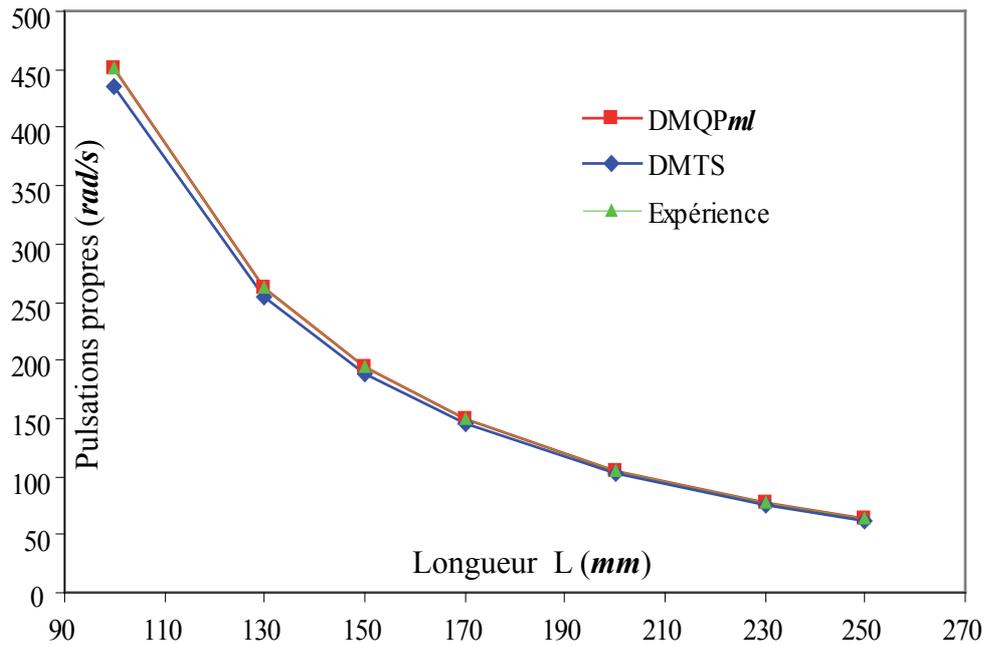


FIG. 3.25 – Pulsations propres en fonction de la longueur de la plaque. Comparaison avec l'expérience

Longueur de la plaque (mm)	L/h	Pulsation propre du 1er mode ($rad.s^{-1}$)		
		Expérience	DMTS	DMQPml
100	24.9	354.13	443.04	458.3994
130	32.3	236.06	261.96	269.9629
150	37.3	182.74	196.63	202.1929
170	42.3	155.99	152.98	157.0127
200	49.8	122.27	110.77	113.0708
230	57.2	96.91	83.43	85.2672
250	62.2	75.86	70.58	72.0597

TAB. 3.28 – Résultats numériques des pulsations propres. Comparaison avec l'expérience

Chapitre 4

Formulation théorique des modèles de coques DDM⁸ isotropes et composites multicouches

4.1 Présentation générale du modèle DDM

4.1.1 Description géométrique de l'élément de coque DMQS

La géométrie de l'élément de coque courbe isoparamétrique, que nous appelons DMQS (Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells), est définie par une surface moyenne A (avec ou sans gauchissement) et sa normale \vec{n} (Fig. 4.1). Elle est limitée par deux surfaces courbes supérieure et inférieure situées à égale distance $+\frac{h}{2}$ et $-\frac{h}{2}$ de la surface A . L'épaisseur h , considérée dans notre étude comme étant constante par élément, reste petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques d'une coque (Longueur L , largeur l , rayon de courbure minimum R_{min}). L'élément de coque DMQS possède 4 nœuds et 6 *ddl* par nœud : les trois déplacements U_i, V_i, W_i selon les axes globaux X, Y, Z et les trois rotations $\theta_{Xi}, \theta_{Yi}, \theta_{Zi}$ autour des axes globaux X, Y, Z . La figure 4.2 représente la géométrie et la cinématique d'un point quelconque q de la coque.

⁸Displacement Discrete Mindlin

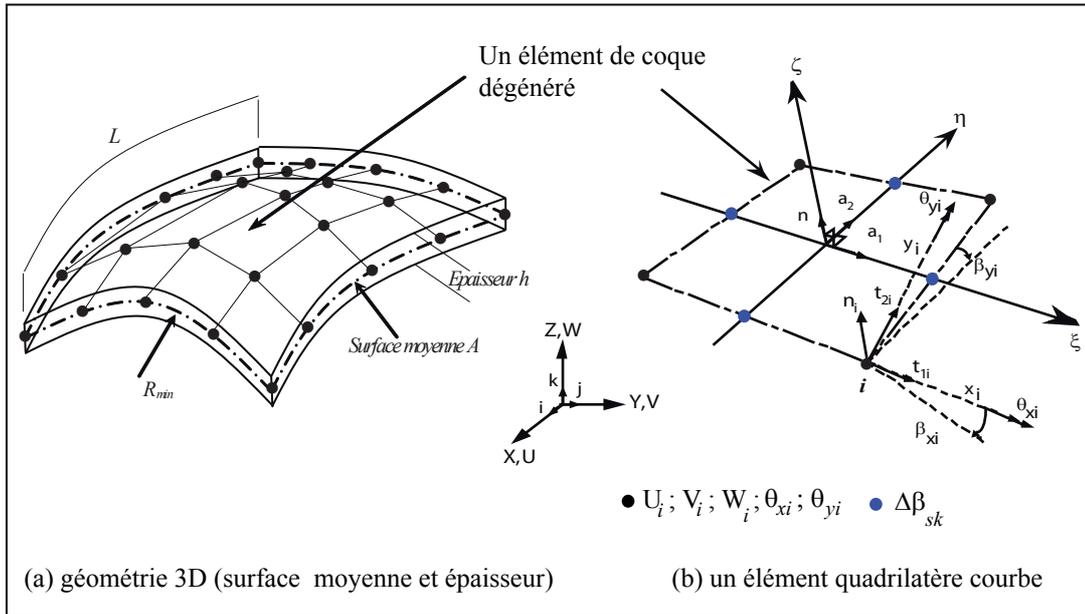


FIG. 4.1 – Élément de coque courbe isotrope à 4 nœuds DMQS

4.1.2 Représentation du champ de déplacements

Le champ de déplacements d'un point quelconque q d'une coque (Fig. 4.2) est défini en considérant l'hypothèse des sections droites dite de Hencky-Mindlin-Reissner. Celle-ci permet de retenir une mesure des déformations de CT. Nous écrivons :

$$\{u_q\} = \sum_{i=1}^4 N_i \{u_{pi}\} + \zeta \frac{h}{2} \{\beta\} \quad (4.1)$$

$$\{u_{pi}\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} \text{ et } \{\beta\} = \sum_{i=1}^4 N_i \{-\theta_{xi} \{t_{2i}\} + \theta_{yi} \{t_{1i}\}\} + \sum_{k=5}^8 P_k \Delta \beta_{sk} \{t_{sk}\} \quad (4.2)$$

Les déplacements et les rotations sont définis par une interpolation quadratique incomplète, faisant apparaître cinq ddl $\{U_i, V_i, W_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}$ aux quatre nœuds sommets de l'élément et quatre accroissements de rotation $\Delta \beta_{sk}$ aux nœuds milieux des côtés. Il s'agit d'une première version de l'élément fini de coque que nous appelons DMQS β . Les fonctions d'interpolation bilinéaires $\{N_i\}$ et quadratiques $\{P_k\}$ sont représentées dans le tableau suivant :

$\{N_i\}$	$\{P_k\}$
$4N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$	$2P_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$4N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)$	$2P_6 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$4N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)$	$2P_7 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$4N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)$	$2P_8 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)$

TAB. 4.1 – Fonctions d'interpolation bi-linéaires et quadratiques incomplètes de l'élément initial DMQS β

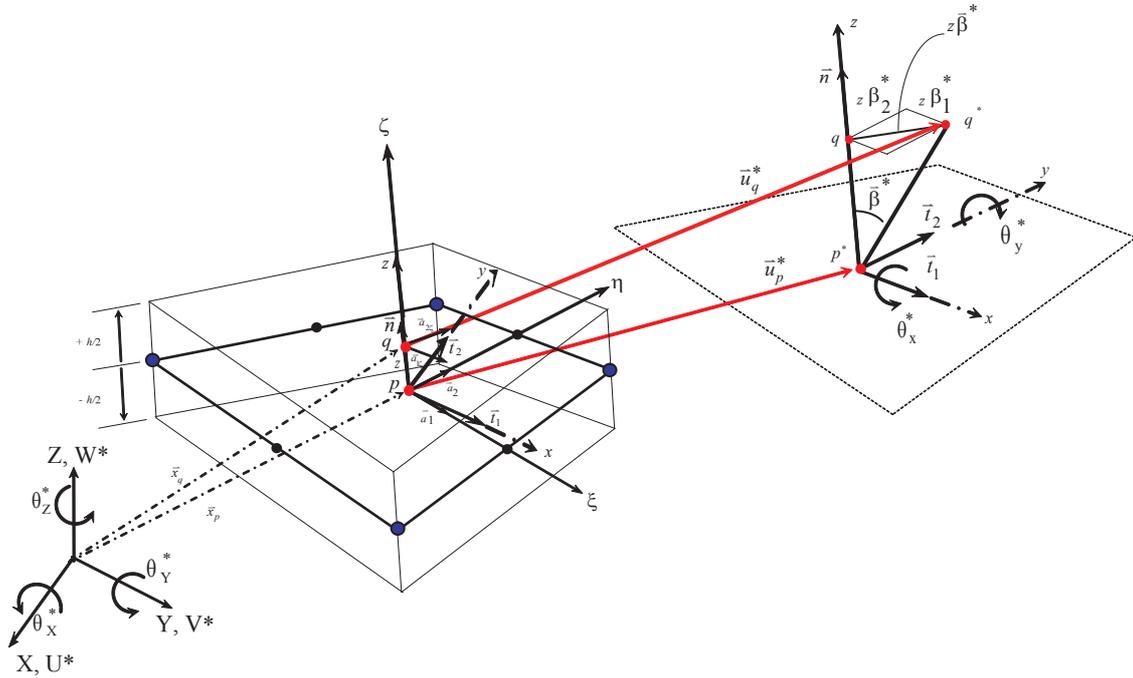


FIG. 4.2 – Cinématique virtuelle d'une fibre quelconque pq

U_i, V_i, W_i : Déplacements du nœud i dans le repère global d'axes $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$;
 θ_{xi}, θ_{yi} : Rotations de la normale au nœud i autour des axes tangents \vec{x} et \vec{y} ;

$\Delta\beta_{sk}$: Rotations tangentielles de bord associées à la représentation quadratique de β_x et β_y sur chacun des côtés.

L'élément DMQS β possède 8 nœuds et 24 degrés de liberté : 3 ddl globaux et deux ddl locaux sur chacun des quatre nœuds sommets et un accroissement de ddl local sur chacun des nœuds milieu des côtés. La formulation de la matrice de rigidité élémentaire est développée dans un premier temps en conservant le caractère local des rotations θ_x et θ_y , avec une élimination des accroissements de rotation $\Delta\beta_{sk}$ par introduction d'hypothèses discrètes de Mindlin. Nous établirons par la suite, la matrice globale complète tenant compte de la transformation

des deux rotations locales en trois rotations globales autour des axes $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$. L'élément de coque final, baptisé DMQS, aura quatre nœuds et six *ddl* par nœud : $U, V, W, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$.

4.1.3 Approximation du champ de déformations

Les expressions des formulations variationnelles de DMQS sont assez complexes à mettre en oeuvre. Pour cela, une définition cohérente et représentative de l'ensemble des déformations, qui consiste à négliger les courbures moyenne et gaussienne sans affecter la précision des résultats, a été retenue [89]. Il s'agit de définir une approximation linéaire en z pour les déformations de membrane-flexion et une approximation constante en z pour les déformations de CT :

$$\{\varepsilon_s\} = \{\varepsilon_0\} + z \{\varepsilon_1\} \quad (4.3)$$

$$\{\gamma_s\} = \{\gamma_0\} \quad (4.4)$$

$\langle \varepsilon_0 \rangle = \langle e_x, e_y, e_{xy} \rangle$: déformations de la membrane ;

$\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_{x1}, \varepsilon_{y1}, \gamma_{xy1} \rangle$: déformations de flexion avec prise en compte du couplage entre les effets de membrane et de flexion ;

$\langle \gamma_0 \rangle = \langle \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle$: déformations de CT (constantes en z).

4.2 Formulation théorique du modèle DMQS pour les coques gauchies isotropes. Le modèle DMQSiSo

4.2.1 Déformations de membrane

L'interpolation du champ de déplacements (4.1) permet d'écrire les équations suivantes reliant les déformations réelles et virtuelles de membrane $\{\varepsilon_0\}$ et $\langle \varepsilon_0^* \rangle$ respectivement aux déplacements nodaux $\{U_n\}$ et $\langle U_n^* \rangle$:

$$\{\varepsilon_0\} = [B_0] \{U_n\} \quad ; \quad \langle \varepsilon_0^* \rangle = \langle U_n^* \rangle [B_0]^T \quad (4.5)$$

$$\langle U_n \rangle = \langle U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \dots i = 1 \text{ à } 4 \rangle \quad (4.6)$$

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & & \\ \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 & \dots i = 1 \text{ à } 4 & \\ \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$N_{i,x} = C_{11}N_{i,\xi} + C_{21}N_{i,\eta} \quad \text{et} \quad N_{i,y} = C_{12}N_{i,\xi} + C_{22}N_{i,\eta} \quad (4.8)$$

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ sont les termes du tenseur $[C_0]$ (Equation A.27). La matrice $[B_0]$ est de dimension (3×20) , elle fait intervenir uniquement les variables nodales de déplacements.

4.2.2 Déformations de flexion (courbures)

Les vecteurs de déformations de flexion réelles et virtuelles $\{\varepsilon_1\}$ et $\langle \varepsilon_1^* \rangle$ sont définis comme pour la membrane, à partir de la relation (4.1) en fonction des déplacements nodaux $\{U_n\}$ (respectivement $\langle U_n^* \rangle$) et des rotations tangentielles $\{\Delta\beta_{sk}\}$ (respectivement $\langle \Delta\beta_{sk}^* \rangle$) :

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1] \{U_n\} + [B_{1\Delta\beta}] \{\Delta\beta_{sk}\} ; \langle \varepsilon_1^* \rangle = \langle U_n^* \rangle [B_1]^T + \langle \Delta\beta_{sk}^* \rangle [B_{1\Delta\beta}]^T \quad (4.9)$$

$$[B_1] = \left[\begin{array}{ccc} \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,x} & \\ \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,y} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,y} & \dots i = 1 \text{ à } 4 \\ \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} [\langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x}] & \end{array} \right] \quad (4.10)$$

$$\bar{N}_{i,x} = b_{c11}N_{i,\xi} + b_{c21}N_{i,\eta} ; \bar{N}_{i,y} = b_{c12}N_{i,\xi} + b_{c22}N_{i,\eta} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{t}_{1i} \rangle &= \langle -\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{1i} \rangle \\ \langle \bar{t}_{2i} \rangle &= \langle -\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{2i} \quad \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{1i} \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$[B_{1\Delta\beta}] = \left[\begin{array}{ccc} (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,x} & & \\ (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,y} & & \dots k = 5 \text{ à } 8 \\ (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,y} + (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_{sk})P_{k,x} & & \end{array} \right] \quad (4.13)$$

$$P_{k,x} = C_{11}P_{k,\xi} + C_{21}P_{k,\eta} \text{ et } P_{k,y} = C_{12}P_{k,\xi} + C_{22}P_{k,\eta} \quad (4.14)$$

$b_{c11}, b_{c12}, b_{c21}, b_{c22}$ sont les termes de la matrice $[b_c]$ (Equation A.28). Cette dernière prend en considération le gauchissement des coques.

La matrice $[B_1]$ est de dimension (3×20) et fait intervenir toutes les variables nodales. La matrice $[B_{1\Delta\beta}]$ est de dimension (3×4) et fait intervenir les rotations $\{\Delta\beta_{sk}\}$ aux milieux des côtés. Ces dernières seront éliminées en utilisant deux hypothèses discrètes modifiées de Mindlin que nous présentons par la suite.

4.2.3 Déformations de Cisaillement Transversal

Dans la plupart des modèles variationnels, qu'ils soient mixtes ou en déplacement, le verrouillage en CT provient essentiellement de la définition numérique des déformations de CT $\{\gamma_0\}$.

Ce problème numérique est la conséquence d'une définition de $\{\gamma_0\}$ à partir

de l'approximation quadratique incomplète du champ des déplacements utilisée, pour évaluer les déformations de CT (4.1). Une intégration réduite de la matrice de rigidité correspondante de CT contribue, certes, à l'élimination du verrouillage, mais avec pour conséquences :

- L'apparition de modes parasites (faux mécanismes d'énergie nulle) qui peuvent ne pas disparaître même après assemblage de plusieurs éléments ;
- Une sensibilité des éléments finis aux distorsions géométriques.

Pour éliminer le verrouillage en CT et obtenir une définition cohérente des déformations de CT, nous avons retenu l'approche des déformations de substitution (méthode ANS : *Assumed Natural Strains*) qui fût proposée par [18] et [19]. Cette technique consiste à introduire une hypothèse de Mindlin sous forme discrète, par écriture des déformations naturelles ou covariantes $\{\gamma_{\xi\zeta}\}$ et $\{\gamma_{\eta\zeta}\}$ en fonction des déformations covariantes de bord $\{\gamma_{\zeta k}\}$ (calculées aux milieux des côtés élémentaires) :

$$\{\gamma_0\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = [C_0]^T \{\gamma_\xi\} \quad (4.15)$$

$$\{\gamma_\xi\} = [A] \{\gamma_{\xi k}\} ; [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \eta & 0 & 1 + \eta & 0 \\ 0 & 1 + \xi & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\langle \gamma_{\xi k} \rangle = \langle \gamma_{\xi\zeta 5} \quad \gamma_{\eta\zeta 6} \quad \gamma_{\xi\zeta 7} \quad \gamma_{\eta\zeta 8} \rangle \quad (4.17)$$

$\gamma_{\xi\zeta 5}$, $\gamma_{\eta\zeta 6}$, $\gamma_{\xi\zeta 7}$ et $\gamma_{\eta\zeta 8}$ sont les déformations covariantes de cisaillement, définies sur les quatre côtés (5, 6, 7 et 8) respectivement (Fig. 4.3).

Elles sont reliées aux déformations tangentielles de bord γ_{s5} , γ_{s6} , γ_{s7} et γ_{s8} par la relation :

$$\gamma_{\xi\zeta 5} = L_5 \gamma_{s5} / 2, \quad \gamma_{\eta\zeta 6} = L_6 \gamma_{s6} / 2, \quad \gamma_{\xi\zeta 7} = -L_7 \gamma_{s7} / 2, \quad \gamma_{\eta\zeta 8} = -L_8 \gamma_{s8} / 2 \quad (4.18)$$

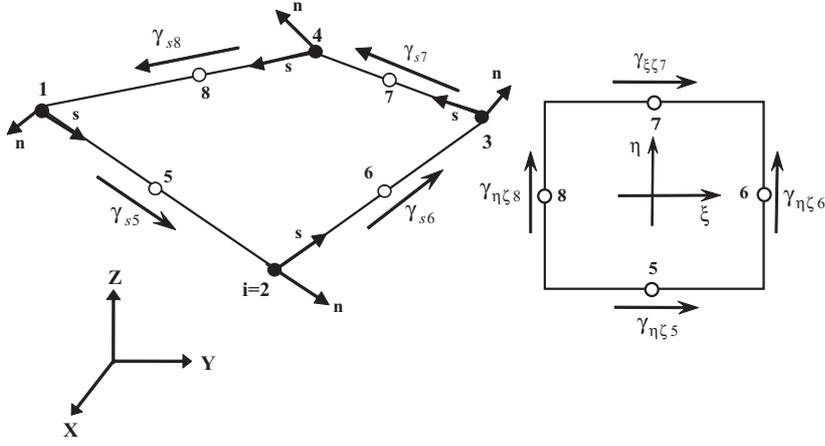


FIG. 4.3 – Déformations naturelles de CT projetées sur les côtés

Ces dernières sont choisies constantes sur les côtés de l'élément. L'expression finale du vecteur des déformations de CT $\{\gamma_0\}$ (4.15) s'écrit :

$$\{\gamma_0\} = [C_0]^T [A] \{\gamma_{sk}\} \quad (4.19)$$

avec

$$\langle \gamma_{sk} \rangle = \langle \gamma_{s5} \ \gamma_{s6} \ \gamma_{s7} \ \gamma_{s8} \rangle = \left\langle \frac{2}{L_5} \gamma_{\xi\zeta 5} \quad \frac{2}{L_6} \gamma_{\eta\zeta 6} \quad -\frac{2}{L_7} \gamma_{\xi\zeta 7} \quad -\frac{2}{L_8} \gamma_{\eta\zeta 8} \right\rangle \quad (4.20)$$

Hypothèses discrètes de Mindlin

La formulation du modèle « élément fini » fait apparaître jusqu'à présent huit nœuds au total (4 nœuds sommets et 4 nœuds milieux des côtés). Nous proposons de simplifier la description géométrique de l'élément en éliminant les nœuds aux milieux des côtés. Nous introduisons pour cela deux hypothèses de Mindlin sous une forme discrète sur le côté k de l'élément :

► La première hypothèse est cinématique :

Elle fait intervenir une relation entre la déformation de CT de bord et les variables cinématiques correspondantes. Elle ne contribue pas directement à l'élimination des rotations $\{\Delta\beta_{sk}\}$ mais elle fait apparaître le déplacement transversal aux nœuds sommets. Elle s'écrit :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sk} - \vec{u}_{p,s} \cdot \vec{n}_k - \vec{\beta} \cdot \vec{t}_{sk}) ds = 0 \ ; k = 5 \text{ à } 8 \quad (4.21)$$

Nous revenons sur cette hypothèse par la suite.

► La seconde hypothèse est mécanique :

Elle fait intervenir une relation entre la déformation de CT de bord $\{\gamma_{sk}\}$ et l'effort tranchant correspondant T_s via la loi de comportement en CT. Elle s'écrit :

$$\int_0^{L_k} \left(\gamma_{sk} - \frac{T_s}{D_c} \right) ds = 0 ; k = 5 \text{ à } 8 \quad (\text{hypothèse mécanique}) \quad (4.22)$$

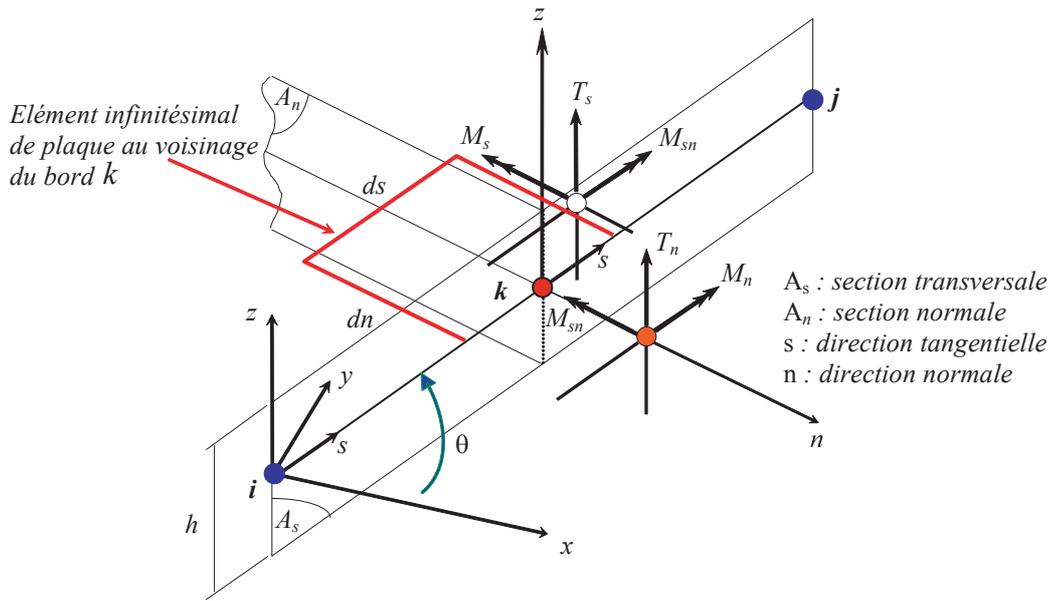


FIG. 4.4 – Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire $i-j$.

L'effort T_s est relié aux moments de flexion M_s et M_{sn} (Fig. 4.4) en utilisant une équation d'équilibre en flexion sur le bord k :

$$T_s = M_{s,s} + M_{sn,n} \quad (4.23)$$

La loi de comportement en flexion, pour un matériau homogène isotrope, permet une écriture des moments M_s et M_{sn} en fonction des rotations β_s et β_n :

$$M_s = D_f (\beta_{s,s} + \nu \beta_{n,n}) \quad (4.24)$$

$$M_{sn} = D_f \frac{1-\nu}{2} (\beta_{s,n} + \nu \beta_{n,s}) \quad (4.25)$$

D_f et D_c sont respectivement les rigidités de flexion et de CT, G le module de cisaillement et k le facteur de correction du CT (égal à 5/6 pour une section homogène isotrope) :

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} ; D_c = kGh ; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.26)$$

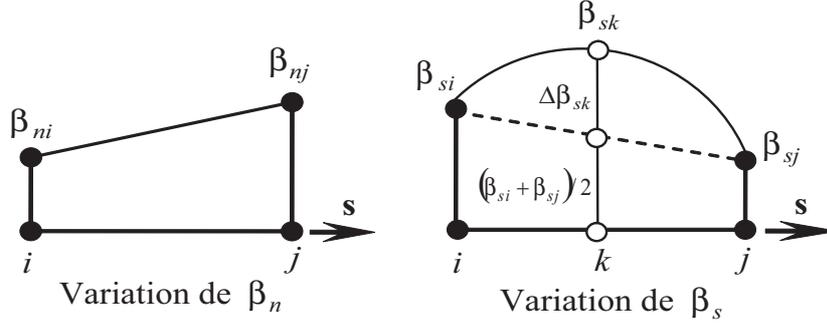


FIG. 4.5 – Variation des rotations tangentielles suivant s .

L'élimination des quatre rotations $\{\Delta\beta_{sk}\}$ ($k = 5$ à 8) s'obtient en identifiant les deux expressions relatives aux déformations de CT de bord (4.21) et (4.22). Une approximation quadratique incomplète pour la rotation β_s et linéaire pour la rotation β_n (Fig. 4.5) permettront de faire apparaître les rotations de bord $\{\Delta\beta_{sk}\}$:

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{si} + \frac{s}{L_k}\beta_{sj} + 4\frac{s}{L_k}\left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\Delta\beta_{sk} \quad (4.27)$$

$$\beta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{ni} + \frac{s}{L_k}\beta_{nj} \quad (4.28)$$

Dans l'hypothèse mécanique de Mindlin (4.22), une substitution des approximations (4.27) et (4.28) dans les expressions de M_s (4.24) et M_{sn} (4.25), et l'utilisation de l'équation d'équilibre (4.23) permettent d'aboutir à l'expression suivante de γ_{sk} :

$$\gamma_{sk}L_k = \frac{D_f}{D_c}L_k\beta_{s,ss} = -\frac{2}{3}L_k\Phi_k\Delta\beta_{sk} \quad (4.29)$$

Φ_k est le facteur d'influence de CT, défini pour une section homogène isotrope par :

$$\Phi_k = \frac{D_f}{D_c} \frac{12}{L_k^2} = \frac{2}{k(1-\nu)} \left(\frac{h}{L_k}\right)^2 \quad (4.30)$$

L'expression des déformations de CT transverse est obtenue finalement en fonction des $\{\Delta\beta_{sk}\}$ à l'aide de l'équation suivante :

$$\{\gamma_0\} = [B_{s\Delta\beta}] \{\Delta\beta_{sk}\} \quad (4.31)$$

$$[B_{s\Delta\beta}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -C_{11}(1-\eta)L_5\Phi_5 & -C_{21}(1+\xi)L_6\Phi_6 \\ -C_{12}(1-\eta)L_5\Phi_5 & -C_{22}(1+\xi)L_6\Phi_6 \\ C_{11}(1+\eta)L_7\Phi_7 & C_{21}(1-\xi)L_8\Phi_8 \\ C_{12}(1+\eta)L_7\Phi_7 & C_{22}(1-\xi)L_8\Phi_8 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

L'application de l'hypothèse cinématique (4.21) sur chacun des côtés k de l'élément, avec les mêmes approximations définies pour $\{\beta_s\}$ (4.27) et $\{\beta_n\}$ (4.28), conduit à l'expression suivante du vecteur des déformations de CT de bord $\{\gamma_{sk}\}$ projetées sur les degrés de liberté nodaux $\{U_n\}$ et $\{\Delta\beta_{sk}\}$:

$$\gamma_{sk}L_k = w_j - w_i + \frac{L_k}{2}(\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3}L_k\Delta\beta_{sk} \quad (4.33)$$

Nous avons

$$\beta_{sm} = \vec{\beta}_m \odot \vec{t}_{sk} \text{ et } \vec{\beta}_m = \left\langle \begin{matrix} -\vec{t}_2^m & \vec{t}_1^m \end{matrix} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \theta_{xm} \\ \theta_{ym} \end{matrix} \right\} ; m = i \text{ ou } j \quad (4.34)$$

et

$$\vec{t}_{s5} = \frac{2}{L_5}\vec{a}_1^5 ; \vec{t}_{s6} = \frac{2}{L_6}\vec{a}_1^6 ; \vec{t}_{s7} = -\frac{2}{L_7}\vec{a}_1^7 ; \vec{t}_{s8} = -\frac{2}{L_8}\vec{a}_1^8 \quad (4.35)$$

Une écriture du vecteur $\{\Delta\beta_{sk}\}$ en terme des ddl $\{U_n\}$ est obtenue par une combinaison des deux expressions associées à $\{\gamma_{sk}\}$ (4.29) et (4.33) :

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n] \{U_n\} ; [A_n] = [A_\Phi]^{-1} [A_G] \quad (4.36)$$

Les matrices $[A_\Phi]$ et $[A_G]$ sont données par :

$$[A_\Phi] = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} L_5(1+\Phi_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_6(1+\Phi_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_7(1+\Phi_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_8(1+\Phi_8) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[A_G] = \begin{bmatrix}
-\langle \vec{n}^5 \rangle & \langle -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle & \langle \vec{n}^A \rangle & \langle -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle \\
0 & 0 & 0 & -\langle \vec{n}^6 \rangle & \langle -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\langle \vec{n}^8 \rangle & \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\langle \vec{n}^6 \rangle & \langle -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle & 0 & 0 & 0 \\
-\langle \vec{n}^7 \rangle & \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle & \langle \vec{n}^7 \rangle & \langle \vec{a}_1 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_1 \cdot \vec{t}_1 \rangle \\
0 & 0 & 0 & -\langle \vec{n}^8 \rangle & \langle \vec{a}_2 \cdot \vec{t}_2 & -\vec{a}_2 \cdot \vec{t}_1 \rangle
\end{bmatrix} \quad (4.38)$$

La matrice $[A_G]$ est de dimension (4 x 20), elle fait intervenir toutes les variables nodales $\{U_n\}$. La matrice diagonale $[A_\Phi]$ est de dimension (4 x 4).

REMARQUE : \vec{n}^k est la normale définie aux points milieux des côtés k (5, 6, 7, 8). Elle est donnée par une moyenne des normales \vec{n}_i et \vec{n}_j aux nœuds i - j d'un côté k .

$k : (\xi, \eta)$	5 : (1,0)	6 : (0,1)	7 : (-1,0)	8 : (0,-1)
nœud i	1	2	3	4
nœud j	2	3	4	1

TAB. 4.2 – Nœuds i - j du bord k

$$\vec{n}^k = \frac{\vec{n}^k}{|\vec{n}^k|} ; \vec{n}^k = \frac{1}{2}(\vec{n}_i + \vec{n}_j) \quad (4.39)$$

4.2.4 Expressions finales des déformations $\{\varepsilon_1\}$ et $\{\gamma_0\}$

Après élimination des rotations $\{\Delta\beta_{sk}\}$, nous aboutissons aux expressions suivantes des vecteurs de déformation de flexion et de CT :

$$\{\varepsilon_1\} = [B_f] \{U_n\} \quad \text{et} \quad \{\gamma_0\} = [B_{ct}] \{U_n\} \quad (4.40)$$

avec ;

$$[B_f] = [B_1] + [B_{1\Delta\beta}] [A_n] \quad \text{et} \quad [B_{ct}] = [B_{s\Delta\beta}] [A_n] \quad (4.41)$$

$[B_f]$ et $[B_{ct}]$ sont les nouvelles matrices modifiées de déformations de flexion et de CT respectivement. Elles sont de dimensions (3 x 20) et (2 x 20) et sont associées au nouvel élément fini de coque à 4 nœuds et cinq ddl par nœud (Fig. 4.1-b).

4.3 Formulation du modèle DMQS multicouche avec modification des hypothèses discrètes de Mindlin. Le modèle DMQS ml

4.3.1 Tenseurs de déformation

Les expressions des tenseurs de déformation de membrane (4.5), de flexion (4.9) et de CT (4.19) demeurent les mêmes que celles du modèle DMQS iso avant l'élimination des rotations $\{\Delta\beta_{sk}\}$. Une redéfinition des matrices de comportement de membrane, de flexion, de couplage membrane-flexion et de CT est par contre nécessaire, compte-tenu du caractère multicouche du modèle DMQS ml (ml : multilayer).

4.3.2 Hypothèses discrètes modifiées de mindlin

Rappelons que deux hypothèses discrètes de Mindlin (4.21) et (4.22), établies dans le cas du modèle DMQS iso , ont été introduites pour éliminer les rotations de bords $\Delta\beta_{sk}$.

Pour formuler le modèle multicouche DMQS ml , nous conservons dans une première étape l'expression de l'hypothèse cinématique (4.21) utilisée dans la formulation de DMQS iso , à partir du moment où elle ne fait pas intervenir des termes liés au comportement mécanique d'une coque. Nous proposons dans une seconde étape une modification de l'hypothèse mécanique pour prendre en compte les propriétés d'une section de coque multicouche. Nous écrivons

$$\gamma_{sk}L_k = w_j - w_i + \frac{L_k}{2}(\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3}L_k\Delta\beta_{sk} \quad (4.42)$$

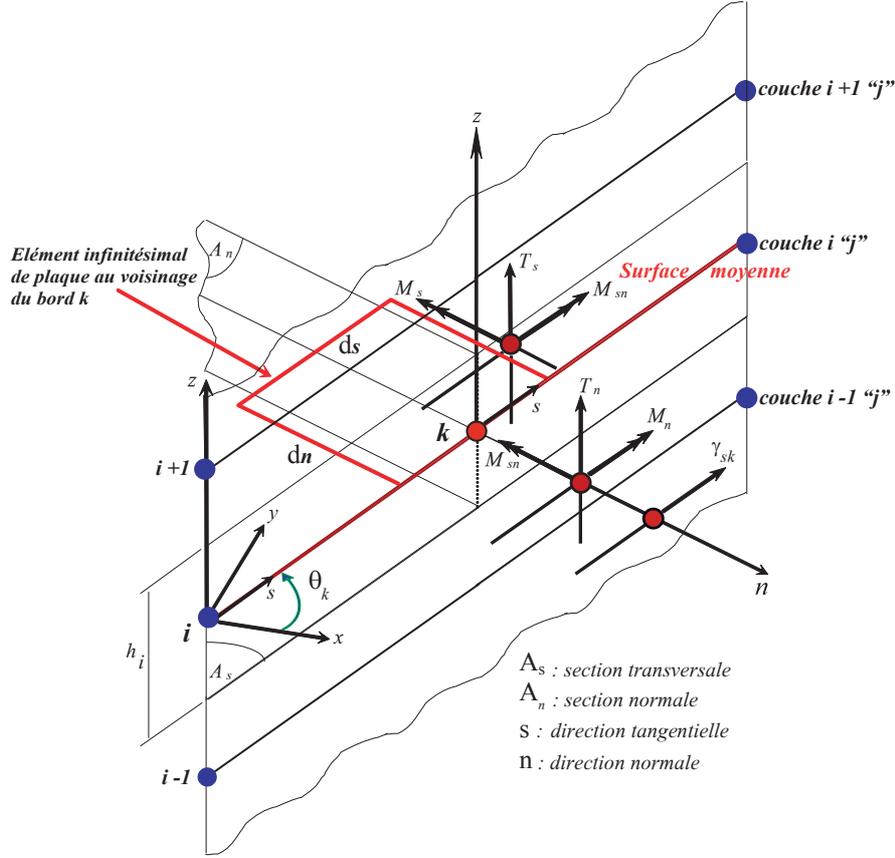
L'hypothèse mécanique (4.22) reste cependant valable uniquement pour une section de plaque homogène isotrope. Une nouvelle expression modifiée de cette même hypothèse, prenant en compte le caractère multicouche d'une plaque en flexion/CT, est donnée par

$$\int_0^{L_k} \left(\gamma_s - \langle H_{ck11}^{inv} \ H_{ck12}^{inv} \rangle \left\{ \begin{array}{c} T_s \\ T_n \end{array} \right\} \right) ds = 0 \quad (\text{hyp. mécanique}) \quad (4.43)$$

Les équations d'équilibre au voisinage du nœud k , reliant les efforts T_s et T_n aux moments de flexion correspondants sur le bord i - j (Fig. 4.6) s'écrivent

$$\{T\} = \left\{ \begin{array}{c} T_s \\ T_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_{s,s} + M_{sn,n} \\ M_{sn,s} + M_{n,n} \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

H_{ck11}^{inv} et H_{ck12}^{inv} sont deux termes de comportement en CT de la matrice inverse $[H_{ck}]^{-1}$, telle que :

FIG. 4.6 – Hypothèses de Mindlin sur un bord multicouche élémentaire i - j .

$$[H_{ck}] = [P_k][H_c][P_k]^{-1} ; [H_c] : (B.25) \quad (4.45)$$

$$[P_k] = [P_k]^{-1} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} ; \begin{cases} C_k = \cos\theta_k \\ S_k = \sin\theta_k \end{cases} \quad (4.46)$$

Les moments de flexion M_s , M_n , M_{sn} sont reliés aux courbures χ_s , χ_n , χ_{sn} par :

$$\begin{Bmatrix} M_s \\ M_n \\ M_{sn} \end{Bmatrix} = [H_f] \begin{Bmatrix} \chi_s = \beta_{s,s} \\ \chi_n = \beta_{n,n} \\ \chi_{sn} = \beta_{s,n} + \beta_{n,s} \end{Bmatrix} ; [H_f] : (B.21) \quad (4.47)$$

Les rotations β_s et β_n sont interpolées de la même manière que pour le modèle isotrope (β_s quadratique en s , β_n linéaire en s). L'équation (4.43) s'écrit après simplification par L_k comme suit :

$$\beta_{s,nn} = \beta_{n,ns} = 0$$

$$\gamma_{sk} = \left(H_{ck11}^{inv} H_{f11} + H_{ck12}^{inv} H_{f13} \right) \beta_{s,ss} ; \quad \beta_{s,ss} = -\frac{8}{L_k^2} \Delta \beta_{sk} \quad (4.48)$$

Nous proposons de définir l'expression suivante modifiée du facteur d'influence de cisaillement transverse ϕ_k^{ml} pour une plaque multicouche :

$$\phi_k^{ml} = 8 \left(H_{f11} \frac{H_{ck11}^{inv}}{L_k^2} + H_{f13} \frac{H_{ck12}^{inv}}{L_k^2} \right) ; \quad (ml : \text{multicouche}) \quad (4.49)$$

Nous obtenons ainsi une première expression matricielle des déformations tangentielles $\{\gamma_{sk}\}$ en fonction des rotations $\{\Delta \beta_{sk}\}$:

$$\{\gamma_{sk}\} = [B_{c\Delta\beta}] \{\Delta \beta_{sk}\} ; \quad [B_{c\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} -\phi_5^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_6^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_7^{ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_8^{ml} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

En effet, pour définir les rotations $\Delta \beta_{sk}$ sur chaque côté en fonction des *ddl* aux nœuds, nous avons utilisé la même démarche que pour le cas isotrope, nous nous aboutissons à la relation importante suivante qui élimine $\{\Delta \beta_{sk}\}$ par une projection sur les *ddl* $\{u_n\}$:

$$\{\Delta \beta_{sk}\} = [A_n^{ml}] \{u_n\} ; \quad [A_n^{ml}] = [A_\phi^{ml}]^{-1} [A_G] \quad (4.51)$$

avec

$$[A_\phi^{ml}] = \begin{bmatrix} -L_5 \left(\frac{2}{3} + \phi_5^{ml} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_6 \left(\frac{2}{3} + \phi_6^{ml} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_7 \left(\frac{2}{3} + \phi_7^{ml} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_8 \left(\frac{2}{3} + \phi_8^{ml} \right) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

La matrice $[A_G]$ reste la même que celle de *DMQSIso*, elle est donnée par l'équation (4.38)

4.3.3 Expression finale des matrices de rigidité modifiées de flexion et de CT

La combinaison de l'équation (4.48), appliquée aux différents côtés élémentaires k , avec l'équation (4.51) conduit à l'écriture suivante du vecteur des déformations de CT de bord :

$$\{\gamma_{sk}\} = [B_{c\Delta\beta}] [A_n^{ml}] \{u_n\} ; \quad ([A_n^{ml}] : 4.51) \quad (4.53)$$

La substitution de $\{\Delta \beta_n\}$ dans l'expression des courbures de flexion (4.9) et de CT conduit à l'écriture finale suivante du tenseur des déformations de flexion et de CT :

► Courbures de flexion :

$$\{\varepsilon_1\} = [B_f^{ml}] \{U_n\} ; [B_f^{ml}] = [B_1] + [B_{1\Delta\beta}] [A_n^{ml}] \quad (4.54)$$

Les matrices (4.10) et (4.13) restent inchangées.

► Déformations de CT :

$$\{\gamma_0\} = [B_{ct}^{ml}] \{U_n\} ; [B_{ct}^{ml}] = [C_0]^T [A] [B_{c\Delta\beta}] [A_n^{ml}] \quad (4.55)$$

$[B_f^{ml}]$ et $[B_{ct}^{ml}]$ sont les nouvelles matrices modifiées de déformations de flexion et de CT respectivement. Elles sont de dimensions (3 x 20) et (2 x 20) et sont associées au nouvel élément fini de coque multicouche à 4 nœuds et cinq *ddl* par nœud DMQSm l .

4.4 Matrice de rigidité élémentaire

4.4.1 Matrice de rigidité du modèle DMQSm iso

L'expression du *P.T.V* est définie par sa forme généralisée suivante :

$$W = \sum_{\text{éléments}} (W_{int}^{*e} - W_{ext}^{*e}) = 0 ; \forall \vec{u}_q^* \quad (4.56)$$

L'expression du travail virtuel interne W_{int}^e est donnée par :

$$W_{int}^e = \int_{V_e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle [H] \{\varepsilon_s\} + \langle \gamma_s^* \rangle [G] \{\gamma_s\}) dV = \langle U_n^* \rangle [k^e] \{U_n\} \quad (4.57)$$

$[k^e]$ est la matrice de rigidité totale, de dimension (20 x 20), définie dans le repère local. Elle s'exprime par :

$$[k^e] = [k_m] + [k_f] + [k_{ct}] \quad (4.58)$$

$$[k_m] = \int_{A_e} [B_0]^T [H_m] [B_0] \det [F_0] d\xi d\eta ; [H_m] = h [H] \quad (4.59)$$

$$[k_f] = \int_{A_e} [B_f]^T [H_f] [B_f] \det [F_0] d\xi d\eta ; [H_f] = \frac{h^3}{12} [H] \quad (4.60)$$

$$[k_{ct}] = \int_{A_e} [B_{CT}]^T [H_c] [B_{CT}] \det [F_0] d\xi d\eta ; [H_c] = h [G] \quad (4.61)$$

$$\det [F_0] = \frac{h}{2} |\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|$$

$[H]$ et $[G]$ sont les matrices classiques d'élasticité :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Notons qu'un schéma à 2 x 2 points de GAUSS suffit pour intégrer exactement la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$.

4.4.2 Matrice de rigidité du modèle multicouche DMQS ml :

La matrice de rigidité élémentaire finale de l'élément de coque courbe multicouche DMQS ml tient compte d'une part, des matrices de comportement obtenues par la méthode des stratifications, et des modifications précédentes apportées aux opérateurs de déformation de flexion et de CT d'autre part. Elle s'écrit dans le repère local :

$$[k^e] = [k_m^{ml}] + [k_f^{ml}] + [k_{ct}^{ml}] + [k_{mf}^{ml}] \quad (4.63)$$

avec

$$[k_m^{ml}] = \int_{A_e} [B_m^{ml}]^T [H_m] [B_m^{ml}] dA ; \quad ([H_m] : B.20)$$

$$[k_{mf}^{ml}] = \int_{A_e} \left([B_m^{ml}]^T [H_{mf}] [B_f^{ml}] + [B_f^{ml}]^T [H_{mf}] [B_m^{ml}] \right) dA ; \quad ([H_{mf}] : B.22)$$

$$[k_f^{ml}] = \int_{A_e} [B_f^{ml}]^T [H_f] [B_f^{ml}] dA ; \quad ([H_f] : B.21)$$

$$[k_{ct}^{ml}] = \int_{A_e} [B_{ct}^{ml}]^T [\overline{H}_c] [B_{ct}^{ml}] dA ; \quad ([\overline{H}_c] : B.23)$$

REMARQUES

- $[k_m^{ml}]$ est la matrice de rigidité de membrane. Elle est associée à l'élément bilinéaire classique $Q4$;
- Les matrices de rigidités $[k_m^{ml}]$ « membrane », $[k_f^{ml}]$ « flexion », $[k_{mf}^{ml}]$ « couplage membrane-flexion » et $[k_{ct}^{ml}]$ « CT » sont obtenues en considérant un schéma d'intégration 2 x 2 points de GAUSS. Ce schéma garantit l'absence de modes parasites pour un élément ;
- $[k^e]$ est l'expression la plus simple possible garantissant l'absence de blocage en CT et de modes parasites ;

- Pour un composite possédant une symétrie matérielle par rapport au plan $z = 0$, il n'y a pas de couplage entre les effets de membrane et de flexion, la matrice $[k_{mf}^{ml}]$ est donc nulle. Dans ce cas, le plan xy devient le plan neutre où des efforts de membranes qui y seraient appliqués ne produisent aucune courbure et, réciproquement, des efforts de flexion ne produisent aucune déformation de membrane.

4.4.3 Rigidité fictive pour θ_z :

On remarque que les relations cinématiques données jusqu'à maintenant ne font pas intervenir les rotations autour de la normale θ_z . Ainsi tous les termes de la matrice $[k^e]$ (4.63) associés aux variables nodales θ_{zi} sont nuls. Par conséquent, si tous les éléments connectés à un nœud i sont coplanaires, la matrice de rigidité assemblée sera singulière.

Pour éviter cette difficulté numérique, nous introduisons une matrice $[k_{\theta_z}]$ dite de rigidité fictive telle que $([k^e] = [k^e] + [k_{\theta_z}^e])$, associée aux quatre rotations nodales fictives θ_{zi} . [20] ont proposé une forme de la matrice $[k_{\theta_z}]$, elle est basée sur la discrétisation d'une forme intégrale d'une énergie élémentaire fictive $W_{\theta_z}^e$ associée à l'opérateur Laplacien de θ_z pondérée par θ_z^* :

$$W_{\theta_z}^e = \int_{A^e} \alpha H_{f1} (\theta_{z,x}^* \theta_{z,x} + \theta_{z,y}^* \theta_{z,y}) dA \quad (4.64)$$

$$\theta_z = \sum_{i=1,4} N_i \theta_{zi} = \langle N \rangle \{ \theta_{zn} \} ; \left\{ \begin{array}{c} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{array} \right\} = [N_{\theta_z}] \{ \theta_{zn} \} ; [N_{\theta_z}] = [C_0]^T \left[\begin{array}{c} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{array} \right] \quad (4.65)$$

De la même façon, nous avons développé les termes virtuels, nous obtenons

$$W_{\theta_z}^e = \langle \theta_{zn}^* \rangle [k_{\theta_z}^e] \{ \theta_{zn} \} \quad (4.66)$$

$$[k_{\theta_z}^e] = \alpha H_{f1} \int_{A^e} [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_z}] dA \quad (4.67)$$

H_{f1} est une valeur caractéristique associée à une rigidité de flexion (par exemple $Eh^3/12(1 - \nu^2)$ pour un matériau isotrope). α est un coefficient petit sans dimension, sa valeur dépend de la précision de l'ordinateur. Elle doit être suffisamment petite pour limiter l'influence des rigidités fictives sur le résultat et suffisamment grande pour éviter les singularités possibles. Nous avons proposé la valeur de $(10^{-7}$ à $10^{-4})$ pour notre élément, il peut également être défini en fonction de la géométrie de l'élément, en considérant par exemple le rapport du quart de l'air au carré du plus long côté pour un quadrilatère $\alpha = A^e/4L_{max}^2$, et sur trois pour un triangle.

Pour un stratifié, la valeur du module d'Young n'est pas clairement définie. Dans ce cas, le coefficient E peut être pris égal à un module de rigidité équivalent correspondant à E_1 .

En ajoutant $[k_{\theta z}^e]$ à la matrice de rigidité élémentaire $[k^e]$ (4.63), nous évitons la singularité de la matrice de rigidité globale $[k] = \sum_{\text{Eléments}} ([k^e] + [k_{\theta z}^e])$.

4.4.4 Passage dans le repère global

Dans le cas du modèle DMQS (isotrope ou multicouche) qui possèdent 5ddl/nœuds dans le repère local, le passage du repère local au repère global « des ddl locaux en ddl globaux » est obtenu aux nœuds par la relation :

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = [Q^T] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} = [Q^T] \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\langle u_n \rangle_{loc} = \langle \dots u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi} \ i = 1, 2, 3, 4 \rangle \quad (4.69)$$

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \dots U_i, V_i, W_i, \theta_{Xi}, \theta_{Yi}, \theta_{Zi} \ i = 1, 2, 3, 4 \rangle \quad (4.70)$$

A l'aide des trois dernières équations, il est possible d'obtenir les relations suivantes :

$$\{u_n\}_{loc} = [T] \{u_n\}_{glob} ; \{u_n^*\}_{loc} = [T] \{u_n^*\}_{glob} \quad (4.71)$$

Avec

$$[T]_{24 \times 24} = \begin{bmatrix} [A] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [A] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [A] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [A] \end{bmatrix} ; [A]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} [Q]^T & [0] \\ [0] & [Q]^T \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

A partir des relations définies précédemment, il nous est possible de définir les matrices et vecteurs élémentaires dans le repère global :

$$[k^e]_{glob} = [T]^T [k^e]_{loc} [T] ; [k^e]_{loc} = [k_m] + [k_{mf}] + [k_f] + [k_{ct}] + [k_{\theta z}] \quad (4.73)$$

Étant donné que les matrices élémentaires seront maintenant exprimées par rapport à un même système d'axe global, il sera possible de les assembler et ainsi obtenir la matrice de rigidité globale du système d'équations. Après avoir résolu ce système d'équations linéaires, les variables nodales globales pourront être tournées à l'aide de l'équation (4.71) de façon à obtenir les variables nodales dans le système local de chacun des éléments. C'est avec ces variables nodales locales que le calcul de certaines grandeurs, comme les contraintes et les déformations, pourra être effectué.

4.5 Conclusion

Le nouveau modèle d'élément fini de coque courbe DMQS*ml* (*Discrete Mindlin Quadrilateral for Shells/multilayer*) est développé afin d'alimenter les codes de calcul des structures en éléments à géométrie simple, avec un nombre minimum de nœuds et de ddl par nœud, qui soient précis et convergents. Le principal apport du modèle DMQS*ml* réside dans la manière de présenter les contributions en flexion et en CT au niveau du modèle variationnel. La méthode des déformations de substitution (ANS : *Assumed Natural Strains*) est exploitée dans une première étape comme une hypothèse cinématique discrète de Mindlin. Elle conduit à l'élimination du verrouillage en CT sans recourir à l'intégration réduite. La géométrie initiale du modèle (un élément quadratique à huit nœuds) est difficilement exploitable sur le plan pratique, en raison de la présence de quatre accroissements de rotations tangentielles aux milieux des côtés. Nous avons pu introduire une seconde hypothèse de Mindlin qui est mécanique et qui fait intervenir une équation d'équilibre et deux lois de comportement (une en flexion et une autre en CT). Une identification par analogie entre les deux hypothèses conduit à éliminer les accroissements de rotation, pour laisser place au nouvel élément fini quadrilatéral à 4 nœuds DMQS*ml*. Celui-ci est libre de tout verrouillage en CT et en membrane. Il passe tous les patch-tests de convergence et présente des performances en précision satisfaisantes pour un maillage donné. Le modèle DMQS*iso* peut être considéré comme une alternative aux éléments finis de Kirchhoff discrets (sans CT), connus pour leur simplicité et leur robustesse. Dans le chapitre suivant nous présentons d'une part, une série de tests pour valider l'élément fini DMQS*iso* (section 5.2.), et d'autre part, une série de tests sur des coques stratifiées et sur des sandwichs est présentée pour la validation de l'élément DMQS*ml* (section 5.3). Dans la section 5.4, les résultats d'une étude de vibrations libres de structures composites sont donnés.

Chapitre 5

Validation numérique

5.1 Introduction

Les performances de convergence et de précision du nouvel modèle élément fini de coque courbe (DMQ*Siso* et DMQ*Sml*) sont évaluées à travers un ensemble de cas-tests standards de coques isotropes, stratifiées et de coques sandwichs, considérés comme sévères par les ingénieurs.

Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence et d'autre part, à la solution approchée issue de quelques éléments finis connus de la littérature.

5.2 Résultats des cas-tests standards de coques isotropes. Performances de l'élément DMQ*Siso*

5.2.1 Cylindre pincé avec diaphragmes rigides

Un des tests réputés sévères pour les problèmes de coque est celui d'un cylindre court ($L/R = 2$) et mince ($R/h = 100$ et $L/h = 200$) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités, et soumis à deux charges concentrées diamétralement opposées figure 5.1. Ce test permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes, avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées.

Le problème étant symétrique, seul le huitième de la coque est modélisé en utilisant des maillages réguliers ($N = 2$ à 16 éléments par côté).

5.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS STANDARDS DE COQUES ISOTROPES 131

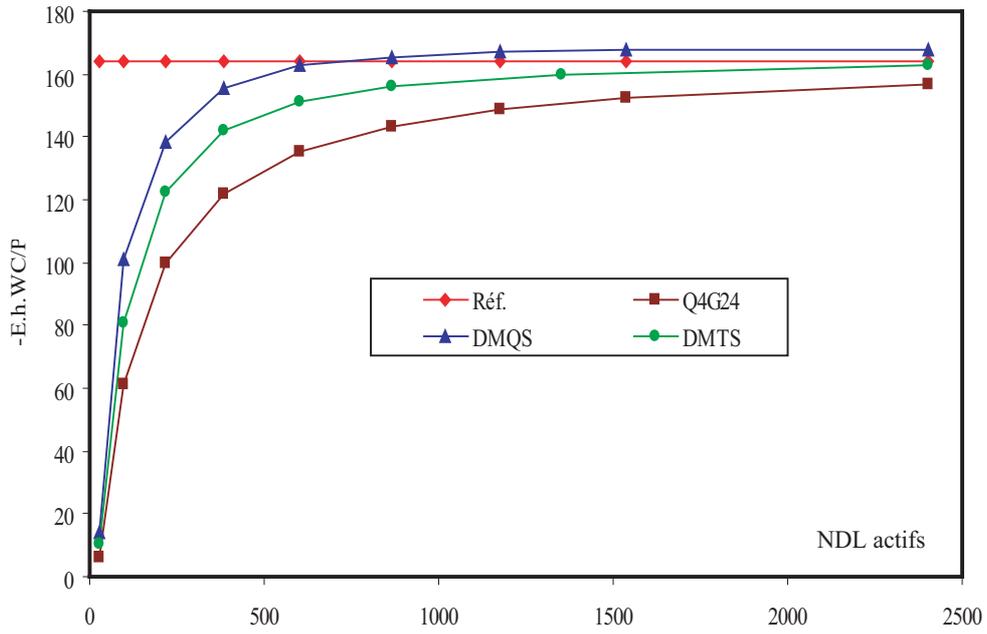


FIG. 5.2 – Cylindre pincé. Convergence de \overline{W}_C

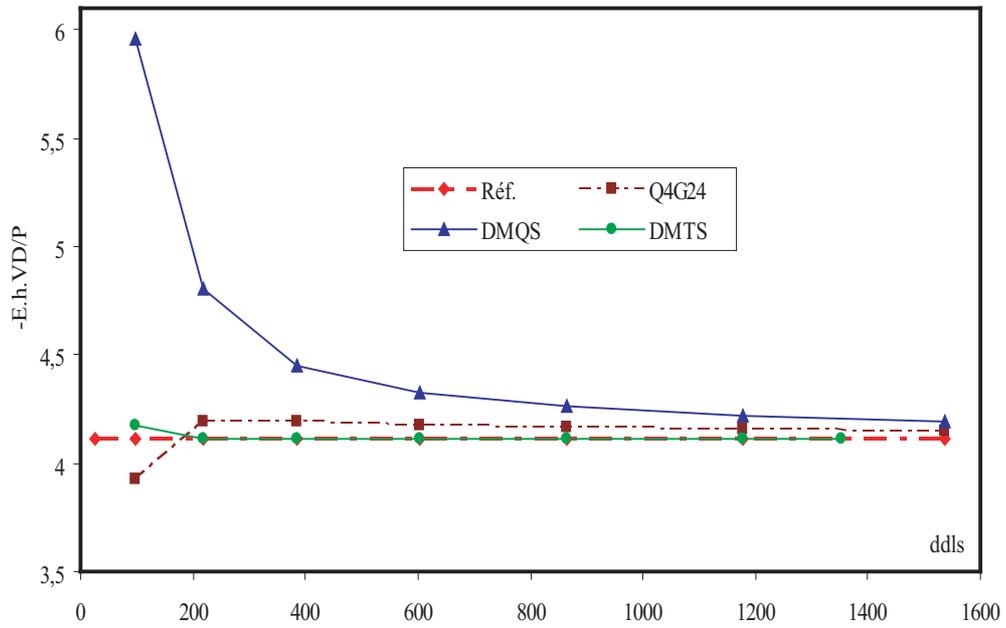


FIG. 5.3 – Cylindre pincé. Convergence de \overline{V}_D

5.2.2 Poutre vrillée avec chargements plan et hors plan

Ce cas-test a été proposé par [89] pour tester les formulations solides ou coques dans le cas de maillages distordus. Il s'agit d'une poutre vrillée encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité : une charge dans le plan et une autre hors plan comme indiqué sur la figure 5.4. La géométrie vrillée d'un angle de 90° conduit à des éléments distordus rendant ainsi ce test assez complexe. C'est pour cette raison que celui-ci est souvent considéré comme un bon examen de validation d'éléments finis de coque avec gauchissement de la surface moyenne, en particulier les éléments quadrilatéraux à 4 nœuds.

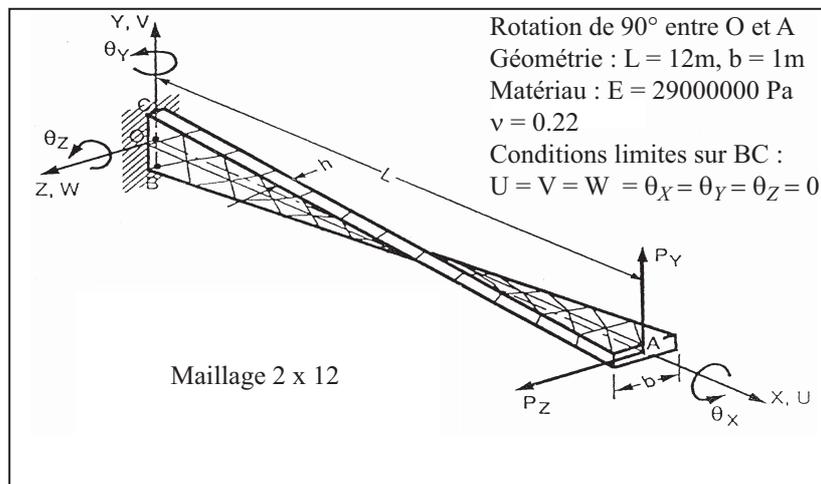


FIG. 5.4 – Poutre vrillée sous charges concentrées. Données du problème

Les résultats obtenus par notre élément *DMQSi*so sont comparés, pour différents maillages, à la solution de référence proposée par [89] et à ceux des éléments DKT-CST [20], $Q4\gamma$ - $Q4$ [15] et NHMiSP4 [11]. Ils sont reportés respectivement sur les tableaux 3 et 4 pour les deux cas de charges et pour deux valeurs différentes de l'épaisseur : $h = 0,32$ et $h = 0,0032$.

Pour ($h = 0,32$; tableau 5.1), l'ensemble des éléments converge de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Dans le cas du chargement hors plan, les effets de membrane dominent ceux de flexion au voisinage de l'encastrement. La convergence des éléments $Q4\gamma$ - $Q4$ et DKT-CST est plus lente car la partie membrane, représentée par les éléments standards bilinéaires $Q4$ (pour le quadrilatère) et linéaires CST (pour le triangle DKT), n'est pas assez riche en approximation pour simuler des effets membranaires dominants. Les éléments *DMQSi*so et mixte-hybride NHMiSP4 donnent de très bons résultats.

Pour une coque très mince ($h = 0,0032$; tableau 5.2) et pour les deux cas de charge, les résultats donnés par l'élément *DMQSi*so sont très satisfaisants.

5.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS STANDARDS DE COQUES ISOTROPES¹³³

Ceux des éléments Q4 γ -Q4 et DKT-CST convergent de façon monotone vers la solution de référence. Une petite divergence passagère est observée pour l'élément DKT-CST dans le cas du maillage 4 x 24. Celui-ci reconverge à nouveau à partir de 6 x 36.

a. Chargement dans le plan : $P_Y = 0$, $P_Z = 10^3$				
maillage (NxN)	<i>DMQSiSo</i>	<i>NHMiSP4</i>	Q4 γ - Q4	<i>DKT - CST</i>
2 x 12	5.391	5.386	5.37	5.327
4 x 24	5.398	5.406	5.39	5.367
6 x 36	5.426	5.412	5.406	5.343
Référence : $W_A = 5.424$				
b. Chargement hors plan : $P_Y = 10^3$, $P_Z = 0$				
maillage (NxN)	<i>DMQSiSo</i>	<i>NHMiSP4</i>	Q4 γ - Q4	<i>DKT - CST</i>
2 x 12	1.628	1.731	1.607	1.465
4 x 24	1.738	1.746	1.708	1.621
6 x 36	1.741	1.749	1.731	1.682
Référence : $V_A = 1.754$				

TAB. 5.1 – Poutre vrillée. Résultats des déplacements en A pour $h = 0,32$

a. Chargement dans le plan : $P_Y = 0$, $P_Z = 1$				
maillage (NxN)	<i>DMQSiSo</i>	<i>NHMiSP4</i>	Q4 γ - Q4	<i>DKT - CST</i>
2 x 12	5189	5186	5127	5268
4 x 24	5219	5233	5204	5203
6 x 36	5247	5244	5227	5258
Référence : $W_A = 5316$				
b. Chargement hors plan : $P_Y = 1$, $P_Z = 0$				
maillage (NxN)	<i>DMQSiSo</i>	<i>NHMiSP4</i>	Q4 γ - Q4	<i>DKT - CST</i>
2 x 12	1274	1272	1256	1285
4 x 24	1285	1288	1283	1282
6 x 36	1292	1291	1288	1287
Référence : $V_A = 1296$				

TAB. 5.2 – Poutre vrillée. Résultats des déplacements en A, pour $h = 0,0032$

5.2.3 Coque hémisphérique pincée

Il s'agit d'une coque hémisphérique mince ($R/h = 250$) soumise sur sa base libre à quatre charges concentrées diamétralement opposées. Dans cet exemple,

l'hémisphère subit d'importantes rotations de corps rigide et des déformations de flexion sans extension. Ce problème constitue un bon test pour vérifier l'absence de blocage en membrane et la bonne représentation des mouvements de corps rigide. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la structure est discrétisé en $N \times N$ éléments réguliers ($N = 2$ à 16 par côté, avec deux forces unitaires selon les directions axiales Ox et Oy). Les conditions aux limites sont libres. Toutefois pour éviter les mouvements de corps rigides, le déplacement selon Oz d'un point (B par exemple) est bloqué.

La géométrie, les caractéristiques mécaniques, les conditions aux limites et les conditions de symétrie sont présentées dans la figure 5.5.

Une solution de référence est donnée par [89] pour le déplacement radial selon l'axe (Ox) : $U_A = -V_B = 0,094 m$. Les résultats obtenus par le modèle *DMQSiso* en termes de convergence vers la solution de référence sont représentés dans la figure 5.6.

Le modèle *DMQSiso* converge assez rapidement vers la solution de référence et ne présente aucun blocage numérique.

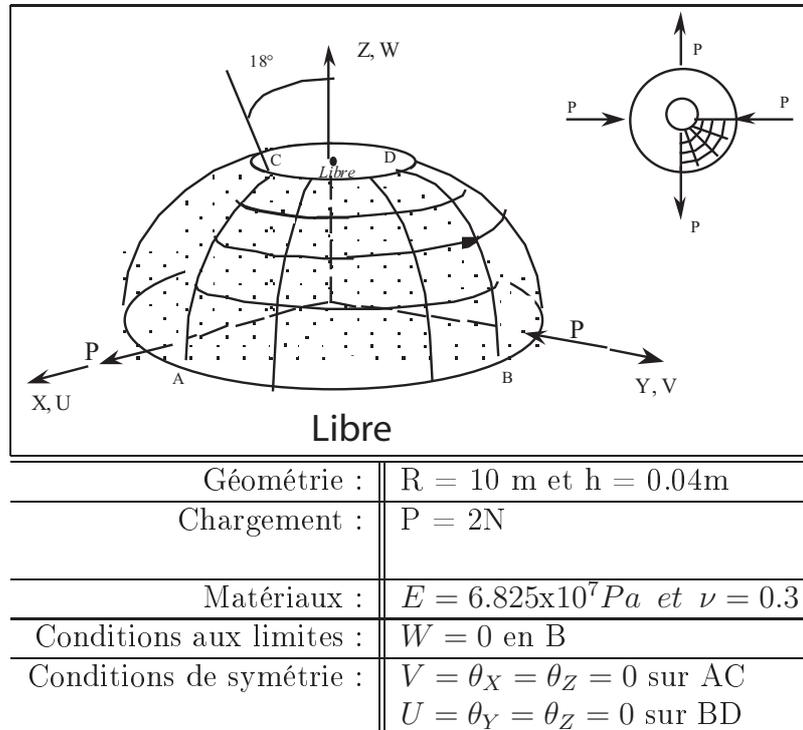
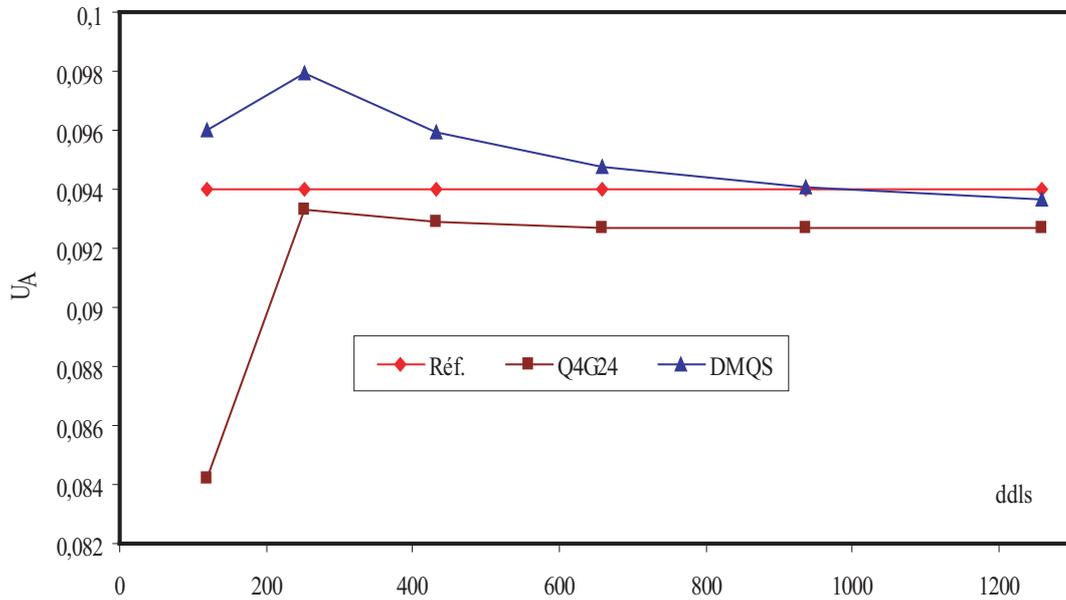


FIG. 5.5 – Coque hémisphérique pincée. Données du problème

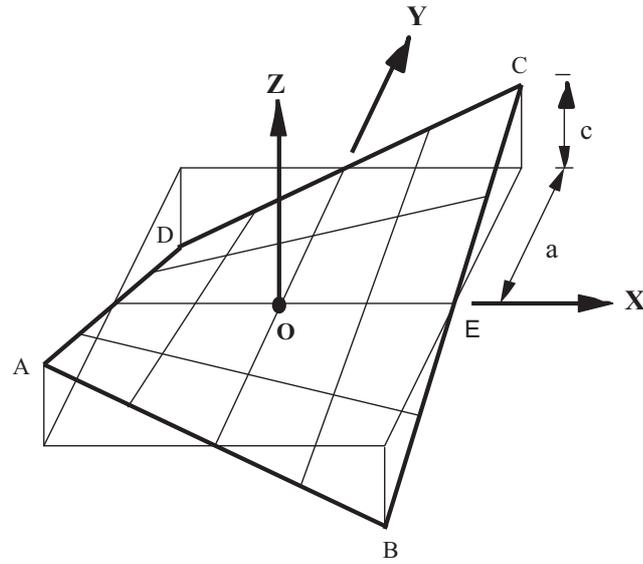
FIG. 5.6 – Coque hémisphérique pincée. Convergence de U_A

5.2.4 Paraboloïde hyperbolique

Le paraboloïde hyperbolique de la figure 5.7 est une coque mince à double courbure encastrée à ses bords et soumise à une pression externe uniforme $f_z = 0,01kg/cm^3$. Sa projection sur le plan (xy) est carrée de base $2a \times 2a$. Les données géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure 5.7.

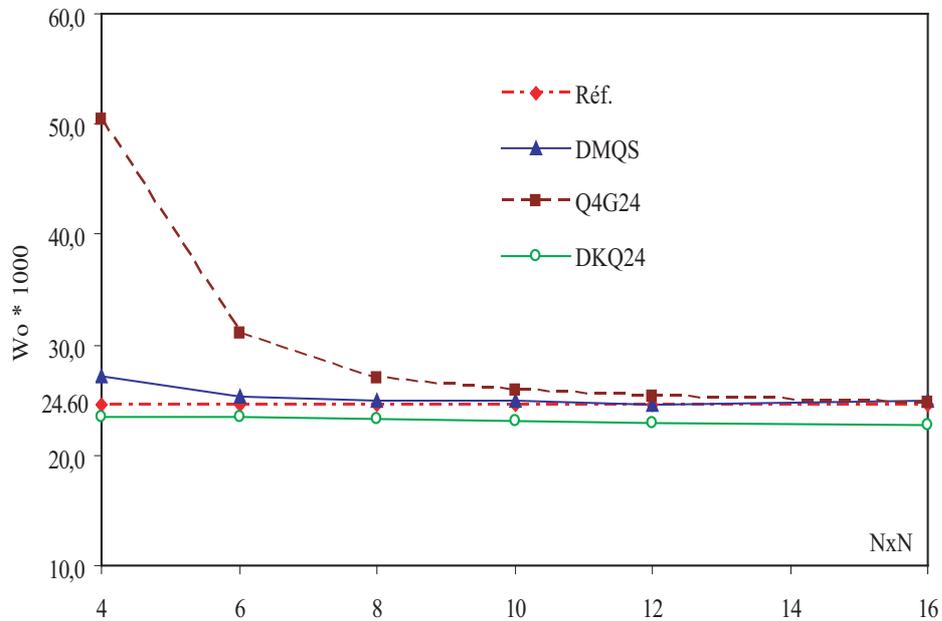
Ce test, proposé par [24] et [40], tient compte du gauchissement de la coque et convient donc parfaitement au modèle $DMQS_{iso}$ isoparamétrique proposé dans ce travail. La courbe de convergence du déplacement normal W_o au centre en fonction du nombre d'éléments sur chaque côté ($N = 4, 6, 8, 10, 12$ et 16) est présentée sur la figure 5.8. Nous avons présenté également les résultats relatifs à l'élément de coque mince $DKQ24$ [20] (4 nœuds et 6ddl/nœud) formulé en facettes planes, pour mettre en évidence leur divergence lorsque le gauchissement de la surface moyenne n'est pas pris en considération au niveau de la formulation élémentaire.

Une convergence monotone vers la solution de référence est obtenue par le modèle proposé $DMQS_{iso}$ et le modèle $Q4\gamma - Q4$. L'élément $DKQ24$ (facette plane, matrice $[b_c] = 0$) diverge faiblement en augmentant le nombre d'éléments.



Géométrie : $a = 50 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$ et $Z = \frac{c}{a^2}XY$
Données : $E = 28500 \text{ Kg/cm}^2$; $\nu = 0.4$ et $h = 0.8$
Conditions limites sur ABCD : $U = V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_Z$
Charge normale uniforme : $f_Z = 0.01 \text{ kg/m}^3$

FIG. 5.7 – Paraboloïde hyperbolique sous pression externe. Données du problème

FIG. 5.8 – Paraboloïde hyperbolique. Convergence du déplacement normal W_o

5.3 Application aux coques composites orthotropes et multicouches.

Performances de l'élément $DMQSm_l$

5.3.1 Cylindre orthotrope sous pression interne

Il s'agit d'un cylindre constitué d'une couche de matériau orthotrope, encasté à ses deux extrémités et soumis à une pression interne. La symétrie du problème permet d'étudier un huitième du cylindre (portion ABCD) en considérant un maillage 10×5 (10 éléments selon la circonférence et 5 selon la longueur). Les caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que les conditions aux limites sont montrées sur la figure 5.9.

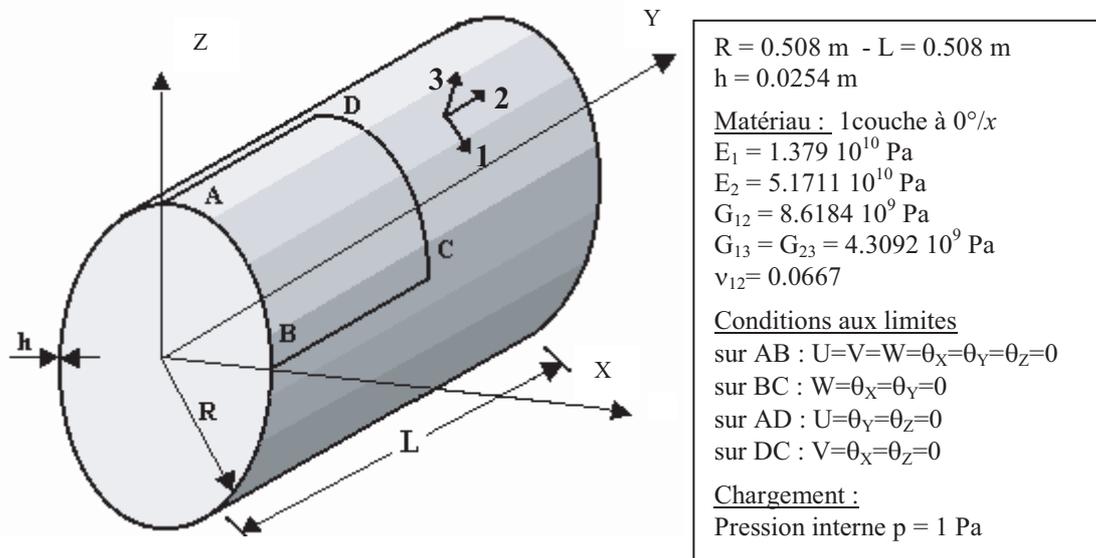


FIG. 5.9 – Cylindre orthotrope sous pression interne. Données du problème

Nous avons évalué les déplacements maximaux aux points C et D. Les résultats sont donnés dans le tableau 5.3, pour l'élément $DMQSm_l$. Ils sont comparés à l'élément de coque plane DMTS [11], aux éléments mixtes MiSP3-CST et MiSP4-Q4 [15] et à l'élément DSQ24 [80]. Les flèches maximales sont d'égales valeurs aux points C et D, puisque le cylindre orthotrope présente un problème mécanique avec un comportement radial de la solution. Cela est vérifié numériquement avec notre modèle $DMQSm_l$, l'élément quadrilatéral MiSP4_Q4 et DSQ24, mais pas avec les deux éléments triangulaires MiSP3-CST et DMTS, du fait de l'orientation du maillage. Les résultats numériques obtenus par $DMQSm_l$ restent les plus proches de la solution de référence par rapport aux autres éléments, avec une erreur relative de 0,5967%.

Flèches maximales aux points D et C ($10^{-9}m$)					
	DMQS $_{ml}$	DMTS	MiSP3-CST	MiSP4-Q4	DSQ24
Thé. coque mince	0.672	D : 0.616	D : 0.612	0.684	0.677
0.663		C : 0.685	C : 0.689		
<i>Erreur-W_D</i>	0.5967%	7.1%	7.7%	3.2%	2.1%

TAB. 5.3 – Cylindre orthotrope sous pression interne. Déplacement maximum

5.3.2 Étude d'une plaque sandwich non-symétrique

Une plaque carrée Sandwich composée de trois couches, simplement supportée, est soumise à un chargement uniforme f_z . Les données géométriques et mécaniques ainsi que les conditions aux limites sont données sur la figure 5.10. Les peaux sont constituées d'un matériau orthotrope.

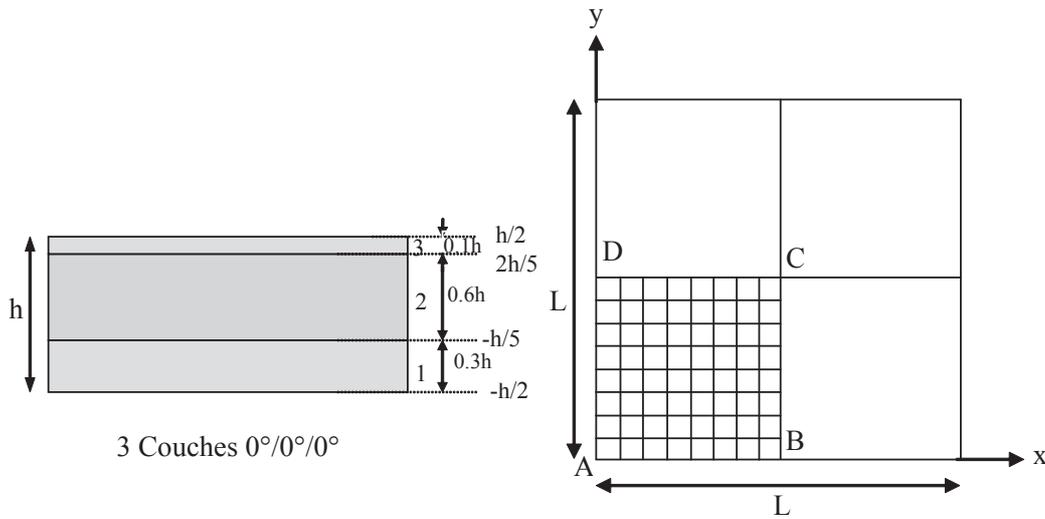
Ce cas test a été traité en chapitre 3, mais dans le présent cas, la stratification n'est pas symétrique ($h_1 = 0.3h$; $h_2 = 0.6h$ et $h_3 = 0.1h$) et par conséquent, il faut prendre en compte l'effet de couplage flexion-membrane. Ainsi les modules élastiques du matériau constituant le cœur sont ceux du matériau des peaux divisés par dix. La plaque épaisse ($L/h = 10$) étant carrée, la double symétrie permet de modéliser le quart du domaine avec un maillage 6x6.

Une solution $3D$ de la flèche au centre de la plaque est donnée par Srinivas [130]. Les résultats sont donnés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{wG_{12}(2)}{hq_0} \quad (5.1)$$

Les valeurs de déplacement au centre de la plaque, comparées à celles données par les éléments finis suivants issus de la littérature (DSQ [80], HMiSP4/Q4/ ml [134] et Heterosis [104]) sont reportées sur le tableau 5.4.

Nos résultats sont plus proches de ceux donnés par le modèle Heterosis.



Géométrie :	$L = 1000 \text{ mm}$ et $h = 100 \text{ mm}$; $h_1 = 30 \text{ mm}$; $h_2 = 60 \text{ mm}$ et $h_3 = 10 \text{ mm}$
Matériau « Orthotrope » : 3 couches non symétriques ($0^\circ/0^\circ/0^\circ$)	
Peau :	$E_1 = 3.4156 \text{ Pa}$; $E_2 = 1.793 \text{ Pa}$ et $\nu_{12} = 0.44$
	$G_{12} = 1 \text{ Pa}$; $G_{13} = 0.608 \text{ Pa}$ et $G_{23} = 1.015 \text{ Pa}$
Cœur :	$E_1 = 0.34156 \text{ Pa}$; $E_2 = 0.1793 \text{ Pa}$ et $\nu_{12} = 0.44$
	$G_{12} = 0.1 \text{ Pa}$; $G_{13} = 0.0608 \text{ Pa}$ et $G_{23} = 0.1015 \text{ Pa}$
Conditions aux limites :	$w = \theta_y = 0$ sur AB ; $u = \theta_y = 0$ sur BC $w = \theta_x = 0$ sur CD et $w = \theta_x = 0$ sur DA
Chargement uniforme :	$q_0 = 1 \text{ N/mm}^2$

FIG. 5.10 – Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous chargement uniforme. Données du problème

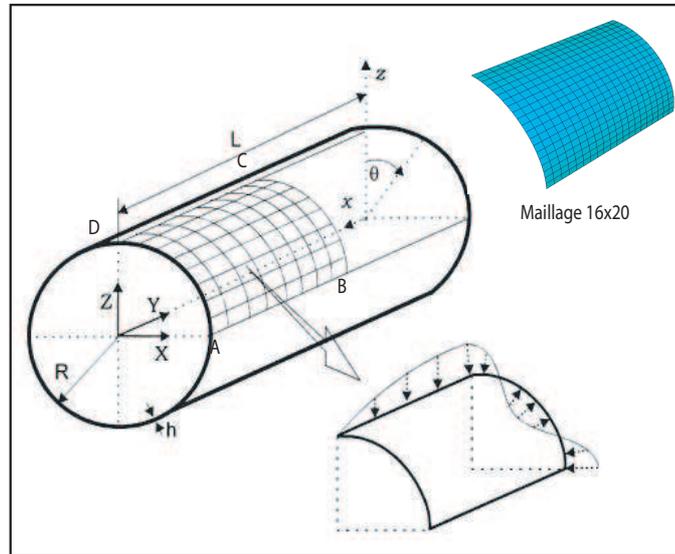
Modèles	Heterosis [104]	DSQ [80]	HMiSP4/Q4/ml [134]	DMQSml	Sol. 3D [130]
$\bar{w}_c(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)$	34.92	34.55	36.136	34.81	34.55
Erreur %	1.071	0	4.590	0.753	

TAB. 5.4 – Plaque carrée Sandwich non symétrique simplement supportée sous chargement uniforme. Déplacement maximum

5.3.3 Cylindre stratifié simplement supporté sous chargement sinusoïdal

Il s'agit d'un cylindre relativement long ($L = 80$ et $R = 20$) simplement supporté qui est soumis à un chargement sinusoïdal $q = q_0 \sin(\pi x/L) \cos(4\theta)$. Pour ce type de chargement, l'accroissement de charge est rapide d'un élément à un autre sur la circonférence. Il est composé d'une stratification à 10 couches (5 couches symétriques : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$) de même épaisseur (Fig. 5.11). Ce problème a été étudié en 1989 par Ren [126] qui a proposé une solution analytique. Il a été repris en 1991 par Varadan et al [140] pour proposer une solution basée sur l'élasticité 3D. Les résultats sont donnés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w}_C = \frac{100E_T}{q_0 S^4 h} w_C ; S = \frac{R}{h} \quad (5.2)$$



Propriétés des matériaux :	$E_L = 25 \times 10^6$; $E_T = 1 \times 10^6$ (en psi)
	$G_{LT} = 0.5 \times 10^6$; $G_{TT} = 0.2 \times 10^6$ $\nu = 0.25$
Conditions aux limites :	sur AD : $U = W = \theta_Y = 0$
	sur AB : $W = \theta_X = \theta_Y = 0$
Conditions de symétrie :	sur BC : $V = \theta_X = \theta_Z = 0$
	sur CD : $U = \theta_Y = \theta_Z = 0$
Stratifications :	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$

FIG. 5.11 – Cylindre stratifié simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Géométrie et données

Sur le tableau 5.5, nous avons présenté les valeurs de la flèche maximale au point C. Elles sont comparées aux résultats de référence et à ceux obtenus par le modèle de plaque d'ordre supérieur EHOST (Efficient Higher Order Shell Theory) [90] (élément quadrilatéral doublement courbe à 9 nœuds et 5 ddl/nœud, proposé pour des coques composites stratifiées symétriques). Celui-ci prend en compte l'effet de Zig-Zag associé à la théorie d'ordre supérieur, ce qui améliore les résultats de manière significative.

L'erreur (%) est calculée par rapport à la solution d'élasticité 3D.

Pour un maillage de (16x20), nous remarquons bien que le pourcentage d'erreur de nos résultats par rapport à la solution 3D diminue dès qu'on réduit la valeur de l'épaisseur h (une erreur de 4,2165% par exemple pour $h = 0,2$).

Nous expliquons l'écart entre la solution numérique obtenue par notre modèle et les solutions de référence par les imperfections géométriques des maillages, en particulier lorsque le rayon est relativement petit par rapport à L , ainsi lorsque ($L/h \leq 50$).

Pour améliorer nos résultats, nous avons raffiné le maillage pour avoir le même nombre de ddl (2665) comme le modèle EHOST. Les valeurs de déplacement sont en bon accord avec celles obtenues par EHOST pour les trois élancements de L/h .

$w_C(0, L/2, R) = \frac{100E_T}{q_0S^4h}w_C$						
L/h	NHMiSP4/ml (20 x 20) 4 nœuds et 5ddl/nœud	DMQSml (16 x 20) 4 nœuds et 5ddl/nœud	DMQSml (40 x 12) 2665 ddl	EHOST (20 x 6) 9 nœuds et 5ddl/nœud 2665 ddl	Sol. Analy. [126]	Elas. 3D [140]
10	1.015	0.971	1.371	1.373	1.369	1.38
Er.	26.45	29.6637	0.652	0.507		
50	0.549	0.656	0.764	0.7613	0.762	0.7622
Er.	27.97	13.933	0.236	0.118		
100	0.471	0.6525	0.629	0.6256	0.6255	0.6261
Er.	24.77	4.2165	0.463	0.0798		

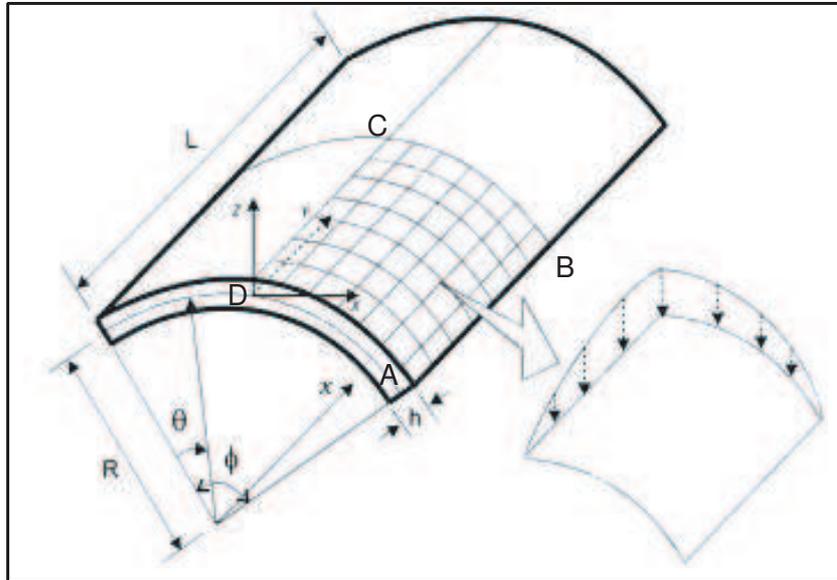
TAB. 5.5 – Cylindre simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Flèche au point C

5.3.4 Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoïdal

Un panneau cylindrique simplement supporté est soumis à un chargement sinusoïdal :

$$q = q_0 \sin(\pi y/L) \cdot \sin(\pi \theta/\phi); \quad \phi = \pi/3, \quad L = 30, \quad R = 5 \quad (5.3)$$

Il est composé d'une stratification à 3 couches ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$). Les conditions aux limites et les propriétés du problème sont données par la figure 5.12. Le tableau 5.6 présente les résultats de la flèche au centre du panneau, il montre que notre modèle *DMQSmI* à quatre nœuds converge vers les solutions de référence. Le calcul d'erreur est donné par rapport aux résultats de l'élasticité tridimensionnelle.



Propriétés des matériaux :	$E_L = 25 \times 10^6$; $E_T = 1 \times 10^6$
(en psi)	$G_{LT} = 0.5 \times 10^6$; $G_{TT} = 0.2 \times 10^6$
	$\nu = 0.25$
Conditions aux limites :	sur AD : $V = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_{YZ} = 0$
	sur AB : $U = W = \theta_X = \theta_Y = \theta_{YZ} = 0$
Conditions de symétrie :	sur CD : $U = \theta_Y = \theta_Z = 0$
	sur BC : $V = \theta_X = \theta_Z = 0$
Stratification :	$90^\circ/0^\circ/90^\circ$

FIG. 5.12 – Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Données du problème

Pour $R/h = 5$ (cas d'une coque épaisse avec effet de CT important) et $R/h = 20$ (coque mince avec effet de CT modéré), le pourcentage d'erreur entre nos

valeurs et celles de la solution 3D est relativement important. Par contre, pour $R/h = 10$ (coque épaisse), l'erreur par rapport à la solution 3D n'est que de 4,45%.

L'écart entre la solution numérique obtenue par notre modèle et la solution tridimensionnelle [126] peut s'interpréter par l'influence du CT et par les imperfections géométriques des maillages.

$w_C(0, L/2, 0) = \frac{100E_T}{q_0S^4h}w_C$						
L/h Err. %	NHMiSP4/ml (20 x 20)	DMQSmI (8 x 8)	DMQSmI (6 x 20)	DMQSmI (20 x 6)	EHOST (20 x 6)	Elas. 3D [126]
5 Err. %	3.221 12.805	2.99 19.057	3.0992 16.101	3.0208 18.224	3.862 4.548	3.694
10 Err. %	1.247 20.926	1.647 4.451	1.659 5.199	1.662 5.402	1.579 0.127	1.577
20 Err. %	0.821 19.272	1.289 26.745	1.286 26.475	1.31375 29.1789	1.013 0.393	1.017

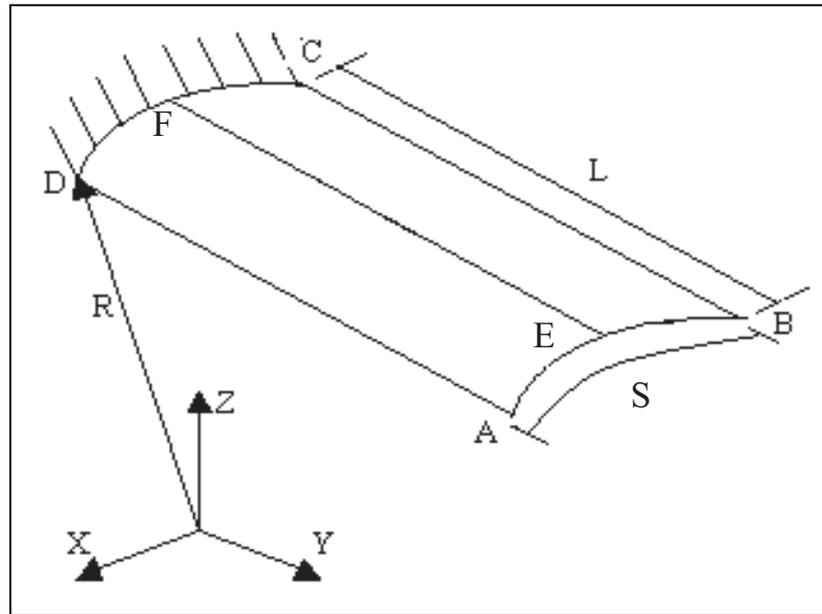
TAB. 5.6 – Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Convergence de la flèche au centre

5.4 Étude des vibrations libres de structures composites

5.4.1 Vibrations libres d'une pale de ventilateur isotrope

Dans le but d'évaluer les performances dynamiques de notre élément, nous avons déterminé les fréquences et modes propres d'une pale de ventilateur (Fig. 5.13). Il s'agit d'un panneau cylindrique encastré à une extrémité courbe, les autres côtés étant libres. Le matériau est considéré comme homogène isotrope. Les fréquences propres de référence ont été obtenues expérimentalement par Olson et Linberg [102].

Le tableau 5.7 regroupe les fréquences calculées et mesurées pour les six premiers modes. La plupart des fréquences calculées sont en bon accord avec les mesures expérimentales.



Géométrie (en mm) : $R = 609.6$; $L = S = 304.8$ et $h = 3.048$

Propriétés des matériaux : $E_1 = 206.843 \text{ GPa}$; $\nu = 0.3$

$\rho = 7.833 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$

Conditions aux limites : sur DC : $u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0$

Conditions de symétrie : sur EF : $u = \theta_y = 0$

Conditions d'antisymétrie : sur EF : $v = w = \theta_x = 0$

FIG. 5.13 – Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Données du problème

Maillage	Élément \ mode	1	2	3	4	5	6
2 x 2	DMQSIso	68.8	104.1	270.8	271.0	406.2	903.2
	Erreur %	19.57	22.57	4.55	22.79	2.83	70.1
	HQS20 [23]	83.4	147.2	241.8	396.5	407.3	606.4
	Erreur %	2.55	9.44	6.64	12.96	3.12	14.19
4 x 4	DMQSIso	88.0	139.4	273.8	357.3	385.3	619.9
	Erreur %	2.80	3.63	5.71	1.79	2.31	16.75
	HQS20 [23]	85.52	141.5	245.7	370.6	410.9	554.8
	Erreur %	0.09	5.23	5.12	5.6	3.89	4.48
8 x 8	DMQSIso	87.4	140.2	253.6	354.8	393.2	559.1
	Erreur %	2.06	4.21	2.08	1.10	0.45	5.29
	HQS20 [23]	85.7	139.3	246.58	349.5	392.14	535.26
	Erreur %	0.14	3.59	4.79	0.43	0.72	0.80
	Exp [102]	85.6	134.5	259.0	351.0	395.0	531.0

TAB. 5.7 – Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Fréquences propres (Hz)

5.4.2 Vibrations libres de panneaux composites

Cet exemple a été traité par Crawley [41]. L'étude concerne trois panneaux cylindriques de même dimension avec différentes séquences d'empilements (Fig. 5.14) : $[0_2/\pm 30]_s$, $[0/\pm 45/90]_s$, $[\pm 45]_{2s}$. Les plis sont en carbone-Epoxy. Les panneaux sont encastrés sur un côté courbe et libres sur le reste du contour. Dans les travaux de Crawley [41], les 5 premières fréquences propres et les modes correspondants sont déterminés expérimentalement et numériquement à l'aide d'un modèle élément fini de coque à 8 nœuds et 5 ddl par nœud tenant compte des effets du CT.

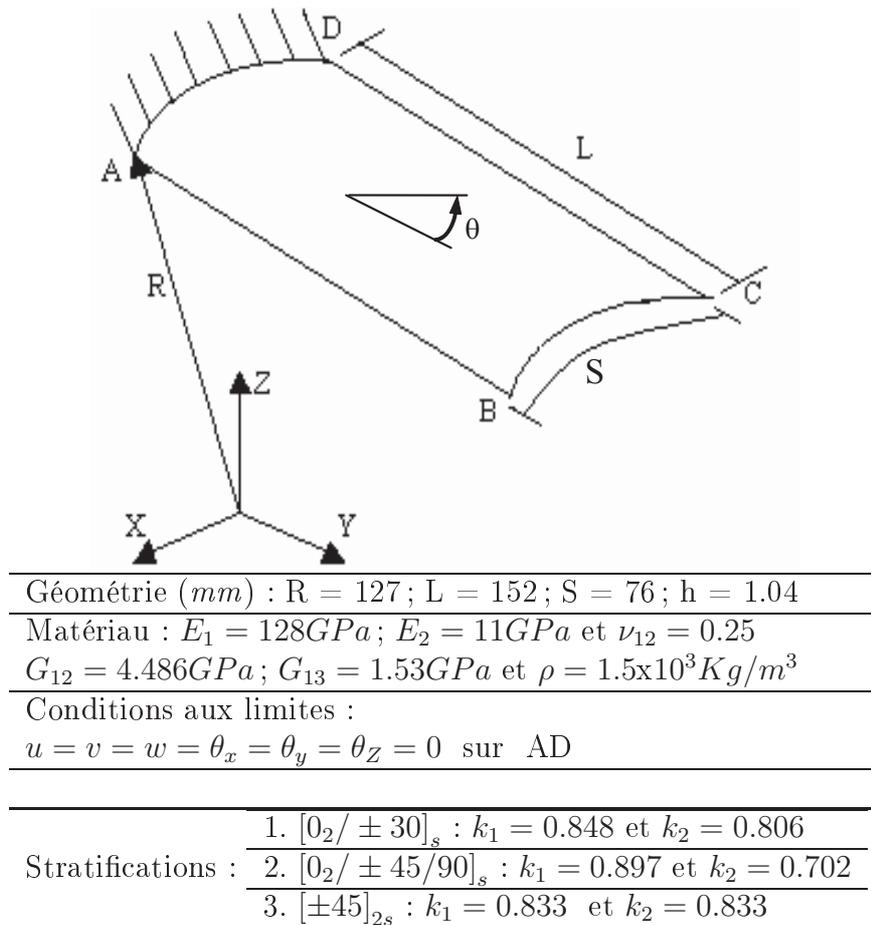


FIG. 5.14 – Vibrations libres de panneaux composites. Données du problème

Nous avons simulé les 5 premières fréquences propres avec un maillage 8 x 16 (16 segments sur les côtés rectilignes) et nous avons confronté nos résultats à ceux obtenus avec l'élément HQS20 (Bouabdallah [23]) et celui de Crawley. L'ensemble des résultats numériques est comparé à la solution de référence expérimentale. Rappelons que l'élément fini du premier ordre HQS20 est quadrilatéral à 4 nœuds et 5 ddl/nœud et est basé sur une formulation de coque cylindrique.

Les trois premières fréquences approchées par notre modèle multicouche *DMQSmI* sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, pour les deux cas de stratifications : $[\pm 45]_{2s}$ et $[0/\pm 45/90]_s$. Pour une stratification $[0_2/\pm 30]_s$, la seconde et la cinquième fréquence présentent une différence par rapport aux résultats expérimentaux.

Stratifications	Mode	Exp. [41]	Calcul [41]	HQS20 (8x16) [23]	DMQSmI (8x16)
$[0_2/\pm 30]_s$	1	185.0	165.7	167.2	139
	2	254.1	289.6	292.4	160
	3	555.6	597.1	606.2	519
	4	670.0	718.5	724.6	757
	5	794.0	833.3	848.6	983.21
$[0/\pm 45/90]_s$	1	177.0	192.4	193.1	181.58
	2	201.8	236.1	236.3	233.32
	3	645.0	705.8	709.3	659.74
	4	754.0	808.2	823.4	1085.76
	5	884.8	980.6	1001.	1447.4
$[\pm 45]_{2s}$	1	145.3	147.0	143.7	182
	2	222.0	238.0	234.1	218
	3	712.0	768.1	754.4	676
	4	774.2	812.1	801.4	884
	5	997.0	1038.	1054.	1016

TAB. 5.8 – Vibrations libres de panneaux composites. Fréquences propres (Hz)

Chapitre 6

Conclusions générales & perspectives

Conclusions générales

Dans ce travail, un nouveau modèle variationnel discret est proposé : le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin). Les éléments finis de plaque et de coque qui y sont développés ont pour objectif d'alimenter les codes de calcul des structures avec des éléments finis qui soient simples de géométrie (un nombre minimum de nœuds et de ddl par nœud), robustes et efficaces du point de vue précision et convergence. Ils devront être en mesure d'analyser des structures sandwichs et multicouches quelque soit le nombre de couches.

Pour développer nos modèles, deux approches géométriques sont utilisées : l'approche par facettes planes pour formuler l'élément de plaque et l'approche du solide isoparamétrique 3D dégénéré pour formuler l'élément de coque. Les deux modèles sont basés sur la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin, prenant en compte les effets du CT dans la direction de l'épaisseur.

L'originalité du modèle DDM réside dans l'introduction d'hypothèses discrètes, dites « modifiées » de Mindlin. Celles-ci autorisent l'élimination de ddl rotationnels au milieu des bords élémentaires, utilisés pour enrichir le champ des courbures de flexion. Le modèle initial, qu'il soit de plaque ou de coque, est quadrilatéral à 8 nœuds, avec une approximation quadratique des rotations de la normale. Il garde sa forme quadrilatérale mais il passe à 4 nœuds tout en maintenant le nombre de ddl par nœud à trois pour la plaque et à cinq (ou six) pour la coque.

Pour des raisons de simplicité et suite à des difficultés rencontrées lors de la formulation du modèle de coque multicouche $DMQSm_l$, nous avons dans un premier temps formulé l'élément en déplacement de plaque, que nous avons baptisé $DMQPm_l$ (Discrete Mindlin Quadrilateral for Plates multilayer). La solution idéale est de partir d'une formulation en déplacement relativement complexe,

avec des hypothèses cinématiques et mécaniques discrètes définies localement (au niveau élémentaire), et d'un élément fini à 8 nœuds pour arriver en fin de parcours à un élément à 4 nœuds en gardant sensiblement des précisions identiques à celles des éléments quadratiques à 8 nœuds. Il est évident que cette technique, une fois utilisée dans la formulation de coque, verra sa complexité évoluée dans un formalisme variationnel de coque isoparamétrique courbe, où il est question de déformations covariantes de CT associées à des déformations curvilignes de bord.

L'originalité du modèle de plaque $DMQP_{ml}$ est l'extension du modèle de kati, proposé initialement pour les plaques homogènes isotopes, au cas des plaques composites multicouches. Ceci a été possible grâce à l'introduction d'une nouvelle hypothèse mécanique discrète modifiée de Mindlin.

Une formulation qualitative d'éléments finis de plaques ne peut être complète sans une extension aux coques de forme quelconque. Nous avons en conséquence développé deux modèles d'éléments finis isoparamétriques courbes à 4 nœuds pour l'analyse des coques isotopes et composites multicouches. L'introduction de la notion de repère covariant naturel et contravariant autorise la prise en compte, dans la formulation théorique, du gauchissement des coques.

Le modèle de coque isotrope baptisé $DMQSIso$ (Discrète Mindlin Quadrilateral for Shells) est formulé en déplacement. Le principal apport réside dans la manière de présenter les contributions en flexion et en CT au niveau variationnel. Le modèle multicouche $DMQS_{ml}$ est formulé sur la base de l'élément isotrope $DMQSIso$, la première hypothèse cinématique reste la même puisqu'elle ne fait pas intervenir les termes de comportement. Par contre, la deuxième hypothèse mécanique est modifiée pour prendre en compte le caractère multicouche des composites.

Les tests effectués ont montré une absence de verrouillage en membrane et CT pour l'ensemble de nos éléments. Les éléments $DMQP_{ml}$ et $DMQS_{ml}$ nous ont permis d'obtenir, pour les plaques et les coques composites, de bons résultats dans les domaines statique et dynamique (vibrations libres). En particulier, les inconnues de type global tels que les déplacements ou les fréquences propres sont toujours bien estimées avec des maillages relativement « grossiers ». Pour le calcul de ce type d'inconnues, il semble donc moins utile d'utiliser des théories plus complexes qui génèrent souvent de nouvelles difficultés (conditions aux limites, convergence dans le cas mince vers la théorie de Kirchhoff). En ce qui concerne les contraintes tridimensionnelles, nous avons obtenu de bons résultats sur de nombreux exemples numériques par le modèle $DMQP_{ml}$. En outre, nous avons montré que toutes les conditions théoriques de continuité sont satisfaites exactement. Dans certains cas- limites de plaques épaisses et comportant peu de couches, les erreurs sur les contraintes planes peuvent être localement assez importantes, le problème étant alors purement tridimensionnel. Dans le chapitre 3, nous avons exprimé les contraintes de CT en fonction des efforts tranchants à l'aide des équations d'équilibre. Cela signifie que l'on connaît a priori, à un facteur

multiplicatif près, une bonne approximation de la distribution de ces contraintes. Nous avons confronté notre modèle DMQP ml à une dizaine de modèles de théories d'ordre supérieur. Les résultats obtenus des contraintes de CT sont très proches de ceux des modèles d'ordre supérieur, voire meilleur dans certaines situations.

Perspectives

En guise de perspectives à ce travail de recherche, nous envisageons de développer les aspects suivants :

- Améliorer les distributions des contraintes planes à travers l'épaisseur, en considérant un gauchissement non constant de la section ;
- Développer le modèle DMQP ml avec la même originalité : partir d'un élément à huit nœuds et arriver à un élément à quatre nœuds seulement, en adaptant une théorie d'ordre supérieur ;
- Développer l'analyse non-linéaire géométrique pour le calcul des configurations pré et post-flambement, en étudiant l'influence du CT ;
- Développer l'analyse non-linéaire matérielle, prenant en compte l'endommagement dans les structures composites ;
- Elaborer une démarche de conception d'emballages de transport en carton ondulé, visant à estimer au mieux la résistance à la compression verticale. Celle-ci pourrait être évaluée qualitativement en exploitant le formalisme non-linéaire, envisagé précédemment, sur une structure sandwich, en l'occurrence le carton ondulé. Il conviendrait de prendre en compte le contact entre le plateau de compression et le carton ondulé, ainsi qu'un comportement élastique ou viscoélastique couplé à l'endommagement.

Bibliographie

- [1] Z. Aboura. Etude du processus de délaminage modes i et ii et modes mixtes, de matériaux composites à renfort tissé à différentes vitesses de sollicitation. *Thèse de doctorat, UTC*, 1993.
- [2] K.S. Afaq. *Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites "multicouches et sandwichs" avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [3] S. Ahmad, B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 2 :419–451, 1970.
- [4] O. Allix. *Modélisation du comportement des composites stratifié : application à l'analyse du délaminage*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [5] S.A. Ambartsumyan. *Theory of anisotropic plate*. Technomic Publishing Co, 1969.
- [6] F. Auricchio and E. Sacco. A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 44 :1481–1504, 1999.
- [7] F. Auricchio and E. Sacco. Partial-mixed formulation and refined models for the analysis of composite laminates within an fsdt. *Com. Str.*, 46 :103–113, 1999.
- [8] F. Auricchio and E. Sacco. Refined first-order shear deformation theory models for composite laminates. *Jou. App. Mech.*, 70 :381–390, 2003.
- [9] F. Auricchio, E. Sacco, and G. Vairo. A mixed fsdt finite element for monoclinic laminated plates. *Com. Str.*, 84 :624639, 2006.
- [10] R.C. Averill. Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage. *Com. Part B : Engineering*, 4 :381–395, 1994.
- [11] R. Ayad. Contribution à la modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. application à des matériaux d'emballage. *Habilitation à diriger les recherches, URCA*, 2002.

- [12] R. Ayad. Une formulation mixte-hybride naturelle robuste pour la modélisation des coques courbes isotropes. *REMN*, 14, n° 1 :33–64, 2005.
- [13] R. Ayad, J.L. Batoz, and G. Dhatt. Formulation du modèle misp coque tridimensionnel dégénéré. *REMN*, 11, n° 6 :719–747, 2002.
- [14] R. Ayad, A. Rigolot, and N. Talbi. An improved three-node hybride-mixed element for mindlin-reissner plates. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 51 :919–942, 2001.
- [15] Rezak Ayad. *Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement*. Thèse de doctorat, UTC, 1993.
- [16] J.J. Azar. Bending theory for multilayer orthotropic sandwich plates. *Ame. Ins. Aer. Ast*, 6 :2166–2169, 1968.
- [17] I. Babuska and T. Scapolla. Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 28 :155–179, 1989.
- [18] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A four-node plate bending élément based on mindlin/reissner plate theory and a mixed interpolation. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 21 :367–383, 1985.
- [19] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 22 :697–722, 1986.
- [20] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermès, Vol. 3 : Coque, 1992.
- [21] J. Belinha and L.M.J.S. Dinis. Analysis of plates and laminates using the element-free galerkin method. *Com. Str.*, 84 :1547–155ç, 2006.
- [22] P. Boisse, J.L. Daniel, and J.C. Gelin. A new class of three node and four node shell elements for the finite inelastic strain analysis. applications in sheet metal forming. *New Advances in Computational Structural Mechanics*, eds P.Ladevèze & O.C.Zienkiewicz, Elsevier, 1992.
- [23] M.S. Bouabdallah. Modélisation de coques cylindriques raidies isotropes et composites. *Thèse de doctorat, UTC*, 1992.
- [24] C.A. Brebbia and I.J. Connor. Fundamentals of finite element techniques for structural engineers. *J. Wiley and Sons, N.Y*, 1974.
- [25] C.A. Bronkhorst and J.R. Riedemann. The creep deforming behavior of corrugated containers in a cyclic moisture envirement. In *Proceeding of the Symposium on Moisture Induced Creep Behavior of Paper and Board*, pp. 249-273, Stockholm, Sweden, Décembre 5-7, 1994.
- [26] R.P. Carreira. *Validations par éléments finis des Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4*. Thèse de doctorat, ENPC, 1998.

- [27] R.P. Carreira, J.F. Caron, and A. Diaz Diaz. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mech. Mat.*, 34 :217–230, 2002.
- [28] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Com. str.*, 50 :183–198, 2000.
- [29] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9 :87–140, 2002.
- [30] E. Carrera. On the use of the murakami’s zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Com. Str.*, 82 :541–554, 2004.
- [31] E. Carrera. On the use of transverse shear stress homogeneous and non-homogeneous conditions in third-order orthotropic plate theory. *Com. Str.*, 77 :341–352, 2007.
- [32] E. Carrera and S. Brischetto. Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed theories for layered shells. *Com. Str.*, 2007.
- [33] E. Carrera and S. Brischetto. Analysis of thickness locking in classical, refined and mixed multilayered plate theories. *Com. Str.*, 82 :549–562, 2008.
- [34] E. Carrera and L. Demasi. Classical multilayered plate elements based upon pvd and rmvt. part 2 : numerical implementations. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 55 :253–291, 2002.
- [35] S. Cen, Y. Long, and Z. Yao. A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates. *Com. Str.*, 80 :819833, 2002.
- [36] A. Chabot. *Analyse des efforts à l’interface entre les couches des matériaux composites à l’aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches*. Thèse de doctorat, ENPC, 1997.
- [37] M. Cho and J.S. Kim. A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. *Com. Part B : Engineering*, 31 :65–74, 2000.
- [38] M. Cho and R. Paramerter. Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations. *Ame. Ins. Aer. Ast*, 31, n° 7 :1299–1306, 1993.
- [39] W.F. Cofer and K.M. Will. A three dimensional shell solid transition element for general nonlinear analysis. *Com. Str.*, 38, n° 4 :449–462, 1991.
- [40] J. Connor and C.A. Brebbia. Stiffness matrix for shallow rectangular shell elements. *Eng. Mech. Div., ASCE*, 93 :43–65, 1967.
- [41] E.F. Crawley. the natural mode of graphites/ epoxy cantilever plates and shells. *Com. Mat.*, 13 :195–205, 1979.

- [42] M. D Ottavio, D. Ballhause, T. Wallmersperger, and B. Kroplin. Considerations on higher-order finite elements for multilayered plates based on a unified formulation. *Com. Str.*, 84 :12221235, 2006.
- [43] F. Daghia, S. Miranda, F. Ubertaini, and E. Viola. A hybrid stress approach for laminated composite plates within the first order shear deformation theory. *Int. Jour. Soli. Str.*, 45 :1766–1787, 2008.
- [44] F. Dammak, S. Abid, A. Gakwaya, and G. Dhat. A formulation of the non linear discrete kirchhoff quadrilateral shell element with finite rotations et enhanced strains. *REM N*, 14, n° 1 :7–31, 2005.
- [45] M. Di Sciuva. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti. Accad. Sci. Torino*, 118 :279–295, 1984.
- [46] M. Di Sciuva. Bending, vibration and buckling of simply supported thick multi-layered orthotropic plates. an evaluation of a new displacement model. *Jou. Sou. Vib.*, 105, n°3 :425–442, 1986.
- [47] M. Di Sciuva and U. Icardi. Discrete-layer models for multilayered shells accounting for interlayer continuity. *Mec.*, 28 :281–291, 1993.
- [48] A. Diaz diaz. *Dé laminage des matériaux multicouches : Phénomènes, Modèles et Critères*. Thèse de doctorat, ENPC, 2001.
- [49] A. Diaz Diaz, J.-F. Caron, and R. P. Carreira. Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. *Com. Str.*, 58 :195–208, 2002.
- [50] E.N. Dvorkin and K.J. Bathe. A continuum mechanics based four node shell element for general non-linear analysis. *Eng. Com.*, 1 :77–88, 1984.
- [51] J.J. Engblom and O.O. Ochoa. Though the thickness stress prediction for laminate plates of advanced composite materials. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 21 :1759–1776, 1985.
- [52] M.E. Fares and M.Kh. Elmarghany. A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. *Com. Str.*, 82 :7183, 2008.
- [53] AJM. Ferreira, CMC. Roque, and PALS. Martins. Radial basis functions and higher order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates. *Com. Str.*, 66 :287293, 2004.
- [54] G. Fezans. *Analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques par éléments finis isoparamétriques tridimensionnels dégénérés*. Thèse de doctorat, ENSAE Toulouse, 1981.
- [55] W. Flugge. *Sresses in shells*, springer verla. 1960.
- [56] A.C. Gilchrist and J.C. Suhling. Nonlinear finite element modeling of corrugated board asme, amd. *Mech. Cel. Mat.*, 213 :101–106, 1999.

- [57] B.E. Greene, R. Strome, and R.C. Weikel. Application of the stiffness method to the analysis of shell structures. In *In Proc. Aviation Conference of ASME, Los Angeles, CA*, Mars, 1961.
- [58] Shi Guangyu. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int. Jou. Sol. Str.*, 44 :43994417, 2007.
- [59] R. Hadj-Ahmed, G. Foret, and A. Ehrlacher. Stress analysis in adhesive joints with a multiparticle model of multilayered materials (m4). *Int. Jou. Adh. Adh.*, 21 :297–307, 2001.
- [60] S.J. Hossain, P.K. Sinha, and A.H. Sheikh. A finite element formulation for the analysis of laminated composite shells. *Com. Str.*, 82 :16231638, 2004.
- [61] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E. Daya. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. *Com. Str.*, 84 :282292, 2008.
- [62] T.J. Hughes and W.K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shells : Part i : Three dimensional shells. part ii : Two dimensional shells. *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, 26-27 :331–362 et 167–181, 1981.
- [63] U. Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Com. Part B : Engineering*, 32 :343–354, 2001.
- [64] B. Irons and M. Loikkanen. An engineer's defence of the patch test. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 19 :1391–1401, 1983.
- [65] S.A. Kaczkowski. *Plpty obliczenia statyczne*. Arkady, 2 edition, 1980.
- [66] T. Kant and K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Com. Str.*, 49 :65–75, 2000.
- [67] R.K. Kapania and S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams an plates, part i : Shear and buckling. *Ame. Ins. Aer. Ast*, 27, n° 7 :923–934, 1989.
- [68] S. Kapuria, P.C. Dumir, and N.K. Jain. Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams. *Com. Str.*, 64 :317327, 2004.
- [69] C. Kassapoglou and P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates. *Jou. Com. Mat.*, 27 :292–308, 1987.
- [70] I. Katili. A new discrete kirchhoff-mindlin element based on mindlin-reissner plate theory and assumed shear strain fields - part i : An extended dkt element for thick-plate bending analysis. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 36 :1859–1883, 1993.

- [71] I. Katili. A new discrete kirchhoff-mindlin element based on mindlin-reissner plate theory and assumed shear strain fields - part ii : An extended dkq element for thick-plate bending analysis. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 36 :1885–1908, 1993.
- [72] Irwan Katili. *Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque*. Thèse de doctorat, UTC, 1993.
- [73] T. Kerber. Revue des éléments finis de coques au travers des phénomènes de verrouillage et de leurs remèdes. *La Recherche Aérospatiale*, 3 :45–79, 1990.
- [74] T.P. Khatua and Y.K. Cheung. Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 6 :11–24, 1973.
- [75] J.S. Kim and M. Cho. Enhanced first-order theory based on mixed formulation and transverse normal effect. *Int. Jou. Sol. Str.*, 44, Issues 3-4 :1256–1276, February 2007.
- [76] K.D. Kim, H. Sung-Cheon, and S. Songsak. Geometrically non-linear analysis of laminated composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains. *Int. Jou. non-linear Mech.*, 2007.
- [77] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, 40 :1850, 51-88.
- [78] P. Ladeveze. *Les modèles classiques et leurs extension pour le calcul des plaques* . volume 2 of Calcul de Structures et Intelligence Artificielle. Plurialis, 1988.
- [79] M. Laitinen, H. Lahtinen, and S.G. Sjolind. Transverse shear correction factors for laminates in cylindrical bending. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11 :41–47, 1995.
- [80] P. Lardeur. Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal. *Thèse de doctorat, UTC*, 1990.
- [81] A. Legay and A. Combescure. Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element shb8ps. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 57 :1299–1322, 2003.
- [82] S.G. Lekhnitskii. Theory of elasticity of an anisotropic elastic body. Technical report, Holden Dey, San Francisco, 1963. Holden Dey, San Francisco.
- [83] D. Lemosse. *Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces*. Thèse de doctorat, Ecole doctorale SPMI/INSA-Rouen, 2000.
- [84] M. Levinson. An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communication*, 7 :343–350, 1980.

- [85] M. Levinson. Free vibration of a simply supported, rectangular plate : an exact elasticity solution. *Jou. Sou. Vib.*, 98 :289–298, 1985.
- [86] G.M. Lindberg, M.D. Olson, and G.R. Cowper. New development in the finite element analysis of shells. *Q. Bull Div. Mech. Eng. et Nat. Aeronautical Establishment, National Research council of Canada*, 4, 1969.
- [87] S. Luo. The bending stiffness of corrugated boards. *Mechanics of Cellulose Materials, Edited by R.W. Perkins, ASME AMD*, 45 :15–26, 1992.
- [88] J. Mackerle. Finite- and boundary-element linear and nonlinear analyses of shells and shell-like structures : A bibliography (1999–2001). *Fin. Elem. Anal. Des.*, 38 :765–782, 2002.
- [89] R.H. MacNeal and R.L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Fin. Elem. Anal. Des.*, 1 :3–20, 1985.
- [90] C. Maenghyo and J.S. Kim. A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. *Com.*, 31 :65–74, 2000.
- [91] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia et shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *Jou. Appl. Meth.*, 18 :31–38, 1951.
- [92] F. Moleiro, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, and J.N. Reddy. Mixed least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite plates. *Com. Str.*, 86 :826–838, 2008.
- [93] L.S.D. Morley. Skew plates and structures. *Pergamon, Oxford*, 1963.
- [94] H. Murakami. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Jou. App. Mech.*, 53 :661–666, 1986.
- [95] M.V.V. Murthy. An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate. Technical report, NASA, 1981.
- [96] T. Naciri, A. Ehrlacher, and A. Chabot. Interlaminar stress analysis with a new multiparticle modelization of multilayered materials (m4). *Com. Scie. Tech.*, 58 :337–343, 1998.
- [97] Viet Tung NGUYEN. *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [98] A.K. Noor and W.S. Burton. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl. Mech. Rev*, 42, n° 1 :1–12, 1989.
- [99] A.K. Noor and W.S. Burton. Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates. *Com. Str.*, 11 :183–204, 1989.
- [100] T. Nordstrand, L. A. Carlsson, and H. G. Allen. Transverse shear of structural core sandwich. *Com. Str.*, 27 :317–329, 1994.
- [101] T.M Nordstrand and L.A. Carlsson. Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates. *Com. Str.*, 37 :145–153, 1997.

- [102] M.D. Olson and G.M. Lindberg. Dynamic analysis of shollw shell with a doubly-curved traingular finite element. *Sou. Vib.*, 9 :299–318, 1971.
- [103] E. Onate, O.C. Zienkiewicz, B. Suarez, and R.L. Taylor. A general methodology for deriving shear constrained reissner-mindlin plate element. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 33 :345–367, 1992.
- [104] D.R.J. Owen and J.A. Figueiras. Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 19 :541–566, 1983.
- [105] N.J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *JOU. Com. Mat*, 3 :398–411, 1969.
- [106] N.J Pagano. Exact solutions for rectangular bi-directional composites and sandwich plates. *Com. Mat.*, 4 :20–34, 1970.
- [107] N.J Pagano. Stress fields in composite laminates. *Int. Jou. Sol. Str.*, 14 :385–400, 1978.
- [108] N.J. Pagano and S.J Hatfield. Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites. *Ame. Ins. Aer. Ast.*, 10, n °7 :931–933, 1972.
- [109] V. Panc. *Theories of elastic plates*. Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1975.
- [110] M.K. Pandit, A.H. Sheikh, and B.N. Singh. An improved higher order zigzag theory for the static analysis of laminated sandwich plate with soft core. *Fin. Ele. Ana. Des.*, 2008.
- [111] H. Parisch. An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 31 :127–150, 1991.
- [112] W.S Peterson and T.S. Fox. Unified container performance theory. *Paper Science and Technology. The Cutting Edge*, pages 172 – 189, 1979.
- [113] D.T. Pham. Théories des plaques sandwichés élastiques anisotropes. *Thèse de docteur-Ingénieur*, UTC, 1976.
- [114] T.S. Plagianakos and D.A. Saravanos. Higher-order layerwise laminate theory for the prediction of interlaminar shear stresses in thick composite and sandwich composite plates. *Com. Str.*, 2008.
- [115] F.J. Plantema. Sandwich construction. In *Wiley, New York*, 1966.
- [116] J.C. Pommier and J. Poustis. Bending stiffness of corrugated board prediction using the finite element method. *Mech. Woo. Pap. Mat.*, 1990.
- [117] E. Ramm and A. Matzenmiller. Large deformation shell analysis based on the degeneration concept. *Fin. Ele. Meth. Pla. She. Str.*, 1, Hughes, Hinton, Eds :365–393, 1986.
- [118] F.G. Rammerstofer. Composite and sandwich shells, lecture in nonlinear analysis of shells by finite elements. In *CISM Course, Udine, Italy, June*, 1991.

- [119] J.N. Reddy. Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method. *Jou. Sou. vib.*, 66 :565–576, 1979.
- [120] J.N. Reddy. A simple higher-theory for laminated composites. *Appl.Mech.ASME*, 51 :745–752, 1984.
- [121] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite platesvol. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 3 :173–180, 1987.
- [122] J.N. Reddy and W.C. Chao. A comparison of closed form and finite element solutions of thick, laminated, anisotropic rectangular plates. *Nucl.Engrg.Des*, 64 :153–167, 1981.
- [123] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of plates. *Jou. App. Mech.*, 12 :69–77, 1945.
- [124] E. Reissner and Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aeolotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 28 :402–408, 1961.
- [125] J.G. Ren. A new theory of laminated plate. *Com. Sci. Tech.*, 26 :225–239, 1986.
- [126] J.G. REN. Analysis of simply supported laminated circular cylindrical shell roofs. *Com. Str.*, 11 :277–292, 1989.
- [127] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. Geometrically exact stress resultant shell models : formulation and computational aspects of the nonlinear theory. *In Analytical and Computational Models of Shells, (Noor, Belytschko and Simo Eds), ASME, CED-3* :161–190, 1989.
- [128] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model - part iii : Computational aspects on the nonlinear theory. *Com. Meth. App. Mec. Eng.*, 79 :21–70, 1990.
- [129] O.A. Sinan and A. Chaudhuri. Levy type analysis of cross-ply plates based on higher-order theory. *Com. Str.*, 78 :243–253, 2007.
- [130] S. Srinivas. A refined analysis of composite laminates. *Jou. Sou. vib.*, 30, n °4 :495–507, 1973.
- [131] S. Srinivas and A. K. Rao. Bending vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int. Jou Sol. Str.*, 6 :1463–1481, 1970.
- [132] Y. Stavsky. Bending and stretching of laminated aeolotropic plates. *Jou. Eng. Mech. Division ACSE*, 87 :31–56, Dec. 1961.
- [133] C.T. Sun and J.M. Whitney. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *AIAA*, 11 :178183, 1973.
- [134] A. Tafla. *éléments finis mixte-hybrides pour les structures en coques composites multicouches*. Thèse de doctorat, URCA, 2007.

- [135] M. Tahani and A. Nosier. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Mat. Des.*, 24 :647–658, 2003.
- [136] Q. Tanguy. Facteurs de correction de cisaillement transverse dans les plaques composites. Master’s thesis, Université P. et M. Curie, 1989-1990.
- [137] R.L. Taylor, J.C. Simo, O.C. Zienkiewicz, and A.C.H. Chan. The patch-test - a condition for assessing fem convergence. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 22 :39–62, 1986.
- [138] P. Topdar, A. Chakraboti, and A.H. Sheikh. An efficient hybrid plate model for analysis and control of smart sandwich laminates. *Com. meth. app. mech. eng.*, 193 :4591–4610, 15 March 2004.
- [139] P. Topdar, A.H. Sheikh, and N. dhang. Finite element analyses of composite and sandwich plates using a continuous inter-laminar shear stress model. *san. str. mat.*, 5, July 2003.
- [140] T.K Varadan and K. Bhaskar. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells-anelasticity approach. *Com. Str.*, 17 :141–156, 1991.
- [141] S. Vlachoutsis. *éléments finis tridimensionnels dégénérés de coques avec intégration explicite suivant l’épaisseur*. Thèse de doctorat, ENSAE - Toulouse, 1987.
- [142] S. Vlachoutsis. Explicit integration for three dimensional degenerated shell finite elements. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 29 :861–880, 1990.
- [143] J.M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *App. Mech.*, pages 302–304, 1973.
- [144] J.M. Whitney and N.J. Pagano. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Jou. App. Mech.*, 37 :10311036, 1970.
- [145] T.E. Wilt, A.F. Saleeb, and T.Y. Chang. A mixed element for laminated plates and shells. *Com. Str.*, 37 :597–611, 1990.
- [146] J.R. Xiao, D.F. Gilhooley, R.C. Batra, J.W. Gillespie Jr., and M.A. McCarthy. Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (hosndpt) and a meshless method. *Com. Part B*, 39 :414427, 2008.
- [147] P.C. Yang, C.H. Norris, and Y. Stavsky. Elastic wave propagation in heteroge-neous plate. *Int. Jou. Sol. Struct.*, 2 :665–684, 1966.
- [148] W.L. Yin. Free-edge effects in anisotropic laminated under extension, bending and twisting, part i : A stress function besed variational approach. *Jou. Appl. Mech.*, 61 :410–, 1994.
- [149] W.L. Yin. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminate / layer model. *Int. Jou. Sol. Str.*, 31 :1549–1564, 1994.
- [150] W. Yu. Mathematical construction of a reissnermindlin plate theory for composite laminates. *Int. Jou. Sol. Str.*, 42 :66806699, 2005.

- [151] Q. Zeng and A. Combescure. A new one-point quadrature, general non-linear quadrilateral shell element with physical stabilization. *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, 42 :1307–1338, 1998.
- [152] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Papadopoulos, and E. Onate. Plate bending elements with discrete constraints : new triangular elements. *Com. Str.*, 35 :505–522, 1990.

Annexe A

Rappel sur les coques isoparamétriques (Les aspects géométrique et cinématique de DDM)⁹

A.1 Cinématique des coques de forme quelconque

A.1.1 Description de la surface moyenne

Bases covariante ou paramétrique et contravariante au point p :

Nous avons considéré la surface moyenne A comme une surface de référence, décrite par deux coordonnées paramétriques ou curvilignes (ξ, η) (Fig. 4.1). Le vecteur position d'un point p de la surface moyenne, dans la configuration $C(t)$, est défini dans la base cartésienne globale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$\vec{x}_p(\xi, \eta) = X_p(\xi, \eta) \vec{i} + Y_p(\xi, \eta) \vec{j} + Z_p(\xi, \eta) \vec{k} \quad (\text{A.1})$$

Une écriture de l'expression de l'élément différentiel $d\vec{x}_p$ au point p permet de définir les deux vecteurs d'une base dite covariante ou naturelle \vec{a}_1 et \vec{a}_2 :

$$d\vec{x}_p(\xi, \eta) = \vec{a}_1 d\xi + \vec{a}_2 d\eta ; \quad \vec{a}_1 = \vec{x}_{p,\xi} \text{ et } \vec{a}_2 = \vec{x}_{p,\eta} \quad (\text{A.2})$$

\vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont tangents à leurs directions respectives ξ et η . On peut définir une base covariante tridimensionnelle $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n})$ ou sous forme matricielle $[F_{0p}] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n}]$. \vec{a}_1 et \vec{a}_2 ne sont pas nécessairement orthogonaux. Le vecteur unitaire \vec{n} normal au plan tangent (\vec{a}_1, \vec{a}_2) est défini par l'expression vectorielle suivante :

⁹DDM : Displacement Discrete Mindlin

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|} \quad (\text{A.3})$$

Une autre base, dite contravariante ou duale, notée $[\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{n}]$, est nécessaire car elle permet de faciliter la représentation de certains tenseurs importants, utilisés par notre modèle DMQS. Elle est définie telle que :

$$[F_{0p}]^{-1} [F_{0p}] = [I] \quad ; \quad [F_{0p}]^{-T} = [\vec{a}^1 \ \vec{a}^2 \ \vec{n}] \quad (\text{A.4})$$

\vec{a}^1 et \vec{a}^2 sont deux vecteurs tangents de cette 2^{ème} base, ils sont orthogonaux à \vec{a}_1 et \vec{a}_2 respectivement :

$$\vec{a}^1 \bullet \vec{a}_2 = \vec{a}^2 \bullet \vec{a}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a}^1 \bullet \vec{a}_1 = \vec{a}^2 \bullet \vec{a}_2 = 1 \quad (\text{A.5})$$

Une relation entre les vecteurs des deux bases s'obtient à partir de l'équation (A.4) et de l'expression suivante du tenseur métrique $[a]$ de la surface moyenne, défini en calculant le carré de la longueur du vecteur élément différentiel $d\vec{x}_p$:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{symétrique : } a_{21}=a_{12})$$

En notant $a = \det [a]$, et d'après l'équation (A.4), on peut écrire :

$$\vec{a}^1 = \frac{1}{a} (a_{22} \vec{a}_1 + a_{12} \vec{a}_2) \quad ; \quad \vec{a}^2 = \frac{1}{a} (a_{21} \vec{a}_1 + a_{11} \vec{a}_2) \quad (\text{A.6})$$

Le vecteur élément différentiel d'aire $d\vec{A}$ (utile pour le calcul intégral du modèle DMQS) s'écrit, connaissant l'expression du vecteur normale \vec{n} :

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \vec{a}_1 d\xi \wedge \vec{a}_2 d\eta = |\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2| d\xi d\eta \vec{n} \\ dA &= |\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2| d\xi d\eta = \sqrt{ad\xi d\eta} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Repère tangent orthonormé :

Ce repère local au point p, de base cartésienne orthonormée $[Q] = [\vec{t}_1 \ \vec{t}_2 \ \vec{n}]$, est choisi comme repère de base dans lequel seront définies certaines composantes des tenseurs de déformations et de contraintes du modèle de déplacement DMQS. Il n'existe pas de règles particulières pour le calcul de la base $[Q]$, nous pouvons choisir de définir par exemple le vecteur \vec{t}_1 comme étant porté par le vecteur covariant \vec{a}_1 et normalisé par rapport à son module, nous écrivons :

$$[Q] = [\vec{t}_1 \ \vec{t}_2 \ \vec{n}] \quad ; \quad \text{avec} \quad \vec{t}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} \quad \text{et} \quad \vec{t}_2 = \vec{n} \wedge \vec{t}_1 \quad (\text{A.8})$$

Ce choix permet effectivement de construire un repère local orthonormé au point p . Il présente néanmoins un inconvénient, celui d'être dépendant de la numérotation des nœuds dans la définition des deux vecteurs tangents, en particulier lorsqu'il s'agit d'éléments triangulaires. Pour palier à cet inconvénient, nous avons finalement choisi, pour notre élément fini de coque, la méthode proposée par Battoz & Dhatt, qui permet d'obtenir un repère orthonormé unique au point p de la surface moyenne, connaissant les composantes de la normale $\vec{n}(n_X, n_Y, n_Z)$. La matrice $[Q]$ s'écrit dans ce cas

$$[Q] = [\vec{t}_1 \ \vec{t}_2 \ \vec{n}] = \begin{bmatrix} C + An_Y^2 & -An_X n_Y & n_X \\ -An_X n_Y & C + An_Y^2 & n_Y \\ -n_X & -n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$A = \frac{1}{1+C} ; C = \vec{n} \bullet \vec{k} = n_z ; 1 + C \neq 0 \left(\vec{k} \neq \vec{n} \right)$$

Cette matrice est obtenue par une rotation rigide du repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ autour de l'axe $\vec{k} \wedge \vec{n}$ de telle sorte que le vecteur \vec{k} coïncide avec la normale \vec{n} après la rotation, \vec{n} est supposé non parallèle à \vec{k} . Si $1 + C = 0$, c'est à dire $(\vec{k} \equiv -\vec{n} ; \vec{t}_1 \equiv \vec{i} ; \vec{t}_2 \equiv -\vec{j})$, dans ce cas la matrice $[Q]$ prendra la forme suivante :

$$[Q] = [\vec{t}_1 \ \vec{t}_2 \ \vec{n}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A.1.2 Description d'un point quelconque

Base covariante au point q :

Le vecteur position d'un point matériel quelconque de la coque, noté q , et situé à une distance z de la surface moyenne, est défini par :

$$\vec{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \vec{x}_p(\xi, \eta) + z \vec{n}(\xi, \eta) \quad (\text{A.11})$$

$$z = \zeta \frac{h}{2} ; -1 \leq \zeta \leq +1 \quad (\text{A.12})$$

Une approximation du vecteur \vec{x}_q , avec une approximation bilinéaire en (ξ, η) pour les vecteurs \vec{x}_p et \vec{n} , est donnée par :

$$\vec{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \left(\vec{x}_{p_i} + \zeta \frac{h}{2} \vec{n}_i \right) \quad (\text{A.13})$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) ; (\xi_i = \pm 1 ; \eta_i = \pm 1)$$

Une écriture de l'élément différentiel $d\vec{x}_q$ permet de définir une base covariante au point q , notée $(\vec{a}_{1\zeta}, \vec{a}_{2\zeta}, \vec{n})$:

$$\{d\vec{x}_q\} = [F_\zeta] \{d\xi\} \quad ; \quad [F_\zeta] = [\vec{a}_{1\zeta} \ \vec{a}_{2\zeta} \ \vec{n}] = [F_0] + \zeta [F_n] \quad (\text{A.14})$$

$$[F_0] = \left[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \frac{h}{2} \vec{n} \right] \quad ; \quad [F_n] = \left[\frac{h}{2} \vec{n}_{,\xi} \ \frac{h}{2} \vec{n}_{,\eta} \ 0 \right] \quad (\text{A.15})$$

$$\det [F_0] = \frac{h}{2} (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \cdot \vec{n} = \frac{h}{2} \sqrt{a} \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \vec{x}_{pi} \quad ; \quad \vec{a}_2 = \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} \vec{x}_{pi} \quad ; \quad \vec{n} = \sum_{i=1}^4 N_i \vec{n}_i \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{n}_{,\alpha} = \sum_{i=1}^4 N_{i,\alpha} \vec{n}_i \quad ; \quad (\alpha = \xi, \eta) \quad ; \quad \langle x_{pi} \rangle = \langle X_i \ Y_i \ Z_i \rangle$$

La matrice $[F_\zeta]$ est linéaire en ζ .

Définition d'un élément de volume :

Un élément de volume dV au voisinage du point quelconque q est défini par :

$$dV = \det [F_\zeta] d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{A.18})$$

Pour calculer le $\det [F_\zeta]$ on écrit la matrice $[F_\zeta]$ en fonction de $[F_0]$ comme suit :

$$[F_\zeta] = [F_0] ([I] + \zeta [b_n]) \quad (\text{A.19})$$

$$[b_n] = [F_0]^{-1} [F_n] = \begin{bmatrix} b_{n11} & b_{n12} & 0 \\ b_{n21} & b_{n22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\eta} & 0 \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\xi} & \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Ainsi $\det [F_\zeta]$, s'écrit :

$$\det [F_\zeta] = \mu(\zeta) \det [F_0] \quad (\text{A.21})$$

$$\mu(\zeta) = \det ([I] + \zeta [b_n]) = 1 - \zeta h H + \zeta^2 \frac{h^2}{4} K \quad (\text{A.22})$$

$$H = -\frac{1}{h} (b_{n11} + b_{n22}) = -\frac{1}{2} (\vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\xi} + \vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\eta})$$

$$K = \frac{4}{h^2} (b_{n11}b_{n22} - b_{n12}b_{n21}) = (\vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\xi}) (\vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\eta}) - (\vec{a}^1 \cdot \vec{n}_{,\eta}) (\vec{a}^2 \cdot \vec{n}_{,\xi})$$

H et K sont respectivement les courbures moyenne et totale (gaussiennes).
L'élément de volume dV s'écrit en fonction de $\mu(\zeta)$:

$$dV = \mu(\zeta) \frac{h}{2} \sqrt{ad} \xi d\eta d\zeta \quad (\text{A.23})$$

Base contravariante au point q :

Par l'utilisation de l'équation (A.19), nous avons trouvé l'expression de la base contravariante $[F_\zeta]^{-1}$ en un point q :

$$[F_\zeta]^{-1} = ([I] + \zeta [b_n]^{-1}) [F_0]^{-1} = \left([I] + \frac{\zeta}{\mu(\zeta)} [\bar{b}]^{-1} \right) [F_0]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

avec :

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} 1/\mu(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu(\zeta) \end{bmatrix} ; \quad [\bar{b}] = \begin{bmatrix} b_{n22} & -b_{n12} & 0 \\ -b_{n21} & b_{n11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Passage du repère naturel au repère tangent :

Le passage du repère naturel ou covariant (ξ, η, ζ) , au repère tangent cartésien (x, y, z) , permet de définir une matrice très importante $[C_\zeta]$, qui va prendre en compte le gauchissement de la coque.

$[C_\zeta]$ est une matrice dont les termes sont équivalents à ceux de la matrice jacobienne inverse pour le cas d'une coque à facettes planes. Dans notre cas, la coque est courbe, les termes de cette matrice sont fonction de (ξ, η, ζ) et font intervenir les termes relatifs au gauchissement de la coque, ainsi que les vecteurs des bases contravariante $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{n})$ et cartésienne locale $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$:

$$[C_\zeta] = [F_\zeta]^{-1} [Q] = [\bar{I}] [C_0] + \frac{\zeta}{\mu(\zeta)} [b_c] \quad (\text{A.26})$$

où

$$[C_0] = [F_0]^{-1} [Q] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}^1 \cdot \vec{t}_1 & \vec{a}^1 \cdot \vec{t}_2 & 0 \\ \vec{a}^2 \cdot \vec{t}_1 & \vec{a}^2 \cdot \vec{t}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

et

$$[b_c] = [\bar{b}] [C_0] = \begin{bmatrix} b_{c11} & b_{c12} & 0 \\ b_{c21} & b_{c22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Remarques :

- Dans notre formulation du modèle DMQS, nous avons admis pour une coque relativement mince, un coefficient $\mu(\zeta) \approx 1$. On obtient ainsi une expression simplifiée de la matrice $[C_\zeta]$:

$$[C_\zeta] = [C_0] + \zeta [b_c] \quad (\text{A.29})$$

- La formulation variationnelle du modèle DMQS, utilisera la matrice $[C_0]$ pour définir les déformations cartésiennes locales de membrane, de flexion et de CT, définies dans la base $[Q]$, en fonction des déformations covariantes. La matrice $[b_c]$ permet de mettre en évidence l'existence du couplage de membrane-flexion.

A.2 Champ des déplacements virtuels

Le champ des déplacements virtuels $u_q^*(\xi, \eta, \zeta)$ du point matériel q est défini avec l'hypothèse des sections droites de *Hencky/Reissner/Mindlin* :

$$\{u_q^*\} = \{u_p^*\} + \zeta \frac{h}{2} \{\beta^*\} \quad (\text{A.30})$$

avec

$$\vec{\beta}^* = \vec{\theta}^* \wedge \vec{n} ; \vec{\beta}^* \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{A.31})$$

$\vec{u}_p^*(\xi, \eta)$ est le vecteur des déplacements virtuels du point p de la surface moyenne ($\zeta = 0$) et $\vec{\theta}^*$ est le vecteur rotation orthogonal à \vec{n} , il s'écrit respectivement dans les deux bases cartésiennes locale $[Q]$ et globale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{\theta}^* = \theta_x^* \vec{t}_1 + \theta_y^* \vec{t}_2 = \theta_X^* \vec{i} + \theta_Y^* \vec{j} + \theta_Z^* \vec{k} \quad (\text{A.32})$$

ainsi,

$$\begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_X^* \\ \theta_Y^* \\ \theta_Z^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Le produit $\vec{\beta}^* = \vec{\theta}^* \wedge \vec{n}$ conduit à écrire $\vec{\beta}^*$ en fonction des rotations locales et globales

$$\vec{\beta}^* = -\theta_x^* \vec{t}_2 + \theta_y^* \vec{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_X^* \\ \theta_Y^* \\ \theta_Z^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Si l'on note par (U^*, V^*, W^*) les composantes du vecteur \vec{u}_p^* dans le repère global, l'expression finale du vecteur \vec{u}_q^* s'écrit

$$\vec{u}_q^* = \begin{Bmatrix} U^* \\ V^* \\ W^* \end{Bmatrix} + \zeta \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_X^* \\ \theta_Y^* \\ \theta_Z^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Ce vecteur est ainsi défini en fonction de six composantes indépendantes trois déplacements U^* , V^* , W^* et trois rotations θ_X^* , θ_Y^* , θ_Z^* .

A.3 Champ des déformations virtuelles

- Définition complète sans simplifications :

L'objectif de cette section est la détermination des composantes virtuelles du tenseur des déformations $[\varepsilon_t^*]$ dans le système de base cartésienne locale, de matrices $[Q]$ (pour le point p^*) et $[Q_\zeta]$ (pour le point q^*). Comme l'épaisseur de la coque est constante par élément, la matrice $[Q]$ ne varie pas selon la direction ζ , nous écrivons alors $[Q] = [Q_\zeta]$. Le tenseur $[\varepsilon_t^*]$ est calculé à partir d'une procédure cinématique consistant à définir, dans le repère tangent local de base $[Q]$, l'accroissement du vecteur déplacement virtuel $d\vec{u}_q^*$ par rapport à celui du vecteur position virtuelle $d\vec{x}_q^*$. Le vecteur position virtuelle \vec{x}_q^* résulte de la superposition du vecteur \vec{x}_q (A.11) et celui du déplacement virtuel \vec{u}_q^* (A.35) :

$$\vec{x}_q^*(\xi, \eta, \zeta) = \vec{x}_q(\xi, \eta, \zeta) + \vec{u}_q^*(\xi, \eta, \zeta) \quad (\text{A.36})$$

Un élément différentiel du vecteur position au voisinage du point virtuel q^* s'écrit

$$d\vec{x}_q^* = d\vec{x}_q + d\vec{u}_q^* \quad (\text{A.37})$$

Ainsi, des équations \vec{x}_q (A.11) et \vec{u}_q^* (A.35), nous déduisons

$$\{du_q^*\} = [L_\zeta^*] \{d\xi\} = [L_\zeta^*] [F_\zeta]^{-1} \{d\xi_q\} \quad ; \quad [L_\zeta^*] = [L_0^*] + \zeta [L_\beta^*] \quad (\text{A.38})$$

$$[L_0^*] = \begin{bmatrix} \vec{u}_{p,\xi}^* & \vec{u}_{p,\eta}^* & \frac{h}{2} \vec{\beta}^* \end{bmatrix} \quad ; \quad [L_\beta^*] = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \vec{\beta}_{,\xi}^* & \frac{h}{2} \vec{\beta}_{,\eta}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Les composantes cartésiennes globales et locales des vecteurs $d\vec{u}_q^*$ et $d\vec{x}_q$ sont reliées entre elles par la matrice $[Q]$, nous écrivons

$$\{du_q^*\} = [Q] \{du_q^*\}_{loc} \quad \text{et} \quad \{dx_q\} = [Q] \{dx_q\}_{loc} \quad (\text{A.40})$$

Nous aboutissons finalement à

$$\{du_q^*\}_{loc} = [L_t^*] \{dx_q\}_{loc} \quad ; \quad [L_t^*] = [Q]^T [L_\zeta^*] [C_\zeta] \quad (\text{A.41})$$

Compte tenu des développements précédents, et avec l'hypothèse des petites déformations, on peut ainsi définir les composantes du tenseur des déformations virtuelles dans la base $[Q]$ comme suit

$$[\varepsilon_t^*] = \frac{1}{2} \left([L_t^*] + [L_t^*]^T \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^* & \frac{1}{2}\gamma_{xy}^* & \frac{1}{2}\gamma_{xz}^* \\ & \varepsilon_y^* & \frac{1}{2}\gamma_{yz}^* \\ sym & & \varepsilon_z^* \end{bmatrix} ; [L_t^*] = \begin{bmatrix} L_{t11}^* & L_{t12}^* & L_{t13}^* \\ L_{t21}^* & L_{t22}^* & L_{t23}^* \\ L_{t31}^* & L_{t32}^* & L_{t33}^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

Le tenseur $[L_t^*]$ fait intervenir des fonctions rationnelles et quadratiques en ζ . Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[L_t^*] = \frac{1}{\mu(\zeta)} \left[[L_{t0}^*] + \zeta [L_{t1}^*] + \zeta^2 [L_{t2}^*] \right] \quad (\text{A.43})$$

Une expression générale, sans simplifications des tenseurs $[L_{t0}^*]$, $[L_{t1}^*]$ et $[L_{t2}^*]$ s'écrit en tenant compte des expressions de $[L_\zeta^*]$ (A.38 et A.39) et de $[C_\zeta]$ (A.26)

$$[L_{t0}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \left[\vec{u}_{p,\xi}^* \quad \vec{u}_{p,\eta}^* \quad \mu(\zeta) \frac{h}{2} \vec{\beta}^* \right] [C_0] \quad (\text{A.44})$$

$$[L_{t1}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \left[\vec{u}_{p,\xi}^* \quad \vec{u}_{p,\eta}^* \quad \frac{h}{2} \vec{\beta}^* \right] [b_c] + [L_{t0}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \left[\frac{h}{2} \vec{\beta}_{,\xi}^* \quad \frac{h}{2} \vec{\beta}_{,\eta}^* \quad 0 \right] [C_0] \quad (\text{A.45})$$

$$[L_{t2}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \left[\frac{h}{2} \vec{\beta}_{,\xi}^* \quad \frac{h}{2} \vec{\beta}_{,\eta}^* \quad 0 \right] [b_c] \quad (\text{A.46})$$

On notera respectivement par $\langle \varepsilon_s^* \rangle$ et $\langle \gamma_s^* \rangle$ les vecteurs des déformations virtuelles de membrane-flexion et de CT (ε_z^* étant nulle)

$$\langle \varepsilon_t^* \rangle = \langle \langle \varepsilon_s^* \rangle \quad \langle \gamma_s^* \rangle \rangle ; \varepsilon_z^* = 0 \quad (\text{A.47})$$

avec

$$\langle \varepsilon_s^* \rangle = \langle \varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad \gamma_{xy}^* \rangle ; \langle \gamma_s^* \rangle = \langle \gamma_{xz}^* \quad \gamma_{yz}^* \rangle \quad (\text{A.48})$$

En se basant sur les équations précédentes, $\langle \varepsilon_s^* \rangle$ et $\langle \gamma_s^* \rangle$ s'écrivent

$$\langle \varepsilon_s^* \rangle = \langle L_{t11}^* \quad L_{t22}^* \quad L_{t12}^* + L_{t21}^* \rangle = \frac{1}{\mu(\zeta)} \langle \langle \varepsilon_0^* \rangle + \zeta \langle \varepsilon_1^* \rangle + \zeta^2 \langle \varepsilon_2^* \rangle \rangle \quad (\text{A.49})$$

$$\langle \gamma_s^* \rangle = \langle L_{t13}^* + L_{t31}^* \quad L_{t23}^* + L_{t32}^* \rangle = \frac{1}{\mu(\zeta)} \langle \langle \gamma_0^* \rangle + \zeta \langle \gamma_1^* \rangle \rangle \quad (\text{A.50})$$

avec, pour les déformations $\langle \varepsilon_s^* \rangle$:

$$\{\varepsilon_0^*\} = \begin{Bmatrix} e_x^* \\ e_y^* \\ e_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,y}^* \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \end{Bmatrix} \implies (\text{membrane}) \quad (\text{A.51})$$

$$\{\varepsilon_1^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1}^* \\ \varepsilon_{y1}^* \\ \gamma_{xy1}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \frac{h}{2} \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \frac{h}{2} (\vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,x}^*) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,y}^* \\ \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,x}^* \end{Bmatrix} \\ \implies \begin{pmatrix} \text{flexion} \\ + \text{couplage} \\ \text{avec} \\ \text{membrane} \end{pmatrix} \quad (\text{A.52})$$

$$\{\varepsilon_2^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1}^* \\ \varepsilon_{y1}^* \\ \gamma_{xy1}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \frac{h}{2} \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \frac{h}{2} (\vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}_{,y}^* + \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}_{,x}^*) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

et avec, pour les déformations de CT $\langle \gamma_s^* \rangle$:

$$\{\gamma_0^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,x} + \mu \vec{t}_1 \cdot \vec{\beta}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,y} + \mu \vec{t}_2 \cdot \vec{\beta}^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

$$\{\gamma_1^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{1xz}^* \\ \gamma_{1yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,x} + \frac{h}{2} \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_{p,y} + \frac{h}{2} \vec{n} \cdot \vec{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

où :

$$\begin{Bmatrix} \vec{u}_{p,x}^* \\ \vec{u}_{p,y}^* \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \vec{u}_{p,\xi}^* \\ \vec{u}_{p,\eta}^* \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \vec{u}_{p,x}^* \\ \vec{u}_{p,y}^* \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \vec{u}_{p,\xi}^* \\ \vec{u}_{p,\eta}^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

$$\begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,\xi}^* \\ \vec{\beta}_{,\eta}^* \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,x}^* \\ \vec{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \vec{\beta}_{,\xi}^* \\ \vec{\beta}_{,\eta}^* \end{Bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

Annexe B

Lois de comportement des plaques et des coques

B.1 Matériau isotrope

La particularité d'un matériau isotrope est que les caractéristiques physiques mécaniques sont constantes dans toutes les directions. Un matériau isotrope est défini à partir de deux paramètres mécaniques seulement : son module d'Young E et son coefficient de Poisson ν . L'hypothèse des contraintes planes (dans le plan xy) se traduit par :

$$\sigma_z = 0 \text{ et } \varepsilon_z \neq 0$$

Les relations contraintes-déformations s'écrivent pour un matériau homogène isotrope :

$$\{\sigma\} = z [H] \{\varepsilon\} \quad ; \quad \{\tau\} = [G] \{\gamma\} \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} \rangle \quad ; \quad \langle \tau \rangle = \langle \tau_{xz}, \tau_{yz} \rangle \quad (\text{B.2})$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy} \rangle \quad ; \quad \langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

avec :

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H_c] = k \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

La matrice de comportement de CT dépend du coefficient de correction du CT. Pour les matériaux isotropes $k = 5/6$.

B.2 Matériau orthotrope

Contrairement au matériau isotrope, le matériau orthotrope comporte des directions principales d'anisotropie orthogonales, c'est à dire que les caractéristiques physiques du matériau sont constantes selon trois directions orthogonales. Ainsi, dans le cas le plus général d'orthotropie, 9 constantes sont nécessaires pour définir la loi de comportement élastique : trois modules d'Young (E_L , E_T et E_z), trois coefficients de Poisson (ν_{TL} , ν_{Lz} et ν_{Tz}) et trois modules de cisaillement (G_{LT} , G_{Lz} et G_{Tz}). Le plus souvent, seulement cinq coefficients sont nécessaires pour représenter un matériau orthotrope étant donné que dans la majorité des cas, le plan Tz est un plan isotrope. Cela signifie que peu importe l'orientation des axes T et z, les mêmes propriétés physiques sont mesurées. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$E_T = E_z ; \nu_{LT} = \nu_{Lz} \text{ et } G_{LT} = G_{Lz}$$

$$G_{Tz} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{Tz})} \text{ et } \nu_{LT}E_T = \nu_{TL}E_L$$

Ces relations nous permettent de réduire le nombre de paramètres physiques nécessaire de 9 à 5. Maintenant, les cinq coefficients indépendants sont :

- deux modules d'Young (E_L , E_T) ;
- deux coefficients de Poisson (ν_{LT} ou ν_{TL} et ν_{Tz}) ;
- un coefficient de cisaillement (G_{LT}) .

A noter qu'il est encore possible de diminuer le nombre de paramètres dans le cas d'un état de contraintes planes. Dans ce cas, le coefficient de poisson ν_{Tz} n'est pas requis et le nombre de paramètres physiques nécessaires est de 4.

B.2.1 Matériau orthotrope dans le plan LT et isotrope dans le plan Tz

Dans le cas où l'élément est constitué par un empilement de couches orthotropes dans le plan LT et isotropes dans le plan transverse Tz. La loi de Hooke est fonction de 5 coefficients physiques seulement. Nous écrivons pour une couche :

$$\{\sigma_L\} = [H_L] \{\varepsilon_L\} ; \{\tau_L\} = [G_L] \{\gamma_L\} \quad (\text{B.6})$$

avec ;

$$\langle \sigma_L \rangle = \langle \sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT} \rangle ; \langle \tau_L \rangle = \langle \sigma_{Lz}, \sigma_{Tz} \rangle$$

$$\langle \varepsilon_L \rangle = \langle \varepsilon_L, \varepsilon_T, \gamma_{LT} \rangle ; \langle \gamma_L \rangle = \langle \gamma_{Lz}, \gamma_{Tz} \rangle$$

B.2.2 Rotations des contraintes et des déformations

Il est possible de tourner les contraintes et les déformations calculées précédemment pour les exprimer dans un autre système d'axes. Les relations permettant de tourner les contraintes et les déformations du système d'axes local LTz vers le système global xyz sont :

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} ; \{\tau\} = [G] \{\gamma\} \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rangle ; \langle \tau \rangle = \langle \tau_{xz}, \tau_{yz} \rangle \quad (\text{B.8})$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \rangle ; \langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \rangle \quad (\text{B.9})$$

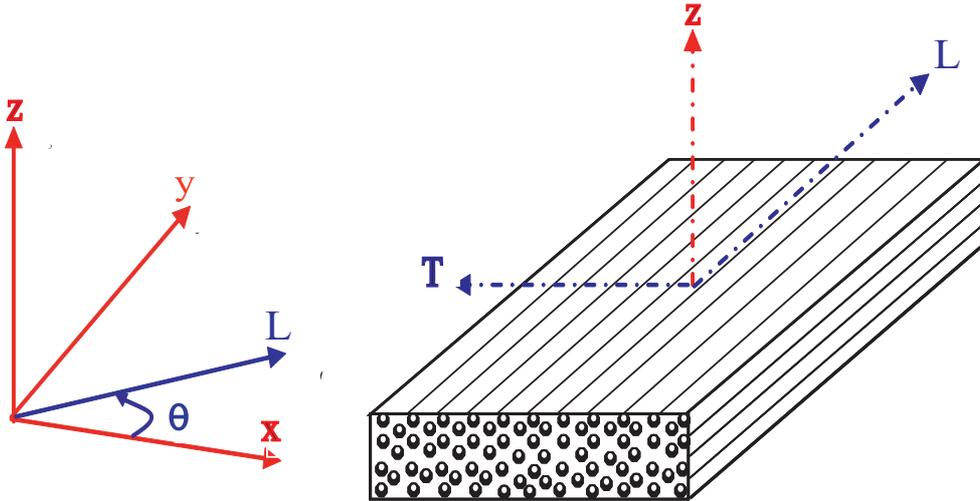


FIG. B.1 – Système d'axes local et global

Dans le cas d'une couche orthotrope où les directions d'orthotropie L et T sont situées sur une surface de coordonnée z ou $\zeta = \text{constante}$, et orientées d'un angle θ par rapport au repère tangent orthonormé d'axes \vec{t}_1 et \vec{t}_2 (B.1), ces deux matrices s'écrivent :

$$[H] = [T_1]^T [H_L] [T_1] \text{ et } [G] = [T_2]^T [G_L] [T_2] \quad (\text{B.10})$$

avec

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & -s^2 \end{bmatrix} \text{ et } [T_2] = \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ s_k & -c_k \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$c_k = \cos\theta_k, \quad s_k = \sin\theta_k$$

Les matrices locales dans le repère d'orthotropie $[H_L]$ et $[G_L]$ sont données par exemple pour un matériau homogène orthotrope d'axes L et T avec une isotropie transverse d'axe L (plan $T-z$) par :

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ H_{LT} & H_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [G_L] = \begin{bmatrix} G_{Lz} & 0 \\ 0 & G_{Tz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

avec

$$H_{LL} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \quad H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \quad H_{LT} = \frac{\nu_{LT}E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \quad \nu_{LT}E_T = \nu_{TL}E_L \quad (\text{B.13})$$

Les 5 coefficients indépendants sont :

$$E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{Lz} = G_{LT}, G_{Tz} \quad \text{ou} \quad \nu_{Tz} \quad \text{avec} \quad G_{Tz} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{Tz})}$$

B.3 Matériau composite

B.3.1 Définition

Un matériau composite, aussi appelé stratifié ou laminé, est obtenu à partir d'un empilement de couches. Ces couches, généralement composées de matériaux orthotropes, sont appelées « plis ». Un pli est défini par son épaisseur et par un angle que font les fibres par rapport à une direction de référence. L'angle d'un pli θ est mesuré entre l'axe global x et l'axe L . Pour définir un stratifié, on considère un empilement de couches isotropes ou orthotropes dont les axes d'orthotropie sont L , T et z avec isotropie d'axes L (dans le plan Tz). La description d'un stratifié à travers son épaisseur est la suivante :

- Chaque couche i est définie par les plans $z = z_i$ et $z = z_{i+1}$ et $z_i \leq z \leq z_{i+1}$;
- Les directions d'orthotropie L et T pour chaque couche i sont représentées par l'angle θ_i ;
- La loi de comportement de chaque couche est basée sur l'hypothèse des contraintes planes $\sigma_z \approx 0$;
- La continuité cinématique est admise entre les couches (les couches sont parfaitement collées et l'épaisseur de la colle est négligeable).

Ces hypothèses permettent d'écrire les relations entre les contraintes et les déformations pour chaque couche i de façon découplée. Les efforts résultants N (efforts normaux), T (efforts tranchants) et M (moments fléchissants) d'une plaque ou

d'une coque fabriquée d'un matériau composite sont définis par :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\} \quad (\text{B.14})$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\} \quad (\text{B.15})$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = [H_c] \{\gamma\} \quad (\text{B.16})$$

La matrice $[H_m]$ est la matrice des comportements de membrane, la matrice $[H_f]$ est la matrice des comportements de flexion, la matrice $[H_c]$ est la matrice des déformations de cisaillement et la matrice $[H_{mf}]$ est la matrice du couplage entre les comportements de membrane et de flexion. Pour un matériau composite possédant une symétrie matérielle par rapport au plan $z = 0$, il n'y a pas de couplage entre les comportements de membrane et de flexion, la matrice $[H_{mf}]$ est donc nulle. Dans ce cas, le plan xy est alors le plan neutre : des efforts de membrane appliqués dans le plan neutre ne produisent aucune courbure et, réciproquement, des efforts de flexion ne produisent aucune déformation de membrane. Les matrices de comportement $[H_m]$, $[H_f]$, $[H_{mf}]$ et $[H_c]$ sont obtenues en utilisant la méthode classique de stratification. Il suffit d'intégrer dans l'épaisseur la contribution de chaque couche.

$$[H_m] = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [H] dz \quad (\text{B.17})$$

$$[H_f] = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 [H] dz \quad (\text{B.18})$$

$$[H_{mf}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [H] z dz \quad (\text{B.19})$$

Pour une plaque ou une coque composée de n couches orthotropes ou isotropes (dont les caractéristiques sont constantes par couche), les matrices précédentes peuvent s'écrire ainsi :

$$[H_m] = \sum_{i=1}^n [H]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (\text{B.20})$$

$$[H_f] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [H]_i (z_{i+1}^3 - z_i^3) \quad (\text{B.21})$$

$$[H_{mf}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [H]_i (z_{i+1}^2 - z_i^2) \quad (\text{B.22})$$

$$[\overline{H}_c] = \sum_{i=1}^n [G]_i (z_{i+1} - z_i) \quad (\text{B.23})$$

B.3.2 Calcul de la matrice de CT

Le calcul de la matrice $[H_c]$ peut être basé sur des considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique de manière à ce que la rigidité en CT du modèle de plaque ou de coque correspond le plus possible à celle définie par la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Ces considérations sont en accord avec celles de la théorie mixte des plaques de Reissner et conduisent pour les plaques et les coques isotropes à un facteur de correction de cisaillement égal à 5/6.

$$[\overline{H}_c] = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [G] dz \quad (\text{B.24})$$

$$[H_c] = \begin{bmatrix} k_{11} \overline{H}_{c11} & k_{12} \overline{H}_{c12} \\ sym & k_{22} \overline{H}_{c22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

Résumé

Ce travail de thèse consiste le développement d'un élément fini de plaque et de coque courbe géométriquement simple (4 nœuds), basé sur une nouvelle approche variationnelle appelée DDM (Displacement Discrete Mindlin). Il prend en compte l'effet du cisaillement transversal CT à travers l'épaisseur. Le modèle DDM introduit de manière discrète deux hypothèses de Mindlin. La première hypothèse est cinématique, elle consiste à introduire sous la forme d'une intégrale de contour une équation cinématique de la déformation de CT. Elle permet l'élimination du verrouillage en CT sans introduire des fonctions bulles ou sans recourir à l'intégration réduite ou selective. Il s'agit de l'approche des déformations de CT de substitution, connue sous le nom de «ANS method : Assumed Natural Strains». La seconde hypothèse fait appel à deux lois de comportement, l'une en flexion et l'autre en CT, et deux équations d'équilibre d'une plaque en flexion/CT. Elle a pour principal avantage une élimination locale des degrés de libertés de rotation, introduits initialement au milieu d'un bord élémentaire par le biais d'une approximation quadratique des rotations de la normale à la surface moyenne.

Mot clés : Eléments finis spéciaux, coques, plaques, hypothèses modifiées de Mindlin, Modèle DDM

Abstract

The present work of the thesis deals with the theoretical formulation and the evaluation of a new first order finite element for multilayered/sandwich plates and shells. It's based on a displacement variational model that we consider as discrete, insofar as we introduce kinematic and mechanical hypotheses in a discrete manner. This model, labeled DDM (Discrete Displacement Mindlin), leads to a finite element which is geometrically simple (4 node) and efficient, owing to the linearity of bending curvatures obtained from a quadratic approximation of the normal rotations to the plate mid-surface. The new element takes into account the transverse shear effects along thickness direction and gives thin plate results when the ratio L/h (Length/thickness) becomes big. It has been successfully validated across some known testing problems, from thin to thick laminated and sandwich.

Key words : Special finite elements, plates, shells, modified Mindlin hypotheses, DDM Model

