# Thèse

En vue de l'obtention du titre de
Docteur de l'Université de Reims, Champagne Ardenne en Mécanique

Soutenue le 13 décembre 2006

Présentée par

**Yuming LI**

**Titre :**

SIMULATION NUMÉRIQUE DE L'EMBOUTISSAGE DE TÔLES MINCES PAR UNE APPROCHE PSEUDO-INVERSE AVEC PRISE EN COMPTE DE L'ENDOMMAGEMENT

Devant le jury composé de

| | |
|---|---|
| M. Philippe PICART, Professeur, Besançon | Rapporteur |
| M. Khemais SAANOUNI, Professeur, Troyes | Rapporteur |
| M. J.L. BATOZ, Professeur, Compiègne | Examinateur |
| M. Fabien BOGARD, Maître de conférences, Reims | Examinateur |
| M. Karl DEBRAY, Professeur, Reims | Examinateur |
| M. Ying-Qiao GUO, Professeur, Reims | Directeur de thèse |

# Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'Université de Reims, Champagne Ardenne, au sein du Laboratoire Groupe Mécanique, Matériaux et Structure (GMMS). Il a été au sein du projet « Simul-Endo » financé par le Pôle Modélisation de la Région Champagne Ardenne que je remercie.

J'exprime mes sincères reconnaissances au Professeur Ying Qiao GUO, directeur de thèse, pour m'avoir guidé et soutenu tout au long de mes quatre années de recherche.

Je remercie également Messieurs Karl DEBRAY et Fabien BOGARD dont les précieux conseils m'ont beaucoup aidés.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury :

| | |
|---|---|
| M. J.L. BATOZ, | Professeur à l'UTC |
| M. Fabien BOGARD, | Maître de conférences à l'URCA |
| M. Karl DEBRAY, | Professeur à l'URCA |
| M. Ying-Qiao GUO, | Professeur à l'URCA |
| M. Khémais SAANOUNI, | Professeur à l'UTT |
| M. Philippe PICART, | Professeur à Université de Besançon |

Enfin, je remercie l'ensemble des mes collègues, ainsi que tout le personnel du laboratoire GMMS.

# Table de Contenus


Chapitre 1 Introduction Générale ..... 1
1.1. Objectifs ..... 2
1.2. Travaux effectués dans cette thèse ..... 3
Chapitre 2 Présentation de l'Approche Inverse et des Améliorations Apportées ..... 6
2.1. Introduction ..... 6
2.2. Formulation des éléments finis de l'Approche Inverse ..... 7
*2.2.1. Les principales caractéristiques et hypothèses de l'Approche Inverse ..... 7*
*2.2.2. Cinématique de grandes transformations tridimensionnelles ..... 8*
*2.2.3. Loi de comportement intégrée élasto-plastique anisotrope ..... 12*
*2.2.4. Formulation d'éléments finis ..... 14*
*2.2.5. Résolution du système d'équations non linéaires ..... 15*
2.3. Développements de solutions initiales pour l'Approche Inverse ..... 16
*2.3.1. Méthode de Rabattement Géométrique ..... 16*
*2.3.2. Algorithme de « Développement de longueur Radial » ..... 18*
*2.3.3. Algorithme de « transformation convexe » ..... 20*
*2.3.4. Application dans l'Approche Inverse : ..... 24*
2.4. Conclusion ..... 27
Chapitre 3 Approche Pseudo Inverse ..... 28
3.1. Introduction ..... 28
3.2. Génération de « vraies » configurations intermédiaires ..... 29
*3.2.1. Méthode de minimisation de longueur ..... 30*
*3.2.2. Méthode de minimisation de surface ..... 33*
*3.2.3. Amélioration des maillages $C_i$ obtenus par minimisation de surface ..... 35*
3.3. Transfert de champs de contraintes et de déformations ..... 37
3.4. Relocalisation de nœuds sur la pièce 3D ..... 39
*3.4.1. Repère local suivant la direction du déplacement ..... 42*
*3.4.2. Recherche des intersections de x avec les côtés des éléments ..... 43*
*3.4.3. Calcul de la longueur curviligne ..... 43*
3.5. Localisation d'un point dans une zone plane et 3D triangularisée ..... 44
*3.5.1. Idées générales ..... 45*
*3.5.2. Amélioration de Stratégie de Côté Droit ..... 49*
*3.5.3. Extension sur un maillage surfacique 3D ..... 50*
*3.5.4. Résultats ..... 51*
3.6. Conclusion ..... 54
Chapitre 4 Nouveaux Algorithmes d'Intégration de Plasticité Couplé avec Endommagement ..... 56
4.1. Modèle d'endommagement en déformation ..... 56
4.2. Equations constitutives du modèle de plasticité-endommagement couplées ..... 58
4.3. Deux algorithmes efficaces d'intégration de plasticité ..... 59
*4.3.1. Algorithme du retour radial (ARR) ..... 59*
*4.3.2. Algorithme Scalaire Direct (ASD) pour l'intégration plastique ..... 61*
*4.3.3. Algorithme de $\gamma$ - Retour Radial ($\gamma$-RR) ..... 64*
*4.3.4. Etudes numériques des algorithmes ..... 65*
4.4. Conclusion ..... 67
Chapitre 5 Résultats Numériques et Validation ..... 68

5.1. Simulation de l'emboutissage d'une boîte carrée par l'API ..... 68
*5.1.1. Validation de l'API par Abaqus..... 68*
*5.1.2. Comparaison temps CPU de trois algorithmes d'intégration plastique ..... 72*
*5.1.3. Prédiction de l'endommagement ..... 73*
5.2. Simulation de l'emboutissage SWIFT (en acier doux DC04) ..... 75
5.3. Simulation de l'emboutissage ERICHSEN (en acier doux DC04)..... 79
5.4. Emboutissage d'un pot d'échappement ..... 81
5.5. Simulation d'emboutissage en 3 passes..... 84
5.6. Conclusion ..... 92
Chapitre 6 Développement des Outils Numériques pour des Applications Spécifiques Industrielles..... 93
6.1. Création de « faux outils » pour le retour élastique ..... 93
*6.1.1. Introduction..... 93*
*6.1.2. Méthodologie ..... 94*
*6.1.3. Organigramme du développement..... 95*
*6.1.4. Description et construction d'une surface B-spline dans « Open CASCADE »..96*
*6.1.5. Approximation d'une surface par la méthode des moindres carrés ..... 98*
*6.1.6. Schéma de construction d'une surface..... 99*
*6.1.7. Application industrielle..... 99*
6.2. Détection des défauts d'aspects par calcul de courbures ..... 100
*6.2.1. Calcul des normales aux noeuds avec les normales des facettes voisines..... 101*
*6.2.2. Courbures d'une surface - Méthode de Taubin [Taubin 1995] ..... 102*
*6.2.3. Validation du calcul de courbures..... 107*
*6.2.4. Application..... 110*
6.3. Conclusion ..... 112
Chapitre 7 Conclusions et Perspectives ..... 114
Bibliographie..... 118

# Chapitre 1 Introduction Générale

L'emboutissage de tôles minces est un procédé largement employé dans l'industrie automobile pour obtenir des pièces de carrosserie et de structures (traverses, longerons…). Ce procédé consiste à fabriquer à l'aide des outils: poinçon, matrice, serre-flan et à partir d'une tôle de faible épaisseur, une pièce de forme complexe (Figure 1.1).

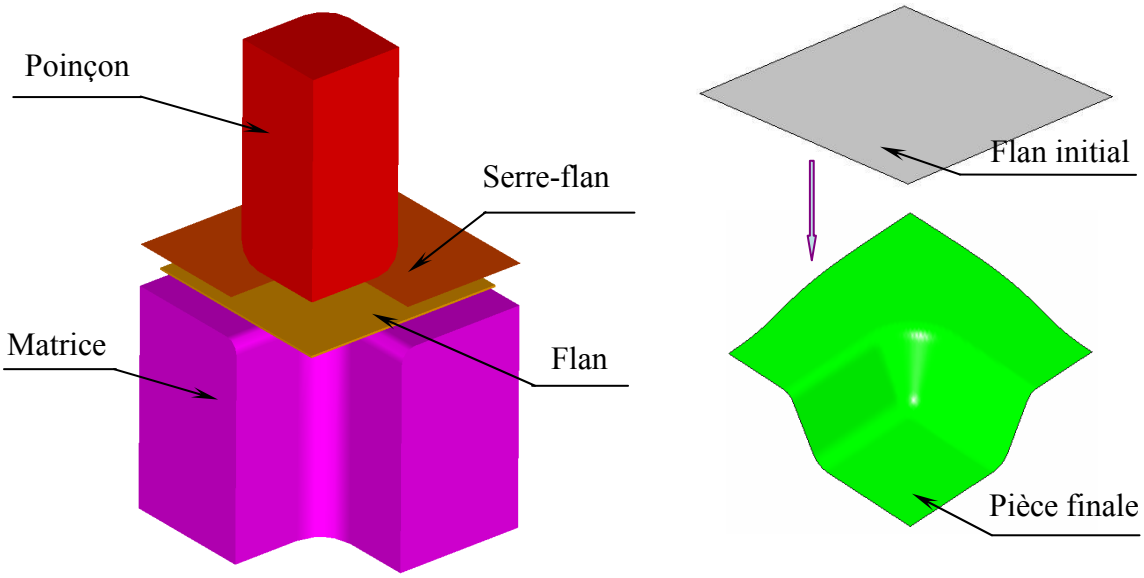



Figure 1.1 Procédé d'emboutissage

Dans le procédé d'emboutissage, les matériaux sont soumis à des contraintes très sévères. Pour obtenir une pièce saine, l'emboutissage doit s'effectuer souvent en multi-passes (Figure 1.2).

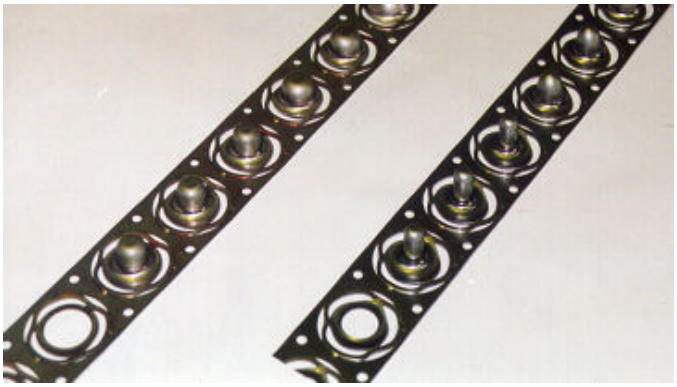
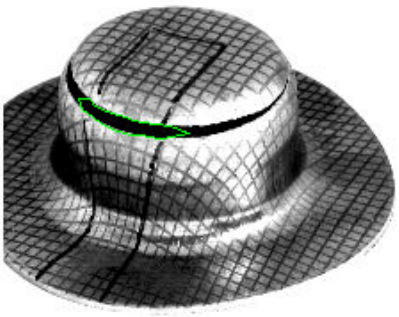
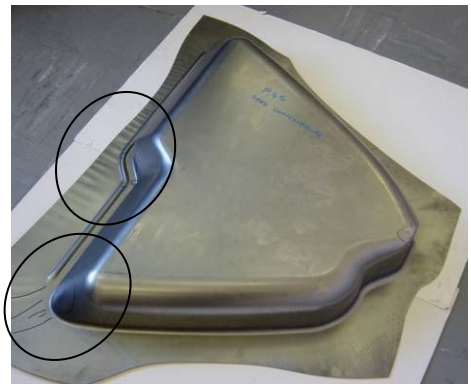


Figure 1.2 Procédé d'emboutissage en multi-passes

En général, la procédure de mise au point de l'emboutissage d'une pièce est longue et coûteuse. En effet, elle est basée sur une série d'essais – corrections qui dépend largement de l'expérience du concepteur pour éliminer les défauts pouvant apparaître sur la pièce, tels que la rupture de la tôle et l'apparition de plis (Figure 1.3).



Rupture



Plissement

Figure 1.3 Principaux défauts dans les pièces embouties

De ce fait, les industriels sont très intéressés pour diminuer le nombre d'essais et les remplacer par des simulations numériques. Ces dernières années, grâce à l'avancement des technologies informatiques, les moyens d'analyse numérique ont été largement développés et de nombreux outils numériques sont désormais utilisés dans le domaine de la conception et de la fabrication. Les essais numériques sont beaucoup moins coûteux que les essais expérimentaux, ils représentent donc un gain considérable de temps et d'argent.

## 1.1. Objectifs

Cette thèse a été réalisée au sein du laboratoire GMMS (Groupe de Mécanique, Matériaux et Structures) à l'Université de Reims Champagne Ardenne. Elle s'inscrit dans le cadre du programme « Simul-Endo » financé par le pôle PMMC sur la simulation de l'emboutissage par Approche incrémentale, Approche Inverse (AI) et Approche Pseudo Inverse (API) par éléments finis.

Lors de la mise en forme de pièces minces (emboutissage, hydroformage, thermoformage, …) et plus généralement de pièces mécaniques, les matériaux sont soumis à de grandes déformations irréversibles (de plusieurs dizaines de pourcents), au contact et au

frottement entre pièces et outils ainsi qu'au transfert thermique entre pièces et outils. Ces grandes déformations (visco)-plastiques génèrent souvent des micro-défauts surfaciques ou volumiques qui se développent ensuite dans la pièce. L'évolution de ces défauts, au cours de la mise en forme, conduit à la formation de fissures macroscopiques pouvant être soit immédiatement visibles; impliquant la perte de celle-ci avant son utilisation, soit volumiques et non visibles rendant ainsi dangereuse la mise en service. La simulation numérique des procédés de mise en forme doit donc être en mesure de permettre à l'ingénieur de prévoir la possibilité d'apparition de zones endommagées dans la pièce au cours du déroulement du procédé virtuel. Cela lui permettra alors d'arrêter la simulation numérique (souvent coûteuse en temps de calcul en 3D) et d'agir sur les paramètres technologiques pertinents du procédé afin d'obtenir une pièce saine.

L'objectif principal de cette thèse est la mise au point d'outils théoriques (modèles mécaniques) et numériques (discrétisation spatio-temporelle) destinés à la simulation de l'emboutissage des tôles minces en vue d'optimiser la fabrication en tenant compte de l'endommagement.

## 1.2. Travaux effectués dans cette thèse

Une approche simplifiée appelée « Approche Inverse » (AI) pour la simulation de l'emboutissage a été développée par Batoz, Guo et leurs collaborateurs au sein du laboratoire Roberval à l'Université de Technologie de Compiègne [Guo 90], [Batoz 92], [Batoz 98], [Mercier 98]. L'Approche Inverse exploite au maximum la connaissance de la forme finale de la pièce pour obtenir le flan plan initial de manière directe et donc très rapidement. A l'inverse de la simulation d'emboutissage par des approches incrémentales classiques, la pièce finale connue est rabattue numériquement sur le plan horizontal pour obtenir le flan plan initial, ainsi que les déformations et les contraintes dans la pièce finale. Les hypothèses de chargement proportionnel et d'actions des outils simplifiées sont retenues en ignorant l'historique de déformation.

De nombreux cas-tests ont montré que l'AI donnait une assez bonne estimation des déformations, mais une estimation médiocre des contraintes. En conséquence, l'utilisation directe de l'AI pour la simulation du retour élastique et de l'endommagement par exemple, n'est pas envisageable. Pour s'affranchir de cette difficulté, une approche dite « Approche

Pseudo Inverse » (API) est développée pour permettre de regrouper les avantages de l'AI et de l'approche incrémentale classique: la rapidité et la prise en compte de l'historique de déformation.

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse concernent les points suivants :

- **Améliorations sur la solution initiale pour l'Approche Inverse.** L'algorithme de « transformation convexe », destinée à une solution initiale au cas où existent des contres dépouilles, est développé. Cette technique a enrichi la capacité de l'AI.

- **Introduction de configurations intermédiaires.** L'AI classique est une approche simplifiée destinée à l'étude de la faisabilité d'une pièce emboutie. Ne comprenant qu'un seul pas de calcul, elle s'est montrée très rapide et efficace pour l'estimation d'épaisseurs et de déformations dans la pièce finale. Mais l'estimation des contraintes, basée sur la théorie de déformation, s'est avérée médiocre. La première phase de travail consiste à déterminer un certain nombre de configurations intermédiaires « réalistes » permettant la prise en compte de l'historique des déformations. Puisque les maillages de ces configurations intermédiaires sont indépendants, une méthode de transfert de champs entre différents maillages a été développée.

- **Transfert des champs de déformations et de contraintes.** Dans l'API, les maillages de deux configurations intermédiaires sont indépendants, les nœuds ayant le même numéro dans deux maillages différents ne représentent pas le même point matériel. Le transfert de champs entre les maillages des deux configurations sert à assurer la cohérence des points matériels entre ces deux maillages.

- **Technique de relocalisation de nœuds sur la pièce 3D.** Dans l'AI classique, le contour de l'embouti est supposé identique au contour du flan donné pour démarrer le calcul de l'AI. Cette technique consiste à relocaliser les nœuds sur la partie sous serre-flan (2D). Lorsqu'il y a trop d'avalement (lorsque le bord du flan rentre dans la matrice), cette technique ne peut plus fonctionner. Un modèle numérique est développé pour déterminer la position finale d'un nœud sur la pièce 3D.

- **Nouveaux algorithmes pour l'intégration de plasticité.** La prise en compte de l'historique de déformation exige l'utilisation de la théorie d'écoulement plastique (au lieu de la théorie de déformation plastique) et donc l'utilisation de l'algorithme du Retour

Radial de Simo [Talor et Simo 86]. Ce dernier nécessite une résolution itérative et engendre parfois un temps CPU considérable.

Un nouvel algorithme, appelé l'Algorithme Scalaire Direct, transforme le vecteur de contraintes en contrainte équivalente et aboutit ainsi à une résolution directe du multiplicateur de plasticité. Cet algorithme permet de diminuer largement le temps de calcul. Un deuxième algorithme, appelé l'Algorithme $\gamma$-Retour Radial, qui utilise la solution de l'Algorithme Scalaire Direct pour la solution initiale du Retour Radial, est aussi robuste qu'efficace et est idéal pour les emboutissages difficiles.

- **Implantation d'un modèle d'endommagement dans l'API.** Le modèle de l'endommagement en déformation de Lemaitre et Chaboche [Lemaître 1996] est adopté. Deux hypothèses sont retenues : le chargement proportionnel et la saturation de l'écrouissage après le seuil d'endommagement. Ce modèle est implanté dans l'API de trois manières : l'endommagement est couplé ou non-couplé avec la plasticité, ou avec l'utilisation de la courbe d'écrouissage de pré-endommagement. Des résultats numériques ont montré l'importance de la prise en compte du couplage. L'utilisation du modèle pré-endommagé permet de mieux s'approcher de la courbe d'écrouissage fortement non linéaire.

- **Construction automatique de surfaces CAO de « faux outils ».** Le retour élastique est un phénomène fréquent dans l'emboutissage des tôles minces. Ce premier conduit souvent à une géométrie déformée de la pièce. Des « faux outils » sont exigés afin de compenser l'effet du retour élastique pour obtenir une pièce de bonnes dimensions. Pour faciliter l'usinage, les surfaces des « faux outils » sont créées automatiquement à partir du « faux maillage », du maillage de l'embouti et des surfaces des outils.

- **Détection de défauts d'aspects.** La détection des défauts d'aspects d'une pièce est une tâche importante dans la phase de la mise au point de l'outillage d'emboutissage. Cette étude consiste à déterminer les courbures à partir du maillage de la pièce et à analyser ces courbures. Une courbure très grande en valeur absolue ou un changement brusque et important de courbure peut indiquer un défaut d'aspect. Cette technique est utilisée pour détecter les défauts d'aspects d'une pièce industrielle avant et après le retour élastique.

# Chapitre 2 Présentation de l'Approche Inverse et des Améliorations Apportées

## 2.1. Introduction

Face aux fortes concurrences du marché, les industriels de l'automobile cherchent à fabriquer des produits de bonne qualité, à des prix de plus en plus bas et dans des délais de plus en plus courts. La simulation numérique est un bon outil pour optimiser les paramètres du procédé d'emboutissage avant la fabrication des outillages. Cette méthodologie de « processus virtuel » peut éviter les essais expérimentaux très coûteux et fastidieux.

Il existe deux approches principales pour la simulation de l'emboutissage: l'approche incrémentale et l'approche simplifiée appelée 'Approche Inverse'. L'approche incrémentale simule le procédé pas à pas en utilisant différentes méthodes non linéaires (statique implicite/explicite ou dynamique explicite) et fait appel à de nombreux concepts liés au matériau, à la géométrie et à la mécanique (comportement élasto-plastique, anisotropie, grandes transformations, contact entre la tôle et les outils, etc…). Elle permet de prédire avec précision les éventuels défauts apparus en cours ou en fin de formage mais reste malheureusement assez coûteuse en temps de calcul. Les logiciels commerciaux basés sur cette approche sont AUTOFORM, STAMPACK, PAM-STAMP, etc… L'Approche Inverse proposée par Batoz, Guo et al. ([Batoz 98], [Guo 90]) exploite la connaissance de la forme de la pièce et effectue le calcul par la méthode des éléments finis à partir du maillage de la pièce finale afin d'obtenir le maillage du flan initial. Les hypothèses de chargement proportionnel et les actions simplifiées des outils permettant d'obtenir une méthode directe et très rapide.

Dans ce chapitre, nous présenterons l'Approche Inverse, telle qu'elle a été définie par Batoz et al., afin de l'introduire dans notre Approche Pseudo Inverse dans le chapitre 3.

Certaines améliorations apportées à l'Approche Inverse seront ensuite présentées à la fin de ce chapitre.

## 2.2. Formulation des éléments finis de l'Approche Inverse

L'approche Inverse consiste à utiliser un algorithme statique implicite pour la modélisation numérique de l'emboutissage. Elle permet d'estimer les grandes déformations élatso-plastiques, les distributions d'épaisseurs, de déformations et de contraintes dans l'embouti final. A partir d'une configuration finale $C$ connue et discrétisée par éléments finis, l'AI détermine la position de chaque nœud dans le flan initial $C^0$ ainsi que le contour du flan.

Dans cette partie nous présenterons les principales caractéristiques et hypothèses, la cinématique, la loi de comportement ainsi que la formulation éléments finis du modèle 3D incluant les effets de flexion (pour plus de détails, voir [ Batoz 98], [Guo 90]).

### 2.2.1. Les principales caractéristiques et hypothèses de l'Approche Inverse

Les principales caractéristiques et hypothèses appliquées dans cette approche sont les suivantes :

- Fibre moyenne de l'embouti représentant la configuration finale.
- Flan initial plan.
- Etat de contraintes planes en membrane.
- Grandes déformations logarithmiques avec incompressibilité.
- Chargement radial ou proportionnel, loi de comportement élatso-plastique totale.
- Matériau élasto-plastique isotrope ou anisotrope transverse avec écrouissage isotrope.
- Les actions des outils sont représentées par des forces nodales, sans traitement de contact entre la tôle et les outils.
- Algorithme statique implicite utilisant une résolution non linéaire par la méthode de Newton-Raphson.

### 2.2.2. Cinématique de grandes transformations tridimensionnelles

Dans l'Approche Inverse, le calcul des déformations totales s'effectue en une seule étape en comparant directement le flan plan initial $C^0$ et la pièce finale tridimensionnelles $C$ [Guo 90]. Etudions le même point matériel $q^0$ dans la configuration initiale $C^0$ et $q$ dans la configuration finale $C$. Ces deux points sont à une distance $z^0$ et $z$ de la surface moyenne de leurs configurations, respectivement. Les vecteurs position, de ces deux points dans les deux configurations, sont donnés par (Figure 2.1) :

$$\vec{x}_q^0 = \vec{x}_p^0 + z^0\vec{n}^0 = \vec{x}_p - \vec{u}_p + z^0\vec{n}^0 \qquad (2.1a)$$

$$\vec{x}_q = \vec{x}_p + z\vec{n} \qquad (2.1b)$$

Où $\vec{u}_p$ est le vecteur de déplacement du point $p$ situé sur la fibre moyenne de la tôle, $\vec{n}^0$ et $\vec{n}$ sont les normales de la surface moyenne aux points $p^0$ et $p$.

Du fait que $d\vec{n}^0 = 0$ pour le flan initial plan, la différentiation de (2.1a) donne :

$$d\vec{x}_q^0 = d\vec{x}_p - d\vec{u}_p + dz^0\vec{n}^0 \qquad (2.2)$$

En admettant une déformation constante à travers l'épaisseur, nous obtenons l'élongation d'épaisseur moyenne:

$$\lambda_3 = \frac{dz}{dz^0} = \frac{h}{h^0} \qquad (2.3)$$

L'équation (2.2) permet de définir le tenseur gradient de déformation par rapport à la configuration finale connue:

$$\left\{dx_q^0\right\} = \left[F_x^0\right]^{-1}\left\{dx_p\right\} \qquad (2.4)$$

avec

$$\left[F_x^0\right]^{-1} = \left[\vec{t}_1 \ -\vec{u}_{p,x} \vdots \vec{t}_2 \ -\vec{u}_{p,y} \vdots \frac{1}{\lambda_3}\vec{n}^0\right] \qquad (2.5)$$

où $\vec{t}_1 = \vec{x}_{p,x}$ et $\vec{t}_2 = \vec{x}_{p,y}$, vecteurs tangents à la surface moyenne de $C$ en point $p$.

La différentiation de (2.1b) donne :

$$d\vec{x}_q = d\vec{x}_p + dz\vec{n} + zd\vec{n} \qquad (2.6)$$

Prenons la configuration finale connue comme référence, alors le tenseur gradient de déformation du point $q$ par rapport au point $p$ peut être défini comme suit :

$$\{dx_q\} = [F_x]\{dx_p\} \tag{2.7}$$

avec:

$$[F_x] = \left[\vec{t}_1 + z\vec{n}_{,x} \vdots \vec{t}_2 + z\vec{n}_{,y} \vdots \vec{n}\right] \tag{2.8}$$

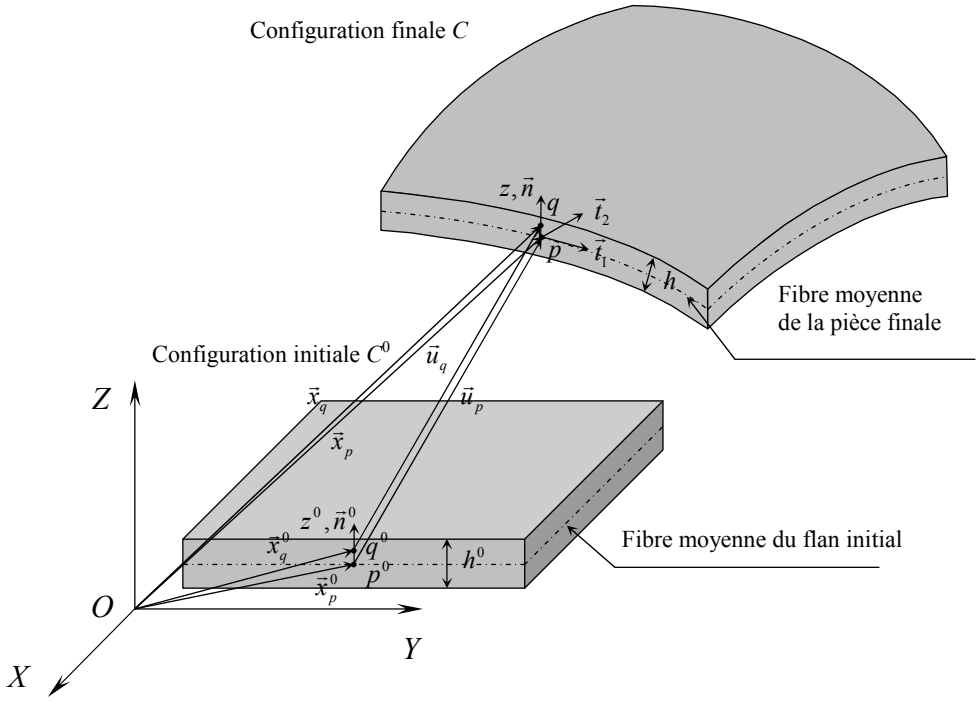



Fig. 2.1 Cinématique pour une tôle mince

Dans le repère local $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$, le tenseur $[F_x]$ est très simple. Prenons $[Q]$ la matrice de passage local-global et supposons les déformations de flexion sont faibles, nous avons:

$$[F_x] = [Q]([I] + z[b_1]) \tag{2.9}$$

$$[F_x]^{-1} = ([I] + z[b_1])^{-1}[Q]^T \approx ([I] - z[b_1])[Q]^T \tag{2.10}$$

avec $[Q] = \left[\vec{t}_1 \vdots \vec{t}_2 \vdots \vec{n}\right]$, matrice de passage local-global.

$$[b_1] = \begin{pmatrix} \vec{t}_1 \cdot \vec{n}_{,x} & \vec{t}_1 \cdot \vec{n}_{,y} & 0 \\ \vec{t}_2 \cdot \vec{n}_{,x} & \vec{t}_2 \cdot \vec{n}_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -s & 0 \\ -s & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tenseur de courbure.}$$

En utilisant les équations (2.4), (2.7) et (2.10), nous définissons le tenseur gradient de déformation inverse $[F]^{-1}$, décrivant le mouvement de $q^0$ à $q$ référencé par rapport à la configuration finale connue $C^0$ :

$$\left\{dx_q^0\right\} = [F]^{-1}\left\{dx_q\right\} \tag{2.11}$$

On en déduit :

$$[F]^{-1} = \left[F_x^0\right]^{-1}\left[F_x\right]^{-1} \approx \left[F_x^0\right]^{-1}\left([I]-z[b_1]\right)[Q]^T \tag{2.12}$$

où $\left[F_x^0\right]^{-1}$ et $\left[F_x\right]^{-1}$ représentent les contributions de membrane et de flexion respectivement.

Le tenseur de Cauchy-Green gauche inverse $[B]^{-1}$ est défini par :

$$[B]^{-1} = [F]^{-T}[F]^{-1} \approx [Q]^T\left([I]-z[b_1]\right)\left[F_x^0\right]^{-1}\left[F_x^0\right]^{-1}\left([I]-z[b_1]\right)[Q]^T \tag{2.13}$$

Définissons :

$$[B_0]^{-1} = \left[F_x^0\right]^{-1}\left[F_x^0\right]^{-1} \tag{2.14a}$$

$$[B_z]^{-1} = \left([I]-z[b_1]\right)[B_0]^{-1}\left([I]-z[b_1]\right) \tag{2.14b}$$

En utilisant les équations (2.13), et (2.14), nous avons

$$[B]^{-1} \approx [Q]^T[B_z]^{-1}[Q]^T \tag{2.15}$$

Géométriquement, $[B_0]^{-1}$ est l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche du modèle de membrane ($z = 0$):

$$[B_0]^{-1} = \left[F_x^0\right]^{-1}\left[F_x^0\right]^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ b_0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

avec $a_0 = 1 - 2\vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,x} + \vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,x}^2$, $b_0 = -\vec{t}_1 \cdot \vec{u}_{p,y} - \vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,x} + \vec{u}_{p,x} \cdot \vec{u}_{p,y}$ et $c_0 = 1 - 2\vec{t}_2 \cdot \vec{u}_{p,y} + \vec{u}_{p,y}^2$.

L'hypothèse de la déformation d'épaisseur moyenne (équation 2.3) permet de découpler l'élongation d'épaisseur et les élongations dans le plan de la tôle et d'aboutir au tenseur $[B_z]^{-1}$ ayant une forme simple :

$$\left[B_z\right]^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

avec

$$a = a_0(1+zr)^2 + 2b_0 sz(1+zr) + c_0(sz)^2$$

$$b = a_0(1+zr)sz + b_0(1+zr)(1+zt) + b_0(sz)^2 + c_0 sz(1+zt)$$

$$c = a_0(sz)^2 + 2b_0 sz(1+zr) + c_0(1+zt)^2$$

Les valeurs propres de $\left[B_z\right]^{-1}$ donnent les deux principales élongations dans le plan de la tôle ($\lambda_1^{-2}$ et $\lambda_2^{-2}$):

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \left( \frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.18}$$

Nous pouvons en obtenir les déformations principales logarithmiques planes dans la configuration finale :

$$\{\hat{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ln\lambda_1 \\ \ln\lambda_2 \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

L'hypothèse de l'incompressibilité peut s'écrire :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \tag{2.20}$$

Selon la définition des déformations logarithmiques, on a donc :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \ln\lambda_1 + \ln\lambda_2 + \ln\lambda_3 = \ln(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = 0 \tag{2.21}$$

On a

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{2.22}$$

Nous en déduisons alors l'élongation $\lambda_3$ et l'épaisseur $h^0$ :

$$\lambda_3 = (\lambda_1\lambda_2)^{-1} \tag{2.23}$$

$$h = h^0\lambda_3 = \frac{h^0}{\lambda_1\lambda_2} \tag{2.24}$$

La matrice de transformation entre le repère local et le repère global des déformations est celle dont les colonnes sont les trois vecteurs propres normalisées de $[B]^{-1}$ :

$$[M]=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

où $\theta$ l'angle entre le repère des déformations principales et le repère local qui est donnée par :

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan(\frac{2b}{a-c}) \tag{2.26}$$

Le calcul des valeurs et vecteurs propres de $[B]^{-1}$ permet de trouver les trois élongations principales et le repère principal correspondant :

$$[B]^{-1}=[M]\begin{pmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{pmatrix}[M]^{\mathrm{T}} \tag{2.27}$$

où $\lambda_1^{-2}$, $\lambda_2^{-2}$ et $\lambda_3^{-2}$ sont les valeurs propres, la matrice de massage $[M]$ est composée de trois vecteurs propres, Le tenseur des déformations logarithmiques (ou naturelles) dans le repère local associé à la configuration finale est ainsi obtenu :

$$[\varepsilon]=\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}=[M]\begin{pmatrix} \ln\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln\lambda_3 \end{pmatrix}[M]^{\mathrm{T}} \tag{2.28}$$

Finalement, on trouve les déformations logarithmiques planes dans le repère local:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

### 2.2.3. Loi de comportement intégrée élasto-plastique anisotrope

L'Approche Inverse est une méthode simplifiée indépendante du chemin de déformation. L'hypothèse du chargement proportionnel (ou radial) permet l'intégration de la loi de comportement de l'état initial à l'état final [Guo 90.].

Sous l'hypothèse de contraintes planes et d'anisotropie transverse, le critère de Hill s'écrit :

$$f = \sigma_{\text{eq}} - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\text{p}}) = 0\,; \qquad \sigma_{\text{eq}} = (\{\sigma\}^{\text{T}}\,[P]\{\sigma\})^{1/2} \tag{2.30}$$

où $\sigma_{\text{eq}}$ est la contrainte équivalente, $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\text{p}})$ représente la courbe de traction uniaxiale. $\{\sigma\} = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy} \rangle^{\text{T}}$ est la vecteur de contraintes de Cauchy,

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\bar{r}}{1+\bar{r}} & 0 \\ \dfrac{-\bar{r}}{1+\bar{r}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1+2\bar{r})}{1+\bar{r}} \end{pmatrix}$$, matrice d'anisotropie,

$\bar{r} = \dfrac{1}{4}(r_0 + r_{45} + r_{90})$, coefficient moyen d'anisotropie,

La loi de normalité permet d'exprimer le taux de déformation plastique en fonction des contraintes de Cauchy :

$$\{\dot{\varepsilon}^{\text{p}}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^{\text{p}} \\ \dot{\varepsilon}_y^{\text{p}} \\ \dot{\gamma}_{xy}^{\text{p}} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{\text{eq}}}[P]\{\sigma\} = \frac{\dot{\lambda}}{\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\text{p}})}[P]\{\sigma\} \tag{2.31}$$

A partir du critère de Hill, nous trouvons que le taux de déformation plastique est identique au taux du multiplicateur plastique:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\text{p}} = \left(\{\dot{\varepsilon}^{\text{p}}\}^{\text{T}}\,[P]^{-1}\{\dot{\varepsilon}^{\text{p}}\}\right)^{1/2} = \left(\frac{\dot{\lambda}\{\sigma\}^{\text{T}}[P]^{\text{T}}}{\sigma_{\text{eq}}}[P]^{-1}\frac{\dot{\lambda}[P]\{\sigma\}}{\sigma_{\text{eq}}}\right)^{1/2} = \dot{\lambda} \tag{2.32}$$

Supposons que les déformations élastiques sont très petites par rapport aux déformations plastiques, l'anisotropie transverse est aussi valable pour les déformations élastiques, on a donc :

$$\{\varepsilon^{\text{e}}\} = \frac{1}{E}[P]\{\sigma\} \tag{2.33}$$

où $E$ est le module de Young.

Les équations (2.31) et (2.33) permettent d'obtenir les déformations totales :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{\mathrm{e}}\} + \{\varepsilon^{\mathrm{p}}\} = \left(\frac{\overline{\varepsilon}^{\mathrm{e}}}{\overline{\sigma}} + \frac{\overline{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\overline{\sigma}}\right)[P]\{\sigma\} = \frac{1}{E_s}[P]\{\sigma\} \tag{2.34}$$

Où $E_s = \dfrac{\overline{\sigma}}{\overline{\varepsilon}}$ est le module sécant.

### 2.2.4. Formulation d'éléments finis

La surface de l'embouti final connue est discrétisée en éléments triangulaires à trois nœuds. La formulation adoptée est celle du DKT12 [Batoz et al. 92] adapté à l'A.I.

L'équilibre de la pièce finale est traduit par le principe des travaux virtuels :

$$W = \sum_{\mathrm{e}} (W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}} - W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{e}}) = 0 \tag{2.35}$$

avec $W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}}$ et $W_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{e}}$, travail virtuel interne et externe élémentaire.

Le travail virtuel interne s'exprime sous la forme suivante:

$$W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}} = \int_{V^{\mathrm{e}}} \langle \varepsilon^* \rangle \{\sigma\} dV \tag{2.36}$$

avec $\langle \varepsilon^* \rangle = \langle \varepsilon_x^* \;\; \varepsilon_y^* \;\; \gamma_{xy}^* \rangle$, déformations virtuelles, $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \sigma_{xy} \rangle$, contraintes de Cauchy.

En considérant l'effet de flexion, on a:

$$\{\varepsilon^*\} = \left([B_m] + z[B_f]\right)\{u_n^*\} \tag{2.37}$$

Une matrice de transformation permet d'établir la relation suivante entre les déplacements locaux et globaux comme suit:

$$\{u_n^*\} = [T]\{U_n^*\} \tag{2.38}$$

En substituant (2.36) dans (2.37), nous obtenons:

$$W_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}} = \langle U_n^* \rangle \{f_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}}\} \tag{2.39}$$

où le vecteur de forces internes:

$$\{f_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}}\} = [T]^{\mathrm{T}} \int_{V^{\mathrm{e}}} \left([B_m]^{\mathrm{T}} + z[B_f]^{\mathrm{T}}\right)\{\sigma\} dV \tag{2.40}$$

La discrétisation du principe des travaux virtuels permet d'établir le système d'équations d'équilibre. L'équation (2.41) représente l'équilibre à un nœud $k$ :

$$\left\{F_{\text{ext}}^{k}(P^{k})\right\}-\left\{F_{\text{int}}^{k}\right\}=\begin{Bmatrix}P^{k}n_{X}^{\text{f}}\\P^{k}n_{Y}^{\text{f}}\\P^{k}n_{Z}^{\text{f}}\end{Bmatrix}_{\text{ext}}-\begin{Bmatrix}F_{X}^{k}\\F_{Y}^{k}\\F_{Z}^{k}\end{Bmatrix}_{\text{int}}=0 \tag{2.41}$$

où $P^{\text{k}}$ est l'intensité inconnue de la force nodale qui peut être calculée en utilisant les forces nodales internes :

$$P^{k}=\sqrt{\left(F_{X}^{k}\right)^{2}+\left(F_{Y}^{k}\right)^{2}+\left(F_{Z}^{k}\right)^{2}} \tag{2.42}$$

Ainsi, le système d'équation non linéaire a seulement deux équations par nœud avec deux déplacements horizontaux comme inconnues.

### 2.2.5. Résolution du système d'équations non linéaires

Le vecteur résidu global $\{R\}$ du système est défini comme suit :

$$\{R\}=\{f_{ext}\}-\{f_{int}\} \tag{2.43}$$

Le système d'équations non linéaires $\{R(U)\}=0$ est résolu par une méthode itérative implicite de type Newton-Raphson.

Pour un système de forte non linéarité, le problème de divergence peut être fréquent. Les méthodes numériques suivantes ont été introduites afin d'améliorer la convergence de la résolution non linéaire:

- Application de la technique de relaxation en introduisant le coefficient de relaxation $\beta(t)$ pour réduire le pas de déplacement afin de favoriser la convergence:

$$\left\{U^{i+1}\right\}=\left\{U^{i}\right\}+\beta\left\{\Delta U^{i}\right\}\quad\left(0<\beta\leq 1\right) \tag{2.44}$$

- Développement d'une bonne solution initiale proche de la solution du problème selon la forme de la pièce finale. [Mercier 98], [Guo 03].

## 2.3. Développements de solutions initiales pour l'Approche Inverse

L'emboutissage est un procédé dans lequel la tôle est soumise à des contraintes très complexes, il y existe de fortes non-linéarités liées aux grandes déformations, des problèmes d'élasto-plasticité et de contact-frottement. Dans une simulation par approche incrémentale, l'algorithme implicite statique a besoin de plusieurs pas avec de nombreuses itérations par pas, l'algorithme dynamique a besoin de plus de mille pas. La modélisation d'un procédé d'emboutissage par l'Approche Inverse en un seul pas, en utilisant l'algorithme implicite statique, est une tache très difficile, malgré des hypothèses simplificatrices retenues (déformation de plasticité et les actions simplifiées des outils). Il est connu qu'une bonne solution initiale est essentielle pour assurer la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson du fait des non-linéarités géométriques et matérielles.

Dans l'Approche Inverse, le problème de convergence peut apparaître spécialement dans le cas d'un emboutissage de grande profondeur ayant un mur quasi-vertical. Lorsqu'un élément triangulaire sur le mur vertical est projeté verticalement sur le plan horizontal, il est dégénéré en un segment qui cause brutalement de très grandes déformations et une divergence dans la procédure de Newton-Raphson.

La solution initiale la plus simple peut s'obtenir par une simple projection verticale du maillage de l'embouti final sur le plan horizontal ($z = 0$). Un procédé d'emboutissage étant souvent soumis à de fortes non-linéarités, une telle solution initiale ne garantira pas la convergence de la résolution du système. De plus, lorsque le mur de l'embouti final est quasi-vertical ou a des contre dépouilles, cette méthode de projection directe fonctionne beaucoup moins bien.

Dans ce chapitre, nous rappelons plusieurs méthodes de solutions initiales [Gerdeen 89], [GUO 03]. Ces méthodes sont essentiellement basées sur des considérations géométriques. Plusieurs exemples ont montré des améliorations notables obtenues sur la vitesse de convergence. A la fin de ce chapitre nous présenterons une méthode spécialement destinée au cas ayant des contre dépouilles.

### 2.3.1. Méthode de Rabattement Géométrique

Pour l'emboutissage d'une pièce axisymétrique, Gerdeen et al. [Gerdeen 89] ont proposé une méthode analytique dite "Méthode de Rabattement Géométrique" (Geometric Mapping Method) afin d'estimer les positions initiales des points matériels dans le flan à partir de leurs

positions dans la pièce finale connue. Cette méthode est basée sur la théorie de coque axisymétrique et l'hypothèse de l'incompressibilité du volume.

Cette méthode est généralisée en trois dimensions. Les étapes principales sont décrites comme suit :

1) Détermination du centre de gravité de la pièce.
2) A partir du centre de gravité, la pièce est découpée en nombreux secteurs par des plans verticaux. Les intersections avec la surface 3D de la pièce sont prises comme des lignes de contrôle (Figure 2.2).
3) Les lignes de contrôle sont dépliées sur le flan plan initial en utilisant la formule de Gerdeen. La position initiale d'une ligne dans le flan plan peut être calculée par la formule suivante:

$$R_0^2 = 2\int\left(1+\left(\frac{dZ}{dR}\right)^2\right)(1+e_3)R\ dR \qquad (2.45)$$

Où $R$, $Z$ sont les coordonnées horizontale et verticale connues du point (ou noeud) sur la pièce en 3D, $e_3$ est la déformation d'épaisseur ($e_3 = \Delta h / h_0$) qui varie le long de la direction radiale, ici $e_3$ est choisie empiriquement.

4) Si les lignes de contrôle dépliées se trouvent en dehors du flan initial donné (Figure 2.2), elles sont compressées uniformément afin que leurs extrémités externes atteignent justement le contour du flan.

Un noeud peut se trouver dans un secteur entre deux lignes de contrôle. Les interpolations linéaires dans $(s,\theta)$, avec quatre noeuds avoisinant ou points sur les lignes de contrôle, permettent de déterminer sa position initiale dans le flan.

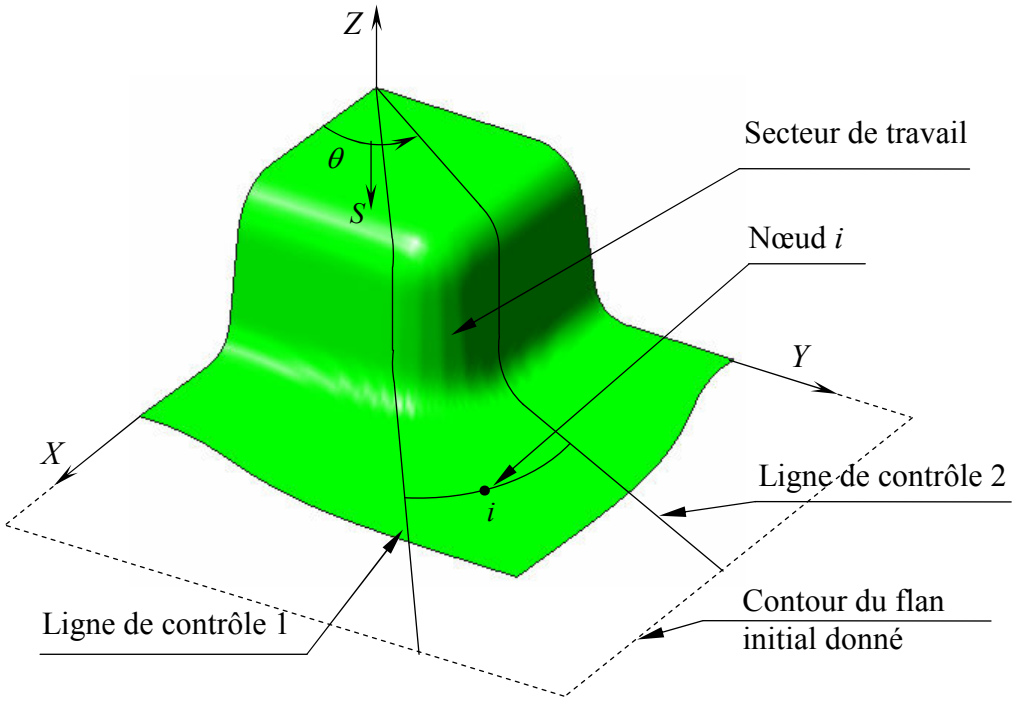



Figure 2.2 Secteur de travail pour la méthode de rabattement géométrique

Puisque cette méthode est basée sur une formulation de membrane axisymétrique, elle n'est pas valable pour les pièces tridimensionnelles complexes. Lorsque le maillage est trop fin, cette méthode devient moins précise et un problème de distorsion du maillage peut apparaître. Un autre inconvénient est la choix du nombre de secteurs et de la déformation d'épaisseur $e_3$.

### 2.3.2. Algorithme de « Développement de longueur Radial »

L'algorithme appelé "Développement Radial de longueur" [GUO 03] consiste à développer la longueur curviligne entre le centre de gravité et le nœud considéré dans la direction radiale depuis le centre de gravité.

Il a été démontré que cet algorithme est plus robuste que la « Méthode de Rabattement Géométrique ». La procédure suivante est utilisée pour trouver le maillage du flan initial:

1) Détermination du centre de gravité $g$ de la pièce

2) Pour chaque noeud $i$ du maillage tridimensionnel, un plan de découpage vertical passant par $g$ et $i$ est créé. La courbe d'intersection entre le maillage et le plan peut être déterminée comme suit (Figure 2.3) :

a) Toutes les coordonnées nodales sont transformées à partir du système global $OXY$ au système local $gxy$ (Figure 2.4) :

$$\begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_g \\ Y_g \end{Bmatrix} \right) \tag{2.46}$$

b) Les noeuds situés dans la zone $0 < x < x_i$ et $-e < y < e$ sont sélectionnés ($e = 1.5\ l_{\max}$, $l_{\max}$ est l'arrêt élémentaire maximal). (Figure 2.4).

c) Les éléments contenant les noeuds sélectionnés sont projetés sur le plan horizontal ($z = 0$), alors que les points d'intersection entre l'axe $x$ et les arrêts élémentaires peuvent être déterminés facilement.

3) Les fonctions de Spline Cubique sont utilisées pour interpoler ces points, ensuite la longueur curviligne totale est calculée pour déterminer la position du noeud $i$ déplié sur l'axe $x$.

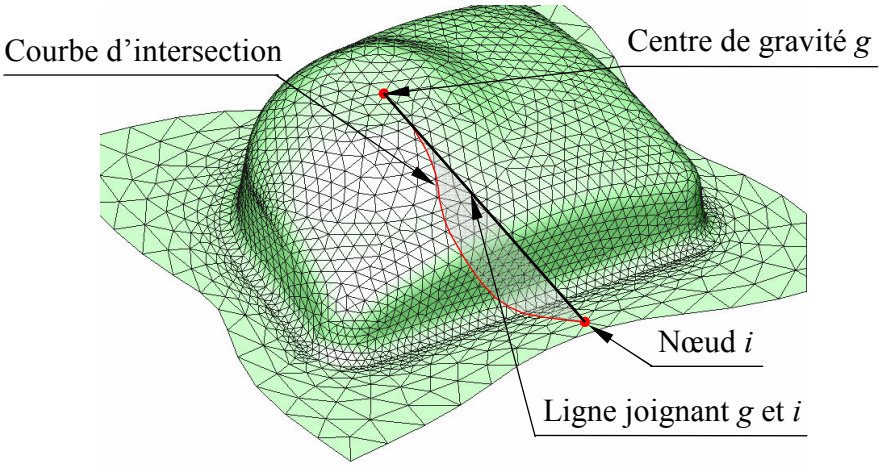



Figure 2.3. Courbe d'intersection du maillage 3D et le plan vertical passant par $g$ et $i$

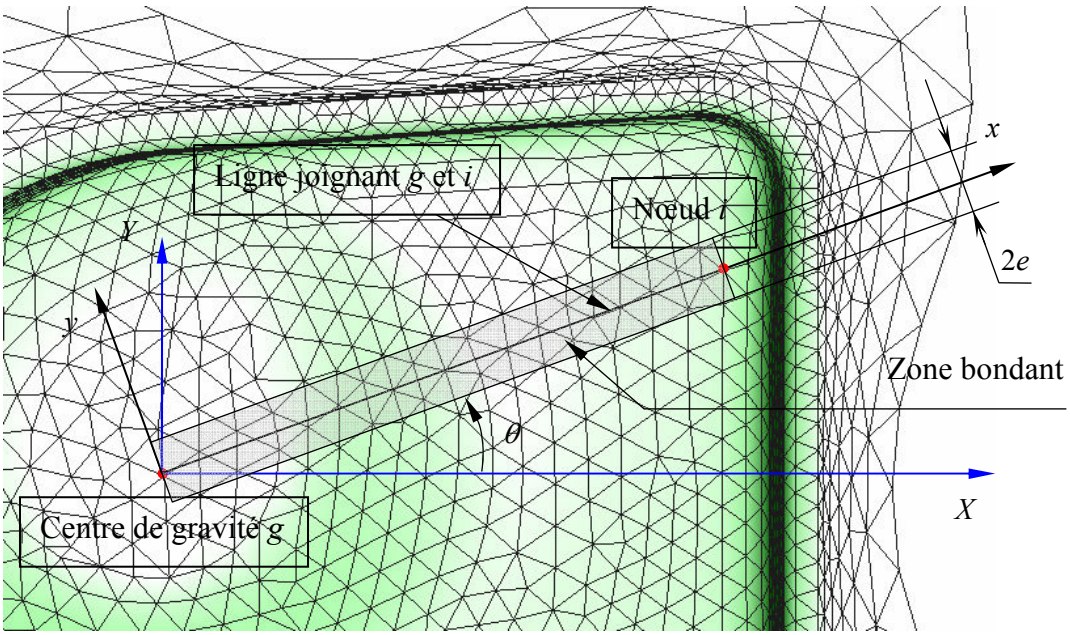



Figure 2.4 Points d'intersection entre l'axe $x$ et le maillage projeté sur $OXY$

### 2.3.3. Algorithme de « transformation convexe »

Cette méthode est spécialement destinée à une solution initiale au cas où existent des contres-dépouilles.

Comme indiquée dans la figure 2.5, une transformation $f|_T$ d'un maillage surfacique consiste à trouver une triangulation plane isomorphique $D$ de $R^2$ en correspondance avec $S$. La transformation convexe consiste à transformer les nœuds de la bordure de la surface $S$ sur un polygone convexe dans le plan, et chaque nœud interne de $S$ est mis à l'intérieur du polygone. Deux approches sont souvent appliquées pour la transformation convexe : combinaison convexe et minimisation d'énergie.

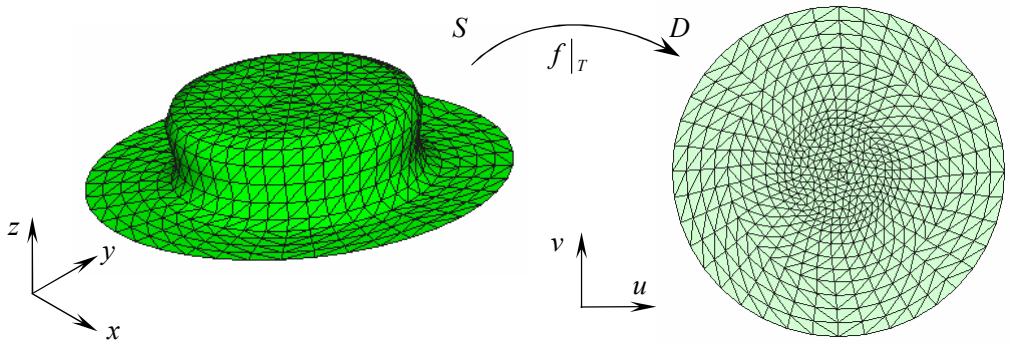



Figure 2.5 Transformation d'un maillage surfacique en un domaine plan

- **Méthode de combinaison convexe**

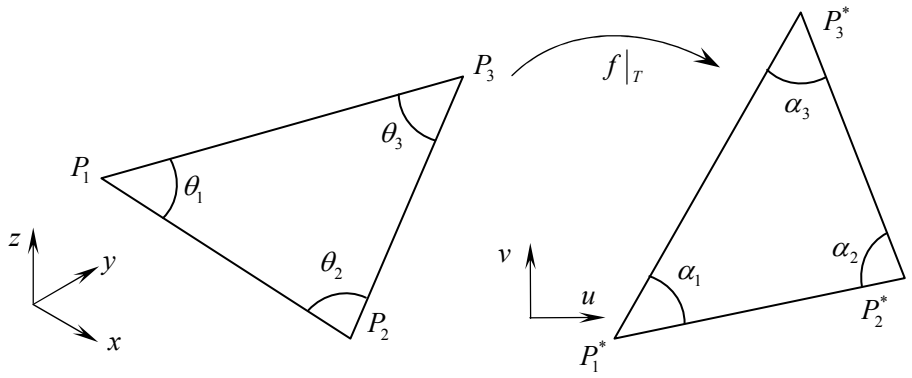



Figure 2.6 Transformation d'un triangle 3D en un triangle 2D

La transformation de combinaison convexe est initialisée par Tutte [Tutte 63], elle est appelée « transformation barycentrique ». La surface triangularisée est transformée dans un polygone convexe plan et le nœud interne de la surface est transformé en une combinaison de ses voisins. Cette approche s'effectue en deux étapes :

1) Positionnement des nœuds de la bordure de la surface sur le contour du polygone convexe plan.
2) Etablissement d'une fonction qui met les nœuds internes au barycentre de ses voisins. Cette condition peut être donnée d'une manière formelle, par l'équation sivante:

$$P_i^* = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N_i} P_j^* \qquad (2.47)$$

où $P_i^*$ sont les coordonnées du nœud $i$, $N_i$ représentent les voisins du nœud $i$, $d_i$ est la valence du nœud $i$, soit le nombre de nœuds qui sont connectés avec le nœud $i$.

Tutte a prouvé que les triangles obtenus ne se confondent pas. Donc cette méthode correspond bien au maillage ayant des contres-dépouilles. En s'appuyant sur la transformation barycentrique proposée par Tutte, Floater [Floater 97] a amélioré la transformation de combinaison convexe en introduisant des poids sur les côtés connectés à un nœud interne et a démontré qu'il suffisait de vérifier les deux conditions suivantes pour définir une transformation:

1) Le domaine $D$ est un polygone convexe
2) Chaque nœud interne est une combinaison convexe de ses voisins. Cette condition peut être donnée par l'équation suivante:

$$P_i^* = \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} P_j^* \tag{2.48}$$

où $\lambda_{ij}$ représente les poids normalisés sur les côtés :

$$\lambda_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{k \in N_i} w_{ik}} \tag{2.49}$$

Cette proposition amène beaucoup de choix sur les poids $\lambda_{ij}$ qui dépendent du choix de $w_{ij}$. Floater utilise «les Coordonnées de Valeur Moyenne», l'algorithme est détaillé ci-dessous.

- **Minimisation d'énergie**

Cette approche consiste à trouver une fonction objective d'énergie avec les conditions aux limites et de minimiser la fonction. Une méthode typique est d'introduire la théorie de Hooke, tous les côtes du maillage sont considérés comme des barres élastiques, l'énergie du maillage peut alors s'écrire comme suit :

$$E(f|_T) = \frac{1}{2} \sum_{j \in N_i} w_{ij} \left\| P_i^* - P_j^* \right\|^2 \tag{2.50}$$

En minimisant l'énergie du système, on obtient un système d'équations :

$$\frac{\partial E}{\partial P_i^*} = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (P_i^* - P_j^*) = 0 \tag{2.51}$$

Pour chaque nœud interne, on retrouve la même forme que la transformation de combinaison convexe.

$$f(v_i) = \sum_{j \in N_i} \lambda_{ij} f(v_j) \tag{2.52}$$

où $f(v_i)$ sont les coordonnées des nœuds.

Une méthode appelée transformation harmonique discrète est proposée par Eck [Eck 95]. En utilisant l'énergie harmonique, les coefficients sont obtenus:

$$w_{ij} = (L_{i,j-1}^2 + L_{j,j-1}^2 - L_{i,j}^2) / A(P_i, P_j, P_{j-1}) + (L_{i,j+1}^2 + L_{j,j+1}^2 - L_{i,j}^2) / A(P_i, P_j, P_{j+1}) \tag{2.53}$$

avec $L$ la longueur du côté et $A$ l'aire du triangle.

Pinkall et Polthier [Pinkall 93] ont proposé un algorithme similaire dans le calcul des surfaces minimales en minimisant l'énergie de Dirichlet :

$$E_D(f) = \frac{1}{2}\int_D \left\| \overrightarrow{grad} f \big|_T \right\|^2 \tag{2.54}$$

sous réserve de la condition de bordure sur le polygone :

$$f\big|_{\partial D} = f_0 \tag{2.55}$$

Il a trouvé les mêmes coefficients qu'Eck mais sous une autre forme :

$$w_{ij} = \cot \beta_{ij-1} + \cot \beta_{ij+1} \tag{2.56}$$

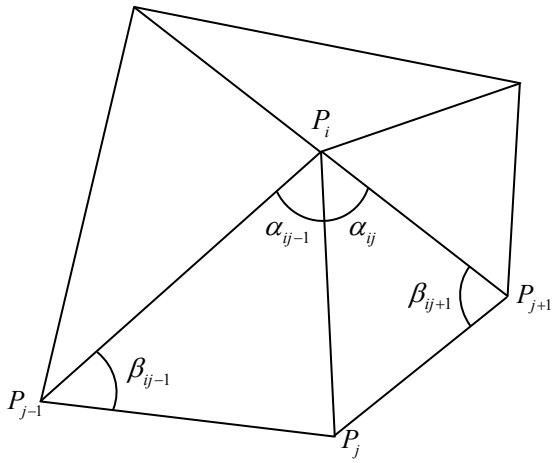



Figure 2.7 Angles pour la transformation harmonique discrète

Le triangle obtenu est non dégénéré et a la même orientation. Cela est garanti si les poids $w_{ij}$ sont positifs. Afin de garantir tous les poids positifs, Floater [Floater 03] a proposé de nouveaux coefficients en utilisant «les Coordonnées de Valeur Moyenne»:

$$w_{ij} = \frac{\tan(\alpha_{ij-1}/2) + \tan(\alpha_{ij}/2)}{\left\| P_j - P_i \right\|} \tag{2.57}$$

En séparant les nœuds internes et les nœuds sur la bordure de la surface, à partir de l'équation (2.52) on a :

$$f(v_i) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} f(v_j) = \sum_{j=n+1}^{N} \lambda_{ij} f(v_j), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.58}$$

avec les nœuds internes $\{1, 2, \cdots, n\}$, et les nœuds sur la bordure $\{n+1, n+2, \cdots, N\}$.

Puisque les coordonnées des nœuds sur la bordure sont obtenues avant la transformation, il ne reste que les coordonnées des nœuds internes comme inconnues. En séparant les

coordonnées $(u,v)$ des nœuds internes dans l'équation (2.58), nous avons deux équations linéaires ayant la même matrice linéaire :

$$\begin{cases} [\mathrm{A}]\{u\} = \{b_1\} \\ [\mathrm{A}]\{v\} = \{b_2\} \end{cases} \tag{2.59}$$

avec

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 \\ a_{ij} = -\lambda_{ij} \quad (i \neq j) \end{cases} \tag{2.60}$$

et $\{b_1\}$ et $\{b_2\}$ sont définies par la transformation sur la bordure.

### 2.3.4. Application dans l'Approche Inverse :

Les méthodes mentionnées ci-dessus peuvent s'appliquer dans l'Approche Inverse en deux étapes :

1) Projection des nœuds du contour extérieur sur le plan horizontal $z = 0$.
2) Résolution de l'équation (2.59) pour trouver les nouvelles coordonnées des nœuds internes $u$ et $v$. Celles-ci correspondent à $x$ et $y$, respectivement.

Pour que les nœuds sur l'axe de symétrie restent encore sur l'axe de symétrie après la transformation, une technique spécifique est introduite pour les pièces symétriques. Pour le point $P_0^*$ par exemple nous complétons les triangles virtuels symétriquement sur l'autre coté de l'axe de symétrie (figure 2.8). Le poids du point $P_0^*$, $\lambda_{0j}$, est calculé en tenant comptes de ses voisins virtuels.

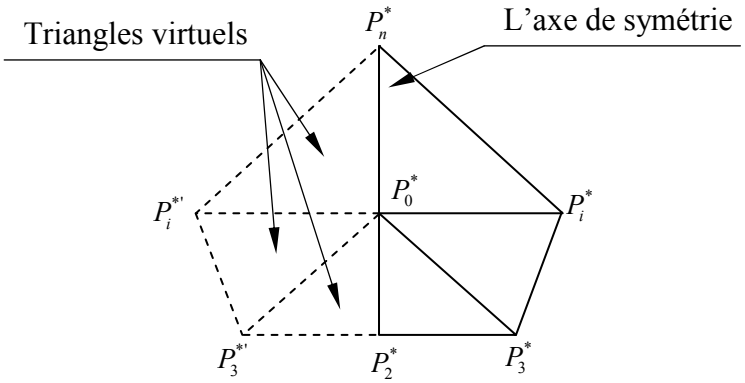
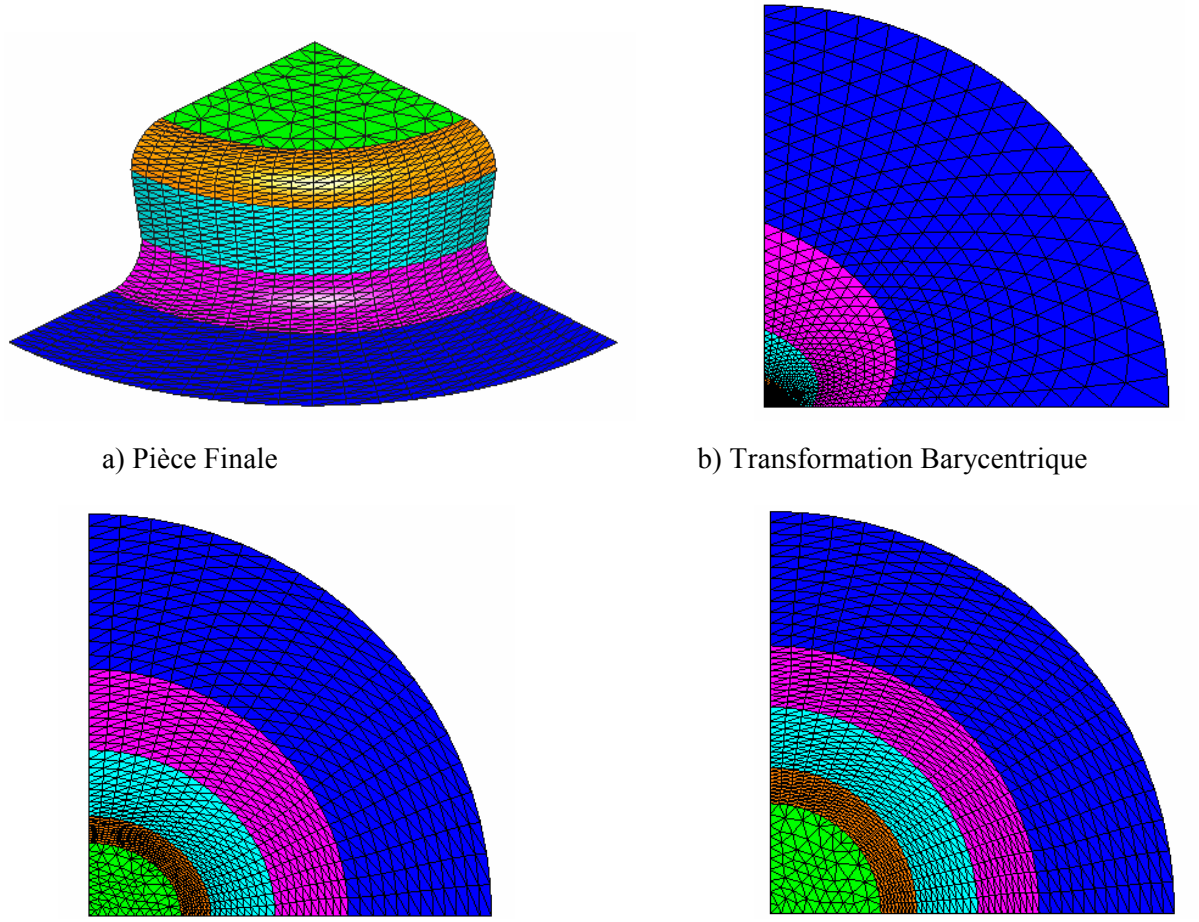



Figure 2.8 Conditions aux limites de la symétrie

Le flan initial de l'emboutissage est très souvent convexe, ce qui assure la faisabilité de la transformation harmonique discrète pour obtenir la solution initiale. Une pièce imaginaire est traitée en utilisant les 3 méthodes mentionnées ci-dessus. Pour mieux voir la distribution des éléments sur différentes zones, la pièce est multi colorée (figure 2.9). On observe que la transformation harmonique discrète donne une solution initiale avec une moindre distorsion des éléments.



a) Pièce Finale b) Transformation Barycentrique

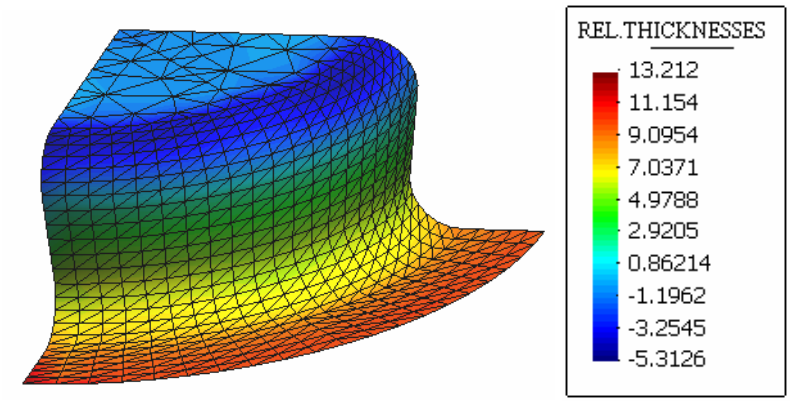
c) Transformation de Valeur Moyenne d) Transformation Harmonique Discrète

Figure 2.9 Solutions initiales obtenues par différentes méthodes

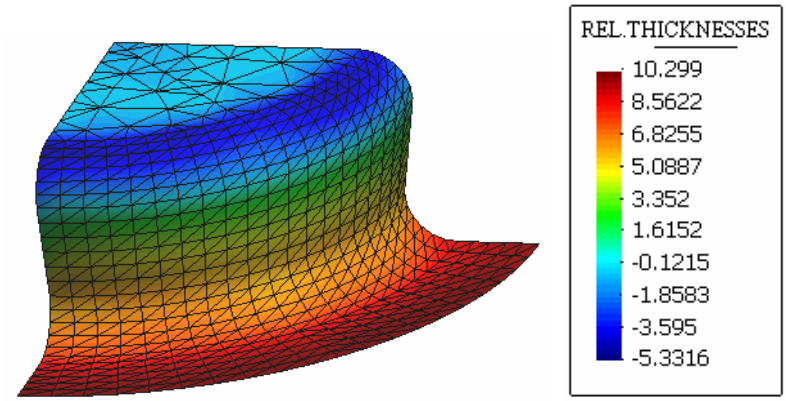
| | Transformation Barycentrique | Transformation de Valeur Moyenne | Transformation Harmonique Discrète |
|---|---|---|---|
| Nombre d'iterations | 21 | 23 | 21 |
| Norme des déplacements | 8.6772E-05 | 6.8561E-06 | 7.3511E-06 |
| Norme des résidus | 7.9238E-06 | 2.7139E-06 | 3.9232E-06 |

Tableau 2.1 Convergence obtenue par différentes transformations

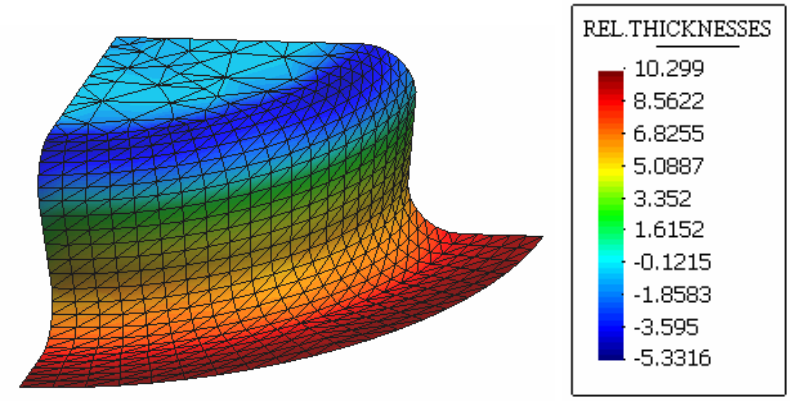
Le tableau 2.1 compare les historiques de convergences obtenues par l'Approche Inverse en utilisant la solution initiale trouvée par les méthodes différentes. On observe que la transformation barycentrique et la transformation harmonique discrète donnent le meilleur taux de convergence, cependant la transformation harmonique et la transformation de Valeur Moyenne donnent les meilleures précisions.




a) Transformation Barycentrique




b) Transformation de Valeur Moyenne




c) Transformation Harmonique Discrète

Figure 2.10 Distribution d'épaisseur relative obtenues par différentes méthodes

La figure 2.10 montre les résultats obtenus pour les différentes méthodes. On observe que la transformation harmonique discrète et la transformation de Valeur Moyenne donnent exactement les mêmes résultats.

## 2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation éléments finis de l'Approche Inverse en emboutissage de tôles minces, puis les améliorations apportées à cette approche. Dans la première partie, basée sur les travaux de GUO et BATOZ, initiateurs de cette approche, les principales caractéristiques et hypothèses de l'approche inverse, la cinématique, la loi de comportement, un schéma d'intégration quasi-statique implicite et la formulation éléments finis associée sont présentés.

Dans la deuxième partie, une analyse du choix de la solution initiale est proposée car il s'agit d'un aspect important pour la convergence de l'approche inverse. Trois approches pour définir la solution initiale ont été présentées: la méthode de rabattement géométrique, l'algorithme de développement de longueur radiale et l'algorithme de transformation convexe. La première méthode ne convient pas à des géométries d'emboutis 3D complexes ; la seconde est plus robuste et la troisième est spécialement adaptée au cas où il existe des contre-dépouilles. La troisième méthode comporte, quant à elle, la transformation de combinaison convexe ou barycentrique proposée par TUTTE, la transformation de « Valeur Moyenne » proposée par FLOATER et la transformation « Harmonique Discrète » proposée par ECK. L'efficacité de ces trois variantes a été testée sur une pièce fictive (l'emboutissage d'un flan plan par un poinçon cylindrique à fond plat) vis-à-vis de la vitesse de convergence du processus itératif de résolution, de la qualité du maillage initial obtenu et de la distribution d'épaisseur sur la pièce finale. On observe que la transformation harmonique discrète, qui donne une solution initiale avec une moindre distorsion des éléments, est un bon choix dans le cas où existent des contre-dépouilles.

# Chapitre 3 Approche Pseudo Inverse

## 3.1. Introduction

La prévision de l'endommagement dépend fortement de la précision des états historiques de contraintes obtenues. Des maillages éléments finis très fins et de nombreux petits incréments doivent être utilisés, les temps de calcul deviennent alors très importants pour les approches incrémentales.

Dans la phase de la conception initiale, il s'avère très intéressant d'utiliser une méthode simplifiée pour obtenir une bonne estimation des contraintes. L'approche inverse à un seul pas (présentée dans le chapitre 2), a montré qu'elle pouvait donner très rapidement une assez bonne distribution des déformations, mais une estimation médiocre des contraintes. Cela est dû au fait que la théorie de déformation plastique utilisée est basée sur l'hypothèse du chargement radial.

A partir des travaux précédents, nous avons développé une approche mixte basée sur l'Approche Inverse mais en prenant en considération l'historique des déformations [Gati 03], [Guo 04]. Comparée à l'approche inverse, cette approche a pour principales particularités :

- L'introduction des configurations intermédiaires « réalistes » pour calculer l'incrément de déformations entre deux configurations successives et ainsi tenir compte de l'historique des déformations.
- Le transfert des champs de déformations et de contraintes entre les maillages de deux configurations pour assurer la cohérence des points matériels entre les deux maillages.
- L'utilisation d'un nouvel algorithme très efficace basé sur la théorie d'écoulement pour l'intégration plastique afin d'obtenir une bonne estimation des contraintes.

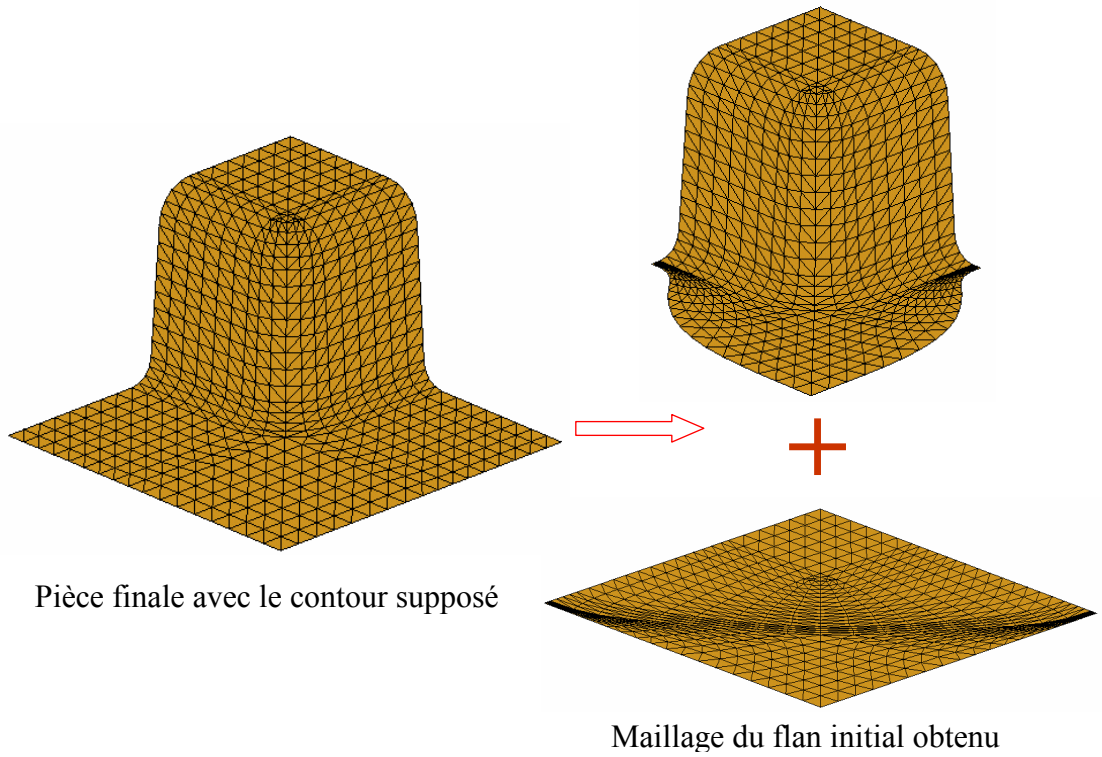
Dans ce chapitre, nous présentons en détail cet algorithme mixte que nous avons baptisé « Approche Pseudo Inverse » (API) ; les différentes étapes de cet algorithme sont d'abord, la détermination des formes des configurations intermédiaires « réalistes », puis le transfert de

champs, et en fin la relocalisation des nœuds sur la pièce 3D pour localiser un point dans un maillage éléments finis de façon très efficace.

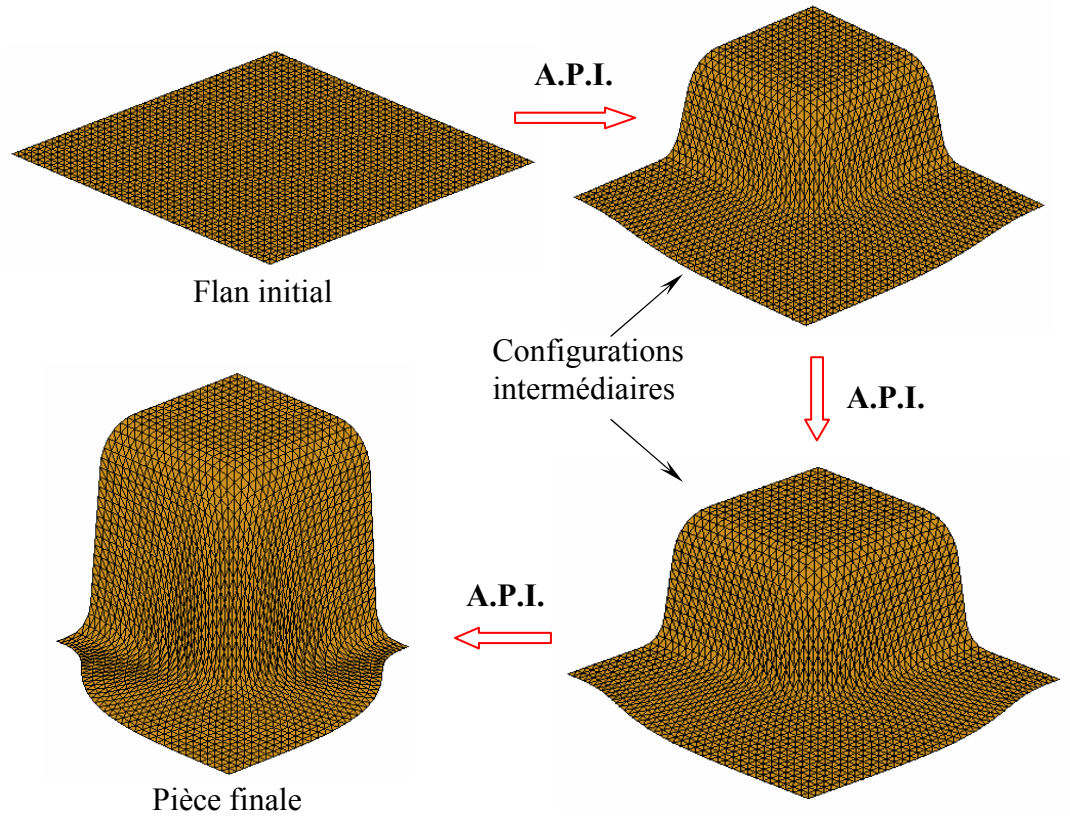
## 3.2. Génération de « vraies » configurations intermédiaires

Dans l'approche inverse, seule les configurations initiale et finale sont considérées pour le calcul des grandes déformations totales (Figure 3.1). Les contraintes sont ensuite calculées avec une loi de comportement intégrée (théorie de la déformation plastique). Des configurations intermédiaires sont utilisées dans le seul but de faciliter la convergence, mais elles ne correspondent pas aux vraies formes que prend la tôle pour des positions données du poinçon. En effet, un maillage intermédiaire est tout simplement obtenu en multipliant les coordonnées verticales des nœuds par le pourcentage de la course du poinçon actuel par rapport à sa course totale.

Dans l'API, nous introduisons des configurations intermédiaires géométriquement admissibles. Ces configurations intermédiaires sont générées en amont du calcul inverse. Nous optons pour un calcul géométrique qui, à l'instar des algorithmes de contact classiques, est complètement découplé du calcul mécanique.




a) Approche Inverse




b) Approche Pseudo Inverse

Figure 3.1 Comparaison de l'Approche Inverse et de l'Approche Pseudo Inverse

### 3.2.1. Méthode de minimisation de longueur

Ce travail a été initié par Gati et al. [Gati 03]. Supposons que la tôle entre la matrice et le poinçon, pour une position donnée, reste en accord géométrique parfait avec les outils (poinçon et matrice). Pour une pièce quasi-axisymétrique, la forme ponctuelle de la pièce peut alors être déterminée par la procédure suivante :

- Les outils discrétisés en éléments triangulaires, sont divisés en un certain nombre de secteurs par des plans verticaux (Figure 3.2).
- Le profil d'une configuration intermédiaire de la pièce dans un plan de découpe est ensuite déterminé en minimisant la longueur du profil de la pièce dans ce plan, c'est-à-dire en prenant les coordonnées verticales des nœuds de la tôle comme variables de conception et la géométrie des outils comme limitations (Figure 3.3).

- La surface 3D de chaque secteur (entre deux plans verticaux) est déterminée en utilisant une approximation linéaire de l'angle $\alpha$ et $z$ (Figure 3.4 et l'équation 3.3).

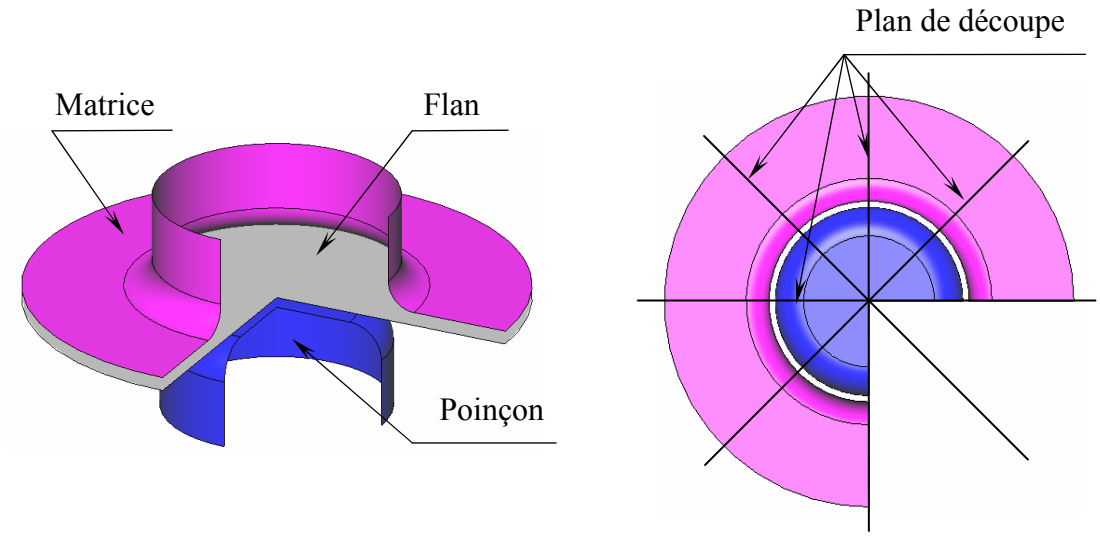



Figure 3.2 Géométrie et plans de découpe verticaux

Dans un plan de découpe (Figure 3.3), on a souvent trois zones géométriques: la zone sous poinçon, la zone libre et la zone sur matrice. Soient $z_{\mathrm{P}}$, $z_{\mathrm{T}}$ et $z_{\mathrm{M}}$ les coordonnées verticales des nœuds définissant les surfaces du poinçon, de la tôle et de la matrice respectivement. Dans la zone du poinçon, $z_{\mathrm{P},i} \le z_{\mathrm{T},i}$ ; dans la zone libre, il n' y a pas de bornes; dans la zone de la matrice, $z_{\mathrm{T},i} \le z_{\mathrm{M},i}$. En prenant les coordonnées verticales $z_{\mathrm{T},i}$ de la tôle comme les variables de conception et les limitations établies, un problème de minimisation peut être décrit comme suit :

$$Min \sum_{i=1}^{n-1} d_i \tag{3.1}$$

avec $d_i = \left[ (r_{i+1} - r_i)^2 + (z_{\mathrm{T},i+1} - z_{\mathrm{T}i})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ et avec les limitations suivantes:

$$\begin{cases} z_{\mathrm{P},i} \le z_{\mathrm{T},i} & \text{zone du poinçon} \\ z_{\mathrm{T},i} \in (-\infty, +\infty) & \text{zone libre} \\ z_{\mathrm{T},i} \le z_{\mathrm{M},i} & \text{zone de la matrice} \end{cases} \tag{3.2}$$

Un algorithme SQP (Sequential Quadratic Programming) a été utilisé pour résoudre ce problème d'optimisation.

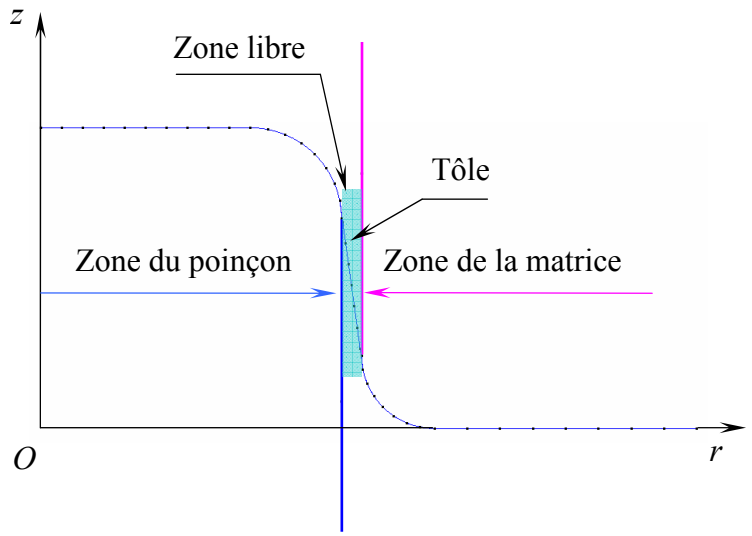



Figure 3.3 Détermination de configurations intermédiaires par minimisation de longueur

Pour une position donnée du poinçon, une fois que le profile de la tôle dans chaque plan de découpe est trouvé, les cordonnées verticales (les coordonnées horizontales $x$ et $y$ restent inchangées) de tous les nœuds du maillage sont calculées, par l'interpolation linéaire suivante (Figure 3.4):

$$z_{\mathrm{T}}(\alpha_P) = z_{\mathrm{T}}(\alpha_1) + \left(\frac{\alpha_P - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)\left(z_{\mathrm{T}}(\alpha_2) - z_{\mathrm{T}}(\alpha_1)\right) \tag{3.3}$$

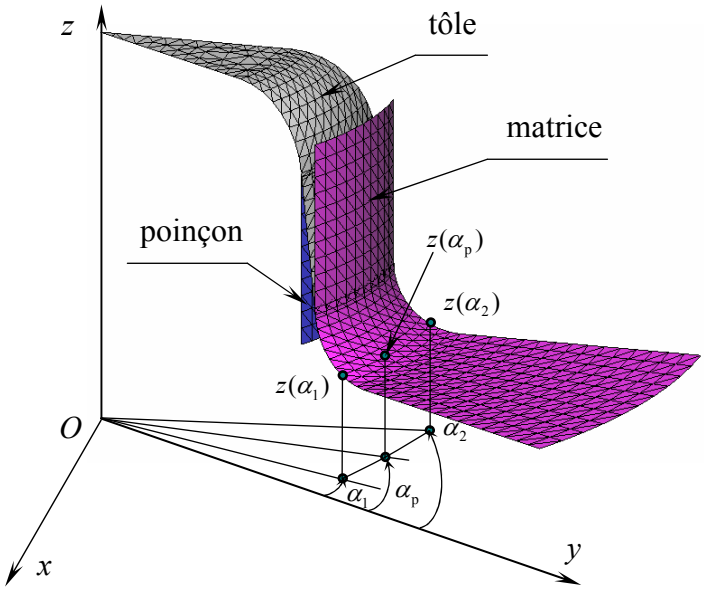
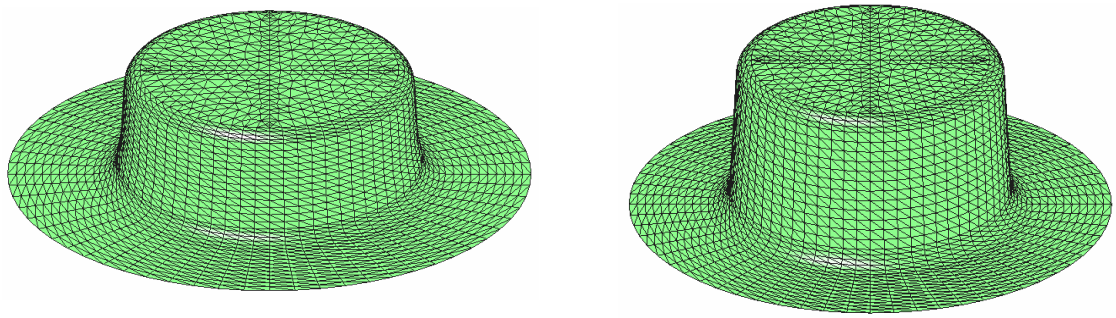



Figure 3.4 Génération du maillage 3D avec interpolation linéaire

Cette méthode fonctionne bien lorsque la pièce est quasi-axisymétrique ou axisymétrique (Figure 3.5). Mais lorsque la pièce est complexe, de nombreux plans de découpe sont nécessaires. Dans ce cas, la minimisation de l'aire de la tôle est une bonne solution pour trouver les configurations intermédiaires.



Profondeur = 40 mm profondeur = 60 mm

Figure 3.5 configurations intermédiaires d'un chapeau

### 3.2.2. Méthode de minimisation de surface

Plus la forme de la pièce s'éloigne de la forme axisymétrique, plus il est nécessaire d'augmenter le nombre de plans de découpes et plus il devient difficile d'éviter des problèmes numériques. Le chapeau de la figure 3.5 par exemple, nécessite 64 plans. De plus, nous avons constaté que la minimisation de la longueur ne donne pas la surface minimale de la tôle.

Pour ces raisons, il est préférable d'utiliser directement la minimisation de la surface de la tôle. La fonction objective et les limitations sont alors définies comme suit :

$$J = Min \sum_{e} A^{e} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} z_{\mathrm{P},i} \le z_{\mathrm{T},i} & \text{zone du poinçon} \\ z_{\mathrm{T},i} \in \left(-\infty, +\infty\right) & \text{zone libre} \\ z_{\mathrm{T},i} \le z_{\mathrm{M},i} & \text{zone de la matrice} \end{cases} \tag{3.5}$$

où $A^{e}$ est l'aire d'un élément, $z_{\mathrm{P}}$, $z_{\mathrm{T}}$ et $z_{\mathrm{M}}$ représentent les coordonnées verticales des nœuds définissant les surfaces du poinçon, de la tôle et de la matrice respectivement. $z_{\mathrm{T}}$ sont les variables de conception.

Cette méthode est un peu plus coûteuse en temps de calcul, du fait du grand nombre de variables de conception, mais elle s'est avérée très performante.

Le programme développé permet de traiter deux types de problèmes :

a) Si la forme de la pièce finale est connue, le maillage élément fini est créé sur la pièce 3D (le 1er groupe d'élément pour la partie de la tôle sous serre-flan, le 2e groupe pour la partie restante de la tôle), les surfaces du poinçon et de la matrice sont obtenues par les translations verticales de ce maillage. Un tel exemple est donné avec la boite carrée en figure 3.6.

b) S'il existe des surfaces libres de forme inconnue de la tôle entre la matrice et le poinçon, 4 groupes d'éléments sont utilisés : le flan plan initial est divisé en partie sous serre-flan (1er groupe d'éléments) et partie restante (2e groupe), la forme de la matrice est définie par le 3e groupe, la forme du poinçon est définie par le 4e groupe (figure 3.7).

Notons que la présente méthode donne des maillages de configurations intermédiaires indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire que les nœuds ayant les mêmes numéros dans deux maillages différents ne représentent pas le même point matériel. Nous présenterons par la suite la manière d'effectuer le passage d'information entre ces deux maillages.

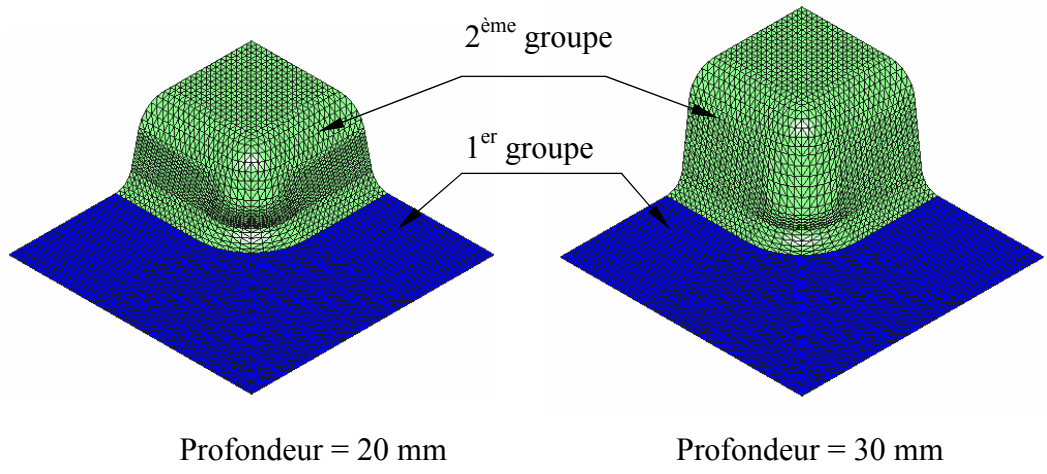
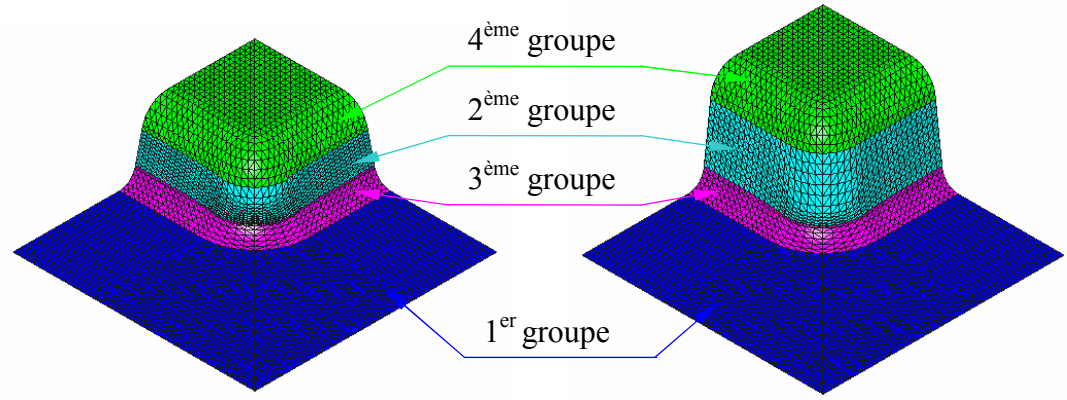



Figure 3.6 Boite Carrée – forme finale entièrement connue




Profondeur = 20 mm profondeur = 30 mm

Figure 3.7 Boite Carrée – avec des surfaces libres de forme inconnue

### 3.2.3. Amélioration des maillages $C_i$ obtenus par minimisation de surface

Les maillages $C_i$ obtenus ci-dessus sont parfois trop distordus lorsque qu'on utilise beaucoup de pas (par exemple 16 pas), les éléments sur les parois quasi-verticales deviennent tellement étroits au premier pas que la convergence devient difficile (Figure 3.8). Un maillage plus "uniforme" peut être obtenu par le glissement des nœuds sur les surfaces 3D de $C_i$, mais cette opération est coûteuse et difficile à mettre en œuvre pour des pièces de géométrie complexes.

Nous constatons que les maillages obtenus, en multipliant les coordonnées verticales des nœuds sur la pièce finale par le pourcentage de la course du poinçon ($\boldsymbol{Z_i}=\boldsymbol{Z}\times i\text{pas}/n\text{pas} \rightarrow D_i$), sont relativement uniformes, donc acceptables, pour le calcul inverse. Le rabattement des nœuds du maillage $D_i$ sur le maillage $C_i$ distordu mais géométriquement correct est un bon compromis entre la qualité de maillage et l'efficacité de calcul (Figure 3.9).

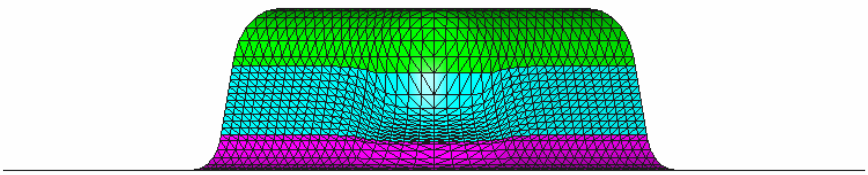


Figure 3.8 Maillage distordu obtenu par la minimisation de surface (H=20 mm)

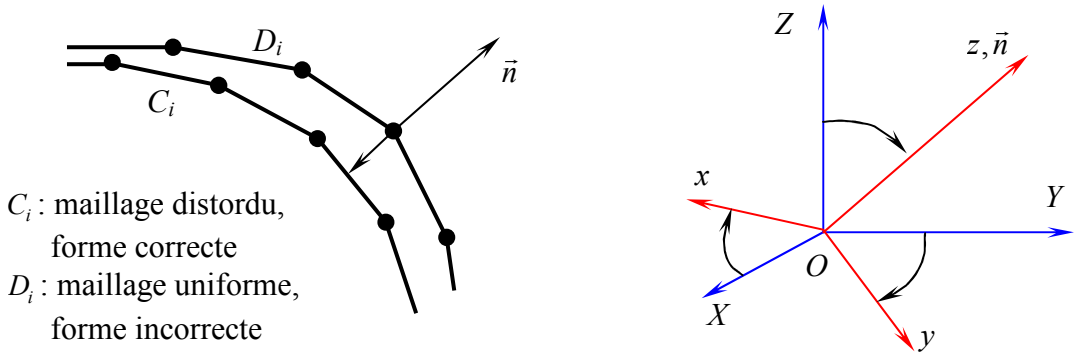



Figure 3.9 Rabattement du maillage $D_i$ sur maillage $C_i$

Pour chaque nœud du $D_i$, on établit un repère local en prenant le vecteur normal $\vec{n}$ à la surface de la tôle comme l'axe $z$, alors le plan perpendiculaire à $z$ et passant par $O$ s'écrit:

$$n_x X + n_y Y + n_z Z = 0 \tag{3.6}$$

où $\vec{n} = \langle n_x \ n_y \ n_z \rangle^T$ est le vecteur normal de la tôle à ce nœud.

L'intersection de ce plan avec le plan $OXZ$ donne le cosinus directeur de l'axe $x$, et puis le produit vectoriel $\overrightarrow{oz} \times \overrightarrow{ox}$ donne le cosinus directeur de l'axe $y$ :

$$n_x X + n_z Z = 0 \tag{3.7}$$

$$\vec{t}_x = \begin{cases} \dfrac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \\ 0 \\ \dfrac{-n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \end{cases}, \ \vec{t}_y = \begin{cases} \dfrac{-n_x n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \\ 0 \\ \dfrac{-n_y n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \end{cases}, \ \vec{t}_z = \begin{cases} n_x \\ n_y \\ n_z \end{cases} \tag{3.8}$$

Ainsi, nous obtenons la matrice de transformation permettant de transformer les coordonnées des nœuds des maillages $C_i$ et $D_i$ dans le repère local $O - xyz$ :

$$\{x\} = [T]^T \{X\} \text{ avec } [\mathrm{T}] = \left[\vec{t}_x \quad \vec{t}_y \quad \vec{t}_z\right] \tag{3.9}$$

Ensuite, on projète ces deux maillages dans le plan $oxy$ en imposant $z = 0$. Pour chaque nœud de $D_i$, on cherche dans quel élément de $C_i$ ce nœud se trouve par la condition (3.10) et on calcule la coordonnée $z$ de ce nœud par une interpolation linéaire (3.11) :

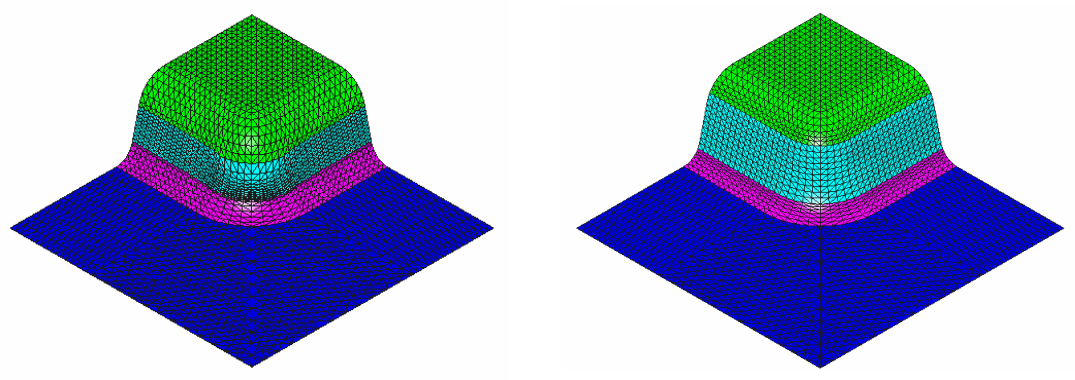
$$\Delta_{123} = \Delta_{12d} + \Delta_{23d} + \Delta_{31d} \tag{3.10}$$

$$z_d = (z_1 \Delta_{23d} + z_2 \Delta_{31d} + z_3 \Delta_{12d}) / \Delta_{123} \tag{3.11}$$

où $\Delta_{123}$ est l'aire absolue de l'élément défini par les nœuds 1, 2, 3 dans le maillage $C_i$, $d$ est un nœud dans le maillage $D_i$. Enfin, les cordonnées de chaque nœud de $D_i$ sont transformées à nouveau dans le repère global $XYZ$ :

$$\{X\} = [T]\{x\} \tag{3.12}$$

Les maillages de la boite carrée avant et après le rabattement sont présentés dans la figure 3.10, on constate une notable amélioration grâce à cette opération de rabattement.



Avant Après

Figure 3.10 Maillages avant et après le rabattement

## 3.3. Transfert de champs de contraintes et de déformations

On constate que les opérations de solution initiale et de relocalisation des nœuds ont une grande influence sur la convergence de l'algorithme statique implicite dans l'AI. Il est donc préférable d'effectuer d'abord ces opérations pour obtenir une solution approximative avant d'introduire la plasticité.

L'idée pour améliorer l'API est d'utiliser plusieurs configurations intermédiaires et d'effectuer un calcul inverse sur chacune en prenant l'état de déformations et de contraintes du pas précédent pour tenir compte de l'historique du chargement.

Le problème consiste à effectuer le transfert de champs entre deux maillages indépendants (celui à la fin du pas $n-1$ et celui à chaque itération $i$ du pas $n$). Les calculs inverses avec chacun des deux maillages doivent donner deux maillages différents sur le même flan initial (mêmes dimensions et même contour). C'est dans le flan initial où l'on peut établir un lien physique pour un point matériel entre les deux maillages. Par exemple, pour un point $p$ dans le flan initial, on peut trouver dans quel élément du maillage du pas $n-1$

(maillages de la pièce 3D et du flan plan) et dans quel élément du maillage du pas $n$ ce point est situé en utilisant une méthode rapide appelée «Localisation d'un point» qui sera présentée ci-après.

D'autres difficultés de ce transfert de champs viennent du fait que: a) les tailles d'éléments sont irrégulières dans ces maillages; b) les contraintes et les déformations sont constantes dans l'élément donc discontinus entre éléments. Cette discontinuité peut provoquer l'instabilité numérique donc la divergence. La technique suivante est utilisée pour obtenir un champ lisse et continu: les contraintes (ou déformations) à un nœud sont calculées en moyennant les contraintes de tous les éléments associés à ce nœud avec une pondération de surface (Figure 3.11):

$$v_n = \sum_{e=1}^{m} v^e A^e \Big/ \sum_{e=1}^{m} A^e \qquad (3.13)$$

où $v_n$ est une valeur de contrainte ou de déformation au nœud associé, $v^e$ est la valeur d'un élément adjacent, $A^e$ est l'aire de l'élément, $m$ est le nombre d'éléments associés à ce nœud.

Si le centre de gravité $p$ du maillage $n/i$ se trouve dans l'élément 123 du maillage $n-1$, les interpolations linéaires des valeurs nodales sont utilisées pour calculer les valeurs au point $p$ :

$$v_p = (v_1 A_{23p} + v_2 A_{31p} + v_3 A_{12p}) / A_{123} \qquad (3.14)$$

On procède au transfert de champs de déformations et de contraintes comme suit :

a) Au pas 1, on effectue un calcul classique d'AI (solution initiale, résolution élastique, relocalisation + élasticité, relocalisation + plasticité); à la convergence, les déformations et contraintes élémentaires sont obtenues ; dans le flan initial, ces quantités sont transformées dans le repère global, moyennées aux nœuds avec la pondération de surface et sauvegardées comme contrainte et déformation initiales pour le prochain pas.

b) Au pas 2, on effectue les opérations suivantes à chaque itération :

- On effectue un calcul inverse jusqu'à la convergence en élasticité (solution initiale, résolution élastique, relocalisation + élasticité),

- Pour obtenir les déformations et contraintes initiales dans un élément du pas 2, on cherche dans quel élément du pas 1 se trouve son centre de gravité et on calcule ses valeurs avec une interpolation linéaire (équation 3.14),
- On transforme les contraintes et les déformations du repère global au repère local élémentaire pour le calcul de la plasticité.

c) On répète les opérations ci-dessus jusqu'au dernier pas.

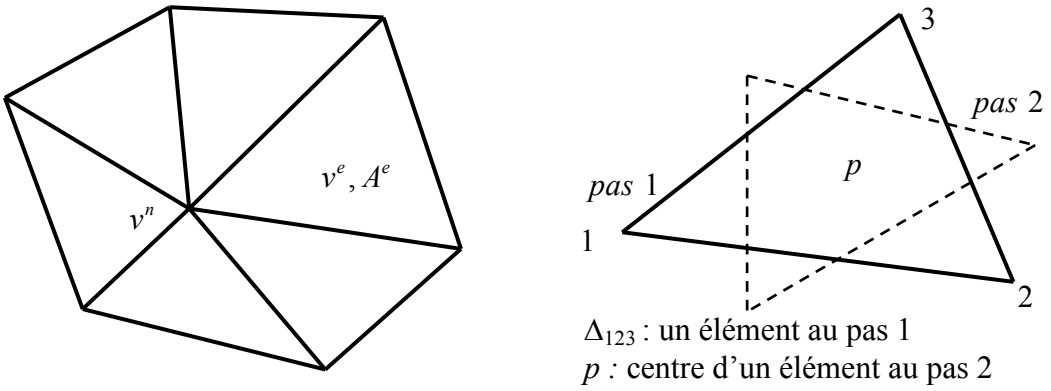



Figure 3.11 Assemblage des valeurs élémentaires et interpolations linéaires

## 3.4. Relocalisation de nœuds sur la pièce 3D

Dans l'Approche Inverse, le maillage en éléments finis doit être créé sur la pièce finale de forme connue, mais le contour d'une pièce emboutie est souvent inconnu et sera obtenu à la fin de l'emboutissage. Pour démarrer le calcul inverse, une technique de relocalisation de nœuds est proposée [Guo 90]. En prenant l'exemple de la boîte carrée, la procédure de relocalisation de nœuds s'effectue comme suit (Figure 3.12):

1) Le contour donné du flan initial $C_0$ est utilisé pour le contour supposé de la pièce finale $S_0$ qui sera modifié au cours d'itérations ;
2) Un contour du flan initial $C_i$ est obtenu par le calcul de l'AI ;
3) Ce contour du flan doit être confondu avec le contour du flan initialement donné $C_0$, pour cela on déplace les nœuds du contour externe $C_i$ au contour $C_0$ $(U_1, U_2, \cdots)$; en imposant le contour interne (le contour de la partie utile) immobile, les positions des nœuds sous serre-flan (entre les deux contours) sont déterminées par une résolution linéaire.

4) Les mêmes déplacements des nœuds s'effectuent aussi sur la partie sous serre-flan de la pièce 3D pour obtenir le vrai contour irrégulier de la pièce.
5) Cette opération de relocalisation de nœuds est répétée au cours d'itérations d'équilibre jusqu'à ce que le contour du flan obtenu par l'AI soit confondu avec le contour du flan initialement donné.

Lorsque l'avalement est faible, la relocalisation de nœuds restent dans la partie sous serre-flan souvent plane et horizontale; mais dans le cas d'un fort avalement, le bord de la tôle entre dans la matrice, une relocalisation de nœuds sur la pièce 3D doit être envisagée (non seulement sur la partie sous serre-flan comme 4), mais aussi sur la partie 3D). Dans notre nouveau modèle, le contour interne qui délimite la partie sous serre-flan dans l'ancienne méthode est choisi sur la pièce 3D, le remaillage est effectué dans la zone en dessous de ce contour (Figure 3.13).

Le problème consiste à trouver le parcours curviligne d'un point sur une surface 3D. Supposons que le déplacement d'un nœud initialement situé en $(X_0, Y_0, Z_0)$ dans le flan plan initial est $\langle U, V \rangle$. Pour déterminer sa position finale sur la pièce 3D, la démarche suivante est utilisée:

1) faire un plan vertical passant par le vecteur du déplacement $\langle U, V \rangle$;

2) trouver l'intersection de ce plan avec la pièce 3D;

3) la distance curviligne parcourue par ce point doit être égale à la longueur du vecteur de déplacement $\langle U, V \rangle$.

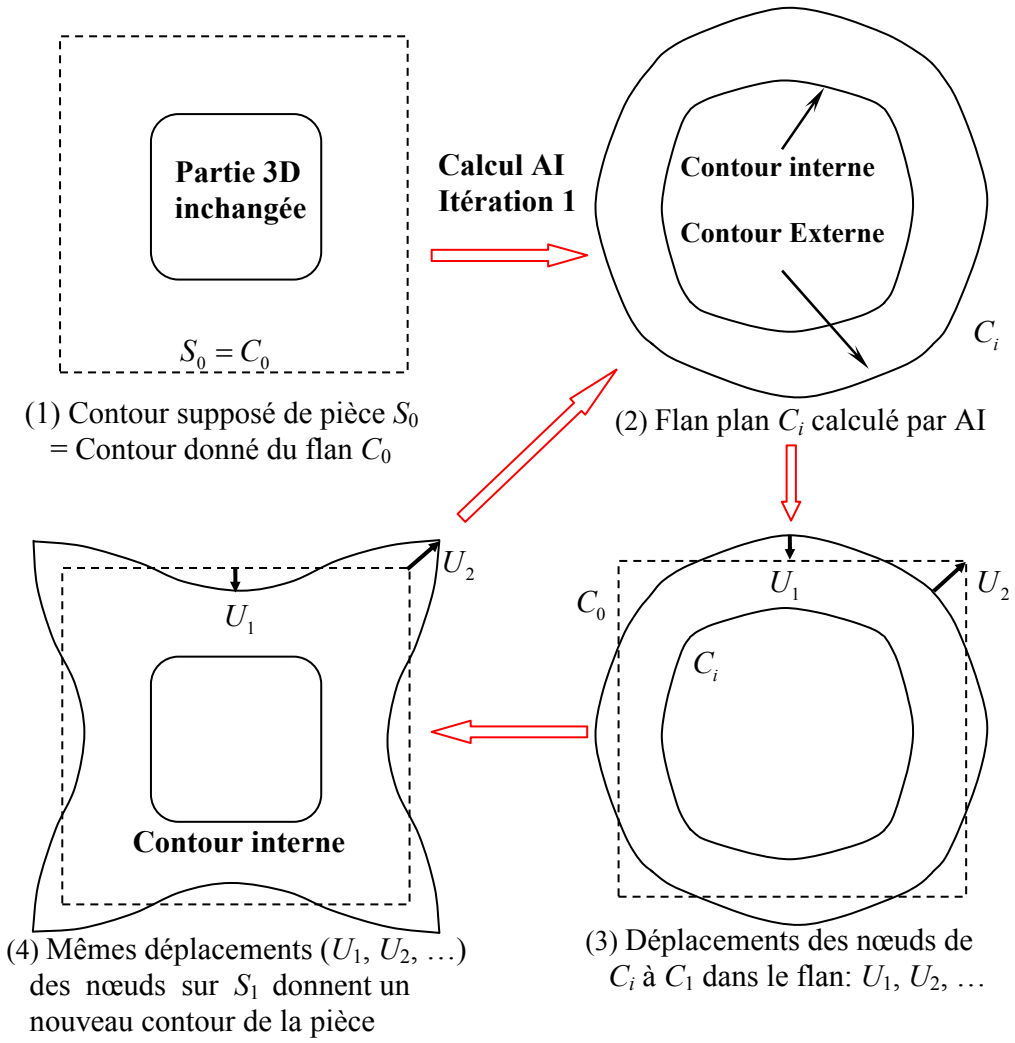



Figure 3.12 Relocalisation des nœuds sur la partie sous serre-flan

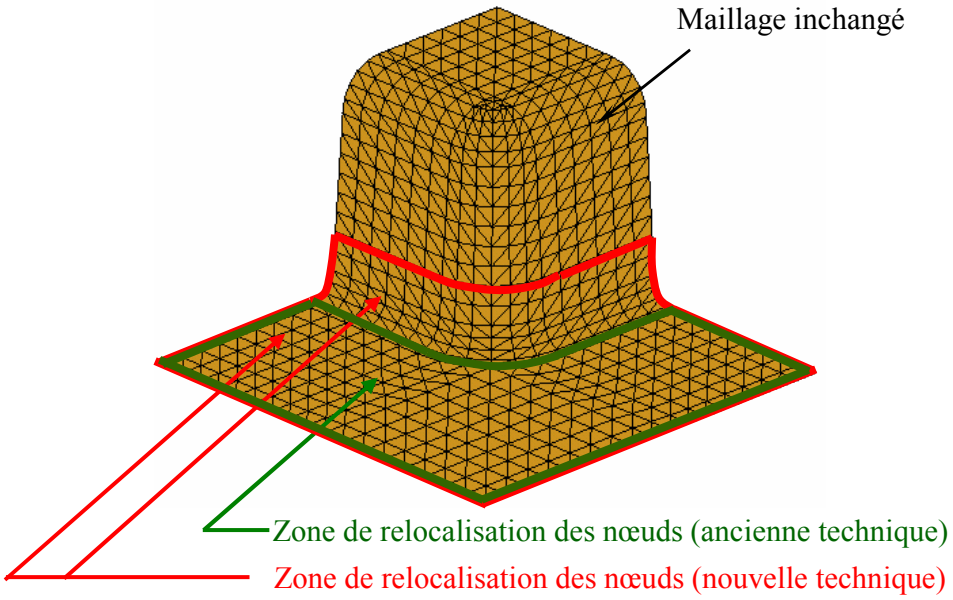



Figure 3.13 Relocalisation de nœuds sur la pièce 3D

### 3.4.1. Repère local suivant la direction du déplacement

Un repère local est établi suivant la direction $\theta$ du déplacement. La distance et les cosinus directeurs sont calculés comme suit :

$$L = \sqrt{U^2 + V^2}\ ;\ \cos\theta = \frac{U}{L}\ ;\ \sin\theta = \frac{V}{L} \tag{3.15}$$

Les coordonnées nodales de la pièce 3D (ayant le contour supposé couvrant la plus grande zone) sont transformées dans ce repère local par le passage suivant:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

**Liste des éléments concernés**

On établit la liste des éléments dans la zone d'intersection avec le segment $L$ pour éviter des calculs inutiles sur les éléments loin de la zone considérée. Comme indiqué dans la figure 3.14, à partir du point de départ $p$, nous utilisons la méthode suivante pour établir la liste des éléments:

1) Détermination du premier élément possédant le point $p$ et a un côté passant par le segment $L(pp')$. Cette démarche peut être effectuée facilement par détection d'intersection des côtés des éléments qui contiennent le point $p$ avec $L(pp')$.
2) Passage à l'élément suivant qui a le même côté traversé $L(pp')$ jusqu'à l'élément qui contient le point $p$.

Les éléments dans la zone bleue de la figure 3.14 sont bien dans la liste.

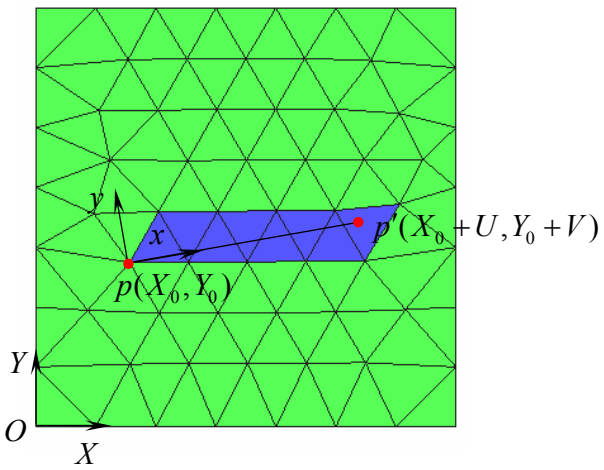



Figure 3.14 Relocalisation des nœuds sur la pièce 3D

### 3.4.2. Recherche des intersections de *x* avec les côtés des éléments

Pour chaque élément dans la liste, on cherche l'intersection de l'axe $x$ avec les 3 côtés ou leurs prolongements projetés dans le plan horizontal $XOY$ ($z = 0$). Si le côté 1-2 n'est pas parallèle à l'axe x ($y_1 \neq y_2$), on a :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{3.17}$$

Pour les autres côtés, on a des équations similaires à l'équation (3.17).

Pour distinguer qu'un point est situé sur un côté ou sur son prolongement (à l'extérieur du triangle), on compare l'aire du triangle avec la somme des 3 triangles (Figure 3.15): Si $\Delta_{123} = \Delta_{12t} + \Delta_{23t} + \Delta_{31t}$, alors le point est situé à l'intérieur de l'élément ou sur un côté ; Sinon le point est situé à l'extérieur du triangle ou sur le prolongement d'un côté.

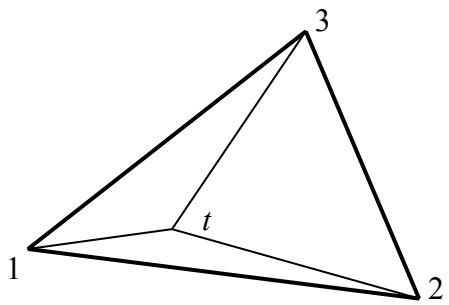



Figure 3.15 Détermination de position du point $t$

Cette méthode permet aussi de calculer la coordonnée verticale de ce point avec une interpolation linéaire :

$$z_t = (z_1\Delta_{23t} + z_2\Delta_{31t} + z_3\Delta_{12t}) / \Delta_{123} \tag{3.18}$$

### 3.4.3. Calcul de la longueur curviligne

Une fois les points d'intersection du maillage avec l'axe local $x$ déterminés, on tri $x_{t,i}$ et $z_{t,i}$ selon l'ordre croissant de $x_{t,i}$. On élimine $x_{t,i}$ et $z_{t,i}$ si $x_{t,i}$ est trop proche de $x_{t,i-1}$.

Le chemin curviligne que le point doit parcourir est l'intersection du plan vertical défini par $\langle U,V \rangle$ avec le maillage de la pièce 3D ; il est donc composé de segments droits. En

connaissant les coordonnées horizontales suivant $x$ et les coordonnées verticales suivant $Z$, on peut calculer facilement la longueur curviligne :

$$C_k = C_{k-1} + \sqrt{(S_k - S_{k-1})^2 + (Z_k - Z_{k-1})^2} \tag{3.19}$$

où $S_k = \sqrt{(X_k - X_{k-1})^2 + (Y_k - Y_{k-1})^2}$ .

Si on trouve que la distance parcourue du point est entre deux extrémités d'un segment, une interpolation linéaire permet de calculer sa position comme suit :

$$Si\ C_{k-1} < L < C_k$$

$$Alors \begin{cases} S_u = S_{k-1} + (L - C_{k-1})\dfrac{S_k - S_{k-1}}{C_k - C_{k-1}} \\ Z_u = Z_{k-1} + (L - C_{k-1})\dfrac{Z_k - Z_{k-1}}{C_k - C_{k-1}} \end{cases} \tag{3.20}$$

La coordonnée horizontale suivant $S$ doit être retransformée dans le repère global $OXY$ :

$$\begin{cases} X_u = S_u \cos\theta + X_0 \\ Y_u = S_u \sin\theta + Y_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Cette technique de relocalisation de nœuds sur la pièce 3D a largement augmenté la performance de l'API.

## 3.5. Localisation d'un point dans une zone plane et 3D triangularisée

La question qu'on se pose souvent en calcul numérique est de savoir dans quel élément se trouve un point donné. L'exemple typique est de savoir si un point donné est dans quelle zone des outils : la zone libre, la zone du poinçon ou la zone de la matrice. Pour relocalisation des nœuds sur une surface 3D ou pour le transfert des champs, on a également besoin de localiser l'élément contenant le point donné. Plusieurs méthodes ont été proposées pour localiser un point dans un maillage 2D discrétisé en triangle: « Diviser et Conquer » [Dwyer 87], « Graphiques Acycliques Directes » [Devroye 98] et Stratégie de « Walk-through » [Guibas 85]. Parmi ces méthodes, la méthode « Walk-through » est rapide et simple. Elle n'a besoin que d'un accès direct de deux triangles avoisinants par leur côté commun. L'information à cet accès direct peut s'obtenir facilement par la connectivité des éléments.

L'idée est de partir d'un triangle quelconque, on traverse un côté et on arrive à un élément voisin, on répète ainsi l'opération pour trouver le triangle contenant le point donné. Les différentes possibilités de choix pour traverser d'un côté et passer dans un triangle adjacent conduisent à différentes méthodes de résolution comme par exemple : « Test d'intersection », « Intelligente Recherche Trigonométrique » (IRT) et « Recherche par Coordonnées Barycentriques » [Sundareswara 03] (RCB). Dans ce travail, nous avons amélioré les deux dernières méthodes pour qu'elles soient applicables dans des conditions spécifiques et dans un domaine de forme très complexe.

### 3.5.1. Idées générales

Afin de simplifier la description du problème, nous nous limitons sur un domaine 2D triangularisé et supposons que les trois noeuds de chaque triangle sont définis suivant le sens trigonométrique.

**1) Déterminant d'un triangle et coordonnées barycentriques**

Supposons qu'un triangle $ABC$ est directionnel, c'est-à-dire défini par l'ordre de ses trois nœuds; le déterminant du triangle est défini comme suit:

$$Det(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \tag{3.22}$$

Le déterminant est positif lorsque les trois noeuds de triangle $ABC$ sont rangés dans le sens trigonométrique, sinon il est négatif. Les coordonnées barycentriques $(r, s, t)$ du point $P$ par rapport au triangle $ABC$ peut s'exprimer par le rapport de deux déterminants (Figure 3.16):

$$r = \frac{Det(PBC)}{Det(ABC)},\ s = \frac{Det(PCA)}{Det(ABC)},\ t = \frac{Det(PAB)}{Det(ABC)} \tag{3.23}$$

Avec les définitions ci-dessus, nous trouvons que les coordonnées barycentriques sont des déterminants normalisés. Le signe de la coordonnée barycentrique $r$ du point $P$ est négatif (noté "–") lorsque le point $P$ se trouve à droite du côté directionnel $AB$ ; positif (noté "+") lorsqu'il est à gauche, zéro lorsqu'il est sur la ligne $AB$ (noté "+" également). Dans la figure 3.16, nous constatons que le point $P$ est dans le triangle $ABC$ si les signes de ses coordonnées barycentriques sont tous positifs. Et que les signes "$---$" n'existent pas.

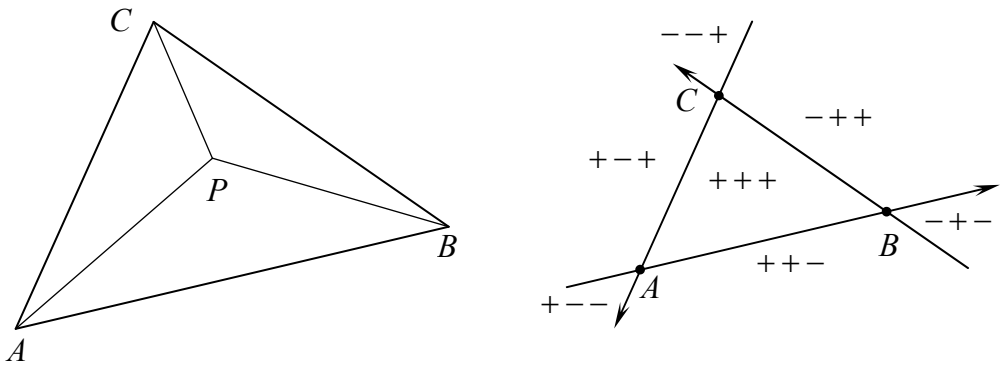
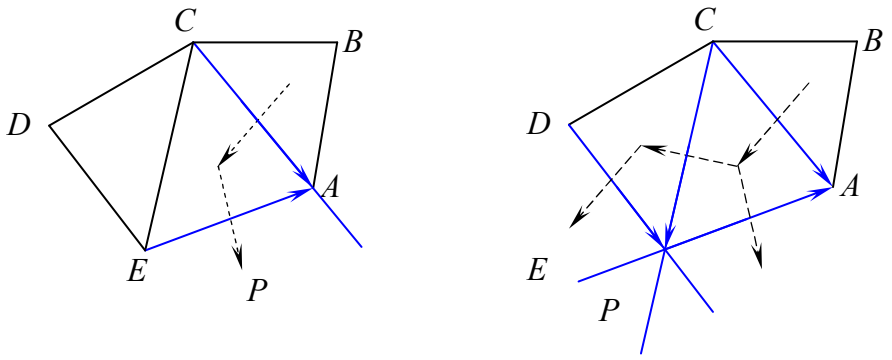



Figure 3.16 Coordonnées Barycentriques et leurs signes

**2) Intelligente Recherche Trigonométrique (IRT)**




a) Un seul itinéraire de recherche b) Bifurcation de l'itinéraire de recherche

Figure 3.17 Itinéraire de recherche de IRT

Supposons que l'on commence la recherche à partir du triangle $ABC$ (Figure 3.17). L'IRT [Guibas 85] calcule le déterminant du triangle composé du côté $CA$ et du point $P$ donné et la compare avec celui du triangle $ABC$. Si les signes des deux déterminants sont opposés, on traverse le côté $CA$. Cette opération se répète jusqu'à ce qu'on trouve le triangle qui contient le point $P$. Géométriquement, on traverse toujours le côté à droite duquel se trouve le point donné $P$. Cette méthode est en effet une *stratégie de côté droit*. Lorsque le point $P$ se trouve à droite de deux côtés d'un triangle à la fois, une bifurcation d'itinéraire de recherche existe.

**3) Recherche par Coordonnées Barycentriques (RCB)**

Dans cet algorithme [Sundareswara 03], on commence à partir d'un triangle quelconque et on traverse les triangles vers le triangle contenant le point donné en utilisant la stratégie suivante:

a) Calculer les coordonnées barycentriques $(r,s,t)$ du point $P$ par rapport au

triangle actuel $ABC$.

b) Traverser le côté déterminé par les deux plus larges coordonnées barycentriques. Par exemple dans la figure 3.17, $r(PBC) > 0$, $s(PCA) < 0$, $t(PAB) > 0$, on traverse le côté $CA$.

c) Terminer lorsque toutes les coordonnées barycentriques sont positives.

Géométriquement cette méthode est aussi une *stratégie de côté droit* avec l'information additionnelle sur les coordonnées barycentriques.

**4) Condition d'application d'IRT et RCB**

**Analyse de l'itinéraire de recherche et les conditions d'application**

D'après les définitions ci-dessus, les signes des coordonnées barycentriques $(r, s, t)$ sans ordre d'un point peuvent être définis suivant trois cas par rapport à leur position:

a) $+,+,+$, le point est dans le triangle

b) $-,+,+$, le point est à l'extérieur du triangle

c) $-,-,+$, le point est à l'extérieur du triangle

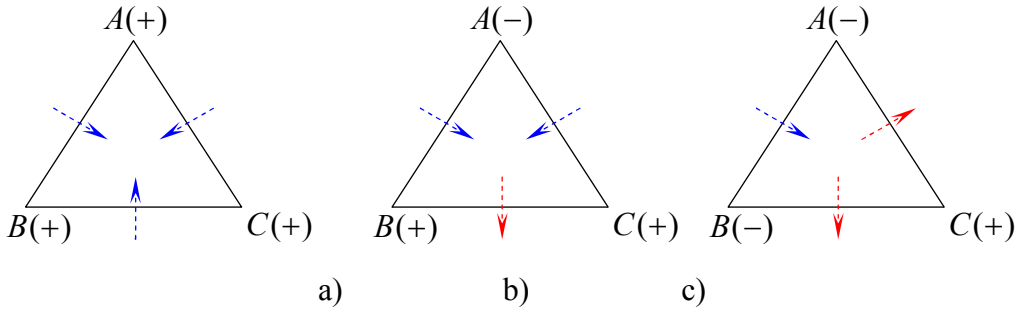



Figure 3.18 "entrer" or "sortir" par les signes des coordonnées barycentriques

Comme indiqué en figure 3.18, le signe "$+$" indique que l'itinéraire de recherche "entre" dans un triangle ; le signe "$-$"indique que l'itinéraire "sort" d'un triangle. Donc le cas a) $+,+,+$ représente la fin de l'itinéraire de recherché parce qu'il n'a pas de possibilité de "sortir"; le cas b) $-,+,+$ et le cas c) $-,-,+$ ont tous les deux la possibilité de "entrer" et de "sortir", ceci signifie que l'itinéraire de recherche peut continuer.

On en déduit donc la condition d'application d'IRT et de RCB comme suit: dans un domaine convexe, lorsqu'un point est dans un triangle, c'est-à-dire, cas a) $+,+,+$ existe, l'itinéraire de recherche peut être trouvé si *une boucle d'itinéraire n'existe pas* ; dans un domaine concave ou troué, l'itinéraire de recherche n'atteint pas la bordure du domaine.

**5) Exemple de boucle d'itinéraire dans IRT et dans RCB**

Considérons un sous domaine plan qui possède une discrétisation circulaire en triangles (Figure 3.19). Supposons que les points $P_1, P_2, P_3$ et $Q_1, Q_2, Q_3$ se trouvent sur les deux cercles $C_1$ et $C_2$ ayant le même centre $O$, respectivement. Les triangles $P_2P_3Q_2$ et $P_3Q_3Q_2$ s'obtiennent par une rotation d'un angle $\theta = 2\pi / n$ de $P_1P_2Q_1$ et de $P_2Q_2Q_1$, respectivement. De cette façon, le sous domaine entre les cercles $C_1$ et $C_2$ est discrétisé par $n$ ($n > 3$) groupes de triangles (2 triangles par groupe), chaque groupe est similaire l'un à l'autre.

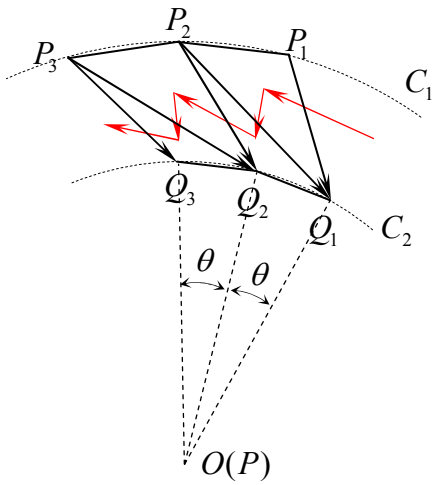



Figure 3.19 Domaine circulaire discrétisé en triangles

Supposons que le point $O$ est bien le point donné $P$. Évidemment le point $P$ se trouve à droite des lignes directionnelles $P_2Q_1$ et $P_2Q_2$. En utilisant *la stratégie de côté droit*, l'itinéraire peut former une boucle! Ceci veut dire que le point $P$ ne peut pas être trouvé. Donc un choix effectué au hasard de l'itinéraire dans IRT n'est pas sans condition additionnelle. En effet, les rayons des cercles $C_1$ et $C_2$ ainsi que l'orientation des côtés $P_nQ_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) peuvent être variables, l'itinéraire de recherche peut facilement satisfaire la condition de la méthode *RCB* "traverser le côté déterminé par les deux plus larges coordonnées barycentriques.". Comme montré dans la figure 3.19, la distance entre le point $P_2$ et la ligne $PQ_2$ est plus grande que celle entre le point $Q_1$ et la ligne $PQ_2$. Pour le triangle $P_2Q_2Q_1$, les coordonnées barycentriques ($r_{P_2}, s_{Q_2}, t_{Q_1}$) du point $P$ sont comme suit:

$$r_{P_2} = \frac{Det(PQ_2Q_1)}{Det(P_2Q_2Q_1)},\ s_{Q_2} = \frac{Det(PQ_1P_2)}{Det(P_2Q_2Q_1)},\ t_{Q_1} = \frac{Det(PP_2Q_2)}{Det(P_2Q_2Q_1)}.$$

Comme $Det(PQ_1P_2) > 0 > Det(PQ_2Q_1) > Det(PP_2Q_2)$, donc $s_{Q_2} > r_{P_2} > t_{Q_1}$. On traverse le côté $P_2Q_2$ au lieu du côté $Q_2Q_1$, la $RCB$ ne fonctionne pas dans ce cas-là.

### 3.5.2. Amélioration de Stratégie de Côté Droit

Les deux méthodes, IRT et RCB, fonctionnent avec une stratégie de côté droit. Cependant, cette stratégie n'est plus valable en cas de boucle. D'ailleurs, elle ne peut traiter qu'un domaine convexe, mais pas un domaine concave ou troué. Mais les pièces industrielles sont souvent d'une forme complexe, la plupart des emboutis sont de forme concave. Afin que cette stratégie adapte aux cas ci-dessus, nous avons apporté des améliorations suivantes:

**Vocabulaire:**

a) *Directions principales* : les signes positifs des coordonnées barycentriques définissent les directions principales. Un triangle peut en avoir une ou deux.

b) *Directions supplémentaires* : les signes négatifs des coordonnées barycentriques définissent les directions supplémentaires. Un triangle peut en avoir une ou deux également.

c) *Côtés d'impasses* : les côtés qui se trouvent sur la bordure du domaine ne permettent pas à l'algorithme de trouver le triangle suivant.

**Nouvelle méthode pour améliorer la performance de recherche**

La Stratégie du Côté Droit a des difficultés à traiter un domaine concave ou troué, ou en cas de boucle d'un itinéraire de recherche. Nous proposons une nouvelle méthode qui permet de revenir dans l'élément précédent afin d'exploiter d'autres directions de recherche, d'autre itinéraires de recherche. Les étapes suivantes sont utilisées:

a) Marquer toutes les directions principales et supplémentaires « Actives ».

b) Choisir un élément quelconque comme élément de départ de recherche.

c) Traverser un côté du triangle actuel dans l'ordre suivant: la première direction principale, la seconde direction principale si elle existe, la première direction supplémentaire et la seconde direction supplémentaire si elle existe. Seulement quand la recherche a échoué dans la direction précédente, (marquée "inactive"), la direction suivante est utilisée.

d) Si tous les côtés (sauf le côté d'entrer) du triangle actuel sont "inactifs" ou sont des "impasses", nous marquons la direction enter comme "inactive" et reculons dans le triangle précédent.

e) On arrête la recherche quand le triangle contenant le point donné est trouvé ou que tous les triangles sont visités.

Remarque: dans l'étape c), quand la direction actuelle est encore "active", les autres directions ne sont pas considérées comme directions secondaires ou supplémentaires, donc les coordonnées barycentriques correspondantes ne sont pas calculées afin de gagner du temps CPU.

**Choix de l'élément de départ**

Dans l'étape b), un élément quelconque peut être choisi comme l'élément de départ. Afin d'accélérer la vitesse de la recherche, il vaut mieux choisir un élément près du point $P$. Une grille de $n \times n$ pour le cas 2D (Figure 3.20) est utilisée dans la phase de préparation : dans chaque cellule un élément est choisi pour la représenter, et l'élément dans la cellule qui contient le point $P$ est alors choisi comme élément de départ. S'il n'y pas d'élément dans la cellule qui contient le point $P$, on s'arrête sans faire de recherche.

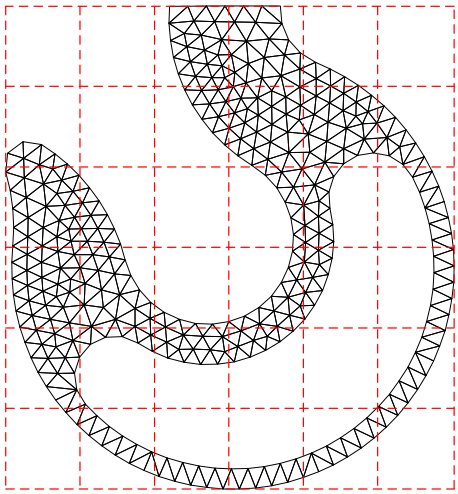


Figure 3.20 Grille choisie pour une localisation approximative du point $P$

### 3.5.3. Extension sur un maillage surfacique 3D

L'algorithme ci-dessus est amélioré pour qu'il s'adapte au problème de localisation d'un point donné sur un maillage 3D surfacique. Des modifications sont apportées sur les définitions des directions principales et des directions supplémentaires dans l'espace et pour la condition de fin de recherche.

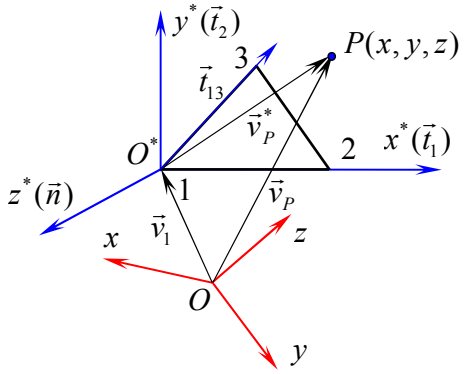



Figure 3.21 Projection du point donné $P$ sur le plan du triangle actuel

Dans le triangle $\Delta_{123}$, un repère local est établi comme suit (Figure 3.21):

- Le noeud 1 est pris pour l'origine,
- La direction $x^*(\vec{t}_1)$ est déterminée par le vecteur $\overrightarrow{12}$,
- La direction $z^*(\vec{n})$ reste perpendiculaire au triangle, soit $\vec{n} = \vec{t}_1 \times \vec{t}_{13} / \left\| \vec{t}_1 \times \vec{t}_{13} \right\|$,
- La direction $y^*(\vec{t}_2)$ est orthogonale aux axes $x^*$ et $z^*$, soit $\vec{t}_2 = \vec{n} \times \vec{t}_1$,
- Le point donné $P$ est projeté dans le plan de l'élément triangle $\Delta_{123}$ actuel. Ses coordonnées dans le repère local peuvent être calculées par une transformation du repère global en repère local:

$$\vec{v}_P^* = [T](\vec{v}_P - \vec{v}_1)$$

avec $[T] = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} \\ t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$.

Les directions principales et les directions supplémentaires sont ensuite déterminées par les signes des coordonnées barycentrique du point $P$ dans le plan $x^*O^*y^*$.

Une nouvelle condition de fin de recherche est proposée: Les signes des coordonnées barycentriques du point $P$ sont "+++" et le point $P$ se trouve dans le plan $x^*O^*y^*$, soit $z^*_P = 0$.

### 3.5.4. Résultats

Tout d'abord, un domaine circulaire discrétisé par des triangles est présenté (Figure. 3.22). La Stratégie de Côté Droit traditionnelle peut former un itinéraire clos infini. Notre

nouvelle méthode a bien évité ce problème. Comme indiqué dans la figure 3.22, lorsque l'itinéraire de recherche visite l'élément de départ la deuxième fois, la recherche du côté gauche est activée. Celle dernière permet de quitter la boucle close et arrive au triangle contenant le point donné.

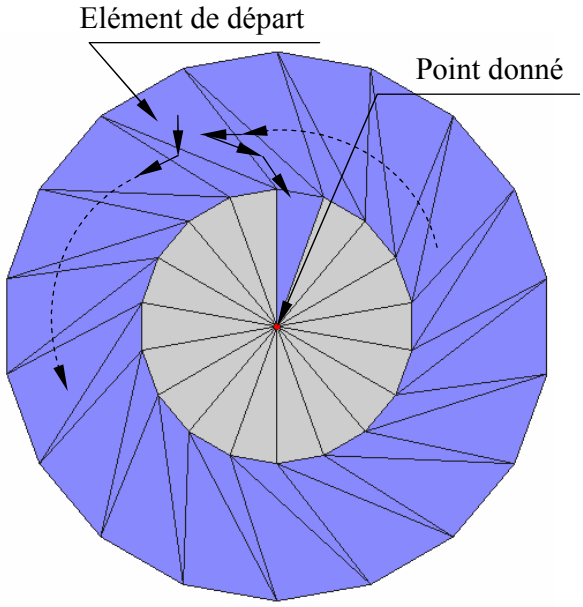
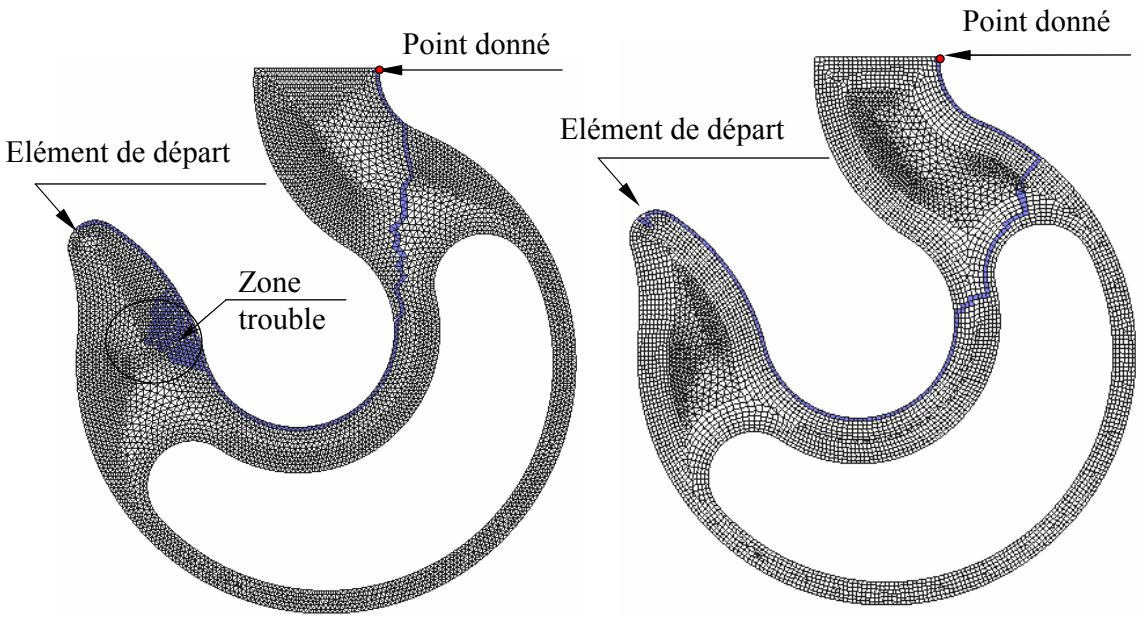



Figure 3.22 Localisation d'un point dans un domaine circulaire

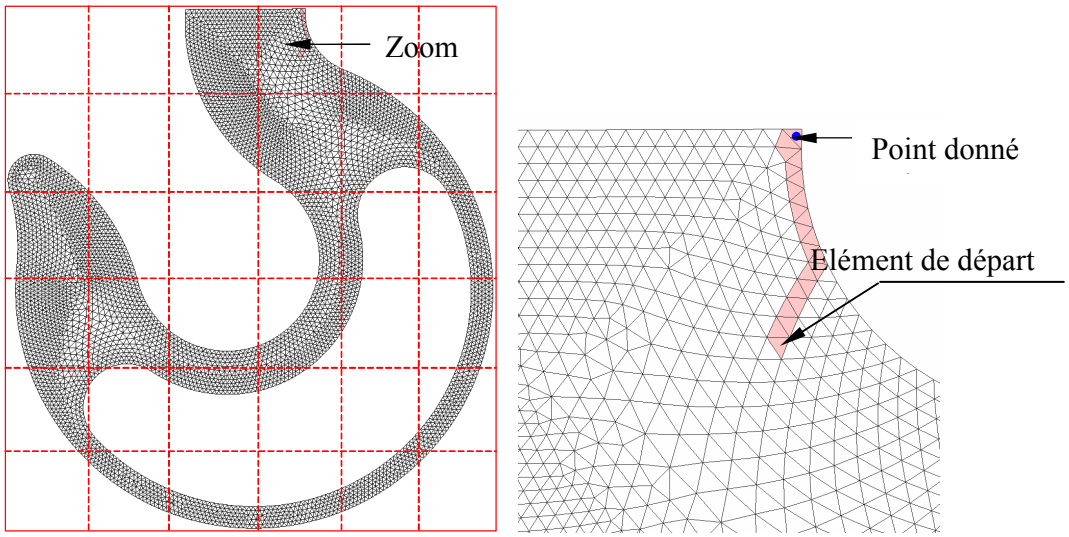
Le deuxième exemple est la localisation d'un point donné dans un domaine non convexe (Figure 3.23). Afin de tester la robustesse de notre méthode, un élément loin du point donné est choisi comme l'élément de départ de recherche. Un maillage en triangles et un maillage mixte (en triangles et quadrangles) sont traités. Nous observons que le chemin de recherche reste principalement sur la bordure de la partie concave et le chemin est direct dans la partie convexe. Quand la stratégie de côté droit a échoué, la deuxième direction de recherche est active. Des boucles locales (zones troubles dans Figure 3.23-a) apparaissent à cause du choix par hasard de la direction principale et la direction supplémentaire; en conséquence, l'itinéraire de recherche peut ne pas être le plus court. Mais comme le calcul des coordonnées barycentriques n'est pas fait, le temps de CPU est largement réduit.




a) Maillage en triangles b) Maillage mixte (triangles et quadrangles)

Figure 3.23 Localisation d'un point donné dans un domaine complexe

La figure 3.24 montre le résultat en utilisant des grilles de $6\times6$. La longueur du chemin de recherche est largement réduite. Par ailleurs, si le point donné n'est pas dans le domaine, la recherché termine immédiatement.




(a) Grilles en $6\times6$ (b) Zoom dans la grille

Figure 3.24 Chemins de recherche en utilisant des grilles

La figure 3.25 présentent deux cas complexes 3D (concave, troué …). L'élément de départ et le point donné se trouvent sur les extrémités de la pièce. Nous observons que notre méthode permet la localisation d'un point dans un domaine complexe.

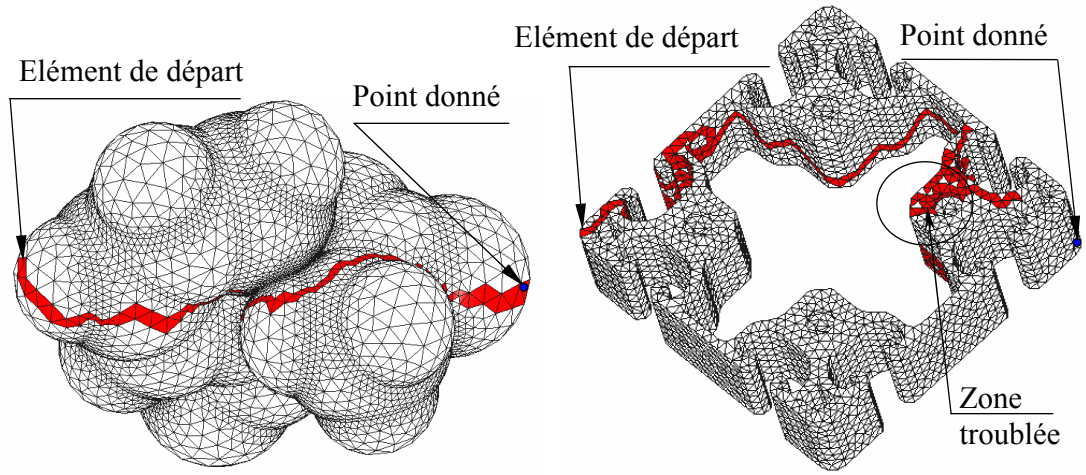



Figure 3.25 Localisation d'un point dans un domaine 3D

## 3.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la nouvelle approche dite « pseudo-inverse » (API). Cette approche consiste à introduire un certain nombre de configurations intermédiaires « réalistes » de manière à mieux approcher l'histoire des déformations tout en gardant la rapidité de l'approche inverse. Trois aspects particuliers sont développés dans ce chapitre; (i) la construction des configurations intermédiaires, (ii) le transfert des champs (déformations et contraintes) entre les maillages de deux configurations successives et enfin (iii) l'algorithme d'intégration de la loi de comportement.

Deux méthodes ont été proposées pour obtenir les maillages de ces configurations intermédiaires: la méthode de « minimisation de longueur » et la méthode de « minimisation de surface ». Une méthode de rabattement, qui améliore sensiblement la régularité du maillage de la configuration intermédiaire, a été réalisée. Le second point abordé dans ce chapitre concerne le transfert des champs de contraintes et de déformations entre deux configurations intermédiaires successives. Ces transferts ont mis en évidence la nécessité de définir une méthode de localisation rapide d'un élément appartenant dans le maillage. Le troisième point abordé concerne la relocalisation des nœuds sur une pièce 3D. La méthode de relocalisation utilisée dans l'AI ne concerne que la partie de la tôle sous serre-flan, elle est donc 2D. Nous avons apporté une modification afin de pouvoir traiter le cas où l'avalement de la matière est important, c'est-à-dire que toute ou une partie du contour du flan entre dans la matrice. La relocalisation des nœuds sur une surface 3D a été effectuée par l'intermédiaire d'une méthode utilisant la longueur curviligne que chaque point doit parcourir. Dans la

dernière partie de ce chapitre, la localisation d'un point donné dans un maillage 3D a été réalisée. Basée sur les méthodes IRT et RCB, appartenant à une stratégie dite de « côté droit » et qui peuvent échouer en cas de domaine concave ou troué, nous avons proposé une modification de ces deux méthodes afin de s'adapter au cas du dessus. La vitesse de recherche peut aussi être augmentée par un choix judicieux de l'élément de départ de la recherche. Enfin, une extension de la méthode de recherche au cas d'un maillage surfacique 3D en triangles a été réalisée. L'efficacité de la méthode de recherche est démontrée sur différents domaines 2D et 3D complexes, concaves, convexes et troués.

# Chapitre 4 Nouveaux Algorithmes d'Intégration de Plasticité Couplé avec Endommagement

## 4.1. Modèle d'endommagement en déformation

Le phénomène d'endommagement est un problème dépendant du chemin de déformation, ainsi l'Approche Inverse n'est pas adaptée pour la simulation de l'endommagement dans l'emboutissage. L'Approche Pseudo Inverse avec un couplage de plasticité et d'endommagement a été développée pour palier cet inconvénient, dans le cadre du projet « Simul-Endo ». Un modèle appelé « Modèle d'endommagement en déformation » proposé par Lemaitre et Chaboche [Lemaître 1996] a été implanté dans l'API.

Le potentiel d'endommagement $\varphi_D^*$ est choisi en fonction du taux de restitution d'énergie élastique $(-Y)$, ainsi le taux d'endommagement $\dot{D}$ peut être écrit comme suit pour les matériaux avec écrouissage isotrope et endommagement isotrope :

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} = \left(\frac{-Y}{S_0}\right)^{s_0} \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{4.1}$$

$$-Y = \frac{\sigma_{\mathrm{eq}}^2}{2E(1-D)^2}\left[\frac{2}{3}(1+\nu)+3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\right)^2\right] \tag{4.2}$$

où $\dot{\lambda}$ est le taux de multiplicateur d'endommagement, $s_0$ et $S_0$ les coefficients du matériau et de la température, $\sigma_{\mathrm{eq}}$ la contrainte équivalente, $\sigma_{\mathrm{H}}$ la contrainte hydrostatique, $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ le taux de déformation plastique équivalente, $E$ le module d'Young, $\nu$ le coefficient de Poisson.

Deux hypothèses sont retenues pour obtenir ce modèle d'endommagement en déformation :

- La saturation de l'écrouissage après le seuil d'endommagement donnant une loi parfaitement plastique $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = K$ ,
- L'hypothèse du chargement proportionnel donnant une triaxialité constante $\sigma_{\mathrm{H}} / \sigma_{\mathrm{eq}}$ .

En introduisant le seuil d'endommagement $\varepsilon_{\mathrm{D}}$ , la déformation plastique équivalente et la valeur d'endommagement $D_{\mathrm{C}}$ à la rupture, (disponible expérimentalement [Lemaître 1996]), le modèle simplifié d'endommagement en déformation peut être obtenu sous forme de taux ou sous forme totale :

$$\dot{D} = \frac{D_{\mathrm{c}}}{\varepsilon_{\mathrm{R}} - \varepsilon_{\mathrm{D}}} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\right)^2 \right] \dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \tag{4.3}$$

$$D = \frac{D_{\mathrm{c}}}{\varepsilon_{\mathrm{R}} - \varepsilon_{\mathrm{D}}} \left( \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\right)^2 \right] \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \varepsilon_{\mathrm{D}} \right) \tag{4.4}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \left( \left\{ \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \right\}^{\mathrm{T}} \left[ P \right]^{-1} \left\{ \dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \right\} \right)^{1/2} \; ; \quad \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} > \varepsilon_{\mathrm{D}} \tag{4.5}$$

Les equations (4.3) et (4.4) représentent les deux différentes méthodes du calcul d'endommagement :

Endommagement couplé: l'endommagement est pris en compte dans la procédure de calcul, ses effet sont couplés avec la plasticité et joue un rôle important dans le modélisation du formage.

Endommagement non couplé: l'évaluation de l'endommagement est effectué à la fin du calcul comme post-traitement. Il n'y a pas d'influence sur les résultats.

La formule de l'endommagement sous forme totale (équation 4.4) a été utilisée dans l'AI (non couplé) [Guo 02, Cherouat 04]. L'équation sous forme de taux (équation 4.3) est implantée dans l'API (couplé). L'API garde la possibilité de l'endommagement non couplé, également.

## 4.2. Equations constitutives du modèle de plasticité-endommagement couplées

Dans l'AI, la théorie de déformation plastique est utilisée pour obtenir une loi intégrée. Dans l'API, la théorie d'écoulement plastique doit être utilisée pour tenir compte de l'historique du chargement.

Dans cette étude, les hypothèses des contraintes planes et de l'écrouissage isotrope sont retenues. Le critère de plasticité de Hill tenant compte de l'endommagement est écrit comme suit :

$$f = \frac{\sigma_{\mathrm{eq}}}{1-D} - \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}) = 0 \tag{4.6}$$

avec $\sigma_{\mathrm{eq}} = (\{\sigma\}^{\mathrm{T}}[P]\{\sigma\})^{1/2}$ , $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})$ est la courbe de traction uniaxiale, $[P]$ est une matrice constante définie par les coefficients d' anisotropie suivants:

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-\bar{r}}{1+\bar{r}} & 0 \\ \dfrac{-\bar{r}}{1+\bar{r}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(1+2\bar{r})}{1+\bar{r}} \end{pmatrix}, \ \bar{r} = \frac{1}{4}(r_0 + 2r_{45} + r_{90})$$

La loi de normalité permet d'obtenir le taux de déformation plastique et le taux de déformation plastique équivalente :

$$\{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x^{\mathrm{p}} \\ \dot{\varepsilon}_y^{\mathrm{p}} \\ \dot{\gamma}_{xy}^{\mathrm{p}} \end{Bmatrix} = \dot{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} = \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)\sigma_{\mathrm{eq}}}[P]\{\sigma\} = \frac{\dot{\lambda}}{(1-D)^2\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}})}[P]\{\sigma\} \tag{4.7}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \left(\{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\}^{\mathrm{T}}[P]^{-1}\{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\}\right)^{1/2} = \left(\frac{\dot{\lambda}\{\sigma\}^{\mathrm{T}}[P]^{\mathrm{T}}}{(1-D)\sigma_{\mathrm{eq}}}[P]^{-1}\frac{\dot{\lambda}[P]\{\sigma\}}{(1-D)\sigma_{\mathrm{eq}}}\right)^{1/2} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \tag{4.8}$$

## 4.3. Deux algorithmes efficaces d'intégration de plasticité

Pour résoudre les équations de plasticité-endommagement couplées (équation 4.6) et obtenir le multiplicateur plastique $\Delta\lambda$ et la variable d'endommagement $D$, un processus de résolution itératif doit être envisagé. L'algorithme du Retour Radial proposé par Simo et Taylor [Simo 1986] est considéré comme une méthode très efficace.

Cet algorithme a des avantages importants pour les modèles constitutifs avec une seule surface d'écoulement. Il consiste à faire une prédiction élastique et des corrections plastiques. Pour diminuer le nombre d'inconnues et le degré de non linéarité, nous prenons la valeur d'endommagement $D$ connue à l'itération précédente et ainsi nous obtenons une équation non linéaire avec le multiplicateur $\Delta\lambda$ comme seule inconnue. La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre ces équations constitutives non linéaires.

Dans cette partie, nous présentons d'abord la formulation de l'algorithme du retour radial, ensuite nous proposons deux nouveaux algorithmes : l'Algorithme Scalaire Direct et l'Algorithme de $\gamma$-Retour Radial qui sont tous basés sur l'algorithme du retour radial et qui permettent d'accélérer considérablement l'intégration de plasticité.

### 4.3.1. Algorithme du retour radial (ARR)

Le taux de déformation peut être décomposé en une partie élastique et une partie plastique :

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\} + \{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\} \tag{4.9}$$

La loi de comportement élastique couplée avec l'endommagement est donnée par :

$$\{\sigma\} = (1-D)[H_{\mathrm{e}}]\{\varepsilon^{\mathrm{e}}\} \tag{4.10}$$

avec $[H_{\mathrm{e}}] = \dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$

où $[H_{\mathrm{e}}]$ est la matrice constitutive élastique, $\nu$ est le coefficient de Poisson.

L'équation (4.10) peut s'écrire sous forme de taux:

$$\{\dot{\sigma}\} = (1-D)[H_{\mathrm{e}}]\{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}\} - \dot{D}[H_{\mathrm{e}}]\{\varepsilon^{\mathrm{e}}\} \tag{4.11}$$

En introduisant les équations (4.9) et (4.10) dans (4.11), on a

$$\{\dot{\sigma}\} = (1-D)[H_{\mathrm{e}}](\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\}) - \{\sigma\}\frac{\dot{D}}{1-D} \tag{4.12}$$

or à partir de les équations (4.3) et (4.8), on a:

$$\dot{D} = \frac{\hat{Y}}{1-D}\dot{\lambda} \text{ avec } \hat{Y} = \frac{D_{\mathrm{c}}}{\varepsilon_{\mathrm{R}} - \varepsilon_{\mathrm{D}}}\left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_{\mathrm{H}}}{\sigma_{\mathrm{eq}}}\right)^2\right] \tag{4.13}$$

avec les équation (4.7), (4.12) et (4.13), nous pouvons exprimer le taux de contrainte en fonction du taux du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ :

$$\{\dot{\sigma}\} = (1-D)[H_{\mathrm{e}}]\{\dot{\varepsilon}\} - [H_{\mathrm{e}}]\frac{\dot{\lambda}}{\sigma_{\mathrm{eq}}}[P]\{\sigma\} - \frac{\hat{Y}\dot{\lambda}}{(1-D)^2}\{\sigma\} \tag{4.14}$$

ou

$$\{\dot{\sigma}\} = (1-D)[H_{\mathrm{e}}]\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda}\left(\frac{[H_{\mathrm{e}}][P]}{\sigma_{\mathrm{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D)^2}[I]\right)\{\sigma\} \tag{4.15}$$

Le vecteur de contrainte à l'instant $n+1$ peut être exprimé sous une forme incrémentale :

$$\{\sigma_{n+1}\} - \{\sigma_n\} = (1-D_{n+1})[H_{\mathrm{e}}]\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\lambda\left(\frac{[H_{\mathrm{e}}][P]}{\sigma_{\mathrm{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D_{n+1})^2}[I]\right)\{\sigma_{n+1}\} \tag{4.16}$$

Hypothèse: on remplace $1-D_{n+1}$ par $1-D_n$ (décalage d'un pas)

$$\{\sigma_{n+1}\} - \{\sigma_n\} = (1-D_n)[H_{\mathrm{e}}]\{\Delta\varepsilon\} - \Delta\lambda\left(\frac{[H_{\mathrm{e}}][P]}{\sigma_{\mathrm{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D_n)^2}[I]\right)\{\sigma_{n+1}\} \tag{4.17}$$

Soit

$$\left([I] + \Delta\lambda\left(\frac{[H_{\mathrm{e}}][P]}{\sigma_{\mathrm{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D_n)^2}[I]\right)\right)\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_n\} + (1-D_n)[H_{\mathrm{e}}]\{\Delta\varepsilon\} \tag{4.18}$$

Le vecteur de contraintes à l'instant $\{\sigma_{n+1}\}$ est déterminé en utilisant une méthode de prédiction élastique / correction plastique. Nous supposons que l'incrément de déformation est purement élastique pour estimer les contraintes, ensuite nous projetons les contraintes obtenues sur la surface d'écoulement. La prédiction élastique défini un état de contraintes d'essai comme suit:

$$\left\{\sigma_{n+1}^{\mathrm{e}}\right\} = \left\{\sigma_n\right\} + (1-D_n)[H_{\mathrm{e}}]\left\{\Delta\varepsilon\right\} \tag{4.19}$$

Les contraintes élastiques ci-dessus sont substituées dans le critère de Hill (équation 4.6).

Si $f^{\mathrm{e}} < 0$, alors l'état de contraintes est situé è l'intérieur de la surface d'écoulement (la prédiction élastique est vraie) et $\Delta\lambda = 0$; si $f^{\mathrm{e}} > 0$, le matériaux subi une phase plastique et une correction plastique est utilisée pour déterminer un nouvel état de contraintes sur la surface d'écoulement ( $f^{\mathrm{e}} = 0$ ):

$$\left\{\sigma_{n+1}\right\} = \left(\left[I\right] + \Delta\lambda\left(\frac{[H_{\mathrm{e}}][P]}{\sigma_{\mathrm{eq},n+1}} - \frac{\hat{Y}}{\left(1-D_n\right)^2}\left[I\right]\right)\right)^{-1}\left\{\sigma_{n+1}^{\mathrm{e}}\right\} \tag{4.20}$$

Le critère de Hill (4.6) permet d'obtenir une équation linéaire en fonction $\Delta\lambda$ :

$$f(\Delta\lambda) = \frac{\sigma_{\mathrm{eq},\,n+1}}{1-D_n} - \bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p}\right) = \frac{\left(\left\{\sigma_{n+1}\right\}^{\mathrm{T}}\left[P\right]\left\{\sigma_{n+1}\right\}\right)^{1/2}}{1-D_n} - \bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p}\right) = 0 \tag{4.21}$$

Cette équation non linéaire peut se résoudre par la méthode de Newton-Raphson:

$$\Delta\lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k - \left(\frac{df}{d\Delta\lambda}\right)_{\Delta\lambda=\Delta\lambda_k}^{-1} f(\Delta\lambda_k) \tag{4.22}$$

Généralement, la méthode itérative converge avec la valeur initiale $\Delta\lambda_0 = 0$, cependant il faut utiliser de petits incréments et de nombreuses itérations afin d'assurer la stabilité numérique.

### 4.3.2. Algorithme Scalaire Direct (ASD) pour l'intégration plastique

L'idée de cet algorithme est d'introduire une hypothèse et des simplifications pour transformer l'équation (4.18) en une équation scalaire dont la seule inconnue est $\Delta\lambda$, ensuite une résolution directe est utilisée pour trouver $\Delta\lambda$.

**1) Séparation des déformations élastiques des déformations totales**

Dans le procédé d'emboutissage, la tôle subie souvent des cambrages-décambrages. On peut se trouver dans les configurations suivantes:

a) Un chargement élasto-plastique;

b) Un déchargement-rechargement élastique (un état plastique passe à un état élastique);

c) Un déchargement élastique et un rechargement plastique (un état plastique passe à un état élastique et revient à un état plastique).

Afin d'utiliser l'équation (4.21) pour obtenir $\Delta\lambda$, $\bar{\sigma}_{n+1}$ doit être connue. Nous prenons $\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}\right)$, avec $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n} + \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$. Donc une séparation des accroissements des déformations élastiques et plastiques est envisagée. Supposons que les déformations élastiques ont lieu principalement dans la prédiction élastique, dans les cas 1) et 3), on doit déterminer le pourcentage de la partie élastique.

Comme montré dans la figure 4.1, dans la prédiction élastique, si l'état de contraintes dépasse la surface d'écoulement (A➔D➔A➔B donnant $f > 0$), une méthode ci-dessous est adoptée pour calculer ce pourcentage élastique:

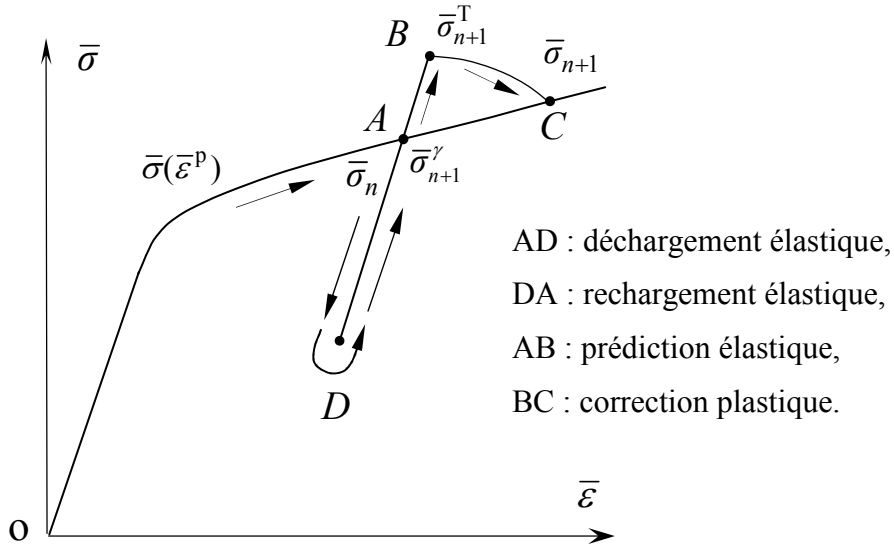



Figure 4.1 Prédiction élastique et correction plastique

Soient $\gamma\{\Delta\varepsilon\}$ et $(1-\gamma)\{\Delta\varepsilon\}$ les partitions des déformations élastiques et plastiques respectivement. Dans la prédiction élastique, l'incrément de déformations est considéré entièrement élastique:

$$\left\{\sigma^{\gamma}_{n+1}\right\} = \left\{\sigma_n\right\} + [H_{\mathrm{e}}]\left\{\Delta\varepsilon\right\}(1-D_n) \tag{4.23}$$

Si le critère de Hill $f < 0$, la prédiction élastique est vraie, soit $\gamma = 1$. Les contraintes, la déformation plastique équivalente et l'endommagement à l'étape $n+1$ sont obtenus par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_{n+1}^{\gamma}\} \\ \overline{\varepsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}} = \overline{\varepsilon}_{n}^{\mathrm{p}} \\ D_{n+1} = D_n \end{cases} \tag{4.24}$$

Sinon, l'état de contraintes doit être corrigé pour tenir compte de la plasticité. La partie élastique est définie par :

$$\{\sigma_{n+1}^{\gamma}\} = \{\sigma_n\} + \gamma(1-D_n)[H_{\mathrm{e}}]\{\Delta\varepsilon\} \tag{4.25}$$

Cette expression peut se substituer dans (4.6) pour obtenir $f(\gamma)=0$ et se résoudre par la méthode de Newton-Raphson.

Pour obtenir $\gamma$ sans itérations, nous transformons le vecteur $\{\sigma_{\mathrm{n+1}}^{\gamma}\}$ en contrainte équivalente en utilisant l'opération $\langle\sigma\rangle[P]\{\sigma\}$ sur les deux côtés de l'équation (4.25) et nous obtenons l'équation suivante :

$$(\sigma_{n+1}^{\gamma})_{\mathrm{eq}}^2 = (\sigma_n)_{\mathrm{eq}}^2 + E^2(1-D_n)^2\Delta\overline{\varepsilon}^2\gamma^2 + 2E(1-D_n)\gamma\{\sigma_n\}^{\mathrm{T}}\{\Delta\varepsilon\} \tag{4.26}$$

Cette équation de trinôme du second ordre en $\gamma$ peut être résolue directement sans itérations. Dans les cas a) et c), l'état de contraintes sur la courbe de traction donne $(\sigma_{n+1}^{\gamma})_{\mathrm{eq}} = (\sigma_n)_{\mathrm{eq}}^2$, puis la résolution de (4.26) permet d'obtenir le pourcentage $\gamma$ entre 0 et 1. Dans le cas b), on peut effectuer la même résolution qui va donner $\gamma > 1$ ; cela signifie que la totalité de l'incrément de déformations n'est pas suffisant pour que l'état de contraintes retourne à la plasticité (ou à la courbe de traction $\overline{\sigma}(\overline{\varepsilon}^p)$), donc, on doit prendre $\gamma = 1$. La déformation plastique équivalente à l'étape $n+1$ est calculée par:

$$\overline{\varepsilon}_{n+1}^{\mathrm{p}} = \overline{\varepsilon}_{n}^{\mathrm{p}} + (1-\gamma)\Delta\overline{\varepsilon}_{n+1} \tag{4.27}$$

**2) Calcul du multiplicateur plastique**

Dans la phase de retour, le vecteur de contraintes inconnues $\{\sigma_{n+1}\}$ peut s'exprimer comme suit:

$$\left([I] + \Delta\lambda\left(\frac{[H_{\mathrm{e}}][P]}{\sigma_{\mathrm{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D_n)^2}[I]\right)\right)\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_{n+1}^{\gamma}\} \tag{4.28}$$

En utilisant la notion de la contrainte équivalente, l'opération $\langle\ \rangle[P]\{\ \}$ avec les deux côtés de l'équation ci-dessus permet d'obtenir l'équation du second ordre en $\Delta\lambda$ suivante:

$$(\sigma_{n+1}^{\gamma})_{\text{eq}}^2 = (\sigma_{n+1})_{\text{eq}}^2$$
$$+\Delta\lambda^2 \langle \sigma_{n+1} \rangle \left( \Delta\lambda \left( \frac{[H_{\text{e}}][P]}{\sigma_{\text{eq}}} - \frac{[I]\hat{Y}}{(1-D_n)^2} \right) \right) [P] \left( \Delta\lambda \left( \frac{[H_{\text{e}}][P]}{\sigma_{\text{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D_n)^2}[I] \right) \right) \{\sigma_{n+1}\} \tag{4.29}$$
$$+2\Delta\lambda \langle \sigma_{n+1} \rangle \left( \frac{[H_{\text{e}}][P]}{\sigma_{\text{eq}}} - \frac{\hat{Y}}{(1-D_n)^2}[I] \right) [P] \{\sigma_{n+1}\}$$

This equation is nonlinear, so its resolution requires a Newton-Raphson iterative algorithm.

La déformation plastique équivalente au pas $n+1$ peut être calculée par la simplification:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p}} = \bar{\varepsilon}_n^{\text{p}} + (1-\gamma)\Delta\bar{\varepsilon} \tag{4.30}$$

$\sigma_{n+1,\text{eq}} = \dfrac{\bar{\sigma}_{n+1}}{1-D_n}\left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{\text{p}}\right)$ est alors déterminée en utilisant la courbe de traction expérimentale et $\{\sigma_{n+1}\}$ peut être calculée selon la normale à la surface d'écoulement par Simo and Taylor :

$$\{n\} = \frac{[P]\{\sigma_{n+1}\}}{\bar{\sigma}_{n+1}} = \frac{[P]\{\sigma_{n+1}^{\gamma}\}}{\bar{\sigma}_{n+1}^{\gamma}} \tag{4.31}$$

$\Delta\lambda$ est alors obtenu directement par l'équation (4.29) sans itérations.

Cet algorithme direct (pour obtenir $\gamma$ et $\Delta\lambda$) a un grand intérêt pour l'intégration de plasticité, car deux résolutions itératives à chaque point d'intégration nécessitent des temps de calcul énormes et provoque souvent des problèmes numériques. Le nouvel algorithme permet d'utiliser de grands incréments de temps sans résolution itérative, il est très rapide et aussi précis que l'algorithme classique de Simo (voir plus loin dans §4.3.4).

### 4.3.3. Algorithme de $\gamma$ - Retour Radial ($\gamma$-RR)

L'ASD est très rapide, mais peut amener certaines erreurs numériques, notamment lorsque les déformations élastiques et plastiques ont le même ordre de grandeur. Afin de renforcer l'efficacité et la précision de la correction plastique, nous combinons l'Algorithme du Retour Radial et notre Algorithme Scalaire Directe.

Dans l'Algorithme du Retour Radial, $\Delta\lambda_0 = 0$ est pris comme la solution initiale pour le processus itératif de Newton-Raphson pour de petits incréments.

Dans le nouvel algorithme $\gamma$-RR, nous calculons le pourcentage élastique $\gamma$ et on a donc l'incrément de déformation plastique $\Delta\bar{\varepsilon}^{\text{p}} = (1-\gamma)\Delta\bar{\varepsilon}$ en utilisant l'ASD et ensuite nous prenons l'incrément plastique obtenu $\Delta\bar{\varepsilon}^{\text{p}}$ pour la solution initiale dans l'Algorithme du Retour Radial. L'expérience numérique montre une amélioration notable pour l'efficacité par rapport à l'algorithme du Retour Radial, et pour la robustesse par rapport à l'ASD.

### 4.3.4. Etudes numériques des algorithmes

L'emboutissage d'une coupe cylindrique appelé SWIFT (voire chapitre 6.2) est choisi afin d'étudier les trois algorithmes ARR, ASD, et $\gamma$-RR numériquement.

La tôle est discrétisée en 10290 éléments triangulaires et 5378 noeuds. Selon nos tests numériques, les résultats de l'API ne sont plus sensibles au nombre du pas à partir de 8 pas. Donc 8-pas est adopté dans cette étude.

**Détection du phénomène de cambrage-décambrage**

L'élément 1333 situé sur le rond d'entrée est choisi pour démontrer l'effet du cambrage-décambrage. L'état de contraintes sur la surface externe est étudié. A la fin du pas 1, l'état de contraintes $A$ sur la courbe de traction représente un état plastique (Figure 4.2) ; notre $\gamma$-RR permet d'effectuer l'integration plastique avec un grand incrément (pas 2), donnant le nouvel état plastique $C$ ($\gamma = 0.2894$ , $\Delta\lambda = 5.17\text{E-}003$). Nous divisons ce grand incrément en de nombreux petits incréments afin d'étudier l'histoire de chargement (chemin A➔D➔A➔C), nous observons que le calcul prévoit correctement le déchargement-rechargmeent élastique, puis la nouvelle phase plastique.

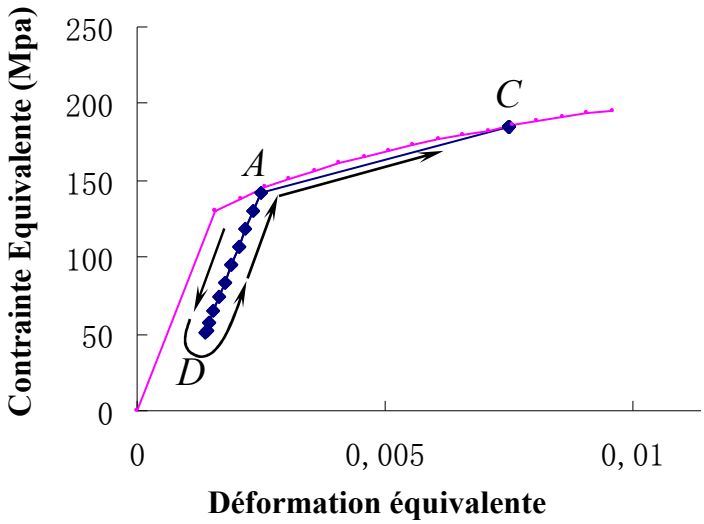



Figure 4.2 Intégration Plastique avec le phénomène de cambrage-décambrage

**Itérations locales de l'ARR et $\gamma$-RR**

La procédure de Newton-Raphson locale pour l'intégration plastique (à l'itération d'équilibre 1 dans le pas 2) est étudiée. Afin d'aboutir à la convergence et de trouver les

même résultats ( $\Delta\lambda = 0{,}0143$ ), 6 itérations sont exigées pour l'ARR avec $\Delta\lambda_0 = 0$ , mais seulement 2 itérations sont suffisantes pour $\gamma$ -RR avec $\Delta\lambda_0 = (1-\gamma)\Delta\bar{\varepsilon}$ (Figure 4.3).

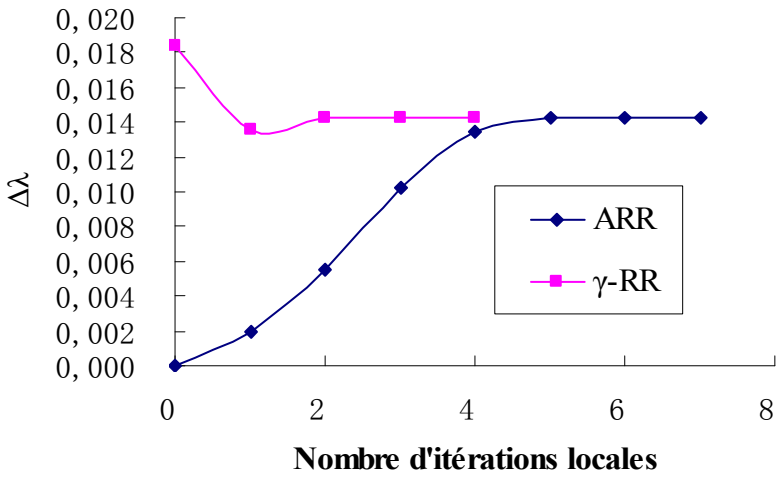



Figure 4.3 Convergence de N-R par l'ARR et $\gamma$ -RR

**Précision de l'ASD et l'ARR ou $\gamma$ -RR**

Vu que l'ARR et $\gamma$ -RR donnent exactement les mêmes résultats, l'ARR est choisis dans cette étude. L'état de contraintes se trouve sur la fibre supérieure, qui est le plus complexe, est donc pris pour faire la comparaison. La figure 4.4 montre un bon accord, pour la contrainte maximale principale sur la fibre supérieure, entre les résultats des deux algorithmes.

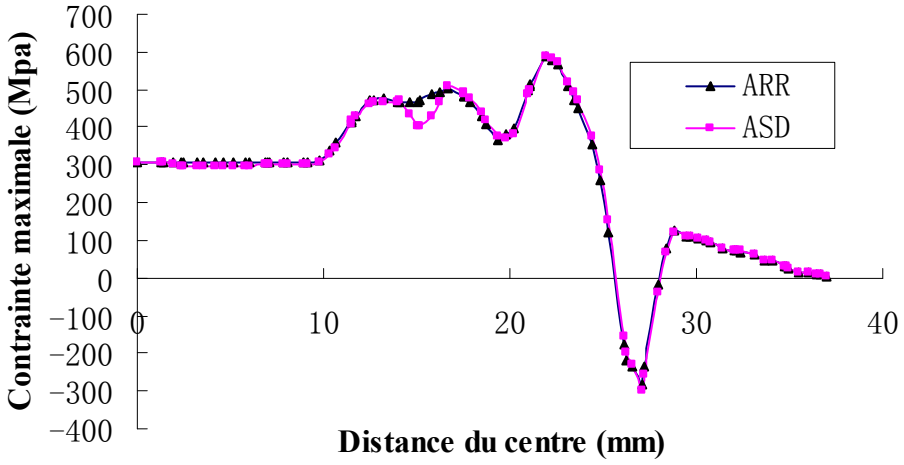



Figure 4.4 Contrainte maximale sur la fibre supérieure par l'ARR et $\gamma$ -RR

**Efficacité de l'ASD, l'ARR et $\gamma$ -RR**

Le nombre d'itérations locales et le temps CPU total sont présentés dans le tableau 4.1. La précision du critère de Hill est $\varepsilon = 10^{-8}$. Nous trouvons que le nombre d'itérations locales et le temps CPU sont largement diminués.

| Algorithmes | solution Initiale | Nombre moyen d'itérations locales | Temps CPU total incluant la résolution globale (s) | Différence du temps CPU (s) |
|---|---|---|---|---|
| ASD | – | 0 | 1113 | 0 |
| ARR | $\Delta\lambda_0 = 0$ | 9 | 1498 | 385 |
| **$\gamma$ -RR** | $\Delta\lambda_0 = \Delta\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ | 4.5 | 1310 | 297 |

Tableau 4.1 Ecart en temps CPU pour les différents algorithmes

## 4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié deux méthodes d'intégration de la plasticité couplée à un endommagement isotrope en déformation proposé par Lemaître et Chaboche. Le critère de plasticité de HILL, à écrouissage isotrope incluant l'endommagement et respectant la normalité de l'écoulement plastique sous l'hypothèse de contraintes planes, a été adopté.

Les deux algorithmes proposés, l'ASD et le γ-RR, sont tous les deux basés sur un schéma implicite de retour radial; la variable d'endommagement scalaire est maintenue constante pour le calcul du multiplicateur de plasticité. L'ASD permet un calcul plus rapide du multiplicateur de plasticité. En faisant l'hypothèse des petites déformations élastiques et en supposant que l'anisotropie plastique peut s'appliquer au comportement élastique, le multiplicateur de plasticité peut être trouvé par une équation du second degré. L'algorithme γ-RR a été proposé afin d'améliorer celui du retour radial en utilisant une valeur initiale de multiplicateur calculée par l'ASD. Enfin l'évaluation numérique des algorithmes: retour radial (ARR), scalaire direct (ASD) et retour radial modifié (γ-RR), sur un essai d'emboutissage de type SWIFT, a été effectuée. L'exemple traité a montré que les trois algorithmes sont cohérents sur l'estimation des contraintes et que l'algorithme γ-RR est capable de reproduire correctement les phases de cambrage-décambrage. Dans la résolution itérative locale du multiplicateur de plasticité pour les algorithmes ARR et γ-RR, un gain de 3 itérations est obtenu avec l'algorithme γ-RR. Pour ce qui est du temps CPU total, un gain substantiel d'environ 30% pour γ-RR par rapport à ARR est obtenu.

# Chapitre 5 Résultats Numériques et Validation

## 5.1. Simulation de l'emboutissage d'une boîte carrée par l'API

### 5.1.1. Validation de l'API par Abaqus

L'emboutissage d'une boîte carrée de Numisheet'93 [Makinouchi 93] est simulé par l'API et par Abaqus pour la validation de l'API (Figure 5.1). Les données de la géométrie et du matériau peuvent être trouvées dans les proceedings de la conférence. La tôle est de $150\times150\times0.78$ mm$^3$ en acier doux. Un quart du flan initial est discrétisé en $60\times60$ éléments de coque à quatre nœuds pour Abaqus/Explicit, tandis que l'élément de coque à trois nœuds est utilisé pour l'API.

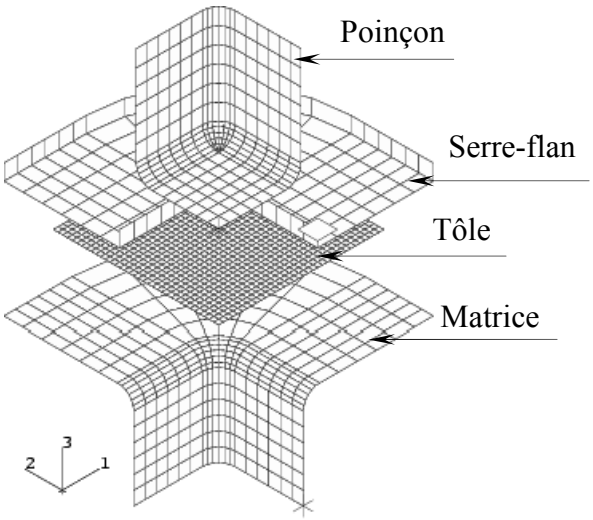
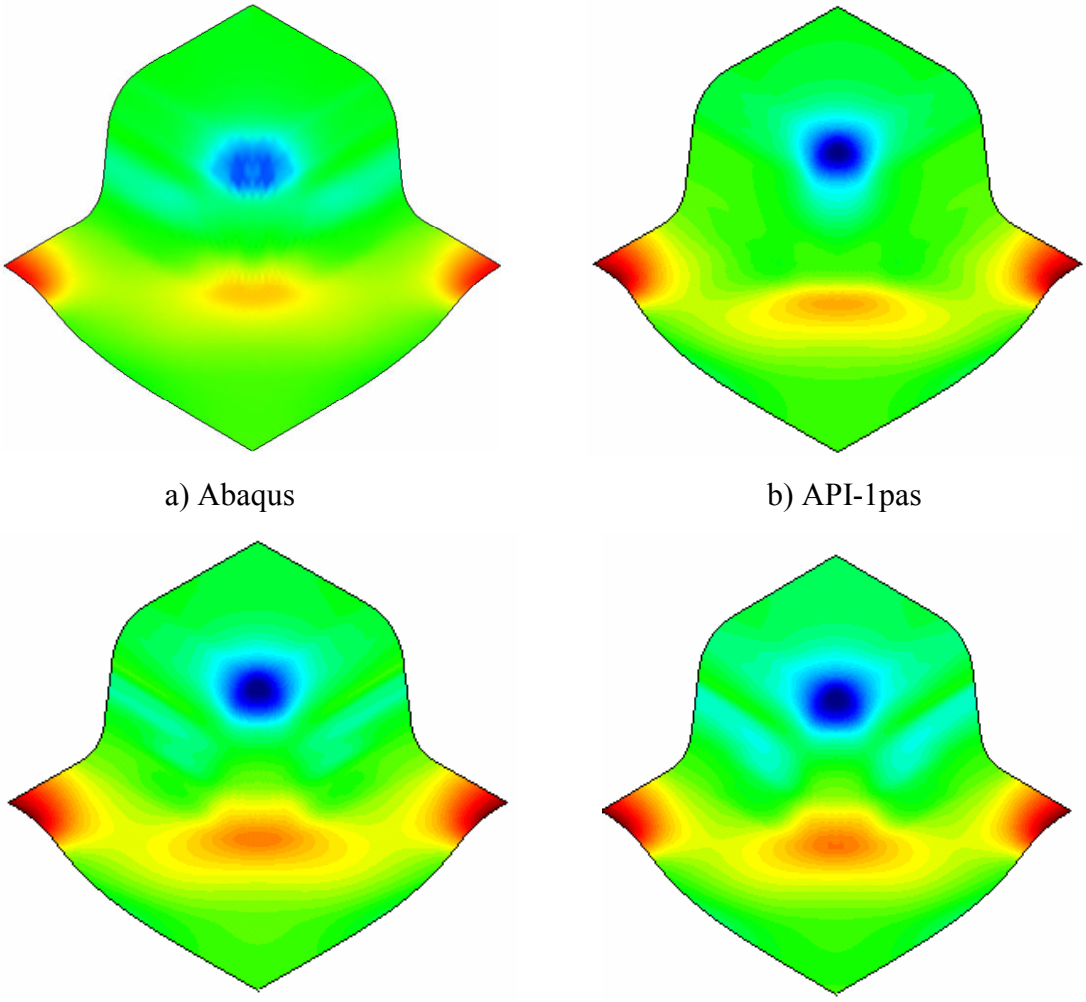



Figure 5.1 Simulation de l'emboutissage d'un quart d'une boîte carrée par Abaqus

Les iso-couleurs de la variation de l'épaisseur sont présentées dans la figure 5.2. La distribution de la variation de l'épaisseur suivant la direction diagonale est présentée dans la figure 5.3. On observe que la variation d'épaisseur n'est pas sensible au nombre de pas de l'API : l'API en 1 pas ou en 8 pas donnent deux courbes très proches qui sont toujours en bon accord avec celle d'Abaqus.



a) Abaqus b) API-1pas

c) API-4pas d) API-8pas

Figure 5.2 Iso-couleurs de la variation relative d'épaisseur

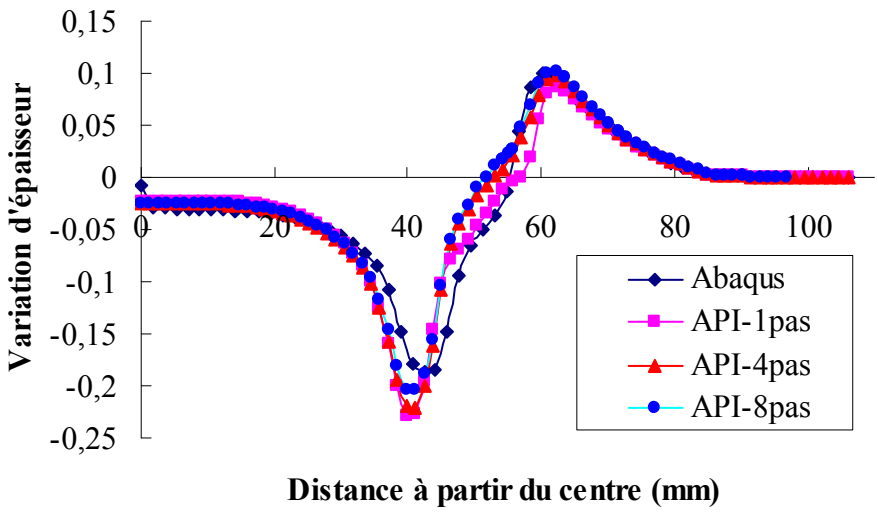
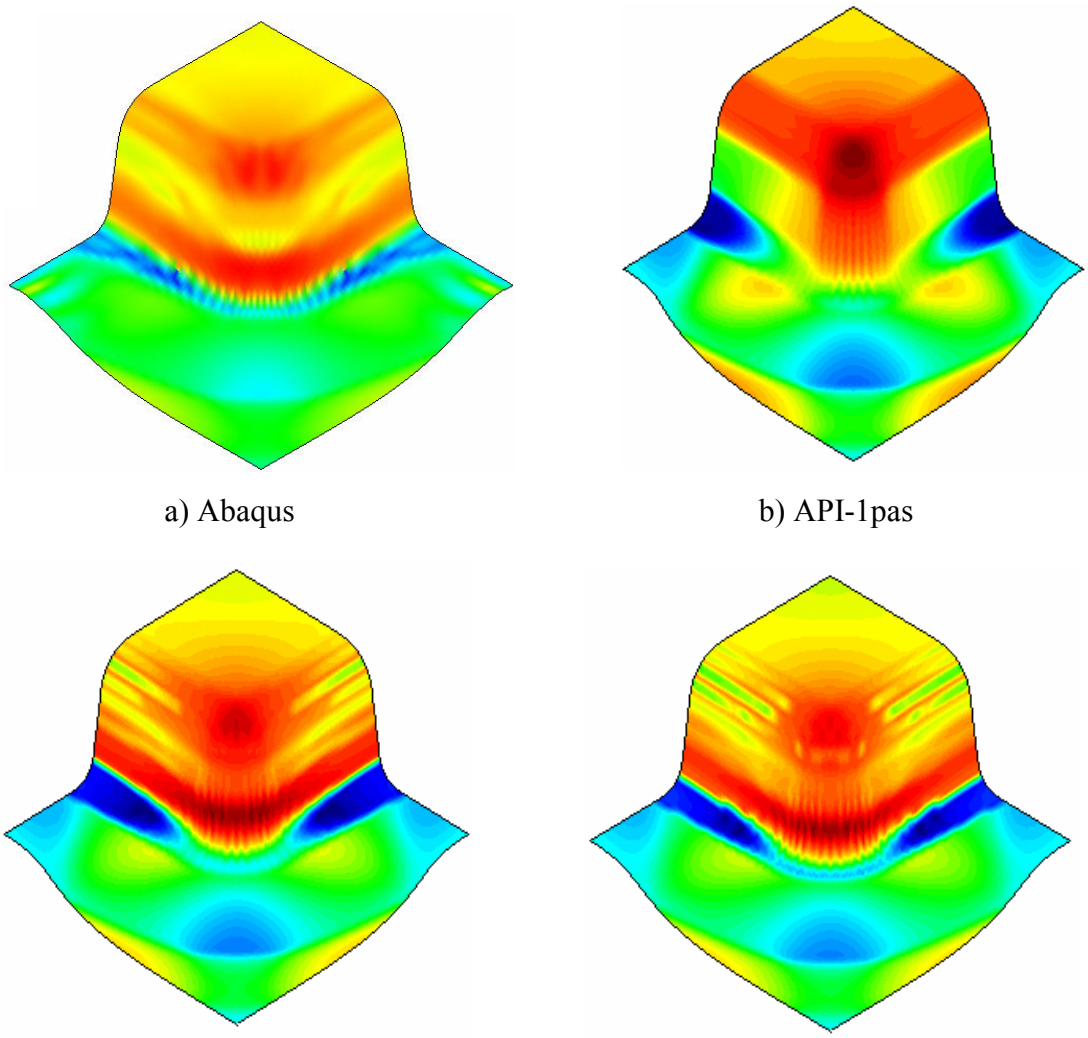



Figure 5.3 Variation relative de l'épaisseur suivant la direction diagonale

Les iso-couleurs de contraintes maximales sont présentées en figure 5.4 et les distributions sur la fibre supérieure suivant la direction diagonale sont comparées en figure 5.5. On remarque que l'API en un pas ne peut pas détecter le pic de la contrainte dû au cambrage-décambrage sur l'intervalle entre 50 et 55 mm à partir du centre, mais l'API en 8 pas améliore largement les résultats grâce à la considération de l'historique du chargement. L'écart sur l'intervalle de 0 à 40 mm existant entre l'API et Abaqus est du à la simplification des actions des outils dans l'API, c'est-à-dire, la non mise en compte du frottement-contact.



a) Abaqus b) API-1pas

c) API-4pas d) API-8pas

Figure 5.4 Iso-couleurs de contraintes maximales sur la fibre supérieure

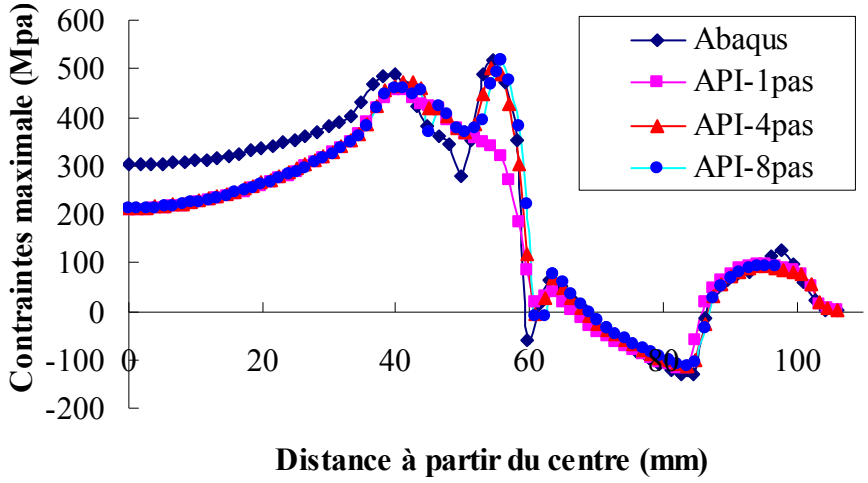



Figure 5.5 Distribution de contraintes maximales suivant la direction diagonale (sur la fibre supérieure)

Les distributions, des contraintes maximales sur la fibre supérieure, suivant la direction diagonale, sont comparées en figure 5.6. Les iso-couleurs correspondants sont présentées en figure 5.7.

L'API en un pas, comme précédemment, ne peut pas détecter le pic de la contrainte dû au cambrage-décambrage sur l'intervalle entre 50 et 55 mm, mais l'API en 8 pas améliore également ces résultats grâce à la considération de l'historique du chargement.

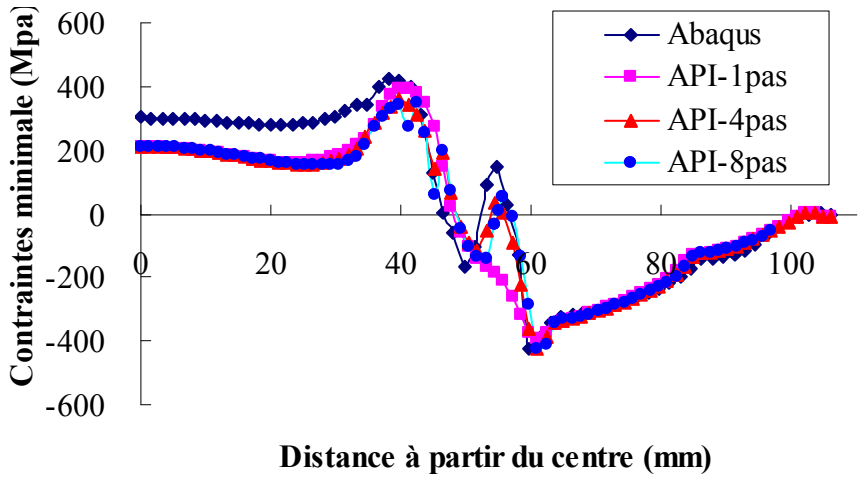
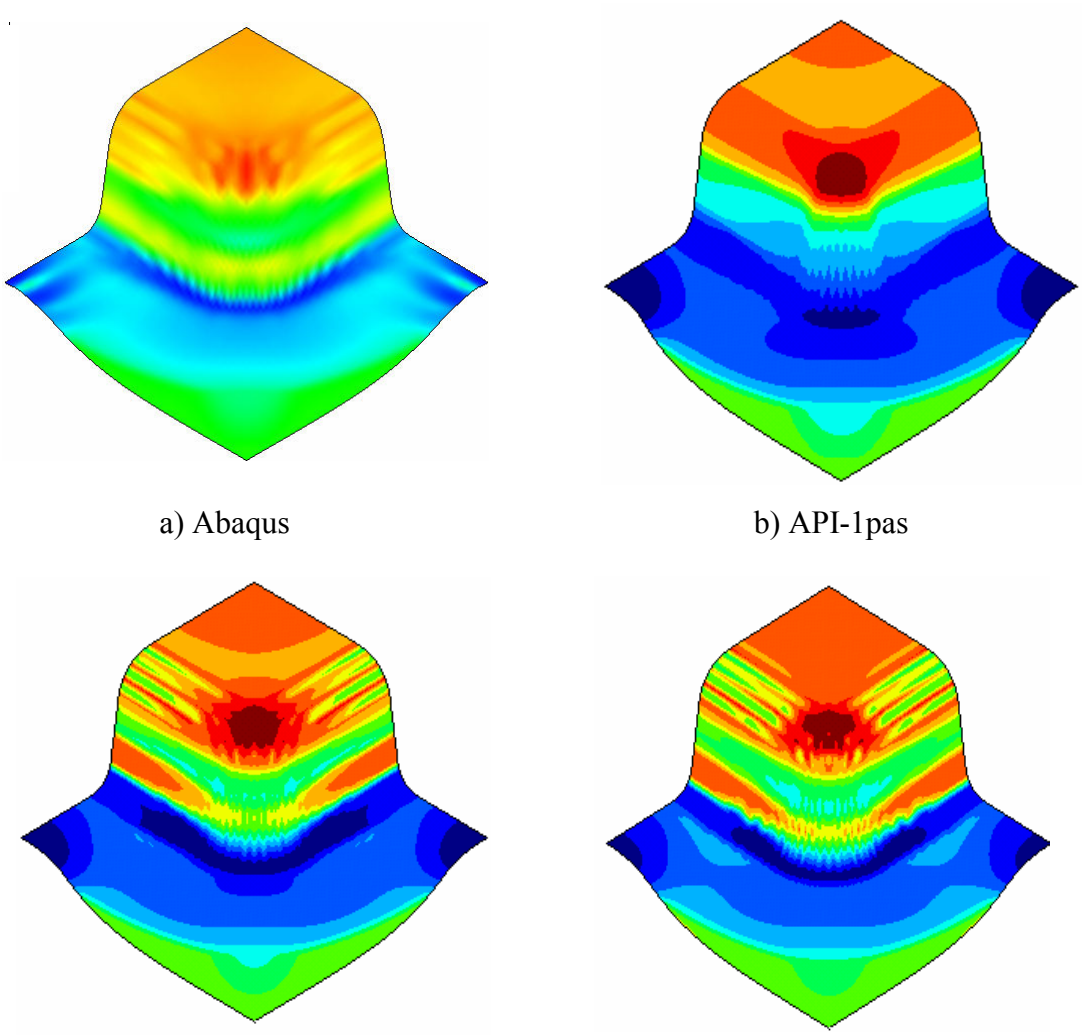



Figure 5.6 Distribution des contraintes minimales suivant la direction diagonale (sur la fibre supérieure)



a) Abaqus b) API-1pas

c) API-4pas d) API-8pas

Figure 5.7 Iso-couleurs de contraintes minimales (sur la fibre supérieure)

### 5.1.2. Comparaison temps CPU de trois algorithmes d'intégration plastique

La boîte carrée est traitée en utilisant les trois algorithmes d'intégration plastique: Algorithme de Retour Radial de Simo (ARR), Algorithme de ($\gamma$-Retour Radial ($\gamma$-RR) et Algorithme Scalaire Direct (ASD). La contrainte équivalente et les composantes de contrainte obtenues par les deux algorithmes sont en bonne coïncidence. Les temps CPU consommés par les trois algorithmes sont présentés en figure 5.8 en utilisant $\varepsilon = 10^{-8}$ comme la tolérance d'erreur pour le critère de Hill.

ASD est très rapide par rapport à ARR. Même si le temps CPU n'est gagné que dans l'algorithme d'intégration locale (la résolution du système d'équations global ne change pas), le gain du temps est de 1,87 fois pour 1 seul pas et 2,42 fois pour 4 pas. La variation du gain

est irrégulière en fonction du nombre de pas, car le temps CPU utilisé dans l'algorithme de Simo dépend de la vitesse de convergence dans le processus itératif. ($\gamma$-RR est un compromis entre ASD et ARR. Pour un procédé d'emboutissage simple, l'utilisateur peut choisir ASD; pour un emboutissage difficile, $\gamma$-RR est un meilleur choix.

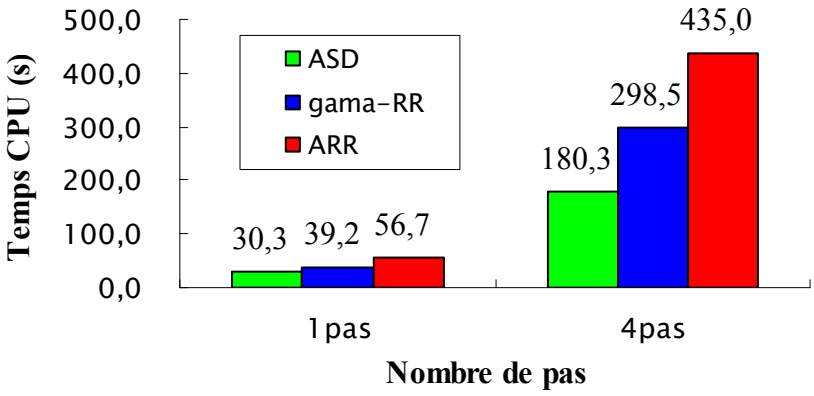


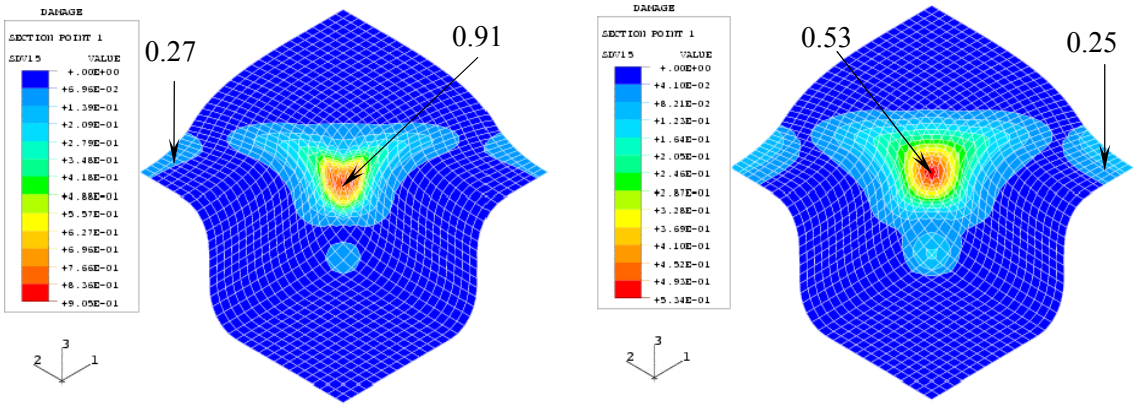

Figure 5.8 Comparaison du temps CPU entre différents algorithmes

### 5.1.3. Prédiction de l'endommagement

Un modèle couplé de plasticité et d'endommagement est développé par Saanouni et al. de l'UTT et implanté dans Abaqus/Explicit. Ce logiciel est utilisé pour simuler l'évolution de l'endommagement dans l'emboutissage d'une boîte carrée [Saanouni 00], [Cherouat 04].

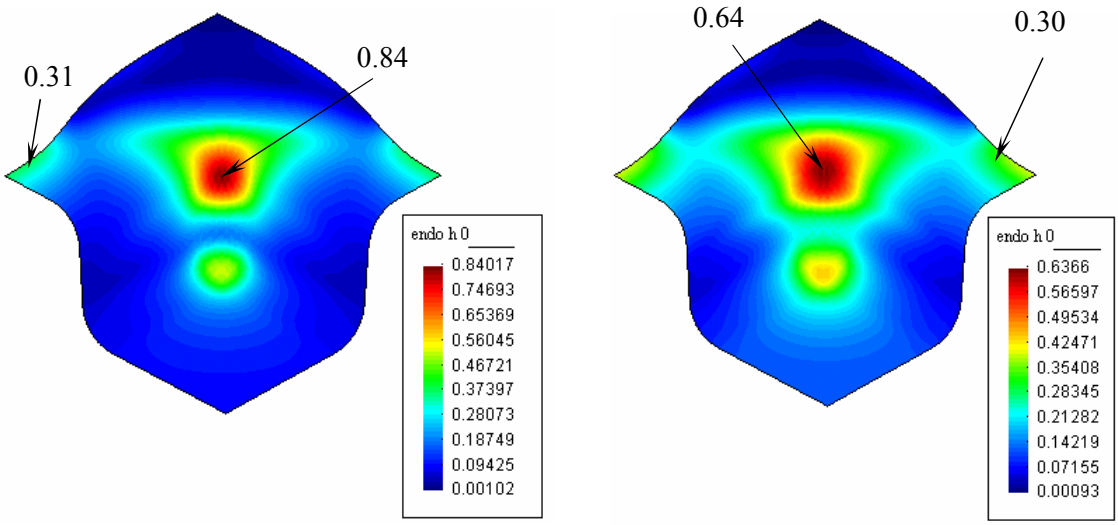
Les données géométriques sont: la tôle initiale est de 200×200×0.82 $mm^3$, le poinçon 100×100 $mm^2$, la matrice 102.5×102.5 $mm^2$, la descente du poinçon 36 mm. Le matériau suivant est utilisé : coefficient du frottement de Coulomb $\mu$=0.144, module d'Young E=210 GPa, coefficient du Poisson $\nu$=0.3, limite élastique de contrainte $\sigma_y$=400 MPa, loi de plasticité isotrope $\bar{\sigma} = Q(1-e^{-b\bar{\varepsilon}})$ avec Q=1000 Mpa et b=5. Dans l'API, les paramètres d'endommagement sont $D_c = 0.95$ , $\varepsilon_R = 0.7$ et $\varepsilon_D = 0$ qui donne un comportement d'endommagement similaire à ce-lui de l'UTT, mais notre modèle simplifié ne permet pas de décrire le fort endommagement avant la rupture. Dans la figure 5.9, la distribution de l'endommagement est obtenue par Abaqus/damage-UTT pour les cas d'endommagement-plasticité couplé et non-couplé. On trouve que, dans les deux cas, l'endommagement se localisent dans une zone identique et que l'endommagement donné par le modèle couplé est plus localisé et plus avancé: $D_{max}$=90.5 % dans le cas couplé et $D_{max}$= 53.48 % dans le cas non-couplé.

Dans la figure 5.10, les distributions de l'endommagement obtenues par l'API sont présentés pour les cas couplé et non-couplé. Un phénomène similaire est observé, mais les valeurs de l'endommagement sont différentes à cause des différents modèles d'endommagement utilisés dans les deux approches: dans l'approche incrémentale, la rigidité diminue et mène la rupture très rapidement après que la charge ultime soit dépassé, mais dans l'API, la rigidité diminue lentement après le passage de la charge ultime.




a) endommagement-plasticité couplé b) endommagement-plasticité non-couplé

Figure 5.9 Distribution de l'endommagement par Abaqus/Damage-UTT




a) endommagement-plasticité couplé b) endommagement-plasticité non-couplé

Figure 5.10 Distribution de l'endommagement par l'API

## 5.2. Simulation de l'emboutissage SWIFT (en acier doux DC04)

Cet exemple a été traité expérimentalement par le CETIM et numériquement avec les logiciels commerciaux, Stampack, Abaqus et notre logiciel l'API. L'objectif est de valider l'API avec d'autres résultats numériques et expérimentaux. Puisque les résultats de l'API ne changent quasiment pas à partir de 8 pas,, les résultats de 8 pas sont choisis pour les comparaisons ci-dessous. La géométrie est présentée en figure 5.11, le matériau et les conditions de formage de l'embouti SWIFT sont présentés dans le tableau 5.1.

En figure 5.12 les distributions de la variation de l'épaisseur obtenues avec l'API, Abaqus et Stapmpack sont présentées. On trouve que les trois logiciels donnent des courbes très proches. Deux pics d'amincissement à 22 mm et 15 mm à partir du centre sont observés. L'API donne un amincissement un peu plus faible que les deux autres au voisinage du centre à cause de son modèle de frottement simplifié.

En figure 5.13 les distributions de contraintes de Von-Mises sont présentées. On trouve qu'en tenant compte de l'historique du chargement l'API donne aussi une bonne estimation des contraintes par rapport à deux autres logiciels incrémentaux. Un pic de contrainte équivalente est observé à 22 mm à partir du centre. Sur l'intervalle entre 10 mm et 20 mm, la correspondance est bonne entre l'API et Abaqus, mais une petite déviation est donnée par Stampack.

En figure 5.14 les iso-couleurs de la variation relative de l'épaisseur sont présentées. On trouve que les trois logiciels donnent presque les mêmes distributions. Un fort amincissement est situé dans les zones au rayon du poinçon et au dessus du rayon de la matrice.

En figure 5.15 l'effort du poinçon en fonction de sa course est présenté. Les trois logiciels donnent des résultats en bon accord avec les résultats expérimentaux du CETIM.

En figure 5.16 les courbes FLC et les diagrammes FLD obtenus avec l'API et avec Stampack sont présentés. On constate que les deux logiciels donnent des FLD très similaires.

En figure 5.17 la distribution de l'endommagement obtenue avec l'API est présentée. On trouve un fort endommagement au niveau du rayon du poinçon et au dessus du rayon de la matrice. Ces résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux du CETIM. Sur la photo du CETIM, on voit clairement la rupture au rayon du poinçon et la striction au rayon de la matrice.

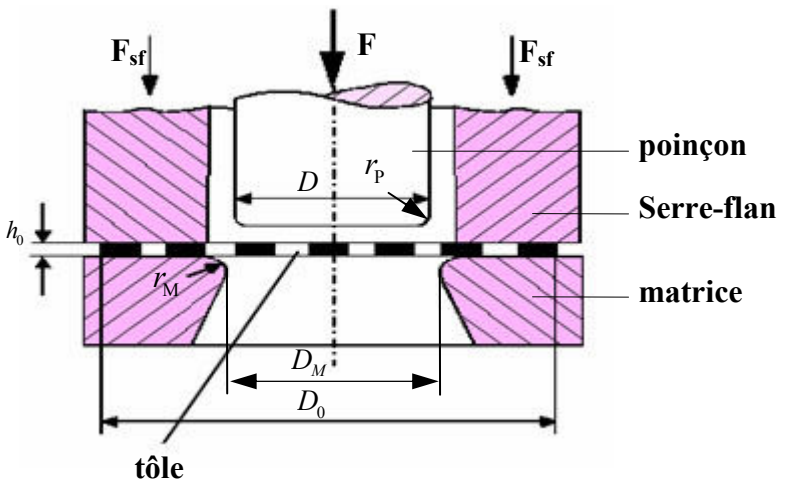



Figure 5.11 Géométrie de SWIFT

- Diamètre du poinçon: $D = 33$ mm
- Diamètre de la matrice: $D_M = 35.2$ mm
- Lubrifiant: Esso TSD 996, coefficient du frottement de Coulomb $\eta = 0.144$
- Effort du serre-flan: 500 daN
- Paramètre d'endommagement API: $D_c = 0.4$, $\varepsilon_R = 0.7$ et $\varepsilon_D = 0.2$
- Descente du poinçon : 14mm
- Diamètre du flan initial : 74mm
- Epaisseur de la tôle = 1mm
- $r_P = 5$ mm, $r_M = 4$ mm
- module de Young $E = 82.377$ GPa
- coefficients d'anisotropie $r_{00} = 1.87$, $r_{45} = 1.12$, $r_{90} = 2.02$
- force du serre-flan $F_{sf}$ = 5 kN

Tableau 5.1 Matériau et condition de formage de SWIFT

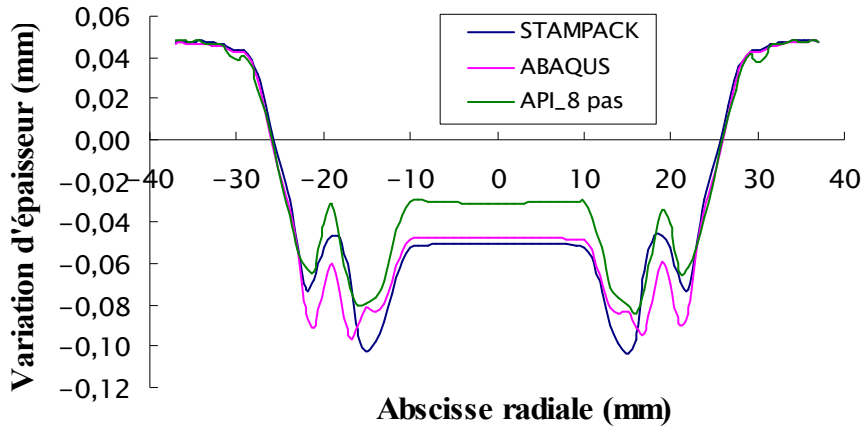



Figure 5.12 Variation relative de l'épaisseur le long de la direction radiale

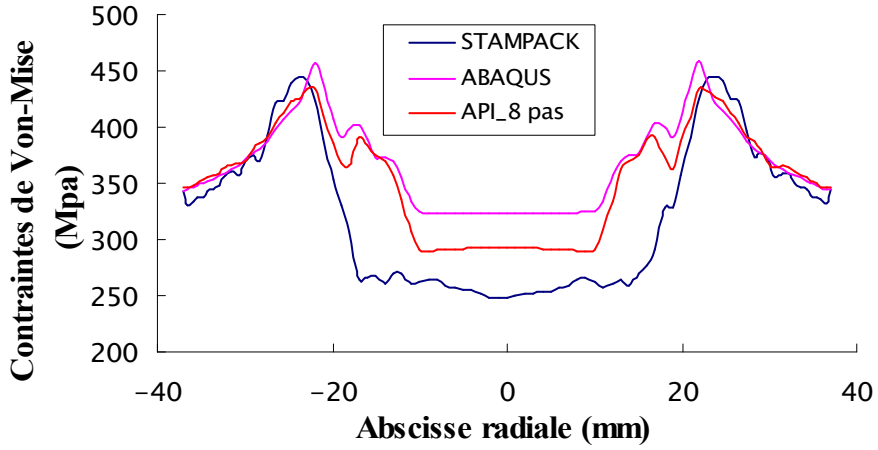
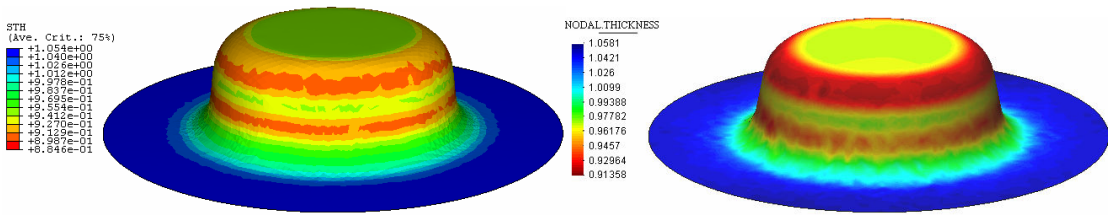
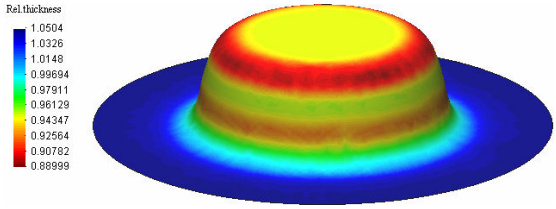



Figure 5.13 Distribution de Contrainte de Von-Mises le long de la direction radiale




a) Epaisseur ABAQUS b) Epaisseur API_8 pas




c) Epaisseur STAMPACK

Figure 5.14 Iso-couleur de variation relative d'épaisseur

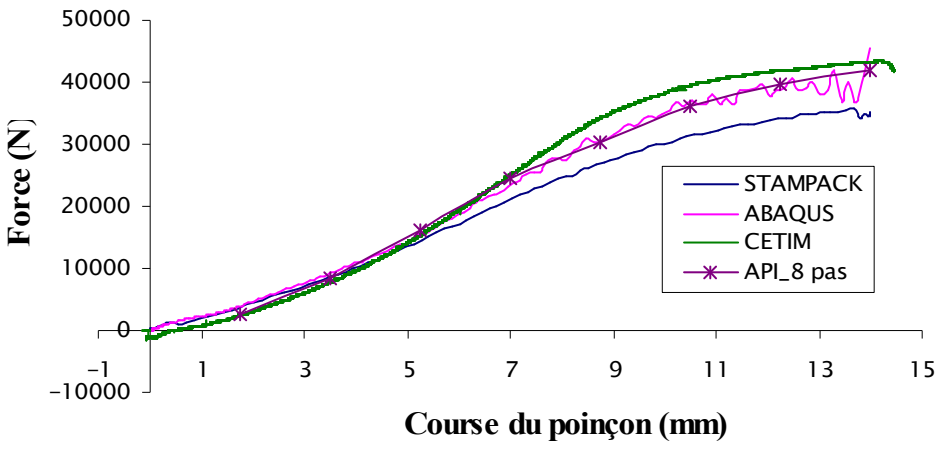
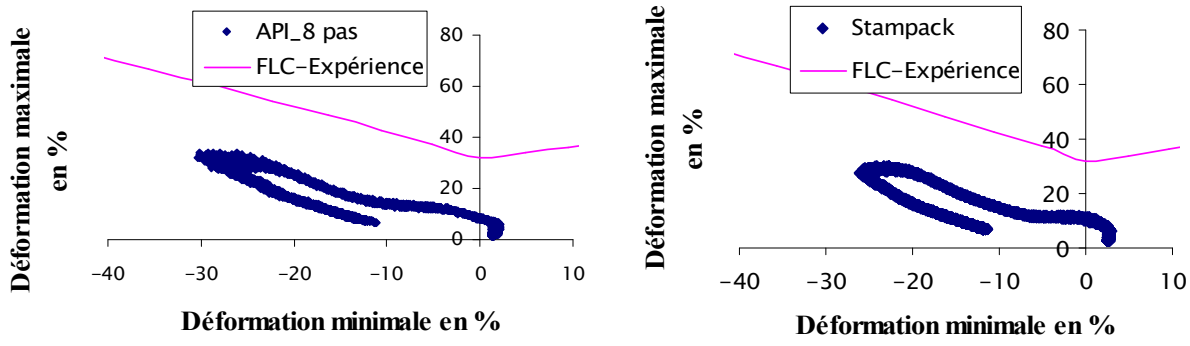
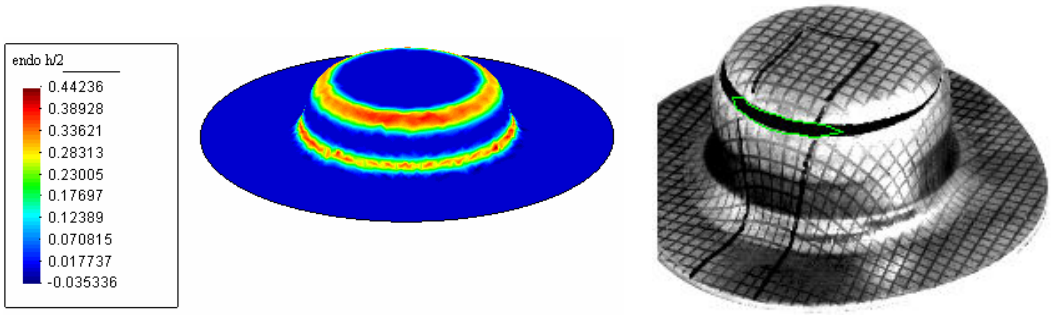



Figure 5.15 Effort du poinçon




a) API_8pas b) Stampack

Figure 5.16 Diagrammes FLD obtenues par l'API et Stampack




a) Endommagement obtenu par l'API b) Rupture dans un essai expérimental

Figure 5.17 Endommagement numérique et expérimental

Remarque : Nous avons effectué l'emboutissage avec Alu et nous avons obtenu les résultats similaires.

## 5.3. Simulation de l'emboutissage ERICHSEN (en acier doux DC04)

L'emboutie ERICHSEN a été traité de la même manière que le précédent. La géométrie est présentée en figure 5.18; le matériau et les conditions de formage de l'embouti ERICKSEN sont présentés dans le tableau 5.2.

En figure 5.19 les distributions de la variation d'épaisseur obtenues avec l'API, Abaqus et Stapmpack sont présentées. On trouve que les trois logiciels donnent des résultats assez cohérents. Deux pics d'amincissement à 5 mm et 15 mm à partir du centre sont observés. L'API donne un amincissement plus important que les deux autres au voisinage du centre en raison, là aussi, de son modèle de frottement simplifié.

En figure 5.20 les distributions des contraintes de Von-Mises sont présentées. Les résultats sont ici aussi assez cohérents. On note 2 pics à 5 mm et 15 mm à partir du centre.

En figure 5.21 les iso-couleurs de la variation relative de l'épaisseur sont présentées. Les trois logiciels ont des distributions assez proches. L'API donne un amincissement plus important que les deux autres au voisinage du sommet.

En figure 5.22 l'effort du poinçon en fonction de son déplacement est présenté. Les trois logiciels donnent des résultats en accord avec les résultats expérimentaux du CETIM. L'API donne un effort un peu plus important que l'effort expérimental.

En figure 5.23 les courbes FLC et les diagrammes FLD obtenus avec l'API et Stampack sont présentés. On constate que les deux logiciels donnent les FLD très similaires.

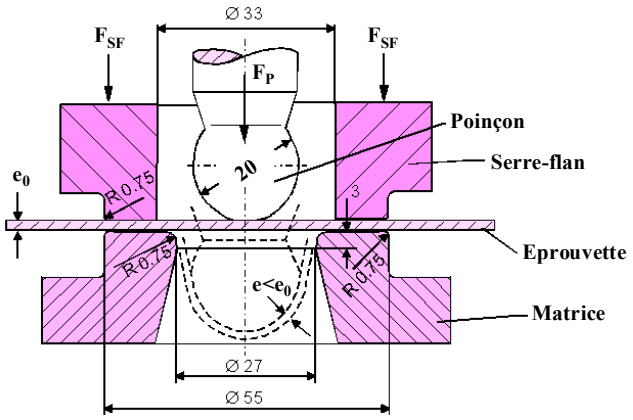



Figure 5.18 Géométrie de l'essai ERICKSEN

- Diamètre du poinçon: 20 mm
- Diamètre de la matrice: 27 mm
- Dimension du flan: 90 × 90 mm
- Lubrifiant: Graisse graphitée
- Effort serre flan: 1000 daN
- Vitesse poincon : 5-20

Tableau 5.2 Matériau et condition de formage de l'essai ERICKSEN

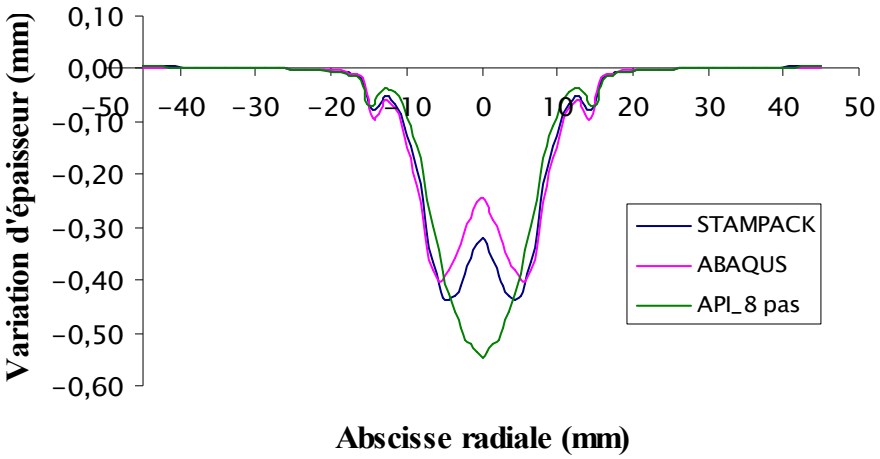



Figure 5.19 Variation relative de l'épaisseur suivant la direction radiale

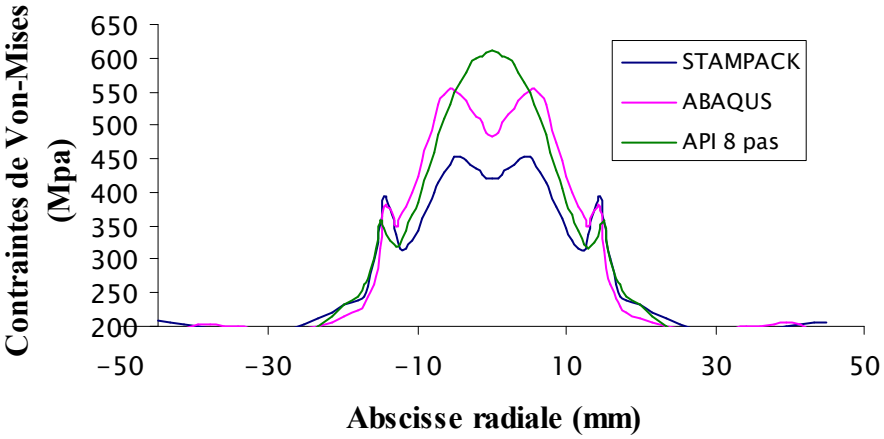
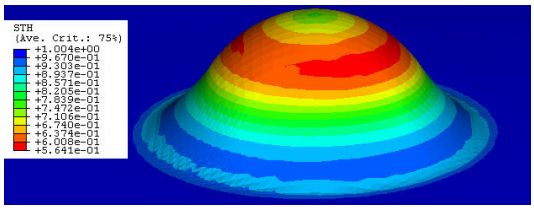
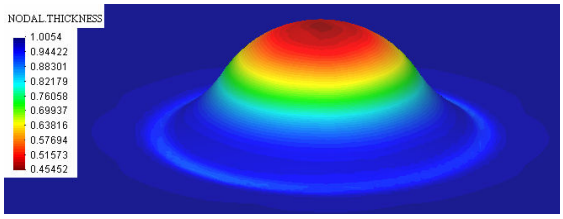


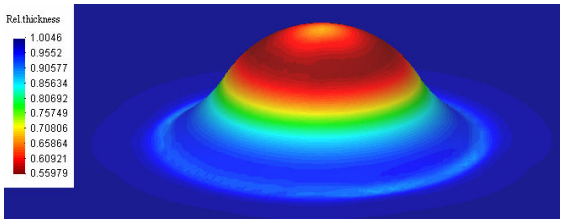

Figure 5.20 Distribution de la contrainte de Von-Mises suivant la direction radiale




a) ABAQUS




b) API




c) STAMPACK

Figure 5.21 Iso-couleurs de variation relative d'épaisseur

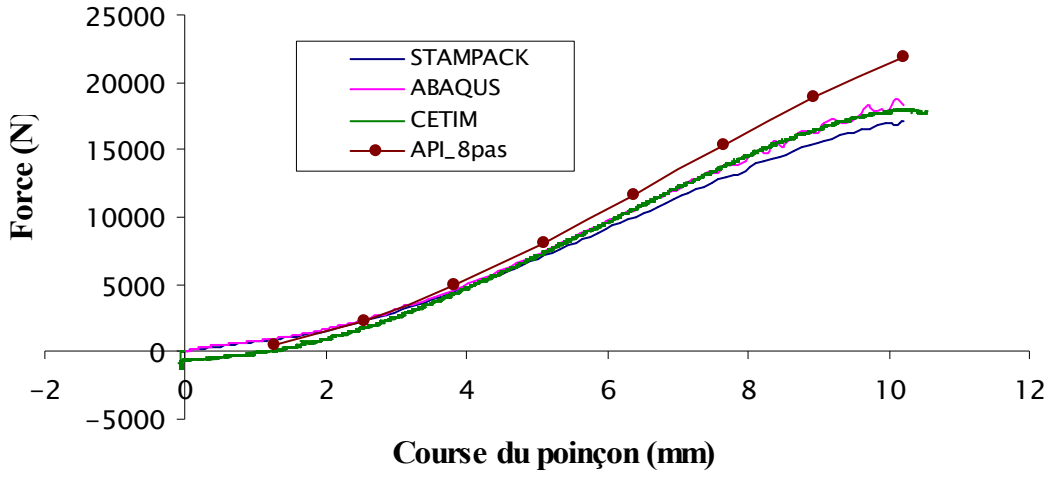
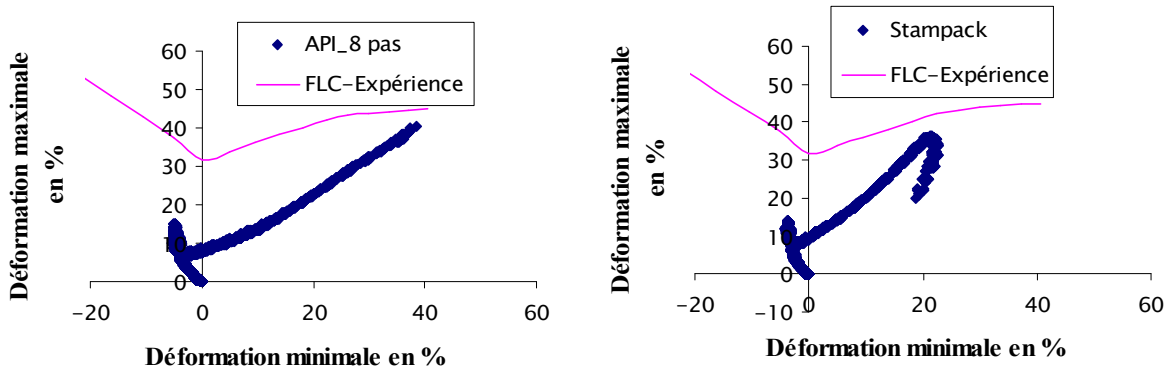



Figure 5.22 Effort du poinçon en fonction de son déplacement




a) API_8pas b) Stampack

Figure 5.23 Courbes FLC et diagrammes FLD

Remarque : Nous avons effectué l'emboutissage avec Alu et nous avons obtenu les résultats similaires.

## 5.4. Emboutissage d'un pot d'échappement

La description du problème est donnée dans la figure 5.24 et la figure 5.25. L'emboutissage d'un pot d'échappement est un essai très difficile à réaliser. Au début le CETIM utilisait un flan ayant la même longueur que les outils, des plissements se produisaient au niveau du col du pot ; ce phénomène était aussi observé dans la simulation avec Stampack. Ensuite, le CETIM a utilisé un flan plus long permettant d'empêcher trop d'avalement de la tôle et donc d'éviter ce problème de plissement. Mais ce rajout augmentait la force de retenue et occasionnait une rupture dans la zone du rayon d'entrée matrice (zone

rouge en figure 5.26). Dans certaines zones, des feuilles de téflon ont été utilisées pour faciliter l'avalement et ainsi éviter la casse ; dans d'autres zones, des cales en aluminium ont été utilisées pour empêcher l'avalement et ainsi éviter le plissement. Nous avons fait beaucoup d'essais numériques avec différents coefficients de frottement correspondant aux téflons et aux cales dans les essais. Les résultats obtenus sont assez satisfaisants.

En figure 5.25 les courbes FLC et les diagrammes FLD sont présentés. On constate que : Stampack, l'API et l'essai du CETIM donnent les FLD très similaires. Certains points ont dépassé la courbe FLC, cela implique un le risque de rupture sur le rayon d'entrée matrice. En figure 5.26 les distributions de la variation relative d'épaisseur sont présentées. Les deux simulations numériques donnent 33.7% et 32.5% d'amincissement dans la zone critique, ces valeurs sont très proches de la valeur expérimentale de 34.4%.

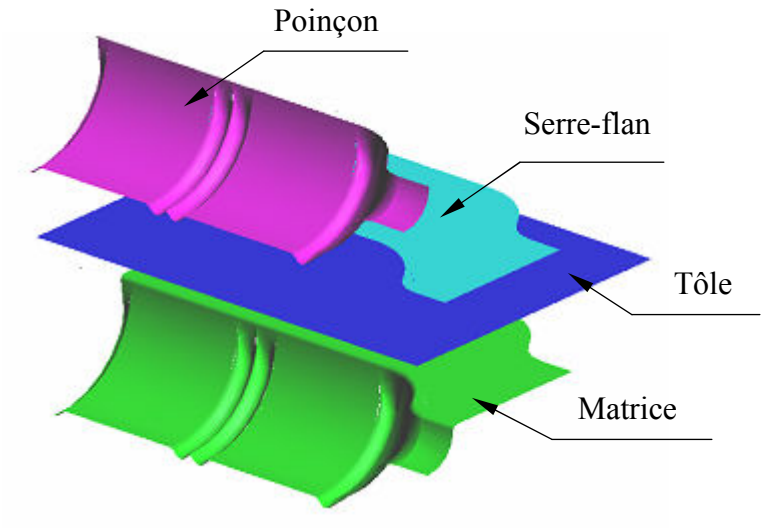



Figure 5.24 Emboutissage du pot d'échappement (Stampack)

- Flan : 170 × 465 × 1mm
- Vitesse du poinçon: 15 mm/s
- Course du poinçon: 45 mm
- Force du serrage: 1 000 daN
- Acier doux DC04

Tableau 5.3 Matériau et condition de formage du pot d'échappement

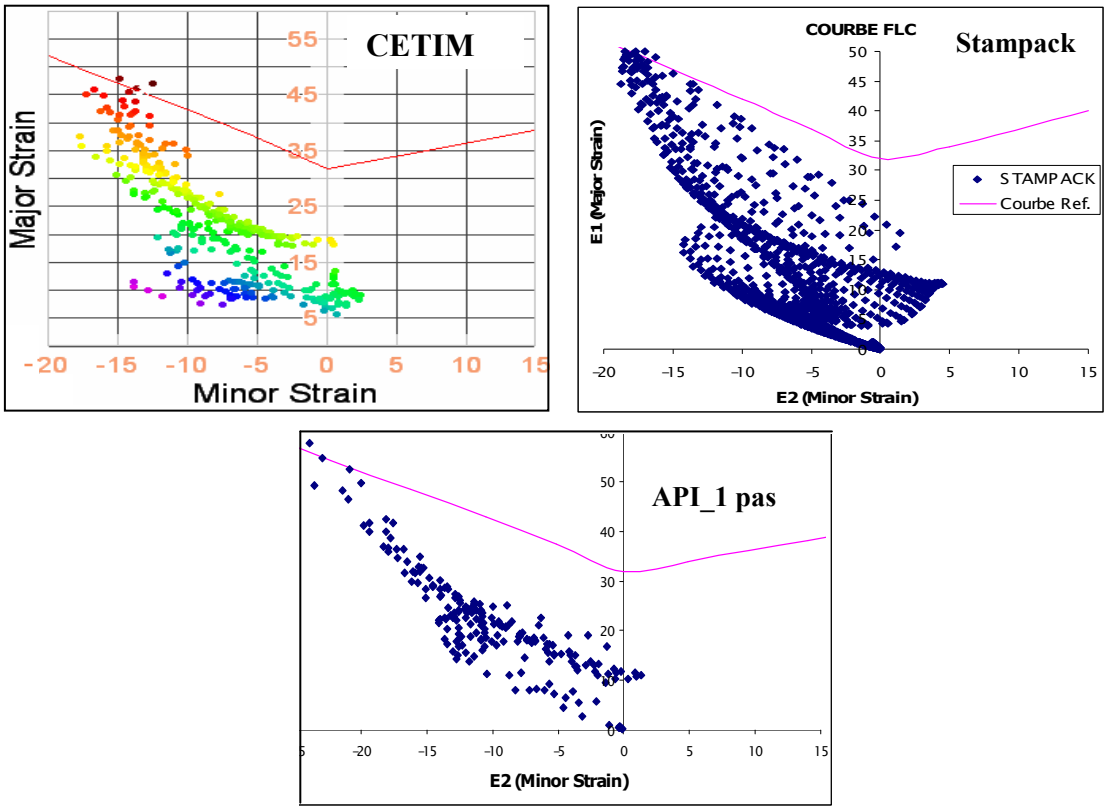
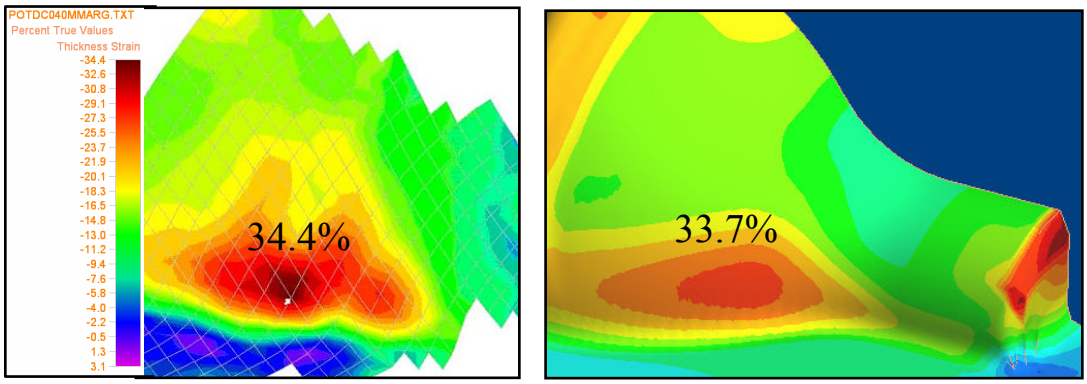
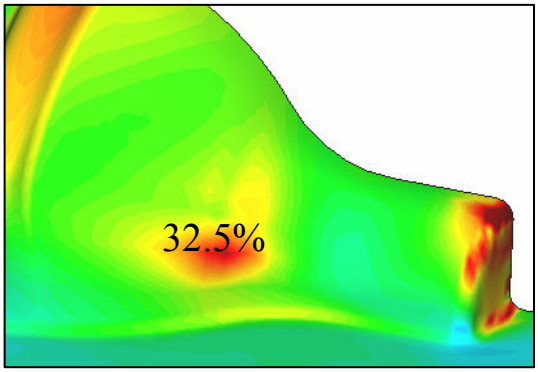



Figure 5.25 Courbes FLC et diagrammes




a) CETIM (Essai expérimental) b) Stampack (Approche Incrémentale)



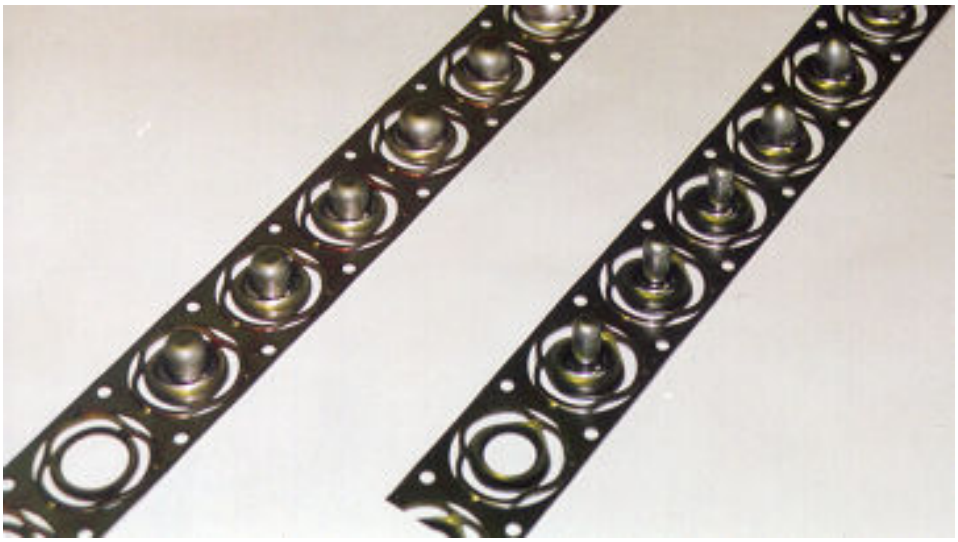

c) API (Approche Pseudo Inverse1 pas)

Figure 5.26 Variation relative d'épaisseur

## 5.5. Simulation d'emboutissage en 3 passes

Un godet axisymétrique est réalisé par emboutissage 3 passes. L'objectif du procédé de multi-passes est d'optimiser le chemin de déformation pour obtenir le maximum de formabilité : la plus grande profondeur et le plus petit rayon sous le poinçon ou la matrice.

La photo de l'emboutissage du godet axisymétrique en 3 passes est présentée en figure 5.27. L'emboutissage est effectué continuellement sur une bande de tôle. Les dimensions géométriques sont données en figure 5.28: les premières deux passes sont conçues pour obtenir des états de déformations bi-directionnelle (traction suivant la direction radiale mais aussi suivant la direction circonférentielle) afin de ne pas dépasser la courbe limite de formage.



s

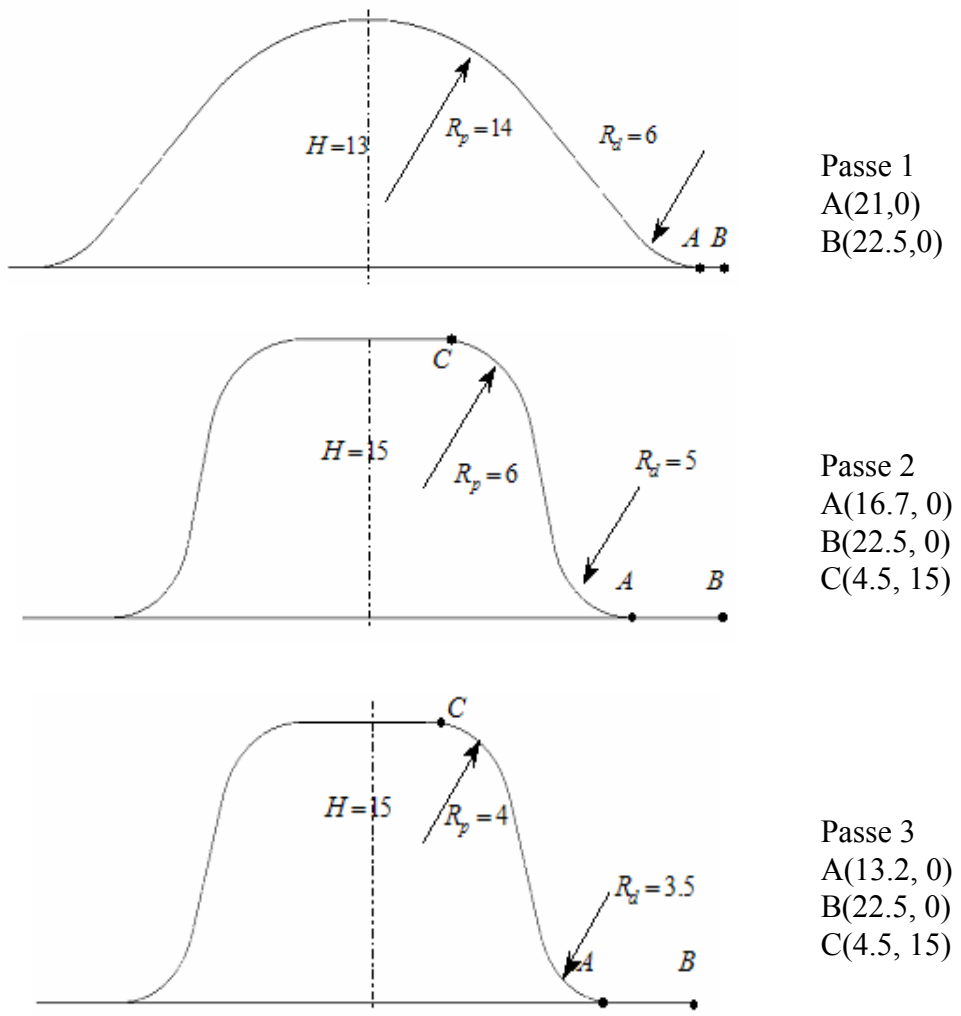



Figure 5.28 Géométries des 3 passes

Il est impossible de traiter ce cas test avec l'AI. Même pour l'API, ce test présente plusieurs difficultés dues principalement à:

1) Fort avalement de la tôle. Le contour de la pièce entrant dans la matrice, cela exige la relocalisation des nœuds sur la pièce 3D. Ce problème est néanmoins résolu par notre développement récent sur la technique de relocalisation.
2) Traitement des attaches. La tôle est découpée par 6 couteaux en forme d'arc (Figure 5.29) avant l'emboutissage, cela donne 3 attaches qui maintient les emboutis sur la bonde et empêchent l'avalement.. On ne peut pas simuler ces attaches par l'API, car l'API exige la connaissance de la forme finale de la pièces et des attaches. Nous avons remplacé ces 3 attaches par 3 forces de retenue et simulé ce test sans attaches. Les forces de retenue sont déterminées par des simulations préalables avec Abaqus (Figure 5.30).

3) Détermination des formes intermédiaires de la pièce. Dans la 3e passe, le godet de grand diamètre doit être enfoncé par le poinçon dans la matrice d'un petit diamètre, cela implique des cambrage et décambrages et un fort amincissement de la tôle au rayon du poinçon. La détermination des formes intermédiaires de la pièce est réalisée par les relations géométriques entre la tôle et les outils (Figure 5.31).

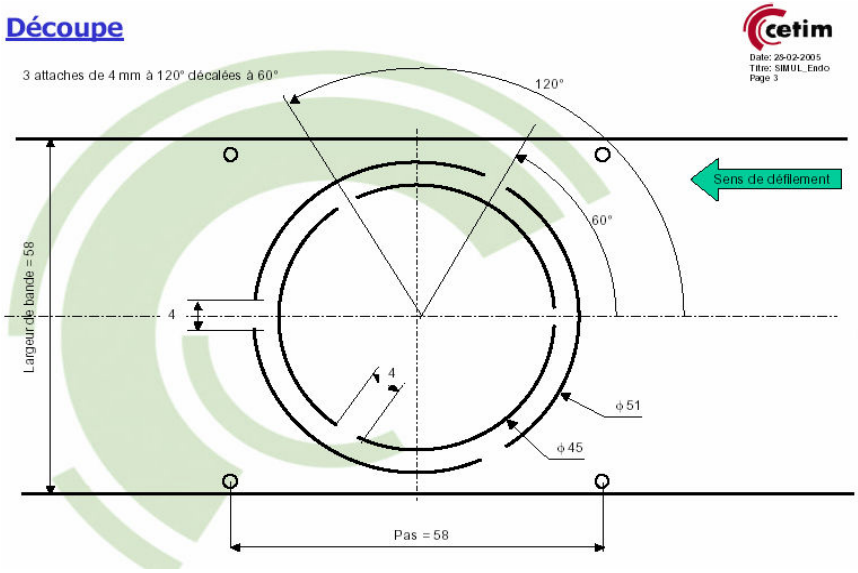



Figure 5.29 Géométrie et découpage du flan initial

Données techniques :

- Tôle Acier DC04 d'épaisseur 1 mm.
- Utilisation d'un serre-flan uniquement pour la passe 1 :
  - effort du serre-flan à l'attaque du poinçon : 6.05 kN
  - effort de serre-flan au PMB : 11.6 kN
- Profondeurs des 3 passes : 13 mm, 15 mm, 15 mm.
- coefficients de frottement utilisés : 0.02 entre flan et matrice et 0.144 pour le reste.

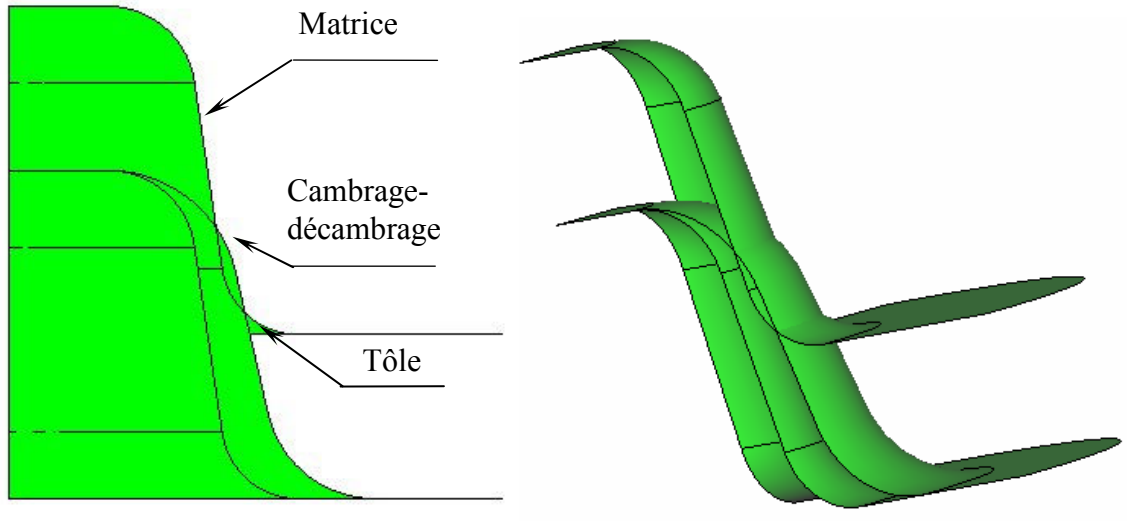



Figure 5.30 Détermination des formes intermédiaires de la tôle dans la 3e passe

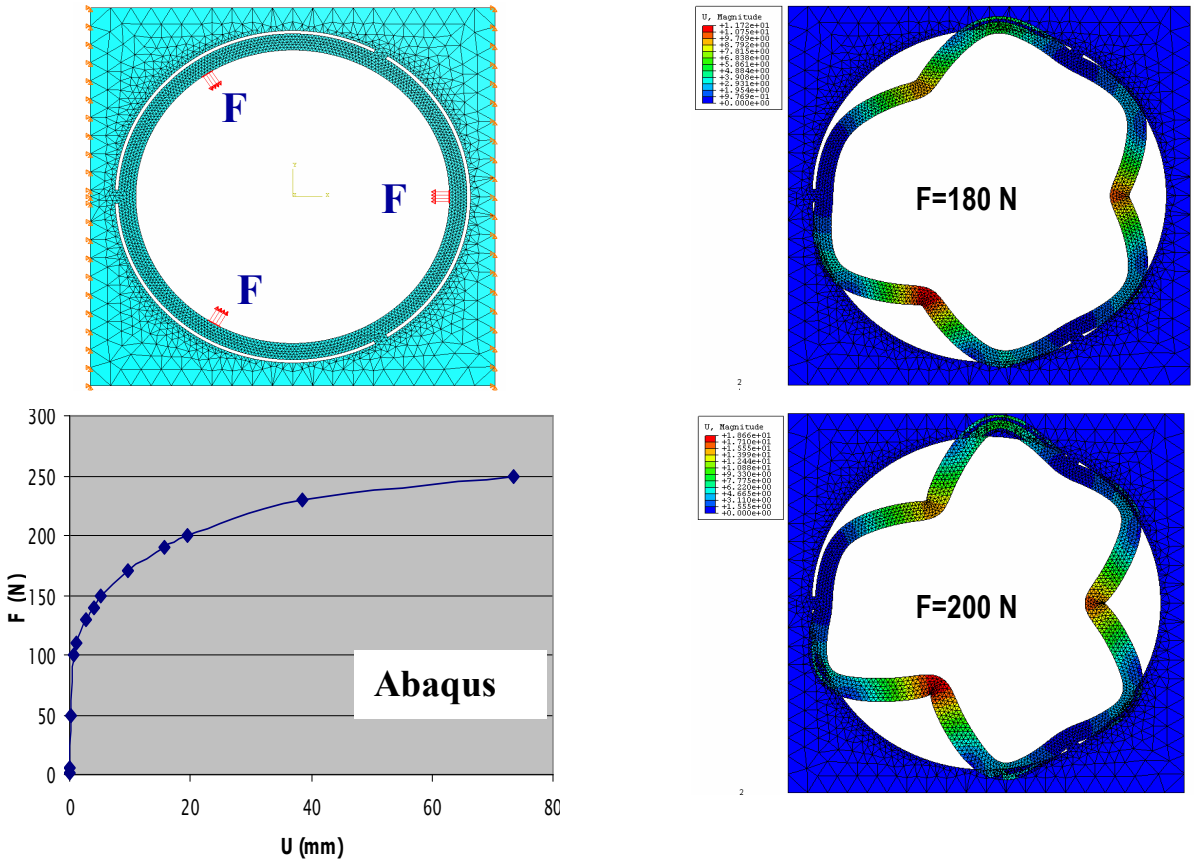


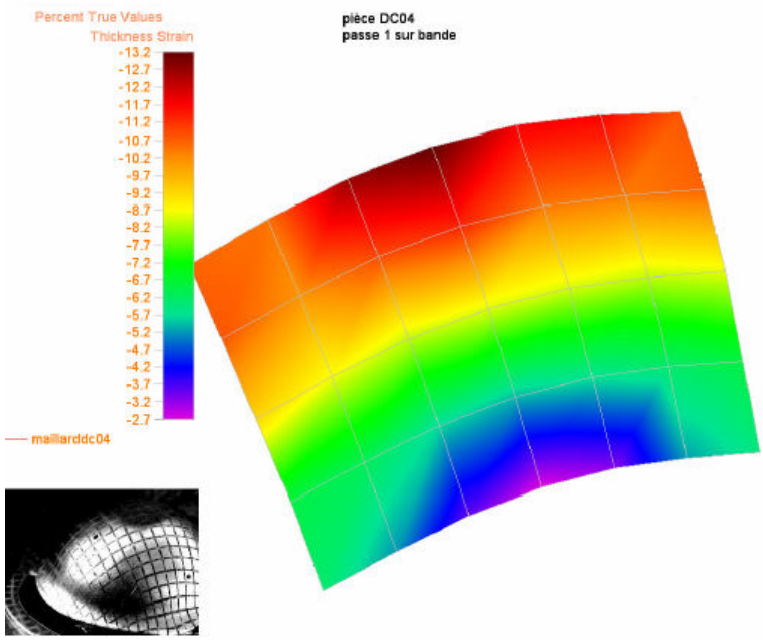

Figure 5.31 Simulation des attaches pour déterminer leurs forces de retenue

**1) Passes 1 :**

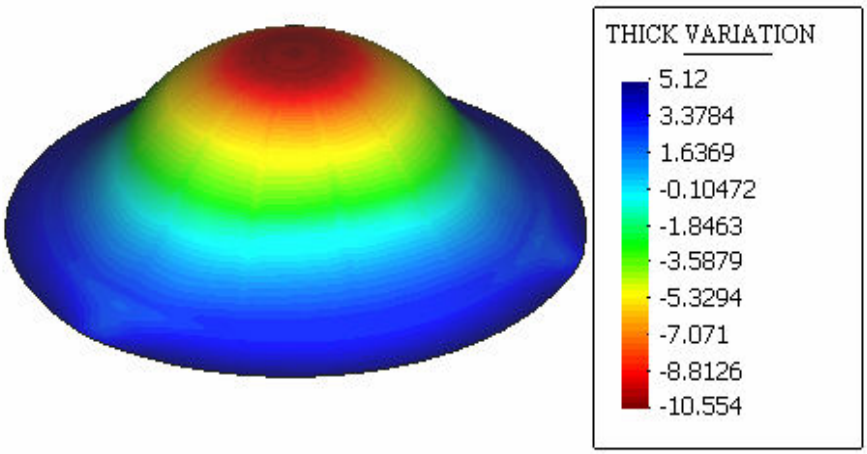
La figure 5.32 montre la bonne cohérence des distributions de la variation d'épaisseur entre nos résultats obtenus avec l'API et les résultats du CETIM obtenus par des essais expérimentaux. On

note que l'amincissement maximal de l'épaisseur est de 13.2% pour le CETIM et de 10% pour l'API.

La comparaison des diagrammes FLD montre aussi une bonne cohérence entre les répartitions des déformations obtenues avec l'API et les essais. Les points repérés par la FLD du CETIM sont situés dans une zone entre -10% et +7% de la déformation minimale E2 et dans une zone comprise entre +5% et +15% pour la déformation maximale E1. Les relevés l'API, plus nombreux, car l'ensemble des points du maillage éléments finis est pris en compte, sont également situés dans cette zone.

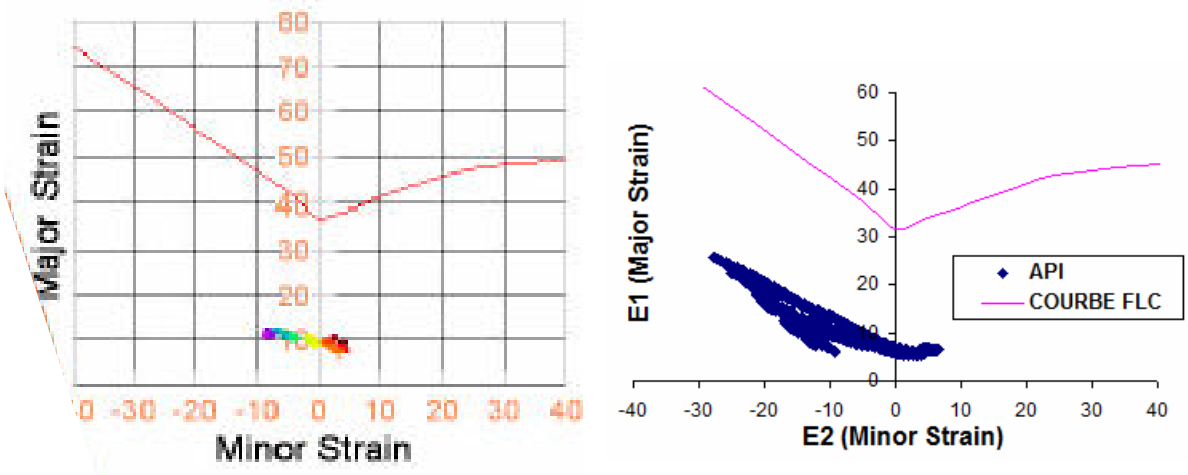



a) Essais expérimental du CETIM




b) Simulation numérique avec l'API

Figure 5.32 Variation relative de l'épaisseur obtenue avec l'API et les essais pour la passe 1




a) Essais du CETIM

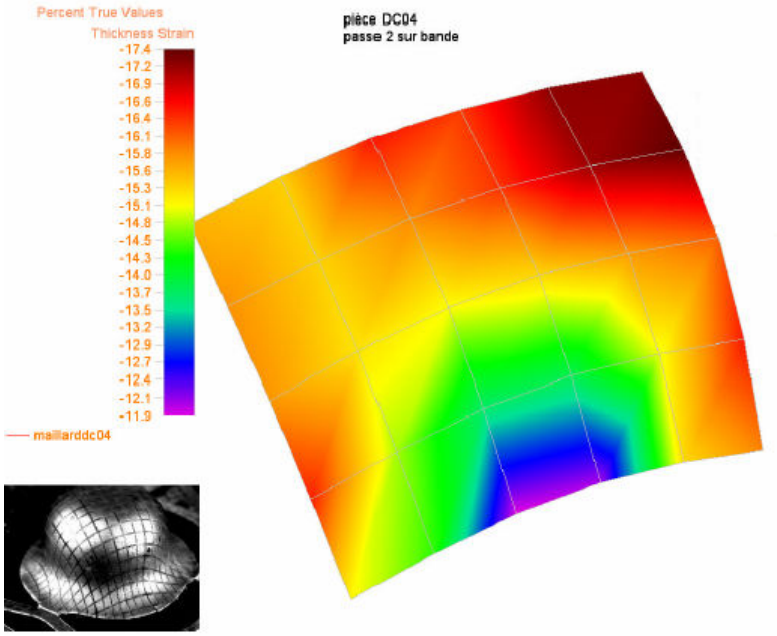
b) Calcul de l'API

Figure 5.33 Courbe FLC et diagrammes FLD – Passe 1

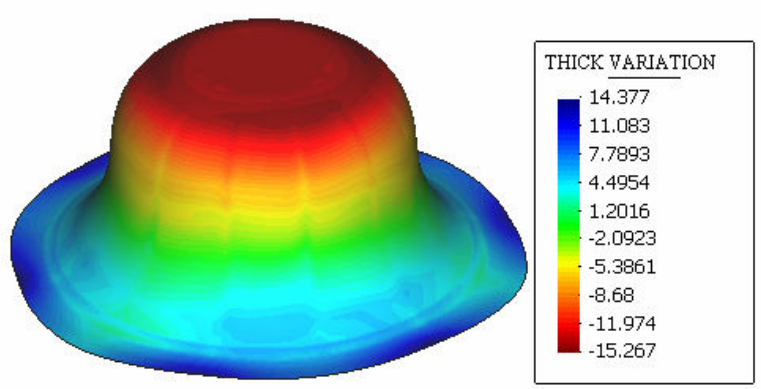
**2) Passes 2**

La répartition des épaisseurs est du même ordre de grandeur pour le CETIM et pour l'API, on observe un amincissement maximal de 17.4% pour le CETIM et 15.2% pour l'API (Figure 5.34). Cet amincissement maximal concerne la partie supérieure du godet située juste au bord du rayon supérieur de la pièce.

Pour la passe 2, on retrouve un ensemble de point commun situé entre -5 et +5% pour la déformation minimale E2 et entre +10 et +20% pour la déformation maximale E1 dans les cas de l'API et du CETIM (Figure 5.35).




a) Essais expérimental du CETIM




b) Simulation numérique avec l'API

Figure 5.34 Variation relative de l'épaisseur obtenue avec l'API et des essais – Passe 2

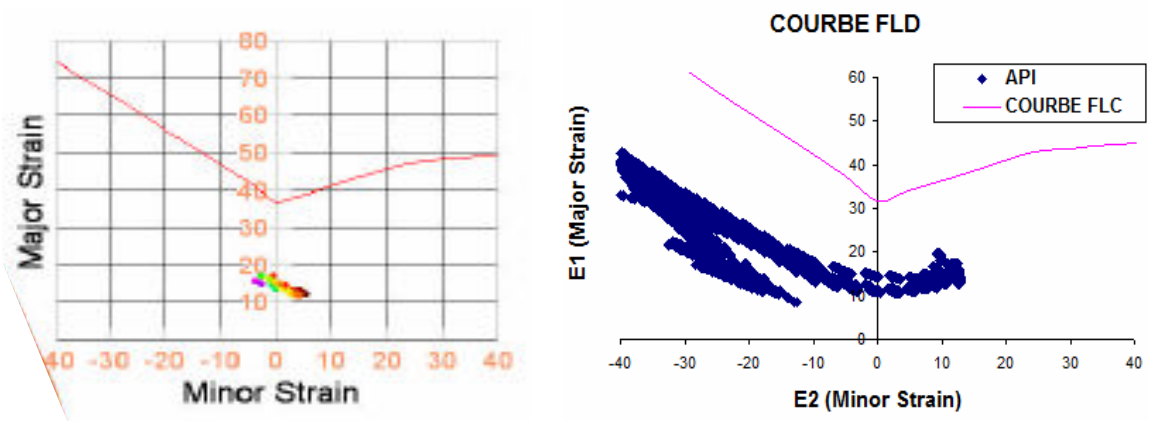
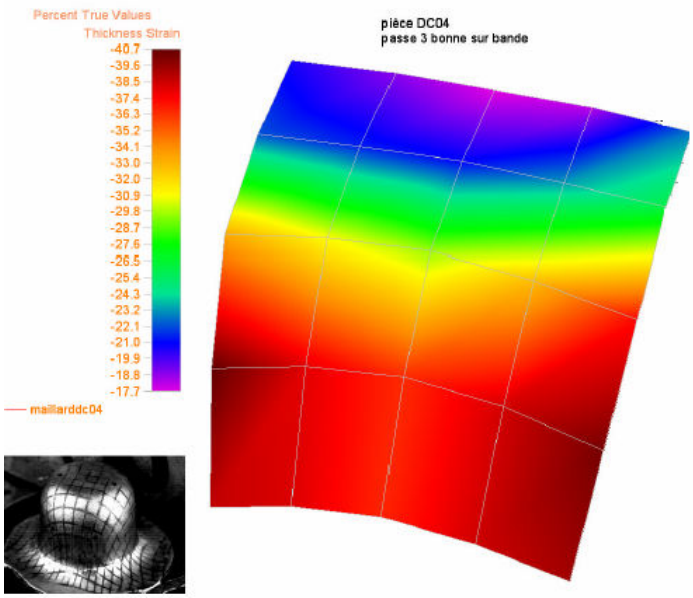



Figure 5.35 Courbe FLC et diagrammes FLD – Passe 2

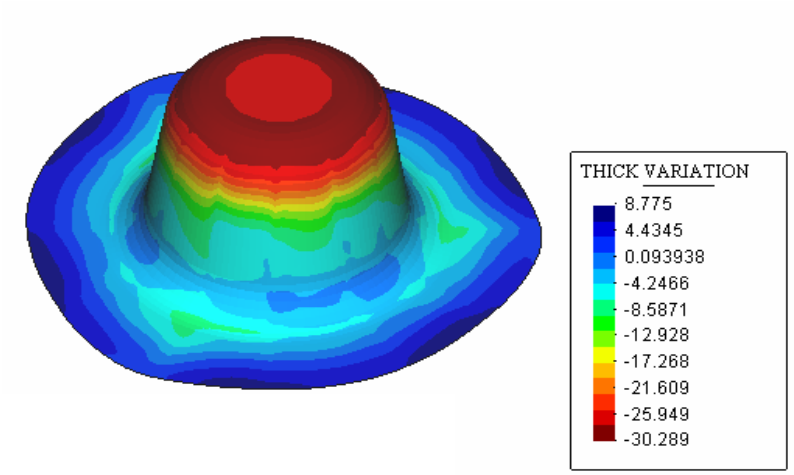
### 3) Passes 3

La répartition des épaisseurs présente un plus grandécart entre les résultats numériques et expérimentaux; 30% d'amincissement pour l'API et 40% pour le CETIM (Figure 5.36). La raison de cet écart due au fait que l'on néglige l'effet de l'endommagement ou/et que les effets de cambrage-décambrage et les effets du frottement n'ont pas été bien modélisés. Malgré cet écart, l'API permet de trouver correctement la zone d'amincissement maximal.

Pour la passe 3, les résultats FLD numériques et expérimentaux sont également cohérents (Figure 5.37). Dans la configuration « Pièce bonne », (cette configuration correspond à la réalisation d'une pièce sans aller jusqu'à la rupture de cette dernière) l'ensemble des points relevés est cette fois situé au plus près de la courbe limite de formage, juste avant la rupture.

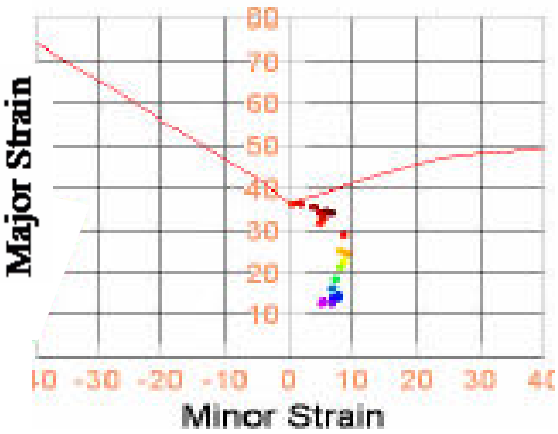



a) Essais expérimental du CETIM




b) Simulation numérique avec l'API

Figure 5.36 Variation relative d'épaisseur obtenue avec l'API et les essais pour la passe 3



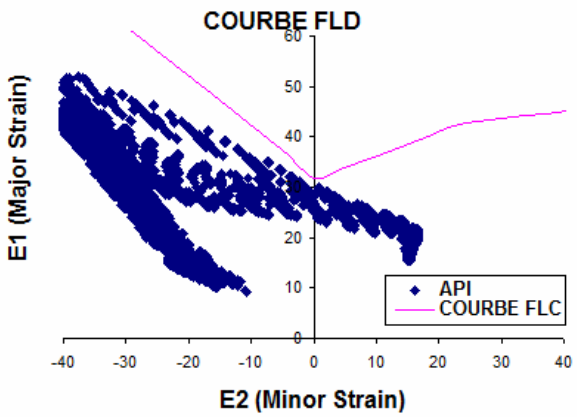




Figure 5.37 Courbe FLC et diagrammes FLD pour la passe 3

## 5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué la validation numérique et expérimentale de l'API sur des exemples académiques et industriels.

Tout d'abord, un essai d'emboutissage d'une boîte carrée (benchmark NUMISHEET'93) a été utilisé pour la validation. Les résultats numériques ont été comparés avec ceux du logiciel ABAQUS. L'influence du nombre de pas a été étudiée et il est démontré que les variations de l'épaisseur ne sont pas affectées par le nombre de pas, elles sont proches de celles obtenues par ABAQUS. Par contre, l'API apporte une réelle amélioration dans l'estimation des contraintes par rapport à l'AI, notamment vis-à-vis de la prise en compte des phases de cambrage-décambrage. Les algorithmes d'intégration de la loi de comportement sont également testés. Les résultats obtenus en termes de contraintes sont cohérents. Pour le temps de calcul, l'utilisation des algorithmes $\gamma$-RR et ASD permet de réduire sensiblement le temps de calcul par rapport à l'algorithme ARR. Une comparaison de l'endommagement avec les résultats ABAQUS montre que les zones d'endommagement sont bien situées d'un point de vue qualitatif. Les deux essais suivants concernent un emboutissage de type SWIFT et un emboutissage ERICHSEN. Les résultats de l'API sont comparés avec ceux des logiciels ABAQUS et STAMPACK en terme de variations d'épaisseur et de la contrainte de Von-Mises pour une direction radiale. Les courbes numériques d'effort-déplacement du poinçon sont comparées avec les résultats expérimentaux du CETIM, les diagrammes FLD de l'API et de STAMPACK sont examinés en regard de la FLC expérimentale. Les résultats de l'API sont très satisfaisants par rapport aux résultats obtenus par ces logiciels incrémentaux classiques. Une validation sur des cas plus industriels ; d'une part l'emboutissage d'un pot d'échappement d'une part, d'autre part l'emboutissage multi-passes (3 passes) d'un godet axisymétrique, s'appuie sur la comparaison des courbes FLD et de la variation d'épaisseur par rapport aux mesures expérimentales fournies par le CETIM. Là encore, la comparaison des résultats de l'API avec les mesures est très satisfaisante tant d'un point de vue qualitatif que quantitatif.

# Chapitre 6 Développement des Outils Numériques pour des Applications Spécifiques Industrielles

## 6.1. Création de « faux outils » pour le retour élastique

### 6.1.1. Introduction

Le retour élastique est un phénomène fréquent dans l'emboutissage des tôles minces. En effet, après le retrait des outils le retour élastique conduit souvent à une géométrie déformée de la pièce et donc à des difficultés d'assemblage. Pour obtenir une pièce de bonnes dimensions, l'effet du retour élastique doit être compensé par de « faux outils » avec des déformations inverses par rapport à celles engendrées par le retour élastique de la pièce.

Dans la pratique (figure 6.1), la simulation de l'emboutissage donne un maillage de la pièce correcte, appelé « maillage de l'embouti », qui est "collé" aux outils puis la simulation du retour élastique donne le maillage de l'embouti déformé; la différence entre ces deux maillages permet de déterminer les corrections à appliquer sur les outils pour obtenir un maillage représentant la géométrie des « faux outils », appelé « faux maillage », qui a les même numéros des nœuds et les mêmes connectivités des éléments que le maillage de l'embouti. Les corrections peuvent être considérées comme des déplacements de nœuds du maillage de l'embouti.

Puisque ces problèmes sont fortement non linaires, les opérations ci-dessus doivent être répétées plusieurs fois pour obtenir un embouti de bonne dimension.

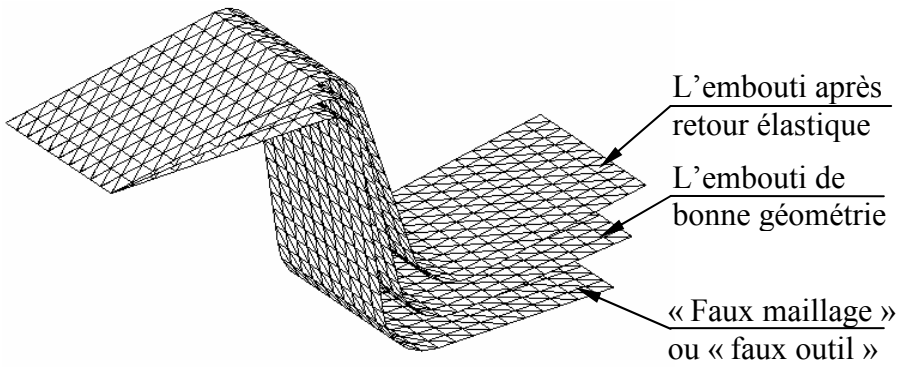



Figure 6.1 Correction du retour élastique par « faux outil »

L'objectif de cette étude est de transformer le « faux maillage » en surfaces B-spline pour faciliter l'usinage. Ve que la création d'une seule surface pour les « faux outils » est très difficile, notre travail consiste à construire les surfaces des « faux outils » une par une à partir des surfaces des outils et également le maillage de la tôle après l'emboutissage mais avant le retour élastique et le maillage des « faux outils ». Les surfaces construites des « faux outils » peuvent être considérées comme les surfaces des outils « déformées ».

### 6.1.2. Méthodologie

Le « maillage de l'embouti » épouse bien les surfaces des outils. Le « faux maillage » est obtenu par des corrections de positions de nœuds du « maillage de l'embouti ». Si certains points de chaque surface des outils se déplacent avec le « maillage de l'embouti » pour atteindre le « faux maillage », nous pouvons construire la surface correspondante des « faux outils » en utilisant ces points déplacés (Fig. 6.2).

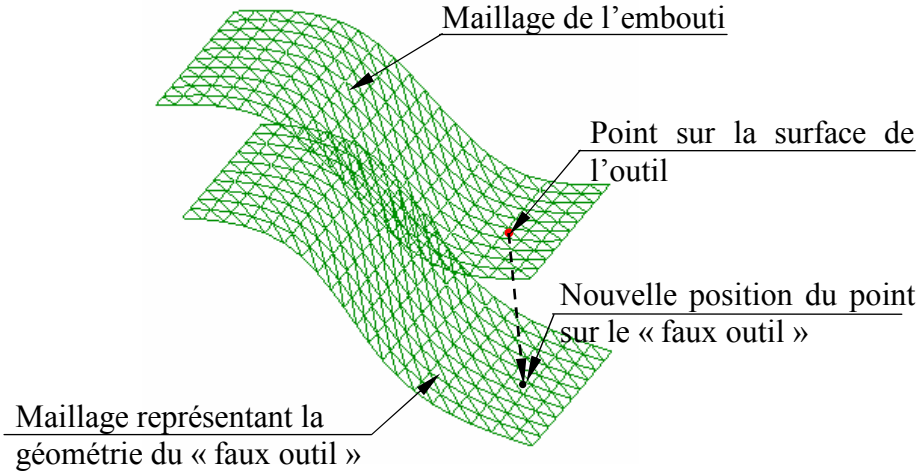



Figure 6.2 Détermination de la nouvelle position d'un noeud sur faux outil

Concrètement, une surface B-spline est définie par un certain nombre de points de contrôle, par des « knots », par les multiplicités de ces knots et par les degrés d'interpolations. L'idée de base est de créer une surface B-spline ou de prendre la surface correspondante des outils comme surface de référence. Elle doit être correctement construite et proche des nouvelles positions des points considérés pour obtenir une nouvelle surface (la surface des « faux outil »). La forme de cette pièce peut être très complexe et la taille des surfaces très variées. La principale difficulté est donc de créer cette surface de référence et de déplacer les points de contrôle dans l'espace.

Nous proposons de construire les surfaces de « faux outils » en 4 étapes :

1) Mailler les surfaces des outils une par une pour obtenir un maillage initial des surfaces en respectant scrupuleusement les frontières. Ce maillage initial et le maillage de l'embouti épousent parfaitement les surfaces des outils.
2) Localiser chaque nœud du maillage initial dans le maillage de l'embouti : cela implique de connaître l'élément auquel appartient ce noeud et également les coordonnées surfaciques locales de ce nœud dans élément (Fig. 6.2). La méthode proposée au chapitre 3.5 est utilisée pour localiser le noeud rapidement et de manière fiable.
3) Déterminer la nouvelle position du nœud dans le maillage « faux outil ».
4) Reconstruire chaque surface des « faux outils » à partir des points déplacés par une méthode d'approximation [Fisher 2004]. Pour que la nouvelle surface passe par tous ces points déplacés (ou presque), on minimise les distances entre ces points sur le maillage des « faux outils » et les points (ayant les mêmes coordonnées paramétriques $u$ et $v$) sur la nouvelle surface approximative. La surface de référence est créée ou choisie à l'aide de la plateforme « Open CASCADE ». [opencascade 2006]

Remarque : dans l'étape 1, nous utilisons un code « maison » pour mailler les surfaces des outils.

### 6.1.3. Organigramme du développement

Comme mentionné précédemment, pour construire une surface, il faut créer des surfaces B-spline, manipuler ces surfaces en déplaçant leurs points de contrôle et minimiser les distances grâce à la méthode des moindres carrés.... Un outil puissant de développements est

donc fortement nécessaire. Nous utilisons les librairies gratuites de « Open CASCADE » qui est un noyau de CAD/CAM/CAE et une plateforme puissante de développements pour les applications de modélisation 3D. Il se compose de librairies d'objets réutilisables en C++ et d'une collection d'outils de développements dont les sources de code sont ouvertes.

Nous avons utilisé les modules suivants fournis par « Open CASCADE » dans ce travail:

- Lecture d'un fichier IGES.
- Écriture d'un fichier IGES.
- Description et construction d'une surface B-spline.
- Optimiseur math_BFGS.

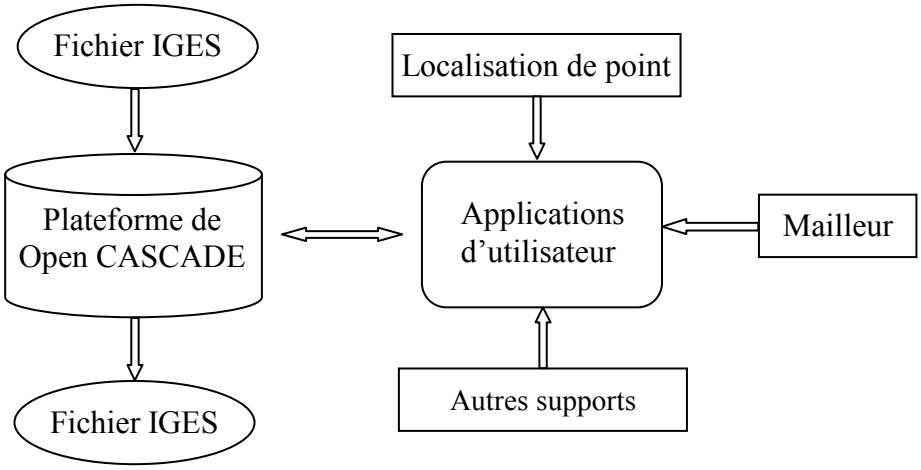



Figure 6.3 Organigramme de développements

Comme indiqué dans la figure 6.3, nous combinons « Open CASCADE » avec la technique de « localisation de point », le mailleur « maison » et d'autres techniques.

### 6.1.4. Description et construction d'une surface B-spline dans « Open CASCADE »

#### 1) Description d'une surface B-spline

Dans « Open CASCADE », une surface B-spline est définie par :

- Des points de contrôle, en matrice de dimension $m \times n$.
- Les « knots » suivant les directions $u$ et $v$.
- Les multiplicités des « knots » suivant les directions.
- Les degrés d'interpolations pour $u$ et $v$.
- Les périodicités suivant les directions $u$ et $v$.

**2) Méthodes disponibles pour créer une surface B-spline**

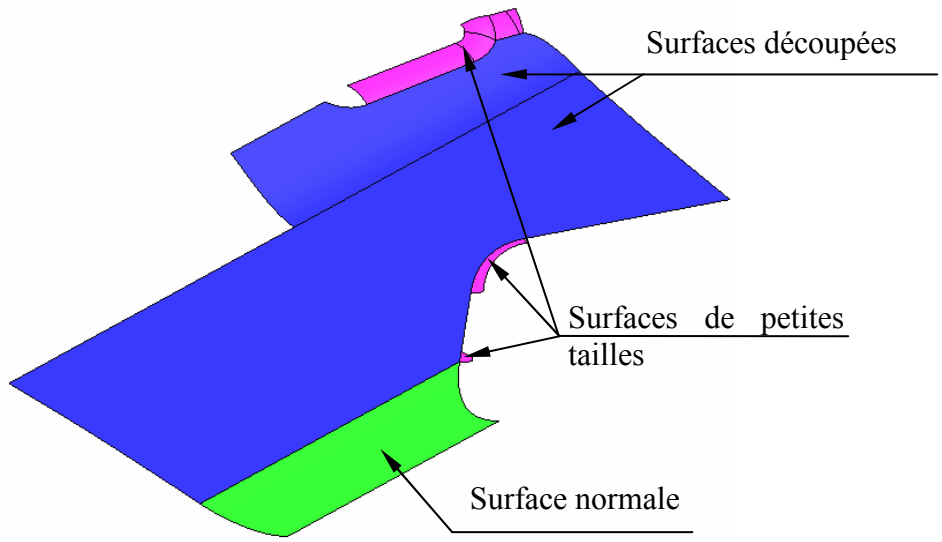



Figure 6.4 Différents types de surfaces d'une pièce « industrielle »

Afin de garantir que la surface de référence soit de bonne qualité et suffisamment proche des points à approximer, on doit d'abord choisir une surface sur les outils ou créer une nouvelle surface selon la forme et la taille des surfaces outils. Comme indiqué en figure 6.4, il existe des surfaces normales qui ont quatre côtés pour contour et dont la forme est idéale; des surfaces découpées qui sont souvent très difficile à reconstruire; des surfaces de petites tailles souvent facile à reconstruire mais avec des points de contrôle difficilement déplaçables par la méthode d'optimisation parce que le déplacement peut être beaucoup plus grand que la taille de la surface.

En fait, nous utilisons deux méthodes pour construire une surface B-spline avec OpenCascade:

a) la fonction: GeomFill_BsplineCurves(c1,c2,c3,c4,GeomFill_CoonsStyle);

b) et la fonction: BRepBuilderAPI_MakeFace(contour);

La méthode a) consiste à construire une surface B-spline à partir de 2 à 4 courbes B-spline qui forment un contour. Cette méthode donne souvent une surface de bonne qualité.

La méthode b) consiste à construire une surface B-spline à partir d'un contour. Si le contour possède 2 à 4 côtés, la surface est de bonne qualité. Si le nombre dépasse 4, la qualité de la surface n'est pas garantie et la construction même peut échouer. Comme indiquée en figure 6.4, la surface construite à partir de 5 côtés n'est pas de bonne qualité.

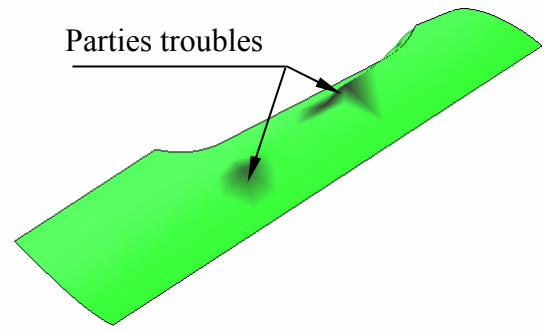



Figure 6.5 Surface construite à partir du contour ayant 5 côtés

En conséquence, si la surface des outils est une surface normale ou une surface découpée, on la prend comme surface de référence; si c'est une surface de petite taille, on discrétise ses côtés en une série de points et on les déplace avec le maillage de l'embouti sur le « faux maillage » puis on reconstruit les côtés en courbe B-spline. Finalement on construit la surface B-spline qui va être prise en compte comme surface de référence.

**Remarque:** si la surface des outils prise comme référence n'est pas une surface B-spline, on doit la convertir en B-spline et élever ses degrés d'interpolation en paramètre $u$ et $v$, si ses degrés sont au dessous de 3, pour qu'il ait une bonne déformabilité. L'élévation des degrés ne modifie que les multiplicités des « knots ».

### 6.1.5. Approximation d'une surface par la méthode des moindres carrés

Soit une série de points $m \times n$, notée $D_{kl}(1 \le k \le m, 1 \le l \le n)$. Avec les degrés désirés, suivant les direction $u$ et $v$, on essaie de trouver une surface B-spline $S(u,v)$ qui approxime les points $D_{kl}$ dans le sens des moindre carrés. Plus précisément, on doit trouver les points de contrôle $P_{ij}(1 \le i \le e, 1 \le j \le f)$ de la surface B-spline $S$, où $e$ et $f$ sont les nombres de points de contrôle en lignes et en colonnes, choisis par utilisateur, pour que la fonction suivante soit minimisée :

$$f\left(P_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left|S(u_k, v_l) - D_{kl}\right|^2 \qquad (6.1)$$

où les coordonnées des points de contrôle sont les variables de conception. Par contre, dans notre travail, les points par lesquels passe la surface approximative ne sont par rangés en matrice $m \times n$. Ils sont donnés automatiquement par le mailleur.

Nous utilisons la fonction objective suivante :

$$f\left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right) = \sum_{i=1}^{nbPnt} \left|C_i\left(u,v\right) - D_i\left(u,v\right)\right|^2 \qquad (6.2)$$

où $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont les points de contrôle, dont les coordonnées sont les variables de conception. $nbPnt$ représente le nombre des points par lesquels la surface approximative doit passer. Les points donnés sur la surface des outils et les points correspondants sur la surface approximative ont les mêmes coordonnées paramétriques $u$ et $v$.

### 6.1.6. Schéma de construction d'une surface

La figure 6.6 montre le schéma de construction d'une surface des « faux outils » à partir des points déplacés de la surface outils.

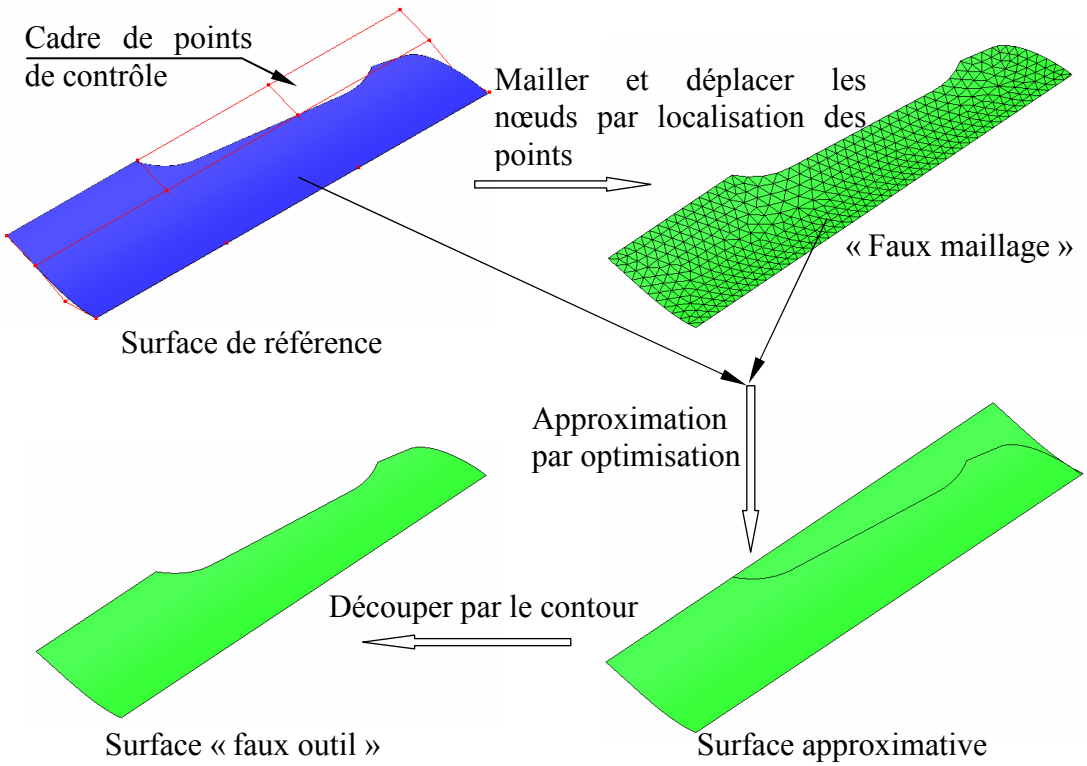
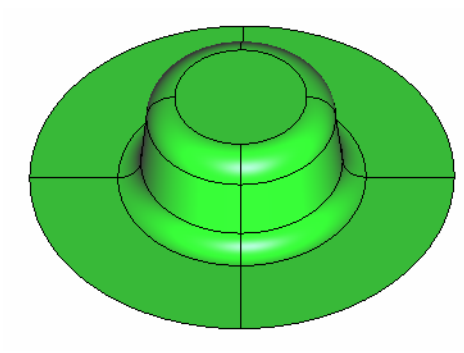



Figure 6.6 Construction d'une surface « faux outil »

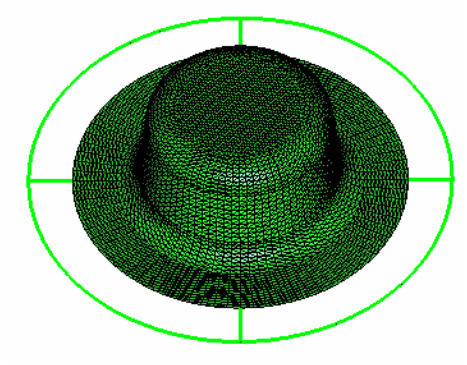
### 6.1.7. Application industrielle

L'exemple de l'emboutissage SWIFT est de nouveau pris en compte pour la construction des surfaces des « faux outils ». Seule la partie utile est reconstruite à cause de l'avalement du maillage de l'embouti. La partie utile est la plus demandée par les industriels. Le maillage de

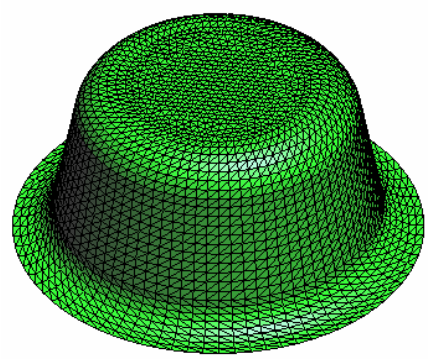
« faux outils » dans cet exemple est inventé étant donné que ce maillage sera fourni par les industriels.



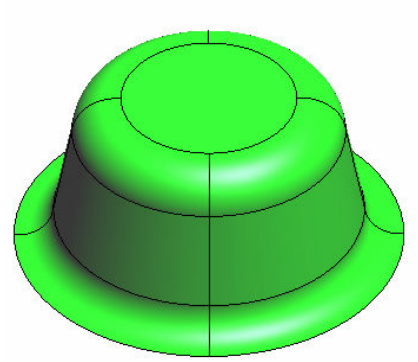
a) Surfaces des outils



b) Maillage de l'embouti épousant les surfaces



c) « Faux maillage »



d) Surfaces approximatives de « faux outils »

Figure 6.7 Construction des surfaces de « faux outils »

## 6.2. Détection des défauts d'aspects par calcul de courbures

La détection des défauts d'aspects d'une pièce est une tâche importante dans la phase de la mise au point de l'outillage d'emboutissage. Dans notre étude, les surfaces de la pièce sont représentées par un maillage en triangles. La présente méthode de détection de défauts consiste à déterminer les courbures (courbures principales normales, courbure moyenne et courbure Gaussienne) à partir du maillage et à analyser ces courbures. Une courbure très grande en valeur absolue ou un changement brusque et important de courbure peut indiquer un défaut d'aspect. Cette technique est utilisée pour détecter les défauts d'une pièce industrielle avant et après le retour élastique.

### 6.2.1. Calcul des normales aux noeuds avec les normales des facettes voisines

La courbure sur un nœud dépend de la variation de la normale sur ce nœud (voir le sous-chapitre §6.2.2). La méthode de Max [Max 1999] est adoptée pour l'estimation des normales sur un nœud. Tous les noeuds $Q_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ connectés au noeud $P$ forment un contour polynomial fermé (figure 6.8). Nous supposons que les noeuds $Q_i$ sont rangés dans le sens trigonométrique. Un côté connecté au noeud $P$ est représenté par un vecteur, par exemple, $\vec{V}_i = \overrightarrow{PQ}_i$ .

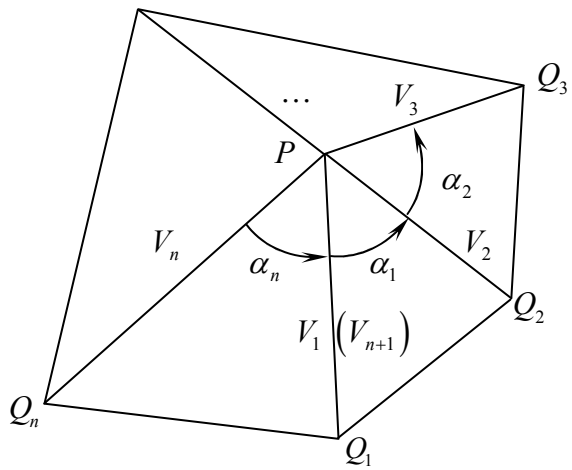



Figure 6.8 Configuration d'un anneau

La normale au noeud $P$ de la surface passant par le noeud $P$ et les noeuds $Q_i$ peut être interpolée par les normales des facettes triangulaires connectées au noeud $P$ :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{V}_i \times \vec{V}_{i+1}}{\left\|\vec{V}_i\right\|^2 \left\|\vec{V}_{i+1}\right\|^2} = c\vec{N} \tag{6.3}$$

où $c$ est un réel positif qui permet de normaliser la normale $\vec{N}$ , $\vec{V}_{n+1} = \vec{V}_1$ .

Sachant que $\vec{V}_i \times \vec{V}_{i+1} = \vec{N}_i \left\|\vec{V}_i\right\| \cdot \left\|\vec{V}_{i+1}\right\| \sin\alpha_i$ , $\alpha_i$ est l'angle entre $\vec{V}_i$ et $\vec{V}_{i+1}$ , l'équation (6.3) peut être simplifiée comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{N}_i \sin\alpha_i}{\left\|\vec{V}_i\right\| \cdot \left\|\vec{V}_{i+1}\right\|} = c\vec{N} \tag{6.4}$$

En remplaçant le poids $\dfrac{\sin\alpha_i}{\left\|\vec{V}_i\right\| \cdot \left\|\vec{V}_{i+1}\right\|}$ par $w_i$ , on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i \vec{N}_i = c\vec{N} \tag{6.5}$$

**Comparaison des résultats des différentes méthodes** :

Dans l'équation (6.5), différents choix de $w_i$ amènent différentes méthodes de calcul de courbures. Les méthodes suivantes sont souvent utilisées:

$w_i = \alpha_i$ , Poids_Angle;

$w_i = A_i$ , Poids_Surface, $A_i$ est la surface de la facette $i$.

Nous prenons comme exemple la surface $z = e^{2x+y-y^2}$ $(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$. Cette surface est discrétisée en 20000 triangles, sur chaque nœud, la normale peut être déterminée analytiquement comme suit:

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}_x \times \vec{T}_y}{\left\| \vec{T}_x \times \vec{T}_y \right\|} \tag{6.6}$$

où $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ sont les tangentes suivant $x$ et $y$.

Nous utilisons ensuite la Racine Carrée de la Variance (RCV) des normales sur tous les nœuds pour l'estimation des erreurs.

| Méthode | RCV |
|---|---|
| Poids_MAX | 1.357085492210918E-003 |
| Poids_Surface | 2.552729741917219E-003 |
| Poids_Angle | 1.480169237672803E-003 |

Tableau 6.1 RCV des normales par différentes méthodes

Dans le tableau 6.1, on observe que la méthode de MAX donne la meilleure estimation des normales.

### 6.2.2. Courbures d'une surface - Méthode de Taubin [Taubin 1995]

#### 1) Courbure Normale

Comme indiqué en figure 6.9, si nous coupons la surface $S$ au point $P$ par un plan normal à la surface, on obtient une courbe paramétrique $\vec{C}(s)$ dont la direction tangente, dans le plan de découpe, est $\vec{T}$. La courbure normale suivant la direction $\vec{T}$ au point $P$ est la courbure de la courbe $\vec{C}(s)$, celle-ci peut être déterminée par les courbures principales et les directions principales qui se situent dans le pan tangent au point $P$.

$\vec{N}_P$ est la normale normalisée au point $P$ à la surface, la tangente $\vec{T}$ est un vecteur normalisé qui passe par le point $P$ et reste perpendiculaire à $\vec{N}_P$, la courbure normale $k_P$ suivant la direction $\vec{T}$ peut être approximée selon la limite de la longueur curviligne de la courbe $\vec{C}(s)$ à partir du point $P$.

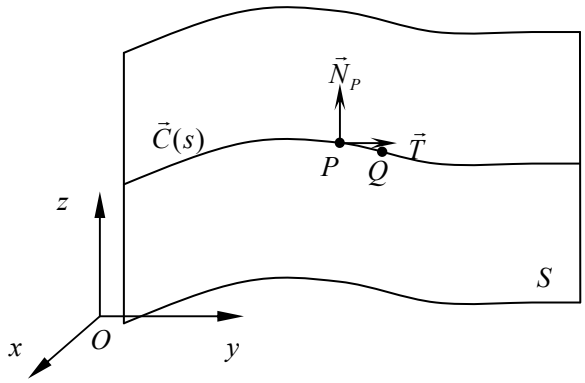



Figure 6.9 Courbure à la surface sur un point

La courbe $\vec{C}(s)$ peut se développer en série de Laurent :

$$\vec{C}(s) = \vec{C}(0) + \vec{C}'(0)s + \frac{1}{2}\vec{C}''(0)s^2 + O(s^3) \tag{6.7}$$

Comme la courbe $\vec{C}(s)$ passe par le point $P$, on a $\vec{C}(0) = \overrightarrow{OP}$, $\vec{C}'(0) = \vec{T}$ et $\vec{C}''(0) = k_P\vec{N}_P$, l'équation (6.7) peut être récrite comme suit:

$$\vec{C}(s) = \overrightarrow{OP} + \vec{T}s + \frac{1}{2}k_P\vec{N}_P s^2 + O(s^3) \tag{6.8}$$

Avec le développement de l'équation (6.8) on obtient:

$$2\left[\vec{C}(s) - \overrightarrow{OP}\right] = 2\vec{T}s + k_P\vec{N}_P s^2 + O(s^3) \tag{6.9}$$

Multiplier les deux cotés de l'équation ci-dessus par $\vec{N}_P^T$, on obtient

$$2\vec{N}_P^T\left[\vec{C}(s) - \overrightarrow{OP}\right] = 2\vec{N}_P^T\vec{T}s + \vec{N}_P^T\vec{N}_P k_P s^2 + O(s^3) \tag{6.10}$$

Comme $\vec{N}_p^t\vec{T} = 0$ ($\vec{N}_P$ et $\vec{T}$ sont perpendiculaires) et $\vec{N}_p^t\vec{N}_p = 1$, l'équation (6.10) peut être simplifiée comme suit :

$$2\vec{N}_P^T\left[\vec{C}(s) - \overrightarrow{OP}\right] = k_P s^2 + O(s^3) \tag{6.11}$$

En outre, la longueur curviligne à partir du point $P$ peut s'exprimer aussi en série de Laurent:

$$\left\|\vec{C}(s)-\overrightarrow{OP}\right\|^2 = s^2 + O(s^3) \tag{6.12}$$

En comparant les équations (6.11) et (6.12), on trouve:

$$\frac{2\vec{N}_P^T\left[\vec{C}(s)-\overrightarrow{OP}\right]}{\left\|\vec{C}(s)-\overrightarrow{OP}\right\|^2} = k_p + O(s) \tag{6.13}$$

Lorsque $s \to 0$, la courbure normale suivant la direction $\vec{T}$ au point $P$ peut s'exprimer comme suit:

$$k_P = \lim_{s\to 0}\frac{2\vec{N}_P^T\left[\vec{C}(s)-\overrightarrow{OP}\right]}{\left\|\vec{C}(s)-\overrightarrow{OP}\right\|^2} \tag{6.14}$$

Pour une surface discrétisée en triangles, la courbure peut s'exprimer par l'approximation :

$$k_P \approx \frac{2\vec{N}_P^T\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2} \tag{6.15}$$

où $Q$ est un point connecté à $P$ dans la direction $\vec{T}$.

**2) Tenseur de courbures**

Soient $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ deux bases perpendiculaires qui sont tangentes à la surface au point $P$. Une direction quelconque $\vec{T}$ dans le plan tangent au point $P$ peut donc être exprimée en fonction de $\vec{T}_1$ et de $\vec{T}_2$ :

$$T = t_1T_1 + t_2T_2 \tag{6.16}$$

ou $t_1 = \cos\theta$, $t_2 = \sin\theta$, $\theta$ est l'angle entre $\vec{T}_1$ et $\vec{T}$. (6.16) peut alors s'exprimer également comme suit:

$$T_\theta = \cos\theta T_1 + \sin\theta T_2 \tag{6.17}$$

La courbure normale suivant $\vec{T}$ peut s'exprimer en forme quadratique [Carmo 1976]:

$$k_P = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_P^{11} & k_P^{12} \\ k_P^{21} & k_P^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \tag{6.18}$$

où $k_P^{11} = k_P(\vec{T}_1)$, $k_P^{22} = k_P(\vec{T}_2)$, $k_P^{12} = k_P^{21}$

Si $k_P^{12} = k_P^{21} = 0$, $k_P^{11}$ et $k_P^{22}$ sont alors les deux courbures principales. L'équation (6.18) donne :

$$k_P(\vec{T}_\theta) = k_P^1 t_1^2 + k_P^2 t_2^2 = k_P^1\cos^2\theta + k_P^2\sin^2\theta \tag{6.19}$$

Pour obtenir les directions principales, une matrice symétrique $3\times 3$ $M_p(\vec{T}_\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_{p\theta}\vec{T}_\theta\vec{T}_\theta^T d\theta$ est introduite. $M_p$ a trois valeurs propres et trois vecteurs propres correspondants. Ces derniers représentent les deux directions principales de la courbure et la normale, respectivement. La valeur propre qui égale 0 correspond à la direction normale.

Pour une surface discrétisée en triangles, $M_P$ peut s'obtenir par l'approximation :

$$M_p \approx \sum_i w_i k_{Pi}\vec{T}_i\,\vec{T}_i^T \tag{6.20}$$

où $w_i$ est le poids du point connecté au point $P$. Selon les coordonnées moyennes [Langer 2005], on a

$$w_i=\frac{\tan(\alpha_i)+\tan(\alpha_{i+1})}{\sum_j \tan(\alpha_j)+\tan(\alpha_{j+1})} \tag{6.21}$$

où $\alpha_i$ est l'angle entre $PQ_i$ et $PQ_{i+1}$, $j$ le numéro des points connectés au point $P$.

Comme $\vec{T}_i$ est la direction de $a_i$ dans le plan tangent on a:

$$\vec{T}_i=\frac{(I-N_i N_i^T)\overrightarrow{PQ}_i}{\left\|(I-N_i N_i^T)\overrightarrow{PQ}_i\right\|^2} \tag{6.22}$$

Notons $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ les trois vecteurs propres et supposons que $\lambda_3=0$ correspond à la direction normale.

Les valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ($\lambda_3=0$) s'obtiennent par $\det(\lambda I-M_p)=0$.

Les vecteurs propres correspondants s'obtiennent par:

$$(\lambda I-M_p)v=0 \tag{6.23}$$

Lorsque les vecteurs propres sont trouvés, la courbure normale suivant une direction peut s'obtenir par :

$$k_{Pi}=k_P^1\cos^2\theta_i+k_P^2\sin^2\theta_i \tag{6.24}$$

**3) Lissage par la méthode des moindres carrés**

L'erreur de la courbure normale suivant une direction s'exprime comme suit :

$$e_i=k_{P_i}-k_P^1\cos^2\theta_i-k_P^2\sin^2\theta_i \tag{6.25}$$

L'erreur totale peut être donnée par la somme des carrés des erreurs individuelles comme suit:

$$e_{total} = \sum_i e_i^2 \tag{6.26}$$

Les courbures principales peuvent être obtenues par minimisation de $e_{total}$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_{total}}{\partial k_P^1} = \sum_i \dfrac{\partial e_i^2}{\partial e_i}\dfrac{\partial e_i}{\partial k_i^1} = \sum_i 2e_i\,(-\cos^2\theta_i) = 0 \\ \dfrac{\partial e_{total}}{\partial k_P^2} = \sum_i \dfrac{\partial e_i^2}{\partial e_i}\dfrac{\partial e_i}{\partial k_i^2} = \sum_{i_s} 2e_i\,(-\sin^2\theta_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_i e_i \cos^2\theta_i = 0 \\ \sum_i e_i \sin^2\theta_i = 0 \end{cases} \tag{6.27}$$

$$\begin{cases} \sum_i (k_{Pi} - k_P^1\cos^2\theta_i - k_P^2\sin^2\theta_i)\cos^2\theta_i = 0 \\ \sum_i (k_{Pi} - k_P^1\cos^2\theta_i - k_P^2\sin^2\theta_i)\sin^2\theta_i = 0 \end{cases} \tag{6.28}$$

$$\begin{cases} \sum_i k_{Pi}\cos^2\theta_i - k_P^1\sum_i \cos^2\theta_i\cos^2\theta_i - k_P^2\sum_i \sin^2\theta_i\cos^2\theta_i = 0 \\ \sum_i k_{Pi}\sin^2\theta_i - k_P^1\sum_i \cos^2\theta_i\sin^2\theta_i - k_P^2\sum_i \sin^2\theta_i\sin^2\theta_i = 0 \end{cases} \tag{6.29}$$

Notons $c_i^2 = \cos^2\theta_i$, $s_i^2 = \sin^2\theta_i$, et

$a = \sum_i k_{Pi}\cos^2\theta_i$, $b = \sum_i k_{Pi}\sin^2\theta_i$

$a_1 = k_P^1\sum_i \cos^2\theta_i\cos^2\theta_i$, $a_2 = k_P^2\sum_i \sin^2\theta_i\cos^2\theta_i$

$b_1 = k_P^1\sum_i \cos^2\theta_i\sin^2\theta_i$, $b_2 = k_P^2\sum_i \sin^2\theta_i\sin^2\theta_i$

Avec les notions du dessus, l'équation (6.29) peut donc se réécrire comme suit:

$$\begin{cases} a_1 k_P^1 + a_2 k_P^2 = a \\ b_1 k_P^1 + b_2 k_P^2 = b \end{cases} \tag{6.30}$$

La solution du système ci-dessus est :

$$\begin{Bmatrix} k_P^1 \\ k_P^2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \tag{6.31}$$

Voyons que

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & s_1^2 \\ c_2^2 & s_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n^2 & s_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{P1} \\ k_{P2} \\ \vdots \\ k_{Pn} \end{Bmatrix} \text{ où } A = \begin{bmatrix} c_1^2 & s_1^2 \\ c_2^2 & s_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n^2 & s_n^2 \end{bmatrix},\ K = \begin{Bmatrix} k_{P1} \\ k_{P2} \\ \vdots \\ k_{Pn} \end{Bmatrix}$$

On obtient:

$$\begin{bmatrix} k_P^1 \\ k_P^2 \end{bmatrix} = ((A^t A)^{-1} A^t) K \tag{6.32}$$

**4) Courbure moyenne et courbure Gaussienne**

La courbure moyenne et la courbure Gaussienne sont définies par $k_P^m = (k_P^1 + k_P^2)/2$ et $k_P^G = k_P^1 \cdot k_P^2$, respectivement.

### 6.2.3. Validation du calcul de courbures

**1) Pièce axisymétrique**

Une pièce axisymétrique typique avec des courbures positives, négatives et nulles est choisie pour l'estimation des normales (figure 6.10). Le profil axisymétrique de cette pièce est composée de trois droites et de deux rayons $r = 5$.

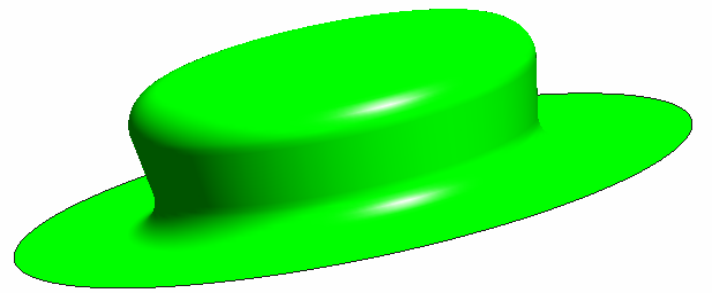


Figure 6.10 Pièce axisymétrique

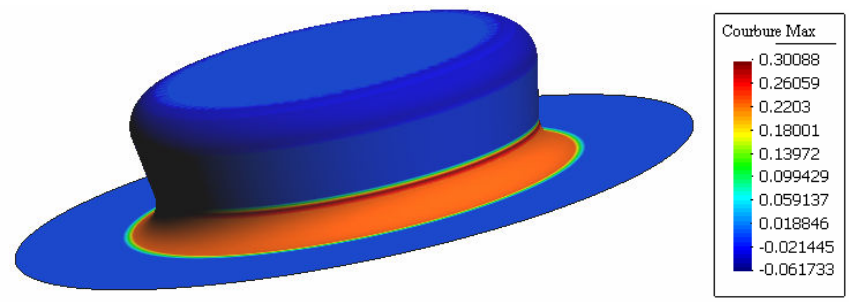



Figure 6.11 Courbure maximale

Dans figure 6.11, on observe que la courbure maximale se trouve bien sur le rayon du dessous où la courbure maximale est positive et dans la direction radiale.

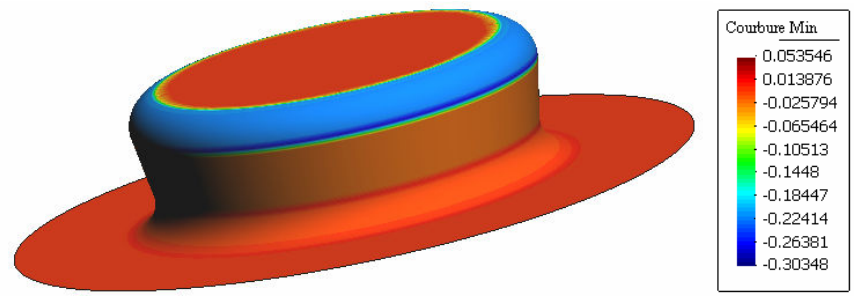



Figure 6.12 Courbure minimale

Dans la figure 6.12, on observe que la courbure minimale se trouve bien sur le rayon du dessus où la courbure minimale est négative et dans la direction radiale.

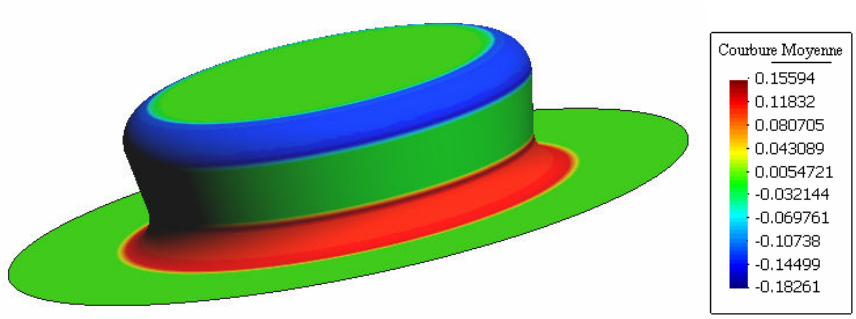



Figure 6.13 Courbure moyenne

La figure 6.13 montre la courbure moyenne. On observe que la courbure moyenne des deux parties planes est bien nulle; pour le rayon du dessus, la courbure moyenne est négative comme doivent l'être toutes les courbures maximales et minimales.

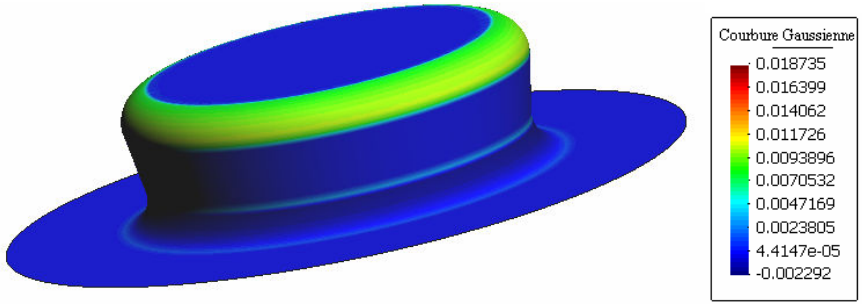



Figure 6.14 Courbure Gaussienne

La figure 6.14 montre la courbure Gaussienne. On observe que la courbure Gaussienne des deux parties planes du mur est bien nulle; pour le rayon du dessus, la courbure Gaussienne est la plus importante.

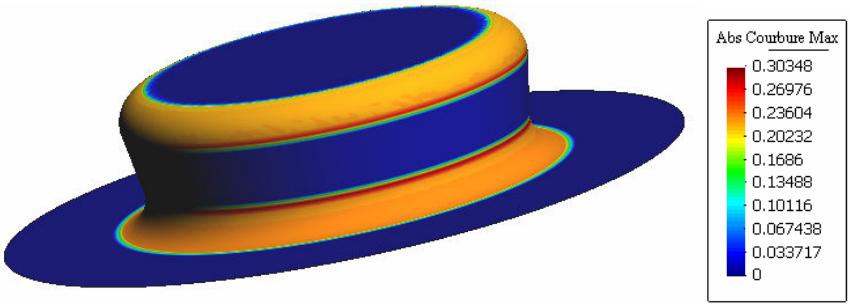



Figure 6.15 Courbure maximale en valeur absolue

Dans la figure 6.15, la courbure maximale en valeur absolue montre que, aux deux rayons, se trouvent les plus grandes courbures absolues dans la direction radiale.

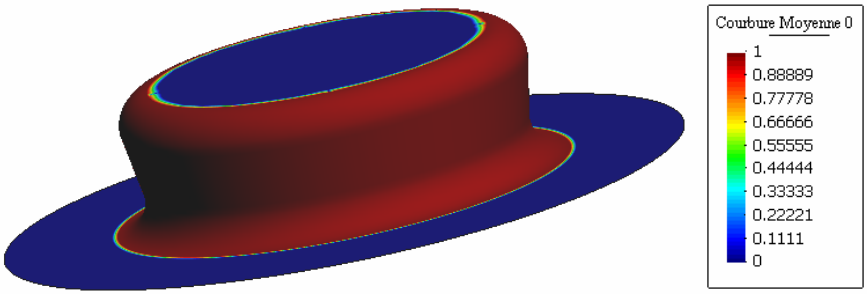



Figure 6.16 Courbure moyenne nulle

La figure 6.16 montre que les zones où la courbure moyenne est nulle se trouvent au niveau des deux parties planes.

**2) Perturbation locale de courbures**

Les défauts d'aspect d'une pièce apparente représentent un problème de qualité majeure dans l'industrie automobile, mais ils ne peuvent pas être facilement détectés par les logiciels commerciaux en utilisant la visualisation de la pièce 3D sous une lumière basée sur les dérivées premières de surfaces. C'est le changement brusque ou le changement de signe de courbures qui permet de détecter les défauts d'aspect. La perturbation locale des courbures est étudiée pour valider notre méthode. On reprend l'exemple ci-dessus. Dans le plan du dessus, on perturbe les coordonnées z des nœuds 3608 et 3609 en ±0.2 mm respectivement.

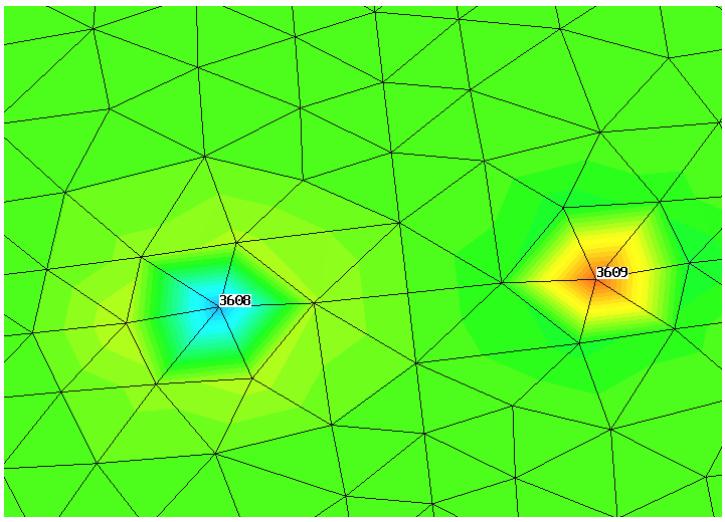



Figure 6.17 Courbure moyenne

Dans la figure 6.17 on trouve que la courbure moyenne aux deux nœuds a changé en négative et positive respectivement. L'effet de perturbation locale est bien détecté.

### 6.2.4. Application

La courbure maximale est utilisée pour détecter les défauts d'aspect d'une pièce industrielle avant le retour élastique. Cette pièce est discrétisée en un maillage qui possède 142253 triangles et 71786 nœuds.

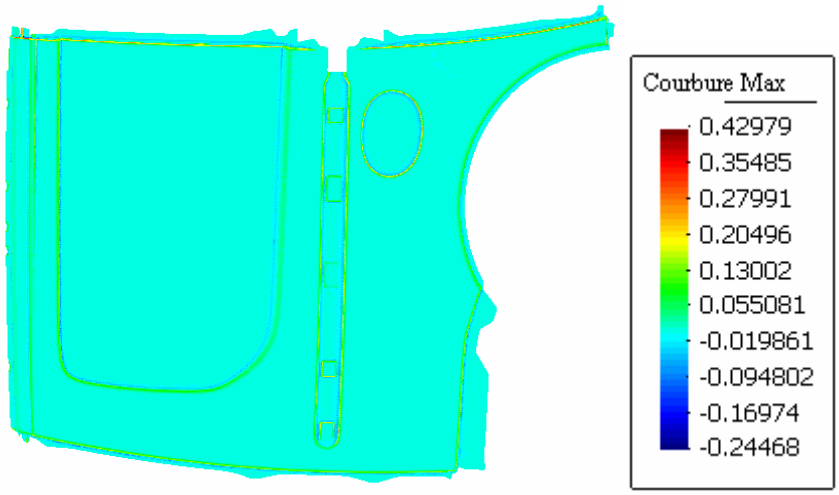



Figure 6.18 Courbure maximale

La figure 6.18 montre la courbure maximale de la pièce. On voit globalement que la courbure la plus importante se trouve sur les zones arrondies.

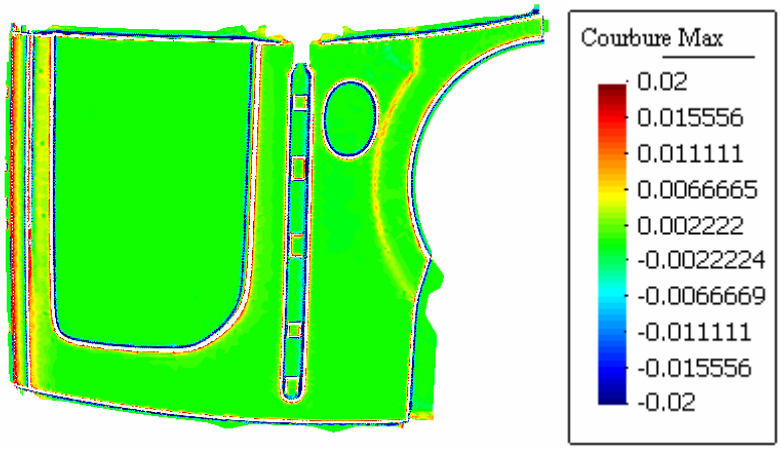



Figure 6.19 Courbure maximale de bornes (-0.02,+0.02)

Pour ignorer les zones arrondies, dans la figure 6.19, les bornes de valeurs (-0.02,+0.02) sont appliquées. On ne voit pas clairement où se trouvent les zones troublées.

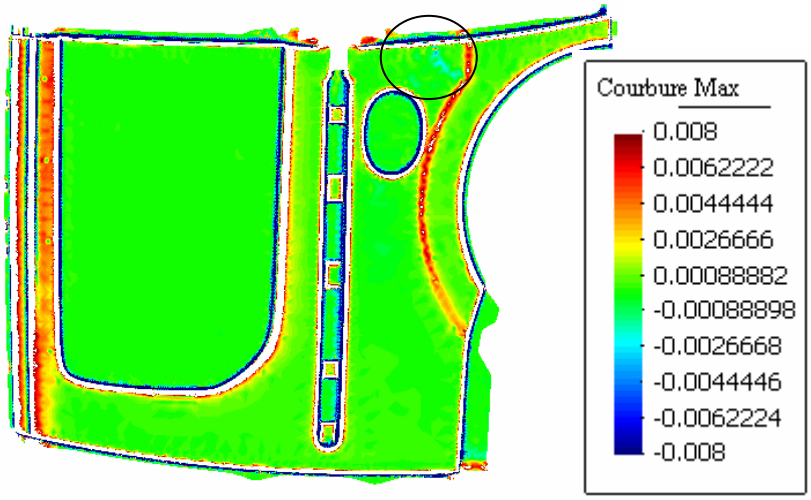



Figure 6.20 Courbure maximale de bornes (-0.008,+0.008)

Dans la figure 6.20 les bornes de valeurs (-0.008, +0.008) sont appliquées. On voit bien que la zone cerclée a des perturbations de courbures. Cette zone est zoomée en figure 6.21.

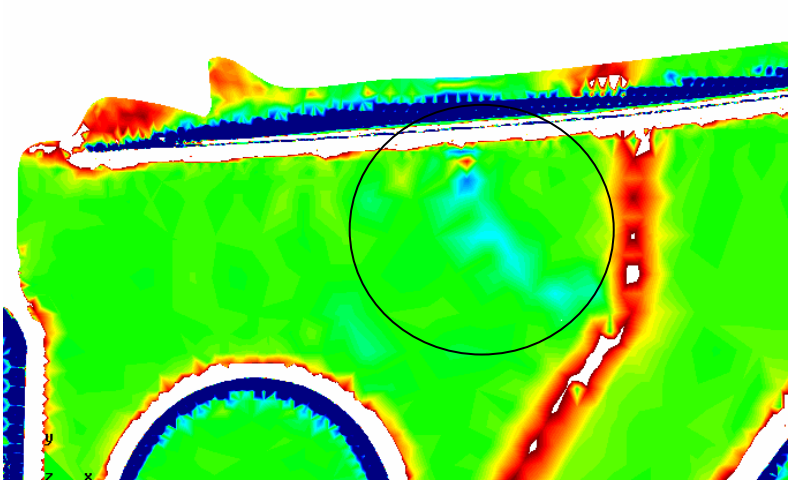


Figure 6.21 Zone de perturbation de courbures

Dans la zone cerclée, on trouve bien des perturbations de courbure. Dans la pratique, la pièce réalisée a bien des défauts dans cette zone.

Notre étude a permis de détecter des défauts d'aspect de la pièce avant le retour élastique et surtout d'indiquer dans quelle zone se situaient ces défauts.

## 6.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé des développements particuliers relatifs à la simulation numérique de l'emboutissage. Tout d'abord, nous avons créé les surfaces des « faux outils » dû au retour élastique, puis nous avons mis en évidence les défauts d'aspects par mesure des courbures sur le maillage déformé des tôles embouties.

Sur le premier point, nous avons abouti à la création des surfaces de « faux outils » en déplaçant le « faux maillage » des faux outils. (Le déplacement correspond au signe prés à la différence entre la position du maillage embouti avant et après retour élastique). Ensuite, des surfaces B-Spline approximatives ont été créées à partir du « faux maillage » par la méthode des moindres carrés. Ce développement a été réalisé à l'aide des librairies de « Open CASCADE ».

Enfin, nous avons développé une méthode de détection afin de visualiser les défauts d'aspects en courbure sur une tôle emboutie pour des applications industrielles. Cette méthode utilise la méthode de MAX pour le calcul de la normale d'un nœud du maillage et la méthode de TAUBIN pour le calcul des courbures. L'étude de la courbe de l'embouti a été

effectuée à travers la courbure moyenne et la courbure Gaussienne calculées à partir des deux courbures principales. Le calcul des courbures a été validé dans un premier temps sur un embouti axisymétrique présentant des courbures positives, négatives et nulles. Cette méthode a permis de détecter des changements de courbures sur une surface plane en effectuant une perturbation locale manuelle des positions verticales de 2 nœuds. Elle a par ailleurs bien détecté le défaut d'aspects d'une pièce industrielle emboutie, après le retour élastique, en examinant la distribution de la courbure maximale.

# Chapitre 7 Conclusions et Perspectives

L'objectif principal de notre travail est de développer un code appelé « Approche Pseudo-Inverse » (API) destiné à la simulation de l'emboutissage des tôles minces en tenant compte de l'endommagement. L'API combine les avantages de l'Approche Inverse (AI) et de l'approche incrémentale classique: la rapidité et la prise en compte de l'historique des déformations. D'une part, comparé aux logiciels commerciaux présentés dans la littérature, notre code est très compétitif en terme de temps CPU tout en garantissant une précision de calcul acceptable; et d'autre part, la prise en compte de l'historique des déformations permet de calculer l'endommagement en fonction du chemin de formage. Dans ce contexte, le choix des méthodes numériques à mettre en œuvre, pour que ce code soit rapide et robuste, était particulièrement crucial.

Les développements suivants ont été effectués dans l'API:

- **Améliorations de la solution initiale pour l'Approche Inverse.** L'algorithme de « transformation convexe », destiné à l'obtention d'une solution initiale pour les pièces ayant des contre-dépouilles a été développé. Cette technique permet à l'AI de traiter des problèmes industriels complexes de mise en forme de tôles.
- **Introduction de configurations intermédiaires.** L'API est basée sur l'Approche Inverse classique. Des configurations intermédiaires « réalistes » sont déterminées par minimisation de la surface de la tôle sous contraintes géométriques des outils. L'introduction de ces configurations intermédiaires dans l'API permet la prise en compte de l'historique des déformations donc une meilleure estimation des contraintes. Ainsi, l'API donne la possibilité de simuler l'endommagement, le retour élastique et l'emboutissage en multi-passes.
- **Technique de relocalisation de nœuds sur la pièce 3D.** Dans l'AI, le contour du flan initial est pris pour le contour de l'embouti afin de démarrer le calcul inverse. Une technique de relocalisation des nœuds sous serre-flan est utilisée pour ajuster

le contour de l'embouti au cours d'itérations afin que ce contour puisse redonner le contour du flan donné initialement. Mais lorsqu'il y a trop d'avalement (lorsque le bord du flan entre dans la matrice), cette technique ne peut plus fonctionner. La technique de relocalisation de nœuds sur la pièce 3D a permis d'éviter ce problème. Cette technique rend l'API plus robuste pour les emboutissages complexes.

- **Nouveaux algorithmes pour l'intégration de la plasticité.** Afin de prendre en compte l'historique des déformations, la théorie d'écoulement plastique est adoptée dans l'API au lieu de la théorie de déformation plastique utilisée dans l'AI classique. L'algorithme du Retour Radial (Simo et Taylor) permet d'obtenir une bonne estimation des contraintes, mais il nécessite une résolution itérative et engendre un temps de calcul considérable. L'Algorithme Scalaire Direct (ASD) et l'Algorithme de $\gamma$ -Retour Radial ($\gamma$–RR) ont été proposés et implantés dans l'API. L'ASD est très rapide mais se limite aux cas où les déformations plastiques sont très grandes par rapport aux petites déformations élastiques. Le $\gamma$–RR basés sur l'Algorithme du Retour Radial est aussi robuste et précis que l'ARR mais beaucoup plus efficace.
- **Implantation d'un modèle d'endommagement dans l'API.** Le modèle d'endommagement en déformation de Lemaître et Chaboche a été adopté. Ce modèle a été implanté dans l'API de trois manières différentes: (i) l'endommagement n'est pas couplé avec la plasticité, (ii) l'endommagement est couplé avec la plasticité, (iii) l'utilisation de la courbe d'écrouissage de pré-endommagement. Des résultats numériques ont montré l'importance de la prise en compte de ce couplage et également la capacité de l'API à prévoir l'endommagement dans l'emboutissage. L'utilisation du modèle de pré endommagement permet de mieux s'approcher de la courbe d'écrouissage fortement non linéaire.

L'Approche Pseudo Inverse s'impose donc comme une réelle avancée dans le domaine de la modélisation de l'emboutissage des tôles minces. Néanmoins, comme pour une approche incrémentale, le maillage de la pièce doit respecter une finesse minimale afin de ne pas perdre la précision dans le processus de transfert de champs entre les deux maillages et également pour garantir la qualité de ce dernier. De même, pour garantir la robustesse de

l'API, un modèle d'endommagement simple a été implémenté. Malgré le fait qu'il puisse bien détecter la zone endommagée et l'évolution de l'endommagement, cette estimation peut quelque fois être éloignée de la réalité lorsque l'endommagement devient très important à la rupture ; il convient donc d'être prudent.

L'API a été validé par des comparaisons avec des résultats de codes industriels (ABAQUS et Stampack) et des résultats expérimentaux (CETIM) sur des cas tests difficiles. Une étude sur les cas tests SWIFT et ERICHSEN a montré que l'API était capable de détecter l'effet de cambrage-décambrage dans l'emboutissage. L'étude sur le pot d'échappement a montré que l'API était aussi précis qu'Abaqus et Stampack dans l'estimation de l'endommagement. D'autres exmples ont montré que l'API était capable de traiter les procédés d'emboutissage en multi-passes également.

L'API a ainsi montré son efficacité du fait de l'introduction de pas intermédiaires. La prédiction de l'endommagement a été réalisée et validée par une comparaison avec les résultats de l'UTT. L'outil numérique développé dans cette thèse se présente donc comme un bon compromis entre les approches incrémentales (précises mais coûteuses en temps de calcul) et l'AI classique (très rapide mais inadaptée au retour élastique).

Pour les besoins des industriels, nous avons également développé les techniques suivantes:

- **La reconstruction automatique de surfaces CAO de « faux outils » pour compenser le retour élastique.** Le retour élastique pose souvent des problèmes majeurs de qualité dans l'industrie de l'emboutissage. Il conduit à une géométrie déformée de la pièce et doit être compensé par des « faux outils » pour obtenir une pièce de bonnes dimensions. Nous avons réussi à reconstruire automatiquement les surfaces des « faux outils » à partir du maillage élément fini de l'embouti après la simulation du retour élastique, en utilisant la plateforme « Open CASCADE » et notre « Mailleur surfacique » maison.
- **La détection des défauts d'aspect par calcul de courbures.** Cette étude a permis de déterminer les courbures directement à partir du maillage de la pièce. Il devient ainsi possible de détecter un changement brusque et important de courbure, qui est synonyme d'un défaut d'aspect. Cette technique a été utilisée pour détecter les défauts de plusieurs pièces industrielles avant et après le retour élastique.

La prise en compte de l'historique de déformations permet à l'API de simuler le retour élastique. Il nous paraît intéressant de réaliser un module pour étudier l'effet du retour élastique et la création du maillage des « faux outils ».

L'utilisation de la courbe de pré-endommagement nous paraît intéressante également. Cette méthode consiste à décrire l'endommagement avec la courbe d'écrouissage, ce qui pourrait diminuer le risque de divergence.

Le développement d'algorithmes d'intégration adaptés aux matériaux à écrouissage anisotrope et / ou cinématique permettrait de mieux prendre en compte l'anisotropie des tôles laminées et conduirait ainsi, à une meilleur prédiction de la forme finale des pièces embouties.

La conception et l'optimisation des surfaces additionnelles sont également des termes qu'il conviendrait à approfondir avec API. En effet, le procédé d'optimisation se prête bien au fonctionnement de l'API, car l'optimisation doit être effectuée à chaque itération et la rapidité de calcul de la méthode l'API permettent donc de gagner beaucoup de temps CPU. Il en va de même pour l'obtention des surfaces additionnelles où les paramètres du procédé d'emboutissage (descente du poinçon, l'angle de mur, forme de serre-flan, etc…) sont les paramètres à modifier. Ce problème est actuellement à l'étude au sein du laboratoire.

# Bibliographie

**[Batoz 92]** J.L. Batoz, G. Dhatt. “Modélisation des structures par éléments finis”, Vol. 3, Coques, Ed. Hermès, Paris, 1992

**[Batoz 98]** J.L. Batoz, Y.Q. Guo, F. Mercier. “The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts”. *Engineering Computations* 1998; (15): 6-7, pp. 864-892

**[Carmo 76]** M. Do Carmo. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, 1976.

**[Cherouat 04]** A. Cherouat, Y.Q. Guo, K. Saanouni, Y.M. Li, K. Debray, G. Loppin. “Incremental versus inverse numerical approaches for ductile damage prediction in sheet metal forming”, International Journal of Forming Processes, vol. 7, N° 1-2, 2004.

**[Dwyer 87]** R.A Dwyer. “A fast divide and conquer algorithm for constructing Delauany Triangulations”. Algorithmica 2:137-151, 1987

**[Devroye 98]** L. Devroye, E. Mucke, B. Zhu. “A note on Point Location of Delaunay Triangulation of Random Points”. algorithmica, 22(4): 477-482, Dec 1998.

**[Eck 95]** M. Eck, T. D. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle. “Multiresolution analysis of arbitrary meshes”. In Proceedings of SIGGRAPH ’95, pages 173–182, 1995.

**[Fisher 04]** John Fisher, John Lowther et al. “Curve and Surface Interpolation and Approximation: Knowledge Unit and Software Tool”. ITiCSE’04 June 28–30, 2004, Leeds, UK

**[Floater 97]** M.S. Floater. “Parameterization and smooth approximation of surface triangulations”. Computer Aided Geometric Design, 14(3):231–250, 1997

**[Floater 03]** M.S. Floater. “Mean value coordinates”. Computer Aided Geometric Design, 20(1):19–27, 2003.

**[Gati 03]** W. Gati, Y.Q. Guo, H. Naceur, J.L. Batoz. “Approche pseudo inverse pour estimation des contraintes dans les pièces embouties axisymétriques”, Revue Européenne des éléments finis, Vol. 12, n° 7-8, pp. 863-886, 2003.

**[Gerdeen 89]** J.C. Gerdeen, P. Chen. “Geometric mapping method of computer modeling of sheet metal forming”, *Numiform’89*, Balkema Ed., pp. 437-444, 1989.

**[Guibas 85]** L. Guibas, J. Stolfi. “Primitives for manipulation of general subdivisions and computation of Voronoi diagrams”. ACM Transaction on Graphics, 4(2):75-123, 1985.

**[Guo 90]** Y.Q. Guo, J.L. Batoz, J.M. Detraux, P. Duroux. "Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts", Int. J. for Num. Methods in Eng., Vol. 30, pp. 1385-1401, (1990)

**[Guo 02]** Y.Q. Guo, K. Saanouni, A. Cherouat, Y.M. Li, G. Loppin, K. Debray. “Two methodologies for the simulation of ductile damage in sheet metal forming processes”, Journal of Plasticity Engineering, Vol. 9, N° 4, p47-55, 2002.

**[Guo 03]** Y.Q. Guo, H. Naceur, K. Debray, F. Bogard. “Initial solution estimation to speed up Inverse Approach in stamping modelling”, Int. J. Engineering Computations, vol.20, N°7-8, pp 810-834, 2003.

**[Guo 04]** Guo Y.Q., Li Y.M., Bogard F., Debray K., “An efficient Pseudo Inverse Approach for damage modelling in sheet forming process”, J. of Material Processing Technology, n°151, p. 88-97, 2004.

**[Langer 05]** Torsten Langer. Alexander Belyaev and Hans-Peter Seidel. “Exact and Approximate Quadratures for Curvature Tensor Estimation”. Eurographics Symposium on Geometry Processing (2005)

**[Lemaitre 96]** J. Lemaitre, J.L. Chaboche. “Mécanique des matériaux solides”, Paris, Dunod, 2e édition, 1996.

**[Makinouchi 93]** A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Onate, R.H. Wagoner. (Editors), Numisheet’93, “2nd Int. Conf. Of Numerical Simulation of 3-D Metal forming Processes”, Isehara, Japon, 31 Aug.- 2 Sept. 1993.

**[Max 99]** N. Max. “Weights for computing vertex normals from facet normals”. J Graph Tools 1999;4(2):1–6

**[Mercier 98]** F. Mercier. “Contribution à la modélisation de l’emboutissage de tôles minces par l’approche inverse”, Thèse de Doctorat, UTC, 1998.

**[OpenCascade 06]** http://www.opencascade.org/, October, 2006

**[Pinkall 93]** U. Pinkall and K. Polthier. “Computing discrete minimal surfaces and their conjugates”. Experimental Mathematics, 2(1):15–36, 1993

**[Saanouni 00]** K. Saanouni, K. Nesnas and Y. Hammi. “Damage modelling in metal forming processes. Int. J. of Damage Mechanics”, Vol 9, N 3, pp 196-240, July 2000.

**[Simo 85]** J.C. Simo, M. Ortiz, “A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations”, Comput. Meth. Appl. Eng. 51 (1985) 221–245.

**[Simo 86]** J.C. Simo, R.L. Taylor, “A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity”, Int. J. Numer. Meth. Eng. 22 (1986) 649–670.

**[Sundareswara 03]** R. Sundareswara, and P. Schrater. “Extensible Point Location Algorithm”. International Conference on Geometric Modeling and Graphics (GMAG'03) :84-89, 16-18 July 2003

**[Tutte 63]** W.T. Tutte. “How to draw a graph”. Proceedings of the London Mathematical Society, 13:743–768, 1963.

**[Talor 86]** R.L. Talor, J.C. Simo. “A return mapping algorithm for plane stress elasto-plasticity”, Int. J. Num. Mech. Eng., 22, pp649-670, 1986.

**[Taubin 95]** G. Taubin. “Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation”. In Proc. ICCV'95, pages 902.907, 1995.