THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Spécialité Génie Mécanique

présentée par M. Slaheddine CHEDLY

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE

Sujet de la thèse :

Compromis Choc Acoustique des Matériaux Poreux : Relations Procédé – Produit – Performances

soutenue le : 28 Novembre 2008

devant le jury composé de :

Mme Lan TIGHZERT, Professeur URCA - ESIEC	Directrice de thèse
M. Mohamed ICHCHOU, Professeur Ecole Centrale de Lyon	Directeur de thèse
M. Bruno VERGNES, Adjoint du Chef de Groupe CEMEF	Rapporteur
M. Manuel COLLET, Chercheur Université de Franche-Comté	Rapporteur
M. Jean Paul ONTENIENTE, MDC URCA - IFTS	Examinateur
Mme Marie-France LACRAMPE, Professeur ENSM-Douai	Examinatrice

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le directeur de cette thèse, M. Mohamed Ichchou de l'Ecole Centrale de Lyon, pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en Janvier 2005 sur la vibroacoustique des matériaux poreux, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, en me laissant une grande liberté et en me faisant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités dont j'espère avoir été à la hauteur.

Mes remerciements vont également à Mme Lan Tighzert de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, pour la gentillesse et la patience qu'elle a manifestées à mon égard durant cette thèse, pour tous les conseils, pour l'hospitalité dont il a fait preuve envers moi lors des séjours que j'ai effectués dans son groupe, et aussi pour m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Je remercie M.Louis Jezequel, responsable de l'équipe « Dynamique des Structures et des Systèmes » du Laboratoire de Tribologie et Dynamiques des Systèmes à l'Ecole Centrale de Lyon, ainsi que M. Christian Bissieux directeur du Groupe de Recherche en Sciences Pour l'Ingénieur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, pour m'avoir accueilli au sein de ces institutions, et pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de leur part.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions. Je pense ici en particulier à M.Jean-Paul Onteniente, qui de plus a accepté d'être un des deux examinateurs de cette thèse, M. Stéphane Buet, M. Hervé Bonnefoy, M. Vincent Marquet, M. Olivier Bareille.

Messieurs Manuel Collet et Bruno Vergnes ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même que pour leur participation au Jury. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je leur en suis très reconnaissant.

Mme Marie-France Lacrampe et M. Jean-Paul Onteniente m'ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance; je les en remercie profondément.

Pour leurs encouragements et leur assistance aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions, je remercie chaudement mes parents : Leila et Mohamed, mes frères : Haithem, Zied et Med Firas et ma fiancée Ons.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à tous les jeunes gens que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années à Charleville-Mézières et à Lyon, à savoir MM. Saber Abidi, Zouhaier Boussif, Etienne Brosse, Ameur Chettah, Walid Dridi, Frederic Heschung, Cosmin Vasil Lazar et Philippe Vellemans.

Table des matières

1 Etat de l'ar	+	- 19 -
1.1 Intro	luction	- 13 -
1.2 Matér	iaux Cellulaires : Généralités et Mise en Forme	- 14 -
121	Structure des matériaux cellulaires	- 14 -
1211	Topologie	- 15 -
1212	Taille des cellules	- 15 -
1.2.1.3	Forme des cellules	- 16 -
1.2.2.	Classes et techniques de mise en forme des matériaux poreux	
1.2.2.1.	Mousses de polymères et composites	
1.2.2.2.	Mousses métalliques	- 22 -
1.2.2.3.	Mousses minérales et céramiques	23 -
1.3. Carac	térisation choc et acoustique	24 -
1.3.1.	Indicateur choc	24 -
1.3.1.1.	Méthodes pendulaires	24 -
1.3.1.2.	Méthodes de choc multiaxial par chute de masses	25 -
1.3.1.3.	Autres méthodes	26 -
1.3.2.	Indicateur acoustique	27 -
1.3.2.1.	Régime stationnaire	28 -
1.3.2.2.	Régime transitoire	31 -
1.3.2.3.	Récapitulatif	32 -
1.4. Techr	liques de Modélisation	32 -
1.4.1.	Méthodes d'ajustement du modèle approché	33 -
1.4.1.1.	Modèles de régression	33 -
1.4.1.2.	Réseaux de Neurones	35 -
1.4.1.3.	Le krigeage	37 -
1.4.2.	Les plans d'expériences	40 -
1.4.3.	Limites des approches existantes	
1.5. Optin	nisation Multi - Objective	
1.5.1.	Méthodes à direction de descente	44 -
1.5.2.	Méthodes d'ordre 0 et algorithmes de minimisation globale	45 -
1.5.2.1.	Algorithmes évolutionnaires	45 -
1.5.2.2.	Autres méthodes d'optimisation d'ordre 0	47 -
1.5.3.	Méthodes hybrides	49 -
1.6. Concl	usions	50 -
2. Relations I	Procédé – Performances	55 -
2.1. Intro	luction	55 -
2.2. Eléme	ents sur les Procédés de Fabrication	55 -
2.2.1.	Extrusion des mousses	56 -

2.2.2.	Injection en polymères compacts	58 -	
2.2.3.	Injection des mousses	59 -	
2.2.4.	Conclusions	63 -	
2.3. Proc	édure Expérimentale	64 -	
2.3.1.	Matières premières	- 64 -	
2.3.2.	Presse à injection	65 -	
2.3.2.1.	Cycle de fonctionnement	- 66 -	
2.3.2.2.	Typologie des paramètres	68 -	
2.3.2.3.	Réglage d'une presse à injection	- 69 -	
2.3.2.4.	Géométrie de la plaque	70 -	
2.3.2.5.	Refroidissement du moule	70 -	
2.3.2.6.	Conditions expérimentales d'injection	71 -	
2.4. Fact	eurs d'entrée et de sortie	72 -	
2.4.1.	Facteurs d'entrées	72 -	
2.4.2.	Facteurs de sorties	- 73 -	
2.4.2.1.	Indicateur choc	- 73 -	
2.4.2.2.	Indicateur acoustique	- 77 -	
2423	Densité de la mousse	- 78 -	
2.1.2.0. 2 4 2 4	Densité de la moulée	- 78 -	
2.4.2.4. 9 / 3	Techniques des plans d'expériences	- 79 -	
2.4.5. 95 Móta	a-Modèles Choe et Acoustique	10 - 89 -	
2.5. Meta	Table de Terrabi	04 - 09 -	
2.0.1.	Table de Tagucii		
2.5.2.	Plan Composite Centre	84 -	
2.5.3.	Surface des reponses	86 -	
2.6. Test	s de Validation	87 -	
2.6.1.	Vérification de la normalité de la distribution des erreurs	88 -	
2.6.1.1.	Test de CHI2	88 -	
2.6.1.2.	Test de Shapiro et Wilk	89 -	
2.6.2.	Test intrinsèque	- 90 -	
2.6.3.	Test extrinsèque	91 -	
2.6.4.	Test des coefficients significatifs	92 -	
2.6.5.	Robustesse des modèles au sens de Taguchi	94 -	
2.7. Cond	clusions	95 -	
3. Relations	Produit – Performances : Modèles Microscopiques	99 -	
3.1. Intro	oduction	- 99 -	
3.2. Cara	actérisation des Matériaux Poroélastiques	- 100 -	
3 2 1	Propriétés du fluide	- 100 -	
399	Paramàtras de compleza	- 101 -	
3991	Porocitó	- 109 -	
0.2.2.1.	Désistivité	102	
0.4.4.4.		102 - 109 -	
3.2.2.3.	I ortuosite	- 102 - 109	
3.2.2.4.	La longueur caracteristique visqueuse	103 -	
3.2.2.5.	La longueur caracteristique thermique	103 -	
3.2.3.	Proprietes mecaniques du squelette	104 -	
3.2.3.1.	Système masse – ressort résonant	104 -	
3.2.3.2.	Méthodes de la poutre résonante	105 -	
3.3. Mise	e en équation du problème		
3.3.1.	Modèles macroscopiques pour les milieux à structure rigide	107 -	
3.3.2.	Modèles empiriques	- 108 -	
3.3.2.1.	Modèle de Delany & Bazelet	108 -	
3.3.2.2.	Modèle de Mechel	109 -	
3.3.2.3.	Modèle Ingénieur	109 -	
3.3.2.4	Modèle de Wilson	109 -	
3.3.2.5	Comparaison des modèles	110 -	
3.4 Poro	élasticité Isotrope	- 111 -	
3.4.1. Coefficients du matériau poreux - 112			
3/11	Densités effectives	- 119 -	
9/19	Constantas du matáriau	112 - 119 -	
0.4.1.4.	Constantes un materiau	II4	

3.4.2.	La formulation classique de Biot	113 -
3.4.3.	La formulation mixte déplacement – pression	114 -
3.5. Mode	élisation de la flexion d'une plaque poreuse : Formulation de P. Leclaire	115 -
3.5.1.	Relations déformation - contrainte de Biot pour un milieu poreux infini	115 -
3.5.2.	Flexion d'une plaque poreuse	116 -
3.5.3.	Relations entre les moments de flexion	117 -
3.5.4.	Equilibre dynamique	118 -
3.6. Impl	émentation Numérique	122 -
3.6.1.	Modélisation des matériaux poroélastiques sur Comsol	122 -
3.6.2.	Formulation mixte déplacement – pression de la poroélasticité	123 -
3.6.2.1.	Champ de pression imposé	123 -
3.6.2.2.	Champ de déplacement imposé	124 -
3.6.2.3.	Couplage acoustique – poroélastique	125 -
3.6.3.	Modélisation de la flexion	125 -
3.7. Conc	lusions	127 -
4. Relations	Produit – Performances : Modèles Krigeage	131 -
4.1. Intro	oduction	131 -
4.2. Mode	élisation des Essais Déterministes	132 -
4.2.1.	Modèles d'approximation pour les essais déterministes	132 -
4.2.2.	Principe du krigeage	133 -
4.2.3.	Plans d'expériences pour krigeage	135 -
4.2.4.	Récapitulatif	137 -
4.3. Doni	nées de la Problématique	138 -
4.3.1.	Entrées du système	138 -
4.3.2.	Sorties du système	138 -
4.3.2.1.	Indicateurs acoustiques	139 -
4.3.2.2.	Indicateur choc	139 -
4.3.3.	MEF : validation de l'implémentation numérique	142 -
4.3.3.1.	Formulation mixte de Biot – Indicateurs acoustiques	142 -
4.3.3.2.	Formulation de P. Leclaire – Indicateur choc	150 -
4.3.4.	En résumé	153 -
4.4. Méta	a-Modèles Choc et Acoustique des Matériaux Poreux	153 -
4.4.1.	Modèles des indicateurs acoustiques	154 -
4.4.1.1.	Courbes type du coefficient d'absorption acoustique	154 -
4.4.1.2.	Validité de la méthode de surface des réponses	155 -
4.4.1.3.	Modèles kriging et validation	155 -
4.4.1.4.	Etude du type de la régression	158 -
4.4.1.5.	Etude du type de la corrélation	158 -
4.4.1.6.	Confrontation entre modèles kriging et D&B	162 -
4.4.2.	Modèle de l'indicateur choc	• 163 •
4.5. Conc	elusions	164 -
5. Comprom	is Choc - Acoustique	167 -
5.1. Intro	oduction	167 -
5.2. Opti	misation Multi-Objective des Mousses PEBD Injectées	168 -
5.2.1.	Définition d'un problème d'optimisation multi-objective	168 -
5.2.2.	Données du problème d'optimisation des caractéristiques de la mousse	169 -
5.2.2.1.	Variables de décision et contraintes du problème	169 -
5.2.2.2.	Fonctions objectives	169 -
5.2.2.3.	Résultats et discussions	170 -
5.2.2.4.	Optimisation multi-objective à trois critères	173 -
5.2.3.	Variable de décision dominante	174 -
5.2.4.	Sensibilité du front Pareto aux variables de décision dominantes	176 -
5.2.5.	Surface de Pareto	179 -
5.3. Com	promis Choc – Acoustique en fonction de la Poroélasticité	181 -
5.4. Conc	elusions	184 -
Conclusions et	Perspectives	187 -
Annexes		189 -

Introduction

Dans le secteur automobile, la sécurité prend de l'ampleur depuis quelques années et les constructeurs automobiles s'investissent dans le développement des nouvelles technologies pour que leurs produits soient plus sûrs aux passagers. Plusieurs méthodes de réduction des dommages causés aux piétons ont été développées : capot actif, Airbag piéton. L'utilisation de tels systèmes permettrait de réduire le problème de compromis choc/acoustique dans le choix des matériaux, en assouplissant les exigences liées au choc piéton, déjà traitées par le capot actif ou l'airbag piéton. Dans le contexte normatif actuel concernant à la fois le choc piéton et le bruit des véhicules, la sélection de matériaux offrant un bon compromis entre ces deux aspects pour la conception des capots est au cœur des préoccupations des constructeurs automobiles. Une voie possible est l'utilisation de matériaux poroélastiques collés sous le capot moteur, qui offrent une bonne dissipation de l'énergie en cas de choc, et une bonne atténuation des ondes acoustiques émises par le moteur.

Ces matériaux sont constitués de cavités dispersées dans une matrice solide. Tout en conservant des propriétés structurelles le matériau acquiert plus de légèreté, de souplesse, et ses performances d'isolation thermique et/ou acoustique sont améliorées. Plusieurs familles existent et dépendent essentiellement de la matrice dont fut l'origine le matériau cellulaire. On trouve des polymères poreux, des céramiques et même des métaux cellulaires. Le développement des matériaux poreux nécessite une connaissance approfondie de leurs propriétés physiques. Lorsqu'ils sont utilisés comme isolant acoustique et/ou absorbant du choc, les propriétés qui gouvernent leurs pouvoirs d'isolations sont leurs caractéristiques intrinsèques. Ces derniers différent d'un poreux à un autre selon le procédé de mise en forme. Ce présent mémoire s'intéresse particulièrement à mettre en valeur les relations Procédé – Produit – Performances et à offrir des outils empiriques aidant à une prise de décision facile et une maîtrise complète des performances des matériaux poreux. D'un autre côté, ces outils seront très utiles pour la recherche des compromis choc acoustique quand l'application industrielle l'exige (Sécurité automobile). Ce manuscrit est organisé selon ce plan :

Le premier chapitre est un état de l'art mettant en valeur le contexte de l'étude. Plus qu'un travail bibliographique, la première partie a pour ambition de décrire la structure et les propriétés des matériaux cellulaires avant de lister les différentes classes de ces matériaux ainsi que les procédés de mise en forme. L'accent est mis sur les mousses plastiques et sur le procédé d'injection. En seconde partie, les différentes méthodes et techniques pour la mesure de l'absorption de choc et acoustique des matériaux sont traitées. En effet, une étude détaillée de ces différentes techniques est nécessaire pour choisir celles permettant de mettre en valeur les matériaux poreux par rapport aux matériaux classiques. Les techniques de modélisation sont présentées en troisième partie de ce chapitre. Trois stratégies sont décrites : les réseaux de neurones, le krigeage et la méthode des surfaces de réponse. Et pour cela, on a pris le soin de mettre en valeur la technique des plans d'expériences nécessaire pour ce type de modélisation. La dernière partie de ce chapitre concerne l'état de l'art des algorithmes d'optimisation globale et locale. Ces algorithmes sont classés en trois groupes : les algorithmes de minimisation globale, les algorithmes hybrides, et les méthodes à direction de descente. Un intérêt particulier est accentué sur les algorithmes évolutionnaires et plus particulièrement les algorithmes génétiques.

Une classe des matériaux poreux reconnaît un plein essor : les mousses plastiques. Les moyens de mise en forme sont nombreuses mais l'injection, un procédé très connu quand il s'agit de fabriquer un produit fini en plastique compact, reste très peu utilisée. En outre, peu de travaux ont tenu à étudier les relations Procédé – Performances dans ce cas. Le deuxième chapitre a pour ambition de faire le pas et mettre en place des modèles empiriques exprimant les performances choc et acoustiques des mousses plastiques en fonction des paramètres d'injection influents. En premier temps, un bilan des travaux réalisés sur cet axe de recherche est présenté dans ce chapitre avant de définir les matières premières : le polymère et le mélange maître. Une analyse thermogravimétrique a été effectuée sur chacun de ces produits afin de situer l'intervalle dans lequel la température d'injection peut fluctuer. En deuxième partie, nous présentons la presse à injection. Le cycle de fonctionnement d'une presse est décrit, et plus particulièrement le rôle des unités de fermeture et de plastification. Le principe d'injection et la typologie des paramètres de mise en forme sont étudiés en décrivant rigoureusement les phases de remplissage, compactage et de maintien. Et en dernier point, les différentes étapes du réglage d'une presse sont détaillées : principe du réglage par incomplets successifs, optimisation et réglage des différents paramètres machine. Différentes conditions expérimentales étaient indispensables pour la mise en forme des mousses par injection pour que les pièces soient uniformes et reproductibles. Ces conditions, ainsi que les géométries de la pièce à fabriquer et de la buse d'injection, et le circuit de refroidissement seront présentés par la suite. Les paramètres de mise en forme et les indicateurs de choc et acoustique sont listés dans la troisième partie de ce chapitre. La présentation des outils utilisés pour la recherche des méta-modèles exprimant les indicateurs en fonction des paramètres influents constitue la dernière étape de la procédure. Les modèles choc et acoustique et leurs validations sont présentés en dernière partie. La validation est effectuée avec des tests statistiques : tests sur la variance, écart type, et normalité des erreurs. Et finalement, la robustesse au sens de Taguchi est vérifiée et validée.

Une fois les relations Procédé - Performances sont établies, il est important d'étudier les relations qui peuvent exister entre le Procédé et le Produit ou le Produit et ses Performances. La caractérisation des tels produits poreux est trop compliquée, coûteuse et donne des larges dispersions des caractéristiques de ces matériaux. Côté Produit – Performances, la littérature n'en manque pas. Pour cela, une connaissance précise et approfondie du comportement des milieux poreux sollicités par une pression acoustique (isolation acoustique) et une force ponctuelle (absorption du choc), ainsi que de ses caractéristiques intrinsèques, apparaît par conséquent essentielle, non seulement afin de mieux maîtriser et d'optimiser leur utilisation, mais également de sélectionner les matériaux les plus adaptés à une application donnée. Le chapitre 3 propose de décrire les différentes formulations qui existent dans la littérature permettant d'étudier le comportement des tels milieux. La première partie présente les caractéristiques intrinsèques des matériaux poreux. En deuxième partie, la mise en équation du problème est réalisée, modélisant le comportement du milieu diphasique fluide-structure composant ces milieux. En effet, différentess lois macroscopiques ont vu lumière permettant de caractériser ces milieux (Fluide éuivalent, Delany et Bazelet,...), valables pour les milieux isotropes dont le squelette est rigide. Ensuite, on présente la théorie de la poroélasticité isotrope. En effet, Biot a mis en place un modèle miscroscopique permettant l'étude du comportement des matériaux poreux. Deux formulations existent à cet effet : la formulation classique qui permet de déterminer les déplacements des milieux solide et fluide, et la formulation mixte déterminant le déplacement de squelette et la pression du fluide. Suite à cette théorie, plusieurs tentatives, dérivées de la théorie de Biot, ont été mené pour modéliser la flexion d'une plaque poreuse. On décrira celle de P. Leclaire. Ce chapitre se termine par l'implémentation numérique, de la formulation mixte de Biot et la formulation de P. Leclaire pour la flexion, sur un code de calcul par éléments finis : Comsol Mutiphysics.

Les modèles macroscopiques existants dans la littérature permettent de quantifier les caractéristiques acoustiques des matériaux poreux à squelette rigide mais la validité de ces modèles reste très limitée. En effet, le modèle D&B concerne les matériaux fibreux et dans les meilleurs des cas, le modèle du fluide équivalent de Johnson-Allard n'est valable que pour un matériau poreux isotrope à squelette rigide. La seule alternative dans le cas de squelette élastique consiste à simuler numériquement le phénomène physique et exploiter les résultats pour une quantification des performances du produit poreux. On se propose dans le 4^{ème} chapitre de mettre en place des modèles empiriques exprimant les performances choc et acoustique en fonction des caractéristiques poroélastiques des matériaux poreux à squelette élastique. Pour cela, la même procédure, appliquée pour la recherche des méta-modèles au 2^{ème} chapitre, est appliquée. Les entrées du système sont les caractéristiques du matériau poreux, les sorties sont les performances choc et acoustique. Le lien entre ces deux entités se présente sous forme des lois de comportement implémentées sur un code de calcul numérique. En première partie, on décrit la technique de modélisation utilisée : le krigeage. Pour le bon déroulement de l'étude, un plan d'expériences est mis en place. Ce plan contient différents jeux de paramètres d'entrée occupant tout l'espace de conception (plages de variation des caractéristiques poroélastiques). En deuxième point, on définit les différentes entrées et sorties de la problématique avant de valider l'implémentation numérique avec des résultats références. Pour les caractéristiques acoustiques, on confronte les indicateurs acoustiques (impédance de surface et absorption acoustique) avec ceux obtenus à partir du modèle de fluide équivalent, modèle de Delany et Bazelet et modèle de Biot analytique. Côté choc, la validation se fait en comparant les résultats numériques de P. Leclaire avec celles de la formulation mixte de Biot. En dernière partie, il s'agit d'appliquer le krigeage pour la mise en place des modèles empiriques robustes exprimant l'impédance de surface, l'absorption acoustique et l'indicateur choc (Head Injury Criterion) en fonction de toutes les caractéristiques intrinsèques du milieu poreux. La validation de nos méta-modèles est réalisée sur quelques types de matériaux poreux dont les caractéristiques ne sont pas inclues dans le plan d'expériences. Sur les mêmes jeux des paramètres, on confronte nos résultats à ceux obtenus via le modèle de Delany et Bazelet.

Les $2^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ chapitre ont permis de mettre en place des modèles empiriques exprimant les performances choc et acoustique des matériaux poreux en fonction des paramètres de mise en force ou des caractéristiques intrinsèques du matériau. On cherchera, dans le $5^{\text{ème}}$ chapitre, les compromis choc acoustique vis-à-vis des paramètres de mise en forme ou des caractéristiques du matériau. Ainsi, en premier lieu, il s'agira d'optimiser les caractéristiques choc et acoustique des mousses plastiques PEBD obtenues par injection. Les fronts Pareto, ensemble des solutions optimales, sont validés en prenant un point du front et en caractérisant la mousse fabriquée avec les paramètres de mise en forme propres à ce point. Une attention particulière est faite pour le cas d'étude d'optimisation de 3 critères (densité, absorption du choc et absorption acoustique). Ensuite, il s'agissait d'observer l'évolution des variables de décision en fonction d'une des deux caractéristiques présentant le front Pareto dans le cas du compromis choc – acoustique. La notion de variable de décision dominante est utilisée qui permettra de simplifier l'étude des problèmes d'optimisation. Dans le cas du compromis choc – acoustique, une seule variable est dominante. Ainsi, une étude de sensibilité du reste des parmètres est réalisée, ce qui permet d'avoir des abaques facilitant à l'ingénieur l'optimisation du procédé et lui donnant plus de liberté dans le réglage des paramètres machine. D'un autre côté, dans le cas de l'optimisation de deux critères, la présentation des différents fronts possibles (fronts obtenus en maximisant les deux fonctions, en les minimisant, en maximisant une et minimisant l'autre, et vis versa) donnera à une espèce de zone -Surface de Pareto- dans laquelle on imagine qu'elle englobe tous les compromis entre ces deux critères. En dehors de cette zone, il n'existe aucun compromis. Ce point est validé en utilisant les données expérimentales du second chapitre aussi par des essais supplémentaires pour confirmation.

Pour terminer, la même étude est réalisée avec les méta-modèles exprimant le HIC et l'absorption acoustique en fonction des caractéristiques poroélastiques (Chapitre 4). Il s'agit dans ce cas de minimiser le HIC pour un minimum de blessures à la tête du piéton dans le cas d'un choc sur le capot moteur, et de maximiser l'absorption acoustique afin de réduire le bruit du moteur. L'évolution des différentes variables de décision tout au long du front Pareto ne permet pas de conclure sur la dominance de certaines de ces variables. Par ailleurs, il était possible de spécifier les intervalles dans lesquelles les caractéristiques poroélastiques permettent d'avoir des bons compromis choc-acoustique.

1. Etat de l'art

1.1. Introduction

Au cours des millénaires, les matériaux de base, durables tels la pierre, le bronze, le fer, mais également plus éphémères tels le bois, le cuir, la laine..., ont joué un rôle important dans les activités humaines. Afin de répondre à la demande croissante de certaines de ces matières « éphémères », afin, aussi, d'améliorer leurs propriétés, la science et l'industrie des 19^{ème} et 20^{ème} siècles ont conçu et développé de nouveaux matériaux : les matériaux cellulaires. Et, en définitive, ces matériaux, devenues de plus en plus élaborés, sont désormais utilisés aussi bien dans des produits à courte durée de vie que pour des applications durables, à l'instar des productions de la métallurgie, voire même des matériaux de construction. Les matériaux alvéolaires sont constitués d'un squelette de matériau (métal, plastique, minéral, composite) entourant des alvéoles, fermées ou, partiellement ou totalement, ouvertes sur les alvéoles voisines ou sur l'extérieur. Le fort taux de gaz plus ou moins piégé dans les alvéoles à parois très minces entraîne des propriétés physiques, mécaniques et chimiques différentes de celles des mêmes matériaux compacts : amélioration du caractère isolant thermique et phonique (mousses pour le bâtiment), amélioration du pouvoir amortissant: mousses d'emballage, allègement avec conservation de certaines propriétés structurelles, augmentation de la souplesse (premières mousses de latex pour l'ameublement), diminution de la masse volumique permettant d'occuper des espaces avec des masses de matériau réduites, dégradation de la résistance au vieillissement, de la tenue chimique et plus grande sensibilité au feu à cause de la division de la matière et dégradation des valeurs absolues des propriétés mécaniques même si les valeurs ramenées à la masse sont intéressantes.

Plusieurs procédés existent pour la mise en forme de ces matériaux et les paramètres de mise en forme possèdent une influence sur la microstructure des mousses. Cette microstructure intervient directement dans les caractéristiques de ces mousses et en particulier les performances d'absorption de choc et acoustique des matériaux alvéolaires. Le besoin de quantifier l'ordre d'influence des paramètres du procédé est de plus en plus nécessaire pour le contrôle de la qualité du produit. Pour satisfaire ce besoin, la technique des plans d'expériences est utile et sert comme un outil pour optimiser la mise en forme de ce produit et maîtriser sa qualité. D'un autre côté, l'industrie cherche de nos jours à concevoir un produit, répondant au cahier de charges, sous deux, trois contraintes voir plus. Ainsi, l'optimisation multi critères est nécessaire pour satisfaire l'exigence de l'industrie et ceci se fait à partir des algorithmes plus ou moins efficaces. Depuis peu de temps, les algorithmes génétiques, basés sur la théorie de Darwin, connaissent un succès dans ce domaine.

Plus qu'un travail bibliographique, la première partie de ce chapitre a pour ambition de décrire la structure et les propriétés des matériaux cellulaires avant de lister les différentes classes de ces matériaux ainsi que les procédés de mise en forme. L'accent est mis sur les mousses plastiques et sur le procédé d'injection. En seconde partie, les différentes méthodes et techniques pour la mesure de l'absorption de choc et acoustique des matériaux cellulaires sont traitées. En effet, une étude détaillée de ces différentes techniques est nécessaire pour choisir celles permettant de mettre en valeur les matériaux poreux par rapport aux matériaux classiques. Les techniques de modélisation sont présentées en troisième partie. Trois stratégies sont décrites : les réseaux de neurones, le krigeage et la méthode des surfaces de réponse. Et pour cela, on a pris le soin de mettre en valeur la technique des plans d'expériences nécessaire pour ce type de modélisation. La dernière partie concerne l'état de l'art des algorithmes d'optimisation globale et locale. Ces algorithmes sont classés en trois groupes : les algorithmes de minimisation globale, les algorithmes hybrides, et les méthodes à direction de descente. Un intérêt particulier est accentué sur les algorithmes évolutionnaires et plus particulièrement les algorithmes génétiques.

1.2. Matériaux Cellulaires : Généralités et Mise en Forme

On entend par solides cellulaires, des matériaux dont la porosité excède 70% du volume. Leurs structures résultent d'un assemblage de cellules vides, chacune étant entourée par des arêtes ou des parois solides. On trouve communément dans la nature de nombreux matériaux de ce type : os, bois, liège,... mais aussi dans les produits alimentaires : pain, meringue,... Depuis peu, le souci d'allègement des structures est permanent et a engendré le développement des matériaux cellulaires synthétiques.



Figure 1-1 : Exemples des matériaux cellulaires

Les mousses synthétiques les plus familières sont les mousses de polymères et aujourd'hui la recherche a permis de développer des techniques de fabrication de mousses céramiques et métalliques (Figure 1-1).

1.2.1. Structure des matériaux cellulaires

Les matériaux cellulaires existent depuis toujours dans la nature, comme le bois par exemple. Ils sont souvent utilisés pour la construction de bâtiments grâce à leurs résistances et légèretés. Ainsi depuis le milieu du vingtième siècle, l'Homme, conscient des propriétés intéressantes de ces matériaux poreux, a tenté de les reproduire artificiellement à partir de matériaux divers (polymère, céramique, métal,...). Les caractéristiques structurales d'un matériau cellulaire sont la topologie de ces cellules, leur taille et leur forme.

1.2.1.1. Topologie

Il existe deux distinctions topologiques à faire. La première concerne la classe géométrique, et à cet effet, les matériaux cellulaires peuvent être classés en deux groupes. Les « nids d'abeilles », regroupent les matériaux cellulaires à microstructure bidimensionnelle. Dans ce cas, les cellules admettent un générateur commun dans le plan (Figure 1-2-a). Les « mousses », d'un autre côté, regroupent les matériaux cellulaires à microstructure tridimensionnelle. Dans ce cas, les cellules ont des orientations aléatoires dans l'espace (Figure 1-2-b).



Figure 1-2 : Exemples de solides cellulaires : (a) nid d'abeilles bidimensionnel [1] ; (b) mousse de polychlorure de vinyle et polyuréthane [2]

La deuxième distinction concerne la connectivité du squelette et de l'espace poreux. En effet, dans le cas d'une micro-structure tridimensionnelle, il faut distinguer les mousses à porosité ouverte et les mousses à porosité fermée.



Figure 1-3 : Trois types de matériaux cellulaires tridimensionnels [1] : (a) polyuréthane à porosité ouverte ; (b) polyéthylène à porosité fermée ; (c) polyéther à cellules ouvertes et fermées

La microstructure de trois mousses polymériques est montrée dans la figure 1-3. Les deux premières montrent la distinction entre la porosité ouverte où il n'y a que les arêtes des cellules qui sont constituées du polymère solide, et la porosité fermée où les faces des cellules sont également solides. Bien entendu, il existe aussi des mousses à porosité partiellement ouverte et partiellement fermée, c'est le cas de la troisième figure.

1.2.1.2. Taille des cellules

Elle est variable d'un solide cellulaire à un autre et également au sein du même solide. La distribution de la taille des cellules peut être très étroite comme pour les nids d'abeilles, ou encore tellement large que les plus grandes cellules sont cent fois plus importante que les plus petites, comme c'est le cas dans la figure 1-4.



Figure 1-4 : (a) Schéma d'une mousse à très large distribution de la taille des cellules [3] ; (b) Micrographie d'une mousse en polymère montrant une structure qui ressemble à (a) [1]

1.2.1.3. Forme des cellules

Elle a une plus grande influence sur le comportement que leur taille. Lorsque la forme des cellules n'a pas de direction privilégiée, les propriétés sont isotropes. En revanche, si les cellules sont allongées ou aplaties, une anisotropie est induite au niveau macroscopique. C'est pourquoi, la géométrie des cellules des mousses a fait l'objet de plusieurs études. Plateau a identifié la forme des cellules comme un dodécaédron rhombique (polyèdre à 12 faces) [3]. Lord Kelvin l'a remplacé par un térakaidécaèdre (polyèdre à 14 faces) [4]. Gibson et Ashby, pour simplifier, les ont modélisées par des cubes [1].

Parmi les propriétés d'une mousse, on distingue sa densité, son module de Young, sa résistance à la compression et sa conductivité thermique (Figure 1-5). La grande plage de propriétés couverte par les mousses permet des applications qui ne peuvent pas être remplies facilement par les solides denses qui les composent. En effet, les faibles densités permettent de fabriquer des structures légères à composantes rigides. Mais aussi, la faible conductivité thermique permet une isolation thermique fiable et économique. Enfin, la faible rigidité rend les mousses attractives pour les applications d'absorption d'énergie.

1.2.2. Classes et techniques de mise en forme des matériaux poreux

Il existe trois grandes classes de matériaux cellulaires ; on trouve les mousses polymères, les mousses métalliques, et, les mousses céramiques et minérales. Enfin, ces matériaux diffèrent au niveau de la matière de base : la matrice. Selon cette matrice, et depuis les années 30, différentes techniques de mise en forme ont été expérimentées et chacune donne naissance à un produit unique.

1.2.2.1. Mousses de polymères et composites

Un plastique alvéolaire consiste en une phase gazeuse dispersée dans une phase solide et tire ses propriétés de ces deux phases. L'élément plastique solide constitue la matrice tandis que la phase gazeuse est contenue à l'intérieur des cavités [5]. Bledzki et Faruk [6] estiment qu'une réduction de densité d'au moins 10%, sans perte significative des propriétés requises, est une méthode scientifique d'économiser des matériaux tout en protégeant l'environnement.



Figure 1-5 : Plage de propriétés des mousses et des solides qui la composent [1] : (a) Densité ; (b) Module de Young ; (c) Résistance à la compression ; (d) Conductivité thermique

La première application industrielle du polystyrène date de 1933. Onze ans plus tard, en 1944, Ray McIntire cherchait à copolymériser du styrène et de l'isobutène sous pression. Le styrène se polymérisa tandis que l'isobutène se vaporisa. Le résultat, commercialisé sous le nom de Styrofoam, est maintenant reconnu comme la première mousse thermoplastique [7]. Par la suite, les premières mousses de PEHD et PP datent respectivement de 1958 et 1964. Selon une étude de Business Communications Company [8], les mousses représentent 10% de la production américaine en polymères de consommation qui était estimée à 3,4 MM kg en 2001 et devrait atteindre 3,9 MM kg en 2006. Cette même étude a estimé le marché des mousses polyoléfiniques à 136 M kg en 2001 ainsi qu'un taux de croissance annuel de 3,8% jusqu'en 2006, soit le plus élevé de toutes catégories de polymères confondues.

D'un coût généralement supérieur aux matériaux fibreux en raison des procédés complexes d'obtention des matières premières ou de fabrication, ces matériaux sont

généralement plus homogènes que les fibreux et assimilés. Deux classes de mousses (Figure 1-6) sont distinguées : les mousses à cellules fermées et les mousses à cellules ouvertes. Dans une mousse matériau à alvéoles ouvertes, la phase gazeuse est inévitablement l'air. Les mousses à alvéoles ouvertes absorbent bien le son et lorsqu'elles sont flexibles, elles présentent des propriétés amortissantes. Par conséquent, elles conviennent parfaitement comme matériaux d'isolation phonique et d'amortissement des chocs (par exemple, les mousses de polyuréthane souples). Dans une mousse matériau à alvéoles fermées, la membrane matériau formant les parois des alvéoles constitue une barrière qui s'oppose au passage des gaz et des liquides, bien que les gaz puissent traverser la membrane par le processus de diffusion lente. Par conséquent, les mousses à alvéoles fermées présentent un taux d'absorption d'eau et une perméabilité à la vapeur d'eau plus faibles que ceux des mousses à alvéoles fermées ouvertes. Si la phase gazeuse a une faible conductivité thermique, les mousses à alvéoles ouvertes. Si la phase gazeuse a une faible conductivité thermique que celles à alvéoles ouvertes qui sont remplies d'air. La grosseur des alvéoles exerce aussi une influence sur la résistance thermique.

Les procédés de moussage de polymères ont largement été éprouvés et sont aujourd'hui bien maîtrisés permettant de créer des matériaux avec une large gamme de taille de pores et de connexions entre les pores. En revanche, une légère anisotropie (suivant l'épaisseur) est souvent observée pour ces matériaux dont la classe de symétrie est généralement isotrope transverse (c'est-à-dire que les propriétés suivant les dimensions contenues dans un plan du matériau sont différentes des propriétés dans la direction de l'épaisseur). L'étape de moussage est habituellement à l'origine de cette anisotropie; les cellules, ou pores, de la mousse s'allongeant ou se contractant suivant l'une des directions de l'espace par effet de gravité. De plus, dans certains cas et en fonction du procédé de fabrication, la mousse peut présenter un effet de peau en surface du matériau, effet recherché ou non, qui modifie sensiblement les performances du matériau. Afin de contrôler plus précisément cet effet, l'ajout d'un film de nature différente peut être envisagé.



Figure 1-6 : Applications des mousses polymères

Les méthodes d'obtention de mousses les plus courantes (qui n'impliquent pas nécessairement une opération de moussage) sont les suivantes :

a. Moussage libre

La plus simple et la moins coûteuse, cette méthode a été employée dès les débuts ; le mélange pâteux polymère - agent moussage (en principe chimique) est laissé libre de

gonfler dans un récipient ouvert d'un côté ou de l'autre. On obtient ainsi un bloc dont la surface est plus ou moins régulière, tandis que la porosité varie de bas en haut. On peut le trancher pour produire des planches qui conviennent le plus souvent aux usages simples (panneaux, plaques isolants, etc.). La méthode connaît toutefois des améliorations, ainsi Reifenhauser produit des lignes de moussge libre (série « REIcell ») permettant de fabriquer des plaques d'épaisseur entre 2 et 20 mm, en largeur 1000 à 2000, avec une capacité de 200 à 600 kg/h. Ces plaques peuvent être également coextrudées avec des couches non moussées.

b. Moussage structural / intégral par extrusion

À la base, une extrudeuse est constituée principalement d'une vis d'Archimède tournant en continu à l'intérieur d'un fourreau chauffé (Figure 1-7) et servant à faire des profilés. La vis se divise habituellement en trois zones: alimentation, compression et pompage. Comme l'indique son nom, la zone de compression comprime le polymère fondu. Cette étape assure un dégazage adéquat du fondu. Enfin, le polymère est homogénéisé dans la zone de pompage. La sortie de l'extrudeuse se nomme filière et donnera la forme finale à l'extrudé. Évidemment, le profil de température et la vitesse de rotation doivent être optimisés en fonction de la filière et des caractéristiques du profilé recherché.

L'extrusion de polymères additionnés d'agents de moussage nécessite un soin dans le choix de la matière et dans celui de l'équipement. Le procédé Celuka a été le pionnier dans ce domaine. Selon le cas, la matière contient déjà –sous forme de mélange-maître, par exemple– l'agent moussant qui fournira le gaz, celui-ci est injecté directement sous pression dans le polymère fondu. On notera qu'à la sortie de la filière, le profil doit être calibré avec un refroidissement efficace puisque sa conductibilité thermique est réduite par le moussage.



Figure 1-7: Schéma simplifié d'une extrudeuse

c. Moussage structural / intégral par injection

L'injection est un procédé semi-continu dans lequel un polymère fondu est injecté dans un moule tempéré, retenu sous pression et retiré lorsqu'il est solidifié. En fait, une presse à injection peut être représenté comme un hybride entre une extrudeuse et une presse à compression (Figure 1-8). Comme l'extrusion, la résine est incorporée dans une trémie et plastifiée par une vis d'accumulation. À la différence de l'extrusion, la vis de la presse recule à mesure que s'effectue la plastification; le polymère fondu et homogénéisé s'entasse à l'avant de la vis dans une zone adéquatement nommée zone d'accumulation. Lorsqu'une quantité prédéterminée de polymère est plastifiée, la vis agit comme piston et injecte la résine à haute pression vers le moule tempéré.

L'injection de polymères additionnés d'agents de moussage permet l'obtention de matériaux à usage structural qui présentent un cœur allégé avec une peau dense (Figure 1-9). Leur module en flexion est bien plus grand que celui de pièces de forme identique en résine pleine et de même poids, car ils mettent à profit les avantages de la structure sandwich avec un allègement dans la zone neutre qui ne travaille pas en flexion alors que les peaux qui sont sollicitées en traction ou compression ont une structure plus

serrée grâce au procédé de réalisation. Le contact du polymère fondu avec la paroi froide du moule y empêche en effet l'action de l'agent de moussage – chimique – qu'il contient alors qu'à cœur son action est complète.



Figure 1-8 : Schéma d'une presse à injection

Pfannschmidt et Michaeli [9] présentent trois méthodes d'incorporation du gaz dans le fondu pour l'injection de mousses polymères: soit (1) mélanger à sec l'agent gonflant au polymère avant l'incorporation dans la trémie, (2) précharger les granulés d'un agent gonflant physique dans un autoclave avant l'incorporation dans la trémie, et (3) l'injection d'un gaz directement dans le fondu au niveau de la buse.



Figure 1-9 : Mousse structurale à peau non alvéolaire

Indépendamment du type d'agent gonflant choisi, l'injection de mousses nécessite l'installation d'une valve à obstruction sur la buse de la presse. Cette dernière empêchera l'expansion dans le fourreau en permettant l'application d'une contrepression lors de la plastification sans causer de bavures. Enfin, les phénomènes de nucléation et croissance cellulaire exigent une diminution de pression à l'intérieur du moule. Deux options sont possibles. L'injection de mousses à haute pression s'apparente énormément à l'injection de pièces non-moussées, à la différence que le moule s'entrouvrira pendant le refroidissement de la pièce pour permettre la croissance cellulaire à pression atmosphérique. Par opposition, l'injection de mousses à basse pression ne nécessite pas l'utilisation d'un moule articulé; la chute de pression provient plutôt d'un remplissage partiel de la cavité (*short shot*). Le moussage ainsi amorcé comblera la portion de la cavité laissée vacante.

Selon Throne [10], les mousses structurales offrent une meilleure stabilité à long terme que le bois, une meilleure résistance à la corrosion que le métal et fonte, une meilleure rigidité que les feuilles de métal, un poids inférieur aux polymères standards et ne nécessitent pas l'assemblage manuel souvent exigé des pièces métalliques. Le bon comportement des produits aux intempéries, aux variations de température, au choc, leur bon amortissement – y compris sonore – des coups, la possibilité de les scier, clouer, etc, font de ces produits des substituts de choix pour de nombreux usages du bois, voire du métal. On peut ainsi aller des fausses poutres aux portes ou aux socles de machine à laver le tout monobloc. Avec un coût d'autant plus modeste que les moules ne nécessitent pas de matériaux très performants (aluminium, alliages légers,...) puisque on travaille en basse pression. On peut ainsi mouler des pièces de plus de 50 kg tout en utilisant une pression de fermeture de la presse assez basse - jusqu'à 15/25 bars - puisque le moussage lui-même crée une pression interne assez élevée. Une injection à grande vitesse permet d'obtenir un bon aspect de surface. Pratiquement tous les thermoplastiques peuvent être ainsi mis en œuvre, on citera parmi les plus usités le PEHD, le PS choc, le PP, l'ABS ainsi que diverses résines techniques, PC, PPO. Parmi les évolutions du procédé, on notera la mise au point du moussage dans des zones sélectionnées, par exemple d'un gobelet.

d. RIM (Reaction Injection Molding)

Ce procédé constitue une adaptation du moussage structural/intégral par injection dans le cas d'un polymère en cours de polycondensation ou de polyaddition (polyuréthanne à deux composants, polyurée, dicyclopentadiène – Téléne de Goodrich/Total -, etc.). Il consiste à admettre, en tête de machine, l'agent porogène (physique) dans le moule – fermé – qui reçoit, à basse pression les deux constituants liquides dont le mélange s'accompagne d'une réaction généralement exothermique. On peut aussi introduire l'agent porogène (chimique) dans l'un des constituants (le polyol pour les systèmes polyuréthannes). Le RIM se prête bien à la réalisation de pièces importantes en petites séries. Ainsi, on estime l'optimum en construction pour l'automobile à 300 pièces par jour (fabrication de protecteurs de bas de caisse et d'ailes pour Citroën). On remarquera de plus la possibilité qu'offre le RIM de peinture dans le moule (« in-mold painting »). Du RIM on peut rapprocher le RTM (Resin Transfer Molding) dans lequel on peut aussi admettre un agent porogène lors de l'injection d'un polymère en cours de polyaddition (époxy, polyester insaturé), ce qui permet l'obtention de mousses de résines thermodurcissables.

e. Micro- et nano-cellularisation

En vue de répondre à divers problèmes de matériaux posés par la construction aérospatiale ou la physique des hautes énergies, divers laboratoires américains ont étudié au début des années 90 des procédés conduisant à des produits microcellulaires à faible ou très faible densité dont on attend des propriétés mécaniques satisfaisantes, permettant, entre autre, un usinage précis. Contrairement aux procédés décrits jusqu'ici, l'approche permet de maîtriser simultanément la porosité totale et la taille des cellules. Divers types de matériaux ont été décrits, au laboratoire ou en développement, le plus souvent avec des matrices céramiques (silice, etc.), dans quelques cas organiques. A cet effet, on mène de manière maîtrisée la polymérisation – en solution – de la matrice afin de laisser des « poches » - précurseurs des cellules – de solvant que l'on éliminera de manière très contrôlée, afin de « vider » les cellules sans que la structure s'effondre.

Une approche voisine, dont le développement industriel est plus avancé, a été décrite sous le sigle Mucell. Elle permet d'obtenir avec les thermoplastiques des matériaux dont la taille des cellules – fermées – peut être réglée au voisinage du micron en utilisant les fluides supercritiques – et particulièrement le CO_2 – comme agent de plastification de la résine (grâce à sa tension superficielle réduite) conduisant à la mise en forme avant d'en faire, par volatilisation contrôlée physiquement, un agent d'expansion maîtrisée. La microporosité apparaît très homogène, sans vacuoles, la peau est lisse. Le développement à ce jour a été mené : sur des équipements d'extrusion sans réduction de la masse traitée, sur une très grande variété de matières (polyoléfines, styréniques, PVC) et jusqu'à des allégements de 97 ou 98 % y compris sous des épaisseurs très faibles (mm), et ce sans apparition de trous et avec un aspect de surface excellent. Les produits paraissent particulièrement performants, en particulier à basse température, en souplesse, ductilité, ténacité, tenue à la fatigue, à l'impact. Les qualités d'isolation et le comportement diélectrique sont également très intéressants. Le procédé offre ainsi une ouverture sur des produits nouveaux (tels que des films et fibres très fins microporeux sans rupture lors de la production) et des applications inédites, par exemple en gainage de câble.

1.2.2.2. Mousses métalliques

Les absorbants métalliques ont été l'objet d'une demande plus accrue au cours des dernières décennies en raison de leur mélange unique de caractéristiques. De nombreuses méthodes ont été utilises tour à tour pour préparer des métaux allégés, voire des mousses. On cite le frittage incomplet d'une poudre métallique, conduisant essentiellement à des produits à porosité ouverte, bons pour la réalisation de filtres ou de moules poreux, entre autres. De manière voisine, Krebsoge a développé des filtres asymétriques (pour le génie chimique ou agro-alimentaire ; exemple filtration des bières) dans lesquels une couche de poudre métallique très fine est déposée par 'wet powder spraying' sur un tube poreux avant compaction avec une poudre plus grossière.

L'injection d'un gaz, le plus souvent l'air dans le métal en fusion est une autre alternative pour la fabrication des mousses métalliques. Si les produits se révèlent utilisables, en particulier usinables, il est assez délicat d'en contrôler la qualité (et en premier l'homogénéité). On peut obtenir un résultat bien meilleur par inclusion dans le métal fondu de particules (par exemple de magnésie) capables de rester dispersées et de stabiliser les bulles de gaz introduit sous pression. C'est ce qu'Alcan a breveté en décrivant des mousses d'aluminium ou d'alliage léger. Hitachi a étudié (et breveté) des mousses de cuivre obtenues par un autre moyen, et ceci en calcinant des mousses métalliques obtenues en partant d'un polyuréthanne bi-composant chargé en oxyde et hydroxyde métalliques. Une autre technique mérite d'être citée. Elle consiste à additionner un agent approprié (par exemple TiH₂ qui libère de l'hydrogène vers 380-400°C) au métal en fusion. On sait ainsi réaliser des mousses d'acier, de cuivre, etc. Il est clair qu'une distribution homogène de cet agent est particulièrement difficile à réaliser. Il est donc encore difficile de contrôler la qualité du produit.

Plus récemment le Département de 'Recherche Appliquée sur les Matériaux' de l'Institut Fraunhofer a développé (et breveté) une autre approche. Le principe en est simple : le métal en poudre fine est mélangé à un agent de moussage solide (typiquement un hydrure métallique à un taux de l'ordre du % ou moins) puis compacté, à température relativement basse, sous forme de granules denses ou de plaques, billots, profils divers qui constitueront des semi-produits. Les premiers peuvent être moulés et moussées en même temps, les seconds peuvent être formés ou usinés tels que avant moussage. La phase poreuse obtenue a des cellules fermées et la structure paraît avoir une bonne homogénéité de distribution des cellules. Côté applications, les mousses d'aluminium sont un excellent exemple (sachant que leur densité est comprise entre 500 et 1000 g/l), les propriétés remarquables sont : une grande rigidité spécifique, une grande capacité d'absorption d'énergie, accompagnée d'intéressantes propriétés amortissantes mécaniques et acoustiques, une conductivité électrique et thermique réduites, une bonne aptitude à l'usinage et à l'assemblage mécanique (sciage, fraisage, perçage, clouage, vissage, etc.) ainsi qu'au soudage; l'ininflammabilité, la résistance à l'environnement (biologique en particulier) et bien évidemment la recyclabilité. En dehors d'une densité qui permet de concevoir des montages flottant aisément (appontements, aménagements portuaires, etc), puisque la porosité est essentiellement fermée, la bonne tenue à la compression ouvre la voie à des systèmes 'anti-crash', d'autant que les produits comparables à base de mousses organiques ne sauraient tenir à des températures aussi élevées sans compter que l'on obtient évidemment aussi un bien meilleur comportement au feu. On peut l'illustrer en étudiant le comportement à l'écrasement en bout d'une poutre creuse (en acier) remplie d'une mousse d'aluminium.

1.2.2.3. Mousses minérales et céramiques

Les terres cuites, allégées de manière rustique, sont sans doute les mousses céramiques les plus anciennes au monde. Elles n'ont évidemment pas perdu depuis leur intérêt, pas plus que les nombreux matériaux minéraux à structure lamellaire que l'on sait extraire ou produire, et employer depuis longtemps pour leurs propriétés absorbantes des à une porosité assez souvent bien ordonnée. On sait créer des structures à caractéristiques et taille de cellules précises, ainsi des polysilicates aux feuillets intercalables par des ions, remplaçables par des molécules organiques de taille sélectionnée. On retrouve la même technologie de base dans de nombreux produits : citons les mousses de verre isolantes, les mousses de béton, les billes d'argile expansé pour hydroculture, ou encore les terres cuites acoustiques, le cas échéant avec isolant intégré, utilisables dans des écrans antibruit, etc. il est aussi de nombreuses mousses qui trouvent place depuis très longtemps en génie des procédés (chimie, mécanique, etc.).

Les céramiques poreuses offrent des propriétés intéressantes : faible densité, stabilité à haute température, faible conductivité thermique, activité catalytique, résistance à la corrosion et à l'érosion. Certaines de ces propriétés sont évidemment inhérentes aux céramiques denses. Leur fragilité et les difficultés rencontrées pour corréler les propriétés mécaniques et thermiques à la structure poreuse sont deux problèmes majeurs quant à l'utilisation de ces matériaux. De nos jours les céramiques poreuses occupent une place importante dans des applications liées à l'environnement et à l'économie d'énergie. Les matériaux céramiques poreux interviennent dans de nombreuses applications comme la filtration, les catalyseurs ou supports de catalyseur, les bioréacteurs, les piles à combustibles, les capteurs de gaz, la séparation de gaz, l'isolation thermique et électrique [11]. Des céramiques traditionnelles poreuses sont employées pour la filtration de l'eau depuis 1861 [12]. Dans des champs d'application plus récents, des mousses céramiques présentant une bonne résistance aux chocs thermiques sont utilisées pour filtrer des métaux fondus. Des matériaux poreux (alumine, carbure de silicium) sont également employés pour la filtration des gaz d'échappement dans l'automobile.

On peut ainsi développer des mousses céramiques ou minérales obtenues par mise en forme et traitement de produits d'origine naturelle comme les argiles naturelles, titanates, phosphates, etc. ou encore les zéolites (silicates d'aluminium) de Chine, de Géorgie, etc. Mais aussi, on peut développer des mousses céramiques par moussage d'un gel minéral (silice, alumine, zircone, etc) ou par moussage d'un polymère organominéral, tels que les polycarbosilanes ou silazanes (la mousse obtenue étant ultérieurement traitée thermiquement pour passer à la phase minérale). D'autres moyens possibles pour le développement des céramiques poreuses, comme l'imprégnation d'une mousse organique – à cellules ouvertes – par des matières actives ou des précurseurs. De son côté, Brunel University a étudié l'incorporation d'alumine en poudre dans du PS (50 % en poids) avant de soumettre la résine ainsi chargée au traitement classique de moussage au pentane (procédé « Steam shell ») ; on peut de même introduire du TiO₂ en

poudre très fine dans une résine PU que l'on mousse de manière habituelle (porosité>95 %) avant traitement thermique pour donner une mousse de TiC.

1.3. Caractérisation choc et acoustique

Grâce à leurs structures alvéolaires, les mousses possèdent des pouvoirs d'absorption de choc et acoustique nettement grandes par rapport au matériaux compacts qui les constituent. En effet, le fort taux de gaz plus ou moins piégé dans les alvéoles à parois très minces entraîne des propriétés physiques, mécaniques et chimiques différentes de celles des mêmes matériaux compacts : amélioration du caractère isolant thermique, phonique et du pouvoir amortissant. On s'intéresse particulièrement aux caractéristiques choc et acoustique des matériaux poreux. Il est ainsi nécessaire d'étudier les différentes techniques de caractérisation et d'en choisir une selon le besoin de notre étude. Cette partie permet une étude approfondie des indicateurs choc et acoustique ainsi que les moyens expérimentaux existants.

1.3.1. Indicateur choc

Le choc résulte de l'application d'une sollicitation mécanique à grande vitesse (plusieurs mètres par seconde) et à énergie élevée, engendrant la rupture d'une éprouvette en une fraction de seconde. Il permet de juger, dans des conditions expérimentales données, de la fragilité d'un ensemble matériau - éprouvette, la fragilité étant davantage synonyme de faible allongement que de faible énergie de rupture. Il permet au-delà de définir et de qualifier la zone de transition ductilité - fragilité (brusque ou progressive), lorsque varient les conditions d'utilisation par exemple. Les deux principaux types d'essais pratiqués en milieu industriel et différant par l'appareillage et le mode de sollicitation sont développés ci-après : les méthodes pendulaires pour sollicitations uniaxiales et les méthodes par chutes de masses pour sollicitations multiaxiales.

1.3.1.1. Méthodes pendulaires

La résistance au choc caractérise l'énergie absorbée au cours de la rupture d'un barreau, sous l'action d'un percuteur doté d'une énergie cinétique suffisante. L'impact est généré par une masse à mouvement pendulaire. L'angle de remontée du pendule après le choc permet de calculer l'énergie de rupture. L'appareil utilisé porte le nom de mouton - pendule, il est constitué d'un bâti rigide et massif, d'un support d'éprouvette, d'une masse oscillante comportant un percuteur et d'un dispositif de repérage de l'énergie absorbée (Figure 1-10).

Une des méthodes pendulaires mérite de la décrire ici. Le choc Charpy repose sur la flexion d'une éprouvette reposant sur deux appuis simples avec charge centrale. La configuration généralement utilisée est de type « debout », c'est-à-dire avec une direction de percussion parallèle à la largeur *b* et un impact sur la surface longitudinale étroite $L \times h$ de l'éprouvette (Figure 1-11).

La résistance au choc Charpy est exprimée sous forme de résilience, énergie absorbée rapportée à la section, sous entaille si elle existe (résilience transversale en J/m^3 , ou parfois rapportée à un volume contraint (résilience volumique en J/m^3 . L'insuffisance physique d'une telle caractéristique rend la notion de résilience largement dépendante de la géométrie, en particulier du rapport d'effilement D/h où D est la distance entre appuis et h l'épaisseur ; la résilience augmente avec D/h.



Figure 1-10 : Machine d'essai de choc pendulaire (mouton - pendule)



Figure 1-11 : Principe du choc Charpy [13]

1.3.1.2. Méthodes de choc multiaxial par chute de masses

Le succès de la méthode est dû au fait que les résultats obtenus présentent une bonne concordance avec la réalité, à la différence des chocs Charpy et Izod. Le principe général de cet essai, encore appelé parfois choc biaxial ou essai de perforation, est de laisser tomber une masse d'une hauteur donnée perpendiculairement à un film, une plaque ou un objet et à caractériser le type de défaillance ou de comportement obtenu pour une énergie cinétique appliquée donnée (Figure 1-12). Le choc par chute de masse ou de projectile est pratiqué en version non instrumentée ou instrumentée.

Le choc multiaxial non instrumenté est largement pratiqué et a été appliqué à l'étude de la fragilité des tubes, des drains annelés en PVC, des profilés et produits de construction en PVC, des films et feuilles, et des plaques en plastiques rigides. On parle de choc non instrumenté lorsque le comportement à l'impact des matières plastiques n'est caractérisé qu'en terme d'énergie de défaillance, cette dernière pouvant être de type craquelure, rupture, pénétration, éclatement ou indentation. L'énergie d'impact peut être modulée soit à hauteur de chute variable et masse constante, soit à masse variable et hauteur de chute constante, ces dernières conditions étant préférables dans la mesure où la vitesse de percussion, facteur d'influence important, est maintenue constante. Les éprouvettes planes circulaires ou carrées sont encastrées ou non et un poinçon de géométrie donnée les percute en leur centre. Les dimensions recommandées sont de 60 mm de diamètre ou de côté pour des épaisseurs de 1 à 4 mm, et le percuteur conseillé a une géométrie hémisphérique de 20 mm de diamètre dont il est recommandé de lubrifier la surface de façon à minimiser les frottements avec l'éprouvette. Des niveaux d'énergie croissants (méthode statistique) ou fonction de la défaillance ou non - défaillance (méthode en escalier) sont appliqués pour calculer l'énergie moyenne provoquant la défaillance de 50 % des éprouvettes. Ce mode de calcul résulte du fait que l'état de contrainte multiaxial induit par le choc est relativement complexe. Cet essai nécessite une grande quantité d'éprouvettes pour obtenir des résultats statistiques cohérents qui intègrent l'influence des multiples paramètres liés au matériau, à la préparation des éprouvettes, à la géométrie, à la température, à la vitesse, etc.

Le choc multiaxial instrumenté a été quant à lui développé plus récemment. Dans ce cas la caractérisation du comportement à l'impact repose sur les relations force - déformation ou force - temps à vitesse nominale de percuteur constante au cours du choc. Il est ainsi possible de caractériser le mode d'endommagement du matériau de manière plus fine qu'une simple énergie de rupture, la finalité étant de proposer une interprétation des mécanismes qui se produisent en chaque point des lois de comportement. Les conditions générales d'essai (éprouvettes, percuteur) restent analogues à celles précédemment exposées. La source d'énergie peut être de type hydraulique (machine d'essai à haute vitesse) ou de type masse d'inertie (machines à masse tombante ou pendulaire) mise en mouvement avec l'assistance d'un ressort, d'un organe pneumatique ou sous l'effet de la pesanteur.



Figure 1-12 : Dispositif d'essai de choc multiaxial par chute de masse [15]

1.3.1.3. Autres méthodes

Le choc par chute d'une masse dotée d'une extrémité cylindrique tronquée peut également être utilisé pour déterminer la résistance dynamique à la déchirure de films plastiques maintenus sur un support courbe. Dans certains cas particuliers, pour tester la fragilité de produits finis, par exemple des corps creux, il est possible de laisser tomber de différentes hauteurs l'objet rempli d'un liquide. D'autres essais sont également en développement dans certaines unités de recherche, qui nécessitent des moyens spécifiques et coûteux tels que le canon à air comprimé, propulsant un projectile à très hautes vitesses ou les barres de Hopkinson. Ce dernier système est constitué d'un canon à air comprimé propulsant un impacteur sur une barre incidente. L'onde de choc générée a une amplitude fonction de la vitesse et une durée fonction de la longueur de l'impacteur. Elle se propage dans la barre incidente à la vitesse du son jusqu'à l'éprouvette et se décompose en deux signaux l'un transmis et l'autre réfléchi dans une proportion qui dépend de la différence des impédances acoustiques de la barre et de l'éprouvette. De la même manière à l'autre extrémité de l'éprouvette, une partie du signal est transmise à la barre de sortie et l'autre est réfléchie. Des jauges de déformation collées sur les barres permettent de mesurer les différents signaux (incident, réfléchi et transmis) dont l'analyse permet de déterminer la loi de comportement du matériau essayé (Figure 1-13).



Figure 1-13 : Principe des barres de Hopkinson

D'une manière générale, pour tous ces essais dont le résultat dépend de l'épaisseur de l'épaisseur, toutes les corrélations fragilité - épaisseur, pour modifier la conception d'une pièce doivent être utilisées avec beaucoup de prudence. Néanmoins, la chute libre d'une masse constitue l'essai le pus proche de la réalité d'utilisation des matériaux cellulaires.

1.3.2. Indicateur acoustique

L'acoustique s'efforce de représenter le caractère absorbant d'un matériau à l'aide d'un scalaire, éventuellement complexe. Généralement, lorsqu'une onde plane incidente arrive sur l'interface séparant deux milieux, on observe une onde réfléchie et une onde transmise. L'onde incidente et l'onde réfléchie se combinent pour donner une onde stationnaire. Dans le cas où le second milieu est un absorbant solide, poreux et épais (laine de verre par exemple), les phénomènes liés à l'onde acoustique transmise sont complexes. Une onde sonore incidente induit des mouvements relatifs de l'air dans les « pores » du matériau. Ces mouvements sont alors efficacement dissipés par simples frottements internes de l'air, dont les vitesses relatives à la structure doivent s'annuler au niveau de la surface de contact air/squelette solide ou « surface des pores » Sp : ce sont les pertes par effets visqueux. Les phénomènes acoustiques induisent également de petites oscillations de température dans l'air saturant, lesquelles s'annulent au contact du solide (qui reste à température ambiante). Il en résulte des échanges irréversibles de chaleur entre l'air et le solide : ce sont les pertes par effets thermiques, généralement plus faibles que les premières. Enfin, lorsque le solide lui-même est mis en mouvement interviennent des pertes de type viscoélastique, liées aux frottements internes dans la matrice solide en déformation (sa mise en vibration peut résulter des actions – inertielles et visqueuses – exercées au niveau des parois Sp par les mouvements de l'air, ou plus directement, de son contact avec une plaque, un écran, etc.). Ces pertes structurales peuvent jouer un rôle important, en particulier au voisinage de résonances.

S'agissant de caractériser un matériau, on peut définir son impédance acoustique spécifique $Z(M, \omega)$, comme le rapport de la pression acoustique sur la composante normale de la vitesse particulaire en M, dans le cas d'une onde plane incidente :



Figure 1-14 : Arbre des méthodes de mesure d'absorption. Les catégories se trouvent dans les cases arrondies, les instances dans les cases rectangulaires

Si l'impédance apparaît dans les conditions aux limites des problèmes acoustiques, les ingénieurs du bâtiment lui préfèrent souvent un objet réel plus maniable et sans dimension, le coefficient d'absorption α . Dans le cas d'une onde plane, on peut l'écrire à l'aide du coefficient de réflexion R, rapport complexe de la pression exercée par l'onde réfléchie sur celle qu'exerce l'onde incidente.

$$\alpha(\theta) = 1 - |R(\theta)|^2 \qquad \qquad Eq. \ 1-2$$

R est lié aux impédances par la relation (Eq. 1-3), dans le cas d'une onde plane incidente sous l'angle θ par rapport à la normale à la paroi.

$$R(\theta) = \frac{Z\cos(\theta) - Z_0}{Z\cos(\theta) + Z_0} \qquad \qquad Eq. \ 1-3$$

L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir une vision d'ensemble des différentes méthodes développées dans le but de caractériser les propriétés d'absorption acoustique des matériaux. La figure ci-dessous (Figure 1-14) a la forme d'un arbre à deux niveaux, le premier étant la dichotomie entre méthodes de mesure en régime stationnaire et méthodes en régime transitoire.

1.3.2.1. Régime stationnaire

Pour cette catégorie de méthodes, le champ acoustique ne varie pas sur la durée de la mesure. Les méthodes décrites dans ce paragraphe nécessitent au moins deux mesures, soit en des points différents, soit pour des matériaux différents.

La première méthode est ce qu'on appelle de pression parétale, proposée par Ingard et Bolt, se déroule en champ libre [14]. Un microphone est placé de telle sorte que sa membrane se trouve à la surface de l'échantillon de matériau testé. Celui-ci est soumis à un champ acoustique plan. La pression mesurée est comparée à celle que l'on obtient dans la même configuration, mais avec cette fois une paroi supposée parfaitement réfléchissante, ce qui permet de déduire le coefficient de réflexion complexe R. L'angle d'incidence est quelconque.

D'autres méthodes existent et repose sur le principe de la variation spatiale (la pression est mesurée en plusieurs points situés à faible distance de l'échantillon) :

a. Ondes stationnaires

La création d'un champ acoustique plan à l'intérieur d'un guide d'ondes engendre l'apparition d'ondes stationnaires, dont les caractéristiques dépendent des terminaisons mises en place. Ceci définit le principe de la célèbre méthode du tube à ondes stationnaires (Figure 1-15). Un tuyau d'axe rectiligne et de section constante est terminé à une extrémité par la membrane d'un haut parleur et à l'autre par un échantillon de matériau à tester. Le tube à ondes stationnaires peut en fait recevoir deux tubes : l'un de 10 cm de diamètre, pour la gamme de 100 à 1800 Hz, l'autre de 3 cm de diamètre, pour la gamme de 800 à 6500 Hz. La gamme de fréquences est en effet limitée en basses fréquences par la longueur du tube qui doit être significative vis-à-vis de la longueur d'onde, et en hautes fréquences par le diamètre du tube qui doit être inférieur à 0,58 fois la longueur d'onde, afin d'éviter la propagation de modes transversaux (hypothèse d'onde plane). Le relevé du taux d'ondes stationnaires permet d'accéder facilement à R, en incidence normale. Cette méthode est l'une des deux plus répandues à l'heure actuelle, et a fait l'objet de plusieurs normes et standards [15-17]. Il est aussi possible, dans un tube à ondes stationnaires, de déterminer l'impédance de la terminaison à partir de l'évaluation de la fonction de transfert entre deux points d'observations fixes, sur une droite parallèle à l'axe du tube [18-19]. Cette approche a, elle aussi, fait l'objet d'une standardisation [20]. Si H est la fonction de transfert entre deux points d'observations fixes:

$$R = \left(\frac{H - e^{-jks}}{e^{jks} - H}\right) e^{2k(1+s)}$$
 Eq. 1-4

avec k: nombre d'onde, s: espacement entre les microphones (s = 50 mm pour le gros tube et 20 mm pour le petit tube) et l la distance entre la surface du matériau et le microphone le plus proche de l'échantillon (l = 100 mm pour le gros tube et 35 mm pour le petit tube).



Figure 1-15 : Dispositif expérimental

Enfin, on a proposé dans une version portable, permettant des mesures in situ, car non destructive [21]. Elle ne s'est pas répandue jusqu'à présent, probablement parce qu'il est

impossible de réaliser l'étanchéité du tube à l'extrémité qui est en contact avec le matériau testé par la simple application d'un effort normal à la surface.

b. Fonction de transfert en champ libre

Une plaque est fixée à l'aplomb d'un mur rigide parfaitement réfléchissant, à une distance correspondant à la profondeur de cavité *d*. Le reste de la pièce est recouvert de laine de verre, diminuant ainsi la majeure partie des réflexions (Figure 1-16). La source sonore est un haut-parleur et elle est positionnée soit à la normale du système soit sous un angle d'incidence choisi. Elle doit être la plus éloignée possible du système, afin de considérer ici l'onde comme plane. Le principe est simple : les ondes sont considérées comme planes. Deux mesures de pression sont effectuées à deux positions différentes. Un système à deux équations sur les deux amplitudes de pression est trouvé puis résolu. Les coefficients de réflexion et d'absorption mesurés sont ainsi trouvés.



Figure 1-16 : Schéma représentant du dispositif expérimental de la méthode doublet microphonique [22]

Des essais réalisés par Dupont [23] ont montré l'obtention du même coefficient d'absorption acoustique (Figure 1-17) en utilisant les deux dispositifs expérimentaux (Tube à ondes stationnaires et méthode de doublet microphonique). Il faut noter que l'intérêt principal de l'utilisation de la méthode du doublet microphonique pour mesurer l'absorption d'un système sous incidence oblique. Ces mesures ne peuvent être obtenues avec un tube de Kundt classique.



Figure 1-17 : Mesure en chambre anéchoique par méthode du doublet microphonique (2D) et mesure en tube de Kundt (1D) [23]

c. Ajustement

Sur la base d'un modèle de propagation dépendant des caractéristiques d'absorption du matériau testé, on peut procéder par ajustement des paramètres du modèle à partir de

relevés de pression en quelques points. Hebault et Corsain ont exploré cette piste en extérieur [24], en recourant à un algorithme de moindres carrés non linéaires.

d. Transformée de Fourier Spatiale

En ondes sphériques, à partir du relevé de la pression sur deux maillages situés chacun dans un plan parallèle à l'échantillon évalué, il est possible d'accéder à R en effectuant une décomposition en ondes planes et en travaillant dans l'espace des nombres d'onde, via l'utilisation de la transformation de Fourier spatiale [25-26].

1.3.2.2. Régime transitoire

Cette fois, la mesure implique l'observation d'une variation de la pression acoustique sur une durée finie, en un ou plusieurs points fixes. A noter que la variation en question peut être réelle, ou bien recréée durant la phase d'exploitation des mesures brutes, comme dans le cas où un signal pseudo-aléatoire est utilisé pour obtenir une réponse impulsionnelle.

a. Décroissance de l'énergie

La décroissance de l'énergie acoustique dans une salle, une fois toutes les sources éliminées, est liée à l'absorption créée par les parois. En conditions de champ diffus, il est possible de mesurer le coefficient d'absorption d'un échantillon en mesurant la différence de durée de réverbération dans une salle, en la présence et en l'absence de l'échantillon testé. C'est ce que réalise la méthode en chambre réverbérante [27-28]. La méthode de mesure du coefficient d'absorption en chambre réverbérante la plus classique est la méthode de Sabine. Cette méthode pour une gamme de fréquence intéressante nécessite une surface d'étude très importante.

b. Séparation des signaux

Aux antipodes de la vision globale qui préside à la mesure en chambre réverbérante, en prenant la définition du coefficient de réflexion au pied de la lettre, on imagine facilement une méthode de mesure dont le principe serait l'envoi d'une onde vers la paroi qui nous concerne, assorti de la séparation de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Cette approche est certainement celle qui, aux côtés du doublet microphonique, a suscité le plus de travaux, probablement parce qu'elle paraissait applicable in situ. Il est possible de la décliner en deux variantes selon le procédé qui a été retenu pour séparer les ondes directe et réfléchie. La première variante s'intitule comme séparation géométrique. Cremer présente une méthode où la géométrie de la salle de mesure empêche toute autre onde que celle qui est réfléchie par la paroi testée de parvenir au point d'observation, du fait de la présence d'un panneau absorbant additionnel, dans une chambre anéchoique. On obtient R par comparaison entre l'onde réfléchie par le matériau testé, et celle que renvoie un matériau de référence supposé parfaitement réfléchissant [29].

Les méthodes de séparation géométrique ont ceci d'ennuyeux qu'elles imposent des différences de marche importantes entre onde incidente et réfléchie, au point d'être inapplicables en conditions in situ, en dehors des hautes fréquences. Une manière de revenir à des valeurs plus raisonnables consiste à remplacer l'opérateur de troncature par celui de soustraction : 2^{ème} variante de séparation. En effet, lorsqu'il est possible d'accéder à l'onde incidente seule par un moyen externe, le recouvrement temporel de l'onde directe et de l'onde réfléchie devient autorisé. Et ceci est possible en moyen d'un capteur additionnel, ou à l'aide d'une référence enregistrée, ou par extrapolation.

c. Reconstitution du champ libre

A l'initiative de Vigran, Lundeby a commencé d'explorer les possibilités d'une méthode inspirée de celle du doublet microphonique en champ libre, où les premières étapes consistent à réaliser une acquisition de réponses impulsionnelles, puis à appliquer des fenêtres sur celles-ci - ce qui rattache pour nous cette méthode aux méthodes en régime transitoire -, de manière à recréer les conditions du champ libre, et donc à se ramener à la méthode précédente.

1.3.2.3. Récapitulatif

En conclusion, nous avons pu noter dans cette partie que pour la mesure de α en excitation onde plane, la technique la plus utilisée et la plus stable reste la mesure au tube de Kundt. Mais cette méthode se limite à de petits échantillons et en incidence normale. Elle doit aussi, pour couvrir une gamme de fréquences exploitables (100-6400Hz), nécessiter l'utilisation de plusieurs tubes (problème de discontinuité des mesures aux limites fréquentielles). La mesure par doublet microphonique en chambre anéchoïque permet de pallier ces problèmes. Elle reste cependant délicate à utiliser en HF et BF, elle nécessite une mise en place minutieuse du dispositif expérimental. En incidence oblique, elle est la seule technique testée valide. En incidence normale, elle est cependant moins précise que la technique du tube de Kundt. Les autres méthodes expérimentales sont trop imprécises.

Pour la mesure de α en excitation champs diffus, les méthodes s'avèrent trop imprécises pour une analyse en bande fine et la seule technique de mesure qui pourrait être valide est la technique de Sabine. Mais elle nécessite de grands échantillons. Cette mesure de α en champ diffus et en bande fine reste un véritable problème. Cependant pour une analyse en bande large cette technique reste correcte.

Côté pratique, cet aspect est rédhibitoire pour certaines méthodes : celle de Tamura est trop lourde pour quitter le laboratoire, celle de Ingard et Bolt implique d'endommager le matériau testé. Pour les autres, l'obstacle réside dans le passage d'un seul matériau présent à plusieurs. Le tube de kundt reste ainsi le seul à permettre de quantifier l'impédance caractéristique et le coefficient d'absorption acoustique en onde plane mais aussi d'identifier les paramètres poroélastiques du matériau.

1.4. Techniques de Modélisation

L'objectif de cette partie est de présenter différentes techniques de modélisation, principalement issues de la géostatistique. Nous commençons tout d'abord par définir la modélisation par surface de réponse et son utilité. Vient ensuite la description de la méthode des réseaux de neurones et comment l'ajuster par la phase d'apprentissage. Cette technique est encore peu utilisée en ingénierie, mais reste toujours d'actualité car les méthodes d'apprentissage progressent. La 3^{ème} technique présentée dans cette partie, le krigeage, est particulièrement adaptée aux expériences déterministes. A cet effet, une description de la manière de construction de cet estimateur est détaillée. En dernière partie, différents types des plans d'expériences sont listés. En effet, cet outil est nécessaire pour la mise en place des méta-modèles en utilisant une des techniques de modélisation.

1.4.1. Méthodes d'ajustement du modèle approché

Nous présentons dans ce paragraphe les méthodes les plus utilisées en ingénierie qui sont les méthodes de régression polynomiale, l'approximation par réseau de neurones et enfin les méthodes géostatistiques de krigeage.

1.4.1.1. Modèles de régression

Une des méthodes les plus utilisées pour la construction d'un modèle d'approximation d'un processus sur une région d'intérêt est la Modélisation par Surface de Réponse (RSM) ou régression. Un modèle de régression est un polynôme de degré quelconque (généralement de degré deux) qui ajuste au mieux les données, les coefficients de ce modèle étant obtenus par la méthode des moindres carrés. Les méthodes de régression fournissent des outils pour identifier les variables réellement influentes sur la réponse et pour construire un modèle représentant la réponse en fonction des variables influentes. Le modèle final peut être utilisé pour effectuer des prédictions du processus sur l'ensemble du domaine expérimental [30].

On considère donc une réponse d'intérêt Y qui dépend de variables $\xi_1, ..., \xi_n$. La relation entre les données peut s'écrire sous la forme :

$$Y = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + \varepsilon \qquad \qquad Ea. 1-5$$

Où f est la fonction réponse inconnue et ε est un terme résiduel ou d'erreur qui représente les différentes sources de variabilité non modélisées par f.

Les variables $\xi_1,...,\xi_n$ sont appelées variables naturelles parce qu'elles sont exprimes dans leurs unités de mesure naturelles. Dans la plupart des études de régression, les variables naturelles sont transformées en variables adimensionnées $x_1,...,x_n$, encore appelées facteurs, de valeurs comprises entre -1 et 1. Ces dernières valeurs sont appelées niveaux et représentent respectivement le minimum et le maximum du domaine de variation retenu pour la variable. L'équation (Eq. 1-5) peut être reformulée de la manière suivante :

$$Y = f^{*}(x_{1}, x_{2}, ..., x_{n}) + \varepsilon$$
 Eq. 1-6

La fonction f^* doit être approximée. Pour des raisons de coût, on utilise à cette fin généralement des polynômes de degré peu élevé, la plupart du temps de degré 2, qui sont supposés convenir sur une petite région de l'espace des variables.

Considérons par exemple le cas de deux facteurs, x_1 et x_2 et un modèle de régression polynomial complet de degré 1 avec interaction. Celui-ci est alors de la forme :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$
 Eq. 1-7

Le coefficient constant β_0 est un estimateur de la moyenne de Y sur l'ensemble du domaine expérimental. Les termes x_1 et x_2 sont appelés termes linéaires. Les coefficients β_1 (respectivement β_2) représentent les variations attendues de Y lorsque x_1 (respectivement x_2) varie d'une unité : de -1 à 0 ou de 0 à 1. Ce coefficient peut être vu comme un estimateur de la dérivée partielle de Y par rapport à x_1 (respectivement x_2). Le terme β_{12} est le coefficient lié à l'interaction à deux facteurs x_1 et x_2 . Il exprime le fait que les variations de Y provenant de x_1 (respectivement x_2) dépendent des valeurs de x_2 (respectivement x_1).

Le modèle (Eq. 1-7) est le modèle interactif le plus généralement utilisé pour deux variables. Ce type de modèle est surtout employé pour des études de sensibilité lorsqu'on suspecte un effet d'interaction des facteurs sur la réponse. Par contre, pour la phase de modélisation, des modèles plus précis sont préférées, par exemple, toujours dans le cas de deux variables, un polynôme de degré 2 :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \varepsilon \qquad Eq. \ 1-8$$

Considérons donc un modèle complet de degré 2 pour *n* facteurs $x_1, ..., x_n$, il s'écrit :

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \mathcal{E}$$
 Eq. 1-9

appliqué à l'ensemble des expériences effectuées selon le plan d'expériences retenu, on en déduit le modèle matriciel suivant :

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \qquad Eq. \ 1-10$$

Avec X la matrice $n \times p$ du modèle, elle dépend à la fois du modèle de régression et du dispositif expérimental. Y le vecteur $n \times 1$ des observations de la réponse aux n points du dispositif expérimental, ε vecteur des résidus ou erreurs inobservables, β le vecteur $p \times 1$ des coefficients (paramètres statistiques) du modèle, et n le nombre de simulations et p le nombre de termes du modèle (en incluant la constante). Les coefficients β sont inconnus et restent à estimer, usuellement par la méthode des moindres carrés ordinaires [31-33].

Les méthodes de régression classiques supposent que le vecteur des erreurs ε est un vecteur aléatoire normalement distribué de moyenne nulle et de variance uniforme σ^2 (homoscédasticité des erreurs). Sous cette hypothèse, et sous réserve que les colonnes de X soient indépendantes, on a d'après le théorème de Gauss Markov :

$$E(X\hat{\beta}) = XE(\hat{\beta}) = X\beta \qquad \qquad Eq. \ 1-11$$

Où $\hat{\beta}$ est l'estimateur des moindres carrés, c'est-à-dire que l'estimateur $\hat{\beta}$ minimise la fonction L:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon \varepsilon \varepsilon = (Y - X\beta)(Y - X\beta) \qquad Eq. \ 1-12$$

Sous réserve que les colonnes de X soient indépendantes et que le vecteur des erreurs ε est aléatoire, l'expression de $\hat{\beta}$ est alors donnée par : $\hat{\beta} = ({}^{t}XX)^{-1}{}^{t}XY$. C'est un estimateur sans biais, plus précisément c'est l'estimateur de dispersion minimale dans la classe des estimateurs linéaires sans biais. On a en fait :

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (^t XX)^{-1}$$
 Eq. 1-13

Quant à l'estimation de l'espérance mathématique de la réponse Y, elle s'écrit de la forme :

$$E(Y) = X\hat{\beta} \qquad \qquad Eq. \ 1-14$$

L'estimation de la covariance de $\hat{\beta}$ est très importante parce qu'elle est directement liée à la qualité du modèle. Il apparaît qu'elle est fonction de la matrice du modèle et de la variance σ^2 . On retient en général comme estimateur pour σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_E}{n-p} \qquad \qquad Eq. \ 1-15$$

Où p est le nombre de termes du modèle et SS_E est la somme du carré des erreurs, c'est-à-dire :

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \qquad Eq. \ 1-16$$

Cet estimateur est sans biais et a des propriétés d'optimalité étudiées, par exemple, dans Rao et Mitra [34].

Ainsi, pour un dispositif expérimental fixé, si deux modèles sont possibles, il est recommandé de prendre celui qui a la plus petite estimation de σ^2 , ce modèle expliquant mieux la variabilité de la réponse. Cependant, l'estimation de σ^2 ne suffit pas à apprécier la qualité du modèle. Afin de mieux quantifier celle-ci, un certain nombre de tests statistiques est à réaliser, ainsi qu'une analyse des résidus.

1.4.1.2. Réseaux de Neurones

Un neurone (Figure 1-18) est une sorte d'automate qui se compose d'entrées, d'une sortie et d'une fonction des entrées vers la sortie. Il peut être schématisé de la façon suivante :



Figure 1-18: Représentation d'un neurone formel selon Mc Culloch et Pitts

Où les x_i représentent les données d'entrées, w_i représente le poids de la i^{eme} connexion, fest la fonction d'activation et $y = f(w_1x_1 + ... + w_nx_n)$ représente la sortie du neurone.

Dans le modèle d'origine, la fonction d'activation f est indifféremment une fonction de Heaviside :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \ge 0\\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
 Eq. 1-17

Où, une fonction « signe » :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \ge 0\\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
 Eq. 1-18

Le neurone de Mc Culloch et Pitts a été généralisé en choisissant d'autres fonctions d'activations, telles que des fonctions linéaires par morceaux, des sigmoïdes ou autres gaussiennes (Figure 1-19). Les sigmoïdes sont de loin les fonctions les plus utilisées dans les réseaux de neurones, ce sont des fonctions continues, strictement croissantes et qui possèdent les comportements asymptotiques désirés.



Figure 1-19 : Fonctions d'activation : (a) seuil, (b) linéaire par morceau, (c) sigmoïde, (d) Gaussienne



Figure 1-20 : Représentation d'un réseau de neurone multicouches

Les neurones formels que l'on vient de définir doivent être assemblés pour former un réseau. Comme son nom l'indique, un réseau de neurones est constitué de plusieurs couches de neurones entièrement connectées entre elles (Figure 1-20). En fait, un réseau de neurones est constitué d'unités élémentaires, les nœuds, et de liens directionnels affectés de poids reliant ces nœuds. Les nœuds peuvent être du type entrée, sortie ou caché par des nœuds intermédiaires. Chaque nœud reçoit en entrée une valeur calculée à partir des valeurs restituées par ses nœuds amonts et pondérées par les poids associés aux liens.

Les réseaux de neurones déterminent la nature de la relation entre les données à travers les interconnections entre les neurones. Le réseau est nourri par les valeurs des paramètres en entrée et dans le cas d'un réseau multicouche, tel celui représenté en figure 1-20, les résultats en sortie sont obtenus par propagation des valeurs suivant la direction des liens et en classant les nœuds suivant la topologie du réseau (les nœuds de la première couche sont activés avant les nœuds de la deuxième, etc.). Afin de construire un bon réseau, une phase d'apprentissage supervisé est nécessaire. Le but est d'inculquer un comportement de référence au réseau. Ce comportement de référence est défini à partir d'un ensemble représentatif d'exemples appelé base d'apprentissage. Cet ensemble est composé de couples d'apprentissage formés de vecteurs d'entrée appelé patron d'entrée et d'un vecteur de sortie appelé patron de référence. L'apprentissage consistera alors à déterminer les poids des différentes liaisons du réseau de manière à obtenir, lorsqu'on présente au réseau un patron d'entrée, une valeur en sortie aussi proche que possible du patron de référence correspondant. Une description détaillée du fonctionnement d'un réseau de neurones se trouve dans [34].
1.4.1.3. Le krigeage

Les méthodes de krigeage ont été introduites pour la modélisation d'expériences simulées par Sacks et al. [36] en 1989 avec la résolution numérique d'un système d'équations différentielles issues de la mécanique des fluides. Il s'agissait de modéliser la vitesse de flamme lors de la combustion du méthane. De nombreux travaux de recherche ont été consacrés à l'analyse d'expériences simulées, nous citerons notamment les ouvrages de Santer et al. [37] et plus récemment de Fang K.T et al. [38].

a. Prédiction des expériences déterministes : position du problème

Nous commençons tout d'abord par expliciter les notations employées dans la suite de cette partie. Soient k le nombre de paramètres incertains et n le nombre de points d'expérimentation ou simulations, X_j , j = 1,...,k, les paramètres incertains, x_i les n points pour lesquels des simulations ont été réalisées, généralement, selon un plan d'expériences :

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, \dots, n$$
 Eq. 1-19

Et $Y(x_i)$ les réponses observées aux points x_i données par le simulateur. Chacune des simulations étant très coûteuse en temps de calcul, le nombre total *n* d'observations doit rester limité, typiquement à quelques dizaines.

La quantification d'incertitude sur les réponses en production nécessite au préalable la définition des différents paramètres à prendre en compte pour la modélisation ainsi que leurs intervalles de valeurs, afin de déterminer le domaine expérimental qui est donc :

$$D = \prod_{j=1}^{k} \left[X_{j}^{\min}, X_{j}^{\max} \right]$$
 Eq. 1-20

Où X_{j}^{\min} et X_{j}^{\max} représentent respectivement la valeur minimale et maximale que peut prendre les paramètres X_{j} et X_{j} .

Les phénomènes physiques en jeu sont observés par le biais d'expériences simulées via un modèle numérique du comportement du milieu poreux. Il faut ainsi noter que, contrairement au cas d'expériences réelles, nous sommes en présence d'expérimentations déterministes. Ainsi, si un même essai est répété plusieurs fois, le simulateur donnera exactement la même valeur de réponse : il n'y a aucune erreur liée aux conditions expérimentales. De plus, pour toute valeur fixée des paramètres x d'entrée, la réponse Yest reproductible puisqu'elle est entièrement déterminée par les paramètres de simulation. Par conséquent, les méthodes utilisées pour les plans classiques, tels que les plans en bloc ou la randomisation, basées sur l'interprétation d'expériences répétées, ne sont pas pertinentes.

La méthode proposée par Sacks et al. consiste à considérer que l'erreur est la réalisation d'un processus spatial, ce qui revient à faire appel aux techniques statistiques pour procéder à cette interpolation. Ainsi, nous proposons ici d'utiliser des techniques d'analyse de processus spatiaux observables, donc aléatoires, issues essentiellement de la géostatistique, mais pour traiter des données de simulations non aléatoires. On introduit en fait ces processus pour prendre en compte la méconnaissance des résidus d'une approximation fonctionnelle, par exemple par une fonction polynomiale de degré deux, d'une fonction simulée certaine. Bien qu'aucune des données observées ne soit aléatoire, il est fait usage des techniques statistiques et du vocabulaire de cette discipline.

b. Expression du modèle

L'interpolation à l'aide d'une fonction polynomiale de degré un ou deux n'est pas suffisante dans une majorité de cas. L'idée ici est alors d'ajouter un terme correctif à l'ajustement polynomial de la réponse moyenne, ce terme étant aléatoire. En fait, il s'agit de modéliser la réponse déterministe Y(x) comme la combinaison d'un modèle de régression (linéaire ou quadratique) et d'une réalisation d'un processus stochastique Z ayant une structure de corrélation entre les observations. Ce concept est largement utilisé dans le contexte des expériences simulées [39]. La réponse Y(x) est alors décomposée en 2 parties :

$$Y(x) = {}^{t}X(x)\beta + Z(x) \qquad \qquad Eq. \ 1-21$$

Où $E[Y(x)]={}^{t}X(x)\beta$ est l'ajustement de la moyenne qui est la partie déterministe du modèle, soit ici une fonction polynomiale, $\beta = {}^{t}(\beta_{1},...,\beta_{p})$ est le vecteur des coefficients inconnus de la régression, Z(x) est une réalisation d'un processus stochastique gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance entre Z(t) et Z(u):

$$C(t,u) = Cov(Z(t), Z(u)) = \sigma^2 R(t,u)$$
 Eq. 1-22

où σ^2 est la variance du processus et R(t,u) est la fonction de corrélation entre Z(t) et Z(u).

Cet estimateur est un excellent candidat en ingénierie parce qu'il est sans biais (du fait de l'ajustement polynomial) et que l'ajout d'un terme de correction résiduel assure une interpolation des données (Figure 1-21). L'utilisateur du prédicteur composite de la forme (Eq. 1-21) nécessite l'estimation des deux termes du modèle : tendance moyenne et partie résiduelle.

Pour le traitement du processus résiduel Z, deux approches différentes sont considérées dans la bibliographie. Les statisticiens construisent un prédicteur linéaire sans biais de Z(x), aussi appelé BLUP, alors que les géostatisticiens utilisent le krigeage. Ces deux méthodes diffèrent essentiellement par le vocabulaire et les notations. Nous précisons ici le krigeage.



Figure 1-21 : Ajustement de la réponse par superposition de l'ajustement moyen et du terme correctif

c. Ajustement de la partie résiduelle : estimateur par krigeage

L'approche de krigeage est une méthode d'interpolation linéaire, basée sur une distribution normale multivariée, et qui prend en compte la covariance spatiale des données. Le prédicteur de krigeage de la réponse, qui est en fait pour nous le résidu Z de l'ajustement d'un modèle de régression, en un point x_0 pour lequel aucune simulation n'a été effectuée, est une fonction linéaire des *n* observations $Z(x_i)$ aux points du plan x_i [40-41]:

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_0) Z(x_i)$$
 Eq. 1-23

Sous forme matricielle, nous avons :

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda Z \qquad \qquad Eq. \ 1-24$$

avec ${}^{t}\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et ${}^{t}Z = (Z(x_1), ..., Z(x_n)).$

Le krigeage consiste à attribuer un poids λ_i à chaque mesure, c'est-à-dire à déterminer les poids qui permettent d'estimer la valeur $\hat{Z}(x_0)$ de la fonction en tout x_0 en interpolant les données $\hat{Z}(x_i)$ déjà observées. Ces poids dépendent de l'endroit où l'on se trouve dans l'espace des paramètres. Ils sont déterminés de manière à minimiser la variance d'estimation résultante, en prenant compte l'emplacement des points de mesure. On montre, par minimisation de la variance de l'erreur au point x_0 , que les poids optimaux λ_i dépendent de la covariance entre les observations :

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda Z = c(x_0) C^{-1} Z = Z C^{-1} C(x_0)$$
Eq. 1-25

Où

$$C = [Cov(Z(x_i), Z(x_j)), i, j = 1,...,n]$$

^t $c(x_0) = [Cov(Z(x_0), Z(x_i)), i = 1,...,n]$
Eq. 1-26

Enfin, nous pouvons écrire l'estimateur de krigeage comme une combinaison linéaire de n fonctions de covariance, n étant le nombre de points du plan d'expériences. L'expression du krigeage sous sa forme duale est :

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n b_i Cov(Z(x_0), Z(x_i)), \text{ avec } b = {}^t Z C^{-1} \qquad Eq. \ 1-27$$

Le krigeage revient ainsi à ajuster localement les n données par une combinaison linéaire de n fonctions de covariance. Les b_i sont déterminés de manière à ajuster les données de manière exacte.

d. Estimation de la fonction de covariance entre les observations

En géostatistique, la fonction la plus utilisée pour décrire la régularité d'un processus est le variogramme, et ce surtout parce qu'elle est plus simple à estimer que la covariance qui demande l'estimation préalable de l'espérance mathématique, mais également parce qu'elle s'accommode des situations où Var(Z(x)) n'est pas définie. A titre d'exemple, nous citons ici les variogrammes les plus courant (Tableau 1-1), valides dans IRⁿ. Pour les variogrammes associés à une covariance, nous donnons la forme analytique de la covariance, le variogramme étant déduit de la covariance par la relation :

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$
 Eq. 1-28

Туре	Expression		
Covariance sphérique	$Cov_{3}(h) = \begin{cases} \sigma^{2} \\ \sigma^{2} \left[1 - 1.5 \frac{h}{\theta} + 0.5 \left(\frac{h}{\theta} \right)^{3} \right] \end{cases}$	si $h = 0$ si $h \le \theta$	Eq. 1-29
Covariance exponentielle	$\begin{bmatrix} 0 \\ Cov(h) = \sigma^2 \exp\left\{-\frac{h}{\theta}\right\} \end{bmatrix}$	sinon	Eq. 1-30
Covariance gaussienne	$Cov(h) = \sigma^2 \exp\left\{-\left(\frac{h}{\theta}\right)^2\right\}$		Eq. 1-31
Variogramme puissance	$\gamma(h) = h^a$ avec $0 < a < 2$		Eq. 1-32

Tableau 1-1 : Exemples de fonctions de covariances

Généralement, si le nombre de données est important, les variogrammes, ainsi que leurs paramètres sont directement estimés à partir du variogramme empirique. Toutefois, il est possible de ne pas pouvoir disposer d'un variogramme empirique fiable. Dans ce cas, il faut définir un structure de variogramme (exponentiel, gaussien, etc.) et estimer ensuite les paramètres.

1.4.2. Les plans d'expériences

La théorie des plans d'expériences a largement été étudiée, principalement dans le cas d'expérimentations réelles (i.e. non reproductible). Les spécificités des expériences simulées ont toutefois été étudiées lors des dernières années [36;42-44]. Dans le cas d'expérimentations simulées déterministes (absence de bruit), il n'y a pas de gain d'information lorsque deux simulations sont répétées. Par conséquent, les méthodes classiques consistant à répéter plusieurs fois les mêmes essais pour réduire la variabilité ou la stabiliser ne sont pas pertinentes. De plus, les plans classiques ont des propriétés de symétrie qui sont intéressantes dans le cas d'expériences réelles, mais qui n'apportent rien pour des expériences déterministes [43]. Ainsi, pour les expériences simulées, il est judicieux de s'intéresser à toutes les parties de la région de manière équiprobable. Nous axons notre présentation sur quelques types de plans : les hypercubes latins, les tables de Taguchi et le plan composite centré.

a. Les hypercubes latins

En 1979, McKay, Beckman et Conover [45] ont été les premiers à considérer les plans d'expériences pour des expériences déterministes. Ils utilisent alors des hypercubes latins. Un hypercube latin est une matrice de n lignes et k colonnes où n est le nombre de niveaux examinés et k est le nombre de variables d'entrées. Chacune des k colonnes contient les niveaux 1,2,...,n permutés aléatoirement et les k colonnes sont disposées aléatoirement pour former l'hypercube latin.

Les plans basées sur l'échantillonnage type hypercubes latins sont très connus et utilisés dans le cas deux expériences simulées parce qu'ils ont trois grandes qualités. La première qualité de ces plans est qu'ils permettent généralement de remplir au mieux le domaine expérimental, ils vont donc être utile pour détecter les irrégularités de la surface. De plus, ils sont très faciles et rapides à construire, même pour un nombre élevé de facteurs et enfin, tous les niveaux de chaque facteur sont représentés une unique fois. Par contre, pour un nombre donné N d'expérimentations et p paramètres, il existe $(N!)^p$

possibilités de construction d'un hypercube latin et par conséquent, les résultats de la modélisation sont très variables suivant le plan considéré. Par exemple, la figure 1-22 montre un exemple de deux Hypercubes Latin obtenus pour deux paramètres et neuf expérimentations.



Figure 1-22 : Hypercubes latins pour 2 paramètres – 9 expérimentations

b. Méthode de Taguchi

Le docteur Genichi Taguchi a mis au point une méthode originale permettant, à partir de quelques tables standards, de résoudre facilement la plupart des problèmes industriels en matière de plans d'expériences. Les tables standards de Taguchi considèrent que les interactions d'ordre 2, c'est-à-dire les interactions entre deux facteurs sont négligeables sauf quelques-unes parfaitement identifiées. Les interactions d'ordre 2 non considérées seront donc supposées comme nulles. Les interactions d'ordre supérieur à 2 seront toujours considérées comme négligeables.

Taguchi a publié 18 tables orthogonales qui permettent de résoudre la plupart des problèmes industriels. Cependant, toutes ces tables n'ont pas les mêmes propriétés et il est important de bien connaître les différences entre ces tables qui peuvent être classées en trois types : tables pour lesquelles l'étude des interactions est impossible (L_{12} (2¹¹), L_{36} (2¹¹×3¹²)), tables ou il n'est possible d'étudier qu'une seule interaction entre deux facteurs (L_{18} (2¹×3⁷), L_{32} (2¹×4⁹), L_{35} (2¹×5¹¹)) et les tables ou il est possible d'étudier les interactions.

Type de réponses	Rapport S/N	
Le nominal le meilleur	$10.\log_{10}\left(rac{\mu^2}{\sigma^2} ight)$	Eq. 1-33
Le plus faible le meilleur	$-10.\log_{10}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i}^{2}\right)$	Eq. 1-34
Le plus élevé le meilleur	$-10.\log_{10}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_{i}^{2}}\right)$	Eq. 1-35

Tableau 1-2 : Formulations du rapport S/N

La théorie développée par Taguchi s'inscrit dans les principes de la conception robuste qui tend à améliorer la qualité d'un produit non seulement en recherchant à atteindre des cibles de performance mais aussi en cherchant à minimiser la variation des performances. L'objectif de la conception robuste est de réduire les variations des performances d'un système engendrées par des valeurs incertaines des facteurs de bruit et ainsi de réduire la sensibilité du système. Les solutions envisagées cherchent ainsi à minimiser les variations des réponses tout en atteignant les cibles de performance (moyenne μ_y comme cible et variance σ_y^2 à minimiser). Le critère de qualité utilisé par Taguchi est le rapport du signal sur le bruit, Signal to Noise ratio. Le calcul du rapport S/N dépend du type de réponse que l'on cherche à obtenir (Tableau 1-2).

Les équations du rapport S/N sont fournies de telle sorte que l'on veuille obtenir des valeurs élevées pour un tel rapport. La meilleure combinaison des facteurs de contrôle du plan d'expériences est celle qui possède le rapport S/N le plus élevé si l'on choisit ce critère pour évaluer la qualité de la réponse.

c. Plan central composite

Le plan d'expériences central composite est une technique basée sur la statistique dans laquelle un plan factoriel complet à deux niveaux est complété par un point central et deux points additionnels pour chaque facteur (appelé les "points star"). Ainsi cinq niveaux sont définis pour chaque facteur. Pour étudier n facteurs grâce à un plan central composite il faut évaluer $2^n + 2n + 1$ points. La figure 1-23 illustre un plan central composite pour trois facteurs.



Figure 1-23 : Plan central composite pour 3 facteurs

Le point central et les points étoiles sont ajoutés afin d'obtenir des informations sur l'espace de conception à l'intérieur et à l'extérieur des deux niveaux du plan factoriel complet, ce qui permet d'estimer les effets des facteurs à des ordres plus élevés. Bien que le plan central composite requière un nombre significatif de points d'évaluation, c'est une technique largement utilisée afin de modéliser des surfaces de réponse grâce à un bon recouvrement de l'espace et à un ordre élevé de l'information sur les facteurs.

1.4.3. Limites des approches existantes

Nous avons présenté dans cette partie les trois méthodes d'approximation généralement employées en industrie pour la construction d'un modèle approché. Chacune de ces méthodes permet une bonne quantification des incertitudes, mais sont d'application limitée.

La méthode des réseaux de neurones permet de prendre en compte les non-réglarités, mais elle ne permet pas une compréhension facile du modèle et de la relation entre les données, ce qui peut être utile au chercheur qui souhaite comprendre le phénomène à modéliser. De plus, ces méthodes sont développées dans un but d'estimation et non de prévision de l'incertitude de la réponse en des points non échantillonnés. C'est principalement pour ces raisons que ces modèles sont peu utilisés, mais de plus, Yeten et al. [46], qui ont utilisé des réseaux neurones pour l'ajustement d'une surface de réponse, ont montré que cette méthode ne donne pas des résultats aussi satisfaisantes que les méthodes de krigeage. A l'opposé, la méthode de krigeage connaît actuellement un succès grandissant. Les méthodes de krigeage varient en fonction de la manière dont est estimée la structure de la covariance. Comme dans le cas des régressions, la modélisation par krigeage est basée sur la réalisation de simulations et donc l'échantillonnage est crucial pour optimiser le coût de simulations. Enfin, la méthode la plus utilisée jusqu'à présent pour une quantification des incertitudes est l'utilisation de plans d'expériences associés à une modélisation de type régression [47]. Cette dernière méthode est très répandue puisqu'elle est à la fois peu coûteuse en temps de calcul, facile à mettre en place et surtout, elle permet de disposer d'une expression analytique explicite de la réponse. Elle est très efficace lorsque la réponse peut être ajustée par des modèles polynomiaux de divers degré : un, deux voire trois ou plus, typiquement lorsque les paramètres incertains peuvent varier dans un domaine relativement restreint. La figure 1-24 montre la modélisation approchée d'une fonction non-régulière (a), par la méthode des plans d'expériences classiques, avec respectivement un plan factoriel à quatre expérimentations (b) et un plan composite centré à neuf expérimentations (c).



Figure 1-24 : Ajustement d'une fonction analytique avec les plans classiques

Ainsi, certaines réponses, de comportement non-régulier aux paramètres, possiblement discontinues, restent à appréhender. Compte tenu de la piètre qualité prédictive des modèles obtenus, il n'est pas envisageable d'utiliser ces modèles approchés pour évaluer le risque ou optimiser le processus de décision, une telle imprécision pouvant amener à des prises de décision non fondées ou à une évaluation du risque erronée.

1.5. Optimisation Multi - Objective

La méthode de base pour optimiser un dispositif est la méthode d'essai et erreur : il s'agit de tester un certain nombre de solutions potentielles jusqu'à l'obtention d'une solution adéquate. C'est ce qui se passe en observant le résultat quand un paramètre prend plusieurs valeurs successives.

La figure 1-25 présente le processus d'optimisation en trois étapes : analyse, synthèse et évaluation. Tout d'abord, il convient d'analyser le problème et d'opérer un certain nombre de choix préalables. A cet effet, c'est à l'utilisateur de définir les *n* variables du problème, notées x_1, \ldots, x_n . Celles-ci peuvent être réelles, complexes, entières, booléennes, etc. D'un autre côté, il est généralement nécessaire de définir un espace de recherche fini. x_{imin} et x_{imax} sont définis comme les bornes de chaque variable x_i :

$$x_{i\min} \le x_i \le x_{i\max} \quad \forall i \in [1, n] \qquad Eq. \ 1-36$$



Figure 1-25 : Processus d'optimisation

Enfin, un algorithme d'optimisation nécessite généralement la définition d'une fonction, nommée fonction d'adaptation f, rendant compte de la pertinence des solutions potentielles, à partir des grandeurs à optimiser. L'algorithme convergera vers un optimum de cette fonction, quelle que soit sa définition. La fonction f, fonction des variables $x_1, ..., x_n$, doit donc exprimer le plus fidèlement possible le désir de l'utilisateur sous forme mathématique. Un problème d'optimisation de forme peut généralement être présenté comme suit :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \Phi(\mu) \\ c_i(\mu) \le 0 \quad \forall i = 1, ..., m_i \\ h_i(\mu) = 0 \quad \forall i = 1, ..., m_e \\ \mu \in \Re^n \end{cases} \quad Eq. \ 1-37$$

 $\Phi(\mu)$ représente la fonction coût, qui peut être une combinaison de plusieurs critères ; $c_i(\mu)$ et $h_i(\mu)$ désignent les contraintes d'inégalité et d'égalité auxquelles est soumis le vecteur des paramètres à optimiser μ .

Selon les circonstances (résultats expérimentaux, disponibilité du gradient de $\Phi(\mu)$, etc.) ainsi que les ressources disponibles (nombre possible d'évaluations, capacité des ordinateurs, etc.), le problème d'optimisation (Eq. 1-37) pourra être résolu par différents algorithmes. Citons certains d'entre eux comme l'algorithme de gradient conjugué, les algorithmes de Newton, les algorithmes génétiques, les stratégies d'évolution, les méthodes de surface de réponse, etc. Nous pouvons classifier ces algorithmes d'optimisation en 3 catégories : algorithmes à direction de descente (algorithmes à base de gradient), algorithmes d'ordre 0 et algorithmes évolutionnaires, et algorithmes hybrides. Nous allons maintenant présenter ces trois classes d'algorithmes d'optimisation.

1.5.1. Méthodes à direction de descente

Les méthodes à direction de descente sont des algorithmes qui ont obligatoirement besoin de l'information du gradient des fonctions coût pour chercher l'optimum du problème. Pour utiliser cette catégorie d'algorithmes, supposons que la fonction Φ est continue et différentiable dans tout l'espace de recherche. Nous notons $\nabla \Phi(\mu)$ le vecteur gradient de la fonction coût $\Phi(\mu)$ en μ . La condition nécessaire d'optimalité du problème d'optimisation (Eq. 1-37) s'écrit :

$$\nabla \Phi(\mu) = 0 \qquad \qquad Eq. \ 1-38$$

Les méthodes à direction de descente ont pour objectif de calculer un vecteur μ satisfaisant la condition nécessaire d'optimalité (Eq. 1-38).

Pour une fonction coût donnée $\Phi(\mu)$, on dit que *d* est une direction de descente de $\Phi(\mu)$ en $\mu \in \Re^n$ si la relation suivante est vérifiée :

$$d.\nabla\Phi(\mu) < 0 \qquad \qquad Eq. \ 1-39$$

Plusieurs méthodes permettant le choix de la direction de descente, on cite la méthode de la plus forte pente, méthode du gradient conjugué [48-49], méthode de Newton et méthode de quasi-Newton [50-51].

L'algorithme général construit une suite d'itérés μ^k approchant une solution μ^* du problème (Eq. 1-37) par la récurrence :

$$\begin{cases} \mu^{0} \in \mathfrak{R}^{n} \\ \mu^{k+1} = \mu^{k} + \lambda^{k} d^{k}, \forall k \ge 0 \end{cases}$$
 Eq. 1-40

où $\lambda^k > 0$ est appelé le pas de descente, d^k une direction de descente de Φ en μ^k .

Le pas de descente doit être déterminé de telle sorte que la valeur de la fonction décroisse le plus possible. En général, un algorithme de recherche linéaire est utilisé pour trouver un pas "optimal" à chaque itération. Nous pouvons citer ici quelques méthodes de recherche linéaire : celle de Newton (ou de la sécante), la méthode d'interpolation quadratique [52], la méthode de la section d'or [53-54], la méthode de Brent avec gradient [55], la méthode d'interpolation parabolique [56], la méthode de Davidon [57], la méthode de type Moré et Thuente [58], etc.

1.5.2. Méthodes d'ordre 0 et algorithmes de minimisation globale

Les méthodes d'ordre 0 ne nécessitent pas le calcul du gradient de la fonction coût. Les algorithmes les plus connus de cette catégorie sont ceux qui s'inspirent de la nature, tels que les algorithmes évolutionnaires, l'algorithme du recuit simulé, l'algorithme de la colonie des fourmis, la méthode de recherche aléatoire, la méthode du simplex, les méthodes de surface de réponse. La plupart de ces algorithmes sont des méthodes d'optimisation globales, sauf celui du simplex. Avec ce type d'algorithmes, on cherche à générer un ou plusieurs nouveaux points, plus proches de l'optimum, uniquement à partir de la connaissance de la valeur de la fonction coût Φ d'un ou plusieurs points de l'espace des paramètres.

1.5.2.1. Algorithmes évolutionnaires

Les Algorithmes Evolutionnaires (AE) constituent une discipline impliquant la simulation par un ordinateur du processus de l'évolution naturelle. Ils sont inspirés de la génétique et des mécanismes de la sélection naturelle basés sur la théorie de l'évolution de Darwin, selon laquelle la vie est une compétition où seuls les mieux adaptés survivent et se reproduisent. Ils empruntent les paradigmes de l'évolution biologique tels que la sélection, le croisement et la mutation pour chercher la solution du problème. Les AE utilisent la notion de "population d'individus", dans laquelle chaque individu représente

une solution potentielle de l'espace de recherche du problème donné. Ce sont des méthodes d'optimisation globales. Leur robustesse et leur souplesse permettent d'aborder les problèmes les plus raides. De plus, leur capacité à travailler sur des espaces de recherche non standards (non continus) ainsi que leur faible besoin d'information sur le problème (seulement la fonction coût) offrent les perspectives les plus originales et un large champ d'application. Leur principal inconvénient est leur coût. Ils nécessitent en effet un grand nombre d'évaluations pour aboutir à l'optimum.

Historiquement, les AE ont été élaborés depuis les années soixante. En général, ils sont divisés en quatre catégories principales, comme présentés dans la figure 1-26.



Figure 1-26 : Principales catégories des Algorithmes Evolutionnaires

Les Algorithmes Génétiques ont été mis au point par Holland dans les années 60 [59-60] aux Etats-Unis. Ils sont ensuite raffinés et popularisés par De Jong [61], Grefenstette [62], Goldberg [63]. Alors que les premiers efforts pour la mise en place des Stratégies d'Evolution (SE) ont eu lieu à la même période en Allemagne par Rechenberg [64-65] et Schwefel [66]. Ces algorithmes s'appuient sur une représentation en nombres réels et de dimension fixe des individus, ainsi que sur un opérateur de mutation gaussienne.

Proposée par Cramer [67], la Programmation Génétique (PG) a surtout été popularisée par Koza au début des années 90 [68-71]. Elle s'intéresse à l'évolution de programmes. Elle propose un paradigme permettant la programmation automatique d'ordinateurs par des heuristiques basées sur les mêmes principes d'évolution que les AG. La différence entre la PG et les AG réside essentiellement dans la représentation des individus. En effet, la PG consiste à faire évoluer des individus dont la structure est similaire à celle des programmes informatiques. La PG est particulièrement adaptée à l'évolution de structures complexes de dimensions variables.

La Programmation Evolutionnaire (PE) est introduite dans les années 60 par L. Fogel [72-73], puis étendue par Burgin [74], Atmar [75], D.B. Forgel [76] et d'autres. Elle a été conçue dans le but de faire évoluer des machines à états finis, puis a été étendue aux problèmes d'optimisation de paramètres. Cette approche met l'emphase sur la relation entre les parents et leurs descendants plutôt que sur les opérateurs génétiques. Contrairement aux trois autres AE classiques, la PE n'utilise pas une représentation spécifique des individus mais plutôt un modèle évolutionnaire de haut niveau, qui est associé à une représentation et à un opérateur de mutation directement appropriés au problème à résoudre.

Les champs d'application des AE sont très vastes : en économie [77], en finance, en optimisation de fonctions numériques difficiles (discontinue, multimodales, bruitées) [78], en traitement d'image (alignement de photos satellites, reconnaissance de suspects), en théorie du contrôle optimal, ou encore en théorie des jeux répétés et différentiels, en mécanique des structures [70-81], en optimisation de forme [82-85], etc. Pour plus d'information sur les applications des AE, le lecteur peut se référer à [86].

Comme les algorithmes évolutionnaires sont développés à partir de raisonnements issus de la biologie, les termes utilisés en gardant les dénominations. L'équivalence entre les termes biologiques et les termes d'optimisation est présentée dans le tableau 1-3. En plus de ce vocabulaire, il nous faut encore distinguer entre le "Génotype" et le "Phénotype". On parle de génotype pour tout ce qui concerne les chromosomes, tandis que les solutions (les vecteurs de l'espace de recherche) constituent le phénotype. Les AE travaillent donc au niveau du génotype.

Algorithmes Evolutionnaires	Méthodes d'optimisation
Individu	Solution potentielle de l'espace de recherche (vecteur des paramètres)
Chromosome	Solution codée (à partir d'une variable binaire, réelle, discrète, etc.)
Gène ou Allèle	Partie composante d'un individu (d'un chromosome)
Population	Ensemble fini (de taille N) d'individus
Performance (ou fonction coût)	Mesure de la qualité des individus basée sur la valeur de la fonction coût et permettant de comparer les individus entre eux afin de déterminer les plus et moins aptes
Evaluation d'un individu	Calcul de la performance d'un individu
Croisement (ou recombinaison)	Opérateur de reproduction appliqué aux individus de la population et qui consiste à échanger ou combiner des composantes entre plusieurs individus
Mutation	Opérateur de modification d'un ou plusieurs gènes d'un individu dans le but d'introduire une nouvelle variabilité dans la population
Sélection	Processus du choix des individus utilisés pour la reproduction basé sur leur performance
Environnement	Espace de recherche
Remplacement	Processus de formation d'une nouvelle population à partir de l'ensemble des parents et des enfants, effectué le plus souvent sur la base de leur performance
Evolution	Un processus itératif de recherche d'un (ou plusieurs) individu optimal
Génération	Repère le moment de l'évolution

Tableau 1-3 : Equivalence entre « Termes biologiques » et « Termes d'optimisation »

1.5.2.2. Autres méthodes d'optimisation d'ordre 0

Outre que les algorithmes évolutionnaires, d'autres méthodes d'optimisation d'ordre 0 permettent l'optimisation d'une ou plusieurs fonctions objectif. On décrit brièvement dans ce paragraphe ces méthodes ainsi que leurs inconvénients.

a. Méthodes de recherche aléatoire/probabiliste

La méthode de recherche aléatoire consiste à tirer aléatoirement, à chaque itération un point dans l'espace de recherche. La valeur de fonction objectif Φ est ensuite évaluée en ce point et comparée à celle du point de départ. Si elle est meilleure, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante, et le processus continue. Sinon on repart du point de départ et on recommence le procédé, jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient atteintes. Le grand avantage de cette méthode est sa simplicité. Le temps de calcul en constitue une grande faiblesse.

b. Méthodes du simplex

Cette méthode d'ordre 0 déterministe a été introduite par Nelder et Mead [87]. Supposons que la fonction coût Φ ait n paramètres. On définit un simplex comme étant une figure géométrique (polygone, triangles, etc.) de volume non nul contenant (n+1) sommets. Donc, à chaque itération de l'algorithme du simplex, (n+1) points sont utilisés pour déterminer un pas d'essai. Les points p_i sont ordonnés de manière à avoir $\Phi(p_1) \leq \Phi(p_2) \leq ... \leq \Phi(p_{n+1})$. Des nouveaux points sont obtenus en utilisant de très simples opérations algébriques, qui se traduisent par des transformations géométriques élémentaires (réflexion, contraction, expansion, et multicontraction appelée aussi rétrécissement), et ces points sont acceptés ou rejetés en fonction de leur valeur de la fonction objectif. Le simplex se transforme, il s'étend, se contracte, à chaque mouvement. Ainsi il s'adapte à l'allure de la fonction, jusqu'à ce qu'il s'approche de l'optimum. A chaque transformation, le plus mauvais point courant x_i est remplacé par le nouveau point déterminé. La méthode du simplex n'utilise que des valeurs ponctuelles de la fonction coût et ne nécessite pas l'estimation du gradient. Cette méthode peut donc être utilisée pour la recherche du minimum d'une fonction coût non-différentiable. Elle semble efficace tant que le nombre de paramètres est petit [88]. Lorsque le nombre de paramètres est supérieur à trois, elle semble mal adaptée du point de vue du coût, et devient moins intéressante que les méthodes à direction de descente [88-90].

c. Méthode du recuit simulé

Cette méthode d'optimisation a été mise au point en 1983 par trois chercheurs de la société IBM, S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi [91]. Le recuit simulé est une méthode d'optimisation stochastique origine tirant son d'un processus thermodynamique. Cette méthode est issue d'une analogie avec le phénomène physique de refroidissement lent d'un corps en fusion, qui le conduit à un état solide de basse énergie. Il faut abaisser lentement la température, en marquant des paliers suffisamment longs, pour que le corps atteigne l'équilibre thermodynamique à chaque palier de température. Pour les matériaux, cette basse énergie se manifeste par l'obtention d'une structure régulière, comme les cristaux dans l'acier. L'analogie exploitée par le recuit simulé consiste à considérer la fonction Φ à minimiser comme fonction d'énergie, et une solution p peut être considérée comme un état donné de la matière dont $\Phi(p)$ est l'énergie. Le recuit simulé exploite généralement le critère défini par l'algorithme de Metropolis et al. [92] pour l'acceptation d'une solution obtenue par perturbation de la solution courante.

Des études théoriques du recuit simulé ont pu montrer que sous certaines conditions, l'algorithme du recuit convergeait vers un optimum global. Ce résultat est important car il nous assure que le recuit simulé peut trouver la meilleure solution, si on le laisse chercher indéfiniment. Les principaux inconvénients du recuit simulé résident dans le choix des nombreux paramètres, tels que la température initiale, la loi de décroissance de la température, les critères d'arrêt ou la longueur des paliers de température. Ces paramètres sont souvent choisis de manière empirique.

d. Algorithmes de colonie des fourmis

Marco Dorigo [93] de l'Université Libre de Bruxelles a inventé l'algorithme à colonies de fourmis lorsqu'il a observé des fourmis dans leur chemin de recherche de la nourriture. Celles-ci ont la capacité de trouver le chemin le plus court entre leur nid et une source de nourriture, en contournant les obstacles qui jonchent leur chemin (Figure 1-27). L'idée générale de l'algorithme de colonie de fourmis est d'imiter le comportement coopératif d'une colonie de fourmis naturelles à l'aide des fourmis artificielles se déplaçant à travers le graphe qui représente le problème à résoudre. Le principe est le suivant : les fourmis cherchent de la nourriture et se déplacent de façon quasi aléatoire. Tout au long de leur déplacement, elles laissent derrière elles une substance chimique appelée phéromone. Cette substance a la propriété de s'évaporer au cours du temps et a pour but de guider les fourmis vers leur objectif. Une fois cet objectif atteint (dans notre cas, la

nourriture trouvée), les fourmis rentrent au nid en empruntant le même chemin qu'à l'aller, grâce à leur trace de phéromone. Celle-ci s'en trouve renforcée. Plus une trace de phéromone est concentrée, plus elle va attirer les fourmis. Au fil du temps, on va donc constater l'émergence du plus court chemin vers la nourriture grâce au renforcement de la trace de phéromone.



Figure 1-27 : Comportement des fourmis lors de franchir l'obstacle

L'algorithme de colonies de fourmis a été à l'origine principalement utilisé pour produire des solutions quasi-optimales au problème du voyageur de commerce, puis, plus généralement, aux problèmes d'optimisation combinatoire. On observe depuis ses débuts que son emploi se généralise à plusieurs domaines, depuis l'optimisation continue jusqu'à la classification ou encore le traitement d'image. On peut trouver une liste des applications de plusieurs variantes de cet algorithme dans la thèse de Roux [94].

1.5.3. Méthodes hybrides

L'hybridation des algorithmes est pour objectif de mélanger de manière harmonieuse deux ou plusieurs méthodes distinctes afin de ne retenir que les caractéristiques les plus intéressantes de chacune de ces méthodes. L'approche d'hybridation la plus connue est celle entre un algorithme évolutionnaire et un algorithme à direction de descente [95]. Le principe de cette approche d'hybridation est assez simple. Il consiste à lancer une recherche au niveau global avec un AE, puis passer à la recherche locale avec un algorithme à direction de descente pour affiner le résultat. Cela nécessite donc d'effectuer une répartition des tâches. L'AE se charge de détecter les régions de l'espace de recherche qui sont susceptibles de se révéler les plus intéressantes. Puis, l'algorithme à direction de descente prend comme point de départ les meilleures solutions trouvées par l'AE, et s'attache à les affiner aussi rapidement possible. Pourtant, il est délicat de décider le moment de transition ou à partir duquel l'algorithme à direction de descente doit prendre le relais et faire son travail. En effet, si cela se fait trop tôt, il y a de fortes chances pour que l'algorithme touche sa fin par la convergence vers un optimum local. Au contraire, si la transition se produit trop tard, on perd en temps de calcul car les avantages de l'algorithme à direction de descente ne sont pas pleinement exploités.

L'hybridation peut aussi être réalisée entre un AE et une méthode d'approximation. Avec cette version, la méthode d'approximation est utilisée pour accélérer la convergence de l'AE. L'idée est donc de remplacer la fonction objectif par une fonction approchée. Cette approximation peut utiliser l'information du gradient (comme les deux nouveaux algorithmes hybrides que nous avons développés) ou non (comme la SE avec Métamodèle de Emmerich et al. [96] ou les algorithmes proposé par Jin et al. [97-98], etc.). Avec cette approche, au sein d'une génération de l'AE, on peut avoir une partie des individus évalués avec la fonction objectif et l'autre partie avec la fonction approchée, ou bien toute la population évaluée par la fonction approchée.

1.6. Conclusions

Pour faire face à la forte compétition, l'industrie des matériaux tente par divers moyens d'augmenter le ratio performance/coût de ses produits. Les matériaux cellulaires permettent d'économiser de la matière, d'utiliser des matières premières moins coûteuses, tout en conservant de bonnes propriétés mécaniques. La conception de matériau à structure cellulaire est une avenue de recherche particulièrement ont une faible valeur commerciale intéressante puisque ces composés pris individuellement et une seconde utilisation contribuerait à résoudre certains problèmes au niveau environnemental. Par ailleurs, les mousses permettent d'effectuer des économies substantielles de matériel. Côté performances, les caractéristiques choc et acoustique des mousses sont nettement améliorées et ceci grâce à leurs structures cellulaires. Ainsi, la première partie de ce chapitre concernait la définition de ces matériaux: structure, propriétés, types et techniques de mise en forme. Les mousses polymères apparaissent comme les plus dominants vu l'existence d'un grand nombre de familles de polymères et donc des grandes plages de ses caractéristiques mécaniques mais aussi du fait de pouvoir en ajouter des produits, appelés additifs et adjuvants, dans le but d'améliorer une ou plus de ses performances. Et grâce à cet avantage, il est toujours possible d'avoir une mousse plastique avec des bonnes performances au point ou elle peut remplacer d'autres matériaux.

Concernant les techniques de mise forme, ces dernières années étaient l'occasion d'en découvrir plusieurs avec plus ou moins une différence au niveau du coût de la fabrication des tels matériaux. Enfin, le moulage par injection est une technique éprouvée qui procure latitude, rapidité et reproductibilité. Effectivement, ses paramètres de mise en forme permettent le contrôle total de la rhéologie de la matière fondue. Et d'un autre côté, le produit final est fini au contraire de l'extrusion par exemple. Dans un second volet, et en étroite relation avec la première partie, l'optimisation produit – matériau – procédé constitue une expertise intéressante afin de quantifier l'influence du procédé luimême sur la qualité du produit final. A cet effet, les algorithmes d'optimisation sont les outils adéquats, particulièrement les algorithmes génétiques qui sont en plein essor. Ces derniers seront le moyen utile pour la recherche du compromis choc – acoustique des mousses polymères fabriquées par injection. Et pour ceci, il est nécessaire de mettre en place des méta-modèles exprimant les caractéristiques choc et acoustique en fonction des paramètres du procédé. Ce travail est réalisé en utilisant les techniques de modélisation, qui se résument en deux groupes : la méthode des surfaces de réponse et le krigeage. Le premier concerne particulièrement les plans à essais expérimentaux et le second est dédié aux essais déterministes (les simulations numériques).

En conclusion, dans ce chapitre, nous avons mis en évidence quatre volets : les matériaux cellulaires (structure, propriétés et moyens de mise en forme), les techniques de caractérisation des caractères d'absorption du choc et acoustique, les techniques de modélisation et les méthodes algorithmiques d'optimisation procédé-produit.

Références

[1]: L. J. Gibson, M. F. Ashby, Cellular Solids, Pergamon, Oxford, 1988.

[2] : P. Papon, J. Leblond, Thermodynamique des états de la matière, Hermann, Paris, 1990.

[3]: J. A. .F. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Ghent, 1873.

[4]: W. Lord Kelvin Thomson, On the division of space with minimum partial area. Phil. Mag., 24. pp. 503, 1887.

[5]: IRC: www.irc.nrc-cnrc.gc.ca (2004), dernière visite : 1 octobre 2007.

[6] : A. K. Bledzki. et O. Faruk, *Microcellular wood fiber reinforced polypropylene composites : A comparative study between injection molding and extrusion process*, ANTEC Annual Technical Conference, 503,2004.

[7]: SFC: www.sfc.fr (2007), dernière visite : 1 octobre 2007.

[8]: BCC: www.bccresearch.com (2001), dernière visite : 28 septembre 2007.

[9]: O. Pfannschmidt et W. Michaeli., *Foam injection molding of thermoplastics loaded with carbon dioxide prior to processing*, ANTEC Annual Technical Conference, 27, 1999.

[10] : J. L. Throne, *Thermoplastic Foams*, Sherwood Publishers, Hinckely, OH, 125-362, 1996.

[11] : K. Ishizaki, S. Komarneni, M. Nauko, *Porous Materials Process Technology and applications*. Kluwer, London, U.K., 1998.

[12] : Y. Shiraki, History of Technology of Ceramics (in Japanese), Gihodo Tokyo, p. 206, 1983.

[13] : Techniques de l'ingénieur (AM 3510) : Essais mécaniques des plastiques -Caractéristiques instantanées.

[14] : U. Ingard, R. H. Bolt, Free filed method of measuring the absorption coefficient of acoustic materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 23, N° 5, p 509-516.

[15]: NF S31-065: Détermination du facteur d'absorption acoustique et de l'impédance acoustique par la méthode du tube à ondes stationnaires. Mars 1981. 13p.

[16] : ASTM C 384-385 : Standard Test Method for Impedance and Absorption of Acoustical Material by the Impedance Tube Method. 05/1985.

[17]: DIN 52215: Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz im Rohr, 1963.

[18] : J. Y. Chung, D. A. Blaser, *Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory. J.* Acoust Soc. Am., Vol. 68, N° 3, p 907-913, 1980.

[19] : F. J. Fahy, *Rapid mehod for the measurement of sample acoustic impedance in a standing wave tube.* J. Sound Vib., Vol. 97, N°1, p 168-170, 1984.

[20] : ASTM E 1050-85a : Test Method for Impedance and Absorption of Acoustical Materials Using a Tube, Two Microphones, and a Digital Frequency Analysis System. 08/1985.

[21] : A. A. Syed, Acoustic impedance measurement system, In Proc. Noise Con 85. Colombus (USA), p 93-98, 1985.

[22] : P. Guignouard, La mesure in situ des coefficients d'absorption des matériaux. Acoustique et Techniques, N° 7, p 27-29, 1996.

[23] : T. Dupont, *Transparence et absorption acoustiques des structures microperforées*. Thèse en acoustique – INSA, Lyon, 2002.

[24] : D. Habault, D. Corsain, *Identification of the acoustical properties of a ground surface*, J. Sound Vib., Vol. 100, N° 2, p 169-180, 1985.

[25] : M. Tamura, Spatial Fourier Transform method of measuring reflection coefficients at oblique incidence. I : theory and numerical examples. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 88, N° 5, p 2259-2264, 1990.

[26] : M. Tamura, J. F. Allard, D. Lafarge, Spatial Fourier transform method for measuring reflexion coefficients at oblique incidence. II Experimental results. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 97, N° 4, p 2255-2262, 1995.

[27] : NF S31-003 : Mesurage de l'absorption acoustique en sale réverbérante. 1968.

[28]: DIN EN 20354: Bestimmung der Schallabsorption im Hallraum. 1993.

[29] : L. Cremer, H. A. Muller, *Principles and applications of room acoustics I*. Londres : Applied Science Publishers, 192. 651p. VonSpandock-1934.

[30] E. Damslet, A. Hage, and R. Volden, *Maximum Information at Minimum Cost ! A North Field Development Study With an Experimental Design*, JPT, p.1350, December 1992.

[31] R. Christensen, *Plane Answers to Complex Questions, the Theory of Linear Models*, Editions Springer, 1996.

[32] R. D. Cook et S. Weisberg, Residuals and Influence in Regression, Chapman and Hall, London 1982.

[33] D. C. Montgomery, E. A. Peck, Introduction to linear regression analysis, second edition, J. Wiley, 1991

[34] C. R. Rao, S. K. Mitra, Generalized Inverse of Matrices and its Applications, Wiley, NY, 1971.

[35] : S. Thiria, Y. Lechevallier, O. Gascuel et S. Canu, *Statistique et Méthodes Neuronales*. Sciences SUP. Dunod, 1997.

[36]: J. Sacks, S. Schiller and W. Welch, Design for computer Experiments, Technometrics, 31, 41-47, 1989.

[37] : T. J. Santer, B. J. Williams and W. I. Notz, *The Design and Analysis of Computer Experiments*, Springer Series in Statistics, 2003.

[38] K. T. Fang, R. Li, A. Sudjiants, *Design and Modeling for Computer Experiments*, Chapman & Hall/CRC; London, 2005.

[39] : J. Sacks, W. Welch, T. Mitchell, and P. Wynn, *Design and Analysis of Computer Experiments (with discussion)* Statistical Science 4, 409-435, 1989.

[40] : A. G. Journel et Ch. J. Huijbregts, *Mining Geostatistics*, Academic Press, 1978.

[41] : G. Matheron, *Principles of geostatistics*, Economic Geology 58, 1246-1266, 1963.

[42] : M. D. Morris and T. J. Mitchell, *Exploratory designs for computational experiments*, Journal of Statistical Planning and Inference 43, 381-402. 1995.

[43] : J. Sacks and S. Schiller, Spatial designs, *Statistical Decision Theory and Related Topics* IV 2, 385-399 Springer, New-York, 1988.

[44] : T. W. Simpson, D. K. J. Lin and W. Chen, *Sampling Strategies for Computer Experiments: Design and Analysis*, International Journal of Reliability and Applications, 2001.

[45] : M. D. McKay, R. J. Beckman and W. J. Connover, A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from computer code, Technometrics 21, 239-245, 1979.

[46] : B. Yeten, A. Castellini, B. Guyaguler, W. H. Chen, A Comparison Study on Experimental Design an Response Surface Methodologies, SPE 93347, SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, USA, 31 jan.-2 feb., 2005.

[47] : E. Manceau, I. Zabalza-Mezghani, and M. Feraille, *Cougar_Opt software user Manuel*, IFP, Version 2.0, 2002.

[48] : R. Fletcher, C. M. Reeves, *Function Minimization By Conjugate Gradient*. Computer Journal, 7, pp. 149-154, 1964.

[49] : E. Polak, G. Ribière, *Note sur la converge de méthode de directions conjuguées*, Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, 3, 35-43, 1969.

[50] : R. Fletcher, M. J. D. Powell, *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*, Computer Journal, 6, pp. 163-168, 1963.

[51] : C. G. Broyden, *The convergence of a class of double-rank minimization algorithms*. J. Inst. of Math. and Its Appl., 6, pp. 222-231, 1970.

[52] : R. Fletcher, Practical optimisation methods, Second edition, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.

[53] : A. J. Morris, *Foundations of Structural Optimization: A unified approach*. Wiley Series in Numerical Methods for Engineering. Wiley&Sons, Chichester, 1982.

[54] : S. H. Chung, S. M. Hwang, *Optimal process design in non-isothermal non-steady metal forming by the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, pp. 1343-1390, 1998.

[55] : M. F. Chen, A. M. Maniatty, *An Inverse Technique for the Optimization of Some Forging Processes*. Dans Shen et al. (éditeurs), Simulation of Material Processing: Theory, Methods and Applications, pp. 545-550, Balkema, Rotterdam, 1995.

[56] : W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes in Fortran*. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2ième édition, 1992.

[57] : K. Schittkowski, *Nonlinear Programming Codes. Informations, Test, Performance.* Lecture Notes in Economic and Mathematical System. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1980.

[58] : J. J. Moré, D. J. Thuente, *Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease*, ACM Transactions on mathematical software, 20, no 3, 286-307, 1994.

[59] : H. J. Holland, *Outline for a logical theory of adaptative systems*. Journal of the association of computing machinery, 3, 1962.

[60] : H. J. Holland, *Adaptation in natural and artificial system*, Ann Harbor, The University of Michigan Press, 1975.

[61] : K. De Jong, *The analysis of the behaviour of class of genetic adaptative systems*. Thèse de doctorat. Department of computer Science, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 1975.

[62] : J. J. Grefenstette (Ed.), *Genetic Algorithms and Their Applications*, Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987.

[63] : D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing company 1989.

[64] : I. Rechenberg, *Cybernetic solution path of an experimental problem*. Technical Report Library Translation number 1122, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, Hants., UK, 1965.

[65] : I. Rechenberg, *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*, Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1973.

[66] : H.-P. Schwefel, *Numerical Optimization of Computer Models*. JohnWiley & Sons, New-York, 1981. 1995 – 2nd edition.

[67] : N. Cramer, *A representation for the adaptive generation of simple sequential programs*. In Grefenstette, J., editor, Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and the Applications, pages 183-187, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, USA, 1985.

[68] : J. R. Koza, *Genetic Programming : On the Programming of Computers by means of Natural Evolution*. MIT Press, Massachusetts, 1992.

[69] : J. R. Koza, Genetic Programming II : Automatic Discovery of Reusable Programs. MIT Press, Massachussetts, 1994.

[70] : J. R. Koza et al., Genetic Programming III : Automatic Synthesis of Analog Circuits. MIT Press, Massachussetts, 1999.

[71] : W. Banzhaf, P. Nordin, R. E. Keller, F. D. Francone, *Genetic Programming: An Introduction*. Morgan Kaufmann, Inc., San Francisco, USA, 1998.

[72] : L. J. Fogel, On the organization of intellect, Ph.D. Dissertation, UCLA, 1964.

[73] : L. J. Fogel, A. J. Owens and M. J. Walsh, *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*, John Wiley, NY, 1966.

[74] : G. H. Burgin, *System identification by quasilinearization and evolutionary programming*, Journal of cybernetics, vol. 3, no. 2, pp. 56-75, 1973.

[75] : J. W. Atmar, *Speculation on the evolution of intelligence and its possible realization in machine form.* Sc.D. Dissertation, New Mexico State University, Las Cruces, NM, 1976.

[76] : D. B. Fogel, *Evolving Artificial Intelligence*, Doctoral Dissertation, University of California, San Diego, CA, 1992.

[77] : T. Vallée, M. Yildizoglu, *Présentation des algorithmes génétique et de leurs applications en économie*. Working paper of E3i 2001.

[78] : K. De Jong, *Adaptive System Design: A Genetic Approach*. IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics , Vol. SMC-10 , no. 9, Sep 1980, pp. 566-574.

[79] : T. Burczynski, P. Orantek, *Hybrid evolutionary algorithms aided by sensitivity information in identification and structrural optimization*. ECCM-2001 June 26-29, Krakow, Poland

[80] : S-Y. Chen, An approach for impact structure optimization using the robust genetic algorithm. Elsevier - Finite Elements in Analysis and Design 37, pp.431-446. 2001.

[81] : M. Papadrakakis, N. D. Lagaros et Y. Fragakis, *Parallel computational strategies for structural optimization*. ECCM-2001 June 26-29, Crascow, Poland

[82] : C. A. C. Antonio et N. M. Dourado, *Metal-forming process optimisation by inverse evolutionary search*. Journal of Materials processing Technology 121 P.403-413. 2002.

[83] : W. Annicchiarico, M. Cerrolaza, *Finite Elements, genetic algorithms and Bsplines : a combined technique for sape optimidation.* Elsevier - Finite Elements in Analysis and Design 33, P.125–141.1999.

[84] : J. S. Chung, H. M. Hwang, Application of a genetic algorithm to the optimal design of the die shape in *extrusion*. Journal of Materials processing Technology 72, pp. 69-77,1997.

[85] : K. Mori, M. Yamamoto, K. Osakada, *Determinaton of hammering sequence in incremental sheet metal forming using a genetic algorithm*. Journal of Materials processing Technology 60 (1996) P.463-468.

[86] : V. Oduguwa, A. Tiwari, R. Roy, *Evolutionary computing in manufacturing industry: an overview of recent applications*. Applied Soft Computing 5. p281-299. 2005.

[87] : J. A. Nelder, R. Mead, A Simplex Method for Function Minimization. Computer Journal, 7, pp. 308-313, 1965.

[88]: J. Kusiak, E. G. Thompson, *Optimization techniques for Extrusion Die Shape Design*. Dans: E. G. Thompson et al. (éditeurs), *Numiform*'89, pp. 569-574. Balkema: Rotterdam, 1989.

[89]: D. Vieilledent, Optimisation des outils en forgeage à chaud par simulation éléments finis et méthode inverse. Applications à des problèmes industriels. Thèse de Doctorat, CEMEF, 1999.

[90] : O. H. Nouatin, Méthode et analyse de simulation numérique d'écoulements 3D des polymères fondus-Identification de paramètres rhéologiques viscoélastiques par analyse inverse. Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef. 2000.

[91] : S. Kirkpatrick, C. D. JR. Gelatt, M. P. Vecchi, *Optimization by simulated annealing*. Science 220, N°4598, pp. 671-680, 1983.

[92] : N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller and E. Teller, *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, J. Chem. Phys. 21, 1087-1092, 1953.

[93] : M. Dorigo, V. Maniezzo et A. Colorni, *The ant system : Optimization by a colony of cooperating agents*. Dans IEEE Transactions on Systems, Mans, and Cybernetics, vol. 1, p. 29–41, 1996.

[94] : O. Roux, La mémoire dans les algorithmes à colonie de fourmis : applications à l'optimisation et à la programmation automatique. Thèse de doctorat. Université du Littoral Côte d'Opale. 2001.

[95] : L. Oulladji, A. Janka, J. A. Désidéri, A. Dervieux, *Optimisation aérodynamique par algorithmes génétiques hybrides : application à la réduction d'un critère de bang sonique*. Rapport de recherche de l'INRIA – Juillet 2003.

[96] : M. Emmerich, A. Giotis, M. Özdemir, Th. Bäck and K. Giannakoglou, *Metamodel-assisted evolution strategies*. In J. J. Merelo Guervos et al. (edts.): Parallel Problem Solving from Nature VII, Proc. Inte'I Conf, Granada, September 2002.

[97] : Y. Jin, M. Olhofer, and B. Sendhoff, *On evolutionary optimisation with approximate fitness functions*, in Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference GECCO, Las Vegas, Nevada, 2000, pp. 786–793.

[98] : Y. Jin, M. Olhofer, and B. Sendhoff, *Managing approximate models in evolutionary aerodynamic design optimization*, in Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation, Vol. 1, Seoul, Korea, 2001, pp. 592–599.

2. Relations Procédé – Performances

2.1. Introduction

L'objectif du présent chapitre est d'évaluer l'influence des paramètres de mise en forme sur l'absorption de choc et l'absorption acoustique des mousses polymères produites sur une presse à injection. Le polymère utilisé dans cette étude est le polyéthylène basse densité tandis que l'agent gonflant chimique, incorporé sous forme d'un mélange maître, est à base de bicarbonate de soude. Aucun agent de modification d'interface n'a été ajouté afin de limiter la complexité de cette étude. Le produit est une mousse structurale à peau non alvéolaire. Les propriétés étudiées sont la densité de la moulée, la densité de la mousse (sans la peau), l'absorption du choc et l'absorption acoustique. Ces propriétés seront finalement corrélées aux paramètres de production comme la température d'injection, la température du moule, la contre pression de plastification, la vitesse d'injection ainsi que la vitesse de la vis en phase de plastification.

En premier temps, un bilan des travaux réalisés sur cet axe de recherche est présenté dans ce chapitre avant de définir les matières premières : le polymère et le mélange maître. Une analyse thermogravimétrique a été effectuée sur chacun de ces produits afin de situer l'intervalle dans lequel la température d'injection peut fluctuer. En deuxième partie, nous présentons la presse à injection. Le cycle de fonctionnement d'une presse est décrit, et plus particulièrement le rôle des unités de fermeture et de plastification. Le principe d'injection et la typologie des paramètres de mise en forme sont étudiés en décrivant rigoureusement les phases de remplissage, compactage et de maintien. Et en dernier point, les différentes étapes du réglage d'une presse sont détaillées : principe du réglage par incomplets successifs, optimisation et réglage des différents paramètres machine. Différentes conditions expérimentales étaient indispensables pour la mise en forme des mousses par injection pour que les pièces soient uniformes et reproductibles. Ces conditions, ainsi que les géométries de la pièce à fabriquer et de la buse d'injection, et le circuit de refroidissement seront présentés par la suite. Les paramètres de mise en forme et les indicateurs de choc et acoustique sont listés dans la troisième partie de ce chapitre. La présentation des outils utilisés pour la recherche des méta-modèles exprimant les indicateurs en fonction des paramètres influents constitue la dernière étape de la procédure. Les résultats ainsi que la validation sont présentés en dernière partie. La validation est effectuée avec des tests statistiques : tests sur la variance, écart type, et normalité des erreurs. Et finalement la robustesse au sens de Taguchi est vérifiée et validée.

2.2. Eléments sur les Procédés de Fabrication

L'influence des paramètres de mise en forme sur les caractéristiques des produits plastiques constitue le sujet de nombreux travaux. Dans cette partie, un résumé de ces

travaux est présenté. Les études citées dans cette partie concernent les procédés d'injection et d'extrusion des produits en plastiques compact et alvéolaire.

2.2.1. Extrusion des mousses

De nombreuses études se sont portées sur l'influence des conditions d'extrusion sur les caractéristiques des produits en plastique alvéolaire : morphologiques, physico chimiques et mécaniques. Nous citons ici une liste non exhaustive des travaux réalisés.

Ding et al [1] ont étudié les effets des conditions d'extrusions (taux d'alimentation, humidité dans l'alimentation, vitesse de rotation de la vis et température d'extrusion) sur les propriétés physico chimiques (densité, expansion, indice d'absorption d'eau WAI, indice de solubilité dans l'eau WSI) et caractéristiques sensorielles (dureté et caractère croustillant) d'un sandwich de riz expansé. Pour cela, Ding et al ont eu recours aux plans d'expériences, en particulier le plan composite central. Chacun des 4 paramètres d'extrusion prend 5 niveaux de valeurs (- α , -1, 0, +1, + α) ou - α et + α sont les limites inférieures et supérieures. Les valeurs des niveaux -1, 0 et +1 sont déterminées par interpolation linéaire. Les auteurs ont conclu que les modèles exprimant la densité, le taux d'expansion et le caractère croustillant en fonction des conditions d'extrusion sont linéaires sans interactions avec une confiance allant de 91 à 92 %, ces caractéristiques dépendent des 4 paramètres d'extrusion. Quand aux WAI, WSI et la dureté, les modèles sont polynomiales de second degré avec interactions avec une confiance entre 95 et 98 %, la dureté est indépendante de la vitesse de rotation de la vis. Afin d'hiérarchiser les conditions d'extrusion, Ding et al ont présenté chacune des caractéristiques de l'extrudat en fonction de deux des paramètres entrées. L'augmentation du taux d'alimentation a pour effet, d'augmenter le taux d'expansion et la dureté de l'extrudé, diminuer WSI. L'augmentation de l'humidité provoque une augmentation de la densité, du WAI, et de la dureté, et une diminution du taux d'expansion, du WSI et du caractère croustillant. Une élévation de la température d'extrusion favorise l'expansion de l'extrudé et le caractère croustillant, augmente le WSI mais réduit la densité. Ce travail permet de voir l'utilité des plans d'expériences pour la recherche des expressions simples définissant des caractéristiques d'un échantillon extrudé en fonction des paramètres machine influents.

Dans le même but, Jeong et al [2] ont testé la faisabilité de l'expansion avec CO_2 en utilisant une extrudeuse bi-vis en basse température et ont évalué les propriétés de l'extrudé. Les essais ont été réalisés avec une vitesse de rotation de vis de 100 tr/min et un taux d'alimentation de 6.6 Kg/h. Six différentes pressions d'injections du CO_2 sont prises en compte : 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 et 0.6 MPa. La température de chauffe est maintenue à 40 °C dans la section de l'alimentation (6D), 50 °C dans les 2 zones suivantes (de 6 jusqu'à 24D) et 60 °C à la sortie (Figure 2-1).



Figure 2-1 : Configuration de la vis [2]

Les caractéristiques étudiées de l'extrudat sont : le rapport d'expansion, la densité, la porosité, taille moyenne des alvéoles, proportion de la surface occupée par les alvéoles, nombre d'alvéoles par cm³, WSI, WAI et SME (énergie mécanique spécifique). Jeong et al ont remarqué qu'en injectant le CO_2 sous une pression entre 0.1 - 0.5 MPa, l'expansion augmente et décroît à 0.6 MPa (même comportement du rapport entre l'aire occupé par les alvéoles et l'aire totale) à cause de l'effondrement de la structure à la sortie de la filière. Un comportement opposé concerne la densité qui diminue puis augmente. Alors que le WSI et le SME augmentent quand la pression passe de 0.1 à 0.6 MPa tandis que la taille moyenne des alvéoles augmente. Les alvéoles de diamètre $10 - 30 \ \mu m$ constituent 80 % de l'ensemble des alvéoles quand le gaz est injecté avec une pression de 0.1 MPa, ce pourcentage est de 36 % (les alvéoles de diamètre supérieur à 30 μ m dominent) quand la pression passe à 0.5 MPa. Les auteurs ont étudié ensuite les interactions entre les caractéristiques de l'extrudat : le rapport d'expansion est bien corrélé avec la densité, la porosité et la proportion de la surface occupée par les alvéoles. D'un autre côté, le WSI a une forte corrélation avec le WAI, le SME, la taille moyenne des alvéoles, la proportion de la surface occupée par les alvéoles et le nombre d'alvéoles par cm³. Quand à la taille moyenne des alvéoles, elle est corrélée négativement avec la proportion des alvéoles. Finalement, le WSI, la taille moyenne des alvéoles et la proportion de la surface occupée par les alvéoles sont corrélés avec le reste des caractéristiques mais la densité des alvéoles n'est pas corrélée avec le rapport d'expansion, la densité massique, la porosité, WAI et la proportion des alvéoles.

Ainsi, suite à ces études, les conditions de mise en forme possèdent une certaine influence sur les caractéristiques du produit final. On prétendra facilement que le type et la quantité de l'agent gonflant ont aussi une influence sur les propriétés rhéologiques de la mousse. Sur ce point, Guriya et al [3] ont étudié la morphologie des alvéoles et le comportement rhéologique des mousses extrudées en utilisant deux types d'agents gonflants à différentes proportions et en variant la température d'extrusion. Le mélange maître contenait un terpolymère d'éthylène-propylène-diène (EPDM) chargé en gomme ou en noir du carbone avec un agent gonflant. Le nombre d'alvéoles, la taille moyenne, le gonflement de la matière à la sortie de la filière et la pression d'extrusion ont été considéré comme points de comparaison. Pour cela, 12 compositions de matières ajoutées à l'EPDM ont été formulées. A partir des investigations menées, Guriya et al ont remarqué qu'en augmentant la proportion de l'agent gonflant, la taille moyenne et le nombre des pores, de formes non sphériques, augmentent et ceci sans catalyseur. D'un autre côté, en augmentant la température d'extrusion, le nombre des alvéoles diminue. Dans le cas d'un mélange chargé avec les deux agents, la matière à la sortie de la filière se gonfle de plus en plus en augmentant la température d'extrusion ou la quantité de l'agent gonflant. La pression d'extrusion diminue quand on augmente la quantité de l'agent gonflant quelque soit le taux de cisaillement et la température d'extrusion.

Dans le même volet, Grosselin et Rodrigue [4] ont produit des mousses polyoléfines par extrusion et par injection dans l'ordre d'analyser la morphologie cellulaire. Cette étude propose des méthodes de calcul de la surface des alvéoles et les convertir en volumes. Deux méthodes de calcul de la surface sont examinées. La première considère une surface exacte contenant un nombre indéterminé des pores, alors que la seconde considère un nombre exact des alvéoles dispersées dans une surface d'une aire indéterminée. Trois approches de calcul de la densité des alvéoles sont examinées, elles se basent sur la géométrie de l'alvéole : sphérique, ellipsoïde de révolution ou vraie ellipsoïde. Grosselin et Rodrigue ont trouvé que les deux méthodes de calcul de surface sont entravées par une incertitude de 20% mais donne les résultats semblables. Les 3 méthodes d'estimation de la densité des alvéoles donnent des résultats similaires dans le cas de l'injection des mousses (pores sphériques) mais divergent significativement dans le cas des mousses extrudées (pores ellipsoïdes).

2.2.2. Injection en polymères compacts

L'étude de l'influence du procédé sur les caractéristiques du produit ne s'est pas limitée à l'extrusion comme procédé et aux matériaux alvéolaires comme matière du produit final. En effet, Postawa et Koszkul [5] ont étudié les effets des paramètres machine sur les caractéristiques des pièces plastiques compacts moulées par injection. Les paramètres d'injection sont : la température du moule, la température d'injection, la vitesse d'injection, la pression de maintien et la durée de refroidissement. Les caractéristiques de la pièce injectée sont : la masse de la moulée, le retrait longitudinal et le retrait transversal. Les auteurs utilisent la technique des plans d'expériences pour exprimer les sorties en fonction des entrées. Pour ceci, le choix s'est porté sur deux matières plastiques : un copolymère semi cristallin POM et un polymère amorphe PS. Un plan composite centré est mis en place afin de pouvoir étudier des modèles polynomiaux dans le cas ou le modèle linéaire ne présentait pas bien les données expérimentales. Les modèles polynomiales de second degré avec interactions sont avérés les mieux adaptés pour présenter les résultats expérimentaux, avec une confiance supérieure à 94 %.

Dans le même contexte, Nagaoka et al [6] ont analysé les effets des paramètres d'injection sur les propriétés mécaniques des sandwichs PP/PP (peau + cœur + peau). Les paramètres d'injection pris en compte sont : la vitesse d'injection, la température d'injection et la température du moule. Les propriétés des sandwichs considérées sont : les modules de traction et de flexion, les résistances à la traction et à la flexion, et la proportion de la section transversale du cœur. Les matières utilisées sont un homopolymère PP1 et un copolymère PP2. Le PP1 (MFI = 2.4 g/10 min) est utilisé comme matière de la peau et le PP2 (MFI = 1.8 g/10 min) comme matière du cœur du sandwich.



Figure 2-2 : Relation entre propriétés mécaniques et conditions de moulage dans le cas d'injection du PP [6]

Nagaoka et al ont remarqué que les propriétés mécaniques du PP1 et PP2 (en injection mono matière) s'affaiblissent beaucoup quand la température d'injection augmente (Figure 2-2). La température d'injection semble exercer une influence plus grande sur la résistance à la flexion que sur la résistance à la traction, une diminution de 20 % et 10 % respectivement. Les auteurs ont remarqué aussi que la proportion de la section transversale du cœur est contrôlée par la vitesse d'injection. En effet, avec une basse vitesse d'injection (30 %), la proportion de la section du cœur dans le sandwich augmente lentement quand la température d'injection augmente de 180 jusqu'à 230 °C et elle diminue à 270 °C. A une vitesse d'injection intermédiaire (50 %), la proportion du cœur

semble ne pas être affectée par la température d'injection du PP2, alors qu'à des vitesses d'injection plus grandes (70 et 99 %), la proportion de la section du cœur diminue de 180 jusqu'à 230 °C et augmente à 270 °C. D'un autre côté, quelque soit la température du moule, la vitesse d'injection ne semble pas avoir une influence remarquable sur les propriétés mécaniques. En effet, avec une faible température de moule (40 °C), une augmentation de la température d'injection du cœur induit des propriétés mécaniques plus faibles mais ceci n'est pas vérifié à une température du moule égale à 60 °C. Cependant, avec une température du moule de 80 °C, une température d'injection du cœur de 230 °C, donne des meilleures caractéristiques mécaniques. Contrairement à la résistance à la traction, la résistance à la flexion s'affaiblit avec l'augmentation de la température d'injection du cœur tandis que la vitesse d'injection ne joue aucun rôle significatif. En conclusion, les paramètres du procédé jouent un rôle significatif dans la détermination des propriétés mécaniques des sandwichs moulés par injection. Les températures d'injection du cœur et du moule pourraient être synchronisés pour apporter des propriétés mécaniques optimales même dans le cas où la peau et le cœur sont de la même matière.

2.2.3. Injection des mousses

Lee et Cha [7] ont étudié l'influence de la température du moule sur l'épaisseur de la peau et la résistance à l'impact des mousses polymères moulées par injection micro cellulaire. Ce procédé permet de former entre 10^9 et 10^{15} pores/cm³ de taille inférieure à 10 µm. La matière utilisée dans cette étude est le PP chargé avec 20 % de talc. L'agent gonflant est le N₂. La température du moule varie entre 20 et 110 °C avec un gradient de 10 °C. Les SEM (à une vitesse d'injection de 61.2cm³/s) ont montré que l'épaisseur de la peau reste constante quand la température du moule est inférieure à 70 °C. Les SEM dans le cas où la température du moule reste entre 70 et 100 °C sont présentés sur la figure 2-3.

Ces figures montrent une morphologie uniforme des pores. Sur la figure 2-3 (a), la peau constitue 10 % de l'épaisseur total de l'échantillon injecté (En réalité 20 % vu que l'échantillon comporte deux couches non alvéolaires). A 80 °C, la proportion est 17.5 %, à 90 °C une valeur de 15.5 % et à 100 °C la proportion est de 14.5%. Finalement, l'épaisseur de la peau est corrélée avec la température du moule. Avec une vitesse d'injection de 15.3 cm³/s, les épaisseurs de la peau sont supérieures à celles avec une vitesse de 61.2 cm³/s. Ceci est du à l'augmentation de la vitesse d'injection qui conduit à une diminution du temps de remplissage de la résine, réduisant le transfert convectif de la chaleur durant l'injection et assure une distribution plus uniforme dans la cavité.





Figure 2-3 : SEM des échantillons injectés à une vitesse de 61.2 cm³/s avec une température du moule : (a) 70 °C, (b) 80 °C, (c) 90 °C, (d) 100 °C [7]

La table 2-1 donne les valeurs des épaisseurs de la peau à différentes vitesses d'injection et différentes températures d'injection. Une augmentation de la vitesse d'injection fait diminuer l'épaisseur de la peau.

Vitesse d'injection	Température du moule				
	20 °C	40 °C	60 °C	80 °C	100 °C
$15.3 \text{ cm}^{3}/\text{s}$	380 µm	375 µm	365 µm	310 µm	280 µm
$61.2 \text{ cm}^{3/s}$	$325~\mu{ m m}$	$325~\mu{ m m}$	310 µm	280 µm	$240~\mu m$

Tableau 2-1 : Epaisseur de la peau à différentes vitesses d'injectionet températures du moule [7]

Concernant la résistance à l'impact, corrélée avec l'épaisseur de la peau, celle-ci augmente en diminuant la vitesse d'injection.

Par la suite, les auteurs ont mis en place des modèles théoriques permettant de prédire l'épaisseur de la peau. Dans le cas d'un polymère semi-cristallin, et en supposant que les pores croissent à des températures voisines de la température de fusion, l'épaisseur de la peau s'exprime sous la forme suivante :

$$\acute{e}paisseur = \alpha \left(1 + \frac{T_m - T_{polymer}}{T_{polymer} - T_{mold}} \right) \qquad Eq. \ 2-1$$

Dans le cas d'un polymère amorphe, les pores croissent à une température au dessus de la température de la transition vitreuse. Ainsi :

$$\acute{e}paisseur = \alpha \left(1 + \frac{T_g - T_{polymer}}{T_{polymer} - T_{mold}} \right) \qquad Eq. \ 2-2$$

 α est défini comme l'épaisseur de la peau affectée par le transfert convectif de la chaleur dans le moule à l'instant où le polymère fondu remplit la cavité.

Finalement, Lee et Cha concluent que les propriétés des mousses injectées sont supérieures à celles des mousses extrudées. D'abord, la présence de la peau non-moussée en injection diminue le retrait des fibres (*fiber pull-out*) en surface. Ensuite, les mousses injectées présentent une meilleure stabilité puisque la teneur en agent gonflant influence peu les densités obtenues alors qu'elle influence fortement les résultats obtenus en extrusion. De plus, les mousses injectées affichent une masse volumique inférieure avec la même proportion d'agent gonflant ; soit 740 kg/m³ contre 830 kg/m³ en extrusion. D'autre part, les agents gonflants exothermiques produisent des cellules plus fines que les agents gonflants endothermiques dans les deux techniques de mise en oeuvre.

Dans la même thématique, Grosselin [8] avait produit et étudié des mousses composites bois/polymère produites par injection. Ces composites sont constitués de résidus de sciures et d'une matrice de polyoléfines recyclées (PEHD/PP). Un agent gonflant chimique à base d'azodicarbonamide a été utilisé dans le cadre de cette recherche. Des mousses injectées à différentes teneurs en bois, températures de moule et concentrations d'agent gonflant ont été produites. Des échantillons non-moussés ont également été moulés comme référence. Les matières premières ont d'abord été mélangées dans une extrudeuse bi-vis puis moulées sur une presse à injection. Les échantillons ont été moussés à basse pression par expansion libre dans un moule partiellement rempli. Afin d'étudier ces matériaux, un plan expérimental de 36 niveaux a été choisi. L'effet des fibres de bois a d'abord été analysé en variant la teneur en bois de 0 à 40 %. Ensuite, trois températures de moule (40, 60 et 80°C) ont été également étudiées. Enfin, trois teneurs en agent gonflant ont été comparées (0, 1 et 1.5 % de la résine). Les échantillons moussés ont été injectés de manière à ce que les pièces comportant 1 et 1,5 % d'azodicarbonamide aient la même densité, ceci pour comparer leur structure et propriétés dans des conditions similaires. Dans un premier temps, Grosselin a montré que les cellules étaient caractérisées par un léger allongement dans le sens de l'écoulement et a conclu l'insuffisance d'informations pour rejeter l'hypothèse de sphéricité des cellules. Au niveau de l'agent gonflant, la morphologie cellulaire diminue légèrement avec la teneur en azodicarbonamide (Figure 2-4), varie peu avec la température du moule et augmente significativement avec la teneur en bois. La densité de nucléation a ensuite été analysée, ces mousses dénombrent entre 5.10⁵ et 3.10⁶ cellules/cm³. Par ailleurs, l'épaisseur de la peau moyenne est proportionnelle à la teneur en bois mais varie inversement à la température du moule et de la concentration en azodicarbonamide (Figure 2-5).





Figure 2-5 : Epaisseurs moyennes de peau [8]

Contrairement aux résultats de Bledzki et Faruk [9], les résultats obtenus par Grosselin ne permettent pas d'affirmer que la température du moule est un facteur important dans le moulage par injection de mousses composites recyclées. En fait, seules l'épaisseur de la peau et la déformation finale en traction semblent sensibles à ce paramètre.

Rachtanapun et al. [10] ont étudié l'effet des méthodes de mise en oeuvre sur la morphologie cellulaire et les propriétés mécaniques des mousses polymères. Plus précisément, la composition de la résine, la durée de la période de moussage et la température de moulage ont été modifiées pour étudier leur effet sur le diamètre de

cellule, la densité de nucléation et la résistance à l'impact des mousses. Ils ont utilisé un mélange de PEHD/PP vierges dans des proportions de 30:70, 50:50 et 70:30. Les résines ont d'abord été saturées en dioxyde de carbone à 24°C et 800 psi pendant 24 heures avant de procéder à un compoundage sur une extrudeuse co-rotative et moussées sur une presse à compression.

Le plan expérimental comporte trois niveaux de température entre 135 et 175°C ainsi que quatre niveaux de temps de moussage entre 5 et 30 secondes. Les échantillons produits seulement en PEHD ou en PP, nécessitaient des températures relativement élevées afin de diminuer suffisamment la viscosité permettant ainsi la croissance des cellules. De ce fait, les cellules formées croissent rapidement grâce à la diffusivité du gaz. En comparaison, les mélanges PEHD/PP permettent d'obtenir des mousses à des températures plus faibles et une taille de cellules inférieure. Les temps de mise en œuvre plus longs permettent d'atteindre des réductions des densités supérieures mais occasionnent parfois la coalescence cellulaire lors du moussage à haute température (175°C). Les propriétés d'impact de ces mélanges ne sont pas généralement très élevées en raison des nombreuses interfaces présentes. Dans le cas présent, la résistance à l'impact est fortement influencée par la morphologie cellulaire. Des résultats optimales sont obtenus lorsque la structure cellulaire est bien développée et avec une densité de nucléation élevée. Enfin, la résistance à l'impact des mélanges PEHD/PP ne dépend pas de la composition, mais est favorablement influencée par les températures de moussage plus élevées.

Villamizar et Han [11] ont étudié la dynamique de la nucléation et la croissance cellulaire dans l'injection de mousses structurales. Les échantillons ont été injectés à basse pression dans un moule rectangulaire. Ils ont utilisé deux types d'agents gonflants physiques : le dioxyde de carbone et l'azote, pour mousser trois thermoplastiques : le PS, le PC et le PEHD. Les agents gonflants ont été ajoutés à des concentrations de 0.1 et 0.2 % respectivement. Les auteurs ont remarqué des inhomogénéités dans la morphologie de la mousse. D'abord, les cellules s'agrandissent en allant du point d'injection vers les bords. Ensuite, une mauvaise distribution de l'agent gonflant occasionne la nucléation hâtive dans les zones riches en agent gonflant. Les analyses dynamiques montrent que la structure coeur/peau, caractéristique des mousses structurales injectées, est causée par l'effondrement des cellules au contact du moule tempéré et par la grande viscosité acquise par le polymère pendant la phase de refroidissement.

Villamizar et Han ont proposé également deux mécanismes distincts de croissance cellulaire. Le premier est dû à une diminution de la pression lors du remplissage de la cavité, l'autre est dû à la diffusion du gaz dans le fondu. Ils ont également étudié les effets des paramètres de mise en œuvre sur la croissance cellulaire (Figure 2-6). L'augmentation de la pression d'injection favorise la formation des cellules plus petites et plus uniformes. À ce niveau, ils croient que la nucléation prématurée, toujours présente dans les canaux d'alimentation, peut être limitée en augmentant la pression d'injection. Une diminution de la température de mise en œuvre augmente la viscosité de la résine, diminue la diffusion du gaz et diminue aussi la vitesse de relaxation des contraintes dans l'échantillon, ainsi la taille moyenne des cellules est plus faible. La diminution de la température du moule provoque des effets similaires en favorisant la formation de la peau. Enfin, l'ajout d'agent gonflant à la matrice diminue la viscosité du mélange gaz/polymère et provoque la coalescence cellulaire s'il est incorporé en quantité excessive.



Figure 2-6 : L'effet des paramètres d'injection sur la croissance cellulaire [11]

Pfannschmidt et Michaeli [12] ont étudié la possibilité d'utiliser le dioxyde de carbone comme agent gonflant physique dans une presse à injection standard. Le CO_2 est généralement plus soluble dans les matrices polymères que l'azote et permet donc d'avoir des densités plus faibles. Dans cette étude, le polypropylène est préchargé en gaz dans un autoclave puis alimenté directement dans une presse à injection standard. Ils ont ensuite vérifié l'influence des paramètres d'injection sur la densité et la structure de la mousse. Le plan d'expérience tient compte de la vitesse d'injection et de rotation de la vis, la pression de maintien, la température de la vis et du moule ainsi que le temps de refroidissement. Une diminution de la densité aussi grande que 30% peut être obtenue avec l'ajout de 1% de CO₂. La présence d'agent de nucléation permet à la fois d'améliorer la structure de la mousse et de diminuer la densité jusqu'à 40%. Une haute vitesse d'injection permet une diminution de la densité globale de la pièce tout en uniformisant sa densité. Une augmentation de la température de la vis et de la vitesse d'injection diminue sensiblement la densité tandis que la pression dynamique et la température du moule n'influencent que très peu la densité; ces derniers causant plutôt une distribution hétérogène des cellules à l'intérieur de la pièce.

2.2.4. Conclusions

Les différents travaux réalisés ont montré que les paramètres de mise en forme peuvent influer sur les caractéristiques des matériaux plastiques alvéolaires. La plupart des travaux sont focalisés sur la microstructure et les propriétés mécaniques des mousses plastiques. D'un autre côté, les matériaux cellulaires, et en particulier les mousses plastiques, ont trouvé leurs places dans les applications où les besoins d'isolation acoustique et d'absorption du choc sont nécessaires, ce qui fait la réussite de ce type de matériaux. Ainsi, il est intéressant d'étudier et de trouver des méta-modèles empiriques exprimant les caractéristiques choc et acoustique en fonction des paramètres de mise en forme. Le choix de la technique de mise en forme s'est porté sur l'injection, ce dernier est le plus répandu comme moyen de fabrication de pièces en matière plastique compact et le moins cerné quand il s'agit de matériau alvéolaire.

2.3. Procédure Expérimentale

Dans cette partie, les matières premières et leurs caractéristiques sont présentées. Des analyses thermogravimétriques ont été réalisées afin de déterminer les températures de décomposition (utiles pour l'optimisation des paramètres de mise en forme par injection) de ces matières. Dans le deuxième volet, les moyens expérimentaux sont présentés. Effectivement, la presse à injection est utilisée tout au long de cette étude pour la mise en forme des mousses plastiques. Ainsi, le cycle de fonctionnement, la typologie des paramètres, et le réglage de la presse sont décrits. La géométrie de la pièce fabriquée, le refroidissement du moule ainsi que les conditions expérimentales indispensables pour le bon déroulement de cette campagne expérimentale constituent le dernier volet de cette partie.

2.3.1. Matières premières

Les matériaux alvéolaires résultent de la volonté d'introduire de façon maîtrisée une certaine proportion de cavités remplies de gaz dans un squelette de matrice polymère. La matrice ici est le polyéthylène basse densité (PEBD) de grade Lupolen 2420H (Tableau 2-2). Le fournisseur étant Basell Polyolefins.

Structure	semi-cristalline
Densité ISO 1183	0,924
Température de fusion (DSC)	120°C
Température Vicat ISO 306 (50 °C/min/10N)	94 °C
MFI ISO 1133 (190 °C et 2,16 Kg)	1,8 g/10min
Retrait longitudinal	4 %
Retrait transversal	1,5~%
Module d'élasticité en traction ISO 527	260 MPa
Contrainte au seuil ISO 527	11 MPa
Dureté Shore D	48

Un mélange maître est utilisé pour incorporer le gaz dans la matrice polymère. Ce mélange porogène est le Palmarole BA F4 E, commercialisé par Adeka Palmarole. Il contient environ 40% de matière active de type endothermique (bicarbonate de soude) avec un support PEBD. Le gaz formé après décomposition thermique est un mélange de CO_2 et H_2O .

Une analyse thermogravimétrique (ATG) a été effectuée sur ces deux matières, ceci étant pour connaître le comportement des matières premières utilisées vis-à-vis de la chaleur. Le dispositif expérimental est de marque Netzsch STA 409 associé à un système de contrôle TASC 414. Il s'agit d'une balance de grande sensibilité (10⁻⁵ gramme) couplée à un four pouvant chauffer jusqu'à 1100°C, ce qui permet de déterminer les variations de masse d'un échantillon et/ou les transformations physico-chimiques d'un matériau lors d'un traitement thermique. L'ATG du PEBD (Figure 2-7) montre que ce dernier commence à se dégrader à 300 °C. D'un autre côté, le mélange maître Palmarole BA F4 E, qui commence à se décomposer à 160 °C, contient 54 % de PE et 46 % de matière active se décomposant en 20 % de Na_2CO_3 et 26 % de gaz $(CO_2 + H_2O)$.

$2NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + CO_2 + H_2O_3$

Finalement, un mélange (96.15:3.85) de PEBD et de mélange maître (soit 98.18:1.82 PEBD et bicarbonate de soude) est préparé dans un turbo mélangeur pendant 15 minutes à 350 tr/min. Avec une telle durée de temps et cette vitesse de rotation, le mélange est supposé homogène.



Figure 2-7: ATG du PEBD et du Palmarole BA F4 E

2.3.2. Presse à injection

L'injection est réalisée sur une machine Billion, modèle H 260/470 et de version TP-STD. Les caractéristiques de la presse Billion sont présentées dans le tableau 2-3.

Diamètre de la vis	40 mm
Rapport L/D	23.5
Volume maximal théorique déplacé	$220~{ m cm^3}$
Pression maximale sur le polymère fondu	210 MPa
Pression maximal hydraulique appliquée	16 MPa
Débit maximum d'injection	$475 \text{ cm}^3/\text{sec}$
Vitesse max. de rotation vis	300 RPM
Débit théorique par tour	$5.9~\mathrm{cm^3}$
Course maximum de la vis	175 mm
Vitesse max. d'avance de la vis	380 mm/sec
Force maximal de fermeture	2011 KN

Tableau 2-3 : Caractéristiques de la presse Billion

Dans ce qui suit, le cycle de fonctionnement d'une presse est décrit. Puis, les paramètres d'injection ainsi que leurs réglages sont définis. Cette partie constitue un complément de la partie « procédés de mise en forme des mousses » du premier chapitre dans laquelle l'étude s'est limitée au comportement du polymère fondu tout au long du procédé d'injection. La géométrie de la pièce dont cette étude fait objet, est présentée ainsi que le circuit de refroidissement. En dernier point, des conditions expérimentales étaient indispensables afin d'assurer une bonne qualité des pièces fabriquées par injection.

2.3.2.1. Cycle de fonctionnement

La figure 2-8 présente le cycle de la presse sous ses deux aspects, d'une part en (1) le cycle technologique de la presse à injecter, d'autre part en (2) le cycle physique de transformation de la matière plastique.



Figure 2-8 : Cycle d'une presse à injecter

La figure 2-9 présente les principaux éléments qui constituent une presse à injection : l'unité d'injection, le moule et l'unité de fermeture. Le choix d'une presse impose le contrôle de la conformité des caractéristiques de la fermeture avec le type de production envisagé. Plusieurs systèmes de fermeture existent, pour citation : fermeture hydraulique à un seul vérin, à deux vérins en parallèle dont un servirait au verrouillage, à deux vérins en série, fermeture mécanique et fermeture mixte. Au niveau du système de plastification (Figure 2-9), la matière est plastifiée lors du dosage par l'action simultanée de la rotation de la vis de plastification et du système de chauffage du fourreau. Durant cette étape, la matière est convoyée par la goulotte jusqu'à l'avant de la vis car les frottements de la matière sont plus élevés sur le fourreau (plus chaud) que sur la vis (plus froide). La pression générée par le flux de la matière plastifiée à l'avant du fourreau repousse la vis vers l'arrière, et fait reculer le piston du vérin d'injection (Figure 2-9). Lors de l'injection, le piston du vérin d'injection avance et le reflux de la matière le long de la vis ferme le clapet anti-retour, la vis fait alors office de piston.



Figure 2-9 : Système de plastification

Le transfert de la matière se fait via une buse moule qui assure en même temps la liaison entre le fourreau et le plateau fixe du système de fermeture. Différentes géométries de buses existent et chacune influence sur le remplissage de l'empreinte, et donc sur la distribution des cavités. La géométrie de la buse utilisée est présentée sur la figure 2-10.



Figure 2-10 : Buse d'injection

La vis de plastification est réalisée en acier, et sa surface subit différents traitements qui augmentent sa dureté, diminuent son coefficient de frottement et améliorent sa résistance chimique. Pour obtenir une plastification parfaite, la vis doit être conçue en fonction de la matière à transformer. Une vis standard est caractérisée par son diamètre nominal défini comme étant le diamètre de la vis au sommet des filets. La longueur étant la deuxième caractéristique, elle s'exprime en nombre de diamètres, c'est le rapport de la longueur de la zone filetée et du diamètre nominal. Le taux de compression caractérise la capacité de la vis à malaxer la matière, plus il est élevé plus la matière subira un travail important. Le profil de la vis est une des caractéristiques importantes, c'est la dimension relative des trois zones de la vis : sur une vis standard le profil est : un tiers de zone d'alimentation, un tiers de zone de compression et un tiers de zone d'homogénéisation (appelée aussi zone de pompage) (Figure 2-11).

Lors de l'injection, le clapet anti-retour de la vis de plastification (Figure 2-12) empêche le reflux de la matière le long de la vis. L'étanchéité du clapet est indispensable à la robustesse du procédé. Durant le dosage, la bague du clapet est repoussée contre la pointe de vis par l'afflux de matière plastifiée. Le flux de la matière passe à l'intérieur de la bague, puis à travers les rainures de la pointe. Lors de l'injection, la vis de plastification avance et plaque le siège contre la bague. La matière ne peut plus refluer vers l'arrière du clapet.



Figure 2-11 : Profil d'une vis de plastification



Figure 2-12 : Clapet de vis A : Buse ouverte, B : Résistance de buse, C : L'avant pot, D : Clapet, E : Siège du clapet, F : Passage de la matière, G : Vis, H : Pointe du clapet, I : Fourreau.

2.3.2.2. Typologie des paramètres

Plusieurs paramètres interviennent dans le procédé d'injection des matières plastiques et il est possible de les classer en quatre groupes. Les paramètres mesurés, premier groupe, sont les valeurs relevés sur la machine (ou ses périphériques), lors de son fonctionnement en cycle automatique : les temps de dosage, d'injection dynamique et d'ouverture / fermeture / éjection, la température de la matière et du moule, les pressions mesurées dans l'empreinte durant l'injection dynamique,...

Le deuxième groupe contient les paramètres réglables, ce sont les paramètres que l'on peut modifier (souvent dans les plages déterminées) afin de faire correspondre les caractéristiques du produit moulé avec les exigences du plan de contrôle. Ces paramètres sont regroupés en trois catégories : les paramètres assurant la qualité de la plastification (température du fourreau, vitesse de rotation de la vis, contre pression), les paramètres assurant la qualité du remplissage (vitesses d'injection et température d'outillage) et les paramètres assurant la qualité du maintien (pression de maintien et température d'outillage). Les paramètres imposés se retrouvent dans le troisième groupe, ce sont les paramètres dont la valeur de consigne (modifiable) est imposée par les paramètres réglables, par la presse et par l'outillage. Les principaux paramètres de ce type sont : la course du dosage, le type de commutation et sa valeur de consigne, la limite de pression d'injection, les pressions associées à des mouvements, les courses d'ouverture et d'éjection, le temps de maintien, le temps de refroidissement... Les paramètres de contrôle, représentant le dernier groupe, sont des tolérances appliquées aux paramètres mesurés. Elles permettent à la presse de détecter des anomalies dans le déroulement du cycle et de réagir en conséquence (par une interruption du cycle ou par un rejet de la moulée). Quelques-uns de ces paramètres : la durée maximale du cycle, la durée maximale de la fermeture,...

2.3.2.3. Réglage d'une presse à injection

La fabrication d'une pièce injectée peut être assimilée à la construction d'un produit manufacturé, c'est-à-dire à une suite d'opérations dont la réussite conditionne la qualité de la totalité de l'ouvrage. Dans ce cas, la fabrication de la pièce se résume par la succession d'étapes : préparation de la matière fondue, remplissage de l'empreinte, maintien en pression dans l'empreinte, refroidissement, et évacuation de la pièce produite. Chaque étape étayant la réussite de la suivante, il faut valider enfin sa qualité avant de commencer le réglage de la suivante. Les pièces produites pendant la phase de réglage sont les images successives de « la pièce injectée ». La condition impérative à la pertinence de ce raisonnement est de régler la presse en mode automatique, ce qui suppose un préréglage de chaque étape, et notamment de la course du dosage. Dans ce qui suit, le protocole de réglage de chaque étape est soigneusement décrit.

Le réglage de la plastification comporte trois étapes. En premier temps, il s'agit d'effectuer le préréglage des températures. En effet, chaque matière dispose d'une plage de température de transformation par injection. Cette plage est délimitée par la température à laquelle la fluidité du polymère le rend apte à l'injection et par la température à laquelle la matière se dégrade. Lors du réglage des températures du fourreau d'une presse à injecter, la température désirée (température cible) du polymère sera appliquée à l'avant du fourreau afin de garantir une bonne homogénéité thermique de la masse fondue. Ensuite, le profil de la température est construit à partir de la température cible choisie dans la plage des températures de transformation (dans le tiers inférieur de la fourchette s'il n'y a pas d'indication précise). La température est régulièrement variable le long du fourreau, en respectant un écart maximal estimé à « T° cible ± 30°C ». Vient ensuite en second temps le préréglage de la contre pression, elle est ajustée à une valeur minimale de 50 bar sur la matière, soit environ 5 bar dans le vérin d'injection. La présence de bulles de grandes dimensions dans la purge est l'indice d'une contre pression trop faible. En dernier temps, la vitesse du dosage est optimisée à partir des paramètres de chaque matière, mais fixée à 0.15 m/s comme première approximation.

Le dosage est un des réglages les plus importants en injection : c'est lui qui conditionne la quantité de la matière qu'on va injecter dans le moule. Le dosage utile est la course (ou le volume) du dosage réellement utilisé pour remplir l'empreinte. La fin du remplissage de l'empreinte s'appelle la commutation. La course du dosage dépend du volume de la moulée (pièces et carotte), de la nature de la matière transformée et du diamètre de la vis de plastification.

La vitesse d'injection est la vitesse d'avance de la vis de la machine. Cette vitesse correspond aussi au débit de la matière injectée dans le moule. Il n'existe pas de méthode utilisable en atelier pour définir à l'avance quelle vitesse d'injection s'adapte le mieux au produit fabriqué. Une vitesse d'injection trop faible ne permet pas le remplissage de l'empreinte (car la gaine solide finit par obturer la veine fluide). Dans le même temps, une vitesse d'injection trop élevée impose des pertes de charges importantes qui nuisent à la robustesse du réglage, dégradent le polymère et imposent de fortes contraintes à l'outillage. Il existe donc, dans tous les cas, une vitesse d'injection générant le minimum de pertes de charges le long de l'écoulement (Figure 2-13). Cette vitesse peut être recherchée par des essais successifs d'injections incomplètes.

Concernant le réglage du remplissage, il faut augmenter progressivement la course de dosage en s'assurant que la pression mesurée dans le vérin d'injection n'atteint pas la limite de la pression d'injection. Dans ce cas, on augmente la pression d'injection ou la vitesse d'injection doit être modifiée. Entre chaque réglage du dosage, la vitesse d'injection est modifiée, si nécessaire, afin d'éliminer d'éventuels défauts des pièces.



Figure 2-13 : Optimisation de la vitesse d'injection

Vient en dernier réglage l'optimisation du maintien ; la phase du maintien complète la phase de remplissage du moule. Durant le maintien, la matière plastifiée sous pression est empêchée de refluer hors du moule. De ce fait deux paramètres règlent le maintien. En premier, c'est la pression du maintien définit comme le niveau de pression appliquée dans le vérin d'injection pour empêcher le reflux de la matière. En second, la durée du maintien (ou temps du maintien) définit comme étant la durée d'application de la pression du maintien ; elle doit être suffisante pour que ce soit le durcissement de la matière qui empêche le reflux hors des empreintes. Le temps du maintien est optimisé en surveillant l'évolution de la masse des pièces moulées en fonction du temps du maintien.

2.3.2.4. Géométrie de la plaque

Le moule a une seule empreinte constituée d'un empilement de 2 plaques (Figure 2-14, l'unité étant le millimètre). Chaque plaque a la forme d'un carreau de dimensions $150 \times 150 \times 8$. Le point d'injection est centré dans la pièce.

2.3.2.5. Refroidissement du moule

Le circuit de refroidissement du moule est présenté sur la figure 2-15. Le liquide de refroidissement est l'eau, circulant en boucle fermée (thermorégulateur – moule). Deux thermocouples, branchés sur les tuyaux de régulation à l'entrée et la sortie du moule, ont permis de vérifier que la différence entre la température d'entrée et la température de sortie était voisine de zéro.



Figure 2-14 : Géométrie d'une plaque



Figure 2-15 : Refroidissement du moule

2.3.2.6. Conditions expérimentales d'injection

Le comportement du mélange PEBD + mélange maître diffère du comportement du PEBD seul, ainsi lors de la mise en forme, quelques conditions sont indispensables pour l'obtention d'une bonne pièce. En premier temps, le groupe injecteur reste collé à la partie fixe du moule tout au long du cycle d'injection, bloquant ainsi la matière dans l'empreinte. D'un autre côté, il n'est pas recommandé d'établir une pression de maintien afin d'obtenir une expansion naturelle. Dans le cas d'une pression imposée, elle compenserait l'air emprisonné dans les alvéoles et la pièce serait non alvéolaire.

La durée de refroidissement (de solidification) est fixée à 200 sec, temps nécessaire pour que les parois des alvéoles de la mousse se rigidifient et donc emprisonnent le gaz. Dans le cas où le temps de refroidissement est insuffisant, le gaz s'échappe des alvéoles, du fait que les parois des cavités sont encore fragiles et pas totalement solidifiées, et forme une grosse bulle dans le carreau (la peau étant étanche) faisant gonfler la pièce lors de l'éjection. Vient ensuite une condition à imposer pour avoir le même état de matière fondue lors de l'injection de chaque pièce, il était nécessaire de plastifier la juste quantité à injecter pour remplir l'empreinte et la phase de plastification débute juste après. Et en dernier, l'éjection se fait manuellement dans le but de minimiser au maximum la déformation de la pièce. Les 10 premières moulées ne sont pas gardées et à chaque modification d'un ou plusieurs paramètres d'injection, son effet est observé qu'à partir de la cinquième pièce injectée.

2.4. Facteurs d'entrée et de sortie

Lors du procédé d'injection des pièces en polymère compact, plusieurs paramètres du procédé peuvent affecter la qualité du produit. Dans le cas présent, un mélange d'une matrice polymère avec un agent gonflant est utilisé et sous l'effet de la chaleur, une transformation chimique s'établit avec un dégagement d'un gaz. Ainsi, il est facile d'imaginer que certains paramètres du procédé peuvent influer sur les caractéristiques du produit : la mousse plastique. Pour clarifier ce point, la théorie des plans d'expériences est utilisée comme une technique de quantification et de qualification des effets des paramètres d'injection sur les caractéristiques de la mousse plastique.



Figure 2-16 : Modèle SADT

La figure 2-16 illustre le modèle SADT (Structured Analysis and Design Technics) présentant un système entrées/sorties. Les entrées $(X_1, X_2, ..., X_k)$ sont les facteurs process et les sorties $(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ sont les réponses mesurables (caractéristiques du produit). Ce système peut être perturbé par des facteurs de bruit (température ambiante, sensibilité du procédé,...). L'objectif principal est de trouver une relation entre les entrées influentes et les sorties avec une prédiction de l'erreur qui minimisera les facteurs de bruit.

Dans ce qui suit, les entrées sont définies en premier temps. Le choix des paramètres sélectionnés ici est expliqué et pour finir, les plages de variation de ces facteurs sont données. Les sorties du système, appelé aussi indicateurs, constituent le deuxième point abordé dans cette partie. Et pour finir, les techniques utilisées pour établir les méta-modèles exprimant les sorties en fonction des entrées sont décrits.

2.4.1. Facteurs d'entrées

Plusieurs paramètres peuvent avoir des effets sur les propriétés des mousses plastiques injectées. Ces paramètres se classent en deux groupes. Dans la première classe, les paramètres dits de procédé sont : la température d'injection, la température du moule, la
contre pression (définit comme étant la pression appliquée par le vérin hydraulique sur la vis pendant la phase de plastification. Elle a pour effet de s'opposer au recul de la vis et donc favorise le malaxage du mélange maître et du PEBD), la vitesse d'injection, la vitesse de plastification, le temps de séjour de la matière dans le fourreau et la durée de solidification. Dans la seconde classe, la proportion de l'agent gonflant, l'épaisseur de la pièce et la nature de l'agent influent fortement sur les caractéristiques des mousses injectées.

Il apparaît que les effets des facteurs de la deuxième classe sont plus observables que ceux de la première classe, par exemple la proportion de l'agent gonflant aura une influence majeure si on l'inclut dans l'ensemble des paramètres étudiés et qui pourra dominer par rapport aux autres facteurs. Ainsi, on a fixé ces paramètres (épaisseur de la pièce de 16 mm, proportion du mélange maître de 4 %) et étudié les paramètres de la 1^{ère} classe.

Donc ici, il est question d'étudier l'influence de 7 facteurs machine, réduits à 5 pour simplifier l'étude. Les facteurs machine retirés de la liste sont : la durée de solidification fixée à 200 secondes et le temps de séjour de la matière dans le fourreau calculé à partir des durées de refroidissement, d'injection et de plastification. En résumé, les facteurs pris en compte sont : A la température d'injection ; B la température du moule ; C la contre pression ; D la vitesse d'injection et E la vitesse de dosage (plastification).

	Fastours	Limite	Limite
	Facteurs	inférieure	supérieure
А	Température d'injection (°C) : T _{inj}	200	250
В	Température du moule (°C) : T _m	20	50
\mathbf{C}	Contre Pression (bars) : CP	10	30
D	Vitesse d'injection (cm³/s) : V _{inj}	90	200
Е	Vitesse de dosage (rd/min) : V _{dos}	90	190

Tableau 2-4 : Limites inférieure et supérieure des facteurs entrées

En modifiant un ou plusieurs paramètres de cette liste, l'état de la matière fondue change et donc une microstructure et propriétés différentes de la mousse injectée. Les limites inférieures et supérieures (Tableau 2-4) de chacun de ces facteurs dépendent des performances machine, des matières premières (La température d'injection par exemple, ne doit pas dépasser celle de la dégradation du polymère, et doit favoriser en même temps un maximum de dégagement gazeux lors de la décomposition de l'agent gonflant), mais aussi dans le but d'obtenir des bonnes pièces en mousse.

2.4.2. Facteurs de sorties

Dans ce paragraphe, on définit les variables sorties de notre système. On s'intéresse tout particulièrement aux caractéristiques choc et acoustique des mousses plastiques. Les procédures et les conditions expérimentales donnant accès à ces performances sont présentées.

2.4.2.1. Indicateur choc

La machine du choc utilisée repose sur le principe de la chute libre d'une masse (Figure 2-17). Elle a été développée [13] par la société Prodemat (France) sous le nom d'Impactomat. Le dispositif se compose d'un système d'impact instrumenté en force et en déplacement, et d'un système d'acquisition et de traitement des données.

L'impacteur est un cylindre à extrémité hémisphérique de 60 mm de long et de 20 mm de diamètre. Il est rattaché au chariot portant les masses par un système vissé-collé. La charge utilisée est de 2.3 kg. La hauteur de la chute est de 140 mm, fixée à l'aide d'un chariot mobile, sur lequel est accroché le chariot de masse par l'intermédiaire d'un aimant électromagnétique. Au moment du lancement de l'essai, l'effet magnétique est coupé, et la charge est libérée.



Figure 2-17 : Schéma de la machine du choc

La machine est équipée d'un système de bridage pneumatique (pour fixer l'échantillon à tester) à pression variable (possible de l'enlever pour travailler dans des conditions de support simple) et de deux supports. Le premier est un support comportant un trou circulaire de 40 mm de diamètre (Figure 2-18-a). Le deuxième a une forme carrée laissant une surface libre de 90×90 mm². L'échantillon est en appui simple sur tout son pourtour sur 5 mm (Figure 2-18-b). C'est cette dernière configuration utilisée dans ce travail.



Figure 2-18 : Schéma des bridages a) circulaire et b) carré

Le capteur d'effort est un capteur piézo-électrique positionné entre l'impacteur et le chariot. Le capteur de déplacement est un capteur sans contact à courant de Foucault. Il est constitué d'un détecteur situé au niveau de l'échantillon et d'une cible (plan incliné) positionnée sur le chariot d'impact. Les deux capteurs sont reliés à une carte d'acquisition 8 bits (fréquence d'acquisition maximale : 20 MHz), branchée sur un PC. Le déclenchement de la mesure de déplacement se fait quand une réponse seuil est atteinte au niveau du capteur d'effort.

L'instrumentation en force et en déplacement de l'essai permet d'accéder directement à l'évolution de ces deux grandeurs en fonction du temps (Figure 19-a). Il est aussi possible de visualiser la force en fonction du déplacement (Figure 19-b).



Figure 2-19 : Evolution a) de la charge et du déplacement en fonction du temps, b) de la charge en fonction du déplacement (PEBD compact, e = 8 mm, H = 292 mm, m = 2300 g)

Par intégration de cette courbe (Figure 2-19-b), il est possible d'accéder à l'évolution de l'énergie, E, tout au long de l'essai. Une courbe type est présentée sur la figure 2-20. Cette évolution nous permet d'obtenir deux valeurs caractéristiques de l'essai : l'énergie réelle d'impact fournie au matériau, E_{imp} , qui correspond à la valeur pour le déplacement maximal, et l'aire de la courbe force/déplacement qui est égale à l'énergie absorbée par le matériau. Elle est représentée sur la courbe de la figure 2-20 par la valeur finale de la zone de décharge. L'énergie élastique, E_{el} , est calculée en faisant la différence entre l'énergie d'impact et l'énergie absorbée. $E_{el} = E_{imp} - E_{abs}$.

Les éprouvettes testées sont de dimensions $100 \times 100 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur 8 mm, la peau a été enlevée avec une micro fraise. Vu que la mousse est souple, les essais du choc ont été effectué en utilisant un support : une plaque en polyéthylène d'épaisseur 2 mm. Pour éviter les déplacements verticaux qui peuvent survenir lors de l'impact, les éprouvettes sont maintenues en place en appliquant un bridage sans pression. Il est à rappeler que dans le cas de la chute libre, la vitesse et l'énergie d'impact peuvent être calculées en fonction de la masse et de la hauteur de la chute, par les relations suivantes : $E_{imp} = mgH = \frac{1}{2}mV^2$. Et au niveau de la reproductibilité (Figure 2-21), 3 à 4 essais sont réalisés pour chaque type d'échantillons.



Figure 2-20 : Evolution de l'énergie en fonction du déplacement (PEBD compact, e = 8 mm, H = 292 mm, m = 2300 g)



Figure 2-21 : Reproductibilité de l'essai du choc

Afin de vérifier l'homogénéité de la mousse, des essais du choc ont été effectué en 4 points du même échantillon (Figure 2-22), symétriques par rapport au point d'injection.

La figure 2-23 confirme l'hypothèse de l'homogénéité de l'écoulement de la matière fondue dans le moule. L'essai du choc permet de donner une caractéristique importante du matériau testé, l'énergie absorbée par le matériau lors du choc. Cette dernière permet de définir l'indicateur choc, appelé aussi coefficient d'absorption de choc, c'est le rapport entre l'énergie absorbée et l'énergie d'impact. Ce coefficient varie entre 0 et 1 :



Figure 2-22 : Lieux d'impact de la charge au cours des essais de choc (unité : mm)



Figure 2-23 : Energie de choc en fonction du déplacement dans les 4 lieux d'une seule pièce (Mousse PEBD, m = 2300 g, H = 140 mm and e = 8mm)

Cet indicateur est la première caractéristique mesurée des mousses polyéthylène injectées et sera l'objet de la recherche du méta-modèle l'exprimant en fonction des paramètres d'injection.

2.4.2.2. Indicateur acoustique

La détermination des caractéristiques d'un matériau absorbant s'effectue à l'aide d'un tube à ondes stationnaires (TDK, **T**ube **D**e **K**undt). Ce tube est muni à l'une de ses extrémités d'un porte échantillon destiné à recevoir le matériau étudié, et à l'autre d'un haut-parleur percé en son centre (Figure 2-24), de manière à laisser passer une tige mobile support d'un microphone. Le déplacement du chariot sur le rail gradué permet ainsi de repérer la position du microphone par rapport à l'échantillon. Le diamètre du tube est de 100 mm qui permettra de mesurer le coefficient d'absorption acoustique pour la gamme de fréquence de 100 à 1600 Hz. La chaîne d'excitation et de mesure comprend essentiellement un module d'acquisition, traitement et synthèse de signaux (Siglab) relié à un micro-ordinateur.



Figure 2-24 : Dispositif expérimental : Tube De Kundt

Les échantillons ont la géométrie d'un disque de diamètre 100 mm et d'épaisseur 8 mm (la peau de la moulée a été enlevé avec une micro fraise). Entre 3 et 4 essais acoustiques sont effectués pour chaque échantillon. La reproductibilité est bonne comme le montre la figure 2-25.



Figure 2-25 : Reproductibilité de l'essai d'absorption acoustique

Le coefficient d'absorption acoustique en fonction de la fréquence est considéré ainsi comme une sortie. L'évolution de ce coefficient en fonction de la fréquence ne suit aucune loi mathématique classique pour pouvoir établir un modèle empirique, d'où l'obligation de prendre en compte tous les points de la courbe. Dans la suite du chapitre, les coefficients aux fréquences 954 Hz et 1330 Hz sont pris en compte comme des exemples pour la recherche du méta-modèle 'acoustique'.

2.4.2.3. Densité de la mousse

La densité de la mousse est considérée comme un indicateur (sortie). En effet, les échantillons usinés pour les essais de choc servaient en même temps à la détermination de cette caractéristique, une moyenne et un écart type sont calculés pour 5 échantillons identiques.

2.4.2.4. Densité de la moulée

Le produit injecté est une mousse structurelle avec une peau non alvéolaire (peau + mousse + peau). La densité de la moulée est le dernier indicateur considéré (moyenne pour 10 échantillons).

2.4.3. Techniques des plans d'expériences

Un plan d'expériences a pour but d'établir des relations quantitatives entre plusieurs variables de variation continue (les facteurs) et les données observées expérimentales (les réponses obtenues par des essais réels) d'un processus ou d'un système. Une réponse mesurée (réelle) peut être exprimée par :

$$Y = F(x_1, x_2, ..., x_p)$$
 Eq. 2-4

où les variables $x_1, x_2, ..., x_p$ sont exprimées en unités naturelles de mesure et sont appelées des variables naturelles. La réponse mesurée Y appelée réponse expérimentale est différente par rapport à la réponse calculée ou estimée, différence due à l'erreur aléatoire (expérimentale) :

$$Y = F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p) + \varepsilon \qquad Eq. \ 2-5$$

où ε représente l'erreur aléatoire ou résidu, qui regroupe l'erreur d'ajustement et l'erreur expérimentale, inhérente dans le déroulement d'un processus ou fonctionnement d'un système et il est considéré comme erreur statistique qui suit une distribution normale d'une moyenne nulle et d'une variance s^2 . Les variables $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p$ sont les variables codées correspondantes aux variables réelles. Dans la plupart des cas, le modèle mathématique (la fonction F) est une approximation de la réponse mesurée Y, il est souvent un modèle polynomial du premier ou du deuxième degré.

En première étape, une recherche principale du sens de l'effet des facteurs ainsi que son ordre de grandeur est nécessaire. La table L_{12} [14] de Taguchi (Tableau 2-5) permet d'étudier jusqu'à 11 facteurs (X_i, *i* = 1..11) à 2 niveaux en 12 essais. Dans cette présente étude, il suffit de prendre en compte seulement 5 facteurs et réaliser 12 essais. Il est question donc de dégrossir le problème et avoir une idée sur la sensibilité de chaque facteur même s'il est fort probable que le modèle linéaire du 1^{er} degré ne sera pas le bon pour exprimer les caractéristiques choc et acoustique en fonction des paramètres machine d'injection de la mousse plastique, ceci est dû en effet à la complexité de la transformation de l'état du mélange à l'état fondu (chaleur, cisaillement, séjour dans le fourreau, pression, choc thermique dans le moule,...). Bien évidemment, les deux niveaux des facteurs dans la table de Taguchi sont les limites inférieure et supérieure.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

Tableau 2-5 : Table L₁₂ de Taguchi

D'un autre côté, les plans composites centrés sont un bon complément des plans orthogonaux, de par leurs propriétés statistiques, mais aussi parce qu'ils sont meilleurs que les plans orthogonaux sur certains problèmes. Ils permettent d'étudier un modèle quadratique, compte tenu d'une non linéarité forte du phénomène étudié. Tous les facteurs pour lesquels on souhaite tester l'influence quadratique auront, dans ce cas, 5 niveaux (5 modalités). Les plans composites centraux sont constitués de trois parties, ce qui permet une démarche séquentielle. La première partie correspond au point au centre du domaine expérimental, noté « 0 » répété plusieurs (n_0) fois pour estimer la variance de la répétabilité. La deuxième partie concerne un plan orthogonal en N essais, qui est le plus souvent un plan factoriel (complet ou fractionnel) ou un plan Box et Hunter de résolution 5, et qui combine des facteurs à 2 niveaux notés +1 et -1. C'est lui qui permet l'analyse des interactions, il détermine le modèle mathématique. La dernière partie contient ce qu'on appelle « les points en étoile », ces points représentent 2 essais par facteur, notés –d et +d.

Pour prédire la réponse du système, il est souvent commode d'utiliser des valeurs codées pour les variables, par -1 représentant le niveau bas et le +1 le niveau élevé. La relation entre les deux variables (naturelles et codées) est :

$$\xi_i = \frac{x_i - x_{i0}}{d_i} \qquad \qquad Eq. \ 2-6$$

où x_i est la variable réelle exprimée en unités naturelles de mesure, et ξ_i est la variable codée de la variable réelle, x_{i0} est la variable naturelle correspondant au niveau 0, et d_i est la différence entre les niveaux de chaque variable. Les niveaux sont données dans le tableau 2-6.

Niveau	Valeurs réelles					
-2	Min					
-1	$\frac{Min+Max}{2} - \frac{1}{d} \left(Max - \frac{Min+Max}{2} \right)$					
0	$\frac{Min + Max}{2}$					
1	$\frac{Min + Max}{2} + \frac{1}{d} \left(Max - \frac{Min + Max}{2} \right)$					
+2	Max					

Tableau 2-6 : Les relations de calcul des niveaux codés

Dans le même tableau, le paramètre *d*, qui est fonction du critère d'optimalité, est supérieur à 1 et est calculée grâce à la formule :

$$=\sqrt[4]{N}$$
 Eq. 2-7

où N - nombre d'essais du Plan Fractionnaire = 16 et donc d = 2. Les limites inférieures et supérieures prennent les niveaux codés -2 et +2 et les niveaux -1, 0 et +1 sont obtenus à partir des relations dans le tableau 2-6.

d

Dans cette étude les plans d'expériences sont utilisés pour déceler l'influence des paramètres opératoires sur le processus d'injection des mousses plastiques. Pour rappeler, ces paramètres sont : Température d'injection $(T_{inj}) : X_1$ (°C), Température du moule $(T_m) : X_2$ (°C), Contre pression (CP) : X_3 (bars), Vitesse d'injection $(V_{inj}) : X_4$

Nive	au		Fa	acteu	\mathbf{rs}	
Normal	Codé	T_{inj}	T_m	CP	$V_{\scriptscriptstyle inj}$	V_{dos}
1	-2	200	20	10	90	90
2	-1	212.5	27.5	15	117.5	115
3	0	225	35	20	145	140
4	1	237.5	42.5	25	172.5	165
5	+2	250	50	30	200	190

 (cm^3/s) et Vitesse du dosage (V_{dos}) : X_5 (tr/min). Les valeurs des niveaux de chaque paramètre sont données dans le tableau 2.7.

		Va	leurs codée	es	
Essai	T_{inj}	T_m	CP	$V_{\scriptscriptstyle inj}$	V_{dos}
1	1	-1	-1	-1	-1
2	-1	1	-1	-1	-1
3	-1	-1	1	-1	-1
4	1	1	1	-1	-1
5	-1	-1	-1	1	-1
6	1	1	-1	1	-1
7	1	-1	1	1	-1
8	-1	1	1	1	-1
9	-1	-1	-1	-1	1
10	1	1	-1	-1	1
11	1	-1	1	-1	1
12	-1	1	1	-1	1
13	1	-1	-1	1	1
14	-1	1	-1	1	1
15	-1	-1	1	1	1
16	1	1	1	1	1
17	-2	0	0	0	0
18	2	0	0	0	0
19	0	-2	0	0	0
20	0	2	0	0	0
21	0	0	-2	0	0
22	0	0	2	0	0
23	0	0	0	-2	0
24	0	0	0	2	0
25	0	0	0	0	-2
26	0	0	0	0	2
27	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0

Tableau 2-7: Les niveaux des facteurs étudiés

Tableau 2-8 : Plan Composite Centré pour 5 facteurs

Concernant le nombre d'essais au centre ; il est fixé à 10 pour assurer l'orthogonalité du plan composite. La matrice d'expérience pour le plan composite centré est présentée dans le tableau 2-8. Une fois les essais réalisés, la recherche des paramètres influents et leurs coefficients se fait sur le logiciel Lumière®. Ces inconnus permettront de définir le modèle et donc bien exprimer les caractéristiques choc et acoustique des mousses PEBD injectées. L'aptitude des modèles à prédire les caractéristiques de la mousse en fonction des paramètres influents est vérifiée en réalisant des essais expérimentaux en donnant aux facteurs leurs valeurs centrées ($X_i = 0$, i = 1..5).

2.5. Méta-Modèles Choc et Acoustique

Il s'agit de trouver le modèle approprié exprimant les sorties (densité de la moulée, densité de la mousse, coefficients d'absorption du choc et acoustique) en fonction des paramètres procédé influents (T_{inj} , T_m , CP, V_{inj} et V_{dos}). Ainsi, l'étude de la table de Taguchi, permettant l'étude du modèle linéaire du premier degré sans interactions, est analysée en premier temps. Puis, des modèles plus compliqués sont exploités dès l'observation de la non linéarité du comportement choc et acoustique des mousses obtenues par injection.

2.5.1. Table de Taguchi

La table de Taguchi (Tableau 2-9) permet de rechercher les paramètres procédé influents et leurs coefficients satisfaisant la relation suivante :

$$Y = a_0 + \sum_i a_i X_i \qquad Eq. \ 2-8$$

où Y définit une caractéristique, X_i les entrées, a_i les coefficients de X_i et a_0 est la constante du modèle.

N°	А	В	С	D	Е
1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	+1	+1	+1
4	-1	+1	-1	+1	+1
5	-1	+1	+1	-1	+1
6	-1	+1	+1	+1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1
8	+1	-1	+1	-1	+1
9	+1	-1	-1	+1	+1
10	+1	+1	+1	-1	-1
11	+1	+1	-1	+1	-1
12	+1	+1	-1	-1	+1

Tableau 2-9 : Table de Taguchi L12 appliquée dans cette étude

Sur la base des résultats d'investigations menées, les analyses statistiques ont été évalués en utilisant Lumière® qui détermine les constantes a_i et a_0 du modèle, et les facteurs influents pour chaque sortie. Le tableau 2-10 donne les facteurs influents et leurs coefficients pour quelques caractéristiques de la mousse PEBD. Ces données permettent de définir les modèles exprimant, par exemple, le coefficient d'absorption du choc en fonction des paramètres de mise en forme influents, selon un modèle linéaire sans interactions. Dans ce cas, la température d'injection, la température du moule et la contre pression sont les facteurs influents sur cette caractéristique. Le modèle linéaire de cette dernière, avec une confiance de 90 %, a la forme suivante :

shock		inj 0	.00 IVI m	0.0207.01	-		Шç
	a 0	T_{inj}	T_m	CP	V_{inj}	V_{dos}	-
d_m	0.172	-	-	-0.006	-	-	-
$lpha_{shock}$	0.679	-0.027	-0.034	-0.028	-	-	
α (954 Hz)	0.183	-	-	-	-	-	
α (1330 Hz	z) 0.253	-	-	-	-	-	_

 $\alpha_{shock} = 0.679 - 0.027 \times T_{ini} - 0.034 \times T_m - 0.028 \times CP \qquad Eq. \ 2-9$

Tableau 2-10 : Facteurs influents et leurs coefficients

Ainsi, les coefficients a_i obtenus (Tableau 2-10) permettent la détermination des valeurs des caractéristiques de la mousse à n'importe quel point de l'espace de conception (limité par les valeurs des paramètres d'entrée). Les valeurs des coefficients d'ajustement sont bien élevées (supérieures à 0.9), ce qui prouve que les équations des modèles décrivent proprement (avec une petite déviation) la dépendance entre les valeurs des caractéristiques de la mousse et les paramètres du procédé d'injection.

Pour vérifier l'aptitude du modèle linéaire à prédire les caractéristiques de la mousse en fonction des entrées du procédé, des tests expérimentaux (injection des pièces, essais de choc et acoustique) sont réalisés en prenant les valeurs centrées des facteurs d'entrée $(T_{inj} = T_m = CP = V_{inj} = V_{dos} = 0)$. Puis, une comparaison est effectuée entre les résultats expérimentaux Y_{exp} et les résultats théoriques Y_{theo} qui sont obtenus à partir de l'équation ci-dessus en prenant 0 comme valeur des facteurs, ceci pour observer si Y_{theo} est un nombre appartement à l'intervalle $[Y_{exp} - 2\sigma, Y_{exp} + 2\sigma]$ où σ est l'écart type expérimental. Quand cette condition est vérifiée, le modèle théorique est considéré comme représentatif des données expérimentales. Sinon, il est nécessaire de chercher le modèle approprié (linéaire avec interactions voir polynomial du 2nd degré). En tenant compte des informations dans le tableau 2-11, le modèle linéaire ne représente pas correctement les sorties en fonction des facteurs dans l'espace de conception. Dans le cas des valeurs centrées des entrées, le coefficient d'absorption de choc est 0.679. Cette valeur n'appartient pas à l'intervalle |0.569 - 0.572|; intervalle définissant les valeurs expérimentales du coefficient d'absorption du choc déterminées en valeurs centrées des paramètres du procédé. En conclusion, le modèle du 1^{er} degré ne présente pas correctement le comportement choc des mousses plastiques obtenues par injection, en fonction des paramètres du procédé.

	Valeur	Valeur
	théorique	expérimentale
d_m	0.172	[0.148 - 0.169]
$lpha_{shock}$	0.679	[0.569 - 0.572]
α (954 Hz)	0.183	[0.138 - 0.159]
α (1330 Hz)	0.253	[0.185 - 0.202]

Tableau 2-11 : Valeurs des caractéristiques de la mousse dans le cas de valeurs centrées des paramètres procédé

Les figures 2-26 présentent l'évolution de quelques caractéristiques de la mousse en fonction d'un des paramètres d'injection influents tout en fixant le reste des variables. La linéarité du modèle du coefficient d'absorption du choc en fonction de la température du moule est présentée dans la figure 2-26-c, ainsi que le point de validation (valeur du coefficient en prenant les valeurs centrées des paramètres procédé). Ce point de validation est loin d'appartenir à la présentation du modèle théorique ce qui permet de conclure que le modèle est non linéaire.



Figure 2-26 : Vérification du modèle linéaire du 1^{er} degré

Afin de trouver les modèles appropriés, de nouveaux essais ont été réalisés dans l'ordre d'enrichir l'espace d'information. Ainsi, le plan composite centré est utilisé où les essais réalisés pour la table de Taguchi vont être utiles et récupérés pour construire la base de données.

2.5.2. Plan Composite Centré

Les essais réalisés dans la table de Taguchi ont été récupérés et complétés par d'autres pour la mise en place du plan composite. Ce type de table permet de tester les modèles suivants :

Modèle linéaire avec interactions :

$$Y = a_0 + \sum_{i} a_i X_i + \sum_{i} b_{ij} X_i X_j$$
 Eq. 2-10

Modèle quadratique sans interactions :

$$Y = a_0 + \sum_{i} a_i X_i^2$$
 Eq. 2-11

Modèle quadratique avec interactions :

$$Y = a_0 + \sum_{i} a_i X_i + \sum_{i} b_{ij} X_i X_j + \sum_{j} c_j X_j^2$$
 Eq. 2-12

Le modèle choisi est celui qui vérifie la validation des essais en prenant des valeurs centrées pour les facteurs procédé (Tableau 2-7). En tenant compte des informations dans le tableau 2-12, le modèle quadratique sans interactions représente correctement les sorties en fonction des facteurs dans l'espace de conception. Dans le cas des valeurs centrées des entrées, le coefficient d'absorption du choc est 0.5705. Cette valeur appartient à l'intervalle [0.569-0.572]; intervalle définissant les valeurs expérimentales du coefficient d'absorption du choc déterminées en valeurs centrées des paramètres du procédé. En conclusion, le modèle du 2nd degré présente correctement le comportement choc des mousses plastiques obtenues par injection, en fonction des paramètres du procédé.

	Valeur théorique	Valeur expérimentale
d	0.3484	[0.3403 - 0.351]
$d_{_m}$	0.1587	[0.148 - 0.169]
$lpha_{\scriptscriptstyle Shock}$	0.5705	[0.569 - 0.572]
$\alpha_{acous}(954Hz)$	0.1442	[0.138-0.159]
$\alpha_{acous}(1330Hz)$	0.1931	[0.185 - 0.202]

Tableau 2-12 : Validation du modèle quadratique sans interactions

La densité de la mousse dépend de la température d'injection, de la contre pression, de la vitesse d'injection et de la vitesse de rotation de la vis (de dosage ou de plastification). Le méta-modèle s'écrit sous la forme suivante :

$$d_m = 0.1587 + 0.001 \times T_{inj} - 0.0059 \times CP + 0.0012 \times V_{inj} + 0.0075 \times CP^2 + 0.0127 \times V_{dos}^2 \qquad Eq.$$
2-13

La densité de la mousse augmente avec la vitesse d'injection, en effet un remplissage rapide du moule permet un refroidissement rapide et donc favorise l'élévation de la densité de la mousse. La même interprétation pour la température d'injection qui évolue dans le même sens que la densité de la mousse. D'un autre côté, l'augmentation de la vitesse de dosage et de la contre pression provoque en premier temps une diminution de la mousse quand $-2 \le CP, V_{dos} \le 0$ densité de la \mathbf{et} une augmentation quand $0 \le CP, V_{dos} \le +2$. L'expression de ce modèle permet d'hiérarchiser les facteurs. Effectivement, la vitesse de dosage et puis la contre pression ont le plus d'effet sur la densité de la mousse grâce aux valeurs significatives de leurs coefficients respectifs. Il parait aussi que ces deux paramètres du procédé favorisent aussi les coefficients d'absorption du choc et acoustique dont les expressions sont les suivantes :

$$\alpha_{shock} = 0.5658 - 0.0126 \times T_m + 0.0141 \times CP^2 + 0.0171 \times (V_{dos} + 0.5234)^2 \qquad Eq. \ 2-14$$

$$\alpha_{acous}(f = 954Hz) = 0.1047 + 0.0161 \times T_m + 0.0203 \times V_{dos}^2 + 0.0035 \times (T_{inj} + 3.2428)^2 + 0.0203 \times (V_{inj} + 0.3645)^2 \qquad Eq. \ 2-15$$

L'augmentation de la vitesse d'injection provoque l'écrasement des alvéoles sur les parois du moule et donc une diminution du vide dans l'empreinte, une augmentation de la quantité de la matière nécessaire à injecter pour remplir le moule et donc une augmentation de la densité de la mousse. Le même phénomène est observé dans le cas du modèle de la densité de la moulée.

$$d = 0.3491 - 0.0101 \times T_{inj} - 0.0048 \times T_m - 0.013 \times CP^2 - 0.0132 \times (V_{inj} - 0.231)^2 \qquad Eq. \ 2-16$$

Les expressions mathématiques des caractéristiques des mousses plastiques en fonction des paramètres de mise en forme (injection plastique) permettent ainsi plus de maîtrise du procédé en vue d'obtention du produit désiré. Ainsi, il est facile de déterminer les paramètres du procédé adéquats pour la fabrication d'une mousse plastique ayant une telle et/ou une telle caractéristique.

Dans ce qui suit, les méta-modèles sont exploités en présentant les surfaces de réponse. Et afin de valider ces modèles, différents tests statistiques sont réalisés mais aussi la robustesse de ces modèles est étudiée.

2.5.3. Surface des réponses

Les surfaces de réponse sont des courbes de niveaux de réponses, c'est l'ensemble de points tel que :

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n) = \text{constante}$$
 Eq. 2-17

Ils permettent de trouver les conditions optimales dans un espace expérimental, en particulier trouver l'espace où la réponse satisfait une ou plusieurs restrictions. L'extrapolation en dehors de cet espace est hasardeuse et ceci est dû à l'absence de données expérimentales.

Caractéristique	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Axe X	Axe Y	Conditions imposées
d_{m}	0.16	0.18	0.20	$V_{\scriptscriptstyle inj}$	V _{dos}	$T_{inj} = T_m = CP = 0$
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	0.56	0.62	0.68	T_m	V_{dos}	$T_{inj} = V_{inj} = CP = 0$
$\alpha_{acous}(954Hz)$	0.10	0.15	0.20	T_{inj}	T_m	$V_{dos} = V_{inj} = CP = 0$
$\alpha_{acous}(1330Hz)$	0.22	0.31	0.40	$V_{\scriptscriptstyle inj}$	V_{dos}	$T_{inj} = T_m = CP = 0$

Tableau 2-13 : Surfaces de réponses de quelques caractéristiques de la mousse

Sur la figure 2-27, les surfaces de réponses sont présentées pour des cas particuliers de quelques unes des caractéristiques (Tableau 2-13) de la mousse PEBD.

Le coefficient d'absorption acoustique à 1330 Hz en fonction des paramètres du procédé d'injection influents est de la forme suivante :

$$\alpha_{acous}(f = 1330Hz) = 0.1931 + 0.0299 \times T_{inj} + 0.0388 \times T_m + 0.0192 \times V_{inj} + 0.0284 \times T_{inj}^2 + 0.0277 \times V_{inj}^2 + 0.0227 \times V_{dos}^2$$
 Eq. 2-18

Les surfaces de réponse pour ce coefficient sont présentées dans le cas où $T_{ini} = T_m = CP = 0$ pour 3 niveaux de réponse $\alpha_{acous}(f = 1330Hz) = 0.22, 0.31, 0.40$.



Figure 2-27 : Surfaces de réponse

Si $\alpha_{acous}(f = 1330Hz) = 0.40$, le modèle aura cette forme :

$$0.2069 = 0.0192 \times V_{inj} + 0.0277 \times V_{inj}^{2} + 0.0227 \times V_{dos}^{2}$$

qui pourra être mis sous la forme suivante :

$$\frac{V_{dos}^2}{3.04^2} + \frac{\left(V_{inj} + 0.35\right)^2}{2.75^2} = 1$$
 Eq. 2-19

Ainsi, la surface de réponse a la forme d'une ellipse de centre(0,-0.35), 3.04 étant la valeur du grand demi axe et 2.75 la valeur du petit demi axe.

La régression multilinéaire (RML) est une approche appliquée pour chercher des modèles validés. Le choix des facteurs d'entrée et de sortie est la première de cette approche. Les facteurs influents et l'identification de leur modèle (calcul des coefficients) constituent l'étape suivante avant de procéder la validation statistique. Dans la section suivante, quelques tests ont été vérifiés afin de compléter la procédure de la RML.

2.6. Tests de Validation

La vérification de la normalité de la distribution des erreurs est le premier test de validation du modèle (Figure 2-28). Il consiste à vérifier si la distribution des erreurs (différence entre les données expérimentales et théoriques) respecte une loi normale afin de conclure que les erreurs sont aléatoires.



Figure 2-28 : Déroulement de la RML

Vient ensuite la validité globale du modèle et ceci par un test sur les variances et un autre sur les écart-types (respectivement intrinsèque et extrinsèque). Ensuite, pour chaque modèle (caractéristique) et pour chacun de ses coefficients, il est nécessaire d'étudier leurs significations : test des coefficients significatifs. Et pour terminer, l'accent est mis sur la robustesse de ces modèles, pour ceci la robustesse au sens de Taguchi a été employé afin d'évaluer la sensibilité des modèles aux facteurs de bruit du système.

2.6.1. Vérification de la normalité de la distribution des erreurs

Les modèles mathématiques sont élaborés à partir des résultats des tests. Toute l'information contenue dans ces résultats peut ne pas être exprimée par ce modèle. L'analyse des erreurs permet de résoudre cette problématique. Pour chacun des caractéristiques du plan d'expériences, la réponse théorique et le résidu (différence entre la réponse théorique et expérimentale) sont calculés. Dans cette étude, seulement 5 paramètres du procédé d'injection ont été pris en compte et c'est ainsi que les erreurs sont attendues à ce qu'elles proviennent de la sensibilité du procédé des facteurs ignorés (par exemple, le temps de séjour de la matière fondu dans le fourreau, épaisseur du moule, proportion du mélange maître,...). L'hypothèse de normalité est vérifiée par deux tests : test de Chi2 et test de Shapiro et Wilk que leurs efficacités augmentent avec le nombre des résultats expérimentaux. La normalité de la distribution des erreurs est analysée sur Lumière®.

2.6.1.1. Test de CHI2

Si $n_i(obs)$ est le nombre d'individus observés dans chacune des k classes, à l'aide de la moyenne et de l'écart type calculés sur l'échantillon ainsi que de la table de loi Normale, le nombre théorique d'individus dans chaque classe peut être calculé [15].

Si $l_i = \mathrm{extrémité}$ gauche de la $i^{\grave{e}me}$ classe, $1 \leq i \leq k$, alors :

$$\begin{cases} n_1^T = F\left(\frac{l_2 - \overline{y}}{s}\right) \\ n_i^T = F\left(\frac{l_{i+1} - \overline{y}}{s}\right) - F\left(\frac{l_i - \overline{y}}{s}\right) \text{ si } 2 \le i \le k - 1 \\ n_k^T = F\left(\frac{l_k - \overline{y}}{s}\right) \end{cases}$$

Ainsi, sous l'hypothèse de normalité, la quantité $\chi^2_{OBS} = \sum_{i=1}^k \frac{\left(n_i^{OBS} - n_i^T\right)^2}{n_i^T}$ suit une χ^2 à

(k-3) ddl.

2.6.1.2. Test de Shapiro et Wilk

Le test de Shapiro et Wilk [15] constitue une quantification du test de la droite de Henry. Il consiste à vérifier que les segments joignant les points symétriques par rapport à la médiane ont des pentes sensiblement égales à celle de la droite d'ajustement du nuage total des n points. Pour une série statistique formée de n valeurs classées par ordre croissant :

$$y_1 \le y_2 \le \dots \le y_{n-1} \le y_n$$

La statistique du test est :

$$W_{OBS} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} a_{j} d_{j}\right)^{2}}{\sum_{i=1}^{n} (y_{i} - \overline{y})^{2}} \qquad Eq. \ 2-21$$

où les coefficients a_j sont donnés par la table de Shapiro et Wilk, \overline{y} est la moyenne de la série : $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$, d_i définit comme suit :

$$d_1 = y_n - y_1$$

$$d_2 = y_{n-1} - y_2$$

$$d_i = y_{n-i+1} - y_i$$

Le nombre de ces différences est égal à la partie entière de $\frac{n}{2}$. Sin = 2p, il y aura p différences. Si n = 2p+1, il y aura aussi p différences, l'observation médiane n'étant pas utilisée.

La figure 2-29 présente les résultats pour quelques caractéristiques (d_m , α_{shock} , α_{acous} (954 Hz) et α_{acous} (1330 Hz)). La figure 2-29-a, par exemple, illustre la fréquence des erreurs des 36 configurations du plan composite centré en les répartissant dans 6 classes. L'axe Y est celui du nombre de configurations pour chaque classe alors que l'axe X indique la valeur de chaque intervalle d'erreur caractérisant chacune des 6 classes. La courbe continue est une approximation de la distribution des erreurs suivant une loi normale. Dans le cas de la densité de la mousse, la distribution des erreurs suit une loi normale donc les erreurs sont aléatoires.



Figure 2-29 : Normalité des erreurs

2.6.2. Test intrinsèque

L'objectif de ce test est de déterminer s'il y a bien une relation linéaire entre la réponse Y et une partie des variables $x_1, ..., x_n$. Les deux hypothèses à comparer pour ce test sont les suivantes :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_n = 0,$$

$$H_1: \beta_i \neq 0 \text{ pour au moins un } j$$

Si l'hypothèse H_0 est rejetée, alors au moins une des variables explique significativement la variabilité observée sur la réponse Y et donc le modèle est valide. La mise en place de ce test implique une partition de la somme du carré des écarts des observations à la moyenne, par la somme du carré des écarts des estimations du modèle à la moyenne et la somme du carré des erreurs. Ainsi, nous avons :

$$ST = SE + SR$$
 Eq. 2-22

Avec *ST* la somme du carré des écarts des observations à la moyenne : $ST = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$

qui est supposé représenter la variabilité totale de la réponse, avec n-1 degrés de liberté. SE la somme du carré des écarts des estimations du modèle à la moyenne : $SE = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2$ qui représente la variabilité expliquée par le modèle, avec k degrés de liberté. SR la somme du carré des écarts qui est supposée être la variabilité non expliquée par le modèle de régression, avec (n - k - 1) degrés de liberté. Et \overline{Y} l'estimation de la moyenne de la réponse donnée par : $\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

La régression peut être considérée comme globalement significative, si la somme des carrés expliquée est significativement plus grande que la somme des carrés des résidus. Cette hypothèse se base sur le test de Fisher avec le calcul de la valeur notée F_{obs} :

$$F_{obs} = \frac{SE/k}{SR/n - k - 1} \qquad \qquad Eq. \ 2-23$$

Le ratio permet de comparer le F_{obs} avec la valeur théorique lue dans une table (notée F_{crit}) avec k ddl au numérateur et n-k-1 ddl au dénominateur. Si $F_{obs} \ge F_{crit}$ alors H_0 est rejetée et la régression est significative. Sinon, il convient de supprimer certains facteurs non significatifs et de recommencer le test. Cette procédure est souvent appelée analyse de variance. L'analyse de la variance a pour but de calculer des statistiques permettant une meilleure compréhension de la qualité du modèle.

	SR	n-k-1	SE	k	F_{obs}	F _{crit}	Confiance
d_m	0.007	30	0.008	5	6.87	2.53	100~%
$lpha_{_{shock}}$	0.04	31	0.03	3	6.42	2.92	99.53%
α_{acous} (954 Hz)	0.05	29	0.05	6	4.56	2.43	99.91%
α_{acous} (1330 <i>Hz</i>)	0.08	29	0.15	6	8.92	2.43	99.96%

Tableau 2-14 : Test intrinsèque

Le tableau 2-14 décrit l'analyse de variance pour certaines des caractéristiques de la mousse polyéthylène. Les valeurs de *SR*, *SE* et leurs degrés de liberté sont données. F_{obs} est calculé suivant la formule donnée ci-dessus. Par exemple, la somme du carré des écarts est égale à 0.007 avec 30 *ddl*, la somme des carrés expliquée par la régression connue est de 0.008 avec 5 *ddl*. La valeur théorique F_{crit} avec 30 *ddl* au numérateur et 5 *ddl* au dénominateur est de 2.53, une valeur inférieure à $F_{obs} = 6.87$ d'où la régression est significative.

2.6.3. Test extrinsèque

Ce test complète le test intrinsèque, il repose sur la comparaison de l'écart type résiduel S_r avec une estimation de l'écart type de mesure S_0 pour savoir si le modèle défini par les coefficients a_i est totalement explicite. Pour ceci, un ratio est définit :

$$F_{obs} = \left(\frac{S_r}{S_0}\right)^2 \qquad \qquad Eq. \ 2-24$$

Où $S_r = \sqrt{\frac{SR}{n-k-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2 / n-k-1}$. Ce ratio permet de comparer le F_{obs} avec le F_{crit}

lu dans une table avec k ddl au numérateur et n-k-1 au dénominateur. Si $F_{obs} \leq F_{crit}$ alors

le modèle est totalement explicatif. Sinon, le modèle testé a un biais, alors il faut introduire d'autres variables, d'autres fonctions... Le tableau suivant donne le nombre de répétitions des essais pour chaque caractéristique mesurée dans le plan d'expériences.

Caractáristiqua	Nombre de
Caracteristique	répétitions
d	10
$d_{_m}$	5
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	4
$lpha_{acous}$	4

Tableau 2-15 : Nombre de répétitions d'essais pour chaque caractéristique

Ainsi, le calcul de l'écart type de mesure S_0 est déterminé selon le principe de combinaison de la variance : la variance peut être estimée pour plusieurs échantillons représentatifs. Si p est le nombre d'échantillons et si l'échantillon i donne n_i valeurs et $\overline{x_i}$ la moyenne, il en résulte une estimation s_i^2 de σ^2 avec $v_i = n_i - 1$ ddl. Chaque échantillon donne une estimation de la variance, et donc p estimations de σ^2 à fusionner dans une seule estimation s^2 tel que :

$$s^{2} = \frac{V_{1}s_{1}^{2} + V_{2}s_{2}^{2} + \dots + V_{p}s_{p}^{2}}{V_{1} + V_{2} + \dots + V_{p}} \qquad Eq. \ 2-25$$

	S _r	n-k-1	S_0	k	F_{obs}	F _{crit}	Confiance
d_m	0.014	30	0.015	287	0.87	1.62	100%
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	0.04	31	0.035	143	1.3	1.7	99.71%
$\alpha_{acous}(954 Hz)$	0.04	29	0.032	107	1.56	1.71	99.83%
α_{acous} (1330 Hz)	0.05	29	0.039	107	1.64	1.71	99.93%

Tableau 2-16 : Test extrinsèque

Le tableau ci-dessus présente les valeurs de S_r et S_0 et leurs degrés de liberté. F_{osb} est calculé selon l'équation ci-dessus. Par exemple, dans le cas du coefficient d'absorption acoustique à 954 Hz, l'écart type résiduel est égal à 0.04 avec 29 *ddl*, l'écart type de mesure estimé est de 0.032 avec 107 *ddl*. La valeur théorique, prise de la table de Fisher (F_{crit}) avec 107 et 29 *ddl* respectivement au numérateur et au dénominateur, est de 1.71. Finalement, la condition $F_{obs} \leq F_{crit}$ est vérifiée et donc le modèle est explicatif.

2.6.4. Test des coefficients significatifs

Après avoir testé la validité globale du modèle, chaque coefficient de chacun des modèles doit être testé et vérifié l'hypothèse de sa nullité éventuelle. Chaque coefficient est assorti d'un écart type S_{a_i} permettant de calculer le ratio $t_{obs} = \frac{a_i}{S_{a_i}}$ afin de le comparer à un paramètre d'une table t_{crit} à *n-k-1 ddl*. Si $t_{obs} \ge t_{crit}$ alors le coefficient est significatif.

Ce test doit être utilisé avec précaution car le résultat dépend de la présence des autres termes dans le modèle. En effet, supprimer un terme du modèle peut changer les résultats pour les autres termes. Ainsi, ce test doit être réalisé séquentiellement, en enlevant un terme après l'autre et en suivant l'évolution des qualités de l'approximation.

Le tableau 2-17 donne le résultat de ce test appliqué à la densité de la mousse et les coefficients d'absorption du choc et acoustique. Les valeurs et les écarts type de la constante et des coefficients des facteurs des modèles sont donnés et c'est à partir de ces quantités que t_{obs} est calculé et comparé à t_{crit} . Dans le cas de α_{shock} , le coefficient de V_{dos} est 0.0179. L'écart type correspondant à ce coefficient est égal à 0.0067 avec 31 *ddl*. La condition $t_{obs} \geq t_{crit}$ est vérifiée puisque t_{crit} , déterminé à partir d'une table, est égal à 1.697, donc le coefficient est significatif.

	Facteurs	Coefficient	Ecart type	t_{obs}	n - k - 1	t _{crit}
	Constante	0.1587	0.0036	44.08		
(a) d_m	T_{inj}	0.001	0.0004	2.32		
	СР	-0.0059	0.002	2.9	2.2	1 00 -
	$V_{\scriptscriptstyle inj}$	0.0012	0.0005	2.38	30	1.697
	CP^2	0.0075	0.0027	2.77		
	V_{dos}^2	0.0127	0.0027	4.7		

	Facteurs	Coefficient	Ecart type	t _{obs}	n - k - 1	t _{crit}
	Constante	0.5705	0.0089	64.1		
(b)	T_m	-0.0126	0.0047	2.63		
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	V_{dos}	0.0179	0.0077	2.32	31	1.697
	CP^2	0.0141	0.0067	2.1		
	V_{dos}^{2}	0.0171	0.0067	2.55		

Facteurs	Coefficient	Ecart type	t _{obs}	n - k - 1	t _{crit}
Constante	0.1442	0.0113	12.76		
T_{inj}	0.0227	0.0088	2.58		
T_m	0.0161	0.0088	1.83		
V_{inj}	0.0148	0.0078	1.89	29	1.699
T_{inj}^2	0.0035	0.0014	2.46		
V_{inj}^{2}	0.0203	0.0076	2.67		
V_{dos}^{2}	0.0203	0.0076	2.67		

(c) $\alpha_{acous}(954Hz)$

	Facteurs	Coefficient	Ecart type	t _{obs}	n - k - 1	t _{crit}
(d) $\alpha_{acous}(1330Hz)$	Constante	0.1931	0.0156	12.37		
	T_{inj} T_m $0Hz)$ V_{inj}	0.0299	0.012	2.49		
		0.0338	0.012	3.23		
		0.0192	0.01	1.92	29	1.699
	T_{inj}^2	0.0284	0.0104	2.73		
	$V_{\scriptscriptstyle inj}^{2}$	0.0277	0.0277 0.0104 2.66			
	V_{dos}^{2}	0.0227	0.0104	2.18		

Tableau 2-17: Test des coefficients significatifs

2.6.5. Robustesse des modèles au sens de Taguchi

L'objectif de la conception robuste [16-17] est de réduire les variations des performances d'un système engendrées par des valeurs incertaines des facteurs de bruit et ainsi de réduire la sensibilité du système. Les solutions envisagées cherchent ainsi à minimiser les variations des réponses tout en atteignant les cibles de performance (Tableau 2-18).

Caractéristique	Objectif
d et d_m	Minimiser
$lpha_{\scriptscriptstyle Shock}$ et $lpha_{\scriptscriptstyle acous}$	maximiser

Tableau 2-18 : Cibles des caractéristiques

Minimiser d et d_m revient à minimiser le coût de fabrication alors que pour avoir des meilleures caractéristiques vibro-acoustiques de la mousse, on cherche à maximiser les coefficients d'absorption acoustique. Dans les deux cas (minimisation et maximisation), le rôle utilisé du rapport Signal/Bruit (S/N) est identique. L'optimisation économique d'un système va configurer les facteurs principaux de telle façon à ce qu'ils maximisent le rapport S/N. Pour chaque modèle, le rapport S/N est déterminé en fonction des paramètres machine et l'évolution de ces facteurs est étudiée en maximisant S/N. En même temps, les évolutions des paramètres sont évaluées en optimisant (minimisant ou maximisant) les modèles caractérisant la mousse injectée.

Les tableaux 2-19 montrent l'évolution des paramètres influents afin d'optimiser les caractéristiques de la mousse structurelle. La troisième ligne de ces tableaux illustre l'évolution de ces facteurs en maximisant le rapport Signal/Bruit. Par exemple, dans le cas de minimisation de la densité de la mousse, la température d'injection et la vitesse d'injection devraient diminuer vers leurs limites inférieures, la contre-pression et la vitesse de dosage augmentaient respectivement vers 0.39 et 0 (valeurs codées). Pour la maximisation du rapport Signal/Bruit, il suffirait d'élever respectivement la contre-pression et la vitesse de dosage jusqu'à 0.39 et 0. Finalement, le modèle de la densité de la mousse n'est pas sensible aux facteurs de bruit.

	(a)	T_{inj}	T_m	СР	$V_{_{inj}}$	V_{dos}	_
	d_{m}	\searrow^2		★ +0.39	▶-2	▶ +0	-
	S/N			+0.39		▶ +0	-
(b)	T _{inj}	T_m		СР		V _{inj}	V_{dos}
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	► ⁻²	► ⁻²	► ⁻²	≯ +2			≠ +2
S/N		-2			▶ 0	▶ 0	
(c)	T _{inj}	T_m		СР	V_{inj}		V _{dos}
$lpha_{_{acous}}$	≠ +2	≠ +2	≠0.57	~ 0.57	≠ +2	-2	≠ +2
S/N	/ +2	/ +2			≯ +2	► ⁻²	▶ +2
(d)	T _{inj}	T_m		СР	$V_{\scriptscriptstyle inj}$		V _{dos}
α_{acous}	▶ +2	≠ +2			▶ +2	-2	★ +2
S/N	★ +2	★ +2	> 0	▶ 0	★ +2	-2	★ +2

Tableau 2-19 : Evolution des paramètres dans les modèles et leurs rapports Signal/Bruit a) d_m , b) α_{shock} , c) $\alpha_{acous}(954Hz)$, d) $\alpha_{acous}(1330Hz)$

2.7. Conclusions

L'identification des relations entre les conditions de transformation (paramètres de mise en oeuvre) et les performances finales d'un produit constitue un volet de recherche bien répandu et aussi important pour les industriels dans le but de maîtriser le procédé mais aussi le gain du temps et un moindre coût. D'un autre côté, afin de répondre à la demande croissante en certains matériaux, et d'améliorer leurs propriétés, la science et l'industrie ont conçu et développé de nouveaux matériaux pour assurer le confort de tous les jours. Ces matériaux sont connus sous le nom de plastiques alvéolaires, mousses plastiques ou matériaux cellulaires. Les procédés de mise en forme sont nombreux et répandus à l'échelle industrielle : extrusion, compression et injection. Ce dernier, malgré sa célébrité en parlant d'un produit fini en plastique compact, est peu répandu et le moins maîtrisé pour la fabrication d'une pièce en mousse plastique. Ainsi, dans ce chapitre, on a recherché les meilleurs modèles empiriques exprimant les caractéristiques d'une mousse polymère en fonction des paramètres de mise en forme. Le procédé étudié est l'injection. Le polyéthylène basse densité est utilisé comme matrice et le bicarbonate de soude comme agent gonflant. Les paramètres du procédé (facteurs d'entrée) sont : la température d'injection, la température du moule, la contre pression, la vitesse d'injection et la vitesse de rotation de la vis pendant la phase de plastification. Les caractéristiques de la mousse sont : la densité, le coefficient d'absorption du choc et le coefficient d'absorption acoustique. Les plans d'expériences sont utilisés pour la recherche des méta-modèles via le logiciel Lumière[®].

Les modèles ont la forme d'un polynôme du second degré sans interactions. En premier temps, les modèles sont validés en réalisant des essais sur des échantillons dont les paramètres d'injection sont à leurs valeurs centrées. En second temps, des tests statistiques sur la variance, l'écart type et la normalité des erreurs, sont analysés. Et pour finir, la robustesse de ces modèles est étudiée en se basant sur la théorie de Taguchi.

Pour une bonne compréhension des performances des matériaux poreux, une connaissance approfondie de ces produits apparaît par conséquence essentielle. Des lois de comportement existent dans la littérature. Elles s'expriment en fonction des caractéristiques intrinsèques et qu'à partir, il est possible de prédire les caractères absorbant du choc et acoustique. Ceci n'est possible que via la simulation numérique. Les deux chapitres suivants étudient profondément cette problématique. On cherchera donc à mettre en place des modèles empiriques exprimant les indicateurs choc et acoustique en fonction des caractéristiques du matériau poreux. La technique des plans d'expériences est utilisée et les essais sont déterministes (Simulation numérique).

Références

[1]: Q. B. Ding, P. Ainsworth, G. Tucker et H. Marson, *The effect of extrusions conditions on the physicochemical properties and sensory characteristics of rice-based expanded snacks*, Journal of Food Engineering, 66, 283-289, 2005.

[2] : H. S. Jeong et R. T. Toledo, *Twin-screw extrusion at low temperature with carbon dioxide injection to assist expansion : extrudate characteristics*, Journal of Food Enginnering, 63, 425-432, 2004.

[3] : K. CH. Guriya, A. K. Bhattachariya et D.K. Tripalty, *Rheological properties of ethylene propylene diene rubber (EPDM) compound - effect of blowing agent, curing agent and carbon black filler*, Polymer, Vol. 39 No. 1, pp. 109-115, 1998.

[4] : R. Grosselin et D. Rodrigue, *Cell morphology analysis of high density polymer foams*, Polymer Testing, 24, 1027-1035, 2005.

[5] : P. Postawa et J. Koszkul, *Change in injection moulded parts shrinkage and weight as a function of processing conditions*, Journal of Materials Processing Technology, 162-163, 109-115, 2005.

[6] : T. Nagaoka, U. S. Ishiaku, T. Tomari, H. Hamada et S. Takashima, *Effect of molding parameters on the properties of PP/PP sandwich injection moldings*, Polymer Testing, 24, 1062-1070, 2005.

[7] : J. J. Lee et S. W. Cha, *Influence of mould temperature on the thickness of a skin layer and impact strength in the microcellular injection moulding process*, Cellular Polymers, 24, 279-297, 2005.

[8] : R. Grosselin, *Injection de mousses composites bois/plastiques d'origine post-consommation*, Mémoire de fin d'études, Faculté des études supérieures de l'Université Laval, Juin 2005.

[9] : A. K. Bledzki et O. Faruk, *Microcellular wood fiber reinforced polypropylene composites : A comparative study between injection molding and extrusion process*, ANTEC Annual Technical Conference, 503, 2004.

[10] : P. Rachtanapun, S. M. Selke et L. M. Matuana, *Relationship between cell morphology and impact strength of microcellular foamed high-density polyethylene/polypropylene blends*, Polymer Engineering and Science, 44, 1551-1560, 2004.

[11] : C. A. Villamizar et C. D. Han, Studies on structural foam processing II, Bubble dynamic.

[12]: O. Pfannschmidt et W. Michaeli, *Foam injection molding of thermoplastics loaded with carbon dioxide prior to processing*, ANTEC Annual Technical Conference, 27, 1999.

[13] : H. Berthelot, *Comportement sous sollicitations dynamiques de composites sandwiches à âme mousse : Mécanismes d'endommagement*, PhD, N° d'ordre : 97-02, 1997.

[14] : M. Pillet, *Introduction aux plans d'expériences par la méthode Taguchi*, Les éditions d'organisation, ISBN : 2-7081-1442-5, 1992.

[15] : AFNOR, Application de la statistique, Etude de la normalité d'une distribution, NF X 06-050, Décembre 1991.

[16]: S. Durieux et H. Pierreval, *De la notion de robustesse dans les études de simulation*, 4^e Conférence Francophone de Modélisation et SIMulation, MOSIM'03, Toulouse (France), 23-24/04/2003.

[17] : C. Zang, M. I. Friswell et J. E. Mottershead., A review of robust optimal design and its application in dynamics, Computers and Structures, 83, 315 – 326, 2005.

3. Relations Produit – Performances : Modèles Microscopiques

3.1. Introduction

Dans le secteur automobile, la sécurité prend de l'ampleur depuis quelques années et les constructeurs automobiles s'investissent dans le développement des nouvelles technologies pour que leurs produits soient plus surs aux passagers. Plusieurs méthodes de réduction des dommages causés aux piétons ont été développées. L'un des ces systèmes est le "capot actif" (Figure 3-1), système de détection d'impact qui soulève le capot de quelques centimètres, permettant au capot de se déformer et d'absorber l'énergie de l'impact, tout en augmentant la distance entre la tête du piéton et les éléments rigides qui existent sous le capot et qui représentent un vrai risque pour la vie du piéton.



Figure 3-1 : Le capot actif



Figure 3-2 : L'airbag de protection des piétons

Un autre système (Figure 3-2) est l'airbag extérieur de protection des piétons (Pedestrian Protection Airbag). Le système comprend deux airbags qui sont situés dans la région entre le capot et le pare-brise, et il réduit considérablement le *HIC* (Head Injury Criterion).

L'utilisation de tels systèmes permettrait de réduire le problème de compromis choc/acoustique dans le choix des matériaux, en assouplissant les exigences liées au choc piéton, déjà traitées par le capot actif ou l'airbag piéton. Dans le contexte normatif actuel concernant à la fois le choc piéton et le bruit des véhicules, la sélection de matériaux offrant un bon compromis entre ces deux aspects pour la conception des capots est au coeur des préoccupations des constructeurs automobiles. Une voie possible est l'utilisation de matériaux poroélastiques collés sous le capot moteur (Figure 3-3), qui offrent une bonne dissipation de l'énergie en cas du choc, et une bonne atténuation des ondes acoustiques émises par le moteur.



Figure 3-3 : Schéma simplifié du capot moteur

Ainsi, une connaissance précise et approfondie du comportement des milieux poreux sollicités par une pression acoustique et une force ponctuelle, ainsi que de ses caractéristiques intrinsèques, apparaît par conséquent essentielle, non seulement afin de mieux maîtriser et d'optimiser leur utilisation, mais également de sélectionner les matériaux les plus adaptés à une application donnée. On propose ici de décrire les différentes formulations qui existent dans la littérature permettant d'étudier le comportement des tels milieux.

La première partie de ce chapitre définit les caractéristiques intrinsèques des matériaux poreux. En deuxième partie, la mise en équation du problème est réalisée, modélisant le comportement du milieu diphasique fluide-structure composant les milieux poreux. En effet, différentes lois macroscopiques ont vu la lumière permettant de caractériser ces milieux (fluide équivalent, Delany et Bazelet,...). On s'intéressera particulièrement aux milieux isotropes dont le squelette est rigide. Ensuite, on présente la théorie de la poroélasticité isotrope. En effet, Biot a mis en place un modèle miscroscopique permettant de caractériser les milieux fluide et structure des matériaux poreux. Deux formulations existent à cet effet : la formulation simple qui permet de déterminer les déplacements des milieux solide et fluide, et la formulation mixte déterminant le déplacement de squelette et la pression du fluide. Suite à cette théorie, plusieurs tentatives ont été mené pour modéliser la flexion d'une plaque poreuse. Ces formulations dérivent de la théorie de Biot, on en décrira celle de P. Leclaire, utilisée pour la détermination de l'indicateur du choc. Ce chapitre se termine par l'implémentation numérique, de la formulation mixte de Biot et la formulation de P. Leclaire pour la flexion, sur un code de calcul par éléments finis.

3.2. Caractérisation des Matériaux Poroélastiques

Les paramètres qui décrivent les matériaux poreux acoustiques peuvent être divisés en trois groupes caractérisant le fluide saturant, le comportement mécanique du squelette et les couplages (Figure 3-4).

3.2.1. Propriétés du fluide

Le fluide saturant est généralement bien connu, et ne fait pas l'objet d'une caractérisation particulière. Ses propriétés viscothermiques sont bien sûr essentielles. Les valeurs prises par défaut pour l'air sont présentées dans le tableau 3-1.



Figure 3-4 : Description d'un matériau poreux

Température au repos	$T_0 = 18^{\circ}C$
Pression au repos	$p_0 = 1.0132 \ 10^{-5} \ \text{Pa}$
Masse volumique au repos	$\rho_0 = 1.213 \text{kg m}^{-3}$
Vitesse du son	$c_0 = 342.2 \mathrm{m s^{-1}}$
Module d'incompressibilité adiabatique	$K_a = 1.42 \ 10^5 \ \text{Pa}$
Impédance caractéristique	$Z_0 = 415.1 \text{ Pa m}^{-1} \text{ s}$
Viscosité	$\mu = 1.8410^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
Nombre de Prandtl	$B^2 = \Pr = 0.71$
Rapport des chaleurs spécifiques	$\gamma = 1.4$

Tableau 3-1 : Valeurs numériques des caractéristiques de l'air prises par défaut

3.2.2. Paramètres de couplage

Le nombre des paramètres acoustiques utilisés dans les modèles pour prédire le comportement de la phase fluide peut varier de 2 à 8 comme montré sur la figure 3-5.



Figure 3-5 : Evolution chronologique des modèles de propagation du son dans un matériau poreux à squelette rigide concernant la microstructure: de 2 à 8 paramètres

Les méthodes expérimentales utilisées pour déterminer ces cinq paramètres font l'objet des thèses de Henry [1] pour la porosité, la résistivité, la tortuosité, et de Melon [2] pour la tortuosité et les longueurs caractéristiques. Nous donnons les définitions des 5 paramètres du modèle de Johnson-Champoux-Allard.

3.2.2.1. Porosité

La porosité caractérise la proportion de fluide saturant contenu dans les pores du matériau. Elle se définit par le rapport entre le volume d'air disponible dans les inclusions du milieu V_f et le volume total du matériau V_t :

$$\phi = \frac{V_f}{V_t} \qquad \qquad Eq. \ 3-1$$

Comprise entre 0 (limite solide) et 1 (limite fluide), elle est souvent proche de l'unité $(0.95 < \phi < 0.99)$ pour les mousses polymères et les matériaux fibreux. Lorsque les milieux poreux étudiés sont à structure rigide, seule la porosité dite ouverte, qui correspond à un réseau de pores interconnectés ouvert sur le milieu extérieur, est considérée. En effet, dans ce cas particulier, l'air emprisonné dans les inclusions fermées du matériau n'intervient pas dans la propagation des ondes acoustiques.

3.2.2.2. Résistivité

La résistivité d'un milieu poreux est sa résistance au passage de l'air évaluée par unité de longueur. Elle est associée au comportement asymptotique en basses fréquences du matériau. La résistivité s'exprime en *Rayls* par *mètre*. Les valeurs de σ vont habituellement de quelques 1000 $Nm^{-4}s$ pour les matériaux très « ouverts » à quelques 100000 $Nm^{-4}s$ pour les matériaux très « peu perméables. La résistivité permet de définir une autre caractéristique : la perméabilité visqueuse k_0 . Cette dernière s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma = \frac{\eta}{k_0} \qquad \qquad Eq. \ 3-2$$

Où η est la viscosité dynamique.

3.2.2.3. Tortuosité

 α_{∞} , permet de décrire le couplage inertiel, qui se traduit par une augmentation apparente de la masse volumique du fluide au niveau macroscopique. La figure 3-8 justifie la prise en compte de la tortuosité dans les modèles de propagation des ondes acoustiques à travers un matériau poreux [3]. Le vecteur vitesse acoustique dans le fluide saturant subit une dispersion non seulement au niveau de sa direction, figure 3-6(b), mais également au niveau de son module lors d'éventuels étranglements, figure 3-6(c). La tortuosité est par conséquent définie par la relation suivante :

$$\alpha_{\infty} = \frac{\int_{V_L} |v|^2 dV}{\left| \int_{V_L} v dV \right|^2} \qquad Eq. \ 3-3$$

Comme la moyenne des carrés est supérieure au carré de la moyenne, la tortuosité est supérieure à 1. Elle rend ainsi compte des variations de norme et de direction des vitesses au niveau microscopique pour contourner le squelette.



Figure 3-6 : Définition de la tortuosité

3.2.2.4. La longueur caractéristique visqueuse

 Λ , introduite par Johnson et al. [4], décrit la variation des effets visqueux en hautes fréquences. Au-dessus d'une certaine fréquence, les forces d'inertie dominent les forces de cisaillement visqueux dont l'effet est significatif uniquement à proximité des parois du squelette (Figure 3-7). L'intégration des forces visqueuses sur tout le domaine fluide V_f donne :

$$\Lambda = 2 \frac{\int_{V_f} |\dot{v}_m|^2 dV}{\int_{S_f} |\dot{v}_m|^2 dS} \qquad \qquad Eq. \ 3-4$$

Où S_i est l'interface de contact fluide - squelette. A cause de la pondération par les vitesses, Λ est de l'ordre du rayon des pores les plus petits, là où les vitesses sont les plus grandes à l'échelle microscopique.

3.2.2.5. La longueur caractéristique thermique

 Λ' , introduite par Champoux et Allard [5], décrit les échanges thermiques entre les deux phases en hautes fréquences. Le squelette dont l'inertie thermique est grande devant celle du fluide, joue le rôle d'un thermostat. Celui-ci vient modifier le module d'incompressibilité du fluide saturant qui varie entre le module isotherme aux basses fréquences et le module adiabatique aux hautes fréquences. Au-dessus d'une certaine fréquence, les échanges thermiques n'ont plus le temps de s'effectuer que dans une région proche des parois du squelette (Figure 3-7). L'intégration de ces effets sur tout le domaine fluide donne :

$$\Lambda' = 2\frac{V_f}{S_i} \qquad \qquad Eq. \ 3-5$$

 Λ' reflète plutôt les pores de plus grande taille, là où les surfaces d'échange thermique sont les plus importantes. Par conséquent, on a toujours :

$$\Lambda' \ge \Lambda \qquad \qquad Eq. \ 3^{-}6$$

Pour des matériaux usuels, leur rapport est de l'ordre de 2 à 3, et leurs valeurs sont habituellement comprises entre 10^{-5} et 10^{-3} m.



Figure 3-7 : Profils des vitesses ou des températures dans un pore cylindrique

3.2.3. Propriétés mécaniques du squelette

D'une manière complémentaire à la détermination des paramètres acoustiques des matériaux poreux, la détermination des propriétés élastiques et d'amortissement est présentée dans ce qui suit. Ces paramètres sont les suivants : le module d'Young (E), le facteur de perte structural (η) et le coefficient de Poisson (v). La détermination des propriétés mécaniques des mousses est délicate car elles ne sont généralement pas isotropes et l'on ne sait pas caractériser cette anisotropie a priori, alors que la présence du fluide peut induire une rigidité et un amortissement supplémentaires dont il faut faire abstraction.

3.2.3.1. Système masse – ressort résonant

Mariez et Sahraoui [6a-6b] ont développé une méthode basée sur la compression quasistatique d'un échantillon cubique entre deux plans parallèles (Figure 3-8). L'échantillon n'est pas collé mais légèrement précontraint entre deux feuilles de papier de verre et subit une déformation de l'ordre de 1% afin de rester dans la zone d'élasticité linéaire. L'excitation quasistatique (de 0.1 Hz à 100 Hz typiquement) permet de s'affranchir de l'inertie du squelette et du couplage avec le fluide. La force appliquée par le pot vibrant $F(\omega)$, ainsi que les déplacements du squelette, longitudinal $u_L(\omega)$ et latéraux $u_T(\omega)$, $u_{T'}(\omega)$ (2 directions transverses) sont relevés.



Figure 3-8 : Dispositif de mesure des paramètres mécaniques

On peut ainsi définir une impédance mécanique longitudinale :

$$K(\omega) = \frac{F(\omega)}{u_{I}(\omega)} \qquad \qquad Eq. \ 3-7$$

Et deux fonctions de transfert homogènes à un coefficient de Poisson :

$$T(\omega) = \frac{u_T(\omega)}{u_L(\omega)} \text{ et } T'(\omega) = \frac{u_{T'}(\omega)}{u_L(\omega)}$$
 Eq. 3-8

En positionnant l'échantillon différemment selon ses trois axes, trois triplets de fonctions $K(\omega)$, $T(\omega)$ et $T'(\omega)$ sont obtenus. Si les triplets sont identiques et que $T(\omega) = T'(\omega)$, quelle que soit la direction, le matériau est isotrope. Si seulement deux triplets sont identiques, le matériau est isotrope transverse : son axe de symétrie, noté L, est l'un des trois axes du cube. S'ils différent tous, le matériau est orthotrope ; il pourrait aussi être isotrope transverse si l'axe de symétrie ne coïncide pas avec l'un des trois axes du cube.

3.2.3.2. Méthodes de la poutre résonante

La procédure classique de la poutre d'Oberst comme décrit dans le standard ASTM E756 [7] peut être utilisée pour estimer les paramètres élastiques (Module d'Young et coefficient d'amortissement structural) des matériaux, pour une direction, fournis par des échantillons de type poutre. Le principe de la caractérisation est d'approcher la courbe de réponse en fréquences (FRF: Frequency Response Function) avec les prédictions obtenues en utilisant un modèle analytique pour la propagation des ondes de flexion dans une poutre uni-dimensionnelle. La poutre est supposée avoir les conditions de frontière suivantes : encastrée à une extrémité, libre à l'autre. La FRF est défini comme le ratio de la force injectée par un pot vibrant près de l'extrémité encastrée sur le déplacement normal à l'autre extrémité de la poutre. Le module d'Young et le facteur de perte structural dans la direction de la poutre sont ensuite déterminés à chaque résonance de flexion du système identifiée sur la FRF.

Pour les matériaux qui fléchissent sous leur propre poids, la méthode de la poutre d'Oberst fait utiliser une poutre métal support pour assurer que la courbure de la structure est négligeable (Figure 3-9). Dans ce cas, en connaissant les caractéristiques de la poutre métal support, le modèle d'une poutre unidimensionnelle homogène est modifié pour considérer une poutre unidimensionnelle à deux matériaux.



Figure 3-9 : Poutre cantilever utilisée dans la méthode d'Oberst

Après la définition des caractéristiques intrinsèques des matériaux poroélastiques, la deuxième partie du chapitre concerne les formulations macroscopiques permettant la mise en équation du problème.

3.3. Mise en équation du problème

Lorsqu'une onde acoustique pénètre à l'intérieur d'un pore du matériau, un cycle de compression - dilatation se produit à la fréquence de l'onde incidente dans le fluide saturant. La description du phénomène se base sur un moyennage des équations de l'acoustique linéaire sur un volume d'homogénéisation de dimensions L^3 . Zwikker et Kosten [8], puis Stinson [9] introduisent l'hypothèse que les effets visqueux et thermiques peuvent être traités séparément. Ainsi les couplages visqueux et inertiels sont modélisés par l'introduction d'une densité dynamique complexe, la densité effective $\rho_e(\omega)$, dans l'équation du mouvement :

$$\rho_e(\omega)j\omega v = -\nabla p \qquad \qquad Eq. \ 3-9$$

Parallèlement, les échanges thermiques entre le fluide et la matrice solide poreuse sont décrits par une compressibilité dynamique complexe $K(\omega)$, dans l'équation d'état du fluide :

$$\frac{p}{K(\omega)} = \frac{\rho}{\rho_0} \qquad \qquad Eq. \ 3-10$$

En revanche, l'équation de conservation de la masse reste inchangée :

$$j\omega\rho + \rho_0 \nabla v = 0 \qquad \qquad Eq. \ 3-11$$

Les trois relations de base caractérisant la perturbation acoustique sont exprimées pour une onde plane monochromatique définie avec la convention $e^{j\omega t}$. Elles traduisent le comportement d'un fluide fictif, appelé fluide équivalent, de densité $\rho_e(\omega)$ et de compressibilité $K(\omega)$, complexes et dépendantes de la fréquence. L'équation de Helmholtz permettant d'obtenir la pression et la vitesse acoustiques dans le milieu poreux, se met par conséquent sous la forme :

$$\Delta p + \omega^2 \frac{\rho_e}{K} p = 0 \qquad \qquad Eq. \ 3-12$$

Cette équation induit l'existence d'une constante de propagation $k(\omega)$ dans le milieu diphasique ainsi que d'une impédance caractéristique $Z_c(\omega)$, définie par le rapport entre la pression et la vitesse macroscopiques du matériau.

$$k(\omega) = \omega_{\sqrt{\frac{\rho_e(\omega)}{K(\omega)}}}$$
 Eq. 3-13

$$Z_{c}(\omega) = \sqrt{\rho_{e}(\omega)K(\omega)} \qquad \qquad Eq. \ 3-14$$

La propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux est alors entièrement caractérisée par l'un des deux couples : densité effective et compressibilité dynamique (ρ_e, K) , ou impédance caractéristique et constante de propagation : (Z_c, k) .

L'extrême complexité de la géométrie des matériaux poreux ne permet pas, dans le cas général, une description des interactions fluide-structure au niveau microscopique. Ainsi des modèles macroscopiques empiriques ont, d'une part, été développés, comme par exemple les équations de Delany et Bazelet [10] pour d'écrire le comportement des laines de verre. L'élaboration de lois phénoménologiques, d'autre part, est basée sur la considération de pores à géométrie simple, essentiellement de section circulaire [11-13].

Lorsque le squelette du matériau peut être considéré rigide, soit par une forte densité et/ou des coefficients de rigidité importants, soit par des conditions de montage particulières du matériau (matériau posé sur une paroi rigide,...), seule la phase fluide constitue un support à la propagation des ondes acoustiques [12]. En revanche, dans le cas où la structure est élastique, les ondes sonores incidentes sur le matériau poreux ébranlent à la fois la phase fluide et la phase solide : les ondes se propagent par conséquent dans les deux milieux [14].

3.3.1. Modèles macroscopiques pour les milieux à structure rigide

Un milieu poreux à structure rigide est caractérisé par un certain nombre de paramètres intrinsèques, qui varie selon le modèle de propagation acoustique considéré et la complexité de sa description. Les cinq paramètres les plus utilisés dans la pratique sont la résistivité, la porosité, la tortuosité et les deux longueurs caractéristiques visqueuse et thermique, associées à leurs facteurs de forme respectifs M et M. D'autres paramètres ont également été introduits ultérieurement, tels que la constante de piégeage [15] et les paramètres de Pride [16], dans le but de préciser la modélisation et d'assurer une meilleure prédiction du comportement des milieux poreux par rapport aux observations expérimentales. La densité effective (effets visqueux et inertiels) et la compressibilité dynamique (effets thermiques) peuvent se mettre sous forme simplifiée dans le cas des modèles de Johnson-Allard et Lafarge-Allard :

$$\rho_{e}(\omega) = \alpha_{\infty} \rho_{0} \left[1 - j \frac{\omega_{0}}{\omega} F(\omega) \right] \qquad Eq. \ 3-15$$

$$K(\omega) = \frac{\gamma P_0}{\gamma - \frac{\gamma - 1}{1 - j \frac{\omega'_0}{\omega} F_p(\omega)}} Eq. 3.16$$

Chacun des termes intervenant dans ces formules est explicité dans le tableau 3-2 qui résume les principales différences entre les expressions développées par Johnson-Allard et par Lafarge-Allard.

Dans le modèle de Johnson-Allard, les expressions générales de la densité effective et de la compressibilité dynamique sont déterminées à partir des cinq paramètres caractéristiques préalablement définis. Le modèle de Lafarge-Allard [15,19] introduit un paramètre supplémentaire, la perméabilité thermique k'_0 , afin de modéliser plus précisément les échanges thermiques entre l'air et la structure rigide dans la gamme des basses fréquences. En effet, la perméabilité thermique est définie, par analogie avec la perméabilité visqueuse dans la loi de Darcy [15]. Ce nouveau paramètre s'exprime à partir de la constante de piégeage Γ du matériau poreux, et d'un facteur de forme M', traduisant essentiellement l'écart au modèle de Johnson-Allard.

$$k'_{0} = \frac{M'}{\Gamma} \qquad \qquad Eq. \ 3-17$$

La densité effective ne prenant en compte que les couplages visqueux et inertiels entre le fluide saturant et le squelette, son expression n'est par conséquent pas modifiée par l'introduction de la perméabilité thermique dans la modélisation. Seule la

Variables	Modèle de	Modèle de		
variables	Johnson-Allard	Lafarge-Allard		
14	$8lpha_{_{\infty}}\eta$	$8lpha_{_{\infty}}\eta$		
М	$\overline{\sigma\phi\Lambda^2}$	$\overline{\sigma\phi\Lambda^2}$		
1.61	1	$8k'_0$		
M^+	1	$\overline{\phi}\Lambda'^2$		
	$\sigma\phi$	$\sigma\phi$		
$\omega_{_0}$	$\overline{ ho_{_0}lpha_{_\infty}}$	$\overline{ ho_{_0}lpha_{_\infty}}$		
1	8η	8η		
$\boldsymbol{\omega}_{_0}$	$\overline{\rho_0 \operatorname{Pr} \Lambda'^2}$	$\rho_0 \operatorname{Pr} \Lambda'^2 M'$		
	$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$	$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$		
F	$\left 1+\frac{\omega}{\omega}\frac{M}{2}\right ^2$	$\left 1+\frac{\omega}{\omega}\frac{M}{2}\right ^2$		
	$\begin{bmatrix} \omega_0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \omega_0 & 2 \end{bmatrix}$		
F_{P}	$\begin{bmatrix} 1 & \omega \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$	$\begin{bmatrix} M' & \omega \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}$		
	$\left 1+i\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_{0}}\right $	$\left \frac{1+i}{2} \frac{\omega}{\omega_{0}} \right $		

compressibilité dynamique prend une nouvelle forme incluant le paramètre k'_0 par l'intermédiaire de son facteur de forme M'.

Tableau 3-2 : Comparaison entre les modèles de Johnson-Allard et Lafarge-Allard [15,17-19]

3.3.2. Modèles empiriques

Pour intégrer des poreux dans un système complexe, il est plus simple d'utiliser des approches empiriques déjà existantes de la propagation acoustique dans les poreux. Il existe beaucoup de travaux concernant ce domaine, seulement quelques approches principales sont présentées et comparées.

3.3.2.1. Modèle de Delany & Bazelet

Une approche empirique a été proposée par Delany & Bazelet [10] qui permet, à partir de la valeur de la résistivité spécifique au passage de l'air d'un matériau fibreux, de déterminer les caractéristiques acoustiques de ce matériau (constante de propagation et impédance caractéristique). Pour cela, on suppose que le matériau est homogène et isotrope, la structure reste immobile au passage des ondes acoustiques et la nature des ondes n'est pas modifiée à leur passage dans le poreux (une onde plane est supposée le rester dans le matériau). Ainsi, l'étude de la propagation dans les poreux est traitée comme l'étude de la propagation dans un fluide avec une constante de propagation et une impédance acoustique spécifique donnée par les équations suivantes :

$$k = \left(\frac{\omega}{c_0}\right) \left[0.19 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{0.59} + j \left(1 + 0.098 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{0.70}\right) \right]$$
 Eq. 3-18
$$Z_c = \rho_0 c_0 \left[1 + 0.0511 \left(\frac{\sigma}{f}\right)^{0.75} - j \, 0.066 \left(\frac{\sigma}{f}\right)^{0.73} \right]$$
 Eq. 3-19

La limite de validité fréquentielle du modèle est donnée par : $10^{-2}\sigma < f < \sigma$.
3.3.2.2. Modèle de Mechel

Le modèle proposé par Delany & Bazelet étant limité rapidement en basses fréquences, Mechel [20] a étendu ce dernier aux basses fréquences :

• Pour le domaine : $13.810^{-3} \sigma < f < 0.83 \sigma$

$$k = \left(\frac{\omega}{c_0}\right) \left[1 + 0.0978 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{0.693} - j0.189 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{0.618}\right] \qquad Eq. \ 3-20$$
$$Z_c = \rho_0 c_0 \left[1 + 0.0489 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{0.754} - j0.087 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{0.731}\right] \qquad Eq. \ 3-21$$

• Pour le domaine BF : $f < 13.810^{-3} \sigma$

$$k = -j \left(\frac{\omega}{c_0}\right) \left[-1.466 + j0.212 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right) \right]^{0.5} \qquad Eq. \ 3-22$$
$$Z_c = (\rho_0 c_0) \frac{0.159 (\sigma/\rho_0 f) - j1.403}{\left[-1.466 + j0.212 \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right) \right]^{0.5}} \qquad Eq. \ 3-23$$

3.3.2.3. Modèle Ingénieur

Nous proposons une autre approche empirique, tirée d'un recueil spécialisé assez récent [21], le nombre d'onde ainsi que l'impédance acoustique sont donnés comme suit :

$$k = \left(\frac{\omega}{c_0}\right) \left[a' \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{\alpha'} + j \left(1 + a'' \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{\alpha''}\right)\right] \qquad Eq. \ 3.24$$
$$Z_c = \left(\rho_0 c_0\right) \left[\left(1 + b' \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{\beta'}\right) + jb'' \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{\beta''}\right] \qquad Eq. \ 3.25$$

 $Cn \text{ pose } E' = \left(\frac{\sigma}{\rho_0 f}\right)^{-1}, \text{ les variables précédentes sont données par le tableau 3-3.}$

Matériau	Région E'	a'	a'	a"	<i>a</i> "	b'	в'	<i>b</i> "	в"
Minéral	$E' \le 0.025$	0.322	0.502	0.136	0.641	0.081	0.699	0.191	0.556
Et Basalte	E' > 0.025	0.179	0.663	0.103	0.716	0.056	0.725	0.127	0.655
Fibre de	$E' \le 0.025$	0.396	0.458	0.135	0.646	0.067	0.707	0.196	0.549
Glace	E' > 0.025	0.179	0.674	0.102	0.705	0.023	0.887	0.087	0.770

Tableau 3-3 : Variables du modèle ingénieur

3.3.2.4. Modèle de Wilson

Ce modèle est particulièrement intéressant parce qu'il peut être décrit par 1, 4 ou 5 paramètres. Les équations de Wilson [22] décrivent la propagation du son dans un matériau poreux sous les formes suivantes :

$$\frac{Z_c}{\rho_0 c_0} = \frac{\alpha_{\infty}}{\phi} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{1 - j\omega\tau_{ent}}} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - j\omega\tau_{vor}}} \right) \right]^{-1/2}$$
 Eq. 3-26

$$\frac{k}{\omega/c_0} = \alpha_{\infty} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{1 - j\omega\tau_{ent}}} \right) / \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - j\omega\tau_{vor}}} \right) \right]^{1/2}$$
 Eq. 3.27

 $\tau_{\scriptscriptstyle ent}$ est la durée de relaxation (temps nécessaire pour retourner à un état d'équilibre après l'exercice d'une perturbation) relié au gradient température entre le fluide et le squelette. $\tau_{\scriptscriptstyle vor}$ est la durée de relaxation du gradient pression sous l'effet du fluide emprisonné dans le squelette. Par défaut, le modèle de Wilson dépend de 4 paramètres : ϕ , $\alpha_{\scriptscriptstyle \infty}$, $\tau_{\scriptscriptstyle ent}$ et $\tau_{\scriptscriptstyle vor}$. Avec une fréquence réduit, $X = \frac{\rho_0 f}{\sigma}$, et $f = \frac{\omega}{2\pi}$ la fréquence, le modèle de Wilson permet d'évaluer $\tau_{\scriptscriptstyle ent}$ et $\tau_{\scriptscriptstyle vor}$ à basses et hautes fréquences réduites.

3.3.2.5. Comparaison des modèles

La comparaison des trois premiers modèles est présentée ci-après sur la constante de propagation et l'impédance caractéristique (Figures 3-10 et 3-11). Le matériau choisi est une laine de verre dont les caractéristiques sont :

Epaisseur (m)	ϕ	$\sigma(Nsm^{-4})$
25×10^{-3}	0.98	33000
$lpha_{_{\infty}}$	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$
1.1	50×10 ⁻⁶	110×10^{-6}
ρ (kgm ⁻³)	E(Pa)	ν
60	100000(1+0.88j)	0

Tableau 3-4 : Paramètres poroélastiques de la laine de verre



Figure 3-10 : Constante de propagation (partie propagative et dissipative) simulée par trois modèles (Delany & Bazelet, Ingénieur et Mechel) d'une laine de verre



Figure 3-11 : Impédance caractéristique (partie réelle et imaginaire) simulée par trois modèles (Delany & Bazelet, Ingénieur et Mechel) d'une laine de verre

Les trois modèles semblent assez proches avec une transition BF-HF plus ou moins visibles avec les modèles Ingénieur et Mechel. Cette particularité reste aussi délicate dans le cas expérimental.

3.4. Poroélasticité Isotrope

En 1956, Biot a présenté la théorie de la poroélasticité isotrope ou le comportement du milieu poreux composé de deux phases est complètement décrit par les déplacements des phases solide et fluide. Ainsi, cette formulation classique peut être nommé aussi par : la formulation du déplacement(u, v).

Biot a dérivé les équations d'équilibre ou les tenseurs de déformation associés aux particules de squelette et du fluide sont (indépendamment) liés aux déplacements macroscopiques du solide et du fluide. Ainsi, dans ces équations du comportement des poroélastiques, il y a quelques termes importants exprimant le couplage entre la phase solide et fluide: ces termes dépendent du coefficient de couplage de masse et du coefficient de vibration visqueux.

Biot fournit aussi des relations constitutives ou les tenseurs des déformations sont en relation linéaire avec les tenseurs des contraintes dans le squelette et le fluide interstitiel. Dans ces équations, il y a seulement 4 constantes du matériau : le module de cisaillement du matériau poreux et les 3 coefficients de Lamé. Un de ces coefficients fait référence à la phase fluide isotrope, un autre (avec le module de cisaillement) représente la phase solide isotrope et finalement, le 3^{ème} assure le couplage entre ces deux phases. Les équations cinématiques du milieu poroélastique sont (non couplées) les relations classiques cinématiques de l'élasticité linéaire et de la mécanique des fluides. En combinant toutes ces équations ensemble, il en résulte une série d'équations aux dérivées partielles constituée par des équations de déplacement isotrope, poroélasticité linéaire.

En 1998, Atalla et al. ont proposé la formulation mixte déplacement – pression (u, p) qui est, en effet, une variation mathématique du modèle de Biot. Ainsi, cette formulation est valide seulement dans le cas des oscillations harmoniques. Dans ce cas,

les déplacements du fluide sont complètement exclus des équations classiques de Biot, et remplacés par la pression de la phase fluide.

3.4.1. Coefficients du matériau poreux

Les seuls paramètres en plus qui décrivent un matériau poreux avec une structure rigide se rapportent au matériau élastique du squelette du poreux, ils sont :

- $\rho_1 \left[kg / m^3 \right]$ la densité de squelette (si tous les pores sont ouverts, cette densité s'écrit : $\rho_1 = (1 \phi)\rho_s$, ou ρ_s est la densité du matériau du squelette,
- $\mu^{s} \left[N/m^{2} \right]$: le module de cisaillement du matériau de squelette,
- *v* : le coefficient de Poisson du matériau de squelette.

Les autres paramètres nécessaires sont les mêmes utilisés dans le cas d'un milieu poreux donc le squelette est rigide. En effet, le module de volume effectif du fluide dans le matériau poreux est calculé identiquement pour le milieu poreux avec une structure rigide ou élastique.

3.4.1.1. Densités effectives

Les deux densités effectives, dépendantes de la fréquence, et le terme de couplage d'inertie,

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} + \frac{\tilde{b}}{j\omega} \qquad \tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} + \frac{\tilde{b}}{j\omega} \qquad \tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} - \frac{\tilde{b}}{j\omega} \qquad Eq. \ 3-28$$

sont des généralisations des densités effectives et le coefficient de couplage d'inertie :

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}$$
 $\rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12}$ $\rho_{12} = -(\alpha_{\infty} - 1)\phi\rho_0$ $\rho_2 = \phi\rho_0$ Eq. 3-29

Ils comprennent un terme en fonction du coefficient de vibration visqueux dépendant de la fréquence :

$$\widetilde{b} = \sigma \phi^2 \widetilde{G}(\omega) \qquad \widetilde{G}(\omega) = \sqrt{1 + \frac{4\eta \alpha_{\infty}^2 \rho_0}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2} j\omega} \qquad Eq. \ 3-30$$

3.4.1.2. Constantes du matériau

Il y a 4 coefficients de Lamé dans les équations du déplacement du milieu poroélastique : le module de cisaillement du matériau poreux qui est en conséquence le module de cisaillement du squelette, μ^s , et les 3 coefficients de dilatation :

$$\widetilde{\lambda}^{s} = -\frac{2}{3}\mu^{s} + K_{b} + \frac{(1-\phi)^{2}}{\phi}\widetilde{K}_{f} \qquad \widetilde{\lambda}^{fs} = (1-\phi)\widetilde{K}_{f} \qquad \widetilde{\lambda}^{f} = \phi\widetilde{K}_{f} \qquad Eq. \ 3-31$$

Ces derniers dépendent de la porosité ϕ , et le module de volume de l'air dans le matériau poreux, \tilde{K}_f . Le premier des coefficients de dilatation dépend aussi du module de cisaillement, μ^s , et le module du volume du squelette à pression constante, K_b . Dans le vide (pression nulle), ce module peut être exprimé sous cette forme, en fonction du module de cisaillement et du coefficient de Poisson :

$$K_{b} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\mu^{s} \qquad \qquad Eq. \ 3-32$$

Il est possible d'exprimer $\widetilde{\lambda}^s$ sous cette forme :

$$\widetilde{\lambda}^{s} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \mu^{s} + \frac{(1 - \phi)^{2}}{\phi} \widetilde{K}_{f} \qquad \qquad Eq. \ 3-33$$

A la place de $\tilde{\lambda}^s$, il est possible d'utiliser dans certaines équations la constante de matériau suivante :

$$\widetilde{K}^{s} = \widetilde{\lambda}^{s} + 2\mu^{s} \qquad \qquad Eq. \ 3-34$$

En plus, les coefficients suivants sont utilisés :

$$\hat{\tilde{\lambda}}^{s} = \tilde{\lambda}^{s} - \frac{\left(\tilde{\lambda}^{fs}\right)^{2}}{\tilde{\lambda}^{f}} = -\frac{2}{3}\mu^{s} + K_{b} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}\mu^{s} \qquad \qquad Eq. \ 3-35$$

$$\rho_e = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}} \qquad Eq. \ 3-36$$

$$\widetilde{\gamma} = \phi \left(\frac{\widetilde{\rho}_{12}}{\widetilde{\rho}_{22}} - \frac{\widetilde{\lambda}^{fs}}{\widetilde{\lambda}^{f}} \right) = \frac{\widetilde{\rho}_{12}}{\widetilde{\rho}_{22}} \phi + \phi - 1 \qquad \qquad Eq. \ 3-37$$

$$\widetilde{K}_{f} = \frac{\gamma P_{0}}{\gamma - \frac{\gamma - 1}{1 + \widetilde{H}(\omega)}} \quad \widetilde{H}(\omega) = \frac{\sqrt{64\eta^{2} + 4\eta\Lambda'^{2} B^{2}\rho_{0}j\omega}}{\Lambda'^{2} B^{2}\rho_{0}j\omega} \qquad Eq. 3-38$$

Toutes les constantes étant définies, la suite de cette partie constitue une présentation des formulations classique et mixte de Biot.

3.4.2. La formulation classique de Biot

Les équations de poroélasticité de Biot pour un état d'équilibre dynamique local d'un milieu poreux réunissent les tenseurs de déformation associés aux particules de squelette (σ_{ij}^s) et ceux des particules macroscopiques du fluide (σ_{ij}^f) avec les déplacements macroscopiques de la phase solide et fluide $(u_i \text{ et } v_i, \text{ respectivement})$:

$$\sigma_{ij/j}^{s} = \rho_{11} \ddot{u}_{i} + \rho_{12} \ddot{v}_{i} + \tilde{b} (\dot{v}_{i} - \dot{u}_{i})$$
 Eq. 3-39

$$\sigma_{ii/i}^{f} = \rho_{22} \ddot{v}_{i} + \rho_{12} \ddot{u}_{i} + \tilde{b} (\dot{u}_{i} - \dot{v}_{i})$$
 Eq. 3-40

Dans ces équations, \tilde{b} présente les forces d'interactions visqueuses, alors que les densités effectives ρ_{11} et ρ_{22} tiennent compte de la non uniformité de l'écoulement relative à travers les pores. Le coefficient de masse ρ_{12} , qui est présent dans les deux équations d'équilibre (Eq. 3-39), (Eq. 3-40), et dans les équations des densités effectives, tient compte de l'interaction entre les forces d'inerties des phases solide et fluide, et est en fonction de la tortuosité du matériau.

Le tenseur de déformation de la phase solide σ_{ij}^{s} est donné par $(1-\phi)$ fois la moyenne du tenseur de déformation régnant dans le squelette du matériau poroélastique, alors que le tenseur de déformation de la phase fluide est en relation avec la pression moyenne régnant dans le fluide saturant :

$$\sigma_{ij}^{f} = -\phi \ p \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij/j}^{f} = -\phi \ p_{/i} \delta_{ij} = -\phi \ p_{/i}$$

Eq. 3-41

Pour un comportement harmonique (avec une fréquence angulaire ω), les équations d'équilibre peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\sigma_{ii/i}^{s} + \omega^{2} \widetilde{\rho}_{11} u_{i} + \omega^{2} \widetilde{\rho}_{12} v_{i} = 0 \qquad \qquad Eq. \ 3-42$$

$$-\phi p_{/i} + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} u_i + \omega^2 \tilde{\rho}_{22} v_i = 0 \qquad Eq. \ 3-43$$

Les tenseurs de déformation des phases solide et fluide sont en relation linéaire avec les tenseurs de contrainte dans le squelette et le fluide interstitiel ($\boldsymbol{\varepsilon}_{ii}^{s}, \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{f}$, respectivement).

Ceci est mis en évidence par les relations constitutives d'isotropie linéaire de la théorie de Biot suivantes :

$$\sigma_{ij}^{s} = \tilde{\lambda}^{s} \varepsilon_{kk}^{s} \delta_{ij} + 2\mu^{s} \varepsilon_{ij}^{s} + \tilde{\lambda}^{fs} \varepsilon^{f} \delta_{ij} \qquad \qquad Eq. \ 3-44$$

Les équations déplacement - déformation sont données séparément pour les phases solide et fluide :

$$\varepsilon_{ij}^{s} = \frac{1}{2} (u_{i/j} + u_{j/i})$$
 Eq. 3-46

$$\varepsilon^f = v_{i/i}$$
 Eq. 3-47

Les équations (Eq. 3-42)-(Eq. 3-47) forme le problème de poroélasticité linéaire isotrope. Bien évidemment, des conditions aux limites sont aussi nécessaires pour compléter ce problème. En utilisant les équations constitutives et déformation - contrainte dans les équations d'équilibre, 6 équations de déplacements seront formées :

$$\left[\left(\tilde{\lambda}^{s} + \mu^{s} \right) u_{j/j} \right]_{/i} + \left(\mu^{s} u_{i/j} \right)_{/j} + \omega^{2} \tilde{\rho}_{11} u_{i} + \left(\tilde{\lambda}^{fs} v_{j/j} \right)_{/i} + \omega^{2} \tilde{\rho}_{12} v_{i} = 0$$

$$\left(\tilde{\lambda}^{fs} u_{j/j} \right)_{/i} + \omega^{2} \tilde{\rho}_{12} u_{i} + \left(\tilde{\lambda}^{f} v_{j/j} \right)_{/i} + \omega^{2} \tilde{\rho}_{22} v_{i} = 0$$

$$Eq. 3-49$$

$$Eq. 3-49$$

6 équations à 6 champs inconnus qui sont les composantes des déplacements des deux
phases fluide et solide
$$v_i$$
 et u_i . Pour des propriétés constantes du matériau, (l'exemple
d'un domaine homogène d'un milieu poreux), le système d'équations s'écrit sous cette

nouvelle forme :

6

$$\left(\tilde{\lambda}^{s} + \mu^{s}\right)u_{j/ji} + \mu^{s}u_{i/jj} + \omega^{2}\tilde{\rho}_{11}u_{i} + \tilde{\lambda}^{fs}v_{j/ji} + \omega^{2}\tilde{\rho}_{12}v_{i} = 0 \qquad Eq. \ 3-50$$

$$\widetilde{\lambda}^{fs} u_{j/ji} + \omega^2 \widetilde{\rho}_{12} u_i + \widetilde{\lambda}^f v_{j/ji} + \omega^2 \widetilde{\rho}_{22} v_i = 0 \qquad \qquad Eq. \ 3-51$$

3.4.3.La formulation mixte déplacement – pression

Cette formulation est valable seulement pour des oscillations harmoniques. Elle est dérivée de la formulation classique qui y est équivalente mathématiquement. Les équations d'équilibre modifiées (pour des petites oscillations harmoniques) sont comme suit :

$$\underbrace{\widehat{\sigma}_{ij/j}^{s} + \widehat{\omega}^{2} \rho_{e} u_{i}}_{\text{dars be vide}} + \underbrace{\widetilde{\gamma}_{p/i}}_{\widetilde{\gamma}_{p/i}} = 0$$
Eq. 3-52

$$\underbrace{- \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22} \tilde{\gamma}}{\phi^2} u_{i/i}}_{\text{terme de couplage}} + \underbrace{\omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{\lambda}^f} p + p_{/ii}}_{\text{comportement du fluide quand}} = 0 \qquad Eq. 3-53$$

où $\hat{\sigma}_{ij}^{s}$ est le tenseur de contraintes du matériau dans le vide, qui ne dépend pas de la phase fluide. Ainsi :

Les équations (Eq. 3-52)-(Eq. 3-54) et (Eq. 3-46) constituent la formulation déplacement – pression de la poroélasticité. Bien évidemment, pour compléter, des conditions aux limites sont nécessaires.

Les équations (Eq. 3-46) peuvent être utilisées avec les relations constitutives (Eq. 3-54) pour éliminer complètement chacun des composants contraintes de l'équation (Eq. 3-52) d'où l'équation suivante :

$$\left(\hat{\tilde{\lambda}}^{s} + \mu^{s}\right) u_{j/ji} + \mu^{s} u_{i/jj} + \omega^{2} \rho_{e} u_{i} + \tilde{\gamma} p_{/i} = 0 \qquad Eq. \ 3-55$$

qu'avec l'équation d'équilibre (Eq. 3-53) constituent 4 équations déplacement – pression du milieu poroélastique (avec 4 champs inconnus $:u_i, p$).

3.5. Modélisation de la flexion d'une plaque poreuse : Formulation de P. Leclaire

Plusieurs études ont été menées dans la perspective d'étudier la flexion d'une plaque poroélastique. Dans cette partie, on présente les travaux de P. Lelcaire [23,24]. D'autres formulations sont décrites dans l'annexe. Le choix s'est porté sur la formulation de P. Leclaire vu qu'elle permet un gain de temps du calcul (modélisation en 2D). La plaque poreuse, est supposée homogène, rectangulaire de dimensions $L_1 \times L_2$ et mince d'une épaisseur h $(h \ll (L_1, L_2))$. D'un autre côté, la plaque est supposée de Kirchchoff. La poroélasticité est celle de Biot, isotrope et à squelette élastique.

Cette formulation est une dérivée de la combinaison de la théorie classique d'une plaque homogène et du modèle de Biot. Deux équations dynamiques couplées, décrivant l'équilibre et liant la déflexion de la plaque au déplacement relatif fluide/solide, sont présentées. L'énergie dissipée par friction visqueuse est inclue dans ce modèle.

3.5.1. Relations déformation – contrainte de Biot pour un milieu poreux infini

Pour un milieu isotrope et dans l'absence d'une force d'excitation, les relations déformations – contraintes d'un milieu poreux en équilibre peuvent s'écrire sous la forme suivante [25] :

$$\sigma_{ij} + \alpha P_f \delta_{ij} = 2\mu^s \varepsilon_{ij}^s + \lambda^s \varepsilon^s \delta_{ij} \qquad Eq. \ 3-56$$

$$P_{f} = -\alpha M \varepsilon^{s} + M \zeta \qquad \qquad Eq. \ 3-57$$

avec w qui présente le déplacement relatif fluide – solide :

$$w = \phi(v - u) \qquad \qquad Eq. \ 3-58$$

Le coefficient de couplage α et le module élastique *M* ont été défini par Biot [26] :

$$\begin{aligned} & \chi = \phi \left(1 + \widetilde{\lambda}^{f_s} / \widetilde{\lambda}^{f} \right) \\ & M = \widetilde{\lambda}^{f} / \phi^2 \end{aligned}$$
 Eq. 3-59

Si le fluide est l'air, alors :

$$\alpha = \phi \text{ et } M \approx \widetilde{K}_f / \phi$$
 Eq. 3-60

3.5.2. Flexion d'une plaque poreuse

L'écoulement du fluide est supposé normal au plan (x_1, x_2) et donc $\zeta = -\frac{\partial w}{\partial x_3}$ [27]. La composante de w sur l'axe x_3 est notée de cette façon : $w = w_3$. Leclaire suppose que la variation de l'amplitude du déplacement du fluide sur l'axe x_3 est petite. Les déformations en épaisseur de la plaque sont négligées et les contraintes tangentes à la surface sont les seules prises en compte. La déflexion se produit dans la plaque et plus particulièrement dans le squelette. Les éléments utiles du tenseur des déformations dans le solide sont ainsi [28] :

$$\varepsilon_{11}^{s} = -x_{3} \frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{1}^{2}}$$

$$\varepsilon_{22}^{s} = -x_{3} \frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{2}^{2}}$$

$$\varepsilon_{12}^{s} = -x_{3} \frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{1} \partial x_{2}}$$

$$Eq. 3-61$$

La formulation de l'élasticité plane permet d'écrire les contraintes correspondantes :

$$\sigma'_{11} = -\frac{Ex_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\sigma'_{22} = -\frac{Ex_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} \right)$$

$$\sigma'_{12} = -\frac{Ex_3}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$Eq. 3-62$$

Ces expressions sont une forme particulière de la loi de Hooke. La forme générale est :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu' \varepsilon^s_{ij} + \lambda' \varepsilon^s \delta_{ij} \qquad \qquad Eq. \ 3-63$$

Par identification entre les équations (Eq. 3-56) et (Eq. 3-63) et avec l'utilisation des relations classiques entre les constantes élastiques, les expressions suivantes sont déterminées :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha P_f \delta_{ij}$$

$$\lambda' = \lambda^s = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu' = \mu^s = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Eq. 3-64

Les contraintes $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \alpha P_f \delta_{ij}$ sont telles que le milieu poreux se comporte comme un solide homogène ayant λ^s et μ^s comme modules élastiques.

3.5.3. Relations entre les moments de flexion

Deux moments de flexion et un de torsion peuvent être associés aux contraintes σ'_{ij} données par les équations (Eq. 3-62) :

$$M'_{1} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_{11} x_{3} dx_{3} = -D\left(\frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{1}^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{2}^{2}}\right)$$
$$M'_{2} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_{22} x_{3} dx_{3} = -D\left(\frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{2}^{2}} + \nu \frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{1}^{2}}\right)$$
$$Eq. 3-65$$
$$M'_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma'_{12} x_{3} dx_{3} = -D(1-\nu) \frac{\partial^{2} w_{s}}{\partial x_{1} \partial x_{2}}$$

Les moments actuels sont ceux associés avec les contraintes totales :

$$M_{1} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_{3} dx_{3}$$

$$M_{2} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_{3} dx_{3}$$

$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} x_{3} dx_{3}$$

$$Eq. 3-66$$

Un moment relatif au fluide peut être également défini comme suit [29] :

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} P_f x_3 dx_3 \qquad \qquad Eq. \ 3-67$$

L'équation (Eq. 3-57) peut donc avoir la forme suivante :

$$P_{f} = -\frac{\alpha M}{E} (1 - \nu) (\sigma'_{11} + \sigma'_{22}) + M\zeta \qquad Eq. \ 3-68$$

En multipliant chaque terme de cette équation par x_3 , l'intégration par rapport à l'épaisseur donne :

$$\mathfrak{I} = -\beta (M'_1 + M'_2) - M \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial w}{\partial x_3} x_3 dx_3 \qquad \qquad Eq. \ 3-69$$

Avec $\beta = \alpha M (1-\nu)/E$. Le second terme de la partie droite de l'équation peut être intégré par partie mais il est négligé sous l'hypothèse posée sur l'amplitude du déplacement du fluide. A partir de l'équation (Eq. 3-64), les relations entre différents moments sont les suivantes :

$$M'_{1} = M_{1} + \alpha P$$

 $M'_{2} = M_{2} + \alpha P$ Eq. 3-70
 $M'_{12} = M_{12}$

L'équation (Eq. 3-69) permet de donner finalement :

$$M_{1} = (1 + \alpha\beta)M'_{1} + \alpha\beta M'_{2}$$

$$M_{2} = \alpha\beta M'_{1} + (1 + \alpha\beta)M'_{2}$$

$$M_{12} = M'_{12}$$

$$Eq. 3-71$$

$$\Im = -\beta (M'_1 + M'_2)$$
 Eq. 3-72

3.5.4. Equilibre dynamique

Le cas des vibrations sans dissipation d'énergie est considéré en premier temps. Ainsi, seules les énergies élastiques et cinétiques sont impliquées, l'énergie élastique étant responsable des forces potentielles dans la plaque alors que l'énergie cinétique est l'origine des forces d'inerties. A partir de l'expression donnée par Biot [25] pour un milieu poreux libre, l'énergie cinétique de la plaque est de la forme suivante :

$$E_{c} = \frac{1}{2} \int_{V} (\rho_{1} \dot{w}_{s}^{2} + 2\rho_{0} \dot{w}_{s} \dot{w} + m \dot{w}^{2}) dV = \frac{h}{2} \int_{S} (\rho_{1} \dot{w}_{s}^{2} + 2\rho_{0} \dot{w}_{s} \dot{w} + m \dot{w}^{2}) dS \qquad Eq. 3.73$$

Où *m* est un paramètre de masse qui en relation avec le fluide et la tortuosité τ_{∞} . L'énergie élastique s'exprime :

$$U = \frac{1}{2} \int_{V} (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^{s} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^{s} + \sigma_{12} \varepsilon_{12}^{s} + P_{f} \zeta) dV$$

= $\frac{1}{2} \int_{V} (\sigma_{11}^{s} \varepsilon_{11}^{s} + \sigma_{22}^{s} \varepsilon_{22}^{s} + \sigma_{12}^{s} \varepsilon_{12}^{s}) dV$
Eq. 3-74

Les équations d'équilibre dynamique peuvent être obtenues à partir du principe d'Hamilton, qui consiste à minimiser une fonction Lagrangienne, l'action mécanique, entre deux instants t_0 et t_1 [28]. La résultante sur x_3 de toutes les forces potentielles exercées sur un élément $dx_1 dx_2$ de la surface mi-épaisseur de la plaque poreuse est :

$$f_p = \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + q dx_1 dx_2 \qquad Eq. \ 3-75$$

Où $Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} dx_3$ et $Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} dx_3$ sont les efforts totaux de cisaillement le long de x_3 ,

q est la charge appliquée au solide, comme condition aux limites. Les forces d'inerties ont la forme suivante :

$$f_i = h(\rho_1 \ddot{w}_s + \rho_0 \ddot{w}) dx_1 dx_2 \qquad \qquad Eq. \ 3-76$$

Le déplacement relatif fluide/solide étant normal à la surface mi-épaisseur, l'équilibre des moments du matériau selon x_1 et x_2 , respectivement, s'écrit [30] :

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + Q_2 = 0 \qquad \qquad Eq. \ 3-77$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - Q_1 = 0 \qquad \qquad Eq. \ 3-78$$

Avec $M_{12} = -M_{21}$. L'égalité entre f_p et f_i , la combinaison entre les équations (Eq. 3-75), (Eq. 3-77) et (Eq. 3-78) pour éliminer Q_1 et Q_2 , l'équation d'équilibre en termes moments est :

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = -q + h(\rho_1 \ddot{w}_s + \rho_0 \ddot{w}) \qquad Eq. \ 3-79$$

Les équations (3-71) permettent ainsi d'écrire l'équation d'équilibre en termes de moments :

$$\left(1+\alpha\beta\right)\left(\frac{\partial^2 M'_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 M'_2}{\partial x_2^2}\right)+\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 M'_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 M'_1}{\partial x_2^2}\right)-2\frac{\partial^2 M'_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-q+h(\rho_1\ddot{w}_s+\rho_0\ddot{w})\qquad Eq.$$

Finalement, la première équation d'équilibre en termes déflexion peut être obtenue en utilisant les expressions (Eq. 3-62) :

$$(1 + \alpha\beta + \alpha\beta\nu)D\nabla^4 w_s + h(\rho_1\ddot{w}_s + \rho_0\ddot{w}) = q \qquad \qquad Eq. \ 3-81$$

Une deuxième relation peut être obtenue à partir de l'équation (Eq. 3-57) : les forces microscopiques par unité de volume V agissant sur le fluide tout au long de x_3 s'écrivent de la façon suivante :

$$\frac{\partial P_f}{\partial x_3} = \alpha M \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} \right) - M \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \qquad Eq. \ 3-82$$

Alors que les forces d'inerties par unité de volume sont $f'_i = \rho_0 \ddot{w}_s + m\ddot{w}$. L'égalité et l'intégration, par rapport à l'épaisseur de la plaque, des forces microscopiques et les forces d'inerties donnent la seconde équation d'équilibre dynamique :

$$\alpha Mh\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2}\right) - h(\rho_1 \ddot{w}_s + \rho_0 \ddot{w}) = \Delta P \qquad Eq. \ 3-83$$

Tel que $\Delta P = P_f(-h/2) - P_f(+h/2)$ est la différence de pression correspondante aux conditions aux limites appliquées sur le fluide à $x_3 = \pm h/2$.

En remplaçant β par son expression, les équations couplées de l'équilibre dynamique s'écrivent finalement sous cette forme :

$$\left(D + \frac{\alpha^2 M h^3}{12}\right) \nabla^4 w_s + h(\rho_1 \ddot{w}_s + \rho_0 \ddot{w}) = q \qquad Eq. \ 3-84$$

$$\alpha Mh\nabla^2 w_s - h(\rho_0 \ddot{w}_s + m\ddot{w}) = \Delta p \qquad \qquad Eq. \ 3-85$$

La première équation modélise la réponse élastique instantanée de la plaque alors que la seconde décrit le comportement relatif entre le solide et le fluide. Les interactions élastiques sont quantifiées par les termes ou le coefficient de couplage α apparaît. Les interactions inertielles sont décrites par les termes contenant les accélérations. Dans une situation bien réelle, le comportement relatif fluide-solide dans les pores est responsable de la dissipation d'énergie avec un retard de phase. Les effets de dissipation par friction

visque use peuvent être introduits en considérant un coefficient m dépendant de la fréquence :

$$m(\omega) = \frac{\rho_{22}(\omega)}{\phi^2} = \frac{\tau(\omega)}{\phi}\rho_0 \qquad \qquad Eq. \ 3-86$$

 ω étant la fréquence angulaire. Les coefficients m et ρ_{22} ont été défini par Biot [25].les déplacements, q et ΔP sont supposées dépendre du temps. La tortuosité dynamique $\tau(\omega)$ est introduite par Johnson et al. [31] et peut être décrite en quantité complexe :

$$\tau(\omega) = \tau_{\infty} - j \frac{b}{\phi \rho_0} F(\omega) \qquad \qquad Eq. \ 3-87$$

Où *b* est le coefficient de friction de Biot. La fonction de correction de la viscosité $F(\omega)$ est égale à 1 en basses fréquences et décrit les effets de la friction visqueuse en hautes fréquences. Divers modèles peuvent être utilisés pour évaluer cette fonction [11,14,31-33].

Les solutions des équations de la plaque s'expriment sous la forme des séries infinies :

$$w_{s}(x_{1}, x_{2}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^{s} \theta_{m}(x_{1}) \psi_{n}(x_{2}) \qquad Eq. \ 3-88$$

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \theta_m(x_1) \psi_n(x_2)$$
 Eq. 3-89

Chacun des termes de w_s et w satisferont les équations (Eq. 3-88) et (Eq. 3-89). W_{mn}^s et W_{mn} sont les amplitudes du déplacement à la position (x_1, x_2) . $\theta_m(x_1)$ et $\psi_n(x_2)$ sont les fonctions qui se conforment aux conditions aux limites aux bords de la plaque. Si la plaque est en appui simple, $\theta_m(x_1) = \sin(m\pi/L_1)$ et $\psi_n(x_1) = \sin(n\pi/L_2)$ satisferont exactement les équations d'équilibre. L'insertion des équations (Eq. 3-88) et (Eq. 3-89) dans les équations (Eq. 3-84) et (Eq. 3-85) permet d'avoir un système à deux équations et deux inconnues pour chaque couple (m, n). En résolvant ce système, les coefficients W_{mn}^s et W_{mn} sont déterminés. Finalement, les solutions w_s et w sont obtenues.

Pour la validation, des essais expérimentaux ont été réalisés. La figure 3-12 décrit le dispositif où la plaque poreuse est excitée par une pression surfacique (haut parleur) et un accéléromètre mesure ainsi le déplacement de la plaque.



Figure 3-12 : Dispositif expérimental [23-24]

Le tableau 3-5 donne les caractéristiques géométriques et poroélastiques du matériau de la plaque. Dans ce tableau, P. Leclaire ne donne pas les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique puisque les approximations prises en compte laissent la formulation indépendante de ces variables.

Caractéristique	Valeur
Longueur a (m)	0.5
Largeur b (m)	0.5
Epaisseur h (mm)	10.7
Masse volumique $ ho_{ m l}$ (kg/m³)	136
Module de Young E (Pa)	2.1×10^{7}
Coefficient de poisson ν	0.35
Coefficient d'amortissement η	0.1
Porosité ϕ	0.7
Tortuosité $lpha_{_{\infty}}$	1.2
Perméabilité κ (m ²)	$2.7 imes 10^{-10}$
Densité du fluide $ ho_0$ (kg/m ³)	1.213

Tableau 3-5 : Caractéristiques du matériau poreux testé [28-29]

La confrontation entre les résultats expérimentaux et analytiques est présentée sur la figure 3-13. La plage de fréquence s'étend entre 1 et 250 Hz. Dans le cas d'une sollicitation sous forme d'une pression surfacique, les résultats se concordent avec une erreur de 5%.



Figure 3-13 : Flexion calculée (-) et mesurée (...) [23-24]



Figure 3-14 : Flexion au centre d'une plaque poreuse en appui simple. (...) Theodorakopoulos and Beskos (-) P. Leclaire [23-24]

P. Leclaire a comparé les solutions analytiques de sa formulation avec ceux de Theodorakopoulos [29] sur le même matériau poreux. La figure 3-14 présente donc la déflexion dans les cas d'une pression surfacique et d'une force ponctuelle. Cela permet aussi de valider la formulation 2D donnant les mêmes résultats que d'autres formulations, avec sûrement un gain de temps de calcul.

3.6. Implémentation Numérique

En premier temps, il s'agit d'implémenter, sur un outil numérique, la formulation mixte de Biot afin de mener une caractérisation acoustique des milieux. D'un autre côté, pour étudier la flexion du milieu suite à une sollicitation ponctuelle, on implémente la formulation de P. Leclaire vu sa simplicité et le gain du temps de calcul qu'elle offre. Cette partie est organisée de la manière suivante : en premier temps, on décrit l'environnement numérique. L'outil utilisé est Comsol Multyphysics. Ensuite, on décrit l'implémentation numérique des lois de comportements.

3.6.1. Modélisation des matériaux poroélastiques sur Comsol

Comsol est un outil d'analyse d'éléments finis désigné spécialement pour le traitement des problèmes multi physiques : l'utilisateur combine un couple de modules physiques de Comsol prédéfinis et introduit des termes de couplage additionnels aux équations constitutives. Bien évidemment, chacun des modes physiques peut être utilisé individuellement dans le cas de résolution des problèmes classiques non multi physiques. Concernant les matériaux poreux, Comsol ne fournit pas un module spécifique. Mais le fait que des tels matériaux ayant une structure rigide soient modélisés en utilisant l'approche du fluide équivalent, le module dynamique des fluides voire aussi le module acoustique, dans Comsol, peuvent être utilisé. En plus de ça, les matériaux poreux ayant une structure élastique ne peuvent pas être modélisés multi physiquement, par exemple en utilisant le module mécanique des solides et des fluides pour modéliser respectivement la phase solide et fluide. Ceci vu non seulement l'ignorance des termes de couplage multi physique mais aussi un fort couplage dans les équations d'équilibre. En conséquence, le besoin d'utilisation du module EDP est nécessaire pour implémenter par exemple, soit la formulation classique ou mixte de Biot, qui sont mis sous forme d'ensemble d'équations différentielles.

Sur Comsol, la forme générale du PDE (pour une analyse temporelle) doit être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\Gamma \cdot \nabla = F \qquad \qquad Eq. \ 3-90$$

Ou Γ est la matrice des vecteurs flux et F est la partie droite du vecteur (les deux peuvent être fonctions des cordonnées spatiales, les variables inconnues **u** et/ou leurs drivées dans l'espace), alors que ∇ est le vecteur opérateur gradient/divergence. Les dimensions de ces quantités sont comme suit :

$$\dim \Gamma = M \times N \qquad \dim \nabla = N \times 1 \qquad \dim F = M \times 1 \qquad Eq. \ 3-91$$

Ici, M est le nombre d'équations égal au nombre des inconnues (dim $\mathbf{u} = M \times 1$), alors que N est la dimension de l'espace et donc dépendant du problème, il peut être 1, 2 ou 3. En cordonnées cartésiennes, le vecteur opérateur gradient/divergence ∇ , pour N = 3, est définit comme suit :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$
 Eq. 3-92

Les conditions aux limites dans le cas d'une PDE sous sa forme générale sont comme suit :

$$0 = R$$

- $\Gamma n = G + \left[\frac{\partial R}{\partial u}\right]^T \mu$ Eq. 3-93

Ou les vecteurs R et Γ peuvent être fonctions des cordonnées spatiales, les variables inconnues u, et/ou leurs dérivés spatiales, alors que n est le vecteur unité normal sortant de la surface limite. Ce sont respectivement les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Le terme μ dans les conditions aux limites de Neumann est synonyme du multiplicateur de Lagrange.

Dans ce qui suit, on présente toutes les expressions nécessaires pour programmer les équations de la poroélasticité sur Comsol dans le module PDE, forme générale. Ensuite, on présente les plus importantes conditions aux limites pour les programmer sur cet outil.

3.6.2. Formulation mixte déplacement – pression de la poroélasticité

Pour analyser le comportement harmonique d'un milieu poreux, on utilise la formulation mixte de Biot : équations (Eq. 3-53) et (Eq. 3-55). Cette dernière dépend de 4 variables (M = 4) : les déplacements de la phase solide, u_i , et la pression du fluide, p. A partir de ces deux équations, les matrices Γ et F, constituant la forme (Eq. 3-90), sont identifiées :

Concernant les conditions aux limites, différentes situations se présentent. Ces dernières sont analysées ci-dessous :

3.6.2.1. Champ de pression imposé

Un champ de pression imposé \overline{p} sur une frontière du milieu poreux, permet d'écrire les relations suivantes :

$$\sigma_{ii}^{t} n_{i} = -\overline{p} n_{i} \qquad p = \overline{p} \qquad Eq. \ 3-96$$

qui expriment la continuité de la contrainte normale totale et la continuité de la pression à travers l'interface de la frontière. La contrainte totale est égale :

$$\sigma_{ij}^{t} = \sigma_{ij}^{s} + \sigma_{ij}^{f} = \sigma_{ij}^{s} - \phi p \delta_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^{s} - \phi \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}^{fs}}{\tilde{\lambda}^{f}}\right) p \delta_{ij}$$

$$= \mu^{s} \left(u_{i/j} + u_{j/i}\right) + \tilde{\lambda}^{s} u_{k/k} \delta_{ij} - \phi \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}^{fs}}{\tilde{\lambda}^{f}}\right) p \delta_{ij}$$

$$Eq. 3.97$$

Et en utilisant la deuxième condition aux limites $(p = \overline{p})$, la première peut être donc exprimée comme suit :

$$-\left[\mu^{s}\left(u_{i/j}+u_{j/i}\right)+\tilde{\lambda}^{s}u_{k/k}\delta_{ij}\right]n_{j}=\left[1-\phi\left(1+\frac{\tilde{\lambda}^{fs}}{\tilde{\lambda}^{f}}\right)\right]\overline{p}n_{i} \qquad Eq. \ 3.98$$

Et donc:

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ R_4 \end{bmatrix} \text{ où } \begin{cases} R_i = 0 \\ R_4 = \overline{p} - p \end{cases}$$
 Eq. 3-99

$$G = \begin{bmatrix} G_i \\ G_4 \end{bmatrix} \text{où} \begin{cases} G_i = \left[1 - \phi \left(1 + \frac{\tilde{\lambda}^{fS}}{\tilde{\lambda}^{f}} \right) \right] \overline{p} n_i \\ G_4 = 0 \end{cases} \quad Eq. \ 3\text{-}100$$

Quand une partie de la surface du milieu poreux est couplée à un milieu acoustique infini, la condition d'un bord libre peut être appliquée. Ceci se fait en supposant $\overline{p} = 0$.

3.6.2.2. Champ de déplacement imposé

Dans le cas d'un champ de déplacement imposé \overline{u}_i , les conditions sont les suivantes :

$$u_i = \overline{u}_i \qquad v_i n_i - u_i n_i = 0 \qquad Eq. \ 3-101$$

La première expression exprime la continuité entre les déplacements imposés et les déplacements de la phase solide, alors que la deuxième suppose la continuité des déplacements normaux entre la phase fluide et solide. Dans cette seconde condition, il est nécessaire de remplacer les déplacements de la phase fluide par la pression du fluide et les déplacements de la phase solide :

$$v_i = \frac{\phi}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{/i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i \qquad Eq. \ 3-102$$

Ce qui donne :

$$p_{i}n_{i} = \frac{\omega^{2}}{\phi} (\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{22}) u_{i}n_{i} \qquad \qquad Eq. \ 3-103$$

tel que :

$$\frac{\omega^2}{\phi} (\tilde{\rho}_{12} + \tilde{\rho}_{22}) = \frac{\omega^2}{\phi} (\rho_{12} + \rho_{22}) = \omega^2 \rho_0 \qquad Eq. \ 3-104$$

Après identification, les termes de R et G sont les suivants :

$$R_{i} = \overline{u}_{i} - u_{i} \quad R_{4} = 0$$

$$G_{i} = 0 \qquad G_{4} = -\frac{\omega^{2}}{\phi} (\widetilde{\rho}_{12} + \widetilde{\rho}_{22}) u_{i} n_{i}$$
Eq. 3-105

Pour étudier le cas d'un milieu poreux encastré à un mur rigide, l'hypothèse $\overline{u}_i = 0$ doit être prise en compte.

3.6.2.3. Couplage acoustique – poroélastique

Dans ce cas, les équations assurant la continuité des contraintes normales totales, de la pression acoustique et de l'écoulement du fluide sont les suivantes :

$$\sigma_{ij}^{t}n_{j} = -p^{a}n_{j} \qquad p = p^{a} \qquad (1 - \phi)u_{i}n_{i} + \phi v_{i}n_{i} = \frac{1}{\rho_{0}\omega^{2}}\nabla p^{a}n_{i} \qquad Eq. \ 3-106$$

Où p^a est la pression dans le milieu acoustique, ρ_0 sa densité et σ^t le tenseur de contrainte totale dans le matériau poroélastique. Les vecteurs G et R auront donc les composantes suivantes :

En plus de ça, la continuité de l'écoulement du fluide à l'interface du couplage peut être exprimée comme une accélération imposée sur le fluide dans le milieu acoustique. En remplaçant v_i par son expression (Eq. 3-102), l'accélération normale peut être obtenue :

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p^a n_i = \omega^2 \left[u_i n_i \left(1 - \phi \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \right) \right] + \omega^2 \left[\nabla p n_i \left(\frac{\phi^2}{\omega^2 \tilde{\rho}_{22}} \right) \right] \qquad Eq. \ 3.108$$

3.6.3. Modélisation de la flexion

Le choix de la formulation, décrivant la vibration d'une plaque poreuse, s'est porté sur celle de Leclaire. Cette formulation présente l'avantage majeur d'un gain du temps de calcul considérable vu qu'elle est en 2D, par rapport aux autres formulations. Les équations couplées de l'équilibre dynamique (Eq. 3-84) et (Eq. 3-85) décrivent le comportement de la plaque poreuse selon Leclaire. La première équation (Eq. 3-84) de l'équilibre dynamique modélise la réponse élastique instantanée de la plaque alors que la seconde décrit le comportement relatif entre le solide et le fluide. Les interactions élastiques sont quantifiées par les termes ou le coefficient de couplage α apparaît. Les interactions inertielles sont décrites par les termes contenant les accélérations.

Dans ces équations, q la charge ponctuelle et $\Delta P = P_f(-h/2) - P_f(+h/2)$ la différence de pression, correspondent aux conditions aux limites appliquées sur la plaque. La fonction de correction de la viscosité $F(\omega)$ est prise égale à 1 en basses fréquences, par Leclaire, et décrit les effets de la friction visqueuse en hautes fréquences. Divers modèles peuvent être utilisés pour évaluer cette fonction [11,14,31-33]. Une de ces formes s'exprime de la façon suivante [31] :

$$F(\omega) = \left(1 - i \frac{4\tau_{\infty}^2 \kappa^2 \rho_0 \omega}{\eta \Lambda^2 \phi^2}\right)^{1/2} \qquad Eq. \ 3-109$$

Dans la suite de notre travail, quelques approximations adoptées par Leclaire ne sont pas tenues en compte ici. Particulièrement, la fonction de correction $F(\omega)$ et les coefficients α et M. Ceci dans le but de faire intervenir toutes les caractéristiques poroélastiques du matériau poreux dans l'étude de la flexion d'une plaque poreuse. Finalement, la formulation de Leclaire dépend, outre des caractéristiques géométriques de la plaque, des caractéristiques poroélastiques (porosité ϕ , tortuosité α_{∞} , résistivité σ et les longueurs caractéristiques thermique et visqueuse) et paramètres mécaniques (densité ρ_1 , module d'Young E, coefficient de poisson ν et coefficient d'amortissement η).

L'implémentation se fait en 2D. Il s'agit de présenter une plaque de dimensions $0.5 \text{ m} \times 0.5 \text{ m} \times 0.011 \text{ m}$. La formulation est implémentée à l'aide du mode EDP. Comsol n'accepte pas, dans un de ses modes, des quantités contenant des dérivées d'ordre supérieur à 2. Il est ainsi nécessaire de considérer une 3^{ème} variable z:

$$z(x, y) = \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \qquad \qquad Eq. \ 3-110$$

En conséquence, les vecteurs Γ et F ont la forme suivante :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} & \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} & \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{D + \alpha^2 M h^3 / 12} (q + h\omega^2 (\rho w_s + \rho_f w)) \\ \frac{1}{\alpha M h} (\Delta P - h\omega^2 (\rho_f w_s + mw)) \\ z \end{pmatrix} \qquad Eq. \ 3-111$$

Au niveau des conditions aux limites, une condition d'encastrement s'écrit :

$$\begin{cases} w_s = 0\\ U_f = 0 \end{cases} \qquad \qquad Eq. \ 3-112$$

Or le déplacement relatif solide - fluide est définit sous cette forme :

$$w = \phi(U_f - w_s)$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{1}{\phi}w + w_s$$
Eq. 3-113

D'où les composantes de R et G:

$$R = \begin{pmatrix} w_s \\ \frac{1}{\phi} w + w_s \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Eq. \ 3-114$$

q et ΔP sont les conditions du chargement qu'on fixera selon la nature de sollicitation (pression, force ponctuelle,...). Pour une pression surfacique d'une valeur de 0.1, on prend :

$$\Delta P = q = 0.1 \text{ bars} \qquad Eq. \ 3-115$$

En appliquant une force ponctuelle au point (x_0, y_0) , on prend :

$$\Delta P = 0 q = dirac((x - x_0)(y - y_0)) Eq. 3-116$$

3.7. Conclusions

Les nombreuses études réalisées sur les matériaux cellulaires ont permis de mettre au point des lois de comportement qui décrivent le couplage entre la structure et le fluide constituant le milieu diphasique de ces matériaux. Cependant, nombreuses sont leurs caractéristiques intrinsèques qui dépendent de la nature de la structure (rigide ou élastique). En effet, elles sont neuf si la structure est élastique, sinon cinq dans le cas d'une structure rigide. Quelque soit la rigidité du squelette, ces paramètres physiques ont leurs impacts sur les performances choc et acoustique. Ceci n'étant possible de le voir que via la simulation numérique.

Ainsi dans ce chapitre, une attention particulière est donnée aux caractéristiques poroélastiques de ces matériaux. Ensuite, on a présenté les deux formulations de Biot valables pour les milieux poreux à squelette élastique. D'autres formulations dérivent de celle de Biot dans le but de faiblir le coût et donc le temps du calcul. On conclut ce chapitre par présenter l'outil numérique sur lequel l'implémentation sera réalisée. Effectivement, les deux formulations choisies pour le calcul numérique devraient se mettre sous une forme que l'outil numérique, Comsol, accepte. Différents cas de conditions aux limites sont décrits.

Références

[1] M. Henry, Mesures des paramètres caractérisant un milieu poreux. Etude expérimentale du comportement acoustique des mousses aux basses fréquences. Thèse de l'Université du Maine, 1997.

[2] M. Melon, *Caractérisation de matériaux poreux par ultrasons basse-fréquence (20-500 kHz)*, Thèse de l'Université du Maine, 1996.

[3] J. F. Allard, *Modèles récents pour la propagation du son dans les matériaux poreux*. J. de Physique, IV:177-182, 1994.

[4] D.L. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen. *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media*. J. Fluid Mech., 176:379-402, 1987.

[5] Y. Champoux and J.-F. Allard. *Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media*. J. Appl. Phys., 70(4):1975-1979, 1991.

[6a] E. Mariez, S. Sahraoui, *Elastic constants of polyurethane foam's skeleton for Biot model*, Internoise 96, Liverpool, Royaume Uni, 1996.

[6b] E. Mariez, S. Sahraoui, *Measurement of mechanical anisotropic properties of acoustic foams for the Biot model*, Internoise 97, Budapest, Hongrie, 1997.

[7] ASTME756: *Standard test method for measuring vibration-damping properties of materials*. American Society for Testing and Materials, 1998.

[8] C. Zwikker et C.W. Kosten. Sound Absorbing Materials. Elsevier, 1949.

[9] M.R. Stinson. *The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape.* J. Acoust. Soc. Am., 89(2):550-558, 1991.

[10] M.A. Delany and E.N. Bazley. Acoustic properties of fibrous absorbent materials. Appl. Acoust., 3:105-116, 1970.

[11] J.-F. Allard. Propagation of sound in porous media: Modelling sound absorbing materials. Elsevier, 1993.

[12] H. Tijdeman. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. J. Sound Vib., 39(1):1-33, 1975.

[13] M.A. Biot. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low frequency range.* J. Acoust. Soc. Am., 28:168-178, 1956.

[14] M.A. Biot. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. higher frequency range.* J. Acoust. Soc. Am., 28:179-191, 1956.

[15] D. Lafarge, P. Lemarinier, and J.-F. Allard. *Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies*. J. Acoust. Soc. Am., 102(4):1995-2006, 1997.

[16] S. Pride. *Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media. Physical Review*, Condensed Matter, 50(21):15678-15696, 1994.

[17] J.-L. Auriault, L. Borne, and R. Chambon. *Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of darcy*. J. Acoust. Soc. Am., 77(5):1641-1650, 1985.

[18] D. Lafarge. *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*. PhD thesis, Université du Maine, 1993.

[19] O. Hilbrunner. *Caractérisation des matériaux viscoporoélastiques à usage vibroacoustique*. Mémoire de DEA - Ecole Centrale de Lyon, septembre 2000.

[20] F. P. Mechel, Ausweitung der absorberformel von Delany und Bazley zu tiefen frequenzen. Acustica, 1976, vol 35, p 210.

[21] T. Dupont, PhD Thesis, *Transparence et absorption acoustiques des structures microperforées*, INSA – 2002.

[22] D. K. Wilson, *Simple relaxational models for the acoustical properties of porous media*, Appl. Acoust. 50, 171–188, 1997.

[23] P. Leclaire et K. V. Horoshenkov, *Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid*, Journal of Sound and Vibration, 247, 1-18, 2001.

[24] P. Leclaire, K.V. Horoshenkov, M. J. Swift et D. C. Hotersall, *The vibrational response of a clamped rectangular porous plate*, Journal of Sound Vibration, 247, 19-31, 2001.

[25] M.A. Biot., *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media*, Journal of Applied Physics, 33, 1482-1498, 1962.

[26] M. A. Biot et D. G. Willis, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, Journal of Applied Mechanics, 24, 594-601, 1957.

[27] M. A. Biot, *Theory of buckling of a porous slab and its thermoelastic analogy*, Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, 31, 194-198.

[28] W. Nowacki, Dynamics of Elastic Systems. London: Chapman & Hall, 1963.

[29] C. Theodorakopoulos et D. E. Beskos, *Flexural vibration of poroelastic plates*, Acta Mechanica, 103, 191-203, 1994.

[30] S. Timoshenko et S. Woinowsky, Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959.

[31] D. L. Johnson, J. Koplik et R. Dashen, *Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid saturated porous media*, Journal of Fluid Mechanics, 176, 379-402, 1987.

[32] K. Attenborough, *Models for the acoustical properties of air-saturated granular media*, Acta Acoustica, 1, 213-216, 1993.

[33] K. V. Horoshenkov, K. Attenborough et S. N. Chamdler-Wilde, *Padé approximant for the acoustical properties of rigid frame porous media with pore size distribution*, Journal of Acoustical Society of America, 104, 1198-1209.

4. Relations Produit – Performances : Modèles Krigeage

4.1. Introduction

Pour des raisons de coût, de nombreux phénomènes scientifiques sont étudiés, non plus via l'expérimentation physique, mais à l'aide de modèles numériques. En effet, les progrès de ces dernières années concernant la modélisation mathématique de ces phénomènes ainsi que leur traitement numérique, permettent une étude extrêmement réaliste. De façon schématique, un modèle numérique peut être considéré comme un programme. Le simulateur prend des variables en entrée et donne une ou plusieurs réponses en sortie. Une expérience numérique consiste alors à fixer un vecteur x de valeurs pour les variables d'entrée du simulateur puis à récolter la ou les réponses de celui-ci. On étudie ensuite le comportement de cette réponse en fonction des variations des variables d'entrée. Cependant, malgré les progrès des outils informatiques, le temps de calcul pour une expérience numérique reste très long. L'objectif est donc de remplacer la réponse du simulateur par un modèle statistique simple représentant au mieux cette réponse. Nous sommes alors confrontés à deux problématiques : le choix des valeurs des variables d'entrée, $x_1, ..., x_n$, de façon à récolter un maximum d'informations sur le comportement de la réponse en un minimum de simulations. Et d'un autre côté, il est question du modèle approprié aux réponses du simulateur $y(x_1), \dots, y(x_n)$. Ce modèle est ensuite utilisé pour répondre à différentes questions telles : la prédiction de la réponse du simulateur en des points non testés par des simulations, la détermination d'une valeur d'une variable d'entrée optimisant le phénomène étudié, l'ajustement d'un modèle numérique à des données expérimentales, la sélection des variables d'entrée influant réellement sur la réponse (« screening »), etc.

Ce chapitre a pour but de mettre au point des modèles statistiques exprimant les caractéristiques choc et acoustique des matériaux poreux en fonction des paramètres poroélastiques. Les caractéristiques acoustiques sont déterminées en reproduisant numériquement l'essai expérimental au Tube de Kundt. La loi de comportement implémentée est celle de Biot, formulation mixte, valable pour un matériau poreux isotrope à squelette élastique. Les entrées du simulateur sont les caractéristiques poroélastiques et les sorties sont l'impédance de surface et le coefficient d'absorption acoustique. Au niveau choc, le *HIC* (Head Injury Criterion) est défini comme sortie du simulateur. Ainsi, en première partie de ce chapitre, on décrit la technique de modélisation utilisée : le krigeage. Pour le bon déroulement de l'étude, un plan d'expériences est mis en place. Ce plan contient différents jeux de paramètres d'entrée occupant tout l'espace de conception (plages de variation des caractéristiques poroélastiques). En deuxième point, on définit les différentes entrées et sorties de la problématique avant de valider l'implémentation numérique avec des résultats de

référence. Pour les caractéristiques acoustiques, on confronte les indicateurs acoustiques (impédance de surface et absorption acoustique) avec ceux obtenus à partir du modèle de fluide équivalent, modèle de Delany et Bazelet et modèle de Biot analytique. Côté choc, la validation se fait en comparant les résultats numériques de P. Leclaire avec ceux de la formulation mixte de Biot. En dernière partie, il s'agit d'appliquer le krigeage pour la mise en place des modèles empiriques robustes exprimant l'impédance de surface, l'absorption acoustique et le *HIC* en fonction de toutes les caractéristiques intrinsèques du milieu poreux. La validation de nos méta-modèles est réalisée sur quelques types de matériaux poreux dont les caractéristiques ne sont pas incluses dans le plan d'expériences. Sur les mêmes jeux des paramètres, on confronte nos résultats à ceux obtenus via le modèle de Delany et Bazelet.

4.2. Modélisation des Essais Déterministes

L'objectif de la modélisation des essais déterministes est de remplacer la réponse du simulateur par un modèle statistique simple représentant au mieux cette réponse. Deux problématiques s'imposent : le choix des valeurs des variables d'entrée, $x_1, ..., x_n$, de façon à récolter un maximum d'informations sur le comportement de la réponse en un minimum de simulations. Et d'un autre côté, il est question du modèle statistique approprié aux réponses du simulateur $y(x_1), \dots, y(x_n)$. Ce modèle est ensuite utilisé pour répondre à différentes questions telles : la prédiction de la réponse du simulateur en des points non testés par des simulations, la détermination d'une valeur d'une variable d'entrée optimisant le phénomène étudié,... Ces problématiques sont proches de celles rencontrées en expérimentation physique mais certaines particularités des expériences numériques doivent être prises en compte pour le traitement. En effet, les expériences sont déterministes, c'est-à-dire que deux simulations avec deux jeux de variables d'entrée identiques donnent la même réponse. D'un autre côté, les variables d'entrée sont très nombreuses. En effet, aux variables liées au phénomène physique, viennent s'ajouter des variables dues au modèle numérique (par exemple une taille de maillage). De plus aucune contrainte expérimentale ne permet de réduire la plage de variation des variables qui peut être alors très grande. C'est pourquoi une phase initiale de « screening » pour trier les variables influant réellement sur la réponse est primordiale. Et pour finir, la réponse du simulateur est souvent irrégulière du fait de la complexité des modèles mathématiques et cette irrégularité n'est pas masquée par une erreur expérimentale.

Ainsi dans cette partie, on rappelle le type de modélisation utilisée lors de cette étude. Le modèle, ses composantes et la procédure de sa définition sont décrits avant de justifier le choix du plan latin hypercube comme plan d'expériences.

4.2.1. Modèles d'approximation pour les essais déterministes

Une variété de modèles et techniques d'approximation existe pour la construction des approches empiriques à partir d'expériences déterministes. La méthodologie des surfaces de réponse [1-4] et les méthodes des réseaux de neurones [5-7] sont deux approches connues permettant une construction simple et rapide d'approximations d'analyses numériques complexes. Le modèle d'interpolation, connu sous le nom kriging, est de plus en plus utilisé dans la conception et l'analyse des d'expériences déterministes [8-11]. La méthode de base radiale [12-13] commence elle - aussi à attirer les lecteurs. D'autres méthodes d'approximation [14-19].

Malgré la variété des approximations, les études comparatives entre les approches restent limitées. Quelques travaux méritent d'être mentionnés. Ainsi, Simpson et al. [20] ont utilisé le krigeage et la méthode des surfaces des réponses dans le cadre d'une conception robuste d'un jet aerospike. Les deux méthodes ont été utilisées aussi par Giunta et al [21] dans deux cas d'études : problème à 5 variables et problème à 10 variables. Pour modéliser le comportement thermomécanique non linéaire d'un moteur, Varadarayan et al [22] ont fait appel aux réseaux de neurones et la méthode des surfaces des réponses. Dans le domaine de la sécurité automobile, et plus particulièrement l'analyse du crash, 4 méthodes d'approximations (méthode des moindres carrés, réseaux des neurones, régression pas à pas) ont été adopté par Yang et al. [23] pour la construction d'un méta modèle de crash. Pour finir, Jin et al [24] ont étudié la précision, la robustesse et la transparence de quelques méthodes d'approximation (méthode de surface des réponses, fonction à base radiale, krigeage).

Dans cette partie, la méthode du krigeage est analysée en montrant les inconnues à déterminer afin de définir complètement nos méta-modèles. Puis, on présente nos arguments dans le choix du type du plan d'expériences utilisé pour l'obtention des modèles robustes.

4.2.2. Principe du krigeage

La méthode du krigeage est proposée par Krige et formalisée par Matheron, dans le contexte d'analyses de données géologiques (prédiction de la distribution spatiale de minerais à partir d'un ensemble de forages). La fonction y à estimer s'écrit de la façon suivante :

$$y(x) = F(x) + z(x)$$
 Eq. 4-1

Où F est un modèle de régression utilisé dans le cadre des approximations globales alors que z est un modèle de corrélation spatiale caractérisant les déviations « locales ».

La particularité de cette méthode consiste à ce que la corrélation soit fonction de la distance entre les points (dans l'espace des variables de conception x). Le modèle de corrélation z est choisi de manière à représenter le comportement d'une variable aléatoire de moyenne nulle, interpolant les m points de l'échantillon de données disponibles et tel que la variance soit minimale sur l'ensemble des m points. L'algorithme de krigeage utilisé ici est le DACE. Dans la suite, on décrit la boîte à outils Matlab développée à l'UT Danemark. Les données du problème disponibles pour m sites, sont

Sites
$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_m \end{bmatrix}$$
 \longrightarrow réponses $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}$

Le modèle a la forme suivante :

$$y = F(\beta, x) + z(x) \qquad \qquad Eq. \ 4-2$$

Tel que β sont les paramètres de régression et :

$$F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta}_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \dots + \boldsymbol{\beta}_p f_p(\boldsymbol{x}) = \underbrace{f(\boldsymbol{x})^T}_{(1 \times p)} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\beta}}_{(p \times 1)} Eq. 4-3$$

z(x) est le processus aléatoire muni d'hypothèses statistiques :

$$E(z) = 0$$
 $Cov[z(x), z(w)] = E[z(x).z(w)]$ Eq. 4-4

L'idée ici est de prendre la corrélation entre deux points comme étant une fonction, monotone décroissante, de la distance. Souvent, on utilise :

$$E[z(x).z(w)] = \sigma^2 R(\theta, x, w) \qquad \qquad Eq. \ 4-5$$

La fonction de corrélation peut avoir, en fonction des paramètres θ à optimiser, plusieurs formes : linéaire, exponentielle, gaussienne, spline, et sphérique (Plus de détail dans le chapitre I). Alors que F peut être pris en compte comme une moyenne d'une réponse [25], ou polynôme [11] ou une régression trigonométrique [11,26] exprimant donc cette réponse en fonction des paramètres d'entrée.

A partir de S (sites disponibles), on peut définir F et R :

$$F = \begin{cases} f(s_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(s_m) \\ (m \times 1) \end{cases} \qquad R = \begin{cases} R(\theta, s_1, s_1) \dots & R(\theta, s_1, s_m) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot \\ R(\theta, s_1, s_1) \dots & R(\theta, s_m, s_m) \\ (m \times m) \text{ symétrique} \end{cases} \qquad Eq. \ 4^{-}6$$

Ainsi, pour n'importe quel x du domaine, on peut définir f(x), liée au modèle de régression, et r(x), vecteur de corrélation entre x et les différents sites s_i :

$$f(x) = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_i b_{ij} x_i x_j + \sum_j c_j x_j^2 \qquad Eq. \ 4-7$$

$$r(x) = \begin{cases} R(\theta, x, s_1) \\ \vdots \\ R(\theta, x, s_m) \\ (m \times 1) \end{cases} \qquad Eq. \ 4-8$$

D'où la possibilité de construire un prédicteur linéaire, une combinaison linéaire des réponses aux m sites :

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{Y} \qquad \qquad Eq. \ 4-9$$

L'erreur entre le prédicteur et y vaut :

$$\hat{y}(x) - y(x) = c^T Y - y(x)$$

$$= c^T (F\beta + Z) - (f(x)^T \beta + Z)$$

$$= c^T Z - Z + \underbrace{(F^T c - f(x))^T}_{\text{on impose = 0 (estimateur sans biais)}} .\beta$$

$$Eq. 4-10$$

Sous cette condition, l'erreur MSE (Mean Square Error) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= E \left[(\hat{y}(x) - y(x))^2 \right] \\
&= E \left[(c^T Z - z)^2 \right] \\
&= E \left[z^2 + c^T Z Z^T c - 2c^T Z z \right] \\
&= \sigma^2 \left(1 + c^T R c - 2c^T r \right)
\end{aligned}$$
Eq. 4-11

En formulation lagrangienne, la minimisation sous contrainte de l'erreur $\varphi(x)$ s'écrit :

$$L(c,\lambda) = \sigma^2 (1 + c^T R c - 2c^T r) - \lambda^T (F^T c - f) \qquad Eq. \ 4-12$$

Ce qui donne :

$$\hat{y}(x) = (r - F\tilde{\lambda})^T R^{-1} Y$$

= $r^T R^{-1} Y - (F^T R^{-1} r - f)^T (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} Y$
Eq. 4-13

Qu'après réécriture, on obtient :

$$\hat{y}(x) = r^{T} R^{-1} Y - (F^{T} R^{-1} r - f)^{T} \beta^{*}$$

= $f^{T} \beta^{*} + r^{T} R^{-1} (Y - F \beta^{*})$
= $f(x)^{T} \beta^{*} + r(x)^{T} \gamma^{*}$
Eq. 4-14

Finalement, si les *m* sites sont fixés a priori, l'estimation de *y* par le modèle de krigeage pour un nouveau point nécessite uniquement le calcul de f(x) et r(x), donc des coefficients de la fonction de régression et les θ (ceux de la fonction de corrélation).

La figure 4-1 présente un cas d'exemple, comparant les résultats obtenus par régression et ceux par krigeage par rapport aux donnés. La régression prise en compte ici est de second ordre. On présente aussi à part le modèle de corrélation de Gauss. Cette figure met en évidence l'avantage de krigeage dans le cas des phénomènes complexes obtenus par calcul numérique suite à l'impossibilité ou/et l'énorme coût expérimental d'aboutir à ce résultat.



Figure 4-1 : Mise en évidence de l'importance du krigeage

4.2.3. Plans d'expériences pour krigeage

Les plans d'expériences classiques (factoriels, composite, Box-Benhken,...) ne sont pas adaptés au krigeage. Dans ces plans, associés à des modèles polynomiaux du premier ou second degré, les points sont placés aux bords du domaine expérimental (Figure 4-2a) ce qui ne permet pas de détecter les possibles irrégularités de la réponse du simulateur à l'intérieur de l'espace de conception, mais aussi, l'impossibilité d'obtenir une bonne estimation du paramètre de corrélation θ puisque seules les grandes distances sont testées par le plan.

Initialement, les plans développés pour le krigeage étaient des plans optimaux pour certains critères statistiques. Un de ces critères est l'erreur quadratique moyenne intégrée, IMSE, [11] qui va sélectionner le plan qui minimise l'écart entre la réponse du simulateur et sa prédiction. Un second critère, qui mérite d'être mentionné, est le critère d'entropie [10,27] qui permet de mesurer la quantité d'information fournie par la simulation. On constate cependant que ce type de plans présente deux inconvénients majeurs. D'une part, leur construction numérique coûte très cher puisqu'elle nécessite l'optimisation numérique d'une fonction à $n \times d$ paramètres [11]. D'autre part, les plans ne sont optimaux que pour une structure de covariance donnée et notamment pour un paramètre de corrélation θ fixé a priori. De plus, Koehler et Owen [28] ont remarqué que les critères ci-dessus ont tendance a repoussé les points du plan sur les bords du domaine.

Les plans qui sont actuellement utilisés en krigeage sont ceux qui, à l'intérieur d'une classe de « space filling designs », optimisent un critère statistique. Cette technique permet ainsi de s'assurer une bonne répartition spatiale des points du plan, d'avoir un plan optimal pour le modèle, et de diminuer le temps de calcul de l'optimisation puisque le champ d'investigation est réduit à la classe de plans. En pratique les plans les plus utilisés sont les hypercubes latins. Chaque arête du domaine expérimental est divisé en n segments de même longueur de façon à obtenir un maillage du domaine. Un hypercube latin sélectionne alors n points parmi les n^d points de la grille de façon à ce que les n niveaux des variables d'entrée soient testés une fois par les simulations (Figure 4-2b).



Figure 4-2 : Deux plans à 2 facteurs de taille 9

Les hypercubes latins présentent beaucoup d'avantages : ils sont simples à construire. En effet, chaque colonne d'un hypercube est une permutation de $\{1,...,n\}$ ou de *n* symboles quelconques. Un avantage à signaler est le fait que ces points sont uniformément distribués sur chaque axe du domaine. Cependant, pour *n* fixé, ils existent $(n!)^d$ hypercubes latins possibles. Il est donc possible de sélectionner le plan optimisant un critère d'uniformité (discrépance,...) ou bien un critère statistique (IMSE, entropie,...). Park [29] propose un algorithme d'échange pour déterminer un hypercube optimal (localement) pour un critère donné. Collombier et Jourdan [30] ont montré qu'un hypercube optimal est robuste aux variations du paramètre de corrélation θ qui, rapellons-le, n'est pas connu lors de la construction du plan.

4.2.4. Récapitulatif

Compte tenu de la piètre qualité prédictive des modèles obtenus quand il s'agit d'expériences déterministes et d'un comportement non-régulier de la réponse (ici l'impédance de surface et l'absorption acoustique), il n'est pas envisageable d'utiliser les modèles approchés obtenus par régression linéaire pour évaluer et/ou optimiser les performances choc et acoustique, une telle imprécision pouvant amener à des prises de décisions non fondées ou à une évaluation des caractéristiques erronée. La nécessité de développer une approche de modélisation de réponses non-régulières, tout en contrôlant le coût de simulation induit, constitue un des objectifs ambitieux de ce chapitre. Afin d'atteindre cet objectif, une méthodologie de modélisation non-régulière, basée sur les plans d'expériences et les méthodes de modélisation géostatistique, est utilisée.

Les phénomènes physiques étudiés, c'est-à-dire la dépendance des caractéristiques choc et acoustique des matériaux cellulaires en fonction de leurs caractéristiques intrinsèques, sont très coûteux à modéliser vu les durées de l'expérience et de la simulation. Ce problème de réduction du temps de calcul et a fortiori du nombre simulations, justifie une approche par les plans d'expériences. La solution, dont le principe est de modéliser une surface de réponse non-régulière par rapport aux paramètres avec des plans d'expériences adaptés, nécessite plus de simulations qu'un plan d'expériences euclidien classique du second ordre (type plan composite centré ou Box-Benhken). Nos procéderons par ajustements itératifs, partant d'un plan d'expériences initial et le complétant au fur et à mesure du processus, afin de maîtriser le nombre de simulations et d'intégrer graduellement les non-régularités potentielles des réponses en production. Dès lors que la prédicitivité du modèle est satisfaisante, l'échantillonnage est jugé optimal. La figure 4-3 représente une illustration du principe de la méthodologie, dite adaptative, utilisée dans cette thèse.



Figure 4-3 : Principe de la méthodologie adaptative

4.3. Données de la Problématique

Dans cette partie, on présente les données nécessaires pour définir un modèle SADT (Figure 4-4).



Figure 4-4 : Modèle SADT

Ce modèle est composé par des entrées, des sorties, des paramètres fixes et le process. Ce dernier est un simulateur numérique dans notre cas d'étude.

4.3.1. Entrées du système

Le tableau 4-1 résume les paramètres poroélastiques intrinsèques des matériaux cellulaires définis au chapitre 3. Les plages de variation de ces variables sont tirées de la littérature. Ces caractéristiques présentent les entrées du système. On souhaite ainsi mettre au point des modèles complets sans négliger l'effet d'un paramètre. Le matériau poreux est supposé isotrope à squelette élastique. Dans le cas d'un squelette rigide, divers modèles empiriques existent déjà dans la littérature.

Paramètre	Unité	Limite inférieure	Limite supérieure
$ ho_{_1}$	kg/m³	8	200
ϕ	-	0.7	0.99
σ	Nsm^{-4}	1500	200000
$lpha_{_\infty}$	-	1	3
ν	-	0	0.44
Λ	μm	5	200
Λ'	μm	5	400
E	N/m^2	1000	5000000
η	-	0	1

Tableau 4-1 : Plages de variation des caractéristiques intrinsèques des matériaux poreux

4.3.2. Sorties du système

L'implémentation de la formulation mixte de Biot permettra de définir des indicateurs acoustiques qu'on présentera en premier temps. Alors que l'implémentation de la formulation de P. Leclaire permettra de définir un indicateur choc.

4.3.2.1. Indicateurs acoustiques

Les qualités acoustiques d'un matériau poreux sont estimées à partir de son coefficient d'absorption et de son impédance de surface – dans une configuration de montage bien précise – qui constituent des grandeurs fondamentales traduisant les performances absorbantes d'un milieu. Pour ce fait, le Tube de Kundt est quasiment l'unique moyen expérimental robuste pour quantifier ces indicateurs.

L'impédance de surface d'un échantillon poreux, définie par le rapport entre la pression et la vitesse normale sur sa face avant, dépend non seulement des paramètres caractéristiques du milieu considéré, mais également des conditions de montage particulières de l'échantillon poreux : épaisseur, condition limite arrière, incidence des ondes acoustiques... Dans notre cas, on considère un mur rigide placé derrière l'échantillon poreux.

Lorsqu'un matériau poreux est soumis à une excitation acoustique de pulsation ω sous incidence normale de direction x, la pression et la vitesse normale dans l'air en avant de l'échantillon poreux s'écrivent sous forme complexe, respectivement par les relations cidessous, avec la convention $e^{j\omega t}$, Z_0 étant l'impédance caractéristique de l'air.

$$p = Ie^{-jk_0x} + R e^{jk_0x} \qquad Eq. \ 4-15$$

$$v = \frac{1}{Z_0} \left[I e^{-jk_0 x} - R e^{jk_0 x} \right]$$
 Eq. 4-16

I et *R* représentent respectivement les ondes incidentes sur le milieu poreux et réfléchies par l'échantillon. Le coefficient de réflexion à la surface du matériau r = R/I s'exprime alors directement à partir de l'impédance caractéristique de l'air et de l'impédance de surface du milieu poreux $Z_s = p/v$:

$$r = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$
 Eq. 4-17

Le coefficient d'absorption sous incidence normale, défini à partir du coefficient de réflexion en énergie $\alpha_r = |r|^2$, se déduit par conséquent de la relation suivante :

$$\alpha = 1 - \alpha_r = 1 - \left| \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} \right|^2$$
 Eq. 4-18

L'impédance de surface peut être déterminée numériquement en implémentant la formulation mixte de Biot. Elle s'écrit :

$$Z_{s}(\omega) = \left[j\omega \left\{ \frac{\phi^{2}}{\omega^{2} \tilde{\rho}_{22}} p_{,3} + \left(1 - \phi \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \right) u_{3} \right\} \right]^{T} \qquad Eq. \ 4-19$$

4.3.2.2. Indicateur choc

On s'intéresse aux indicateurs décrivant l'amélioration de la sécurité des passagers et du piéton en utilisant les matériaux poreux. Dans ce cas, le matériau est placé par exemple au dessous du capot moteur permettant l'isolation acoustique d'une part et d'autre part l'absorption du choc. Plusieurs indicateurs ont été défini pour satisfaire ce besoin et donc donner une échelle de mesure du caractère absorbant du choc de ce matériau.

a. Indice de sévérité, Critère de blessure à la tête

L'objectif est de quantifier le risque, d'une blessure à la tête suite à un choc, par un nombre. Le premier modèle utilisé est l'indice de sévérité (*SI*), qui s'écrit :

$$SI = \int_{0}^{T} (a(t))^{2.5} dt \qquad Eq. \ 4-20$$

Où T est la durée de la décélération durant le choc et a(t) est la décélération à l'instant t. L'indice 2.5 [31-32] est choisi pour la tête. Autres indices sont utilisés pour autres parties du corps.

Un second critère (*HIC*) a été développé et basé sur la valeur moyenne de l'accélération dans la partie la plus critique de la décélération. La valeur moyenne de l'accélération a(t) dans un intervalle de temps de t_1 à t_2 s'écrit :

$$\overline{a} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \qquad Eq. \ 4-21$$

Pour le *HIC*, la forme est la suivante :

$$HIC = \max_{t_2 - t_1 < \Delta} \left\{ (t_2 - t_1) \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \right]^{2.5} \right\}$$
 Eq. 4-22

L'exposant 2.5 [31-32] est déterminé expérimentalement. Δ est un paramètre constant ayant la dimension d'un temps, généralement 36 *ms*. La durée du temps $(t_2 - t_1)$ présente le temps du contact lors de l'impact. Toutefois, c'est souvent très difficile de la quantifier par des évaluations physiques du test du choc avec des mannequins ou par des simulateurs en forme de tête. Dans l'évaluation du *HIC*, une durée du temps maximale de 15 ms doit être utilisée. Des durées plus longues peuvent être utilisées pour la prédiction des fractures du crâne. Le critère des blessures à la tête a pour but de prédire les blessures à la tête suite à un impact. Ces blessures peuvent être des lésions cérébrales, perte de connaissance, et fractures du crâne. Evidemment, une augmentation de la sévérité de l'impact entraîne une augmentation des probabilités et des potentiels des factures du crâne et des blessures au cerveau. Tyrel [33] propose des niveaux de la perte de conscience en relation avec les niveaux du *HIC* (Tableau 4-2).

HIC	Code AIS	Niveau de commotion cérébrale et blessure de tête
135 - 519	1	Maux de tête
520 - 899	2	Inconscience moins qu'une heure – fracture linéaire
900 - 1254	3	Inconscience entre 1 et 6 heures
1255 - 1574	4	Inconscience entre 6 et 24 heures – facture ouverte
1575 - 1859	5	Inconscience plus que 25 heures – grand hématome
> 1860	6	Sujet décédé

	Tableau	4 - 2:1	Niveaux	de	conscience	en	fonction	du	HIC
--	---------	----------------	---------	----	------------	----	----------	----	-----

b. Modèle de l'accélération pour une Mercedes

Une étude récente concernait la détermination du HIC pour une Mercedes. Cette investigation permet d'évaluer cet indice dans deux cas : sans et avec airbag. Pour ceci, on dispose des modèles analytiques de l'accélération en fonction du temps, qui faciliteront la détermination du HIC.



Figure 4-5 : Accélération temporelle



Figure 4-6 : *Variation du HIC* ($\times 10^{-3}$) *en fonction du temps et de d*

L'expression analytique de l'accélération en fonction du temps s'écrit dans le cas sans airbag (Figure 4-5-a) :

$$a(t) = \frac{16400}{(t-68)^2 + 400} + \frac{1480}{(t-93)^2 + 18}$$
 Eq. 4-23

Le temps de calcul étant très long, des simplifications sont réalisées. On définit une famille de courbes :

$$H_{t,d} = d \left(\frac{1}{d} \int_{t}^{t+d} a(T) dT \right)^{2.5}$$
 Eq. 4-24

Telle que :

 $d = t_2 - t_1$

Ensuite, on varie la valeur de *d*. La valeur du pic le plus grand de la famille des courbes obtenues donne le *HIC*. L'expression (Eq. 4-24) permet de présenter le *HIC* pour différentes valeurs de *d*. La figure 4-6-a montre que le pic le plus grand est obtenu pour d = 50. Pour ce pic, le *HIC* est approximativement égale à 725. Ces résultats sont raisonnables puisqu'il s'agit d'un cas d'étude réel (Mercedes Benz).

Dans le cas avec la présence d'airbag, le modèle de l'accélération est plus simple (Figure 4-5-b) :

$$a(t) = \frac{22000}{(t-74)^2 + 500} \qquad \qquad Eq. \ 4-25$$

De la même manière, on présente le HIC pour différentes valeurs de d (Figure 4-6-b). Cette étape permet de choisir une valeur unique d pour laquelle le HIC connaît le pic le plus remarqué. Ainsi, avec un airbag, le HIC est de 310 dans le cas d'une Mercedes Benz. Des récents tests de choc ont validé un HIC égal à 142 pour une Audi 8 avec un airbag (1995). Ainsi, le HIC tente de mesurer la sévérité des dommages à la tête en évaluant l'accélération de translation résultante et la durée de l'impulsion subies pendant l'impact. Un HIC inférieur ou égal à 1000 est ainsi considéré comme "sans danger", c'està-dire qu'il est très peu probable qu'une blessure mortelle se produise.

4.3.3. MEF : validation de l'implémentation numérique

La géométrie, les conditions aux limites et la description de l'implémentation numérique sont expertisées, avant d'étudier la convergence du calcul numérique. La validation vient ensuite, ceci est accompli en comparant les résultats numériques avec ceux des modèles empiriques (Delany et Bazelet,...), avec ceux du fluide équivalent, mais aussi obtenus analytiquement (résolution analytique unidimensionnelle) du modèle de Biot.

4.3.3.1. Formulation mixte de Biot – Indicateurs acoustiques

La géométrie utilisée dans la simulation numérique est celle utilisée expérimentalement (Tube de Kundt). Un modèle complet de la maquette expérimentale a été réalisé. Le tube est de diamètre 100 mm et de longueur 295 mm. Le matériau poreux est placé à l'une des deux extrémités. L'autre extrémité est sollicitée par une pression surfacique de 1 Pa. L'échantillon poreux est de diamètre 100 mm et d'épaisseur 25 mm, ainsi la longueur de la partie air est de 0.27 m. Cette partie est prise en considération comme domaine acoustique sur Comsol, qui prend en compte l'évolution de la pression acoustique dans le vide selon l'équation de Helmholtz. Côté poreux, la formulation mixte de Biot (u, p) est implémentée en mode EDP (Eq. 3-94 et 3-95).

Les deux formulations de Biot ont été implémentées sur Femlab par Zielinski et al. [34], en 3D, 2D et 1D. Dans les trois cas d'études, un maillage assez fin et un pas de fréquence de 1 Hz sont utilisés. Les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface sont déterminées à partir de l'équation (Eq. 4-19). La figure 4-7 présente les calculs numériques de l'impédance dans les cas 1D, 2D et 3D en utilisant les deux formulations de Biot (u-v) et(u-p).



Figure 4-7 : Impédance acoustique en 1D, 2D et 3D selon les deux formulations de Biot [34]

En tenant compte des résultats de la figure 4-7, la modélisation se simplifie en une dimension (Figure 4-8). Ce qui permettra une simplification de la problématique et un gain dans le temps de calcul utiles puisqu'il s'agit d'utiliser cette modélisation pour l'exécution du plan d'expériences.



Figure 4-8 : Géométrie de l'essai au Tube De Kundt en 1D

L'extrémité (1) du domaine I est sollicitée par une unité de pression surfacique. Concernant le domaine II, qui représente l'échantillon poreux, l'extrémité externe (4) est encastrée. Dans ce cas, les termes de G et R ont la forme (Eq. 3-105) en prenant $\overline{u}_i = 0$. Au niveau de l'interface acoustique - poreux, un couplage est nécessaire. Au point(3), les vecteurs G et R auront donc les formes (Eq. 3-107). En plus de ça, la continuité de l'écoulement du fluide à l'interface du couplage (Point 2) s'écrit sous la forme d'une accélération imposée sur le fluide dans le milieu acoustique (Eq. 3-108).

Dans la suite, la validation de l'implémentation numérique est réalisée en utilisant la laine de verre comme matériau poreux dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 4-3. Les indicateurs s'écrivent ainsi dans le cas 1D de la façon suivante :

$$Z_{s}(\omega) = \left[j\omega \left\{ \frac{\phi^{2}}{\omega^{2} \tilde{\rho}_{22}} p_{,x} + \left(1 - \phi \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} \right) \right) u \right\} \right]^{-1} \qquad Eq. \ 4\text{-}26$$
$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z_{s} - Z_{0}}{Z_{s} + Z_{0}} \right|^{2} \qquad Eq. \ 4\text{-}27$$

Paramètre	Unité	Valeur
ρ_1	kg/m ³	130
ϕ	-	0.94
σ	Nsm^{-4}	40000
$lpha_{_\infty}$	-	1.06
ν	-	0
Λ	μm	56
Λ '	μm	112
E	N/m^2	1100000
η	-	0.1

Tableau 4-3 : Caractéristiques intrinsèques de la laine de verre

Il vient ensuite l'étape de l'optimisation des paramètres du calcul (maillage, pas de fréquence) pour s'assurer de la convergence du calcul numérique. Pour cela, on adopte un maillage assez grossier et en raffinant, on cherche le maillage adéquat à partir duquel les résultats du calcul ne changent pas. En seconde étape, on étudie l'influence du pas du calcul : la fréquence ici. En effet, un pas de fréquence grand impliquerait peut être l'absence de certains détails dans l'évolution des solutions physiques du problème (particulièrement la résonance du squelette). La figure 4-9 présente le calcul pour différents maillages. C'est à partir de 512 éléments que la réponse numérique stabilise. L'étude du pas de calcul (Figure 4-10) a permis de valider le

bon pas de fréquence : 5 Hz. On a présenté ici les évolutions des parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption acoustique, en fonction de la fréquence.





Figure 4-10 : Etude de finesse de maillage

L'étape suivante consiste à valider nos résultats en les confrontant à ceux obtenues par les modèles empiriques définis dans la partie 3.3.2.

Selon son orientation l'impédance de surface dépend des caractéristiques du poreux mais aussi de ce qui se trouve à l'arrière de celui-ci. Elle dépend donc de l'impédance de surface de l'arrière du poreux (représentant toutes les régions accolées à l'arrière). Pour notre système Poreux – Mur Rigide, on utilise la relation suivante :

$$Z_s = -\frac{1}{\phi} j Z_c \cot(ke) \qquad \qquad Eq. \ 4-28$$

qui dépend de la constante de propagation, l'impédance caractéristique, la porosité et l'épaisseur du matériau poreux. La mesure numérique de l'absorption acoustique est effectuée numériquement en configuration 1D. Les résultats sont donc présentés sur la
figure 4-11. Le matériau choisi est une laine de verre dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 4-3.



Figure 4-11 : Absorption obtenue analytiquement et numériquement d'une laine de verre

Le modèle de base D&B nous semble donc le plus fidèle et adapté parmi tous les modèles proposés. Touefois, ce modèle reste valable que pour une certaine gamme des matériaux poreux (les matériaux fibreux). Dans le même contexte, Batifol et al. [35] ont étudié deux configurations différentes : sans lame d'air et avec une lame d'air séparant le matériau poreux et le mur rigide (Figure 4-12). Les parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface sont déterminées à partir du modèle de Delany et Bazelet et du calcul éléments finis sur Femlab. L'épaisseur de la lame d'air est supposée égale à l'épaisseur du matériau poreux.



Figure 4-12 : Deux configurations différentes : le matériau poreux est fixé au mur rigide, une lame d'air sépare le matériau poreux et le mur [35]



Figure 4-13 : L'impédance acoustique en incidence normale calculée analytiquement et numériquement pour les deux configurations [35]

Les calculs ont été réalisés entre 400 et 5000 Hz. Les résultats de Batifol (Figure 4-13) montrent une différence entre les résultats. Cette différence augmente avec la fréquence. Mais en restant dans la plage de fréquence de notre étude, peu de différence est observée.

a. Confrontation modèle du fluide équivalent - modèle de Biot

Il s'agit de vérifier si notre simulation est valide dans le cas où on considère notre matériau comme un fluide équivalent. Pour cela, on calcule la réponse de notre structure en implémentant le modèle de Johnson Allard (Eq. 3-15 et Eq. 3-16). Ce modèle dépend des paramètres poroélastiques en négligeant le caractère élastique du matériau poreux. On présente sur la figure 4-14 l'évolution des parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface et le coefficient d'absorption acoustique dans le cas du fluide équivalent et dans notre cas d'étude.

Les évolutions du coefficient d'absorption acoustique et de la partie imaginaire de l'impédance de surface montrent l'obtention de bons résultats. Alors que dans le cas de la partie réelle de l'impédance de surface, on s'attendait à ne pas observer la résonance de squelette à 450 H_z , chose qu'on trouve dans la simulation numérique. Cette résonance présente à priori peu d'influence sur l'évolution du coefficient d'absorption acoustique autour de cette fréquence.



Figure 4-14 : Confrontation Biot - Fluide équivalent

b. Confrontation modèle analytique - modèle numérique

Une couche de matériau poreux collé à un mur rigide, dans un champ acoustique normal dans le plan, est représentée sur la figure 4-15. Dans un champ acoustique normal, l'onde de cisaillement n'est pas excitée et uniquement les ondes de compression se propagent dans le matériau. Le paramètre utilisé pour représenter le comportement du matériau est l'impédance de surface.



Figure 4-15 : Couche du matériau poreux couplée à un mur rigide, dans un champ acoustique normal

Deux ondes incidentes et deux réfléchis se propagent dans les directions parallèles à l'axe x. Les vitesses de la partie solide et fluide dans le matériau sont respectivement [36] :

$$\dot{u}(x) = V_i^1 \exp(-j\delta_1 x) + V_r^1 \exp(j\delta_1 x) + V_i^2 \exp(-j\delta_2 x) + V_r^2 \exp(j\delta_2 x) \qquad Eq. \ 4-29$$

$$\dot{v}(x) = \mu_1 \Big[V_i^1 \exp(-j\delta_1 x) + V_r^1 \exp(j\delta_1 x) \Big] + \mu_2 \Big[V_i^2 \exp(-j\delta_2 x) + V_r^2 \exp(j\delta_2 x) \Big] \qquad Eq. \ 4-30$$

Dans ces équations, le terme temporel $\exp(j\omega t)$ a été enlevé, δ_1 et δ_2 (nombres d'onde complexes des ondes de compression) sont exprimés dans les équations (Eq. 4-31) et (Eq. 4-32), et, μ_1 et μ_2 (rapport entre la vitesse du squelette et la vitesse du fluide des deux ondes de compression) dans l'équation (Eq. 4-34). Les quantités V_i^1, V_r^1, V_i^2 et V_r^2 sont les vitesses du squelette à x = 0 associées respectivement avec la première onde (incidente et réfléchie) et la seconde onde de compression (incidente et réfléchie).

$$\delta_{1}^{2} = \frac{\omega^{2}}{2\left(\tilde{K}^{s}\tilde{\lambda}^{f} - \tilde{\lambda}^{fs^{2}}\right)} \left[\tilde{K}^{s}\tilde{\rho}_{22} + \tilde{\lambda}^{f}\tilde{\rho}_{11} - 2\tilde{\lambda}^{fs}\tilde{\rho}_{12} - \sqrt{\Delta}\right] \qquad Eq. \ 4-31$$

Où

$$\Delta = \left(\tilde{K}^{s} \tilde{\rho}_{22} + \tilde{\lambda}^{f} \tilde{\rho}_{11} - 2 \tilde{\lambda}^{fs} \tilde{\rho}_{12}^{2} \right) - 4 \left(\tilde{K}^{s} \tilde{\lambda}^{f} - \tilde{\lambda}^{fs^{2}} \right) \left(\tilde{\rho}_{11} \tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^{2} \right) \qquad Eq. 4-33$$

$$\mu_{i} = \frac{K^{3} \delta_{i}^{2} - \omega^{2} \tilde{\rho}_{11}}{\omega^{2} \tilde{\rho}_{12} - \tilde{\lambda}^{fs} \delta_{i}^{2}} \qquad i = 1,2 \qquad \qquad Eq. \ 4-34$$

Les contraintes dans le matériau [44] sont :

On peut définir 4 impédances caractéristiques, parce que les deux ondes se propagent simultanément dans l'air et dans le squelette du matériau poreux. Dans le cas des ondes se propageant suivant la direction x_3 , l'impédance caractéristique reliée à la propagation dans l'air est :

$$Z^{f} = p/(j\omega v_{3}) \qquad \qquad Eq. \ 4-37$$

Les déplacements macroscopiques du squelette et de l'air sont parallèles à la direction x_3 , et en utilisant l'équation (Eq. 3-49), l'équation (Eq. 4-37) peut être réécrite pour les deux ondes de compression :

$$Z_1^f = \left(\widetilde{\lambda}^f + \widetilde{\lambda}^{f_s} / \mu_1\right) \frac{\delta_1}{\phi \omega} \qquad Eq. \ 4\text{-}38$$

$$Z_{2}^{f} = \left(\tilde{\lambda}^{f} + \tilde{\lambda}^{fs} / \mu_{2}\right) \frac{\delta_{2}}{\phi \omega} \qquad \qquad Eq. \ 4-39$$

L'impédance caractéristique reliée à la propagation de squelette est :

$$Z^{s} = -\sigma_{33}^{s}/(j\omega u_{3})$$
 Eq. 4-40

En utilisant l'équation (Eq. 3-48), l'équation (Eq. 4-40) peut se réécrire pour les deux ondes :

$$Z_1^s = \left(\widetilde{\lambda}^f + \widetilde{\lambda}^{fs} \mu_1\right) \frac{\delta_1}{\omega} \qquad \qquad Eq. \ 4-41$$

$$Z_2^s = \left(\widetilde{\lambda}^f + \widetilde{\lambda}^{f_s} \mu_2\right) \frac{\delta_2}{\omega} \qquad \qquad Eq. \ 4-42$$

A x = 0, ou le mur et le matériau poreux sont en contact, les vitesses sont nulles :

$$\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0$$
 Eq. 4-43

Ax = -l, le matériau poreux est en contact avec l'air libre. La figure 4-16 présente la géométrie étudiée.

Figure 4-16 : Conditions aux limites de la couche mince d'air et du matériau poreux

Si $p(-l-\varepsilon)$ est la pression dans l'air libre au côté gauche de la couche mince, $\sigma_{xx}^{s}(-l+\varepsilon)$ et $\sigma_{xx}^{f}(-l+\varepsilon)$ sont les contraintes agissantes sur l'air et sur le squelette du côté droite de l'air libre. La résultante des forces sur agissant sur la couche mince est :

$$\Delta F = p(-l-\varepsilon) + \sigma_{xx}^{s}(-l+\varepsilon) + \sigma_{xx}^{f}(-l+\varepsilon) \qquad \qquad Eq. \ 4-44$$

La force tend vers zéro avec ε , et la condition aux limites pour les contraintes à x = -lest:

$$p(-l) + \sigma_{xx}^{s}(-l) + \sigma_{xx}^{f}(-l) = 0 \qquad Eq. \ 4-45$$

Une deuxième condition aux limites est dérivée à partir de la continuité de la pression et s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{xx}^{f}(-l) = -\phi p(-l) \qquad \qquad Eq. \ 4-46$$

Ce qui donne :



$$\sigma_{xx}^{s}(-l) = -(1-\phi)p(-l) \qquad Eq. \ 4-47$$

La conservation du volume de l'air et du squelette à travers le plan x = -l s'écrit :

$$\phi \dot{v}(-l) + (1-\phi) \dot{u}(-l) = \dot{u}^{a}(-l) \qquad Eq. \ 4-48$$

 $\dot{u}^{a}(-l)$ est la vitesse de l'air libre à l'interface. L'impédance de surface Z du matériau s'écrit :

$$Z = p(-l)/\dot{u}^{a}(-l) \qquad Eq. \ 4-49$$

L'impédance de surface peut être évaluée de la façon suivante. En premier temps, les équations (Eq. 4-29), (Eq. 4-30) et (Eq. 4-43) donnent :

$$V_i^1 = -V_r^1$$
 $V_i^2 = -V_r^2$ Eq. 4-50

Les équations (Eq. 4-46) - (Eq. 4-50) donnent :

$$-(1-\phi)\dot{u}^{a}(-l)Z = -Z_{1}^{s}V_{i}^{1}\left[\exp(j\delta_{1}l) + \exp(-j\delta_{1}l)\right] - Z_{2}^{s}V_{i}^{2}\left[\exp(j\delta_{2}l) + \exp(-j\delta_{2}l)\right] \qquad \begin{array}{c} Eq.\\ 4-51\end{array}$$

$$-\phi \dot{u}^{a}(-l)Z = -Z_{1}^{s}\phi \mu_{1}V_{i}^{1}[\exp(j\delta_{1}l) + \exp(-j\delta_{1}l)] - Z_{2}^{s}\phi \mu_{2}V_{i}^{2}[\exp(j\delta_{2}l) + \exp(-j\delta_{2}l)] \qquad Eq.$$

$$4-52$$

$$[\phi\mu_1 + (1-\phi)]V_i^1[\exp(j\delta_1 l) - \exp(-j\delta_1 l)] + [\phi\mu_2 + (1-\phi)]V_i^2[\exp(j\delta_2 l) - \exp(-j\delta_2 l)] = \dot{u}^a(-l) \qquad Eq.$$

Ce système de 3 équations (Eq. 4-51)-(Eq. 4-53) a une solution (V_i^1, V_i^2) si :

$$\begin{vmatrix} -(1-\phi)Z & -2Z_{1}^{s}\cos\delta_{1}l & -2Z_{2}^{s}\cos\delta_{2}l \\ -Z & -2Z_{1}^{f}\mu_{1}\cos\delta_{1}l & -2Z_{2}^{f}\mu_{2}\cos\delta_{2}l \\ 1 & 2j\sin\delta_{1}l(\phi\mu_{1}+1-\phi) & 2j\sin\delta_{2}l(\phi\mu_{2}+1-\phi) \end{vmatrix} = 0 \qquad Eq. \ 4-54$$

Et Z s'exprime sous la forme suivante :

$$Z = -j \frac{\left(Z_1^s Z_2^f \mu_2 - Z_2^s Z_1^f \mu_1\right)}{D} \qquad Eq. \ 4-55$$

Où D est :

$$D = (1 - \phi + \phi \mu_2) [Z_1^s - (1 - \phi) Z_1^f \mu_1] g \delta_2 l + (1 - \phi + \phi \mu_1) [Z_2^f \mu_2 (1 - \phi) - Z_2^s] g \delta_1 l \qquad Eq. \ 4-56$$



Figure 4-17: Confrontation calcul analytique - numérique

Les résultats analytiques et numériques sont superposés sur la figure 4-17. Une bonne concordance est observée pour la partie imaginaire alors qu'une petite dispersion apparaît en fréquences moyennes pour la partie réelle de l'impédance de surface.

4.3.3.2. Formulation de P. Leclaire – Indicateur choc

Dans ce cas, la plaque est de dimensions $0.5 \times 0.5 \times 0.011$ (l'unité est le *m*). Les bords sont encastrés (Eq. 3-114) et la surface est sollicitée soit en pression surfacique (Eq. 3-115) soit en force ponctuelle (Eq. 3-116). La formulation de Leclaire est implémentée sous formes des matrices Γ et *F* (Eq. 3-111). On rappelle ici qu'on ne tiendra pas compte des approximations de Leclaire ($F(\omega)$, *M*, α).

En premier temps, des calculs sont réalisés en utilisant la formulation mixte de Biot en 3D pour la validation de celle de Leclaire en 2D. Ceci est effectué dans les deux cas de sollicitations : force ponctuelle et pression surfacique imposées. La plage de fréquence est de 1 Hz à 100 Hz. Les caractéristiques du matériau poreux de la plaque ainsi que sa géométrie sont données dans le tableau 4-4.

Longueur, a (m)	0.5
Largeur, $b(m)$	0.5
Epaisseur, <i>h</i> (<i>mm</i>)	11
Densité, ρ (<i>kg/m³</i>)	348
Module d'Young, <i>E(Pa</i>)	4.10 ⁶ (1+0.15j)
Coefficient de Poisson, <i>v</i>	0.35
Porosité, Φ	0.74
Tortuosité, $ au_{\infty}$	1.2
Perméabilité, ĸ (m²)	7.10^{-10}
Longueur thermique, $\Lambda'(\mu m)$	80
Longueur visqueuse, Λ (μ m)	150

Tableau 4-4 : Géométrie et caractéristiques de la plaque poreuse étudiée

L'évolution de la déflexion en fonction de la fréquence est considérée pour la validation. La simulation en 2D est celle de la surface moyenne de la plaque, ainsi pour confrontation, le point sélectionné est situé à mi épaisseur de la plaque dans la configuration 3D.

La formulation mixte (u, p) de Biot est utilisée en 3D. L'implémentation est de même que celle décrite dans le chapitre 3 (Eq. 3-94 et Eq. 3-95). La condition d'encastrement des bords se traduit sur Comsol sous la forme (Eq. 3-105) avec $\overline{u}_i = 0$. Les équations (Eq. 3-99) et (Eq. 3-100) permettent de modéliser les efforts appliqués sur les faces inférieure et supérieure de l'échantillon poreux. Sur la face inférieure, on prend $\overline{p} = 0$. Alors que dans le cas d'une pression surfacique appliquée sur la face supérieure, on prend $\overline{p} = 0.1$. Une force ponctuelle en un point (x_0, y_0) de la face supérieure se traduit en prenant $\overline{p} = dirac((x - x_0)(y - y_0))$.

Dans le cas d'une pression surfacique, le calcul 3D est réalisé avec un pas de fréquence de 0.1 Hz et un maillage contenant 2838 éléments. En 2D, le même pas de calcul est pris en compte alors que 2500 éléments constituaient le maillage de la plaque.



Figure 4-18 : Déflexion en fonction de la fréquence en 3 points de la plaque : comparaison des configurations 2D et 3D Pression surfacique-



Figure 4-19 : Déflexion en fonction de la fréquence en 3 points de la plaque : comparaison des configurations 2D et 3D -Force ponctuelle-

La figure 4-18 montre l'évolution de la déflexion en fonction de la fréquence (échelle logarithmique) dans les deux cas, en 3 points de la plaque. Cette confrontation confirme d'un côté la validité de la formulation 2D, et d'un autre côté son implémentation sur Comsol.

Dans le cas d'une force ponctuelle, le calcul 3D est réalisé avec un pas de 0.1 Hz et 2838 éléments. En 2D, le maillage contient 1038 éléments et le pas de calcul est de 0.25 Hz. La figure 4-19 présente la déflexion en fonction de la fréquence (échelle logarithmique) en 3 points de la plaque. Le calcul 2D donne la même chose que le calcul 3D.

On évalue ensuite la limite de la formulation au niveau de l'épaisseur de la plaque et ceci en comparant les résultats avec ceux obtenus avec la formulation mixte de Biot en 3D. Ainsi, on prend une épaisseur de 30 *mm* et on mène des calculs dans les deux cas de sollicitation : pression uniforme et force ponctuelle.

Pour le premier cas, un maillage contenant 6708 éléments est utilisée en 3D. La figure 4-20 montre en effet que la formulation de Leclaire est loin d'être valable pour des grandes épaisseurs. Les modes propres se décalent de ceux obtenus en 3D et à partir de 100 Hz, le calcul diverge.



Figure 4-20 : Limites de la formulation 2D dans le cas d'une pression surfacique : épaisseur de 30 mm



Figure 4-21 : Limites de la formulation 2D dans le cas d'une force ponctuelle : épaisseur de 30 mm

Dans le cas d'une force appliquée (Figure 4-21), une nette différence est observée à partir de 10 Hz. Ainsi, on peut confirmer que cette formulation n'est valable que pour les petites épaisseurs. Certes, elle permet un gain de temps assez important par rapport à un calcul 3D en utilisant la formulation mixte de Biot mais reste limitée au niveau de l'épaisseur de l'échantillon, tout en sachant que dans l'industrie automobile, l'épaisseur des matériaux poreux est de 25 mm en moyenne.

Dan la suite, on prend une épaisseur de 11 mm. L'optimisation des paramètres du calcul numérique est étudiée dans le cas d'une force ponctuelle. Le calcul est réalisé entre 1 et 100 Hz.



Figure 4-22 : Etude du pas de calcul

Figure 4-23 : Etude du maillage

La figure 4-22 présente les calculs réalisés pour différents pas de fréquence. C'est à partir d'un pas de 0.25 Hz que la déflexion est bien présentée et décrit ainsi minutieusement le comportement d'un point de la plaque suite à une force ponctuelle. La figure 4-23 présente la déflexion pour différents maillages avec un pas de 0.25 Hz. Vu les dimensions de la plaque, un raffinement du maillage de la zone de la sollicitation est réalisé. Le maillage sera ainsi composé de 1038 éléments, à partir duquel la réponse de la plaque ne change pas.

Les étapes de validation de l'implémentation de la formulation de P. Lelcaire sont concluantes. On procède maintenant à décrire les différentes étapes suivies pour le calcul du *HIC* dans notre cas d'étude. Le calcul numérique donne l'accès à l'évolution du déplacement du squelette en fonction de la fréquence. Cette évolution se situe entre 1 et 100 *Hz*. Une moyenne surfacique est calculée et vu la symétrie du problème, la moyenne est réalisée sur $\frac{1}{4}$ de la surface (Figure 4-24-a). Puis, on calcule l'accélération (Figure 4-24-b) tel que :

$$a_{s}(f) = \ddot{w}_{s}(f) = -4\pi^{2}f^{2}w_{s}(f) \qquad Eq. \ 4-57$$





Figure 4-24 : Procédure de détermination du HIC

La Transformée de Fourier Inverse est appliquée ensuite sur le signal fréquentiel (l'accélération), pour obtenir ainsi l'accélération en fonction du temps (Figure 4-24-c). On prend en compte la partie du signal temporel située sur la première moitié de l'échelle temps. Il est à noter qu'avec un petit pas de calcul fréquentiel, le signal temporel est sous forme de dents d'où le besoin de prendre en compte un pas de fréquence plus grand. Une étude d'optimisation a permis de fixer le pas à 2 Hz. A partir des formules (Eq. 4-21) et (Eq. 4-22), le *HIC* est calculé. L'intervalle du temps $(t_2 - t_1)$ est fixé par défaut à 15 ms.

4.3.4. En résumé

En conclusion, les deux formulations nécessaires pour l'obtention des indicateurs choc et acoustique ont été validé. La formulation mixte de Biot a été confronté aux différents modèles macroscopiques dont le modèle de fluide équivalent, le modèle de Delany et Bazelet et le modèle analytique de Biot. D'après la littérature, le calcul peut se simplifier en 1 dimension ce qui permet un gain du temps de calcul. Alors que la formulation de Leclaire, en 2D, est confrontée à la formulation mixte de Biot, en 3D, dans le cas d'une sollicitation ponctuelle. Cette formulation permet de définir l'indicateur *HIC* et permet elle aussi un gain du temps de calcul. Cette sortie s'exprime en fonction de l'accélération temporelle de squelette, une évolution qu'on déterminera par une transformée de Fourier inverse de la réponse numérique de la plaque poreuse (déplacement de squelette en fonction de la fréquence) sollicitée par une force ponctuelle.

Les deux formulations implémentées dépendent des plusieurs paramètres. Les paramètres géométriques et de modélisation (conditions aux limites) sont fixés dès le début. Alors que les paramètres poroélastiques constituent les entrées du modèle SADT. Comsol Multiphysics est l'outil numérique utilisé. L'exploitation des résultats des calculs numériques permet de calculer l'impédance de surface, l'absorption acoustique et le *HIC* du matériau poreux.

4.4. Méta-Modèles Choc et Acoustique des Matériaux Poreux

Cette partie a pour but de construire les méta-modèles choc et acoustique en fonction des paramètres poroélastiques des matériaux poreux. Le plan d'expériences est un latin hypercube. On procède de manière itérative, en ajoutant des simulations numériques dans le cas où le modèle n'est pas assez robuste. On enrichira aussi notre plan par des sites comportant les caractéristiques des matériaux poreux industriels. Le test de validation des méta-modèles se fait sur un certain nombre de jeux des caractéristiques poroélastiques dont on cherchera leurs réponses numériques et les comparer avec celles prédites par les méta-modèles.

En première partie, on s'intéressera aux modèles acoustiques. Ainsi, on montre en premier temps que la méthode de surface des réponses n'est pas robuste pour bâtir des approximations robustes de nos indicateurs. Ensuite, on présente les méta-modèles et on étudie l'influence de la nature des fonctions de régression et de corrélation. Et pour finir, on confronte les résultats de nos modèles par rapport à ceux de Delany et Bazelet.

En seconde partie, le modèle HIC est présenté ainsi que sa validation. La même stratégie est adoptée. On se limitera à l'étude d'une régression d'ordre 2 et d'une corrélation gaussienne. Vu le manque d'informations dans la littérature, on ne pouvait pas comparer les résultats avec ceux de certains matériaux poreux dans la littérature.

4.4.1. Modèles des indicateurs acoustiques

Pour les indicateurs acoustiques, on prend comme sorties toutes les valeurs sur l'échelle fréquentiel, donc 381 valeurs entre 100 et 2000 Hz avec un pas de 5 Hz. En première étape, on prend F(x) une fonction polynomiale d'ordre 2 avec une corrélation gaussienne. En trouvant le modèle approprié, on étudiera le cas d'autres types de corrélations et fonctions de régression (moyenne, polynôme d'ordre 1). Le calcul donnera les valeurs des paramètres de corrélation, de régression et l'erreur de prédiction. La validation est réalisée sur plusieurs points non inclus dans le plan initial.

4.4.1.1. Courbes types du coefficient d'absorption acoustique

La figure 4-25 présente des courbes types du coefficient d'absorption acoustique en fonction de la fréquence.



Figure 4-25 : Courbes types du coefficient d'absorption acoustique

Ces évolutions prouvent la présence des irrégularités en modifiant sur les entrées du système (caractéristiques poroélastiques du matériau). D'où l'utilité du krigeage dans notre cas.

4.4.1.2. Validité de la méthode de surface des réponses

On a essayé d'utiliser la méthode de surface des réponses pour la prédiction des caractéristiques acoustiques des matériaux poreux. Sa validation sur un jeu de paramètres (Tableau 4-5) est réalisée afin de quantifier la robustesse des modèles polynomiaux dans la prédiction du coefficient d'absorption acoustique.

Paramètre	Unité	Valeur
$ ho_{_1}$	kg/m³	30
ϕ	-	0.96
σ	Nsm^{-4}	32000
$lpha_{_\infty}$	-	1.7
ν	-	0
Λ	μm	90
Λ '	μm	165
E	N/m^2	169000
η	-	0.1

Tableau 4-5 : Caractéristiques poroélastiques pour la validation de la régression multi-linéaire

La figure 4-26 permet de constater une différence remarquable entre la réponse polynomiale, de type 2nd degré avec effets quadratiques, et la réponse numérique. Cette étude est réalisée avec un plan latin hypercube contenant 729 essais numériques.



Figure 4-26 : Confrontation entre résultat numérique et la régression multi-linéaire

4.4.1.3. Modèles kriging et validation

Un premier calcul est réalisé selon la démarche classique (géométrie, implémentation de la loi de comportement, conditions aux limites, caractéristiques du matériau, maillage, et la présentation du coefficient d'absorption acoustique en fonction de la fréquence à l'interface fluide – poreux). Rappelons ici que la fonction y (impédance de surface ou absorption acoustique) à estimer s'écrit de la façon suivante :

$$y(x) = F(x) + z(x)$$
 Eq. 4-58

Où F est un modèle de régression utilisé dans le cadre des approximations globales alors que z est un modèle de corrélation spatiale caractérisant les déviations « locales ».

Le modèle de corrélation est totalement défini après l'optimisation de ses coefficients $(\theta_i, 1 \le i \le n)$ où *n* est le nombre des facteurs d'entrée (ici 9, nombre des caractéristiques intrinsèques du matériau poreux). Généralement et dans la plupart des études menées en utilisant le krigeage, le corrélation est choisi gaussienne, et pour cela on adoptera ce choix pour la mise en place du méta-modèle et on étudiera évidemment le cas des autres fonctions.

Le modèle de régression est défini par ses coefficients dont le nombre dépend ici du type de la régression. En effet, il s'agit d'un seul coefficient si la régression est d'ordre 0 (la moyenne de la réponse numérique des m sites). 46 coefficients à déterminer quand il s'agit d'une régression d'ordre 1 (polynôme d'ordre 1 avec interactions quadratiques) et finalement 55 inconnues dans le cas d'une régression du 2nd ordre (polynôme de second ordre avec interactions). Et pour le modèle de régression, on adopte celui d'ordre 2 pour débuter notre étude qui demandera la recherche de 64 paramètres permettant la définition complète du méta modèle.

Ainsi, le plan initial mis en place est un latin hypercube contenant 729 jeux de paramètres poroélastiques. Le modèle n'étant pas robuste, le plan est enrichi au fur et à mesure par des essais supplémentaires exploitant ainsi les régions mal définies. Ces régions étaient particulièrement concentrées sur deux entrées : la résistivité et le module de Young, vu que la plage de variation est assez large. Le plan d'essai est aussi enrichi par les caractéristiques de divers échantillons récupérés de l'industrie ou utilisées dans diverses études de recherche. C'est qu'avec 2319 essais qu'on arrive à construire un méta modèle robuste exprimant l'impédance de surface et l'absorption acoustique en fonction des 9 caractéristiques du matériau poreux isotrope à squelette élastique.

Le tableau 4-6 présente 4 exemples de jeux de paramètres pour la validation du méta modèle (corrélation gaussienne et régression du 2^{nd} ordre). Ces matériaux pour la validation ne font pas parti des 2319 jeux de paramètres utilisés dans la mise en place de nos méta-modèles.

Paramètre	Unité	Matériau	Matériau	Matériau	Matériau
		А	В	C	D
$ ho_{1}$	kg/m ³	76	81	51	100
ϕ	-	0.76	0.8	0.98	0.77
σ	Nsm_4^-	39704	66500	24700	17100
$lpha_{_{\infty}}$	-	1.25	1.98	1.6	2.8
ν	-	0.3	0.05	0.31	0.16
Λ	μm	121	15	170	195
Λ '	μm	124	46	120	162
E	N/m^2	4000000	3730000	960000	15000
η	-	0.96	0.16	0.085	0.3

Tableau 4-6 : Différents typages pour l'étude de la régression du krigeage

La figure 4-27 présente la validation des modèles de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption acoustique. Les inconnues du modèle (coefficients de régression et ceux de la corrélation) permettent de prédire l'impédance de surface et l'absorption acoustique des matériaux dont les caractéristiques appartiennent à l'espace de conception (Tableau 4-1). La prédiction des performances acoustiques des matériaux du tableau 4-6 permet de les confronter aux résultats numériques sur Comsol. La superposition des résultats (Figure 4-27) montre la robustesse de nos modèles avec une sensibilité de 2 % (vue particulièrement sur la partie réelle de l'impédance de surface).





Figure 4-27 : Confrontation modèle élément fini – modèle empirique issu du krigeage

pour le cas de 4 matériaux (Corrélation gaussienne et régression du 2nd ordre)

Il est ainsi possible à partir de ces méta-modèles de prédire l'impédance de surface et l'absorption acoustique de n'importe quel matériau poreux dont les paramètres poroélastiques appartiennent à l'espace de conception fixé au début de ce travail et dont les méta-modèles sont bâtis. Nos méta-modèles s'expriment en fonction des 9 caractéristiques du matériau sans négliger l'effet d'aucun de ces paramètres, à l'opposé du modèle de Delany et Bazelet qui dépend seulement de la résistivité et néglige le reste des paramètres dans le cas d'un matériau poreux à squelette rigide.

Etude du type de la régression 4.4.1.4.

Dans ce paragraphe, on construit nos méta-modèles en prenant autres types de régression (ordres 0 et 1). La corrélation reste gaussienne. La figure 4-28 présente les prédictions de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption acoustique pour les matériaux A, B, C et D. On obtient le même résultat quelque soit la régression utilisée avec une erreur de 2 % observée en particulier dans la partie réelle de l'impédance de surface. Dans le tableau 4-7, on présente les valeurs des coefficients de corrélation dans les 3 cas d'étude de la régression avec une corrélation gaussienne.

Etude du type de la corrélation 4.4.1.5.

Vient ensuite l'étude du type de la corrélation. La régression du 2nd ordre est maintenue. On a construit des modèles de krigeage dans le cas d'une corrélation linéaire, sphérique et spline.

a .:	Krig	eage					θ				
Sortie	Corrélation	Régression	$ ho_1$	ϕ	σ	$lpha_{_{\infty}}$	V	Λ	Λ'	Ε	η
		Ordre 0	0.3068	0.0095	0.1646	0.0211	0.0195	2.982	0.0348	0.8113	0.0368
	Gauss	Ordre 1	0.3611	0.0162	0.1496	0.0319	0.0338	6.6071	0.0566	1.0678	0.056
$R_{e}(7)$		Ordre 2	0.5849	0.0177	0.1619	0.0389	0.0461	9.4401	0.0101	1.663	0.0736
$\operatorname{Re}(\mathbb{Z}_{s})$	Linéaire (Or	dre 2)	0.178	0.0097	0.1393	0.0316	0.0186	0.2885	0.0055	0.2458	0.0247
	Sphérique (C	Ordre 2)	0.1321	0.0071	0.0962	0.0227	0.014	0.2635	0.0046	0.1995	0.0185
	Spline (Ordr	e 2)	0.1931	0.0251	0.0916	0.0388	0.0513	0.4682	0.0281	0.2889	0.0647
		Ordre 0	0.6687	1.14 E-30	0.9337	0.1362	0.119	2.9609	0.2592	1.5763	0.2627
	Gauss	Ordre 1	0.9049	1.14 E-30	0.2026	0.0468	0.1128	1.4596	0.0777	6.9698	0.0913
Im(7)		Ordre 2	1.3023	1.14 E-30	0.2104	0.0437	0.1568	1.6252	0.0169	8.3897	0.1205
$\operatorname{III}(\mathbf{\Sigma}_{s})$	Linéaire (Or	dre 2)	0.303	1.14 E-30	0.1882	0.0263	0.0618	0.2575	0.0228	0.7588	0.0699
	Sphérique (C	Ordre 2)	0.2327	1.08 E-16	0.1266	0.018	0.043	0.1967	0.0158	0.4826	0.0462
	Spline (Ordr	e 2)	0.2597	1.14 E-30	0.1101	0.0471	0.0812	0.3286	0.0503	0.5733	0.0845
		Ordre 0	0.1523	0.0397	1.1553	0.0784	4.6 E-21	3.6425	0.1844	0.4208	0.0807
	Gauss	Ordre 1	0.1678	0.0242	1.5084	0.0955	4.6 E-21	4.9313	0.2391	0.4597	0.0953
$lpha_{\scriptscriptstyle acous}$ -		Ordre 2	0.2269	0.0234	1.6615	0.1063	4.6 E-21	8.0925	0.268	0.5465	0.1015
	Linéaire (Or	dre 2)	0.1471	0.0113	0.2913	0.0726	4.6 E-21	0.2893	0.0469	0.192	0.034
	Sphérique (C	Ordre 2)	0.1066	0.0086	0.2409	0.0513	4.6 E-21	0.2654	0.0374	0.1444	0.0258
	Spline (Ordr	e 2)	0.1458	0.0306	0.2962	0.0772	4.6 E-21	0.5937	0.1112	0.2057	0.0872

Tableau 4-7 : Coefficients de corrélation pour les modèles de l'impédance de surface et du coefficient d'absorption acoustique







Figure 4-28 : Effet du type de la régression sur la prédiction de l'impédance de surface et l'absorption acoustique avec une corrélation gaussienne

Le tableau 4-7 présente donc les paramètres de corrélation et la figure 4-29 illustre les confrontations entre les prédictions obtenues par les corrélations étudiées pour les 4 matériaux. La même prédiction est obtenue pour les matériaux B et D alors que dans le

cas A et C, la corrélation spline coïncide avec la gaussienne. Ceci permet de comprendre le choix de plusieurs chercheurs d'une corrélation gaussienne et une régression du 2^{nd} ordre.





Matériau C

Matériau D

Figure 4-29 : Effet du type de la corrélation sur la prédiction de l'impédance de surface et l'absorption acoustique avec une régression du 2nd ordre

Les changements des coefficients de corrélation (Tableau 4-7) suite à une modification du type de la régression ou de la corrélation est tout à fait attendue. En effet, il s'agit d'ajuster le modèle analytique par rapport aux données (expériences déterministes formant le plan d'expériences) et cet ajustement se fait en minimisant de l'erreur quadratique, fonction des coefficients de corrélation. Néanmoins, certains cas de corrélation ou/et régression ne permettent pas d'avoir un bon ajustement, comme dans le cas d'une corrélation sphérique ou d'une régression d'ordre 0.

4.4.1.6. Confrontation entre modèles kriging et D&B

Dans ce paragraphe, on essaie de prouver la robustesse des modèles krigeage mis en place par rapport aux modèles existants dans la littérature. Ainsi, sur les mêmes matériaux poreux, on superpose le coefficient d'absorption acoustique issu des modèles krigeage et de Delany et Bazelet.

La figure 4-30 montre l'évolution du coefficient d'absorption acoustique en fonction de la fréquence pour les 4 matériaux poreux. Le modèle D&B est une approximation dépendant seulement de la résistivité du matériau. A la base, il n'est valide que pour les matériaux fibreux. La confrontation prouve la robustesse des modèles krigeage par rapport aux modèles empiriques existant dans la littérature.



Figure 4-30 : Confrontation entre modèle de Delany et Bazelet et modèle kriging

4.4.2. Modèle de l'indicateur choc

La stratégie utilisée, pour la mise en place du méta-modèle empirique exprimant le *HIC* en fonction des caractéristiques du matériau poreux, est identique à celle utilisée pour les indicateurs acoustiques. Ainsi, on a tiré profit des avantages des plans d'expériences et de la technique du krigeage. Le plan est de type latin hypercube contenant plusieurs jeux de caractéristiques du matériau. On commence avec un plan économique et on l'enrichit à fur et à mesure jusqu'à l'obtention d'un méta-modèle robuste. On prend par défaut une régression d'ordre 2 et une corrélation gaussienne.

	θ								
	$ ho_1$	ϕ	σ	$lpha_{_{\infty}}$	ν	Λ	Λ '	Ε	η
HIC	0.031	0.295	0.1	0.124	0.269	9 E-11	3.5 E-10	0.267	0.293

Tableau 4-8 : Coefficients de corrélation du modèle HIC

Le tableau 4-8 contient les valeurs des coefficients de corrélation qui définissent donc le méta-modèle robuste du *HIC*. La validation est réalisée sur les matériaux de caractéristiques données dans le tableau 4-6. Le tableau 4-9 contient donc les informations concernant la validation. Les erreurs de nos modèles sont très faibles et permettent de prédire exactement l'indice HIC de n'importe quel matériau poreux dans l'espace de conception (valeurs limites des caractéristiques poroélastiques).

Matériau	HIC	Erreur (%)
А	0.4437	9.1 E-6
В	0.6895	$5.2 ext{ E-5}$
\mathbf{C}	10.8257	0.15 E-6
D	158.5386	0.02 E-6

Tableau 4-9 : Validation du modèle HIC

Ainsi, la mise en œuvre de ces méta-modèles facilitera la prédiction des caractéristiques choc et acoustique sans avoir recours au simulateur numérique et donc avec gain en temps et coût. Plus loin que ça, ces modèles empiriques faciliteront la recherche du compromis choc acoustique, donc le choix des matériaux.

4.5. Conclusions

L'étude du comportement des matériaux poreux suite à une sollicitation type pression acoustique ou/et type force ponctuelle est une démarche importante afin de caractériser ce type des matériaux. Expérimentalement, le Tube De Kundt permet la caractérisation acoustique des matériaux poreux. Biot était le premier à mettre en place un modèle microscopique décrivant le comportement diphasique -fluide structure- des matériaux cellulaires. Ce modèle devrait être résolu analytiquement ou numériquement pour connaître l'évolution de l'impédance de surface ou/et le coefficient d'absorption acoustique en fonction de la fréquence. Mais aussi, des modèles simplifiés empiriques, comme celui de Delany et Bazlelet, sont valables pour certains matériaux poreux mais leurs utilisations restent limités, et ne dépendent que de la résistivité dans la majorité des cas. D'un autre côté, afin de modéliser le comportement d'une plaque suite à une sollicitation sous forme d'une force ponctuelle, plusieurs formulations ont été mis en place mais qui restent dérivées de celle de Biot souvent basées sur des hypothèses. Ce type de modélisation permet de faire un bilan énergétique et déterminer quelques indices comme le *HIC* afin de quantifier le pouvoir absorbant du choc des matériax poreux.

Dans ce chapitre, il s'agissait de chercher des méta-modèles empiriques qui pourraient décrire les performances choc et acoustique pour toute la gamme des matériaux poreux. Ces modèles sont fonction des caractéristiques poroélastiques sans négliger l'effet d'aucun de ces paramètres. Ainsi, des calculs éléments finis ont été réalisés selon un plan d'expériences optimisé. Les formulations mixte de Biot et de Leclaire valables pour un matériau poreux isotrope à squelette élastique sont implémentées sur un code de calcul. Pour ce type de matériau, la recherche des limites inférieure et supérieure de ses 9 caractéristiques intrinsèques est la première étape de la mise en place de notre modèle. Le plan d'expériences devrait satisfaire différentes conditions afin de pouvoir exploiter toutes les régions de l'espace de conception. La méthode de krigeage est le moyen choisi afin d'identifier les inconnus du modèle. Cet outil est bénéfique, à la place de la méthode de surface de réponse, lorsqu'il s'agit d'expériences déterministes et présentant des irrégularités. Le dernier point abordé dans ce chapitre concernait la validation des métamodèles. Et pour cela, cette étape est réalisée sur 4 types de matériaux poreux. L'étude des types de la régression et de la corrélation fut intéressante pour la robustesse des modèles. En dernier point, on a comparé les résultats donnés par les modèles krigeage avec ceux obtenus à partir du modèle D&B pour le cas de l'absorption acoustique.

Références

[1] G. E. P. Box and N. R. Draper, *Empirical Model Building and Response Surfaces*, John Wiley & Sons, New York., 1987.

[2] G. E. P. Box, W. G. Hunter and J. S. Hunter, *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[3] N. R. Draper and D. K. J. Lin, *Connections Between Two-Level Designs of Resolutions III and V*, Technometrics, Vol. 32, No. 3, pp. 283-288, 1990.

[4] R. H. Myers and D. C. Montgomery, *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[5] B. Cheng and D. M. Titterington, Neural Networks: A Review from a Statistical Perspective, Statistical Science, Vol. 9, No. 1, pp. 2-54, 1994.

[6] S. Haykin, Neural Networks: A Comprehensive Foundation, Macmillan Publishing, New York, 1994.

[7] M. Smith, Neural Networks for Statistical Modeling, von Nostrand Reinhold, New York, 1993.

[8] R. R. Barton, *Simulation Metamodels*, Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference (WSC'98), Washington, DC, IEEE, pp. 167-174, December 13-16, 1998.

[9] A. J. Booker, *Design and Analysis of Computer Experiments*, 7th Symposium on Multidisciplinary Analysis & Optimization, St. Louis, Vol. 1, pp. 118-128. AIAA-98-4757, September 2-4, 1998.

[10] C. T. Currin, M. Mitchell, M. Morris, D. Ylvisaker, *Bayesian prediction of deterministic functions, with applications to the design ans the analysis of computer experiments.* J. Amer. Statist. Assoc. 86, 953-963, 1991.

[11] J. Sacks, W. J. Welch, T. J. Mitchell, H. P. Wynn, *Design and analysis of Computer Experiments*. Statistical Science, 4, p. 409-435, 1989.

[12] N. Dyn, D. Levin and S. Rippa, *Numerical Procedures for Surface Fitting of Scattered Data by Radial Basis Functions*, SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing, Vol. 7, No. 2, pp. 639-659, 1986.

[13] M. J. D. Powell, *Radial Basis Functions for Multivariable Interpolation: A Review, Algorithms for Approximation*, Oxford University Press, London, 1987.

[14] C. G. Mallet, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, Boston, 1998.

[15] J. H. Friedman and W. Steutzle, *Projection Pursuit Regression*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 76, No. 376, pp. 817-823, 1981.

[16] L. Wang, R. V. Grandhi and R. A. Canfield, *Multivariate Hermite Approximation for Design Optimization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, No. 5, pp. 787-803, 1996.

[17] T. W. Simpson, J. Peplinski, P. N. Koch and J. K. Allen, *Metamodels for Computer-Based Engineering Design: Survey and Recommendations*, Engineering with Computers, Vol. 17, No. 2, pp. 129-150, 2001.

[18] J.-F. M. Barthelemy, and R. T. Haftka, *Approximation Concepts for Optimum Structural Design - A Review*, Structural Optimization, Vol. 5, pp. 129-144, 1993.

[19] J. Sobieszczanski-Sobieski, and R. T. Haftka, *Multidisciplinary Aerospace Design Optimization: Survey of Recent Developments*, Structural Optimization, Vol. 14, pp. 1-23, 1997.

[20] T. W. Simpson, T. M. Mauery, J. J. Korte and F. Mistree, *Kriging Metamodels for Global Approximation in Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization*, AIAA Journal, to appear: Vol. 40, No. 1, 2001..

[21] A. Giunta and L. T. Watson, A Comparison of Approximation Modeling Techniques: Polynomial Versus Interpolating Models, 7th Symposium on Multidisciplinary Analysis & Optimization, St. Louis, Vol. 1, pp. 392-404, September 2-4, 1998.

[22] S. Varadarajan, W. Chen and C. Pelka, *The Robust Concept Exploration Method with Enhanced Model Approximation Capabilities*, Engineering Optimization, Vol. 32, No. 3, pp. 309-334, 2000.

[23] R. J. Yang, L. Gu, L. Liaw, C. Gearhart, C. H. Tho, X. Liu and B. P. Wang, *Approximations for Safety Optimization of Large Systems*, ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences - Design Automation Conference, Baltimore, Paper No. DETC-2000/DAC-14245, September 10-13, 2000.

[24] R. Jin, W. Chen and T. W. Simpson, *Comparative Studies of Metamodeling Techniques under Multiple Modeling Criteria*, 8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, 2000, September 6-8.

[25] W. J. Welch, R. J. Buck, J. Sacks, H. P. Wynn, T. J. Mitchell and M. D. Morris, *Screening, Predicting, and Computer Experiments*, Technometrics, Vol. 34, No. 1, pp. 15-25, 1992..

[26] A. Jourdan, *Approches statistiques des expériences simulées*. Revue de Statistique Appliquée, 50 (1), 49-64, 2002.

[27] M. C. Schwery, H. P. Wynn, Maximum entropy sampling. J. of Appl. Statist. 14, 165 170, 1987.

[28] J. R. Koehler, A. B. Owen, *Computer Experiments*. In Ghosh, S., Rao, C.R., (Eds.), Handbook of Statistics, 13: Designs and Analysis of Experiments, North- Holland, Amsterdam, p. 261-308, 1996.

[29] J. S. Park, *Optimal Latin hypercube designs for computer experiments*. J. of Statist. Planning and Inference 39, 95-111, 1994.

[30] D. Collombier, A. Jourdan, *Régression trigonométrique et plans d'expériences pour expériences simulées*. Revue de Statistique Appliquée, 49 (2), 5-26, 2001.

[31] Dmitry V. Balandin et al., Optimal Control Problem for Head Injury Criterion.

[32] Brian G. McHenry, Head Injury Criterion and the ATB, McHenry Software, Inc., 2004.

[33] D. Tyrell, K. Severson, B. Marguis, *Passenger Train Crashworthiness Studies*, US Department of Transportation 1995.

[34] T. G. Zielinski, M. A. Galland et M. N. Ichchou, *Active elasto-poroelastic sandwich panels*, Post-Doc report, LTDS, ECL, Lyon, 12 Novembre, 2005.

[35] C. Batifol, T. G. Zylinski, M. N. Ichchou et M. A. Galland, A finite-element study of a piezoelectric/poroelastic sound package concept, Smart Materials and Structures, 16, 168–177, 2007.

[36] J. F. Allard, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Materials*, Chapman & Hall, janvier 1994.

5. Compromis Choc - Acoustique

5.1. Introduction

L'Algorithme Génétique est une recherche non traditionnelle et méthode d'optimisation, qui est devenu populaire en ingénierie d'optimisation. Il imite les principes de la génétique et du principe darwinien de la sélection naturelle (c'est-à-dire la survie du plus apte). L'algorithme génétique simple (AGS) convient pour les problèmes d'optimisation avec une seule fonction objective. Dans ce cas d'étude, il est question de trouver le meilleur modèle, qui correspond généralement au minimum global (ou maximum). La plupart des problèmes réels impliquent à la fois l'optimisation multi-objective de plusieurs fonctions (un vecteur). Ces problèmes du point de vue conception sont différents de celles optimisant une seule fonction objective. Dans le cas d'optimisation multi-objective des fonctions, il n'existe pas une solution qui soit la meilleure (optimum globale) à l'égard de tous les objectifs. Au lieu de cela, il pourrait exister un ensemble de solutions optimales qui sont toutes aussi bonnes. Ces solutions sont connues sous le nom de solutions optimales (non-dominé) de Pareto. Un ensemble de Pareto, par exemple, pour un problème de fonctions à deux objectifs, est décrit par un ensemble de points de telle sorte qu'en se déplacant d'un point à un autre, on améliore la fonction objectif, tandis que l'autre se dégrade. Le choix d'une solution parmi les autres nécessite plus de connaissances du problème, qui est souvent intuitive et non quantifiable. Cependant, le front Pareto est très utile car il réduit les choix et aide le décideur dans la sélection d'un point de fonctionnement souhaité (appelé la solution préférée) parmi l'ensemble (limité) des points optimaux de Pareto.

Le deuxième chapitre a permis d'exprimer les performances d'une mousse injectée (densité, absorption de choc et acoustique), en fonction des paramètres de fabrication, sous forme de modèles empiriques. Ces modèles ont été validés avec des essais expérimentaux en premier temps, puis avec certains tests statistiques. Pour qu'ils soient insensibles aux sources de bruit, la théorie de Taguchi est appliquée pour l'étude de la robustesse. Le but de ce présent chapitre est de chercher un compromis entre ces caractéristiques vu que l'industrie moderne impose sur un produit plusieurs objectifs à la fois. Dans notre cas, ces objectifs s'appliquent sur la densité, les indicateurs du choc et acoustique. Les algorithmes génétiques seront l'outil efficace pour la recherche d'un compromis. Ensuite, les solutions optimales multi - objectives de Pareto sont générées pour être utilisées dans l'optimisation du procédé de mise en forme et la caractérisation du produit final et ceci en utilisant des algorithmes génétiques (NSGA-II). La validation est réalisée en confrontant des résultats expérimentaux en quelques points des fronts de Pareto. L'ensemble des points représentant le font de Pareto constituent un jeu des variables de décision (dans notre cas, les paramètres d'injection). En même temps, on mènera des investigations sur ces fronts pour déterminer les variables de décision dominante. Une variable de décision est dite dominante si le front de Pareto ne dépend

que de cette variable, les autres sont constants tout au long du front. Ainsi, la recherche des variables de décision pour le cas du compromis $(\alpha_{Shock} - \alpha_{acous}(1330Hz))$ est réalisée. Vient ensuite l'étude de la sensibilité du font Pareto aux variables de décision non dominantes (qui restaient constantes). La notion de surface de Pareto est exploitée dans la partie suivante. Elle a pour but de définir le domaine de variation de deux indicateurs de la mousse en présentant quatre fronts de Pareto, correspondant à la minimisation et la maximisation des deux fonctions, et à la minimisation de l'une et la maximisation de l'autre.

En dernière partie de ce chapitre, on cherchera les solutions optimales multi-objectives des modèles choc et acoustique du chapitre 4. Ces modèles issus du krigeage s'expriment en fonction des caractéristiques poroélastiques des matériaux cellulaires à squelette élastique. Les objectives concernent la minimisation du *HIC* et la maximisation de l'absorption acoustique. On étudiera bien sur l'évolution des 9 variables de décision tout au long du front de Pareto.

5.2. Optimisation Multi-Objective des Mousses PEBD Injectées

Cette partie traite le problème d'optimisation des caractéristiques des mousses polyéthylène obtenues par injection. Ainsi, les fronts de Pareto sont présentés pour quelques couples de ces indicateurs. L'algorithme génétique est utilisé dans sa forme initiale mais aussi dans d'autres formes quand il est question d'améliorer une performance et donc la maximiser. Ensuite, le cas d'optimisation en 3D est traité. Pour cela, l'objectif est de chercher l'ensemble des solutions idéales permettant d'avoir un minimum de densité et un maximum d'absorptions du choc et acoustique. En troisième partie, on introduit la notion d'une variable de décision dominante. Cette particularité permet, dans le cas du possible, de simplifier la problématique de l'optimisation et permet aussi d'étudier la sensibilité des variables non dominantes sur le front pareto. En dernier point, on a pensé superposer les fronts Pareto obtenus dans tous les cas d'optimisation possible. Ceci permettra d'avoir une surface plus ou moins fermée, en dehors de laquelle deux objectifs ne peuvent pas être obtenus avec des variables de décision identiques.

5.2.1. Définition d'un problème d'optimisation multi-objective

Généralement, un problème d'optimisation multi-objective s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x); f \in R; \text{avec } f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)] \\ \text{Telles que les contraintes :} \\ h_j(x) \le 0; j = 1, \dots, m; x \in S \subset R^n \\ \text{soient satisfaites} \end{cases} \qquad \qquad Eq. 5-1$$

Le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ a pour composantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$, qui sont les inconnues du problème, et S: représente l'ensemble des solutions de x dans \mathbb{R}^n . La fonction f(x) est appelée fonction objectif (ou fonction économique) et l'ensemble des conditions $h_j(x) \le 0$ (j = 1,...m) sont les contraintes du problème.



Figure 5-1 : Solution du problème : Identification des solutions optimales au sens de Pareto optimal

La figure 5-1 présente le cas d'optimisation multi-objective de deux fonctions f_1 et f_2 dans le but de leurs minimisations : le front Pareto est l'ensemble des points non dominés qui constituent les solutions optimales au sens de Pareto optimal.

5.2.2. Données du problème d'optimisation des caractéristiques de la mousse

L'algorithme génétique de tri non dominé est appliqué sur les modèles mis en place dans le second chapitre afin d'optimiser les caractéristiques mécaniques des mousses PEBD obtenues par injection (densité, absorption du choc, absorption acoustique). Les solutions optimales de Pareto sont générées ici pour une utilisation à la fois dans les phases de fabrication et de caractérisation des mousses plastiques. Dans l'ordre de s'assurer que les résultats sont physiquement significatifs, des contraintes sur les paramètres du procédé d'injection (comme la température d'injection, la température du moule, la contre pression, la vitesse d'injection et la vitesse de rotation de la vis lors de la plastification de la matière) sont ajoutées aux modèles. Ces contraintes sont nécessaires tel que les paramètres du procédé restent dans des limites raisonnables garanties par les équipements du procédé d'injection. Donc, le problème, qui est en fait un problème d'optimisation multi-objective avec des contraintes sur les paramètres, peut être formulé sous cette forme :

Optimiser
$$F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)\}, 1 \le s \le m$$

Sous les contraintes $x_r^{\min} \le x_r \le x_r^{\max}, 1 \le r \le n$
 $Eq. 5-2$

5.2.2.1. Variables de décision et contraintes du problème

Les variables de décision, à juste rappel, sont les paramètres d'injection que les modèles en dépendent. Il s'agit donc de, \mathbf{A} : la température d'injection, \mathbf{B} : la température du moule, \mathbf{C} : la contre pression, \mathbf{D} : la vitesse d'injection et \mathbf{E} : la vitesse de rotation de la vis lors de la phase de plastification. Chacun de ces paramètres varient entre une limite inférieure, -2, et une supérieure, +2 (Chapitre II).

5.2.2.2. Fonctions objectives

Les fonctions considérées sont les caractéristiques de la mousse, établies en fonction des paramètres d'injection influents. Il s'agit donc, de la densité globale de la moulée (d), la

densité de la mousse (d_m) , le coefficient d'absorption du choc (α_{shock}) et les coefficients d'absorption acoustique à 954 Hz $(\alpha_{acous}(954 Hz))$ et à 1330 Hz $(\alpha_{acous}(1330 Hz))$. Ces fonctions devraient varier entre 0 et 1, ceci est vérifié quelque soit la valeur des variables (Tableau 5-1).

Tout dépendra de l'objectif ciblé, l'optimisation pourra être soit la maximisation des deux fonctions, soit la minimisation des deux fonctions, soit la maximisation d'une et la minimisation de l'autre et vis versa. Concernant les densités, il est intéressant de les minimiser pour réduire le coût de fabrication alors qu'il faut maximiser les coefficients d'absorption de choc et acoustique pour avoir le meilleur caractère absorbant du produit.

Minimum	Fonction	Maximum
0,1531	$d_{_m}$	0,2557
0,2016	d	0,3789
0,5406	$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	0,7563
0,0779	$\alpha_{acous}(954 Hz)$	0,4278
0,1143	$\alpha_{acous}(1330Hz)$	0,6741

Tableau 5-1 : Valeurs minimales et maximales des fonctions objectives

Vient ensuite le choix des fonctions f_1 et f_2 : pour certains ce choix dépendra de la nature des échantillons sur lesquels les mesures des fonctions ont été effectuées. Par exemple, les essais de choc et d'absorption acoustique ont été réalisés sur des échantillons mousses sans peau et il était judicieux de prendre la densité de la mousse comme la fonction f_2 pour quelques problèmes d'optimisation traités dans ce chapitre. D'un autre côté, dans le but de chercher un compromis choc – acoustique, les fonctions f_1 et f_2 ont présenté les caractéristiques et acoustique, pour traiter un autre problème d'optimisation. Les différents problèmes traités sont illustrés dans le tableau 5-2.

Fonction objective 1	Fonction objective 2
$d_{_m}$	d
d_{m}	\pmb{lpha}_{shock}
$d_{_m}$	$\alpha_{acous}(954 Hz)$
$d_{_m}$	$\alpha_{acous}(1330Hz)$
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	$\alpha_{acous}(954 Hz)$
$lpha_{\scriptscriptstyle shock}$	$\alpha_{acous}(1330Hz)$

Tableau	5-2:	Fonctions	objectives
---------	------	-----------	------------

5.2.2.3. Résultats et discussions

Finalement, un cas d'optimisation multi-objective dans le cas de cette étude s'écrit :

Le NSGA-II disponible dans cette présente étude permet la minimisation des fonctions objectives. Dans le cas où l'objectif est à maximiser, il est nécessaire de transformer la fonction en une autre fonction à minimiser. Plusieurs transformations sont disponibles dans la littérature. La plus populaire et simple revient à minimiser l'opposé de la fonction objectif. Ainsi, dans l'exemple d'un des problèmes d'optimisation étudiés (minimiser d_m et maximiser α_{acous} (954 Hz)), le problème s'écrit de la façon suivante :

$$\operatorname{Min} f_1(A, B, C, D, E) = \operatorname{Min} d_m$$

$$\operatorname{Min} f_2(A, B, C, D, E) = \operatorname{Min} (-\alpha_{acous} (954Hz))$$

$$Eq. 5-4$$

$$\operatorname{Tel} \operatorname{que} -2 \le A, B, C, D, E \le +2$$

Le tableau 5-3 présente les paramètres de calcul utilisés pour l'obtention des solutions dans tous les cas d'optimisation. Ces paramètres sont suffisants pour obtenir les solutions optimales non dominées constituant ainsi le front Pareto. Le fichier sortie de cet algorithme donne les valeurs des compromis ainsi que les valeurs de décision pour chaque typage.

Maximum generation	100
Population size	200
Sub-string length coding for each decision variable	32
Crossover probability	0.9
Mutation probability	0.1
Maximum niche count distance	0.001
Exponent in sharing function	2
Seed of random number generator	0.5

Tableau 5-3 : Paramètres de calcul du NSGA-II utilisés tout au long de cette étude

Les figures 5-2 au 5-7 présentent les ensembles de points obtenus correspondant à des solutions de typages différents : par exemple dans le cas de (d_m, d) , elles correspondent à différents compromis entre la limitation de la densité de la mousse et de la densité globale de la moulée.



Figure 5-2: Front Pareto (d_m, d)



Figure 5-3: Front Pareto (d_m, α_{Shock})



Figure 5-4 : Front Pareto $(d_m, \alpha_{acous}(954 Hz))$



Figure 5-5: Front Pareto $(d_m, \alpha_{acous}(1330 \text{ Hz}))$



Figure 5-6 : Front Pareto $(\alpha_{Shock}, \alpha_{acous}(954 Hz))$

Figure 5-7 : Front Pareto $(\alpha_{\text{Shock}}, \alpha_{\text{acous}}(1330 \text{ Hz}))$

Les valeurs limites inférieures et supérieures des fonctions objectives ne sont pas les mêmes d'un front Pareto à un autre. En effet, dans le cas du front $(d_m - \alpha_{acous}(1330Hz))$, d_m varie entre 0.153 et 0.214 et $\alpha_{acous}(1330Hz)$ varie entre 0.387 et 0.674 alors que dans le cas du front $(\alpha_{shock} - \alpha_{acous}(1330Hz))$, $\alpha_{acous}(1330Hz)$ varie entre 0.539 et 0.674 et d_m varie entre 0.153 et 0.176 dans le cas du front $(d_m - d)$. D'un autre côté, le caractère absorbant du choc augmente (désirable) si celui de l'acoustique diminue (indésirable), si la densité de la mousse augmente (désirable) alors la densité globale de la moulée diminue (désirable) et le caractère absorbant acoustique augmente (désirable).

Pour valider ces graphiques, un point est sélectionné d'un front Pareto: ce dernier permettra l'accès aux valeurs des fonctions f_1 et f_2 , et de leurs variables de décision. En utilisant les valeurs de ces variables, on a confectionné des mousses PEBD par injection et établi des mesures de ces caractéristiques (présentées par les fonctions f_1 et f_2). Le tableau 5-4 présente donc les valeurs des caractéristiques de la mousse (ou fonctions objectifs) en un point de chaque front (f_{1theo}, f_{2theo}) , les variables de décision adéquats $(T_{inj}, T_m, CP, V_{inj}, V_{dos}))$ et les caractéristiques obtenues expérimentalement pour ce jeu de paramètres d'injection (f_{1exp}, f_{2exp}) . 3 à 4 essais expérimentaux sont réalisés et un intervalle de tolérance est déterminé.

Pareto Set	4 4		Process parameters				÷	4		
(f_1, f_2)	J Wheo	J 2theo	T_{inj}	T_m	CP	V_{inj}	V _{dos}	J lep	J 2ep	
(d_m, d)	0.1766	0.2016	+2	+2	+2	-2	-0.0885	[0.1746 – 0.1788]	[0.1998 – 0.2024]	
$(d_{m}, lpha_{Shock})$	0.1948	0.7034	-0.7263	-2	+2	-2	1.2868	[0.1946 – 0.2003]	[0.7016 - 0.7085]	
$(d_{m}$, $lpha_{acous}(954H\!z))$	0.2127	0.4278	+2	+2	0.3935	+2	+2	[0.2106 - 0.2188]	[0.4246 - 0.4288]	
$(d_{m}, lpha_{acous}(1330 Hz))$	0.2143	0.6741	+2	+2	0.8588	+2	+2	[0.2112-0.2168]	[0.6736 - 0.6764]	
$(lpha_{\it Shock}, lpha_{\it acous}(954H\!z))$	0.7234	0.4054	+2	0.61	+2	+2	+2	[0.7214 - 0.7237]	[0.4011-0.406]	
$(\pmb{lpha}_{\textit{Shock}}, \pmb{lpha}_{\textit{acous}}(1330 \textit{Hz}))$	0.7059	0.6741	+2	+2	+2	+2	+2	[0.6992 - 0.712]	[0.6728-0.6758]	

Tableau 5-4 : Validation des fronts Pareto

Dans le cas du front (d_m, d) , et pour obtenir une mousse avec une densité globale égale à 0.2016 et une densité de la moulée sans peau de 0.1766, les paramètres du procédé devraient être comme suit : une température d'injection de 250 °C, une température du moule de 50 °C, une contre pression de 30 *bars*, une vitesse d'injection de 90 cm³/s et une vitesse de rotation de la vis pendant la phase de plastification égale à 138 *rd/min*. La fabrication des pièces en mousse par injection, en utilisant ces paramètres de mise en œuvre, ont permis de déterminer les plages de variation de la densité globale [0.1998 - 0.2024] et de la densité de la mousse[0.1746 - 0.1788], dans lesquelles les valeurs de ces deux caractéristiques tirées du front Pareto y appartiennent.

5.2.2.4. Optimisation multi-objective à trois critères

Dans le cas d'optimisation de 3 objectifs, il est possible de présenter en 3D le front Pareto. Dans notre cas d'étude, les fonctions considérées sont : la densité de la mousse, l'absorption du choc et l'absorption acoustique à 1330 Hz. Le problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} \operatorname{Min} f_1(A, B, C, D, E) = \operatorname{Min} d_m \\ \operatorname{Min} f_2(A, B, C, D, E) = \operatorname{Min} \left(-\alpha_{shock}\right) \\ \operatorname{Min} f_3(A, B, C, D, E) = \operatorname{Min} \left(-\alpha_{acous}(1330Hz)\right) \\ \end{array} \\ \begin{array}{l} Eq. \ 5\text{-}5 \\ \operatorname{Tel que} - 2 \leq A, B, C, D, E \leq +2 \end{array}$$



Figure 5-8: Front Pareto $(d_m, \alpha_{shock}, \alpha_{acous}(1330Hz))$

La figure 5-8 est une projection dans le plan (d_m, α_{shock}) du front Pareto. Elle donne les plages de variation des "meilleures caractéristiques" possibles des mousses PEBD dans l'espace de conception fixé. Ce cas d'optimisation donnera accès aux paramètres du procédé assurant une moindre densité et des bonnes caractéristiques choc et acoustique en utilisant le procédé d'injection. Ainsi, si le besoin se résume à ce que la mousse ait une densité de 0.21, une absorption de choc de 0.63 et une absorption acoustique de 0.65 (caractéristiques inclues dans l'ensemble des points Pareto satisfaisant les contraintes du problème d'optimisation étudié ici), les paramètres de mise en forme seraient les suivants : une vitesse d'injection et une température du moule à leurs valeurs minimales, une vitesse de dosage de 1.82, une température d'injection de 1.38 et une contre pression de 1.96. Les valeurs présentées ici sont des valeurs codées utilisées lors de la mise en place des méta-modèles (Chapitre 2).

5.2.3. Variable de décision dominante

On traitera en premier temps, le cas d'optimisation multi-critères pour la recherche d'un compromis ($\alpha_{Shock}, \alpha_{acous}(1330Hz)$). Les résultats sont présentés sur les figures 5-9. Le front Pareto optimal est présenté sur la figure 5-9-a, alors que les cinq variables de décision $(T_{inj}, T_m, CP, V_{inj}, V_{dos})$ correspondants aux points du front sont présentés respectivement sur les figures 5-9b à 5-9f. En conclusion, les valeurs optimales de quatre variables de décision parmi les cinq sont quasi-constantes ($T_{inj} = V_{inj} = V_{dos} = 2, CP^2 = 4$), et seulement T_m qui augmente quand α_{Shock} diminue et $\alpha_{acous}(1330Hz)$ augmente. Il est à remarquer ici qu'on utilise CP^2 au lieu de CP vu que cette variable est constante par intervalles : CP = +2 quand $0.706 \le \alpha_{shock} \le 0.722$ et CP = -2 lorsque $0.722 \le \alpha_{shock} \le 0.756$, ce qui est équivalent à $CP^2 = 4$ tout au long du front Pareto.





Figure 5-9 : Le front Pareto et les valeurs des 5 variables de décision correspondants aux points du front Pareto

La température du moule semble être la seule variable de décision dominante, variant tout au long du front Pareto alors que les autres variables prennent des valeurs constantes, soit la limite inférieure soit la limite supérieure. Ceci permet de conclure que dans le but d'avoir des mousses plastiques avec des bonnes caractéristiques choc et acoustique, la température du moule apparaît comme le seul paramètre favorisant l'objectif. Les autres paramètres paraissent sans grande influence. En effet, la température du moule joue un rôle important dans l'étape de l'expansion (ou moussage), qui fut une partie du cycle de la fabrication d'une mousse. Une température faible (avoisinant la température ambiante) induira une courte durée du moussage alors qu'une forte température permettra le contraire au sein du moule et après l'éjection de la pièce. La durée de cette phase d'expansion influera directement sur la rigidité des parois des alvéoles formant la mousse, et en récurrence la rigidité de toute la pièce et donc les caractères absorbants du choc et acoustique

Dans le but de valider le fait que T_m est la seule variable de décision dominante, on étudie le même problème d'optimisation en remplaçant les variables de décision, constantes tout au long du front Pareto (Figure 5-9-a), par leurs valeurs constantes : $T_{inj} = V_{inj} = V_{dos} = 2$ et $CP^2 = 4$. Le problème devient le suivant :

Les modèles d'absorption du choc et acoustique, en fonction seulement de T_m , s'écrivent sous la forme suivante :

$$\alpha_{Shock} = 0.7311 - 0.0126 \times T_m$$
 Eq. 5-7

$$\alpha_{acous}(f = 1330 Hz) = 0.6065 + 0.0388 \times T_m$$
 Eq. 5-8

Les deux fronts Pareto, celui obtenu avec les cinq variables de décision et celui avec la variable de décision supposée dominante, sont superposés sur la figure 5-10. Cette présentation confirme bien les résultats obtenus ci-dessus.

La présentation des cinq variables de décision en fonction du coefficient d'absorption acoustique aboutira aux mêmes conclusions (le fait que T_m est la seule variable de décision dominante).



Figure 5-10: Fronts Pareto ($\alpha_{shock} - \alpha_{acous}$ (1330Hz)) avec 5 variables et 1 variable

Le tableau 5-5 présente les variables de décision dominantes pour le reste des problèmes d'optimisation multi-objective étudiés dans la partie 5.2.2. de ce chapitre.

Front Paroto $\begin{pmatrix} f & f \end{pmatrix}$	Variables de decision dominantes								
From Tareto (J_1, J_2)	T_{inj}	T_m	CP	Vinj	V_{dos}				
$\left(d_{m},d\right)$	×		×						
(d_m, α_{Shock})	×		×	×	×				
$(d_m, \alpha_{acous}(954Hz))$	×			×	×				
$(d_m, \alpha_{acous}(1330Hz))$	×			×	×				
$(\alpha_{\scriptscriptstyle Shock}, \alpha_{\scriptscriptstyle acous}(954 Hz))$		×							
$(\alpha_{\scriptscriptstyle Shock}, \alpha_{\scriptscriptstyle acous}(1330Hz))$		×							

Tableau 5-5 : Variables de décision dominantes

Dans le cas d'optimisation à 3 critères, $(d_m, \alpha_{Shock}, \alpha_{acous}(1330Hz))$, toutes les variables de décision sont dominantes comme le montre la figure 5-11. Cette dernière présente l'évolution de chacune des variables de décision en fonction d'une des caractéristiques, α_{Shock} : conclusion confirmée en présentant les variables de décision en fonction de d_m ou $\alpha_{acous}(1330Hz)$. Toutefois, d'après la figure 5-11, pour avoir un bon compromis densité – choc – acoustique, il faut toujours appliquer une contre pression supérieure à 20 *bars* et utiliser une vitesse d'injection soit à son minimum soit à son maximum. Ce constat est vérifié en présentant de la même façon les deux autres fonctions objectives.

5.2.4. Sensibilité du front Pareto aux variables de décision dominantes

La partie 5.2.3. de ce chapitre a démontré qu'il est possible qu'une ou plusieurs variables de décision domine le long du front Pareto. Dans le cas du compromis $(\alpha_{shock}, \alpha_{acous}(1330Hz))$, la température du moule, T_m , est la plus importante variable de décision qui contrôle la solution optimale. Ainsi, il est tout à fait naturel

d'utiliser T_m comme étant la seule variable de décision et de fixer les autres $(T_{inj}, CP^2, V_{inj}, V_{dos})$ à leurs valeurs constantes, cela conduira à simplifier les procédures de fabrication de la mousse par injection. C'est précisément ce qui est fait dans le problème n°2 (Tableau 5-6), dans lequel $T_{inj}, CP^2, V_{inj}, V_{dos}$ ont été gardé constantes. Le front Pareto est présenté sur la figure 5-10 et est identique à celui du problème n°1. Le problème n°2 est nommé comme cas de référence (ref).



Figure 5-11 : Evolution des 5 variables de décision correspondants aux points du front Pareto

	Decision variable	Reference	Effect of T_{inj}		Effect of <i>CP</i> ²		Effect of Vinj		Effect of V _{dos}	
Problem no.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_{inj}	-2+2	+2	+1	0	+2	+2	+2	+2	+2	+2
T_m	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2	-2+2
CP^2	0+4	+4	+4	+4	2	0	+4	+4	+4	+4
V_{inj}	-2+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	0	+2	+2
V_{dos}	-2+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1	0

Tableau 5-6 : Description des valeurs des paramètres utilisés pour l'étude des problèmes n°1-10

Une étude paramétrique est réalisée ayant pour but d'étudier la sensibilité du front Pareto ($\alpha_{shock}, \alpha_{acous}(1330Hz)$) aux valeurs des variables de décision non dominantes ($T_{inj}, CP^2, V_{inj}, V_{dos}$). Pour cela, les valeurs de ces variables sont modifiées un par un, et les solutions optimales (avec T_m comme la seule variable de décision) sont exploitées. Le tableau 5-6 présente les détails des cas étudiés (problèmes n° 3-10), et les résultats graphiques sont présentés sur les figures 5-12 et 5-13. Les fronts Pareto des problèmes 2, 3 et 4 permettent d'étudier la sensibilité de T_{inj} , alors que ceux de 2, 5 et 6 traitent l'influence de CP^2 . Les problèmes 2, 7 et 8 permettront l'étude de la sensibilité de V_{inj} et ceux de 2, 9 et 10 pour V_{dos} . Ces diagrammes sont utiles pour un ingénieur concevant par injection une mousse structurale à peau non alvéolaire et lui permettra, après l'optimisation de ses deux caractéristiques d'absorption (du choc et acoustique), de choisir des conceptions faisables (et optimales).



Figure 5-12 : Effets de T_{inj}, CP, V_{inj} et V_{dos} sur les fronts Pareto T_m est la seule variable de décision utilisée

Les diagrammes de la figure 5-13, présentant les prestations possibles, nous permet de savoir le genre de différences qui peuvent être faites entre T_m et une des quatre autres variables de décisions T_{inj} , CP^2 , V_{inj} , V_{dos} .

Ces diagrammes sont utiles dans le cas où un ingénieur ne peut modifier que deux paramètres d'injection, en prétendant avoir les mêmes caractéristiques choc et acoustique. Comme par exemple, si un ingénieur doit travailler pour une raison quelconque avec une température du moule supérieure, à partir de la première figure 5-12 (ou on étudie l'influence de T_{inj}), il découvrira qu'il doit diminuer la température d'injection, T_{inj} , pour réaliser les caractéristiques demandées, α_{shock} et α_{acous} (1330 Hz).



Figure 5-13 : Effets de T_{inj}, CP, V_{inj} et V_{dos} sur la valeur optimale de T_m correspondant au Pareto de la figure 5-11

5.2.5. Surface de Pareto

Il s'agit ici de déterminer la région où existaient les valeurs possibles de deux fonctions objectives en utilisant l'algorithme génétique NSGA-II. Pour cela, le NSGA-II est

appliqué sur différents cas possibles d'optimisation. Ainsi, dans le cas de deux fonctions, quatre fronts Pareto sont possibles à trouver : minimiser les deux, maximiser les deux, maximiser une et minimiser l'autre, et vis versa.

L'ensemble des solutions optimales sont présentées ensemble dans le même graphique pour former une région dont l'intérieur constitue les valeurs des deux caractéristiques que la mousse peut avoir avec le procédé d'injection. Les essais expérimentaux réalisés au cours du plan d'expériences, plan composite centrée, dans le chapitre II, seront utilisés pour validation.

Les fronts Pareto sont présentés sur les figures 5-14. Ces présentations donnent une idée sur les caractéristiques d'une mousse PEBD fabriquée par injection en tenant compte des performances de la machine (les limites possibles de variation des paramètres du procédé) et des caractéristiques de la matrice de base (ici, le PEBD). Par exemple, avec de telles contraintes, il n'est pas possible de fabriquer une mousse ayant une densité globale de 0.2, une densité de la mousse de 0.16, une absorption du choc de 0.5 et une absorption acoustique de 0.05 et 0.1 respectivement à 954 Hz et 1330 Hz.








Figure 5-15 : Validation de l'aire Pareto $(d_m, \alpha_{\text{Shock}})$

5.3. Compromis Choc – Acoustique en fonction de la Poroélasticité

L'algorithme génétique de tri non dominé est appliquée sur les modèles mis en place dans le 4^{ème} chapitre afin d'optimiser les caractéristiques choc et acoustique des matériaux poreux. Ces performances s'expriment en fonction des paramètres poroélastiques. L'optimisation devrait satisfaire plusieurs contraintes pour que les résultats soient physiquement acceptables. Les contraintes s'appliquent d'un côté sur les caractéristiques poroélastiques qui doivent appartenir aux plages de conception fixées lors de la mise en place des méta-modèles. D'un autre côté, on impose des contraintes sur les objectifs : l'indicateur HIC doit être positif et le coefficient d'absorption acoustique positif et inférieur à 1.

Les variables de décision ici, sont les caractéristiques intrinsèques d'un matériau poreux isotrope à squelette élastique dont nos méta-modèles dépendent. Il s'agit, de la masse volumique, la porosité, la résistivité, la tortuosité, le coefficient de poisson, les longueurs caractéristique visqueuse et thermique, le module de Young et le coefficient d'amortissement. Chacun de ces paramètres varie entre une limite inférieure et une supérieure (Tableau 4-1).

Les fonctions objectifs considérées sont les performances du matériau poreux établies en fonction des paramètres poroélastiques. Il s'agit, du HIC et du coefficient d'absorption acoustique. Le modèle de l'absorption acoustique établis donne comme sortie l'évolution de ce coefficient en fonction de la fréquence, donc plusieurs sorties au nombre des pas de fréquence. Avec un tel modèle, il n'était pas possible d'optimiser les deux fonctions objectifs. Pour cela, on a pris l'absorption acoustique à 955 Hz, construis son modèle en fonction des caractéristiques du matériau et la considérer comme fonction objectif.

L'optimisation pourra être soit la maximisation des deux fonctions, soit la minimisation des deux fonctions, soit la maximisation d'une et la minimisation de l'autre et vis versa. Ceci dépendra de l'objectif à atteindre. On cherche à minimiser le HIC pour réduire les blessures à la tête et donc une amélioration de l'absorption du choc alors qu'on cherchera à maximiser l'absorption acoustique pour réduire le bruit du moteur automobile. Le NSGA-II disponible dans cette présente étude permet la minimisation des fonctions objectives. Dans le cas où l'objectif est à maximiser, il est nécessaire de transformer la fonction en une autre fonction à minimiser. Plusieurs transformations sont disponibles dans la littérature dont on utilisera la suivante :

$$Maximiser(f) = Minimiser\left(\frac{1}{1+f}\right) \qquad Eq. 5-9$$

Le tableau 5-7 présente les paramètres de calcul utilisés pour l'obtention des solutions dans tous les cas d'optimisation. Ces paramètres sont suffisants pour obtenir les solutions optimales non dominées constituant ainsi le front Pareto. Le fichier sortie de cet algorithme donne les valeurs des compromis ainsi que les valeurs de décision pour chaque typage.

Maximum generation							
Population size	300						
Sub-string length coding for each decision variable							
Crossover probability							
Mutation probability	0.1						
Maximum niche count distance	0.001						
Exponent in sharing function	2						
Seed of random number generator	0.5						

Tableau 5-7 : Paramètres de calcul du NSGA-II utilisés tout au long de cette étude

La figure 5-16 présente des ensembles de points obtenus correspondant à des solutions de typages différents. Elles correspondent à différents compromis entre la limitation du HIC et du coefficient d'absorption acoustique à 955 Hz.



Figure 5-16 : Front Pareto (HIC, α_{acous} (955Hz))

Le front de Pareto comporte 3 parties. Pour un HIC inférieur à 80, on a un front de Pareto hyperbolique, tout au long duquel l'absorption acoustique augmente. Entre 80 et 150, un palier constant est observé où l'absorption acoustique resta constante. A partir de 150, l'ensemble des compromis se présente sous forme hyperbolique. Le caractère limitant les blessures augmente (indésirable) si celui de l'absorption acoustique augmente (désirable). Néanmoins, le HIC reste toujours à la valeur limite égale à 1000 où les blessures sont jugées superficielles. On étudie ensuite l'évolution des caractéristiques poroélastiques tout au long du front de





Figure 5-17 : Le front Pareto et les valeurs des 9 variables de décision correspondants aux points du front Pareto

Vu les plages de variation des caractéristiques des matériaux poreux, on ne peut pas se fixer sur la dominance de certaines variables de décision par rapport aux autres. Par ailleurs, ces diagrammes permettent de spécifier les matériaux qui offrent un meilleur compromis choc acoustique. Le tableau 5-8 décrit les caractéristiques d'un matériau idéal.

Paramètre	Unité	Valeurs entre
$ ho_{_1}$	kg/m³	30 et 80
ϕ	-	$0.85 et \ 0.88$
σ	Nsm^{-4}	22500 et 37500
$lpha_{_\infty}$	-	$2.5 ext{ et } 3$, ou égale à 1
ν	-	0.01 et 0.04
Λ	μm	$5 ext{ et } 30$
Λ '	μm	100 et 400
E	N/m^2	400000 et 600000
η	-	0.16 et 0.2

Tableau 5-8 : Caractéristiques des matériaux offrant un meilleur compromis choc acoustique

Ces données permettent d'avoir une idée sur les plages de variation des caractéristiques intrinsèques des matériaux poreux offrant des qualités optimales des indicateurs *HIC* et absorption acoustique.

5.4. Conclusions

Les Algorithmes Génétiques (AG) constituent un modèle d'adaptation extrêmement simplifié des systèmes naturels, et sont employés avec succès dans les systèmes artificiels. Ce modèle offre des possibilités non seulement dans le domaine de l'optimisation stochastique, mais aussi dans bien d'autres domaines d'applications, et donne un nouvel éclairage à l'étude des mécanismes de l'évolution naturelle. Plus précisément, un algorithme génétique est un algorithme qui fait évoluer une population de solution, sous l'action de règles précises : sélection élitiste et opérateurs génétiques (croisement, mutation, ...), de façon à optimiser un comportement donné. Ces algorithmes sont tout d'abord des outils d'optimisation robustes, très efficaces quand les

Ce chapitre a pour but l'optimisation multi-critères des matériaux poreux. Ainsi, en premier lieu, il s'agissait d'optimisation du procédé d'injection pour la fabrication des mousses plastiques PEBD. Ce but est acquis avec l'aide de l'algorithme génétique NSGA-II pour la recherche de l'ensemble des solutions optimales pour que ce produit ait des meilleures performances. Ces derniers, densité globale, densité de la mousse, absorption du choc et acoustique, se présentent sous forme de modèles polynomiales (Chapitre II). Ainsi, en deuxième point de ce chapitre, les fronts Pareto sont déterminés pour la recherche d'un compromis entre deux caractéristiques du produit (tout dépend de l'objectif, ces derniers sont soit à minimiser soit à maximiser). Ces fronts sont validés en prenant un point du front et en caractérisant la mousse fabriquée avec les paramètres de mise en forme propres à ce point. Une attention particulière est faite pour le cas d'étude d'optimisation de 3 critères (densité, absorption du choc et absorption acoustique). Ensuite, il s'agissait dans le cas de deux critères d'observer l'évolution des variables de décision en fonction d'une des deux caractéristiques présentant le front Pareto dans le cas du compromis choc – acoustique. La notion de variable de décision dominante est utilisée qui permettra de simplifier l'étude des problèmes d'optimisation. Dans le cas du compromis choc – acoustique, une seule variable de décision est dominante. Ainsi, une étude de sensibilité du reste des variables est réalisée, ce qui permet d'avoir des abaques facilitant à l'ingénieur l'optimisation du procédé et lui donnant plus de liberté dans le réglage des paramètres machine. D'un autre côté, dans le cas de l'optimisation de deux critères, la présentation des différents fronts possibles (fronts obtenus en maximisant les deux fonctions, en les minimisant, en maximisant une et minimisant l'autre, et vis versa) donnera à une espèce de zone -Surface de Pareto- dans laquelle on imagine qu'elle englobe tous les compromis entre ces deux critères. En dehors de cette zone, il n'existe aucun compromis. Ce point est validé en utilisant les données expérimentales du second chapitre aussi par des essais supplémentaires pour confirmation.

Pour terminer, la même étude est réalisée avec les méta-modèles exprimant le HIC et l'absorption acoustique en fonction des caractéristiques poroélastiques (Chapitre 4). Il s'agissait dans ce cas de minimiser le HIC pour un minimum de blessures à la tête du piéton dans le cas d'un choc sur le capot moteur, et de maximiser l'absorption acoustique afin de réduire le bruit du moteur. L'évolution des différentes variables de décision tout au long du front Pareto ne permet pas de conclure sur la dominance de certaines de ces variables. Par ailleurs, il était possible de spécifier les intervalles dans lesquelles les caractéristiques poroélastiques permettent d'avoir des bons compromis choc – acoustique.

Conclusions et Perspectives

Cette recherche a permis de proposer une stratégie d'optimisation des performances choc – acoustique des matériaux poreux reposant sur la démarche 3P (Relations Procédé – Produit – Performances). La démarche conduisant à l'optimisation a nécessité 5 étapes :

- Le choix des paramètres (ou entrées) dont il est intéressant de quantifier l'influence sur les performances du produit. Ces paramètres seraient finalement au nombre de 5 quand il s'agissait de bâtir des modèles Procédé – Performances. Ils seraient 9, au nombre des caractéristiques intrinsèques des matériaux poreux isotropes à squelette élastique, dans le cas des modèles Produit – Performances. Les sorties (ou performances) décrivent les caractères d'absorption du choc et d'isolation acoustique dans le secteur automobile. Effectivement, l'utilisation des matériaux poreux collés sous le capot moteur est une idée qui prend du succès vu qu'elle offre des compromis choc – acoustiques intéressants.
- Le choix des outils donnant accès aux performances choc et acoustique de ces produits. Ainsi, dans le cas des modèles procédé – performances, des essais expérimentaux (Chute libre d'une masse, Tube De Kundt) ont été réalisés sur des échantillons de mousses plastiques. Alors que dans le second cas, des modèles éléments finis étaient implémentés sur un code de calcul numérique et qu'à partir des résultats, on déduirait les absorptions du choc et acoustique.
- La troisième étape consistait à choisir quels types de plans d'expériences. Deux cas de figures se présentent ici. Dans le cas des essais expérimentaux, un plan composite centré s'est avéré adéquat pour la construction des modèles empiriques. Alors que dans le cas du calcul numérique, les essais sont déterministes et la table d'expériences est de type latin hypercube.
- Ensuite, la construction des méta-modèles est possible. Différents tests statistiques devraient être validés. En plus, des essais de confirmation sont réalisés sur des jeux de paramètres n'étant pas inclus dans la table d'expériences. En dernier point, la robustesse des modèles est examinée.
- L'optimisation proprement dite, reposant sur les critères sus-cités. Il s'agit de chercher les solutions optimales pour améliorer les performances choc et acoustique des matériaux poreux en fonction des paramètres de mise en forme ou des caractéristiques intrinsèques de ces matériaux. L'exploitation des fronts Pareto obtenus consiste à la recherche des variables de décision dominantes et à l'étude de la sensibilité des paramètres, dont dépendent les méa-modèles, sur le front Pareto. Cette étude aide énormément lors de la prise de décision et permet de définir les matériaux idéaux dans une application nécessitant un compromis choc – acoustique.

Au niveau des résultats obtenus, notons que les critères développés ont permis une optimisation efficace des performances considérées, aussi bien globalement que localement. Entre autre, les relations Procédé – Performances permettent une maîtrise du procédé de mise en forme, mais aussi des performances du produit. La construction des relations Produit – Performances des matériaux poreux est une démarche innovante puisqu'il s'agit des modèles complets, en fonction de toutes les caractéristiques intrinsèques du produit. Le travail consigné dans ce mémoire ouvre la porte à un certain nombre de perspectives qu'il nous semble intéressant de mentionner ici. Ces perspectives sont de quatre types, que l'on peut classifier de la façon suivante :

- Complexification des conditions de mise en forme : ceci peut se faire en étudiant une large gamme de matériaux polymères et différentes épaisseurs d'échantillons. Les modèles exprimant les performances choc et acoustique seront plus robustes et applicables à tout moment.
- Complexification des conditions du calcul numérique : ici il sera idéal d'incorporer deux facteurs en plus dans le cas d'une caractérisation acoustique : les conditions aux limites (différentes épaisseurs d'une lame d'air) et la géométrie de l'échantillon (quelques épaisseurs). Côté modélisation du choc, une amélioration de la formulation de Leclaire pourrait être intéressante dans le cas où le besoin est d'étudier des grandes épaisseurs du matériau.
- Recherche des relations Procédé Produit : plusieurs procédures expérimentaux plus ou moins robustes existent dans la littérature permettant la détermination des caractéristiques poroélastiques des matériaux poreux dont on connaît à priori les paramètres de mise en forme. Ainsi, il est possible de bâtir des relations Procédé – Produit.

Si le présent mémoire permet donc d'aborder la problématique de l'optimisation sous critères choc et acoustique de manière originale, il est néanmoins évident que les perspectives de travail sur le sujet restent très vastes.

Annexes

Propagation du son dans un tube vide

On présente ici le calcul numérique du propagation du son dans un tube de Kundt vide (Figure 1), de longueur L = 295 mm et de diamètre 100 mm. Une pression uniforme et constante, $p_0 = 1 Pa$, est appliquée sur l'une des extrémités du tube tandis que touts les côtés sont encastrés. Les calculs sont effectués, en module acoustique sur Comsol, avec un maillage assez fin et un pas de fréquence de 5 Hz. Le problème se simplifie au cas 1D et la propagation du son dans le vide satisfait l'équation différentielle de Helmholtz suivante, décrivant l'évolution de la pression du son :

$$\frac{d^2 p_a}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} p_a = 0$$
 Eq. 1

Où c_0 est la célérité du son et $\omega = 2\pi f$, f est la fréquence d'excitation. La résolution de cette équation différentielle en tenant compte des conditions aux limites suivantes, appropriées à la simulation numérique,

$$\begin{cases} p_a(x=0) = p_0\\ \frac{\partial p_a}{\partial x}(x=L) = 0 \end{cases} \qquad \qquad Eq. \ 2$$

donnera à l'expression de la pression :

$$p_{a}(x,\omega) = p_{0}\cos\left(\frac{\omega}{c_{0}}x\right) + p_{0}\tan\left(\frac{\omega}{c_{0}}L\right)\sin\left(\frac{\omega}{c_{0}}x\right) \qquad Eq. 3$$

La confrontation théorie – calcul est établi à 3 points du tube (x = 0.09, 0.18 et 0.27 m). La figure 2 valide ainsi le fait que Comsol utilise les lois classiques de la propagation du son. En utilisant le mode EDP (équations différentielles) et en écrivant l'équation (1) dans le module ainsi que les conditions aux limites (2), on obtient les mêmes résultats.



Figure 1 : Propagation du son dans le tube vide



Figure 2 : Evolution de la pression acoustique dans un tube vide

Sensibilité des Caractéristiques Acoustiques

Disposant d'un moyen économique permettant la caractérisation acoustique mes matériaux (simulation numérique de l'absorption acoustique), mais aussi d'un gain de temps remarquable vu la simplification de la modélisation (le problème peut être traité en 1D), on s'intéresse ici d'étudier la sensibilité de chacune des caractéristiques poroélastiques sur l'absorption acoustique des matériaux poreux. Ainsi, on a effectué des calculs numériques en variant un de ces variables et fixant les autres. Le tableau 1 présente les valeurs fixées des caractéristiques du matériau poreux dans cette partie :

Paramètre	Unité	Valeur constante
$ ho_{\scriptscriptstyle 1}$	kg/m ³	104
ϕ	-	0.845
σ	Nsm^{-4}	100750
$lpha_{_{\infty}}$	-	2
V	-	0.22
Λ	μm	102.5
Λ '	μm	202.5
E	N/m^2	2500500
η	-	0.5

Tableau 1 : Valeurs constantes des caractéristiques poroélastiques lors de l'étude de sensibilité

On présente ici (Figure 3) les évolutions des parties réelle et imaginaire de l'impédance de surface, et le coefficient d'absorption acoustique en fonction de la fréquence et de la caractéristique poroélastique étudié.





- - - 1.5

2.25



Porosité

Tortuosité





Longueur Caractéristique Thermique

Figure 3 : Sensibilité des caractéristiques poroélastiques sur l'impédance de surface et l'absorption acoustique

	Re(Zs)	Im(Zs)	α
Masse volumique	-	-	Même que Im(Zs)
Module de Young	-	-	Même que Im(Zs)
Coefficient d'amortissement	-	-	Même que Im(Zs)
Coefficient de poisson	-	-	Même que Im(Zs)
Porosité	diminue	augmente	augmente
Tortuosité	augmente	augmente	augmente
Résistivité	augmente	diminue	-
Longueur caractéristique visqueuse	diminue	diminue	diminue
Longueur caractéristique thermique	-	diminue	diminue

Tableau 2 : Effets de l'augmentation des caractéristiques poroélastiques sur les caractéristiques acoustiques des matériaux poreux

Le tableau 2 résume les effets de variation des caractéristiques poroélastiques sur les caractéristiques acoustiques du matériau poreux (impédance de surface et absorption acoustique). Le caractère élastique de squelette du matériau cellulaire se manifeste par un pic, ce dernier n'est observé que dans l'étude des paramètres mécaniques du matériau : masse volumique, module de Young, coefficient de poisson et coefficient d'amortissement. La fréquence de résonance de squelette constitue en fait un changement d'évolution de la caractéristique acoustique en fonction de la fréquence. On cite le cas de l'étude de sensibilité du module de Young, à une fréquence inférieur à 800 Hz, la partie réelle de l'impédance de surface augmente en augmentant le module de Young, au delà de 800 Hz, l'opposé est observé. D'un autre côté, et dans le cas des caractéristiques non acoustiques, l'influence est classique et n'est pas perturbée, sauf dans le cas de la sensibilité de la longueur caractéristique thermique sur la partie réelle de l'impédance de surface.

Et pour finir, peu importe l'évolution de la partie réelle de l'impédance de surface en fonction des paramètres poroélastiques (sauf le cas de la résistivité), on remarque que la partie imaginaire et le coefficient d'absorption acoustique ont le même comportement.

Loi de Biot en 2D et 1D

Cas 2D (déformations planes)

Dans ce cas, un état de non variabilité complète le long de l'axe x_3 est pris en compte :

$$(\cdot)_{3} = 0$$
 $u_{3} = v_{3} = 0$ Eq. 4

Et donc l'état de déformations planes s'écrit :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{s} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha/\beta} + u_{\beta/\alpha} \right) \qquad \varepsilon_{i3}^{s} = 0 \qquad \varepsilon^{f} = v_{\alpha/\alpha} \qquad Eq. 5$$

Formulation classique:

Les équations de déplacement sont aussi similaires au cas 3D :

Formulation mixte:

$$\left(\hat{\tilde{\lambda}}^{s} + \mu^{s}\right) u_{\beta/\beta\alpha} + \mu^{s} u_{\alpha/\beta\beta} + \omega^{2} \rho_{e} u_{\alpha} + \tilde{\gamma} p_{/\alpha} = 0 \qquad \qquad Eq. \ 8$$

$$-\omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}\tilde{\gamma}}{\phi^2} u_{\alpha/\alpha} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{\lambda}^f} p + p_{\alpha\alpha} = 0 \qquad \qquad Eq. 9$$

Cas 1D

Dans ce cas, les simplifications suivantes sont requises :

$$(\cdot)_{/2} = (\cdot)_{/3} = 0$$
 $u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0$ Eq. 10

Et donc, les composantes de la déformation sont simplifiées comme suit :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{s} = u_{1/1}$$
 $\varepsilon_{22}^{s} = \varepsilon_{33}^{s} = \varepsilon_{12}^{s} = \varepsilon_{23}^{s} = 0$ $\varepsilon^{f} = v_{1/1}$ Eq. 11

Formulation classique

,

$$\left(\tilde{\lambda}^{s}+\mu^{s}\right)u_{1/11}+\omega^{2}\tilde{\rho}_{11}u_{1}+\tilde{\lambda}^{f_{s}}v_{1/11}+\omega^{2}\tilde{\rho}_{12}v_{1}=0 \qquad \qquad Eq. \ 12$$

$$\tilde{\lambda}^{fs} u_{1/11} + \omega^2 \tilde{\rho}_{12} u_1 + \tilde{\lambda}^{f} v_{1/1} + \omega^2 \tilde{\rho}_{22} v_1 = 0 \qquad \qquad Eq. \ 13$$

Ceci est un système classique de deux équations différentielles de second ordre et une solution analytique peut être facilement obtenue.

Formulation mixte

$$\left(\hat{\lambda}^{s}+2\mu^{s}\right)u_{1/11}+\omega^{2}\rho_{e}u_{1}+\tilde{\gamma}p_{/1}=0 \qquad \qquad Eq. \ 14$$

$$-\omega^{2} \frac{\tilde{\rho}_{22}\tilde{\gamma}}{\phi^{2}} u_{1/1} + \omega^{2} \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{\lambda}^{f}} p + p_{/11} = 0 \qquad \qquad Eq. \ 15$$

Sensibilité des caractères d'absorption de choc

Pour chacune des caractéristiques poroélastiques, il s'agit de la faire varier tout en fixant le reste des paramètres (Tableau 1), et d'étudier l'influence sur les indicateurs choc (*HIC* et énergies). La figure 4 présente l'évolution du *HIC* en fonction de chacun des caractéristiques des matériaux poreux à squelette élastique.





Figure 4 : Sensibilité des caractéristiques du matériau poreux sur le HIC

Cette étude de sensibilité permet de constater que seulement les paramètres mécaniques ont une influence remarquable sur le *HIC*. Les caractéristiques non acoustiques ont certes une certaine sensibilité mais reste négligeable devant le reste des paramètres. Toutefois, le comportement est commun pour toutes les caractéristiques poroélastiques : l'augmentation d'une d'entre elles améliore le *HIC* (minimum de blessures à la tête). Le comportement est linéaire en fonction de la porosité ou la tortuosité alors qu'il est exponentiel en fonction d'une des autres caractéristiques du matériau. L'ordre de grandeur du *HIC* lors de cette étude est largement inférieur à la limite du risque de blessures graves, ce qui prouve l'utilité de ce type de matériau et leur application ascend

La figure 5 présente l'évolution des énergies cinétique et élastique en fonction de chacune des paramètres poroélastiques du matériau en sollicitant une plaque par une force ponctuelle à son centre. En tenant compte du modèle de P. Leclaire, Les énergies élastique et cinétique sont définies sous les formes suivantes :

$$E_{\acute{e}lastique} = \frac{1}{2} D \int_{S} \left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_2^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] dS \qquad Eq. \ 16$$

$$E_{cinétique} = \frac{h}{2} \int_{S} (\rho_1 \dot{w}_s^2 + 2\rho_0 \dot{w}_s \dot{w} + m \dot{w}^2) dS \qquad Eq. \ 17$$









Coefficient d'amortissement

Figure 5 : Sensibilité des caractéristiques du matériau poreux sur les énergies élastique et cinétique

Cette étude permet de constater en premier temps que la longueur caractéristique visqueuse a très peu d'influence sur les énergies. Cette caractéristique intervient dans l'expression de la fonction de correction $F(\omega)$ (*Eq. 3-179*). On voit encore pourquoi P. Leclaire a estimé cette fonction égale à l'unité.

Concernant les caractéristiques mécaniques du matériau poreux, une augmentation du module de Young, et/ou du coefficient d'amortissement, et/ou coefficient de poisson, permettront un glissement des fréquences de résonance de la squelette vers des valeurs plus grandes mais aussi des plus petites énergies (valeurs propres). Un matériau plus dense induira une résonance à une fréquence plus inférieure avec des valeurs propres inférieures. L'influence de la porosité est plus remarquée dans l'évolution de l'énergie élastique. Effectivement, une porosité plus grande affaiblit le caractère élastique du matériau poreux. La même chose est observée lors de l'étude de la sensibilité de la longueur caractéristique thermique, néanmoins l'énergie élastique augmente. C'est le contraire quant à la résistivité, en effet, l'énergie cinétique connaît une augmentation remarquable alors que peu d'influence sur l'énergie élastique.

Les Algorithmes Génétiques

Pour faire fonctionner les opérateurs génétiques, les AE utilisent un codage (ou représentation) des paramètres à la place des paramètres eux-mêmes. Plusieurs codages ont été développés par différents auteurs comme le codage binaire, le codage réel, le codage de Gray, le codage de permutation, le codage d'état fini, le codage de type «arborescentes ».

Les AG traditionnels utilisent le codage binaire comme représentation des solutions. Chaque individu est représenté par un vecteur binaire (ou chaîne de bits), dont chaque élément prend la valeur 0 ou 1. Ce vecteur est une concaténation des paramètres à optimiser, chaque paramètre étant transformé en une série binaire. La figure 6 présente un exemple du codage binaire d'une solution avec 3 paramètres. Chaque paramètre est représenté par une série binaire de 4 chiffres {0,1}. Cette représentation s'adapte bien aux problèmes où les paramètres ont une représentation binaire canonique, comme les problèmes booléens. Elle s'applique aussi aux problèmes d'optimisation paramétrique continus ($\Phi : \Re^n \to \Re$), mais il est alors nécessaire de définir une technique de codage adéquate de \Re^n vers {0,1}^l. La précision du codage dépend du nombre de bits (et donc de la précision de la solution trouvée), plus *l* est grand, plus c'est précis, plus la convergence est longue.

Sélection des parents

La sélection est un opérateur clé sur lequel repose en partie la qualité d'un algorithme génétique. Dans cette étape, les chromosomes de la population actuelle sont sélectionnés pour être les parents de la génération suivante. En accord avec la théorie de l'évolution de Darwin, les meilleurs individus doivent survivre et en créer les nouveaux. Il existe plusieurs méthodes pour choisir les meilleurs individus, par exemple la sélection proportionnelle, la sélection par tournoi, la sélection par rang, la sélection selon l'état d'équilibre, etc.



Figure 6 : Exemple du codage binaire d'une solution potentielle avec 3 paramètres

La méthode de sélection «Tirage à la roulette» est la méthode la plus connue et la plus utilisée. C'est une méthode stochastique qui reproduit une roulette de casino qui compterait autant de cases que d'individus dans la population. La largeur de la case d'un individu \vec{x}_i est proportionnelle à sa performance $f(\vec{x}_i)$ et prend la valeur $f(\vec{x}_i) / \sum_{j=1}^{N} f(\vec{x}_j)$. La roue est lancée, l'individu sélectionné est désigné par l'arrêt de la roue sur sa case. Pour un problème de maximisation, la performance est la valeur de

la fonction coût, pour un problème de minimisation, la performance est l'inverse de la valeur de fonction coût.

Une seconde méthode très utilisée et mérite d'être mentionnée, est la sélection par tournoi. Elle consiste à sélectionner un sous-ensemble de la population, et à ne conserver que le meilleur individu du sous-ensemble. L'opération recommence jusqu'à l'obtention du nombre d'individus requis. Au cours d'une génération, il y a autant de tournois que d'individus à sélectionner. La pression de sélection est ajustée par le nombre q de participants à un tournoi. L'avantage de cette technique est qu'elle est paramétrable par la valeur de q, et peu sensible aux erreurs sur Φ . Par contre, sa variance est élevée.

Remplacement

L'étape de remplacement sert à déterminer quels individus parmi les parents de la génération courante et leurs enfants, seront les parents de la génération suivante. A la différence de l'étape de sélection, durant laquelle des individus peuvent être sélectionnés plusieurs fois, lors de l'étape de remplacement, un individu est ici sélectionné une fois – et il survit alors à la génération suivante – ou pas du tout et il disparaît définitivement de l'évolution en cours. Plusieurs stratégies de remplacement sont présentées dans la littérature pour les AG. Parmi lesquelles, le remplacement générationnel ou la nouvelle population est composée uniquement des enfants. On fait disparaître tous les individus de la population courante. L'inconvénient majeur de cette approche est la perte de meilleur individu, si on ne le conserve pas systématiquement dans la nouvelle génération garde certaines "bonnes" solutions (sélection élitiste, ou la nouvelle génération garde certaines "bonnes" solutions (sélection élitiste) de la génération courante et est complétée par des enfants. Alors que le remplacement continu consiste à ce que des enfants, choisis aléatoirement, remplacent de façon régulière les individus les moins performants de la génération courante.

Croisement

Le croisement est l'opérateur principal des AG. C'est un opérateur génétique relatif à plusieurs individus parents (souvent deux). Son rôle consiste à combiner les génotypes des individus pour en produire un nouveau. Il fait partie du mécanisme de convergence de l'AG, qui permet de concentrer la population autour des meilleurs individus. On distingue plusieurs types de croisements possibles. Le croisement à un point est l'opérateur de croisement le plus simple et le plus classique. Il consiste à choisir aléatoirement un point de coupure, puis à subdiviser le génotype de chacun des parents en deux parties de part et d'autre de ce point. Les fragments obtenus sont alors échangés pour créer les génotypes des enfants (Figure 7). Le croisement multipoints est une généralisation du croisement. Dans le croisement multipoints, les points de coupure sont fixés par avance. La figure 7 représente un croisement multipoints (deux points dans l'exemple).

Le croisement uniforme est la généralisation du croisement multipoints. Dans le croisement uniforme, chaque gène d'un enfant est choisi aléatoirement entre les gènes des parents ayant la même position dans le chromosome, avec une probabilité de 0.5 s'il y a deux parents. Le second enfant est construit en prenant les choix complémentaires du premier enfant. Un exemple du croisement uniforme est aussi présenté sur la figure 7.

Mutation

Les AG utilisent l'opérateur de mutation comme moyen de préserver la diversité de la population. La mutation utilisée est binaire. Elle inverse aléatoirement les bits du

génotype, avec une faible probabilité, typiquement de 0.01 à 0.001. La figure 8 nous montre un exemple de la mutation binaire.



												Mutation 1 bit	-	-	-	+	-		÷	-	-	-
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	•	0	0	0	0	0	0
									Iı	ive	rsio	on d'un bit choisi au hasard	đ			1						

Figure 8 : Méthodes de mutation utilisées par le AG

Etant la plus employée avec le codage binaire, la mutation stochastique consiste à inverser indépendamment chaque bit du chromosome. Un test sur le taux de mutation est effectué pour chacun des bits du chromosome : en cas de succès, le bit testé est alors inversé. La mutation 1 bit consiste à choisir par hasard un bit du chromosome et inverser sa valeur.

The Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm

Cette partie présente un bref historique sur les algorithmes génétiques mis en place depuis l'application de la théorie de l'évolution. On s'intéresse au principe et étapes du déroulement de l'algorithme génétique utilisé dans ce chapitre, le NSGA-II. Et en dernier point, on discutera sur le principe d'une des étapes du NSGA-II : le calcul de la distance de crowding.

Historique

En 1860, Charles Darwin publie son livre intitulé *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la lutte pour l'existence dans la nature*. Dans ce livre, Darwin rejete l'existence «de systèmes naturels figés», déjà adaptés pour toujours à toutes les conditions extérieures, et expose sa théorie de l'évolution des espèces : sous l'influence des contraintes extérieurs, les êtres vivants se sont graduellement adaptés à leur milieu naturel au travers de processus de reproductions. Le $20^{\rm ème}$ siècle était la période où l'existence de mutations génétiques est mise en évidence. Avant cette période, les problèmes de traitement de l'information sont résolus de manières figés : lors de sa phase de conception, le système reçoit toutes les caractéristiques nécessaires pour les conditions d'exploitations connues au moment de sa conception, ce qui empêche une adaptation à des conditions d'environnement inconnues, variables ou évolutives. Les chercheurs en informatique étudient donc des méthodes pour permettrent aux systèmes d'évoluer spontanément en fonction de nouvelles conditions. Puis, en 1966, L. J. Fogel a pu programmer des algorithmes évolutionnaires avant que I. Rechenberg a pu mettre en évidence la stratégie d'évolution en 1973.

Dans les années 1960, John Holland étudient les systèmes évolutifs et, en 1975, il introduit le premier modèle formel des algorithmes génétiques (*the canonical genetic algorithm AGC*) dans son livre *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ce modèle servira de base aux recherches ultérieures. Et en 1989, David Goldberg publie un ouvrage de vulgarisation des algorithmes génétiques. Alors que les années 1990 ont vu la programmation d'une panoplie d'algorithmes génétiques transcrite en C++, appelée GAlib. Cette librairie contient des outils pour des problèmes d'optimisation en utilisant les AG. Elle est conçue pour servir de support de programmation. Pour citation, en 1985, Schaffer a présenté VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm, AGEV : Algorithme Génétique à Évaluation Vectorielle). Puis en 1994, un algorithme plus pertinent a été validé, le NPGA (Niched Pareto Genetic Algorithm), utilisant une sélection par tournoi, basée principalement sur la dominance de Pareto. Le PGA 2 basé sur le degré de domination d'un individu constituait une amélioration du NPGA.

En 1994, Srinivas et Deb ont mis en place le NSGA : Non Dominated Sorting Genetic Algorithm. C'est un algorithme génétique populaire basée sur la non-domination pour l'optimisation multi-objective. Cet algorithme est très performant et généralement critiqué pour sa complexité en calcul, son manque d'élitisme et pour le choix de la valeur optimale du paramètre de partage $\sigma_{\rm share}$. Et finalement, Deb *et al.* ont proposé une nouvelle version de l'algorithme NSGA le NSGA-II, qui est considéré comme étant plus efficace que son prédécesseur pour différentes raisons. Si d'un côté, il utilise une approche élitiste qui permet de sauvegarder les meilleures solutions trouvées lors des générations précédentes, mais en plus il utilise une procédure de tri basée sur la nondominance, plus rapide. D'un autre côté, il ne nécessite aucun réglage de paramètre et utilise un opérateur de comparaison basé sur un calcul de la distance de crowding.

Principe du NSGA-II

Dans cet algorithme, une population de parents (P_t) de taille (N) et une population d'enfants (Q_t) de taille (N) sont assemblées pour former une population $(R_t = P_t \cup Q_t)$, comme le montre la figure 1.



Figure 6 : Principe de l'algorithme NSGA-II

Cet assemblage permet d'assurer l'élitisme. La population de taille (2*N*) est ensuite triée selon un critère de non-dominance pour identifier les différents fronts F_1, F_2 , etc. Les meilleurs individus vont se retrouver dans le ou les premiers fronts. Une nouvelle population parent (P_{t+1}) est formée en ajoutant les fronts au complet (premier front F_1 , second front F_2 , etc.) tant que ceux-ci ne dépassent pas *N*. Si le nombre d'individus présents dans (P_{t+1}) est inférieur à (*N*), une procédure de *crowding* est appliquée sur le premier front suivant, (F_i), non inclus dans (P_{t+1}). Le but de cet opérateur est d'insérer les ($N - |P_{t+1}|$) meilleurs individus qui manquent dans la population (P_{t+1}). Les individus de ce front sont utilisés pour calculer la distance de *crowding* entre deux solutions voisines.

Une fois que les individus appartenant à la population (P_{t+1}) sont identifiés, une nouvelle population enfant (Q_{t+1}) est créée par sélection, croisement et mutation. La sélection par tournoi est utilisée mais le critère de sélection est maintenant basé sur l'opérateur de comparaison (\prec_n) défini ci-dessous. Le processus continue, d'une génération à la suivante, jusqu'à un critère d'arrêt. La figure 2 résume les différentes étapes décrites cidessus de l'algorithme *NSGA*-II.

Pour chaque itération t faire $R_t = P_t \cup Q_t$ (Combiner les deux populations) $F = \text{fast-non-dominated-sort}(R_t)$ (Calcul de tous les fronts non dominés de R_t) $P_{t+1} = \emptyset$ i = 1Tant que $|P_{t+1}| + |F_i| \le N$ (Tant que la population n'est pas pleine) i = i + 1 $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$ (Inclure le i^g front non dominé dans P_{t+1}) Crowding – distance – assignement (Fi) (Calculer la distance de «crowding» du front F_i) Sort (F_i, \prec_n) (Trier dans un ordre descendant en utilisant l'opérateur de comparaison \prec_n) $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i [1: (N: |P_{t+1}|)]$ (Choisir les premiers $(N: |P_{t+1}|)$ individus du front les mieux répartis) Générer une nouvelle population enfant (Q_{t+1}) par sélection, croisement et mutation t = t+1 (Incrémenter le compteur des générations)

Figure 7: Algorithme du NSGA-II

Calcul de la distance de crowding

La distance de crowding d'une solution (\hat{J} (ou d'un individu) se calcule en fonction du périmètre formé par les points les plus proches de (\hat{J}) sur chaque objectif. La figure 3 montre une représentation à deux dimensions associée à la solution (\hat{J}). Le calcul de la distance de crowding nécessite, avant tout, le tri des solutions selon chaque objectif, dans un ordre ascendant. Ensuite, pour chaque objectif, les individus possédant les valeurs limites (la plus petite et la plus grande valeur de fonction objectif) se voient associés une distance infinie (∞). Pour les autres solutions intermédiaires, on calcule une distance de crowding égale à la différence normalisée des valeurs des fonctions objectives de deux solutions adjacentes. Ce calcul est réalisé pour chaque fonction objective. La distance de crowding d'une solution est calculée en additionnant les distances correspondantes à chaque objectif.



Figure 0-8 : Distance de crowding, les points noirs sont des solutions appartenant au même front

L'algorithme de la figure 4 montre la procédure de calcul de la distance de toutes les solutions non dominées de l'ensemble (I). Dans cet algorithme, f_m^{i+1} et f_m^{i-1} représentent respectivement la valeur de la m^e fonction objective de la solution i+1 et i-1, alors que

- 214 -

Nombre de solutions dans l'ensemble I
Initialiser les distances
Trier selon la valeur de l'objectif m
${f_m^{i+1}-f_m^{i-1}})/{f_m^{Max}-f_m^{Min}}$

fonction objective. Après ce calcul, toutes les solutions de I auront une distance métrique.

Figure 9 : Calcul de la distance de crowding pour chaque solution d'un front

L'opérateur crowded-comparison (\prec_n) est utilisé pour guider le processus de sélection comme suit : chaque solution (i) de la population est identifiée par son rang (i_{rang}) et la distance de crowding $(i_{distance})$. L'opérateur (\prec_n) défini ci-dessous permet d'identifier un ordre de préférence entre deux solutions :

$$\begin{array}{ll} i \prec_n j & \mathrm{si} & \left(i_{rang} < j_{rang}\right) \\ & ou & \left(\left(i_{rang} = j_{rang}\right) et\left(i_{rang} > j_{rang}\right)\right) \end{array}$$

Entre deux solutions de rangs différents, on préfère la solution avec le plus petit rang (ou le plus petit front). Pour deux solutions qui appartiennent au même front, on préfère la solution qui est localisée dans la région où la densité de solutions est moindre, soit l'individu possédant la plus grande valeur de distance de crowding.

Cette technique (NSGA) offre plusieurs avantages. Par exemple, son efficacité est relativement insensible à la forme du front de Pareto optimal et aux problèmes avec incertitudes. En revanche, « l'envergure » du front de Pareto obtenu est excellente (l'efficacité des autres méthodes d'optimisation ont un ascendant sur l'étendue de la solution obtenue) et finalement, il suffit d'une seule application pour obtenir la totalité du front Pareto (contrairement aux autres méthodes qui doivent appliquée plusieurs fois). En effet, NSGA a été appliquée récemment pour optimiser plusieurs processus d'importance industrielle en génie chimique.

Autres formulations de la flexion d'une plaque poreuse

Formulation de Theodorakopoulos

Theodorakopoulos a examiné la réponse dynamique d'un plaque poreuse, en appui simple, suite à un chargement harmonique d'une plaque poroélastique. Les effets d'inertie de la porosité et de la perméabilité sur la réponse sont expertisés.

1. Equations de Biot

Les équations de Biot s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j}^{s} - b(\dot{u}_{i} - \dot{v}_{i}) + F_{i} = \rho_{11}\ddot{u}_{i} + \rho_{12}\ddot{v}_{i} \qquad Eq. \ 1$$

$$\sigma_{,i}^{f} + b(\dot{u}_{i} - \dot{v}_{i}) + X_{i} = \rho_{21}\ddot{u}_{i} + \rho_{22}\ddot{v}_{i} \qquad Eq. 2$$

Tel que b est le coefficient de friction de Biot :

$$b = \mu \phi^2 / k_0 \qquad \qquad Eq. \ 3$$

 σ_{ij}^{s} et $\sigma^{f} \delta_{ij}$ sont les composantes de la contrainte agissant respectivement sur le solide et le fluide. La relation entre ces contraintes avec celles du système, σ_{ij} , s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{s} + \sigma^{f} \delta_{ij} \qquad \qquad Eq. \ 4$$

On peut écrire σ_{ij} en fonction de la déformation et des coefficients de Lamé (λ^s, μ^s) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu^{s} \varepsilon_{ij}^{s} + \left(\lambda^{s} \varepsilon_{kk}^{s} + \frac{\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}}{\tilde{\lambda}^{f}} \sigma^{f}\right) \delta_{ij} \qquad Eq. 5$$

En tenant compte des expressions (Eq. 2) et (Eq. 5), l'équation (Eq. 1) prend la forme suivante :

$$\sigma_{ij,j} + F_i + X_i = 2\mu^s \varepsilon_{ij,j}^s + \lambda^s \varepsilon_{,i}^s + \frac{\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^f}{\tilde{\lambda}^f} \sigma_{,i}^f + F_i + X_i = \rho_1 \ddot{u}_i + \rho_2 \ddot{v}_i \qquad Eq. \ 6$$

La dérivée de (Eq. 2) par rapport à x et en éliminant \mathcal{E} , on trouve :

Ì

$$\widetilde{\lambda}^{f}\sigma_{,ii}^{f} - b\dot{\sigma}^{f} + b\left(\widetilde{\lambda}^{f} + \widetilde{\lambda}^{fs}\right)\dot{\varepsilon}^{s} = \rho_{22}\ddot{\sigma}^{f} + \left(\widetilde{\lambda}^{f}\rho_{21} - \widetilde{\lambda}^{fs}\rho_{22}\right)\dot{\varepsilon}^{s} - \widetilde{\lambda}^{f}X_{i,i} \qquad Eq. 7$$

Ainsi, le système d'équations (Eq. 1) et (Eq. 2) peut être remplacé par un système d'équations équivalent : (Eq. 6) et (Eq. 7), i, j = 1,2,3.

2. Formulation de Theodorakopoulos

Les surfaces inférieure $(x_3 = -h/2)$ et supérieure $(x_3 = h/2)$ de la plaque sont sollicitées respectivement en pression $p_1 = p_1(x_1, x_2, t)$ et $p_2 = p_2(x_1, x_2, t)$. Theodorakopoulos a supposé que l'écoulement du fluide par rapport au comportement du solide dans le plan est négligeable devant l'écoulement latéral :

$$u_1 \cong v_1$$
 $u_2 \cong v_2$ $u_3 = w \neq v_3$

 $u_i = u_i(x_1, x_2, t)$ et $v_i = v_i(x_1, x_2, t)$, i = 1, 2, sont respectivement les composantes des déplacements dans le plan de la phase solide et fluide, $u_3 = u_3(x_1, x_2, t) = w = w(x_1, x_2, t)$ est le déplacement latéral de la surface moyenne du solide et $v_3 = v_3(x_1, x_2, t)$ est le déplacement latéral du fluide. En se basant sur ces hypothèses, on conclut que :

$$\sigma_{33} = 0 \qquad \qquad Eq. 8$$

Où $\sigma_{\scriptscriptstyle 33}$ est la composante dans la direction x de la contrainte totale normale,

$$u_i \cong v_i = -x_3 w_{,i}$$

$$e_{ij} \cong \varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,j} = x_3 (1/R)$$

$$i = 1,2$$

$$Eq. 9$$

Où (1/R) est la courbure de la surface moyenne.

L'excitation est supposée harmonique en fonction du temps. La réponse de la plaque en est aussi, ce qui signifie qu'une fonction typique du problème a la forme suivante :

$$f(x_1, x_2, t) = \tilde{f}(x_1, x_2)e^{i\omega t}$$
 Eq. 10

Où \tilde{f} est l'amplitude de f, $i = \sqrt{-1}$ et ω est la fréquence angulaire de la vibration.

La résolution de l'équation (Eq. 2) en terme fréquentiel permet de donner l'expression de \tilde{v}_i :

$$\widetilde{v}_{i} = \frac{\widetilde{\sigma}_{,i}^{f} + \widetilde{X}_{i} + (i\omega b + \omega^{2}\rho_{12})\widetilde{u}_{i}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}} \qquad Eq. \ 11$$

L'équation (Eq. 5) en fréquence aura la forme suivante :

$$\begin{split} \widetilde{\sigma}_{ij,j} + \widetilde{F}_{i} + \widetilde{X}_{i} \Biggl(1 - \frac{-\omega^{2} \rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \Biggr) &= 2\mu^{s} \widetilde{\varepsilon}_{ij,j}^{s} + \lambda^{s} \widetilde{\varepsilon}_{,i}^{s} + \Biggl(\frac{\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f}}{\widetilde{\lambda}^{f}} - \frac{-\omega^{2} \rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \Biggr) \widetilde{\sigma}_{,i}^{f} \\ &+ \widetilde{X}_{i} \Biggl(1 - \frac{-\omega^{2} \rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \Biggr) + \widetilde{F}_{i} \\ &= -\omega^{2} \Biggl(\rho_{1} + \rho_{2} \frac{i\omega b + \omega^{2} \rho_{12}}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \Biggr) \widetilde{u}_{i} \end{split}$$

Cette équation dépend de 4 variables $(\tilde{u}_i, i = 1, 2, 3 \text{ et } \tilde{\sigma}^f)$ au lieu de 7 $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i, i = 1, 2, 3 \text{ et } \tilde{\sigma}^f)$ dans l'équation 4. Une écriture plus simple de (Eq. 12) donnera :

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = 2\mu^{s}\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{s} + \lambda^{s}\widetilde{\varepsilon}^{s}\delta_{ij} + \left(\frac{\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f}}{\widetilde{\lambda}^{f}} - \frac{-\omega^{2}\rho_{12}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}}\right)\widetilde{\sigma}^{f}\delta_{ij} \qquad Eq. \ 13$$
En tenant compte des conditions aux limites $\sigma_{i3} = 0$ sur les deux surfaces de la plaque, la multiplication de l'équation (Eq. 13) (dans le cas de i = 1,2) par x_{3} , et son intégration sur l'épaisseur, donne les équations suivantes :

$$\tilde{M}_{111} + \tilde{M}_{12,2} - \tilde{Q}_1 = 0$$
 Eq. 14

$$\tilde{M}_{211} + \tilde{M}_{222} - \tilde{Q}_2 = 0$$
 Eq. 15

Où les résultantes du moment M_{ij} et de cisaillement Q_i sont définies par :

$$\widetilde{M}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \widetilde{\sigma}_{ij} x_3 dx_3$$

$$\widetilde{Q}_i = \int_{-h/2}^{h/2} \widetilde{\sigma}_{i3} dx_3$$

$$i = 1,2$$

$$Eq. 16$$

Pour le cas *i=3*, et en tenant compte des conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{\sigma}_{33} = -\tilde{p}_1 \text{ pour } x_3 = -h/2$$

 $\tilde{\sigma}_{33} = -\tilde{p}_2 \text{ pour } x_3 = +h/2$
Eq. 17

L'intégration de l'équation (Eq. 12) donne :

$$\widetilde{Q}_{1,1} + \widetilde{Q}_{2,2} + \widetilde{p}_1 - \widetilde{p}_2 + \left[\widetilde{F}_3 + \widetilde{X}_3 \left(1 - \frac{-\omega^2}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}\right)\right] h = \left(-\omega^2 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}\right) \widetilde{w} h - \frac{Eq.}{18}\right)$$

L'équation (Eq. 18) devient, en utilisant (Eq. 14) et (Eq. 15) :

$$\begin{split} \tilde{M}_{11,11} + 2\tilde{M}_{21,12} + 2\tilde{M}_{22,22} + (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) + \left[\tilde{F}_3 + \tilde{X}_3 \left(1 - \frac{-\omega^2}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}\right)\right] h \\ &= \left(-\omega^2 \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}\right) \tilde{w} h \end{split}$$
 Eq. 19

L'équation (Eq. 12)-(Eq. 13) est valable dans le cas de i, j = 1,2,3. Dans le cas de l'équation (Eq. 16) où $i, j = 1,2, \tilde{\sigma}_{ij}$ a la forme suivante en tenant compte de l'hypothèse (Eq. 8):

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu^{s}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{s} + \tilde{\lambda}^{s}\frac{2\mu^{s}}{2\mu^{s} + \lambda^{s}}\tilde{\varepsilon}^{s}\delta_{ij} + \frac{2\mu^{s}}{2\mu^{s} + \lambda^{s}}\left(\frac{\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}}{\tilde{\lambda}^{f}} - \frac{-\omega^{2}\rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}}\right)\tilde{\sigma}^{f}\delta_{ij} \qquad Eq. \ 20$$

Dans ce cas, \tilde{M}_{ij} s'écrit en utilisant (Eq. 9) et (Eq. 20) :

$$\widetilde{M}_{ij} = -D\left[(1-\nu)\widetilde{w}_{,ij} + \left(\nu \,\widetilde{w}_{,kk} + B_p \widetilde{I}_{\tau}\right)\delta_{ij}\right] \qquad Eq. \ 21$$

Où *D* est la rigidité de flexion de la plaque et :

$$B_{p} = -\frac{12}{h} \frac{\nu}{\tilde{\lambda}^{s}} \left(\frac{\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}}{\tilde{\lambda}^{f}} - \frac{-\omega^{2} \rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \right) \qquad Eq. \ 22$$

$$-D(\nabla^{4}\widetilde{w} + B_{p}\nabla^{2}\widetilde{I}_{\tau}) + (\widetilde{p}_{1} - \widetilde{p}_{2}) + \left[\widetilde{F}_{3} + \widetilde{X}_{3}\left(1 - \frac{-\omega^{2}\rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}}\right)\right]h$$

$$= \left(-\omega^{2}\left(p_{1} + p_{2}\frac{i\omega b + \omega^{2}\rho_{12}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}}\right)\widetilde{w}h$$
où $\nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial x_{1}^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial x_{2}^{2}}$ et $\nabla^{4} = \nabla^{2}(\nabla^{2}).$

$$Eq. 24$$

La résolution de l'équation (Eq. 14), en tenant compte de la condition (Eq. 8) et en utilisant (Eq. 9), donne l'expression de $\tilde{\epsilon}^s$:

$$\widetilde{\varepsilon}^{s} = -\frac{1}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} \left(\frac{\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f}}{\widetilde{\lambda}^{f}} - \frac{-\omega^{2}\rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}} \right) \widetilde{\sigma}^{f} - \frac{2\mu^{s}}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} x_{3} \nabla^{2} \widetilde{w} \qquad Eq. \ 25$$

L'élimination de $\tilde{\varepsilon}^s$ entre (Eq. 7) et (Eq. 25) donne ainsi la deuxième équation modélisant le comportement d'une plaque poroélastique en flexion :

$$\begin{split} \widetilde{\lambda}^{f} \widetilde{\sigma}_{,ii}^{f} &- \left\{ i\omega b \left[1 + \frac{1}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} \frac{\left(\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f} \right)^{2}}{\widetilde{\lambda}^{f}} - \frac{\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f}}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} \frac{\rho_{2} \left(- \omega^{2} \right)}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \right] \right. \\ &+ \left(- \omega^{2} \left\{ \rho_{22} - \frac{1}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} \left(\widetilde{\lambda}^{f} \rho_{21} - \widetilde{\lambda}^{fs} \rho_{22} \right) \frac{\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f}}{\widetilde{\lambda}^{f}} + \frac{\widetilde{\lambda}^{f} \rho_{21} - \widetilde{\lambda}^{fs} \rho_{22}}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} \frac{\rho_{2} \left(- \omega^{2} \right)}{i\omega b - \omega^{2} \rho_{22}} \right] \right\} \quad Eq. \ 26 \\ &+ \left[- i\omega b \left(\widetilde{\lambda}^{fs} + \widetilde{\lambda}^{f} \right) - \omega^{2} \left(\widetilde{\lambda}^{f} \rho_{21} - \widetilde{\lambda}^{fs} \rho_{22} \right) \right] \frac{2\mu^{s}}{2\mu^{s} + \lambda^{s}} x_{3} \nabla^{2} \widetilde{w} = -\widetilde{\lambda}^{f} \widetilde{X}_{i,i} \end{split}$$

Le système d'équations (Eq. 24) et (Eq. 26), décrivant le comportement d'une plaque poroélastique en flexion, peut se réduire à l'équation suivante :

$$-D\nabla^{4}\widetilde{w} + (\widetilde{p}_{1} - \widetilde{p}_{2}) + \widetilde{F}_{3}h = -\rho\omega^{2}\widetilde{w}h \qquad Eq. \ 27$$

Où le matériau de la plaque devient tout simplement élastique de densité massique ho .

Les équations (Eq. 24) et (Eq. 26) peuvent s'écrire sous une forme plus simple :

$$C_{1}\nabla^{4}\widetilde{w} + C_{2}\nabla^{2}\widetilde{I}_{\tau} + C_{3}\widetilde{w} + (\widetilde{p}_{1} - \widetilde{p}_{2}) = 0 \qquad Eq. \ 28$$
$$C_{4}\widetilde{\tau}_{ii} + C_{5}\widetilde{\tau} + C_{6}x_{3}\nabla^{2}\widetilde{w} = 0 \qquad Eq. \ 29$$

Où∶

$$C_{1} = -D \qquad C_{2} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}}{\tilde{\lambda}^{f}} + \frac{\omega^{2}\rho_{2}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}} \right) \\C_{3} = \omega^{2}h \left(\rho_{1} + \rho_{2} \frac{i\omega b + \omega^{2}\rho_{12}}{i\omega b - \omega^{2}\rho_{22}} \right) \qquad C_{4} = \tilde{\lambda}^{f} \\C_{5} = -\left\{ i\omega b \left[1 + \frac{\left(\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}\right)^{2}}{\left(2\mu^{s} + \lambda^{s}\right)\tilde{\lambda}^{f}} + \frac{\left(\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}\right)\omega^{2}\rho_{2}}{\left(2\mu^{s} + \lambda^{s}\right)(i\omega b - \omega^{2}\rho_{22})} \right] \right\} \qquad Eq. 30 \\ + \left(- \omega^{2} \left[\rho_{22} - \frac{\left(\tilde{\lambda}^{f}\rho_{21} - \tilde{\lambda}^{fs}\rho_{22}\right)\left(\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}\right)}{\left(2\mu^{s} + \lambda^{s}\right)\tilde{\lambda}^{f}} - \frac{\left(\tilde{\lambda}^{f}\rho_{21} - \tilde{\lambda}^{fs}\rho_{22}\right)\omega^{2}\rho_{2}}{\left(2\mu^{s} + \lambda^{s}\right)(i\omega b - \omega^{2}\rho_{22})} \right] \right\} \\C_{6} = \left[-\omega \tilde{b} \left(\tilde{\lambda}^{fs} + \tilde{\lambda}^{f}\right) - \omega^{2} \left(\tilde{\lambda}^{f}\rho_{21} - \tilde{\lambda}^{fs}\rho_{22}\right)\left(2\mu^{s}/\left(2\mu^{s} + \lambda^{s}\right)\right) \right] \right\}$$

En supposant que les forces X_i et F_i nulles, une autre forme plus pratique peut être obtenue en utilisant la méthode de Nowacki en thermoélasticité. Ceci est possible en multipliant l'équation (Eq. 29) par x_3 , puis une intégration par parties par rapport à l'épaisseur :

$$\left(C_4\nabla^2 + C_5\right)\widetilde{I}_{\tau} + \frac{h^3}{12}C_6\nabla^2\widetilde{w} + \frac{h}{2}C_4\left(\widetilde{q}_2 - \widetilde{q}_1\right) - C_4\left(\widetilde{\sigma}_2^f - \widetilde{\sigma}_1^f\right) = 0 \qquad \qquad Eq. \ 31$$

Les équations (Eq. 28) et (Eq. 31) constituent un système couplé dépendant seulement de \tilde{I}_{τ} , \tilde{w} et également les valeurs limites $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{\sigma}_1^f, \tilde{\sigma}_2^f, \tilde{\sigma}_{,3 h/2}^f$ et $\tilde{\sigma}_{,3 - h/2}^f$. Dans le cas des surfaces perméables, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\widetilde{p} = \widetilde{p}_1$$
 et $\widetilde{\sigma}^f = \widetilde{\sigma}_2^f$ pour $x = -h/2$ Eq. 32

$$\tilde{p} = \tilde{p}_2$$
 et $\tilde{\sigma}^f = \tilde{\sigma}_2^f$ pour $x = h/2$ Eq. 33

Formulation de Li

Li a résolu le problème de telle sorte que l'étude puisse être valable dans le cas de l'anisotropie du matériau poreux.

1. Les équations constitutives de Biot

Les équations constitutives de Biot utilisées par Li, pour un matériau poroélastique transversalement isotrope dans le plan x_1x_2 , sont les suivantes :

$$\sigma_{11} = 2B_{1}\varepsilon_{11}^{s} + B_{2}(\varepsilon_{11}^{s} + \varepsilon_{22}^{s}) + B_{3}\varepsilon_{33}^{s} + B_{6}\zeta$$

$$\sigma_{22} = 2B_{1}\varepsilon_{22}^{s} + B_{2}(\varepsilon_{11}^{s} + \varepsilon_{22}^{s}) + B_{3}\varepsilon_{33}^{s} + B_{6}\zeta$$

$$\sigma_{33} = 2B_{4}\varepsilon_{33}^{s} + B_{3}(\varepsilon_{11}^{s} + \varepsilon_{22}^{s}) + B_{7}\zeta$$

$$\sigma_{12} = 2B_{1}\varepsilon_{12}^{s}, \sigma_{23} = 2B_{5}\varepsilon_{23}^{s}, \sigma_{31} = 2B_{5}\varepsilon_{31}^{s}$$

$$P_{f} = B_{6}(\varepsilon_{11}^{s} + \varepsilon_{22}^{s}) + B_{7}\varepsilon_{33}^{s} + B_{8}\zeta$$

Eq. 34

 B_m (m=1-8) sont les constantes du matériau définies par Biot. σ_{ij} sont les contraintes totales du matériau i, j = 1,2,3, et \mathcal{E}_{ij}^s sont les déformations du squelette solide. P_f est la pression dans les pores et ζ définit comme suit :

$$\zeta = \phi \left(\varepsilon_{ii}^{s} - \varepsilon_{ii}^{f} \right) \qquad \qquad Eq. \ 35$$

2. Formulation de Li

En remplaçant ζ par son expression (Eq. 3-94) dans le système d'équations (Eq. 3-93), les équations constitutives prendront la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} & \hat{B}_{13} \\ \hat{B}_{12} & \hat{B}_{22} & \hat{B}_{13} \\ \hat{B}_{13} & \hat{B}_{13} & \hat{B}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{s} \\ \varepsilon_{22}^{s} \\ \varepsilon_{33}^{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_{1} \\ \alpha_{2} \\ \alpha_{3} \end{pmatrix} P_{f}$$

$$\mathbf{Eq. 36}$$

$$\sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}^{s} \quad \sigma_{23} = 2G_{3}\varepsilon_{23}^{s} \quad \sigma_{31} = 2G_{3}\varepsilon_{31}^{s}$$

$$P_{f} = F[\zeta - \alpha_{1}(\varepsilon_{11}^{s} + \varepsilon_{22}^{s}) - \alpha_{3}\varepsilon_{33}^{s}]$$

Telles que :

$$\hat{B}_{11} = 2B_1 + B_2 - B_6^2 / B_8 \qquad \hat{B}_{12} = B_2 - B_6^2 / B_8 \qquad \hat{B}_{13} = B_3 - B_6 B_7 / B_8$$

$$\hat{B}_{33} = B_4 - B_7^2 / B_8 \qquad \alpha_1 = -B_6 / B_8 \qquad \alpha_3 = -B_7 / B_8 \qquad Eq. 37$$

$$F = B_8 \qquad G_3 = B_5 \qquad G = (\hat{B}_{11} - \hat{B}_{12})/2$$

La composante $\sigma_{_{33}}$ est nulle, ce qui donne :

$$\varepsilon_{33}^{s} = \left[\alpha_{3} P_{f} - \hat{B}_{13} \left(\varepsilon_{11}^{s} + \varepsilon_{22}^{s} \right) \right] / \hat{B}_{33}$$
 Eq. 38

Le système (Eq. 36) s'écrit en remplaçant \mathcal{E}_{33}^{s} par son expression :

$$\sigma_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{s}_{\gamma\delta} - \eta P_{f} \delta_{\alpha\beta} \qquad \qquad Eq. \ 39$$

 α, β, γ et $\delta = 1, 2$, et les relations déformation – contrainte pour σ_{23} et σ_{31} ne sont pas prises en compte sous prétexte que les déformations de cisaillement transverses sont négligeables pour une plaque mince. Les coefficients de raideur de la plaque sont :

$$\begin{split} D_{1111} &= D_{2222} = \hat{D} \qquad D_{1122} = \nu \hat{D} \\ D_{1212} &= \hat{D} (1 - \nu) / 2 \qquad D_{1112} = D_{1222} = 0 \\ D_{\alpha\beta\gamma\delta} &= D_{\alpha\beta\delta\gamma} = D_{\beta\alpha\gamma\delta} = D_{\gamma\delta\alpha\beta} \end{split}$$
 Eq. 41

Telles que :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{F} + \frac{\alpha_3^2}{\hat{B}_{33}} \qquad \eta = \alpha_1 - \frac{\hat{B}_{13}}{\hat{B}_{33}} \alpha_3$$

$$\hat{D} = \hat{B}_{11} - \hat{B}_{13}^2 / \hat{B}_{33}^2 \qquad \nu = (\hat{B}_{12} - \hat{B}_{13}^2 / \hat{B}_{33}) / (\hat{B}_{11} - \hat{B}_{13}^2 / \hat{B}_{33})$$
Eq. 42

 $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont les coefficients de raideur de la plaque quand le fluide dans les pores disparaît ou quand la pression dans les pores est nulle. η est la rapport du gradient du volume d'un pore par la somme des deux déformations normales à la plaque. D'un autre côté, $\hat{\beta}$ dépend aussi de la compressibilité du fluide ; il peut être interprété comme un incrément de fluide quand la pression dans le pore est égale à 1 et la déformation surface dans la plaque est nulle.

Les déformations s'écrivent :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{s} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \right) - w_{,\alpha\beta} x_{3} \qquad \qquad Eq. \ 43$$

Où u_{α} est le déplacement de la couche au milieu de la plaque dans la direction x_{α} , et w est la déflexion perpendiculaire à la couche milieu. $u_{\alpha,\beta}$ intervient comme dérivée partielle de u_{α} par rapport x_{β} . Et en tenant compte de la symétrie du tenseur $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$, l'équation (Eq. 39) peut être réécrite selon cette forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta} (u_{\gamma,\delta} - u_{\gamma\delta} x_3) - \eta P_f \delta_{\alpha\beta} \qquad Eq. \ 44$$

Les résultantes de contrainte et des moments de contrainte s'écrivent ainsi :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = D_{\alpha\beta\gamma\delta} h \, u_{\gamma,\delta} + \eta \delta_{\alpha\beta} N_p$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 = -D_{\alpha\beta\gamma\delta} I w_{\gamma,\delta} + \eta \delta_{\alpha\beta} M_p$$

$$Eq. 45$$

 N_{p} et $M_{p}\,$ sont respectivement la résultante et le moment de la pression dans le pore :

$$N_{p} = -\int_{-h/2}^{h/2} P_{f} dx_{3} \qquad M_{p} = -\int_{-h/2}^{h/2} P_{f} x_{3} dx_{3} \qquad I = h^{3}/12 \qquad Eq. \ 46$$

Les équations d'équilibre d'un élément de la plaque sont les suivantes :

Où les forces de cisaillement Q_{α} sont les intégrales de $\sigma_{3\alpha}$ sur l'épaisseur de la plaque et q est le chargement normal distribué qui dépend généralement des coordonnées x_1 et x_2 et de la variable temps. Les équations (Eq. 45) deviennent :

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta}h u_{\gamma,\beta\delta} + \eta N_{p,\alpha} = 0$$

- $D_{\alpha\beta\gamma\delta}Iw_{,\alpha\beta\gamma\delta} + \eta M_{p,\alpha\alpha} + q = 0$
Eq. 48

On a donc 2 systèmes d'équations différentielles comportant 9 équations dont 6 sont données dans (Eq. 45) et 3 dans (Eq. 48). Les variables sont 11 : $N_{\alpha\beta}, N_p, M_{\alpha\beta}, M_p, u_{\alpha}$ et w. Dans le cas d'une plaque élastique, il suffit de prendre $\eta = 0$.

Dans le but de compléter le système (2 équations manquent pour), on prend en compte un autre aspect physique de l'étude : la diffusion à travers la plaque. L'écoulement du fluide dans le matériau poroélastique suit la loi de Darcy :

$$\phi(\dot{v}_m - \dot{u}_m) = \frac{k_m}{\mu_f} P_{f,m}, \ m = 1, 2, 3 \qquad Eq. \ 49$$

 $v_m \operatorname{et} u_m$ sont les déplacements respectivement de la phase solide et fluide suivant la direction x_m , fonctions de coordonnées x_1 , x_2 et x_3 et du temps t. μ_f est la viscosité du fluide et k_m est la perméabilité dans la direction x_m . Dans notre cas, $k_1 = k_2 = k_0$ puisque le matériau est isotrope dans le plan x_1x_2 et $k_3 = 0$ puisque l'écoulement du fluide suivant x_3 est négligé.

En notant $\varepsilon_{ii}^{s} = u_{i,i}$ et $\varepsilon_{ii}^{f} = v_{i,i}$, la combinaison entre (Eq. 35) et (Eq. 49) permet d'écrire :

En utilisant (Eq. 40), (Eq. 43) et (Eq. 50), la loi de Darcy aura la forme suivante :

$$KP_{f,\alpha\alpha} = \dot{P}_f + \lambda \hat{D} (\dot{u}_{\alpha,\alpha} - \dot{w}_{\alpha\alpha} x_3) \qquad \qquad Eq. \ 51$$

Où

$$K = \frac{k_0}{\mu_f \hat{\beta}} \qquad \qquad \lambda = \frac{\eta}{\hat{D}\hat{\beta}} \qquad \qquad Eq. \ 52$$

La dérivée de l'équation (Eq. 51) par rapport à l'épaisseur de la plaque, sa multiplication par x_3 et l'intégration par rapport à l'épaisseur donne :

$$KN_{p,\alpha\alpha} - \dot{N}_{p} + \lambda \hat{D}h\dot{u}_{\alpha,\alpha} = 0$$

$$KM_{p,\alpha\alpha} - \dot{M}_{p} - \lambda \hat{D}I\dot{w}_{\alpha\alpha} = 0$$

$$Eq. 53$$

Ainsi, on a 11 équations à 11 inconnues, le système est prêt à être résolu avec les conditions aux limites suivantes :

L'indice r prend la valeur de n (la normale au bord) ou s (la tangente au bord). En termes de résultantes, pour un bord perméable, les conditions de diffusion s'écrivent :

$$N_p = \overline{N}_p$$
 $M_p = \overline{M}_p$ Eq. 55

Et pour un bord étanche :

$$N_{p,n} = 0$$
 $M_{p,n} = 0$ Eq. 56

Si les chargements sont appliqués à t = 0, la relation entre la pression dans les pores et les déplacements à $t = 0^+$ est déterminée en prenant $\zeta = 0$ qui décrit le fait qu'il n'y a pas de diffusion instantanée immédiatement après l'application des chargements. A partir des équations (Eq. 40) et (Eq. 43), on trouve :

$$\hat{\beta}P_f + \eta (u_{\alpha,\alpha} - w_{\alpha\alpha} x_3) = 0 \quad (t = 0^+) \qquad Eq. 57$$

Les équations (Eq. 46) donneront donc :

$$N_{p} - \lambda \hat{D}hu_{\alpha,\alpha} = 0 \quad M_{p} + \lambda \hat{D}hw_{,\alpha\alpha} = 0 \quad (t = 0^{+})$$
 Eq. 58

Après quelques manipulations des équations (Eq. 45) et (Eq. 48), on peut obtenir des expressions équivalentes à (Eq. 58) :

$$N_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{inst} h u_{\gamma,\delta} \qquad M_{\alpha\beta} = -D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{inst} I w_{\gamma,\delta} \qquad (t = 0^{+})$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{inst} h u_{\gamma,\beta\delta} = 0 \qquad D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{inst} I w_{\alpha\beta\gamma\delta} - q = 0 \qquad (t = 0^{+})$$

$$Eq. 59$$

Où

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta}^{inst} = D_{\alpha\beta\gamma\delta} + \lambda\eta\hat{D}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \qquad \qquad Eq. \ 60$$

est le tenseur instantané de raideur à $t = 0^+$. Dans le cas particulier d'une plaque élastique, on a les expressions suivantes :

$$\hat{E} = \hat{D}(1 - v^{2})$$

$$\hat{E}_{inst} = \frac{\hat{E}(1 + v + 2\lambda\eta)}{(1 + \lambda\eta)(1 + v)}$$

$$Eq. 61$$

$$v_{inst} = \frac{v + \lambda\eta}{1 + \lambda\eta}$$

Finalement, toutes les équations et conditions nécessaires pour la résolution du problème de la plaque sont trouvées. Si les variables inconnues sont $N_{\alpha\beta}$, N_p , $M_{\alpha\beta}$, M_p , u_{α} et w, les équations différentielles à prendre en compte sont les équations constitutives (Eq. 45); les équations d'équilibre (Eq. 48) et les équations du comportement (Eq. 53). Les conditions aux limites géométriques et au niveau chargement (Eq. 54), la condition de diffusion (Eq. 55) ou (Eq. 56) et les conditions initiales (Eq. 58) ou (Eq. 59) permettent de compléter le problème et ainsi de le résoudre.

Formulation de Etchessahar

Etchessahar a repris les équations de la formulation mixte (u, p) de Biot. La plaque poreuse est excitée par une force transversale concentrée $F = F_0 \delta(x_0, y_0)$. L'influence de la pression sur les faces latérales n'est pas prise en compte. En se basant sur les hypothèses de Kirchhoff, le déplacement du solide u = (u, v, w) est fonction du déplacement transversal w(x, y):

$$u = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$$
 $v = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$ Eq. 62

Les équations couplées du comportement de la plaque s'écrivent ainsi :

$$D\Delta^2 w(x, y) - \rho_e h \omega^2 w(x, y) - \tilde{\gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p(x, y, z) z dz = F_0 \delta(x_0, y_0) \qquad Eq. \ 63$$

$$\tilde{\lambda}^{f} \Delta p(x, y, z) + \tilde{\rho}_{22} \omega^{2} p(x, y, z) + \tilde{\lambda}^{f} \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^{2}} \tilde{\gamma} \omega^{2} \Delta w(x, y) = 0 \qquad \qquad Eq. \ 64$$

Ces équations peuvent s'écrire aussi sous cette forme :

$$L_{11}w(x, y) + L_{12}p(x, y, z) = F_0\delta(x_0, y_0)$$
 Eq. 65

$$L_{21}w(x, y) + L_{22}p(x, y, z) = 0 Eq. 66$$

Où L_{ij} sont les opérateurs linéaires correspondants aux équations (Eq. 63) et (Eq. 64).

Les conditions aux limites sont de type encastrement pour la phase solide. Pour la phase fluide, deux conditions aux limites sur la pression transversale (selon l'axe z) sont pris en compte : surfaces étanche et perméable. Ces deux conditions décrivent parfaitement les matériaux poreux utilisés couramment. Les mousses et les fibres ordinaires peuvent être considérés perméables tandis que les matériaux acoustiques dont les surfaces sont traitées peuvent être considérés étanches.

Liste des figures

Figure 1-1 · Examples des matériaux collulaires	- 11 -
Figure 1-9 : Exemples de solides cellulaires	- 15 -
Figure 1-3 : Trois types de metérieux celluleires tridimensionnels	- 15 -
Figure 1-4 : (a) Schéma d'une mousse à très large distribution de la taille des cellules	- 16 -
Figure 1-5 : Plage de propriétés des mousses et des solides qui la composent	- 17 -
Figure 1-6 : Annlications des mousses nolymères	- 18 -
Figure 1-7 : Schéma simplifié d'une extrudeuse	- 19 -
Figure 1-8 : Schéma d'une presse à injection	- 20 -
Figure 1-9 : Mousse structurale à neau non alvéolaire	- 20 -
Figure 1-10 : Machine d'essai de choc pendulaire (mouton - pendule)	- 25 -
Figure 1-11 : Principe du choc Charpy	- 25 -
Figure 1-12 : Dispositif d'essai de choc multiaxial par chute de masse	- 26 -
Figure 1-13 : Princine des harres de Honkinson	- 27 -
Figure 1-14 : Arbre des méthodes de mesure d'absorption	- 28 -
Figure 1-15 : Dispositif expérimental	- 29 -
Figure 1-16 : Dispositif expérimental de la méthode doublet microphonique	- 30 -
Figure 1-17 : Mesure par méthode du doublet microphonique (2D) et en tube de Kundt (1D).	- 30 -
Figure 1-18 : Représentation d'un neurone formel selon Mc Culloch et Pitts	- 35 -
Figure 1-19 : Fonctions d'activation	- 36 -
Figure 1-20 : Représentation d'un réseau de neurone multicouches	- 36 -
Figure 1-21 : Aiustement de la réponse	- 38 -
Figure 1-22 : Hypercubes latins pour 2 paramètres – 9 expérimentations	- 41 -
Figure 1-23 : Plan central composite pour 3 facteurs	- 42 -
Figure 1-24 : Aiustement d'une fonction analytique avec les plans classiques	- 43 -
Figure 1-25 : Processus d'optimisation	- 44 -
Figure 1-26 : Principales catégories des Algorithmes Evolutionnaires	- 46 -
Figure 1-27 : Comportement des fourmis lors de franchir l'obstacle	- 49 -
Figure 2-1 : Configuration de la vis	- 56 -
Figure 2-2 : Relation entre propriétés mécaniques et conditions d'injection dans le cas du PP.	- 58 -
Figure 2-3 : SEM des échantillons injectés avec différentes températures du moule	- 60 -
Figure 2-4 : Diamètre moyen de cellules	- 61 -
Figure 2-5 : Epaisseurs moyennes de peau	- 61 -
Figure 2-6 : L'effet des paramètres d'injection sur la croissance cellulaire	- 63 -
Figure 2-7 : ATG du PEBD et du Palmarole BA F4 E	- 65 -
Figure 2-8 : Cycle d'une presse à injecter	- 66 -
Figure 2-9 : Système de plastification	- 67 -
Figure 2-10 : Buse d'injection	- 67 -
Figure 2-11 : Profil d'une vis de plastification	- 68 -
Figure 2-12 : Clapet de vis	- 68 -
Figure 2-13 : Optimisation de la vitesse d'injection	- 70 -
Figure 2-14 : Géométrie d'une plaque	- 71 -
Figure 2-15 : Refroidissement du moule	- 71 -

Figure 2-16 : Modèle SADT	72 -
Figure 2-17 : Schéma de la machine de choc	74 -
Figure 2-18 : Schéma des bridages a) circulaire et b) carré	74 -
Figure 2-19 : Evolution de la charge et du déplacement	75 -
Figure 2-20 : Evolution de l'énergie en fonction du déplacement	76 -
Figure 2-21 : Reproductibilité de l'essai de choc	76 -
Figure 2-22 : Lieux d'impact de la charge au cours des essais de choc (unité : mm)	77 -
Figure 2-23 : Energie en fonction du déplacement en 4 lieux de l'échantillon	77 -
Figure 2-24 : Dispositif expérimental : Tube De Kundt	78 -
Figure 2-25 : Reproductibilité de l'essai d'absorption acoustique	78 -
Figure 2-26 : Vérification du modèle linéaire du 1er degré	84 -
Figure 2-27 : Surfaces de réponse	87 -
Figure 2-28 : Déroulement de la RML	88 -
Figure 2-29 : Normalité des erreurs	90 -
Figure 3-1: Le capot actif	99 -
Figure 3-2 : L'airbag de protection	99 -
Figure 3-3 : Schéma simplifié du capot moteur	- 100 -
Figure 3-4 : Description d'un matériau poreux	- 101 -
Figure 3-5 : Modèles de propagation du son dans un poreux à squelette rigide	- 101 -
Figure 3-6 : Définition de la tortuosité	- 103 -
Figure 3-7 : Profils des vitesses ou des températures dans un pore cylindrique	- 104 -
Figure 3-8 : Dispositif de mesure des paramètres mécaniques	- 104 -
Figure 3-9 : Poutre cantilever utilisée dans la méthode d'Oberst	- 105 -
Figure 3-10 : Constante de propagation simulée par trois modèles d'une laine de verre	- 110 -
Figure 3-11 : Impédance caractéristique simulée par trois modèles d'une laine de verre	- 111 -
Figure 3-12 : Dispositif expérimental	- 120 -
Figure 3-13 : Flexion calculée (-) et mesurée ().	- 121 -
Figure 3-14 : Flexion au centre d'une plaque poreuse en appui simple	- 121 -
Figure 4-1 : Mise en évidence de l'importance du krigeage	- 135 -
Figure 4-2 : Deux plans à 2 facteurs de taille 9	- 136 -
Figure 4-3 : Principe de la méthodologie adaptative	- 137 -
Figure 4-4 : Modèle SADT	- 138 -
Figure 4-5 : Accélération temporelle	- 141 -
Figure 4-6 : Variation du HIC ($\times 10^{-3}$) en fonction du temps et de d	- 141 -
Figure 4-7 : Impédance acoustique en 1D, 2D et 3D selon les deux formulations de Biot	- 142 -
Figure 4-8 : Géométrie de l'essai au Tube De Kundt en 1D	- 143 -
Figure 4-9 : Etude du pas de calcul	- 144 -
Figure 4-10 : Etude de finesse de maillage	- 144 -
Figure 4-11 : Absorption obtenue analytiquement et numériquement d'une laine de verre	- 145 -
Figure 4-12 : Deux configurations du matériau poreux avec le mur rigide	- 145 -
Figure 4-13 : L'impédance acoustique en incidence normale pour les deux configurations	- 145 -
Figure 4-14 : Confrontation Biot - Fluide équivalent	- 146 -
Figure 4-15 : Couche du matériau poreux couplée à un mur rigide	- 147 -
Figure 4-16 : Conditions aux limites de la couche mince d'air et du matériau poreux	- 148 -
Figure 4-17 : Confrontation calcul analytique - numérique	- 149 -
Figure 4-18 : Déflexion d'une plaque : comparaison entre 2D et 3D -Pression surfacique	- 151 -
Figure 4-19 : Déflexion d'une plaque : comparaison entre 2D et 3D -Force ponctuelle	- 151 -
Figure 4-20 : Limites de la formulation 2D dans le cas d'une pression surfacique	- 151 -
Figure 4-21 : Limites de la formulation 2D dans le cas d'une force ponctuelle	- 151 -
Figure 4-22 : Etude du pas de calcul	- 152 -
Figure 4-23 : Etude du maillage	- 152 -
Figure 4-24 : Procédure de détermination du HIC	- 153 -
Figure 4-25 : Courbes types du coefficient d'absorption acoustique	- 154 -
Figure 4-26 : Confrontation entre résultat numérique et la régression multi-linéaire	- 155 -
Figure 4-27 : Confrontation modèle élément fini – modèle empirique issu du krigeage	- 158 -
Figure 4-28 : Effet du type de la régression	- 160 -
Figure 4-29 : Effet du type de la corrélation	- 162 -

Figure 4-30 : Confrontation entre modèle de Delany et Bazelet et modèle kriging
Figure 5-2 : Front Pareto (d_m, d)
Figure 5-3 : Front Pareto (d_m, α_{Shock})
Figure 5-4 : Front Pareto $(d_m, \alpha_{acous}(954 Hz))$
Figure 5-5 : Front Pareto $(d_m, \alpha_{acous}(1330 Hz))$
Figure 5-6 : Front Pareto ($\alpha_{shock}, \alpha_{acous}(954 Hz)$)
Figure 5-7 : Front Pareto ($\alpha_{shock}, \alpha_{acous}(1330 Hz)$)
Figure 5-8: Front Pareto $(d_m, \alpha_{shock}, \alpha_{acous}(1330Hz))$
Figure 5-9: Le front Pareto et les valeurs des 5 variables de décision
Figure 5-10 · Fronts rareto $(a_{Shock} - a_{acous} (1550 \text{ Hz}))$ avec 5 variables et 1 variable
Figure 5-12 : Effets de T _{ini} , CP, V _{ini} et V _{dos} sur les fronts Pareto
Figure 5-13 : Effets de T _{inj} , CP, V _{inj} et V _{dos} sur la valeur optimale de T _m 179 -
Figure 5-14 : Surfaces de Pareto 180 -
Figure 5-15 : Validation de l'aire Pareto (d_m, α_{Shock}) 181 -
Figure 5-16 : Front Pareto (<i>HIC</i> , $\alpha_{acous}(955Hz)$)
Figure 5-17 : Le front Pareto et les valeurs des 9 variables de décision 184 -

Liste des tableaux

Tableau 1-1 : Exemples de fonctions de covariances	40 -
Tableau 1-2 : Formulations du rapport S/N	41 -
Tableau 1-3 : Equivalence entre « Termes biologiques » et « Termes d'optimisation »	47 -
Tableau 2-1 : Epaisseur de la peau à différentes vitesses et températures du moule	60 -
Tableau 2-2 : Caractéristiques du PEBD	64 -
Tableau 2-3 : Caractéristiques de la presse Billion	65 -
Tableau 2-4 : Limites inférieure et supérieure des facteurs entrées	73 -
Tableau 2-5 : Table L ₁₂ de Taguchi	79 -
Tableau 2-6 : Les relations de calcul des niveaux codés	80 -
Tableau 2-7 : Les niveaux des facteurs étudiés	81 -
Tableau 2-8 : Plan Composite Centré pour 5 facteurs	81 -
Tableau 2-9 : Table de Taguchi L12 appliquée dans cette étude	82 -
Tableau 2-10 : Facteurs influents et leurs coefficients	83 -
Tableau 2-11 : Caractéristiques de la mousse avec des paramètres procédé centrés	83 -
Tableau 2-12 : Validation du modèle quadratique sans interactions	85 -
Tableau 2-13 : Surfaces de réponse de quelques caractéristiques de la mousse	86 -
Tableau 2-14 : Test intrinsèque	91 -
Tableau 2-15 : Nombre de répétitions d'essais pour chaque caractéristique	92 -
Tableau 2-16 : Test extrinsèque	92 -
Tableau 2-17 : Test des coefficients significatifs	94 -
Tableau 2-18 : Cibles des caractéristiques	94 -
Tableau 2-19 : Evolution des paramètres dans les modèles et leurs rapports Signal/Bruit	95 -
Tableau 3-1 : Valeurs numériques des caractéristiques de l'air prises par défaut	101 -
Tableau 3-2 : Comparaison entre les modèles de Johnson-Allard et Lafarge-Allard	108 -
Tableau 3-3 : Variables du modèle ingénieur	109 -
Tableau 3-4 : Paramètres poroélastiques de la laine de verre	110 -
Tableau 3-5 : Caractéristiques du matériau poreux testé	121 -
Tableau 4-1 : Plages de variation des caractéristiques intrinsèques des matériaux poreux	138 -
Tableau 4-2: Niveaux de conscience en fonction du HIC	140 -
Tableau 4-3 : Caractéristiques intrinsèques de la laine de verre	143 -
Tableau 4-4 : Géométrie et caractéristiques de la plaque poreuse étudiée	150 -
Tableau 4-5 : Caractéristiques poroélastiques pour la validation de la R.L.M	155 -
Tableau 4-6 : Différents typages pour l'étude de la régression du krigeage	156 -
Tableau 4-7 : Coefficients de corrélation pour les modèles acoustiques	159 -
Tableau 4-8 : Coefficients de corrélation du modèle HIC	163 -
Tableau 4-9 : Validation du modèle HIC	163 -
Tableau 5-1 : Valeurs minimales et maximales des fonctions objectives	170 -
Tableau 5-2: Fonctions objectives	170 -
Tableau 5-3 : Paramètres de calcul du NSGA-II utilisés tout au long de cette étude	171 -
Tableau 5-4 : Validation des fronts Pareto	173 -
Tableau 5-5 : Variables de décision dominantes	176 -
Tableau 5-6 : Valeurs des paramètres utilisés pour l'étude des problèmes n°1-10	178 -
Tableau 5-7 : Paramètres de calcul du NSGA-II utilisés tout au long de cette étude	182 -
Tableau 5-8 : Matériaux offrant un meilleur compromis choc acoustique	184 -

Publications effectuées pendant la thèse

Articles

Ameur Chettah, Slaheddine Chedly, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille and Jean Paul Onteniente. "Experimental and numerical investigation of flexural vibration damping by recycled rubber granulates". International Journal of Vehicle Noise and Vibration. 4(1), 2008.

Slaheddine Chedly, Ameur Chettah, Hervé Bonnnefoy and Mohamed Ichchou. "A robust shock and noise models for the manufacturing of moulded LDPE foams". Polymer Engineering & Science. *Accepté en Avril 2008.*

Slaheddine Chedly, Jean Paul Onteniente and Lan Tighzert. "Multi-objective optimization of moulded LDPE foams characteristics using genetic algorithm". Journal of Applied Polymer Science. *Soumis en Juin 2008.*

Ameur Chettah, Slaheddine Chedly, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille and Jean Paul Onteniente. "Dynamic mechanical properties and weight optimization of vibrated ground recycled rubber". Journal of Vibration and Control. *Accepté en Avril 2008.*

Ameur Chettah, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille and Slaheddine Chedly. "Acoustical properties of granular recycled rubber and foams: A new model for the characterization of porous material". Journal of the Acoustical Society of America. *Soumit en Juillet 2008*.

Conférences internationales

Slaheddine Chedly, Ameur Chettah, Jean-Paul Onteniente, Hervé Bonnefoy and Mohamed Ichchou. "About moulded foams manufacturing: Influent parameters process". ECCM12, Biarritz, France, August 28-31, 2006. *Poster*

Slaheddine Chedly, Ameur Chettah, Jean-Paul Onteniente and hervé Bonnefoy. "Effects of parameters process on moulding of plastic foams: density distribution". Macro2006, Rio de Janeiro, Brazil, July 17-21, 2006.

Slaheddine Chedly, Jean-Paul Onteniente and hervé Bonnefoy. "Robust methodology of design applied to moulded LDPE foams". ICAMEM 2006, Hammamet, Tunisie, December 17-19, 2006.

Slaheddine Chedly, Ameur Chettah, hervé Bonnefoy and Mohamed Ichchou. "Crash and Acoustic Absorption Models of Moulded LDPE Foams". CMSM2007, Monastir, Tunisie, March 19-21, 2007.

Ameur Chettah, Slaheddine Chedly, Mohamed Ichchou and Olivier Bareille. "Comportement dynamique de corps creux remplis de poudrettes de pneus recyclés". CMSM2007, Monastir, Tunisie, March 19-21, 2007.

Ameur Chettah, Slaheddine Chedly, Mohamed Ichchou, Olivier Bareille and Jean-Paul Onteniente. "Measurement of dynamic properties of recycled tire granulates and their mixture". ICA2007, Madrid, Espagne, September 2-7, 2007.

Articles dans de conférence nationale

Slaheddine Chedly, Jean-Paul Onteniente and hervé Bonnefoy. "Absorption de choc et acoustique des mousses PEbd injectées". Matériaux 2006, Dijon, France, November 13-17, 2006.

Slaheddine Chedly. « Nouveau modèles empiriques des caractéristiques acoustiques en fonction des paramètres poroélastiques des matériaux cellulaires ». Criec 2008, Nantes, France, June 10-11, 2008.

Résumé

Dans le secteur automobile, la sécurité prend de l'ampleur depuis quelques années et les constructeurs automobiles s'investissent dans le développement des nouvelles technologies pour que leurs produits soient plus sûrs aux passagers. Dans le contexte normatif actuel concernant à la fois le choc piéton et le bruit des véhicules, la sélection de matériaux offrant un bon compromis entre ces deux aspects pour la conception des capots est au cœur des préoccupations des constructeurs automobiles. Une voie possible est l'utilisation de matériaux poroélastiques collés sous le capot moteur, qui offrent une bonne dissipation de l'énergie en cas de choc, et une bonne atténuation des ondes acoustiques émises par le moteur. Pour cela, une maîtrise des relations Procédé – Produit – Performances est nécessaire. Les outils de modélisation (Méthode de surface des réponses, le Krigeage,...) permettent de bâtir des modèles empiriques exprimant les performances choc et acoustique des matériaux poreux dans le but de quantifier les relations Procédé – Performances et Produit – Performances. Dans ce mémoire, le choix des entrées et des sorties et du type de la table d'expériences est une étape cruciale dans la perspective de construction des méta-modèles. Les algorithmes génétiques étaient un moyen efficace dans la recherche des compromis choc – acoustique des matériaux poreux vis-à-vis des conditions de mise en forme et des caractéristiques intrinsèques. La finalité de ce travail est la recherche du matériau idéal offrant des bonnes performances d'isolation du choc et d'absorption acoustique, en fonction des paramètres de mise en forme ou des caractéristiques poroélastiques, en restant dans l'espace de conception fixé au début de la démarche.

Abstract

In car industry, security is an important subject in recent years and car manufacturers involve in the development of new technologies so that their products are more reliable for passengers. In the current context concerning both pedestrian shock and vehicles noise, materials selection offering good compromise between these aspects is an important concern of vehicle manufacturers. One possibility is the use of poroelastic materials stuck under engine cowling, which offer good energy dissipation upon impact, and good attenuation of acoustic waves emitted by the engine. For this, knowledge of Process - Product - Performances relationships is necessary. Modeling tools (Responses Surface Method, Kriging,...) are used to build empirical models expressing shock and acoustic performances of porous materials in order to quantify the relationship Process - Performances and Product - Performances. In this brief, the choice of inputs, outputs and experimental design type is crucial in the prospect of building meta-models. Genetic algorithms were effective tool when searching porous materials shock - acoustic compromise according to process conditions and intrinsic characteristics. The purpose of this work is searching ideal material offering good performances in shock absorption and acoustic isolation in the design area of design.