

UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE

U.F.R de Sciences Exactes et Naturelles

École doctorale Sciences, Technologies, Santé

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE

Spécialité Mécanique

par

CHIEMENTIN Xavier

le 25 octobre 2007

Localisation et quantification des sources vibratoires dans le cadre d'une maintenance préventive conditionnelle en vue de fiabiliser le diagnostic et le suivi de l'endommagement des composants mécaniques tournants :
application aux roulements à billes.

Jury d'examen :

Président	Pr. OHAYON Roger	CNAM, Paris
Rapporteurs	Pr. DEHOMBREUX Pierre Pr. THOMAS Marc	FPMS, Mons (Belgique) ÉTS, Montréal (Canada)
Examineurs	Pr. DELAUNAY Georges Dr. FOLTÊTE Emmanuel Dr. RASOLOFONDRAIBE Lanto	URCA, Reims UFC, Besançon URCA, Reims
Membres invités	Pr. BISSIEUX Christian Pr. DELMAS Yves	URCA, Reims URCA, Reims
Directeurs de thèse	Pr. DRON Jean-Paul Dr. BOLAERS Fabrice	URCA, Reims URCA, Reims

*Des millions de gens ont vu tomber une pomme,
Newton est le seul qui se soit demandé pourquoi.*

Bernard Baruch

A ma giclette en mousse...

Résumé/ Abstract

L'analyse vibratoire, en vue d'une maintenance préventive conditionnelle, s'avère un outil admirable depuis quelques décennies pour les industries. Son emploi vise à servir trois niveaux d'analyse : la surveillance, le diagnostic et le suivi de l'état d'endommagement des équipements. En pratique, les signaux vibratoires enregistrés sont le résultat d'un mélange de différentes sources correspondant aux composants de la machine, ce qui rend difficile l'interprétation de l'état d'endommagement d'un composant particulier. L'intérêt est de séparer la contribution des différentes sources vibratoires généralement et directement liées à une défaillance plus ou moins importante d'un composant mécanique, à partir de plusieurs mesures réalisées par les accéléromètres. La séparation permettra non seulement de localiser les défauts sur les composants mais également de suivre l'évolution de l'endommagement de chacun d'entre eux. Le principe est alors d'améliorer le diagnostic et le suivi par l'introduction des méthodes inverses. Ces problèmes sont généralement instables et nécessitent des méthodes d'optimisation ou de stabilité. Nous développons deux approches, numérique et expérimentale, qui permettent de stabiliser l'inversion par le biais d'un placement optimal d'un nombre limité de capteurs de vibrations. Ces approches sont validées sur un cas académique puis exploitées sur une structure plus conforme au monde industriel : un carter disposant de deux paliers à roulements accouplé à un moteur.

Mots Clés : Maintenance, roulement, analyse vibratoire, analyse modale, problèmes inverses, ondelette.

The vibratory analysis, for a conditional preventive maintenance, has proven to be a very appreciated tool for a few decades for industries. Its use is articulated around three levels of analysis : the monitoring, the diagnosis and the follow-up of the state of damage of the equipments. In practice, recorded vibratory signals are the result of a mixture of various sources corresponding to the components of the machine ; this fact makes the interpretation of the damage state of a particular component difficult. The interest is to separate the contribution from the various vibratory sources generally and directly related to a more or less important failure of a mechanical component, starting from several measurements carried out by the accelerometers. The separation will not only allow to locate the defects on the components but also to follow the evolution of the damage of each of them. The principle is then to improve the diagnosis and the follow-up by the introduction of the inverse methods. These problems are generally unstable and require methods of optimization or of stability. We develop two approaches, a numerical and an experimental, which allow to stabilize the inversion by an optimal location of a limited number of vibratory sensors. These approaches are validated on an academic case, and then they are exploited on a structure in conformity with the industrial world : a casing having two shaft bearings coupled with an engine.

Keywords : Maintenance, rolling bearing, vibratory analysis, modal analysis, inverse problems, wavelet.

Remerciements

Je remercie Mr Marc THOMAS, Professeur à l'École de Technologie Supérieure Québec, et Mr Pierre DEHOMBREUX, Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons, d'avoir bien voulu accepter la charge de rapporteur.

Je remercie les examinateurs membres du jury, Mr Roger OHAYON, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers, Mr Georges DELAUNAY, Professeur à l'Université de Reims, Mr Jean-Paul DRON, Professeur à l'Université de Reims, Mr Emmanuel FOLTÊTE, Maître de Conférences à l'Université de Franche-Comté, Mr Fabrice BOLAERS, Maître de Conférences à l'Université de Reims, Mr Lanto RASOLOFONDRAIBE, Maître de Conférences à l'Université de Reims.

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de recherche "Laboratoire de Mécanique Appliquée¹" du laboratoire "Groupe de Mécanique Matériaux et Structure" (GMMS EA 2617) dirigé par Mr Le Professeur Ying-Qiao GUO que je remercie pour m'avoir accueilli dans son laboratoire.

J'adresse mes sincères remerciements à Mr Jean-Paul DRON, Professeur à l'université de Reims et directeur de thèse, et Mr Fabrice BOLAERS, Maître de Conférences et co-directeur de thèse, de m'avoir aiguillé au fil de la thèse de par leurs conseils, leurs savoirs, leurs encouragements et de m'avoir offert la possibilité d'orienter mes recherches avec une grande liberté.

Je remercie également Mr Lanto RASOLOFONDRAIBE, Maître de Conférences au CReS-TIC², qui a activement participé à l'élaboration des travaux de la thèse, plus particulièrement pour la partie traitement du signal.

J'adresse mes remerciements également à tous les membres restant du Laboratoire de Mécanique Appliquée, Mr Olivier COUSINARD, Maître de Conférences, pour ses remarques à vocation industrielle, Mr Philippe ESTOCQ, Professeur agrégé docteur, pour ses conseils concernant l'analyse modale, Mr Chawki SAFFIH, Ingénieur d'études, pour l'usinage des roulements. Ils m'ont aidé à progresser dans ce travail, en m'adressant des remarques toujours distillées avec le sourire.

Et je n'oublierais pas Mr le Professeur Karl DEBRAY, Professeur au Laboratoire de Mécanique Numérique, pour ses conseils d'ordre numérique et pour sa "toolbox" intégration des roulements. Celle-ci m'a permis d'obtenir un modèle numérique répondant amplement à mes attentes.

Une pensée pour les personnes qui m'ont aidé à préparer mes heures d'enseignements, Fabrice BOLAERS, pour l'électronique, Lanto RASOLOFONDRAIBE, pour le traitement du signal, et surtout Virginie BOGARD qui a passé beaucoup de temps à ma place pour préparer des travaux

¹<http://lma.univ.reims.free.fr>

²Centre de recherche en Sciences, Technologie de l'information et de la Communication

pratiques communs.

Je tiens à remercier la région Champagne-Ardenne et le ministère français de l'enseignement supérieur et de la recherche qui m'ont fourni des conditions de travail idéales, aussi bien salariale avec l'allocation de recherche ministérielle et le monitorat, qu'au niveau équipement avec le projet État-Région CPER "SURVIB", mené par Mr Georges DELAUNAY, Professeur à l'Université de Reims.

Je tiens également à remercier l'ensemble des personnes qui m'ont soutenu pour l'obtention de l'allocation de recherche d'une part mais également pour le poste d'ATER.

Je remercie également tous les stagiaires, qui, sans le savoir, m'ont formé par le biais de diverses questions allant de la plus triviale à la plus subtile.

J'adresse également une pensée aux "attablées" pendant les pauses déjeuners où se mélangaient avec harmonie les doctorants, les maîtres de conférences, les professeurs, donnant lieu à des discussions aussi diverses que les nationalités présentes autour de la table.

Enfin, merci aux chasseuses d'orthographe et de grammaire, Sandrine pour le français et Élodie pour l'anglais, à qui j'ai donné beaucoup de fils à retordre.

Table des matières

Remerciements	9
Notations et Abréviations	15
Introduction générale	17
I Dynamique des structures et maintenance par analyse vibratoire	21
I.1 Maintenance conditionnelle par analyse vibratoire	21
I.1.1 Historique et introduction	21
I.1.2 Les roulements et leurs avaries	22
I.1.3 Les différents niveaux d'analyse : surveillance, diagnostic et suivi	23
I.1.4 La pratique de l'analyse vibratoire	24
I.1.4.1 Le capteur de vibrations	24
I.1.4.2 Le conditionnement du signal	25
I.1.4.3 Le matériel de traitement	25
I.1.5 Le traitement des signaux	25
I.1.5.1 Caractéristiques du signal engendré par le roulement endommagé	25
I.1.5.2 Les prétraitements	25
I.1.5.3 Les indicateurs temporels	26
I.1.5.4 Les méthodes fréquentielles	27
I.1.5.5 Les méthodes temps-fréquences	27
I.1.5.6 Les méthodes temps-échelles	28
I.1.5.7 Les approches IA (intelligence artificielle)	29
I.1.5.8 Développement du logiciel CHIBORA	29
I.2 Dynamique des structures	30
I.2.1 Système N ddl	31
I.2.1.1 Modèle conservatif	31
I.2.1.2 Modèle dissipatif	32
I.2.1.3 Fonction de transfert ou FRF	36
I.2.2 Analyse modale expérimentale	37
I.2.2.1 Préparation des essais	37
I.2.2.2 Identification et recalage	38
I.3 L'ondelette adaptée	39
I.3.1 Démodulation par ondelette	40
I.3.2 Détermination mathématique	41
I.3.3 Étude comparative avec une ondelette de Morlet dans le domaine temporel	41
I.3.4 Description du banc expérimental	42
I.3.5 Résultats expérimentaux	42
I.3.6 Conclusion	47

I.4	Conclusion et orientation de la thèse	47
II	Tour d'horizon sur les problèmes inverses	49
II.1	Introduction aux problèmes inverses	49
II.1.1	Définition	49
II.1.2	Domaines d'applications	51
II.1.2.1	Identification des causes à partir des effets sans le modèle	51
II.1.2.2	Identification des causes à partir des effets avec le modèle, méthodes localisantes et quantifiantes	52
II.1.2.3	Identification des paramètres à partir des mesures et des effets	54
II.1.2.4	Identification des causes à partir des effets avec le modèle, méthodes quantifiantes (sources localisées <i>a priori</i>)	55
II.1.3	Exemples de problèmes mal posés	55
II.1.3.1	Les sondages	55
II.1.3.2	L'inversion matricielle	55
II.1.3.3	Détermination des forces appliquées à une structure	56
II.1.4	Les méthodes de résolutions des problèmes inverses.	57
II.2	Problèmes inverses linéaires	58
II.2.1	Système Linéaire	58
II.2.2	Inversion de la matrice	58
II.2.2.1	Principe	58
II.2.2.2	La DVS	58
II.2.2.3	Inversion	59
II.2.2.4	Nombre de conditionnement	60
II.2.3	Méthode de régularisation	61
II.3	Application au domaine vibratoire	63
II.3.1	Problèmes inverses et vibrations	63
II.3.2	Mode opératoire	63
II.3.3	Conditionnement et analyse modale	64
II.3.4	Optimisation de l'inversion	64
II.3.4.1	Méthodes mécaniques	65
II.3.4.2	Méthodes statistiques	66
II.3.4.3	Méthodes de régularisation	68
II.3.4.4	Moindres carrés pondérés/totaux	68
II.3.4.5	Méthodes d'inversion en coordonnées modales.	70
II.3.4.6	Conditions pratiques à respecter pour diminuer les erreurs	71
II.4	Conclusion	71
III	Développement et application académique	73
III.1	Introduction	73
III.2	Développement des approches	73
III.2.1	Stabilité de l'inversion et approche numérique	73
III.2.1.1	Carte de conditionnement	73
III.2.1.2	Mode opératoire de l'approche numérique	74
III.2.2	Stabilité de l'inversion et approche expérimentale	74
III.2.2.1	Cas où un mode domine, deux sources, deux observations	75
III.2.2.2	Cas N_{dom} modes dominants, p sources et p observations	76
III.2.2.3	Mode opératoire de l'approche expérimentale	81
III.3	Application à un cas académique : une plaque encastree.	81
III.3.1	Définitions sources réelles/virtuelles, observations	81

III.3.2	Description du banc d'expérimentation et recalage du modèle	82
III.3.3	Sources réelles, sources virtuelles, observations	83
III.3.4	Vérification de la linéarité de la structure	84
III.3.5	Détermination des cartes de conditionnement	84
III.3.5.1	Principe	84
III.3.5.2	Approche numérique	85
III.3.5.3	Approche expérimentale	87
III.3.6	Restitution des sources virtuelles	89
III.3.6.1	Descriptions sources et observations	89
III.3.6.2	Restitution par la méthode proposée à l'aide d'un système carré	89
III.3.6.3	Restitution par système surdéterminé avec une régularisation type L-Curve	90
III.3.6.4	Stabilité face à une perturbation extérieure	92
III.3.6.5	Conclusion intermédiaire	93
III.4	Conclusion	94
IV	Analyse numérique et expérimentale d'un carter sans action du moteur	97
IV.1	Introduction	97
IV.2	Description, analyse modale et recalage du module roulement	97
IV.2.1	Caractéristiques du banc	97
IV.2.2	Modèle numérique et recalage	98
IV.2.2.1	Description de la démarche	98
IV.2.2.2	Carter seul en libre-libre	99
IV.2.2.3	Arbre seul en libre-libre	102
IV.2.2.4	Ensemble carter, arbre, roulements en libre-libre	105
IV.2.2.5	Ensemble carter, arbre, roulements encastré	107
IV.3	Restitution de signaux générés par pots vibrants (sans accouplement moteur)	111
IV.3.1	Choix des signaux d'excitation	111
IV.3.2	Nombre et positions des sources virtuelles	112
IV.3.3	Nombre et positions des observations	112
IV.3.4	Cartes de conditionnement	112
IV.3.4.1	Approche numérique	112
IV.3.4.2	Approche expérimentale	114
IV.3.5	Restitution	115
IV.3.5.1	Linéarité de la structure	116
IV.3.6	Fonctions de transmissibilité	116
IV.3.6.1	Cas zone bien conditionnée (ZBC)	116
IV.3.6.2	Cas zone mal conditionnée (ZMC)	117
IV.3.6.3	Système surdéterminé	118
IV.3.6.4	Influence d'une perturbation	119
IV.4	Conclusion	121
V	Analyse numérique et expérimentale d'un carter accouplé au moteur	123
V.1	Restitution de signaux générés par pots vibrants (avec accouplement moteur)	123
V.1.1	Description du banc	123
V.1.2	Mesures préliminaires/Identification des raies spectrales	124
V.1.3	Instrumentation du banc	125
V.1.4	Sources réelles, sources virtuelles, observations	125
V.1.5	Cartes de conditionnement	127
V.1.6	Restitution	127

V.2	Restitution de signaux générés par des roulements défectueux	128
V.2.1	Description du banc d'essais	128
V.2.2	Sources virtuelles, sources réelles, observations	129
V.2.3	Cartes de conditionnement	129
V.2.4	Restitution	130
V.2.4.1	Effet de glissement	130
V.2.4.2	Cas bagues extérieures, BEs	130
V.2.4.3	Cas bagues intérieures, BIs	133
V.2.4.4	Cas de la bille	135
V.2.4.5	Cas bague extérieure/bague intérieure, BE/BI	135
V.2.4.6	Cas bagues extérieures/bagues intérieures, BEs/BIs	138
V.2.5	Corrélation avec la meilleure position du capteur dans le cadre d'une détection classique	140
V.2.6	Restitution de la valeur RMS	143
V.2.7	Suivi de l'état d'endommagement	144
V.3	Conclusion	145
	Conclusion générale et Perspectives	147
	A Pression de Hertz	151
	Références	152

Notations et Abréviations

$\{X\}$	Vecteur colonne
$\{X\}_{M \times 1}$	Vecteur colonne de M lignes
$[X]$	Matrice
$[X]_{M \times N}$	Matrice M lignes, N colonnes
X_{ij}	j -ième terme de la i -ième ligne de $[X]$
$[X]$	Matrice diagonale
$[I]$	Matrice Identité
$diag(X_i)$	Matrice diagonale de terme X_i
$\ \{X\}\ _1$	Norme 1 du vecteur $\{X\}$
$\ \{X\}\ _2$	Norme 2 ou norme euclidienne du vecteur $\{X\}$
$[X]^T$	Transposée de $[X]$
$[X]^*$	Conjuguée de $[X]$
$[X]^{-1}$	Inverse de la matrice $[X]$
$[X]^H$	Transposée de la conjuguée de $[X]$
$tr([X])$	Trace de la matrice $[X]$
$rang([X])$	Rang de la matrice $[X]$
$det([X])$	Déterminant de la matrice $[X]$
$c([X])$	Nombre de conditionnement de la matrice $[X]$
$x^*(t)$	Signal complexe conjugué de $x(t)$
$\sum_{r:dom}$	Somme sur les modes dominants
\mathbf{i}	Nombre complexe tel que $\mathbf{i}^2 = -1$
Γ_{ii}	Autospectre de la voie i
Γ_{ij}	Interspectre entre la voie i et j
$[H]$	Matrice de transfert
h	Fonction de transfert
$[T]$	Matrice de transmissibilité
t	Fonction de transmissibilité
$\{\phi\}_r$	Mode propre r
$[M],[K],[C]$	Matrices masse, raideur, amortissement
$[M_g],[K_g],[C_g]$	Matrices masse, raideur, amortissement généralisées
m_r, k_r, c_r	r -ièmes composantes de $[M_g],[K_g],[C_g]$

BPFI	Ball Pass Frequency Inner
BPFO	Ball Pass Frequency Outer
BSF	Ball Spin Frequency
BE	Bague extérieure
BI	Bague intérieure
ddl	Degré De Liberté
ZBC	Zone Bien Conditionnée
ZMC	Zone Mal Conditionnée
AWD	Adapted Wavelet Demodulation
MWD	Morlet Wavelet Demodulation
FRF	Fonction Réponse en Fréquences
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
SAS	Séparation Aveugle de Sources
MIMO	Multiple Input Multiple Output
RMS	Root Mean Square

Introduction générale

L'industrie est sans cesse en mouvement. Elle se perfectionne, se délocalise, invente dans le but de garder ou de gagner des parts de marchés face à une concurrence féroce. Cette concurrence s'accroît avec l'ouverture des frontières, les transports de plus en plus rapides, l'influence des actionnaires... C'est dans cet esprit que la maintenance est devenue une des priorités au sein de l'entreprise. Elle a la lourde tâche non seulement d'augmenter la disponibilité des équipements mais également de garantir la sécurité des biens et des personnes. Il existe trois grands types de maintenance, la première, dite curative, n'a de l'intérêt que pour des équipements peu coûteux et sans danger, la deuxième, dite maintenance préventive systématique, est basée sur un échéancier défini par l'historique des pannes et la troisième, dite maintenance préventive conditionnelle, est basée sur une surveillance continue de l'état de fonctionnement via des indicateurs spécifiques. C'est ce dernier type de maintenance qui intéresse le monde industriel de part sa capacité à appréhender le fonctionnement d'un équipement.

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine de la maintenance préventive conditionnelle par analyse vibratoire.

La maintenance nécessite de nombreux outils d'analyse mais celui qui se montre le plus efficace dans cet exercice est l'analyse vibratoire. Son implémentation est largement répandue et fait l'objet de toutes les convoitises. De par ces propriétés, elle intervient à trois niveaux : la surveillance, le diagnostic et le suivi. La surveillance utilise des indicateurs dits globaux qui caractérisent la modification du comportement de la machine. Une valeur trop élevée nécessite, le plus souvent, le passage au niveau du diagnostic. Ce niveau de diagnostic s'offre les services de nombreuses techniques de traitement du signal, afin de localiser et définir la nature du ou des défauts présents. Le troisième niveau, le suivi, consiste à suivre l'état d'endommagement de chacun des éléments défectueux et prédire leur durée de vie résiduelle.

En pratique le diagnostic peut procurer quelques difficultés. Effectivement si l'équipement étudié possède au moins deux composants identiques, il devient difficile voir impossible suivant l'emplacement des capteurs de cibler le roulement défectueux, pénalisant le diagnostic. En outre, ceci se traduit par un suivi vibratoire de l'endommagement, à partir d'indicateurs dits globaux, peu fiable.

Ce travail a la lourde ambition de fiabiliser le diagnostic et le suivi à travers l'intégration des problèmes inverses. L'intérêt est de séparer la contribution des différentes sources vibratoires généralement et directement liées à une défaillance plus ou moins importante d'un composant mécanique, à partir de plusieurs mesures réalisées par les accéléromètres. La séparation permettra non seulement de localiser les défauts sur les composants mais également de suivre l'évolution de l'endommagement de chacun d'entre eux.

Le chapitre 1 offre deux parties concernant, tout d'abord, la maintenance préventive conditionnelle par analyse vibratoire puis, dans un second temps, la dynamique des structures. Ces deux notions peuvent être reliées par l'expression : "la dynamique de la structure est au service de la maintenance conditionnelle par analyse vibratoire". La première partie décrit l'influence et l'intérêt de la maintenance, et plus particulièrement pour l'étude des roulements par analyse vibratoire. Les défauts de roulements, type écaillage, ont la propriété de générer un signal périodique qui a permis et permet le développement de nombreuses méthodes de détection que nous décrirons. Ces techniques se développent encore aujourd'hui grâce à la connaissance de la dynamique de l'équipement étudié. C'est dans ce cadre que la dynamique des structures intervient, sujet de la deuxième partie de ce chapitre. Nous sommes au croisement de deux sciences, traitement du signal et mécanique vibratoire, qui, utilisées ensemble, offrent des outils admirables de surveillance, de détection et de suivi. D'ailleurs cette étude a fait émerger une nouvelle méthode de détection avancée à partir des propriétés mécaniques de la structure et de la théorie des ondelettes, que nous décrivons à la fin de ce chapitre. Cependant ce chapitre met un bémol quant aux difficultés pouvant exister lors du diagnostic. Difficultés que nous avons introduites au préalable et qui nécessitent l'utilisation du principe des problèmes inverses.

Le chapitre 2 s'intéresse aux problèmes inverses. Cette notion est introduite dans un cadre général afin de différencier leurs implications, notamment dans le développement mathématique. Leur caractère mal-posé au sens de Hadamard [Hada 02] sera évoqué pour montrer leurs limites, plus particulièrement l'instabilité des solutions face à l'inversion. Des artifices tentent de corriger ce problème avec plus ou moins de réussite. Nous développerons plus particulièrement le sujet sur les problèmes linéaires touchant le domaine dans lequel évolue cette thèse : le domaine des vibrations. L'étude bibliographique permet de définir les besoins dans ce domaine, et permet de cibler notre travail : trouver des zones sur la structure où l'emplacement des capteurs pourrait rendre l'inversion stable. En outre, le développement mathématique y sera exposé suggérant un critère de stabilité face à l'inversion. Critère qui fait l'objet d'attention dans ce travail et l'objet de développement d'approches pour rendre l'inversion stable.

Le chapitre 3 s'appuie sur le chapitre 2, et développe deux approches pour mettre en évidence des zones où l'emplacement des capteurs peut rendre une inversion stable avec un nombre limité de ceux-ci face au nombre de sources. Ces deux approches, qui sont de nature numérique et expérimentale, sont corrélées. La première approche nécessite un modèle numérique de la structure étudiée permettant simplement de définir la stabilité de l'inversion pour chaque configuration de la position des capteurs. Cette définition donne lieu à des cartes de niveaux représentant des zones d'optimisation, appelées cartes de conditionnement. La deuxième approche est une approche expérimentale. Elle est basée sur la dynamique des structures et l'analyse modale définie dans le chapitre 1. Une relation est déterminée entre la position des capteurs et la stabilité du problème face à l'inversion. Ensuite ces deux approches sont associées à des procédures d'utilisations qui sont validées sur une structure académique : une plaque encadrée-libre régie par des pots vibrants. Ces procédures sont comparées à une méthode classique dite de régularisation.

Les chapitres 4 et 5 réalisent une validation expérimentale sur un cas plus proche d'un cas industriel. Le banc d'essai est un carter constitué de deux paliers à roulements accouplés ou non à un moteur de 10kW. Le chapitre 4 s'intéresse au carter non accouplé dont les sources vibratoires sont deux pots vibrants. Dans une première partie, l'analyse modale du carter est réalisée en procédant à différentes étapes de recalage afin d'obtenir un modèle numérique proche de la réalité. Dans une deuxième partie, les approches développées dans le chapitre 3 sont mises à l'épreuve pour évaluer leur apport dans un système d'inversion. Les procédures associées de restitution

seront de nouveau confrontées aux méthodes classiques de régularisation. Le chapitre 5 introduit le moteur et les roulements défectueux qui font office de sources vibratoires. Le moteur en fonctionnement engendre des perturbations qui vont parasiter les signaux enregistrés par les capteurs pouvant mettre à mal l'inversion. Les roulements seront endommagés successivement puis simultanément sur les différentes bagues du roulements. Nous en déduisons la qualité de l'inversion pour ces différents défauts. Une comparaison des zones obtenues avec celles obtenues pour une détection classique est réalisée afin d'améliorer les diagnostics. Finalement, une introduction au suivi de différents roulements défectueux simultanément est proposée.

Chapitre I

La dynamique des structures au service de la maintenance préventive conditionnelle par analyse vibratoire.

Ce chapitre explicite les bases dans lequel s'inscrit ce travail de thèse. La première partie montre en quoi la notion de maintenance est devenue aujourd'hui incontournable dans le monde industriel. Plus particulièrement, l'analyse vibratoire est l'un des outils les plus efficaces et les plus utilisés dans l'industrie. Sa pratique, ses traitements, ses ambitions pour la maintenance préventive conditionnelle sont abordés. Sa mise en application étant vaste, ce présent travail de thèse se contente de traiter les signaux issus des roulements omniprésents dans le parc des machines industrielles. L'emploi de l'analyse vibratoire, comme outil de maintenance, passe de plus en plus par la connaissance du comportement dynamique de la structure pour fiabiliser le diagnostic et pour éventuellement anticiper le fonctionnement. C'est pourquoi, nous présentons à travers la deuxième partie de ce chapitre la dynamique des structures caractérisée par l'analyse modale.

I.1 Maintenance conditionnelle par analyse vibratoire

I.1.1 Historique et introduction

La maintenance remonte probablement à la naissance de la vie et n'est pas uniquement propre à l'Homme. Maintenir, c'est faire en sorte que quelqu'un/quelque chose reste dans un état déterminé. Cette notion de maintenance a évolué au cours du temps, aujourd'hui le terme maintenance est associé au monde industriel. L'optimisation des performances et des coûts de production des équipements passe par l'intégration d'une même démarche des aspects de fiabilité, de maintenabilité, de disponibilité et de sécurité des biens et des personnes. L'impératif économique, face aux besoins d'être compétitif, font que la maintenance prend un rôle prépondérant aussi bien dans les secteurs industriels que des secteurs aussi variés que l'industrie agro-industrielles, les hôpitaux ou le bâtiment.

La maintenance est définie par la norme NF EN 13306 [NFEN 01] où 3 types de maintenances sont distincts, tableau I.1, la maintenance curative, la maintenance préventive systématique et la maintenance préventive conditionnelle.

Le choix entre ces différents types de maintenance dépend des politiques menées sur chaque équipement. Le coût d'une panne et la sécurité du personnel sont deux paramètres primordiaux quant au choix du type de maintenance. Une bonne politique de maintenance correspond à un bon dosage entre ces trois méthodes. Elle est basée essentiellement sur leur complémentarité

Situation selon NF EN 13306 [NFEN 01]	Type de maintenance
Maintenance exécutée après détection d'une panne et destinée à remettre un bien dans un état dans lequel il peut accomplir une fonction requise.	Maintenance curative
Maintenance préventive exécutée à des intervalles de temps préétablis ou selon un nombre défini d'unités d'usage mais sans contrôle préalable de l'état du bien.	Maintenance systématique
Maintenance préventive basée sur une surveillance du fonctionnement du bien et/ou des paramètres significatifs de ce fonctionnement intégrant les actions qui en découlent.	Maintenance conditionnelle

TAB. I.1 – Définitions des maintenances : norme NF EN 13306 [NFEN 01]

[Luce 94] et reste propre à chaque entreprise.

La maintenance curative est certainement la plus ancienne des techniques de maintenance. Elle correspond à une action de maintenance effectuée après une défaillance mécanique. Son utilisation est réservée aux équipements qui ne présentent pas un intérêt majeur dans le système de production et aucun risque pour le personnel en terme de sécurité.

La maintenance préventive systématique et conditionnelle rappelle l'expression "mieux vaut prévenir que guérir". Ce sont des maintenances réservées à des équipements coûteux ou qui présentent des risques en terme de sécurité. La maintenance préventive systématique consiste à établir un échéancier, basé sur le temps de bon fonctionnement. La maintenance conditionnelle fait appel à des indicateurs pour prendre ou non des mesures correctives. Ces indicateurs peuvent être de différentes natures : la mesure thermique par infrarouge, l'analyse ultrasons, la mesure optique, l'analyse des lubrifiants, l'analyse de vibrations... Ce type de maintenance est coûteux à mettre en place car elle nécessite l'intégration d'instruments de mesures sur le système étudié et fait appel à des compétences de plus en plus pointues. Cependant, elle reflète le mieux l'état de fonctionnement de l'équipement concerné. Ces mesures sont ensuite extrapolées pour en déduire la durée de vie résiduelle avant une panne.

Parmi les outils de la maintenance préventive conditionnelle, l'analyse vibratoire est la technique la plus répandue pour la maintenance des machines tournantes. Elle permet de suivre la santé des machines tournantes en fonctionnement et ainsi de détecter les défauts mécaniques tels que les défauts dans les engrenages, les roulements, les accouplements ... Dans notre étude et dans la suite de cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement aux roulements, composants essentiels présents dans quasiment toutes les machines tournantes.

I.1.2 Les roulements et leurs avaries

On peut noter deux types d'avaries caractéristiques de la détérioration des roulements : les avaries dites naturelles dues à la fatigue des roulements et les avaries dues à un mauvais montage ou une mauvaise utilisation du roulement.

On qualifie les principaux défauts :

- Le grippage, dû à l'absence de lubrification, à une vitesse excessive ou un mauvais choix du type de roulement. Ceci se manifeste par un transfert de matière arrachée sur les surfaces et redéposée par microsoudure.
- Les empreintes par déformation, dues à des traces de coups, des fissures ou des cassures.
- L'incrustation de particules étrangères, due à un manque de propreté au montage ou de l'entrée accidentelle d'impuretés.

- La corrosion, due à un mauvais choix du lubrifiant, surtout quand les roulements viennent d’être nettoyés et sont contaminés par la transpiration des mains.
- La corrosion de contact, due au mauvais choix d’ajustements entre les bagues et les logements ou les arbres.
- Les criques, fissures étroites ou autres amorces de cassures dues aux contraintes exagérées au montage ou au démontage.
- L’usure par abrasion, due à une mauvaise lubrification. L’usure par abrasion donne aux roulements un aspect gris, givré.

Le cas le plus rencontré est un défaut d’écaillage dû à la fatigue des roulements. L’écaillage de fatigue, figure I.1, est un phénomène normal qui conduit à une défaillance et ce, quelque soit les conditions d’utilisation et de fonctionnement. Ce défaut survient sous l’effet de la fatigue due aux contraintes de cisaillement alternées qui sévissent en sous-couche. Le fonctionnement élastohydrodynamique crée, par dépassement de la limite d’élasticité, des microdéformations permanentes et des fissures qui se propagent vers la surface et conduisent à l’écaillage. Les mécanismes de la fatigue par roulement font l’objet d’étude, notamment au sein du GMMS¹. L’écaillage est un processus continu qui s’accélère plus ou moins après l’apparition des premières fissures. Des études de suivi de l’évolution de la taille de l’écaillage font également l’objet de recherches notamment réalisées par Bolaers [Bola 02].

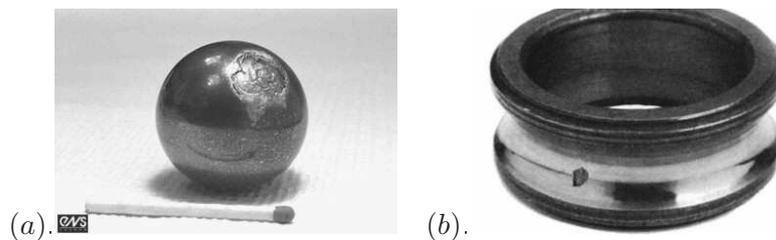


FIG. I.1 – (a) Écaillage d’une bille. (b) Écaillage d’une bague.

L’écaillage localisé et prématuré résulte d’anomalies caractérisées telles qu’un mauvais montage, une surcharge, un défaut d’alignement, une mauvaise forme de logement. Ces défauts donnent naissance à des vibrations qui les caractérisent. C’est pourquoi l’analyse vibratoire s’avère intéressante et s’est montrée très puissante d’une part pour surveiller l’état de fonctionnement et d’autre part pour diagnostiquer le défaut et suivre son évolution.

I.1.3 Les différents niveaux d’analyse : surveillance, diagnostic et suivi

On distingue trois niveaux d’analyse : la surveillance, le diagnostic [Auge 01] et le suivi [Zhan 01]. La surveillance consiste à surveiller l’état de fonctionnement général des équipements à travers des indicateurs le plus souvent globaux qui sont comparés à intervalles de temps réguliers. Si un indicateur dépasse un seuil admissible donné par l’historique de la machine, il est nécessaire soit de prendre des mesures correctives si la machine est bien connue soit d’employer le deuxième niveau d’analyse, le diagnostic. Ce dernier nécessite des techniques de traitement du signal permettant d’extraire les informations concernant l’état de fonctionnement. De nombreuses études s’intéressent à ce niveau d’analyse et les techniques de diagnostic sont de plus en plus nombreuses et de plus en plus pointues. Il est à noter que ce niveau est parfois confondu avec le premier niveau, notamment à travers les réseaux de neurones. Le diagnostic permet donc d’isoler le défaut, de le localiser et de le caractériser. Cette détection et cette localisation va permettre le suivi dans le temps de l’évolution de la sévérité de la défaillance. Cet état de suivi

¹Groupe de Mécanique, Matériaux et Structures

constitue le niveau le plus élevé dans l'analyse vibratoire et son objectif est la qualification, la quantification et la prédiction en terme de fiabilité. Pour réaliser ces différents niveaux d'analyses, il est nécessaire d'instrumenter les équipements étudiés et de traiter les signaux enregistrés. Les deux sections suivantes introduisent ces deux notions : la pratique de l'analyse vibratoire et le traitement des signaux vibratoires.

I.1.4 La pratique de l'analyse vibratoire

La qualité d'un suivi par analyse vibratoire passe par une bonne maîtrise de la chaîne de mesures. On peut distinguer trois grandes étapes pour réaliser l'acquisition :

- les vibrations mécaniques sont transformées en signaux électriques grâce aux capteurs de vibrations,
- les signaux électriques sont conditionnés pour rendre exploitable les signaux par les appareils d'analyses,
- les signaux sont enregistrés par différents matériels tels que les analyseurs de spectre, les collecteurs de données ou les cartes d'acquisition associés à des logiciels de traitement.

I.1.4.1 Le capteur de vibrations

Le capteur de vibrations est le premier maillon de la chaîne de mesure. Le plus largement utilisé est l'accéléromètre ou capteur piézoélectrique. Le principe de tous ces accéléromètres est de générer un signal électrique proportionnel au niveau de vibration. Ces accéléromètres sont très appréciés car ils possèdent une large bande de fréquence présentant une excellente linéarité, permettent l'intégration du signal pour obtenir la réponse en vitesse ou en déplacement et sont d'une excellente précision et fiabilité.

La façon d'utiliser l'accéléromètre joue un rôle primordial dans la prise de mesure. En effet, le mode de fixation et l'emplacement du capteur influent sur les résultats. La fixation sur la structure doit être réalisée à partir d'une liaison parfaite. Il existe plusieurs modes de fixation tels que le goujon vissé, l'embase collée, l'embase magnétique, la pointe touche. Ces différents modes jouent un rôle considérable sur la bande de fréquence et surtout sur la répétitivité des mesures. Le choix de l'emplacement du capteur se veut important étant donné la conception de celui-ci. En effet, la prise de mesure est fournie pour une direction donnée ; c'est pourquoi l'accéléromètre doit être placé à un endroit où la mobilité est maximale. Actuellement, le capteur est placé au plus près du défaut potentiel pour éviter les contributions extérieures. Estocq [Esto 04] étudie les points optimums de mesures dans le cas où le palier est inaccessible. Nous tenons, dans cette section, à introduire deux autres types de capteurs qui peuvent se montrer très intéressants dans un futur proche. Le premier capteur, breveté par Bolaers, Pottier, Dron [Bola 04], est basé sur le phénomène capacitif ; il est dédié à la détection des défauts de machines tournantes. Trois lames le constituent, dont l'une possède une fréquence de résonance identique à la fréquence caractéristique d'un potentiel défaut (cf.section 1.1.5.1). Le deuxième type de capteur se distingue par sa mesure sans contact par le biais d'un laser : le vibromètre-laser. On trouve également le vibromètre-laser à balayage avec lequel il est possible de mesurer les vibrations sur un plan complet de la structure.

Revenons sur le principe de la position des capteurs car il s'expose à une problématique que nous souhaitons soulever à travers nos travaux. Les signaux enregistrés par les capteurs sont souvent le résultat d'un mélange de nombreuses sources vibratoires qui peuvent perturber l'interprétation des niveaux d'analyse introduit dans la section précédente. Et ceci est d'autant plus vrai si le capteur n'est pas placé au plus près du défaut potentiel dû à un manque d'accessibilité. La surveillance d'un composant particulier peut être perturbée par la présence d'autres sources vibratoires. De même, le diagnostic peut s'avérer difficile si des composants identiques sont intégrés à l'équipement étudié.

I.1.4.2 Le conditionnement du signal

Le signal électrique doit être conditionné pour être traité par les appareils d'analyse. Ce conditionnement est donné par les différents points suivants :

- l'amplification du signal de sortie du capteur pour le rendre exploitable, réalisée par le préamplificateur ;
- l'intégration du signal pour passer à la vitesse ou au déplacement, réalisée par l'intégrateur ;
- la limitation de la plage de fréquences du signal, réalisée par les filtres passe-haut et passe-bas ;
- l'amplification du signal pour le transmettre à l'appareil d'analyse, réalisée par l'amplificateur.

I.1.4.3 Le matériel de traitement

Les signaux issus du conditionnement sont obtenus grâce à différents matériels d'acquisition tels que les analyseurs de spectre, les collecteurs de données ou les cartes d'acquisition associés à des logiciels de traitement. Cependant, quelque soit le type d'appareil, le paramétrage de l'acquisition est primordial. Le choix de la fréquence d'échantillonnage, du nombre d'échantillons va conditionner la qualité du signal enregistré. Une fréquence d'échantillonnage trop petite peut fournir une résolution spectrale faible tandis qu'une fréquence d'échantillonnage élevée peut rendre le signal temporel sous échantillonné. Un compromis, laissé à la charge de l'opérateur, doit être effectué.

I.1.5 Le traitement des signaux

I.1.5.1 Caractéristiques du signal engendré par le roulement endommagé

Comme nous l'avons évoqué dans une section précédente, les avaries les plus fréquentes sur les roulements sont les défauts d'écaillage. Lors de la mise en rotation, un train d'impulsion est généré par ces défauts, à une fréquence bien définie que l'on appelle "fréquence caractéristique" de défaut du roulement. Ce signal périodique est l'origine de nombreuses méthodes de détection de défaut de roulement [Tand 99]. Les fréquences caractéristiques sont déterminées à partir de la géométrie du roulement et de la cinématique de la machine étudiée. Elles sont données par les équations suivantes [Camp 85] :

- Défaut bague intérieure, Ball Pass Frequency Inner race (BPFI) $f_i = \frac{z}{2} f_r (1 + \frac{d}{D} \cos(\phi))$
- Défaut bague extérieure, Ball Pass Frequency Outer race (BPFO) $f_e = \frac{z}{2} f_r (1 - \frac{d}{D} \cos(\phi))$
- Défaut de bille, Ball Spin Frequency (BSF) $f_b = \frac{f_r D}{2d} (1 - ((d/D) \cos(\phi))^2)$.

f_r est la vitesse de rotation, z est le nombre d'éléments roulants, ϕ est l'angle de contact, d et D sont respectivement le diamètre de l'élément roulant et le diamètre primitif.

I.1.5.2 Les prétraitements

La qualité d'un enregistrement nécessite quelquefois un prétraitement. Il s'agit essentiellement de méthodes de débruitage et de filtrage.

Le débruitage permet en supprimant le bruit de conserver juste le signal utile. Plusieurs techniques existent :

- La soustraction spectrale [Boll 79], [Dron 04]. Le signal est découpé en M blocs, tous traités par la transformée de Fourier et sont moyennés. Cette moyenne fait enfin l'objet d'une transformée de Fourier inverse supprimant ainsi le bruit.
- Le Moyennage synchrone [Brau 75], [McFa 87]. Il consiste à faire l'acquisition de plusieurs signaux à partir d'un "top tour" ou d'un front montant (lors d'un choc par exemple) et de réaliser la moyenne de l'ensemble des signaux.
- La méthode SANC, Self Adaptative Noise Cancelation [Chat 81]. Cette méthode consiste à déterminer un filtre adaptatif permettant d'estimer le bruit perturbateur afin de le supprimer du signal.
- Le seuillage en ondelettes [Dono 95]. Ce seuillage est conçu pour traiter du bruit stationnaire gaussien. Cette technique peut être utilisée pour extraire les défauts vibratoires d'un signal fortement bruité.
- La méthode de séparation de sources [Hass 96]. Elle permet de séparer des signaux statistiquement indépendants. On peut citer l'exemple de la parole mélangée au bruit du véhicule.

Le filtrage du signal peut être utilisé pour isoler une bande de fréquence que l'on veut étudier grâce à des filtres passe-haut, passe-bas ou passe-bande. Par exemple, un filtrage passe-haut permet de s'affranchir de l'influence d'un balourd dans le signal mesuré. De même, le signal peut être filtré dans une bande de fréquences autour d'une résonance de structure pour ne garder que le signal utile. Ce type de filtre est très largement utilisé dans le cas d'une détection d'enveloppe section (1.1.5.5).

I.1.5.3 Les indicateurs temporels

Les méthodes temporelles sont basées sur l'analyse statistique du signal à travers des indicateurs dits "globaux". Ces indicateurs évaluent l'état de fonctionnement global des équipements mais ne localisent pas le défaut. Ce sont des méthodes utiles à la surveillance. De nombreux indicateurs existent dans la littérature et certains sont le résultats de la combinaisons de plusieurs d'entre eux, [Tand 99] [Jard 05], c'est pourquoi nous ne présenterons ici que les plus courants.

L'indicateur scalaire le plus couramment utilisé est la valeur efficace du signal ou valeur RMS (Root Mean Square). Elle correspond à la racine carrée de la moyenne du carré du signal $x(t)$ calculée sur une période T .

$$V_{efficace} = V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} x^2(t) dt} \quad (I.1)$$

Cet indicateur est traditionnellement utilisé pour des signaux de type accélérations et sur une large bande de fréquences entre 0 et 20kHz. Cependant, il n'est pas rare de voir des valeurs RMS calculées sur des bandes de fréquences correspondant à des résonances de structure pour augmenter la sensibilité de l'indicateur [Esto 04].

D'autres indicateurs très répandus existent : les indicateurs crêtes [Boul 98] et le Kurtosis. Les indicateurs crêtes sont issus des valeurs crêtes (supérieures, inférieures ou crêtes à crêtes) du signal temporel mesuré. Les plus utilisés sont le facteur crête [Miya 86], défini comme étant le rapport entre la valeur crête et la valeur efficace, et le facteur K comme étant le produit entre la valeur crête et la valeur efficace.

$$\text{Facteur crête} = \frac{\text{valeur crête}}{\text{valeur efficace}} = \frac{\sup|x(t)|}{\sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} x^2(t) dt}} \quad (I.2)$$

$$\text{Facteur } K = \text{valeur crete.valeur efficace} = \sup|x(t)| \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_t^{t+T} x^2(t) dt} \quad (\text{I.3})$$

Le Kurtosis est basé sur les moments d'ordre 4. Il permet une détection précoce d'un défaut de roulement. Le Kurtosis prend une valeur égale à 3 pour un roulement sain et dépasse cette valeur dès l'apparition d'un défaut de type écaillage [Mart 95].

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4(X)}{\mu_2(X)^2} = \frac{E[(X - \bar{X})^4]}{E[(X - \bar{X})^2]^2} \quad (\text{I.4})$$

μ_4 est le moment statistique d'ordre 4, μ_2 est le moment statistique d'ordre 2, X est la distribution de signal temporel $x(t)$. $E[X]$ est l'espérance mathématique définie par la relation :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) dt \quad (\text{I.5})$$

L'ensemble de ces indicateurs est très facile à mettre en œuvre. Le plus souvent, ces différents indicateurs sont traités simultanément pour profiter des avantages de chacun et confirmer les résultats. Ces indicateurs indiquent une modification du comportement vibratoire de l'ensemble de la structure mais ne permettent pas la localisation de l'élément qui modifie ce comportement. Un deuxième niveau est alors nécessaire pour définir la cause de cette variation du niveau de vibration : le diagnostic.

I.1.5.4 Les méthodes fréquentielles

Les méthodes fréquentielles sont les méthodes les plus largement utilisées dans le monde industriel, de part leur facilité de mise en œuvre et d'interprétation. Elle s'appuie sur la transformée de Fourier, équation (I.6), et plus particulièrement pour des signaux numériques sur la transformée de Fourier discrète rapide (Fast Fourier Transform, FFT).

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{I.6})$$

$X(f)$ est la transformée de Fourier, t est la variable temps et f est la variable fréquence.

Cette représentation permet de connaître le contenu fréquentiel d'un signal temporel, et de localiser les fréquences caractéristiques de défauts [Dron 95].

Une adaptation de cette transformée à la localisation de défauts de roulements est particulièrement appréciée et largement utilisée. Il s'agit de la détection d'enveloppe ou high-frequency resonance technique (HFRT) [McFa 84]. En effet, les défauts de roulement de type choc excitent les hautes fréquences des structures, ainsi un phénomène de modulation se produit entre la fréquence de défaut (basse fréquence) et la résonance de structure (haute fréquence). Un filtrage passe-bande suivi de la transformée de Hilbert permet de détecter et d'isoler la basse fréquence. Cependant, notons que cette méthode nécessite de connaître une résonance de structure en hautes fréquences et elle est inefficace devant un bruit trop élevé.

I.1.5.5 Les méthodes temps-fréquences

Les signaux non stationnaires ont exigé le développement de méthodes temps-fréquences. La présence des chocs dus aux défauts de roulements donne au signal vibratoire un caractère non stationnaire, ce qui interdit en principe l'utilisation de la transformée de Fourier qui suppose une stationnarité d'ordre 2 [Bard 94]. La transformée de Wigner-Ville [Meng 91], [Bayd 01] et la transformée de Fourier à court-termes [Wang 93] sont les méthodes les plus utilisées.

La transformée de Fourier fenêtrée est la plus ancienne et consiste à réaliser une transformée de Fourier sur une fenêtre du signal, $h(t)$, qui glissera temporellement, équation (I.7).

$$F_x^{(h)}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \overline{h(s-t)} e^{-i2\pi fs} ds \quad (\text{I.7})$$

Cette segmentation du signal par fenêtre n'existe plus pour la distribution de Wigner Ville mais possède le principal désavantage de développer des termes d'interférence qui nuisent au diagnostic. Cette distribution associée à un signal temporel complexe d'énergie finie $x(t)$ une fonction réelle, $W_x(t, \nu)$, du temps t et de la fréquence ν définie par l'équation :

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (\text{I.8})$$

Pour limiter l'effet des termes d'interférences, on notera une variante de cette distribution qui est la distribution de Wigner Ville lissée [Boub 98]. Elle intègre deux fenêtres de lissage, $g(t)$ dans le domaine fréquentiel et $\mathfrak{F}(\nu)$ dans le domaine fréquentiel. Sachant que $f(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $\mathfrak{F}(\nu)$, cette distribution s'écrit :

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - u + \tau/2) x^*(t + u - \tau/2) f(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau \quad (\text{I.9})$$

Cohen [Cohé 89] réalise un état de l'art sur les différentes distributions en temps-fréquences comme le spectrogramme, la distribution de Cho-Williams ou la distribution de Wigner-Ville. Notons que ces méthodes sont peu à peu remplacées par les méthodes temps-échelles qui, de par leur propriétés, suppriment les distorsions de bord.

I.1.5.6 Les méthodes temps-échelles

Les méthodes temps-échelles sont basées sur la transformée en ondelettes. Elles consistent à décomposer le signal en une somme d'ondelettes dilatées ou non et localisées temporellement. Notons que les ondelettes sont utilisées soit pour réaliser un débruitage du signal, soit pour réaliser un diagnostic en analyse vibratoire. Nous développons ici l'aspect diagnostic.

Une ondelette désigne une fonction qui oscille sur un intervalle de longueur fini (un temps donné si la variable est de type spatial).

L'ondelette, notée $\Psi(t)$, est une fonction continue, a des moments nuls, et est nulle au delà d'un segment de \mathbb{R} . Plus précisément, la condition d'admissibilité pour Ψ est définie par l'équation (I.10), ce qui implique une fonction ondulatoire.

$$\int_{\mathbb{R}^-} \frac{|\Psi(s)|^2}{|s|} ds = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\Psi(s)|^2}{|s|} ds < +\infty \quad (\text{I.10})$$

La décomposition en ondelette consiste à calculer un "index de ressemblance" entre le signal et l'ondelette $\Psi_{a,b}(t)$ obtenue par dilatation d'un facteur a positif et de décalage d'une position b de l'ondelette de référence (ou ondelette mère) $\Psi(t)$. La décomposition d'un signal $x(t)$ est définie par l'équation (I.11).

$$\mathfrak{W}_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \Psi_{a,b}(t) dt \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{I.12})$$

Le facteur d'échelle (ou dilatation) a est lié à la notion de fréquence tandis que le décalage b est lié à la notion de position temporelle.

L'application de cette transformée, dans le domaine de la détection et du diagnostic des roulements, a été développée depuis environ 20 ans avec un engouement particulier. Mori [Mori 96], fut probablement l'un des pionniers avec l'utilisation de l'ondelette de Morlet pour le diagnostic des roulements. Ensuite, de nombreuses études ont amélioré son utilisation et ont étendu le nombre d'ondelette mère [Misi 03]. Une revue sur le domaine a été réalisée par Peng et Chu [Peng 04]. Notons en particulier que Sun et Tang [Sun 02] utilisent les singularités du signal générées par les défauts pour les détecter. Ainsi, les impulsions dans le signal peuvent être détectées par les hautes fréquences avec une bonne résolution [Rubi 01].

Le choix de l'ondelette est un aspect primordial quant à la qualité des résultats. C'est pourquoi, elle doit être choisie en fonction du système étudié. Dans le cadre de ce travail de recherche, nous avons développé une ondelette adaptée pour des signaux de types réponses aux chocs avec une méthodologie adéquate réduisant considérablement le temps de calcul [Chie 07d], [Chie 07a]. Nous expliciterons son développement dans une section suivante car elle nécessite la connaissance du comportement dynamique de la structure qui sera présentée dans la deuxième partie du chapitre.

I.1.5.7 Les approches IA (intelligence artificielle)

Le diagnostic des machines fait appel depuis quelques années aux approches d'intelligence artificielle. Ces approches permettent de modéliser la connaissance, et se voient confier le rôle de prédicteur. Parmi les approches les plus étudiées, nous pouvons citer les réseaux de neurones et la logique floue. Un état de l'art sur le domaine est réalisé par Siddique [Sidd 03] et Jardine [Jard 05]. La logique floue fait appel à des fonctions d'appartenance permettant de passer d'un état à un autre de manière progressive. Ces fonctions sont à déterminer par apprentissage du caractère étudié. Les réseaux de neurones correspondent à un modèle de comportement construit à partir d'une base de données déduites du comportement historique du système étudié. Ce modèle, construit par apprentissage, aura ensuite un rôle de prédicteur qui le rend très apprécié dans le cadre du diagnostic des équipements. Le réseau de neurones est représenté comme un ensemble d'éléments simples, appelés neurones, reliés les uns aux autres, et qui se transmettent de l'information par l'intermédiaire de connections. Cette transmission nécessite l'emploi de fonction de seuil qui peut être booléennes ou qui peut être le résultat de la logique floue. Garga [Garg 01] combine les deux notions que sont logique floue et réseaux de neurones pour la connaissance d'une machine en vue d'un diagnostic et d'un suivi.

I.1.5.8 Développement du logiciel CHIBORA

L'ensemble des méthodes présentées précédemment a été introduit dans un logiciel, CHIBORA², que nous avons initié au cours de cette thèse afin de faciliter l'étude des signaux utilisés pour les recherches du laboratoire GMMS. Une interface graphique fait appel aux différents programmes permettant le traitement des signaux. Ces programmes ont été développés par l'équipe depuis sa création. Ce logiciel est composé de trois modules principaux.

Le premier module est un module d'acquisition où il est possible de piloter à distance un système d'acquisition via Ethernet. L'acquisition peut être programmée pour une heure précise ou par intervalle de temps régulier ou régressif (suivant une loi de régression). Ce module permet d'ouvrir un signal qui a déjà fait l'objet d'une acquisition. La dernière fonction de ce module est la possibilité de générer un signal simulé, type réponse aux chocs, ou type sinusoïdal.

²CHIementin BOlaers RAsolofondraibe

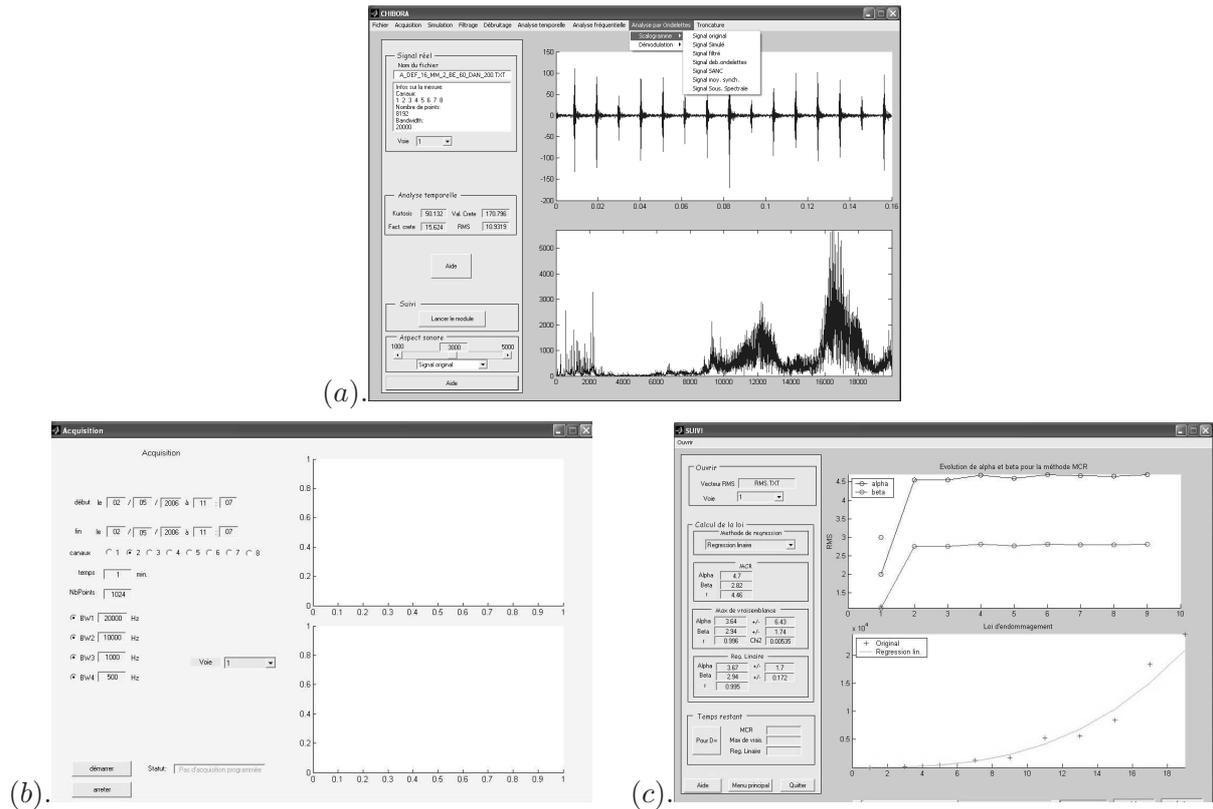


FIG. I.2 – CHIBORA. Module (a) Traitement, (b) Acquisition, (c) Suivi.

Le deuxième module est un module de traitement. On y trouve les méthodes de débruitage, les filtres, les indicateurs temporels, les transformés de Hilbert, de Fourier et d'ondelettes. Il est en prévision de réaliser un système expert qui associe la cinématique de la structure et le traitement des données.

Le troisième module est un module de suivi. Il détermine les paramètres d'une loi d'évolution à partir de valeurs d'indicateurs calculées à intervalle de temps. Cette loi est extrapolée par les moindres carrés linéaires, pondérés et récursifs, ce qui estime la durée de vie résiduelle du roulement étudié. Ce module peut être couplé avec le premier pour définir les intervalles de temps entre deux acquisitions.

I.2 Dynamique des structures

Cette seconde partie introduit la dynamique des structures. Les techniques avancées utiles à la surveillance, au diagnostic, et au suivi intègrent de plus en plus des notions mécaniques et notamment la dynamique des structures. En effet, pour un défaut donné sur un composant mécanique donné, la réponse sera différente d'une structure à l'autre et sera également différente pour deux mesures réalisées à deux endroits distincts. C'est pourquoi, la connaissance du comportement des structures peut amener à développer de nouvelles techniques performantes. Ce comportement est régi par des modèles bien connus aujourd'hui que nous pouvons simuler, [Thom 05].

Le système continu est idéalisé en un ensemble de structures discrètes que l'on définit comme un système à N degrés de liberté. Ce système nous permet, par une approche numérique, de prévoir le comportement du système étudié. Cependant, ces modèles nécessitent un recalage par rapport au modèle expérimental, qui est possible, via l'analyse modale, grâce à l'identification

modale. Après avoir défini les systèmes à N degrés de liberté ainsi que l'analyse modale, nous décrirons la procédure expérimentale pour réaliser une identification et un recalage.

I.2.1 Système N ddl

I.2.1.1 Modèle conservatif

Les systèmes conservatifs permettent de déterminer les pulsations propres et les déformées propres du système à N ddl. Les équations du mouvement d'un système conservatif s'écrivent matriciellement :

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (\text{I.13})$$

$[M]$ et $[K]$ sont respectivement la matrice de masse et la matrice de raideur. $\{f(t)\}$ est le vecteur des forces où chaque terme correspond à la force appliquée en chaque degré de liberté. Les équations sont couplées par les deux matrices, $[M]$ et $[K]$. Un changement de base va permettre de les découpler. C'est le principe de la synthèse modale ou superposition modale.

Ce changement de base introduit la notion de matrice de vecteurs propres, $[\phi]$, dont les colonnes sont les vecteurs propres $\{\phi_j\}$. Cette matrice constitue le lien entre les déplacements, $\{x(t)\}$, et les déplacements dans la nouvelle base, $\{q(t)\}$:

$$\{x(t)\} = [\phi]\{q(t)\} \quad (\text{I.14})$$

Ainsi, en insérant l'équation (I.14) dans l'équation (I.13) puis en multipliant à gauche par $[\phi]^T$, on obtient :

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{q}(t)\} + [\phi]^T[K][\phi]\{q(t)\} = [\phi]^T\{f(t)\} \quad (\text{I.15})$$

$[\phi]^T[M][\phi]$ et $[\phi]^T[K][\phi]$ vérifient une propriété importante appelée orthogonalité des modes propres. Ainsi, ce sont des matrices diagonales, dites généralisées, que l'on note respectivement $[M_g]$ et $[K_g]$. On obtient la relation :

$$[M_g]\{\ddot{q}(t)\} + [K_g]\{q(t)\} = [\phi]^T\{f(t)\} \quad (\text{I.16})$$

En multipliant par $[M_g]^{-1}$ à gauche de chaque membre, on obtient une relation matricielle dont les équations sont découplées, équation (I.17). Il apparaît N pulsations propres, $\omega_{0_i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$, associées à chaque vecteur propre $\{\phi_i\}$. Chaque équation découplée peut être résolue, donnant les déplacements modaux, q , et grâce à l'équation (I.14) revenir aux déplacements $x(t)$.

$$\{\ddot{q}(t)\} + \text{diag}(\omega_{0_i}^2)\{q(t)\} = [M_g]^{-1}[\phi]^T\{f(t)\} = \{\tilde{f}(t)\} \quad (\text{I.17})$$

a. En oscillations libres.

En oscillations libres, le vecteur des forces $\{f(t)\}$ est nul. Ainsi, nous obtenons un système découplé d'équations différentielles du second ordre de la forme :

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_{0_j}^2 q_j(t) = 0 \quad (\text{I.18})$$

dont la résolution exprime les déplacements dans la base modale :

$$q_j(t) = C_j \cos(\omega_{0_j} t + \varphi_j) \quad (\text{I.19})$$

D'après la relation (I.14), nous déterminons les déplacements, $\{x(t)\}$, dans la base réelle :

$$\begin{aligned}\{x(t)\} &= \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} q_j(t) \\ \{x(t)\} &= \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} C_j \cos(\omega_{0_j} t + \varphi_j)\end{aligned}\quad (\text{I.20})$$

b. En régime établi forcé.

Pour une force harmonique, $\{\tilde{f}(t)\} = \{F_0\} \cos \omega t$, nous cherchons une solution particulière de l'équation (I.17) de la forme $q_j(t) = Q_j \cos(\omega t)$. Ainsi, la solution $q_j(t)$ s'écrit simplement :

$$q_j(t) = \frac{F_{0_j}}{\omega_{0_j}^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad (\text{I.21})$$

d'où les déplacements $\{x(t)\}$ du système discrétisé :

$$\begin{aligned}\{x(t)\} &= \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} q_j(t) \\ \{x(t)\} &= \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} \frac{F_{0_j}}{\omega_{0_j}^2 - \omega^2} \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (\text{I.22})$$

I.2.1.2 Modèle dissipatif

L'amortissement est considéré comme une perturbation du modèle idéal précédent. Cependant, son implication va nécessiter des hypothèses simplificatrices car les mécanismes dissipatifs sont très complexes. Les frottements entre les assemblages, les dissipations par couplage avec un fluide sont autant de paramètres qui rendent le phénomène complexe [Bert 73], [Plou 98]. Le modèle le plus simple est le modèle visqueux où les forces de dissipation sont liées à la vitesse, équation (I.23).

$$\{f_{dissipation}\} = [C] \{\dot{x}(t)\} \quad (\text{I.23})$$

Ceci amène à la relation d'équilibre :

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (\text{I.24})$$

La résolution de cette équation peut être réalisée par deux grandes méthodes : soit l'utilisation du modèle d'état, où la résolution se réduit à une équation différentielle du premier ordre, soit le passage dans la base propre, où les équations se voient découplées.

Résolution par le modèle d'état (approche par modes complexes)

Le modèle d'état, défini par l'équation (I.25), permet de simplifier la résolution de l'équation du second ordre en une résolution d'un problème différentiel à deux matrices du premier ordre.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}(t)\} \\ \{\ddot{x}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [-M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ [D] \{\dot{y}(t)\} + [G] \{y(t)\} &= \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{I.25})$$

Les matrices $[D]$ et $[G]$ sont des matrices carrées réelles symétriques. $\{y(t)\}$ est le vecteur d'état dont les N premiers éléments représentent les déplacements $\{x(t)\}$ tandis que les N suivants représentent les vitesses $\{\dot{x}(t)\}$. Nous n'évoquerons que les résultats essentiels de la résolution de ce système. Une résolution détaillée est réalisée par Del Pedro et Pahud [DelP 89].

Il existe une matrice $[B]$ telle que les deux matrices, $[D]$ et $[G]$, sont diagonalisables. Cette matrice est la matrice des vecteurs propres, $\{B_j\}$. Nous exprimons ainsi le vecteur d'état dans la base propre, équation (I.26).

$$\{y(t)\} = [B]\{q(t)\} \quad (\text{I.26})$$

En multipliant l'expression (I.25) à gauche par $[B]^T$, les équations du système sont découplées :

$$\begin{aligned} [B]^T[D][B]\{\dot{q}\} + [B]^T[G][B]\{q\} &= [B]^T \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \{\dot{q}\} + [D_g]^{-1}[G_g]\{q\} &= \{\tilde{f}(t)\} \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

a. En oscillations libres.

La solution en oscillations libres conduit aux $2N$ valeurs propres complexes conjuguées suivantes :

$$s_j = -\omega_j \zeta_j \pm i\omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \quad (\text{I.28})$$

ζ_j est le coefficient d'amortissement, défini par $\zeta_j = \frac{c_j}{2\sqrt{k_j m_j}}$, et ω_j est la pulsation propre du système conservatif. Chaque valeur propre est associée au mode complexe $\{B_j\}$, au nombre de $2N$.

La réponse dans l'espace d'état s'écrit :

$$q_j(t) = Q_j e^{-s_j t} \quad (\text{I.29})$$

Nous en déduisons la réponse dans la base réelle de départ $\{y(t)\}$, dont les N premiers éléments correspondent aux déplacements, $\{x(t)\}$:

$$\begin{aligned} \{y(t)\} &= \sum_{j=1}^{2N} \{B_j\} q_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^{2N} \{B_j\} Q_j e^{-s_j t} \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

b. En régime établi forcé.

L'excitation harmonique a pour pulsation ω , $\{\tilde{f}(t)\} = \{f_0\} e^{i\omega t}$. On cherche une solution particulière aux équations découplées sous la forme $q_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)$, d'où le système linéaire à résoudre :

$$\begin{cases} B_j \omega + s_j A_j = \tilde{f}_j \\ -A_j \omega + s_j B_j = 0 \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

Les réponses dans l'espace d'état puis les réponses dans la base réelle sont déduites :

$$\begin{aligned}
q_j(t) &= \tilde{f}_j \frac{1}{s_j + \omega^2/s_j} \cos(\omega t) + \tilde{f}_j \frac{\omega/s_j}{s_j + \omega^2/s_j} \cos(\omega t) \\
\{y(t)\} &= \sum_{j=1}^{2N} \{B_j\} q_j(t)
\end{aligned} \tag{I.32}$$

Cette forme est appelée forme fractionnelle partielle; elle montre que l'on peut écrire la réponse du système sur la base des vecteurs propres complexes et cela quelque soit l'allure de la matrice d'amortissement. C'est à partir de cette réponse que se fera l'identification modale.

Résolution dans la base propre (approche par modes réels)

Le passage dans la base propre est une méthode très appréciée en analyse modale car elle permet d'"isoler" les paramètres modaux de chaque mode, et plus particulièrement l'amortissement modal. Ainsi, au même titre que la matrice de masse généralisée ou la matrice de raideur généralisée, il est défini la matrice d'amortissement généralisée :

$$[\phi]^T [C] [\phi] = [C_g] \tag{I.33}$$

d'où la relation dynamique dans la base propre :

$$\{\ddot{q}(t)\} + [M_g]^{-1} [C_g] \{\dot{q}(t)\} + [M_g]^{-1} [K_g] \{q(t)\} = [M_g]^{-1} [\phi]^T \{f(t)\} = \{\tilde{f}(t)\} \tag{I.34}$$

Cependant, la matrice généralisée, $[C_g]$, est en principe une matrice pleine, rendant les équations non-découplées. Ce sont les coefficients extra-diagonaux de la matrice $[C_g]$ qui couplent les équations. C'est pourquoi des hypothèses supplémentaires sont nécessaires. La première hypothèse possible est celle de Rayleigh qui suppose un amortissement visqueux proportionnel aux matrices de masse et de raideur, rendant la matrice d'amortissement diagonalisable, [Caug 60]. On dit de cet amortissement, qu'il est proportionnel car il peut s'exprimer comme la combinaison linéaire des matrices $[M]$ et $[K]$, soit

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \tag{I.35}$$

La deuxième hypothèse possible vérifie l'hypothèse de Basile. Celle-ci constitue une matrice diagonale modale, équation (I.36). Ce principe est souvent acceptable pour des structures simples, dont les amortissements et les densités modales sont faibles.

$$[\phi]^T [C] [\phi] = \text{diag}(2\zeta_j \omega_{0_j} m_j) \tag{I.36}$$

Notons que, dans le cas d'un amortissement non-proportionnel, on dit que les modes sont couplés par l'amortissement lorsque la séparation entre deux modes adjacents est inférieure au triple de la bande à -3dB du mode le plus amorti, [Folt 98].

En vue du système étudié à travers cette thèse, nous traitons le cas d'un amortissement proportionnel muni de l'hypothèse de Basile.

a. *En oscillations libres.*

Nous avons la relation suivante :

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [C] \{\dot{x}(t)\} + [K] \{x(t)\} = \{0\} \tag{I.37}$$

Dans la base modale, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\{\ddot{q}(t)\} + [M_g]^{-1}[C_g]\{\dot{q}(t)\} + [M_g]^{-1}[K_g]\{q(t)\} &= \{0\} \\
\{\ddot{q}(t)\} + \text{diag}(c_j/m_j)\{\dot{q}(t)\} + \text{diag}(\omega_{0_j}^2)\{q(t)\} &= \{0\} \\
\{\ddot{q}(t)\} + \text{diag}(2\zeta_j\omega_{0_j})\{\dot{q}(t)\} + \text{diag}(\omega_{0_j}^2)\{q(t)\} &= \{0\}
\end{aligned} \tag{I.38}$$

Ce système découplé permet de calculer chaque déplacement modal $q_j(t)$:

$$q_j(t) = C \cos(\omega_{r_j} t + \varphi_j) e^{-\zeta_j \omega_{0_j} t} \tag{I.39}$$

Pour un amortissement faible, $\zeta^2 \ll 1$, la pulsation amortie ω_{r_j} est égale à la pulsation propre ω_{0_j} . Ainsi, on déduit les déplacements dans la base de départ :

$$\begin{aligned}
\{x(t)\} &= \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} q_j(t) \\
\{x(t)\} &= \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} C_j \cos(\omega_{0_j} t + \varphi_j) e^{-\zeta_j \omega_{0_j} t}
\end{aligned} \tag{I.40}$$

Le déplacement en un point de la structure s'écrit :

$$\begin{aligned}
x_k(t) &= \sum_{j=1}^N \phi_{jk} C_j \cos(\omega_{0_j} t + \varphi_j) e^{-\zeta_j \omega_{0_j} t} \\
x_k(t) &= \sum_{j=1}^N C'_j \cos(\omega_{0_j} t + \varphi_j) e^{-\zeta_j \omega_{0_j} t}
\end{aligned} \tag{I.41}$$

b. En régime établi forcé.

Pour une force harmonique, $\{\tilde{f}\} = \{f_0\} \cos \omega t$, nous cherchons une solution particulière de la forme $q_j(t) = \sqrt{A_j^2 + B_j^2} \cos(\omega_j t + \varphi_j)$.

Nous obtenons ainsi un système linéaire d'équations à deux inconnues :

$$\begin{cases}
(\omega_{0_j}^2 - \omega^2)A + 2\zeta_j \omega_{0_j} \omega B = 0 \\
-2\zeta_j \omega_{0_j} \omega A + (\omega_{0_j}^2 - \omega^2)B = F_{0_j}/m
\end{cases} \tag{I.42}$$

La résolution de ce système permet de déduire l'amplitude $\sqrt{A_j^2 + B_j^2}$ et la phase φ_j :

$$\sqrt{A_j^2 + B_j^2} = \frac{F_{0_j}}{m_j} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0_j}^2}\right)^2 + \left(2\zeta_j \frac{\omega}{\omega_{0_j}}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \tag{I.43}$$

$$\tan \varphi_j = \frac{A_j}{B_j} = \frac{-2\zeta_j \frac{\omega}{\omega_{0_j}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0_j}^2}} \tag{I.44}$$

On en déduit donc les déplacements $\{x(t)\}$:

$$\{x(t)\} = \sum_{j=1}^N \{\phi_j\} q_j(t) \tag{I.45}$$

I.2.1.3 Fonction de transfert ou FRF

Nous déterminons à travers cette section, la notion de fonction de transfert pour un système N ddl dans l'hypothèse de l'amortissement visqueux proportionnel. Il est commun de nommer ces fonctions comme fonction réponse en fréquences (FRF). Notons que nous aurions pu introduire cette fonction précédemment pour calculer les déplacements dynamiques mais nous avons choisi de mettre cette fonction en exergue car elle est la base de l'analyse modale.

Nous mettons en évidence la fonction de transfert en transposant l'équation (I.24) dans l'espace fréquentiel. Pour ceci, nous utilisons les formes complexes définies par :

$$\begin{aligned} f(t) = F \cos(\omega t) & \text{ devient sous forme complexe } f(t) = F e^{i\omega t} \\ x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) & \text{ devient sous forme complexe } x(t) = X e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Ainsi, nous obtenons la relation (I.47) dans l'espace fréquentiel :

$$\begin{aligned} -\omega^2 [M] \{X\} + i\omega [C] \{X\} + [K] \{X\} &= \{F\} \\ (-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]) \{X\} &= \{F\} \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

On en déduit la fonction de transfert, $[H]$:

$$[H] = (-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K])^{-1} \quad (\text{I.48})$$

En injectant les relations $[M] = [\phi][M_g][\phi]^T$, $[K] = [\phi][K_g][\phi]^T$ et $[C] = [\phi][C_g][\phi]^T$ dans la relation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} [H] &= (-\omega^2 [\phi][M_g][\phi]^T + i\omega [\phi][C_g][\phi]^T + [\phi][K_g][\phi]^T)^{-1} \\ [H] &= \left([\phi](-\omega^2 [M_g] + i\omega [C_g] + [K_g])[\phi]^T \right)^{-1} \\ [H] &= [\phi] \cdot (-\omega^2 [M_g] + i\omega [C_g] + [K_g])^{-1} \cdot [\phi]^T \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

$[M_g]$, $[C_g]$, $[K_g]$ sont des matrices diagonales donc l'inverse de la somme de ces matrices est l'inverse terme à terme, ainsi :

$$\begin{aligned} [H] &= [\phi] \text{diag} \left(\frac{1}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \right) [\phi]^T \\ [H] &= \sum_{r=1}^N \frac{\{\phi_r\} \{\phi_r\}^T}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Cette fonction de transfert pourrait se nommer matrice de transfert car elle caractérise le transfert des vibrations entre plusieurs entrées et plusieurs sorties. Ceci correspond au système MIMO (Multiple Input Multiple Output).

La fonction de transfert entre deux points i et j s'écrit :

$$h_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r(i) \phi_r(j)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \quad (\text{I.51})$$

La fonction de transfert explicitée est en fait la fonction de compliance car elle correspond à un rapport entre déplacement et force. Les fonctions de transfert portent des dénominations différentes suivant la nature du rapport. Ces dénominations sont normalisées. Voici quelques exemples :

- $\frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\text{deplacement}}{\text{force}}$: Compliance
- $\frac{F(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\text{force}}{\text{deplacement}}$: Raideur dynamique
- $\frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\text{vitesse}}{\text{force}}$: Mobilité
- $\frac{F(\omega)}{V(\omega)} = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}}$: Impédance
- $\frac{A(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\text{accélération}}{\text{force}}$: Accélération
- $\frac{A(\omega)}{A(\omega)} = \frac{\text{accélération}}{\text{accélération}}$: Transmissibilité

La fonction de transfert joue un rôle primordial pour réaliser l'analyse modale car son étude permet de déterminer les paramètres modaux (amortissements, fréquences et déformées).

I.2.2 Analyse modale expérimentale

Les bureaux d'études ont le souci permanent d'améliorer leurs modèles de calcul élasto-dynamique afin de réduire les délais et les coûts et d'en faire une optimisation éventuelle. C'est pourquoi les modèles numériques sont devenus pratiquement incontournables. Ils offrent la possibilité de prévoir la faisabilité statique, dynamique, thermique... d'un équipement. Cette voie analytique utilise une modélisation de la structure pour accéder à ses caractéristiques vibratoires par le calcul (éléments finis). Ceci a été rendu largement possible après la démocratisation de l'informatique et des logiciels de calcul qui intègrent tous les aspects mécaniques (thermiques, régime transitoire, ...).

Cependant, cette voie s'éloigne parfois largement de la réalité. Il est bien évidemment de rigueur d'avoir un modèle numérique représentant au mieux le phénomène expérimental. Le modèle numérique doit donc faire l'objet d'un recalage à partir de mesures expérimentales. Ce principe de recalage nécessite deux étapes importantes que nous allons introduire :

- la préparation des essais,
- l'identification et le recalage.

La figure I.3 illustre la procédure simplifiée pour le recalage.

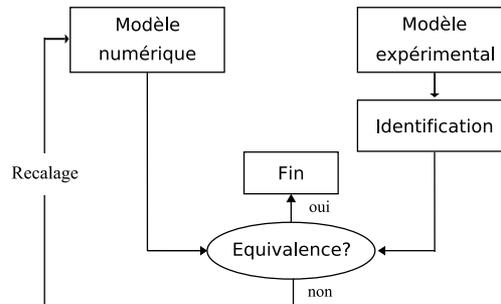


FIG. I.3 – Principe du recalage simplifié.

I.2.2.1 Préparation des essais

Chaîne de mesures

La chaîne de mesures expérimentale permet l'enregistrement des signaux à travers un système d'acquisition. Elle est constituée :

- d'un excitateur (pot vibrant, marteau de choc,...),
- de capteurs de vibrations,
- d'une chaîne d'acquisition (carte d'acquisition, ordinateur).

L'utilisation du pot vibrant demande d'exciter la structure en balayant une gamme de fréquences pour identifier les modes. Le marteau de choc, de part l'impact créé, excite une large

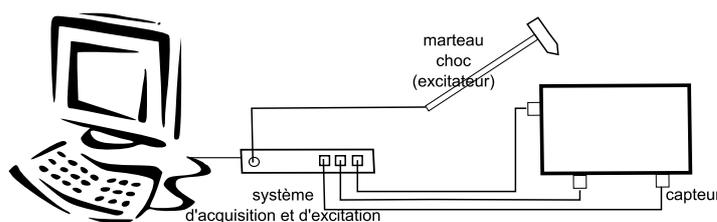


FIG. I.4 – Schéma d'une analyse modale expérimentale au marteau de choc.

bande de fréquence. La chaîne d'acquisition dispose de plusieurs voies d'enregistrement et permet ainsi d'enregistrer simultanément plusieurs signaux. Les capteurs de vibrations, pour réaliser une analyse modale, sont soit des accéléromètres soit des vibromètres-laser à balayage. Nous introduirons le cas d'une analyse modale réalisée avec des accéléromètres.

Observabilité/commandabilité

En analyse modale, il est de commodité de nommer observabilité, l'endroit où sont situés les accéléromètres et commandabilité, l'endroit où est appliqué l'excitation. Ainsi, la fonction de transfert, équation (I.51), dépend des observabilités et des commandabilités. C'est pourquoi il est nécessaire dans la préparation des essais de connaître leurs emplacements. C'est pour répondre à cette nécessité que le modèle numérique est utile, dans le cas où la structure est complexe. Ainsi, la préparation des essais et la modélisation doivent être réalisées conjointement afin de concilier au mieux leurs contraintes respectives. Le modèle numérique réalisé relativement grossièrement va permettre à l'opérateur de connaître la position des observabilités et des commandabilités en fonction du nombre de modes qu'il désire observer.

I.2.2.2 Identification et recalage

Identification

L'identification permet d'extraire une caractérisation du comportement dynamique de la structure et permet d'obtenir une idée qualitative de sa validité. Le processus d'identification est basé sur l'estimation des caractéristiques modales de la structure (fréquences, amortissements et déformées). Le principe d'identification s'inspire de l'écriture de la matrice de transfert, équation (I.51), normée par la masse, équation (I.52).

$$\begin{aligned}
 h_{ij}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r(i)\phi_r(j)/m_r}{-\omega^2 + i\omega \frac{c_r}{m_r} + \frac{k_r}{m_r}} \\
 &= \sum_{r=1}^N \frac{\tilde{\phi}_r(i)\tilde{\phi}_r(j)}{-\omega^2 + i2\zeta_r\omega\omega_{0_r} + \omega_{0_r}^2}
 \end{aligned} \tag{I.52}$$

Les méthodes d'analyse expérimentales permettent d'identifier les paramètres ω_{0_r} , ζ_r , et le produit $\tilde{\phi}_r(i)\tilde{\phi}_r(j)$, afin d'établir les fonctions de transfert. Ces paramètres déterminés permettent de recaler le modèle numérique, c'est-à-dire de le rendre adéquat au modèle expérimental.

Recalage

Le recalage du modèle numérique est effectué sur les paramètres modaux identifiés précédemment. Il existe plusieurs paramètres de recalage :

- les fréquences propres (simple d'implémentation),

- les déformées propres (à utiliser pour une forte densité modale, très utilisée),
- les fonctions de transfert (délicat à mettre en place).

La comparaison la plus simple est la comparaison des pôles déterminés expérimentalement et numériquement, notés respectivement f_{idj} et f_{numj} , en minorant la fonction objectif traduisant la différence relative quadratique. Elle est adéquate pour des densités modales faibles.

$$f_{obj} = \sum_j \left(\frac{(f_{idj} - f_{numj})}{f_{idj}} \right)^2 \quad (I.53)$$

La corrélation des déformées propres numériques et les déformées obtenues expérimentalement, est la méthode la plus couramment utilisée notamment pour des systèmes de densité modale forte. Elle est estimée grâce au critère MAC (Modal Assurance Criterion) [Alle 82], définie pour deux déformées, $\{\phi_{num_i}\}$ et $\{\phi_{exp_j}\}$, respectivement numérique et identifiée, par l'équation (I.54).

$$MAC_{i,j}(\{\phi_{num_i}\}, \{\phi_{exp_j}\}) = \frac{\|\{\phi_{num_i}\}^H \{\phi_{exp_j}\}\|^2}{\|\{\phi_{num_i}\}^H \{\phi_{num_i}\}\| \|\{\phi_{exp_j}\}^H \{\phi_{exp_j}\}\|} \quad (I.54)$$

Le critère MAC est un indicateur dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

En général, la matrice des MAC est calculée. Elle correspond au calcul du MAC pour toutes les paires des modes numériques et expérimentaux. Ainsi, la matrice est une matrice théoriquement unitaire dont les termes extra-diagonaux sont nuls.

La comparaison entre les fonctions de transfert est très délicate à mettre en œuvre car très susceptible au bruit. Elle est réalisée en minimisant ce coût quadratique :

$$J_{ij}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{R}} |h_{idij} - h_{numij}|^2 \quad (I.55)$$

h_{idij} est la fonction de transfert identifiée entre i et j , h_{numij} est la fonction de transfert numérique entre i et j .

Il existe deux grandes méthodes de recalage, la méthode globale et la méthode locale [Fris 95]. La méthode globale recale les matrices de masses $[M]$ et de raideur $[K]$. Les corrections apportées sont donc de la forme $\Delta[K]$ et $\Delta[M]$. C'est une méthode qui a plutôt une signification historique que pratique.

La méthode locale a pour paramètres les caractéristiques et/ou la géométrie de la structure. Cette méthode permet de juger la signification physique des paramètres. C'est pourquoi notre choix se porte sur cette méthode. Ainsi, le principe schématique du recalage est donné par la figure I.5.

I.3 L'ondelette adaptée

Nous avons vu dans la première partie du chapitre que les outils de diagnostic s'inspirent des modèles mécaniques pour se perfectionner. Nous avons développé pendant cette thèse une ondelette adaptée aux signaux réponses aux chocs pour améliorer la détection, diminuer le temps de calcul et faciliter le diagnostic, [Chie 07d], [Chie 07a].

Effectivement, l'utilisation classique de la transformée en ondelette nécessite de choisir l'ondelette mère, ainsi que ses paramètres (décroissance et fréquence), [Paya 97], [Stas 98]. Le choix de l'ondelette est crucial car celle-ci influe nettement sur les résultats. Ces derniers sont présentés sous forme de carte temps-échelle où les irrégularités du signal sont localisées en temps et en échelle par des tâches de couleurs correspondant aux valeurs élevées de coefficients $\mathfrak{W}_{(a,b)}$ (en admettant que l'ondelette mère soit bien choisie). Cette représentation est peu usuelle pour des opérateurs novices et rend l'interprétation difficile, [Peng 04]. Nikolaou et Antoniadis [Niko 02]

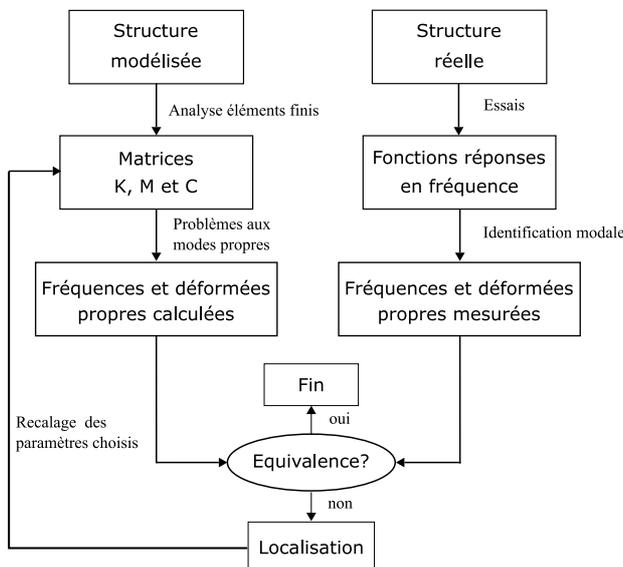


FIG. I.5 – Principe du recalage.

font un pas vers la démocratisation de l'ondelette en proposant une démodulation du signal par l'ondelette de Morlet où les résultats se présentent sous la forme d'un spectre.

I.3.1 Démodulation par ondelette

Nikolaou et Antoniadis [Niko 02] développent, en 2002, une méthode de démodulation en vue d'une détection précoce des défauts de roulements. Ils emploient l'ondelette de Morlet, définie par l'équation (I.56).

$$\Psi(t) = A \exp(-\alpha^2 t^2) \cos(2\pi f t) \quad (\text{I.56})$$

Le paramètre α est donné par un critère de sélection, équation (I.57).

$$c_r = \frac{MN \max(\mathfrak{W}_{a,b})}{\sqrt{\sum_{a,b} C \mathfrak{W}_{a,b}^2}} \quad (\text{I.57})$$

MN est le nombre d'éléments de la matrice $[\mathfrak{W}]$. L'évolution de c_r en fonction de α donne la valeur optimale α pour c_r maximale. Nous rappelons que la décomposition en ondelette consiste à calculer un "index de ressemblance" entre le signal $x(t)$ et l'ondelette $\Psi_{a,b}(t)$ localisée à une position b et à l'échelle a . La décomposition d'un signal $x(t)$ est définie par l'équation (I.58).

$$\mathfrak{W}_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \Psi_{a,b}(t) dt \quad (\text{I.58})$$

La variation de l'échelle a et du temps b génère une matrice $[\mathfrak{W}]$ de coefficients $\mathfrak{W}_{a,b}$. Notons que l'ondelette de Morlet permet d'obtenir une relation entre échelle et fréquence. Cette relation est donnée par l'équation (I.59)

$$f_a = T_e f_c / a \quad (\text{I.59})$$

T_e est le taux d'échantillonnage, f_c est la fréquence centrale de l'ondelette en Hz, f_a est la fréquence correspondant à l'échelle a , en Hz.

Nikolaou et Antoniadis [Niko 02] proposent une méthode de démodulation que nous noterons "Morlet Wavelet Demodulation" (**MWD**), qui, elle-même est divisée en deux alternatives.

La première alternative, que l'on note (**MWD**_{max}), consiste à construire l'enveloppe x_{max} définie par l'équation (I.60). L'enveloppe est formée en préservant la valeur maximale de chaque colonne de la matrice $[\mathfrak{W}]$.

$$x_{max}(b) = \max(\mathfrak{W}_{a,b}, a = 1 \dots N), b = 1, \dots, M. \quad (\text{I.60})$$

La seconde alternative, que l'on note (**MWD**_{thr}), est basée sur le fait que le choc excite les fréquences de résonance d'une structure. L'enveloppe finale est générée à partir d'une seule ligne, qui représente une fréquence de résonance. Cette fréquence est détectée par l'application d'un seuil qui est déduit de la moyenne m et de la variance σ de tous les coefficients de la matrice. Pour chaque ligne (fréquence), n_{th} est le nombre d'éléments qui excède la valeur seuil t_{hr} , équation (I.61). Ainsi l'enveloppe finale correspond à la ligne où n_{th} est maximum.

$$n_{th}(a) = \text{length}(\mathfrak{W}(a, b) > t_{hr}), b = 1, \dots, M \quad (\text{I.61})$$

$$t_{hr} = m + 2\sigma \quad (\text{I.62})$$

Quelque soit l'alternative, nous disposons ainsi d'une enveloppe des coefficients dont la transformée de Fourier donnera un spectre classique.

I.3.2 Détermination mathématique

A travers cette section, nous déployons une ondelette adaptée afin d'optimiser le principe de démodulation énoncé précédemment. La relation mathématique de l'ondelette s'appuie sur la réponse dynamique en oscillations libres en un point de la structure que nous avons introduit en équation (I.41), d'où sa formulation :

$$\begin{cases} \Psi(t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{-\zeta_j \omega_{0j} t} \cos(2\omega_{0j} t + \varphi_i) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

Cette ondelette ne satisfait pas la condition d'admissibilité définie par la relation (I.10) ce qui rend impossible une reconstruction du signal après décomposition. Néanmoins, notre objectif est de détecter les périodicités de l'enveloppe du signal et non pas de reconstruire ce signal.

L'ondelette adaptée est définie par $2 \times n$ paramètres, n amortissements modaux, ζ_i , et n fréquences modales, f_i , de la structure. Ces paramètres sont donnés grâce à un essai au marteau de choc en prétraitement. La réponse au choc résultante est notre ondelette adaptée. La dilatation n'est donc plus nécessaire. Seule l'enveloppe temporelle du signal est réalisée. Finalement, un spectre de Fourier de l'enveloppe est calculé pour visualiser les fréquences caractéristiques des défauts potentiels. Cette méthodologie est simple d'utilisation et s'avère très rapide. Nous nommons cette méthode : "Adapted-Wavelet Demodulation" (**AWD**), en coïncidence avec la notation donnée pour définir les méthodes de Nikolaou, **MWD**.

I.3.3 Étude comparative avec une ondelette de Morlet dans le domaine temporel

Une réponse au choc est simulée pour comparer **MWD** et **AWD**, figure I.6.a. Cette réponse est le résultat d'un système à 1 ddl. Le choc est initié au temps $T1$ et la fréquence d'oscillation

est f . Dans ce cas, l'ondelette adaptée est caractérisée par deux paramètres, l'amortissement ζ et la fréquence modale f . Le calcul des coefficients d'ondelette est réalisé à chaque pas de temps, d'où une variation sinusoïdale des coefficients.

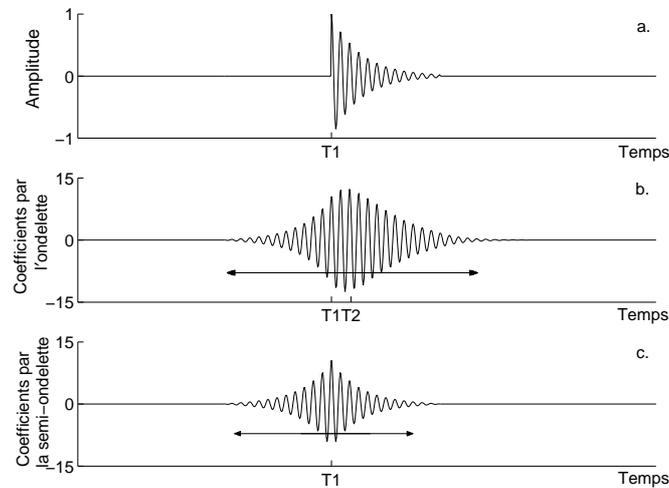


FIG. I.6 – (a). Réponse à un choc simulée. (b) Coefficients calculés par l'ondelette de Morlet. (c) Coefficients calculés par l'ondelette adaptée.

Les enveloppes des coefficients obtenues par **AWD** et **MWD** présentent un maximum qui caractérise la présence d'un choc, respectivement au temps T_1 et T_2 , figures I.6.b et I.6.c.

Cependant, l'ondelette de Morlet présente une détection tardive à T_2 , au lieu de T_1 . Ce retard est dû à la symétrie de l'ondelette de Morlet. Par contre, la détection par l'ondelette adaptée ne présente aucun retard, en T_1 . Ce retard n'a aucune importance dans le domaine fréquentiel cependant une analyse temporelle doit être menée avec précaution car la localisation temporelle peut être retardée. De plus, la décroissance de l'enveloppe est plus rapide pour l'ondelette adaptée ce qui implique une détection plus fine. Cette propriété permettrait de détecter deux défauts proches sur une bague de roulements alors que l'ondelette n'en détecterait qu'un seul.

I.3.4 Description du banc expérimental

Cette méthodologie a été validée sur un carter comportant deux paliers à roulements à billes 6206 où l'un des roulements défectueux est chargé à 3000N, figure I.7.a. Les défauts sont simulés sur les deux bagues de roulements. La procédure pour réaliser les défauts est explicitée en chapitre 4. Trois roulements possèdent des défauts simulés sur bague extérieure dont les tailles sont 8,14 et 20mm² (notés respectivement BPFO 8mm², BPFO 14mm², BPFO 20mm²) et un roulement possède un défaut sur bague intérieure de 20mm² (noté BPFI 20mm²). BPFO signifie Ball Pass Outer Ring et BPFI signifie Ball Pass Inner Ring.

Un capteur piézoélectrique est placé radialement sur le palier du roulement défectueux, considéré comme le meilleur point de mesure, figure I.7.a. Grâce aux caractéristiques du roulement (roulement 6206) et à la cinématique du système (1000tr/mn), les fréquences caractéristiques sont : 59.5Hz pour BPFO et 90.5Hz pour BPFI.

I.3.5 Résultats expérimentaux

Nous devons, dans un premier temps, réaliser un essai de type choc pour déterminer l'ondelette adaptée. Ainsi, l'essai choc est réalisé radialement sur le palier grâce à un marteau de choc. La réponse au choc obtenue est représentée en figure I.8.b.

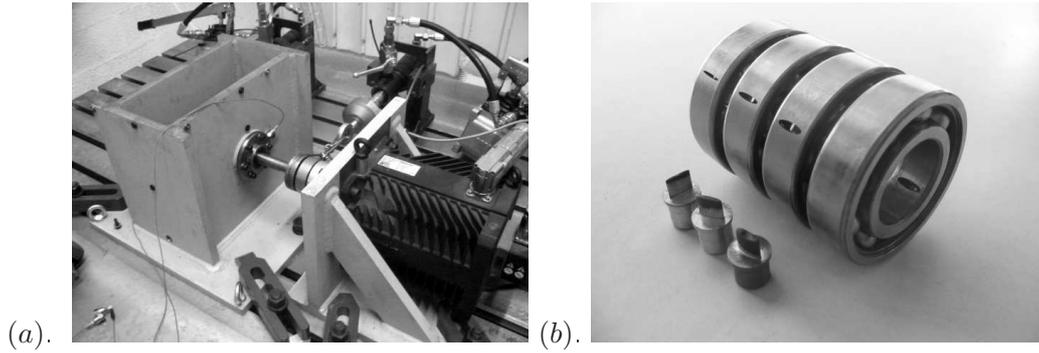


FIG. I.7 – (a) Banc expérimental. (b) Roulements défectueux et outils pour l'électro-érosion.

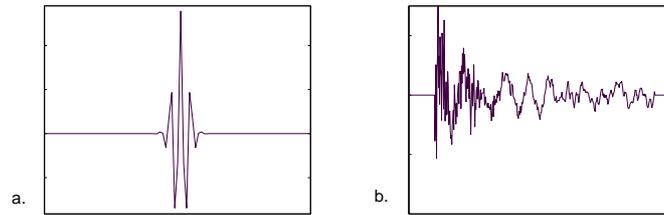


FIG. I.8 – (a) Ondelette de Morlet. (b) Ondelette adaptée.

Prenons le cas BPFO 20mm^2 , et nous comparons l'ondelette de Morlet obtenue et l'ondelette adaptée, figure I.8. Les formes des ondelettes sont très différentes. L'ondelette de Morlet est très comprimée dû à une haute décroissance. Cette propriété montre qu'elle sera très sensible aux singularités de la réponse aux chocs alors que l'ondelette adaptée sera plus sensible à la réponse au choc.

Désormais nous mettons le système en rotation et enregistrons le signal temporel. Celui-ci présente des chocs bien distincts, d'où un manque d'intérêt quant à l'application de méthodes avancées de détection. C'est pourquoi du bruit gaussien d'amplitude égale au signal enregistré avec BPFO 8mm^2 et BPFI 20mm^2 a été ajouté sur l'ensemble des signaux afin de mettre en évidence l'efficacité de l'ondelette adaptée. Ainsi, le bruit masque les réponses aux chocs de ces signaux, figure I.9.

Le paramètre de l'ondelette de Morlet, α , est déterminé à travers le calcul de c_r , défini par l'équation (I.57). Les résultats sont présentés dans le tableau I.2 et sur la figure I.10.

TAB. I.2 – Détermination du paramètre α

BPFO 20mm^2	10000
BPFO 14mm^2	30000
BPFO 8mm^2	20000
BPFI 20mm^2	25000

L'analyse par les deux méthodes, **MWD** et **AWD**, est réalisée pour les quatre types de défauts en figures I.11, I.12, I.13, I.14. Pour chaque figure, chaque colonne correspond à une méthode ou une alternative. La première colonne est le résultat de **MWD**_{max}, la seconde de **MWD**_{thr} et la troisième de **AWD**. Pour les graphes *a.*, les coefficients maximums sont localisés en temps-fréquence. En *d.*, la fréquence de résonance est déterminée par la valeur seuil n_{thr} . En *g.*,

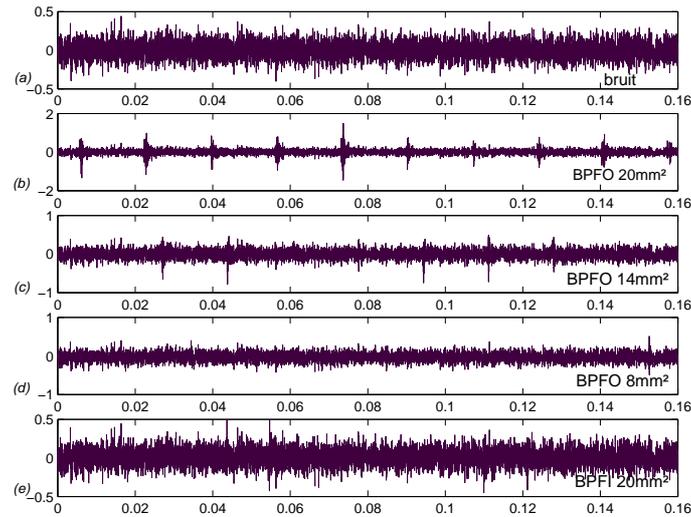


FIG. I.9 – Signaux perturbés, (a) Bruit, (b) BPFO 20mm², (c) BPFO 14mm², (d) BPFO 8mm², (e) BPFI 20mm².

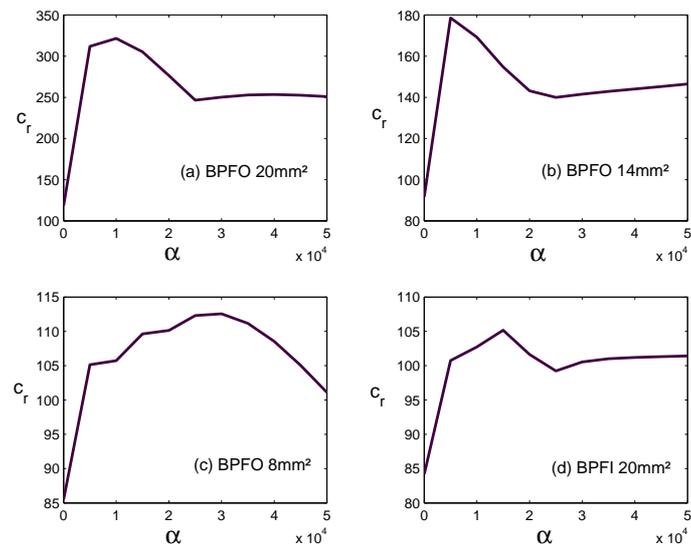


FIG. I.10 – Courbe représentant c_r en fonction de α .

le spectre du signal est représenté. En *b*, *e*, *h*, les coefficients \mathfrak{W} de la démodulation sont calculés respectivement pour chaque méthode et alternative. Enfin sur les figures *c*, *f*, *i*, les spectres des coefficients de la démodulation sont déterminés, qui sont les spectres de la démodulation d'amplitude des signaux vibratoires des défauts de roulements.

Les coefficients maximums sont dispersés en fréquences entre 0 et 20kHz à cause du bruit dans les signaux, figures I.11.a, I.12.a, I.13.a, I.14.a. Une autre conséquence du bruit est illustrée par les figures I.12.d, I.13.d, I.14.d, où la fréquence de résonance n'est pas déterminée par **MWD**. Pour BPFO 20mm², le rapport signal sur bruit est faible ce qui explique la possibilité de déterminer cette fréquence de résonance, 12000kHz. Ainsi, avec un tel niveau de bruit, les résultats dépendent de la taille du défaut.

Les chocs du signal BPFO 20mm², figure I.11, ne sont pas masqués par le bruit ce qui

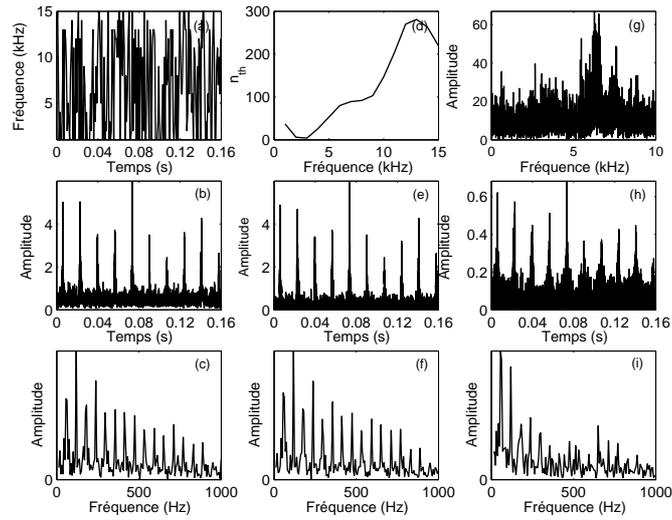


FIG. I.11 – Démodulation et détection de la fréquence du train d'impulsion pour BPFO 20mm^2 par la méthode : (a, b, c) MWD_{max} , (d, e, f) MWD_{thr} , (g, h, i) AWD.

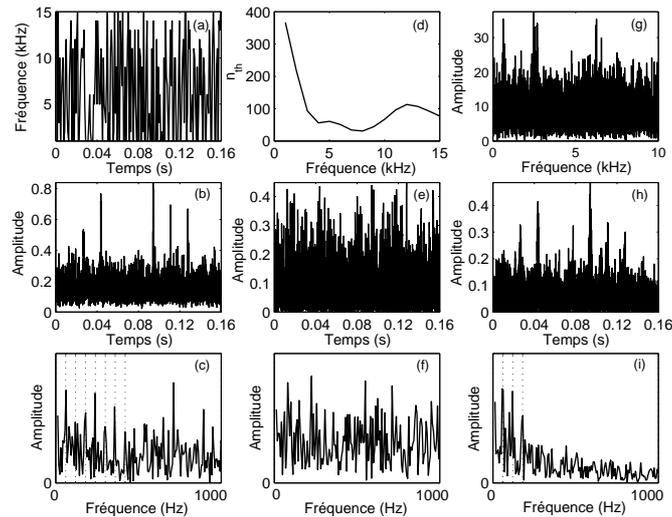


FIG. I.12 – Démodulation et détection de la fréquence du train d'impulsion pour BPFO 14mm^2 par la méthode : (a, b, c) MWD_{max} , (d, e, f) MWD_{thr} , (g, h, i) AWD.

explique que le spectre de la démodulation est représentatif de la présence d'un défaut, même si les harmoniques des fréquences de défauts d'AWD sont moins significatives que celles obtenues par MWD.

Pour BPFO 14mm^2 , figure I.12, le spectre présente un résultat moins significatif que pour BPFO 20mm^2 , néanmoins cela demeure tout à fait satisfaisant. Notons tout de même que la méthode MWD_{thr} n'est pas efficace. Le spectre ne présente pas la fondamentale et ses harmoniques (59.6Hz et ses multiples). Ce fait est illustré en figure I.12.e, les coefficients élevés sont moins significatifs que les coefficients calculés par AWD et MWD_{max} .

Pour BPFO 8mm^2 , figure I.13, les réponses aux chocs sont totalement noyées dans le bruit. Les coefficients calculés pour les deux premières méthodes ne présentent pas *a priori* de coefficients élevés alors que huit pics indiquent les réponses aux chocs. Les trois spectres présentent

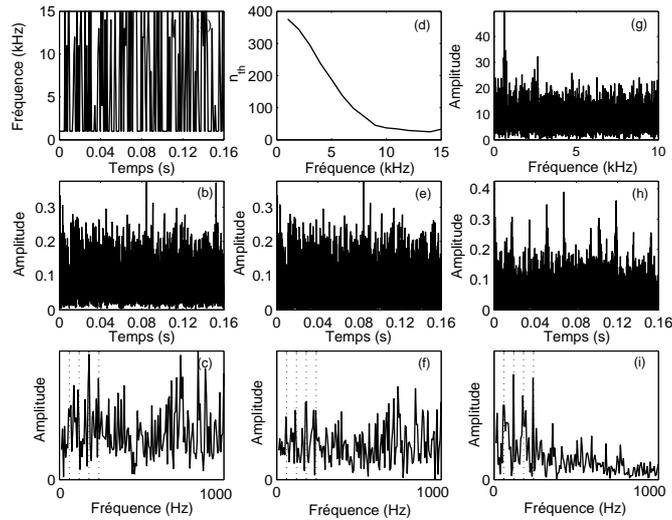


FIG. I.13 – Démodulation et détection de la fréquence du train d’impulsion pour BPFO $8mm^2$ par la méthode : (a, b, c) MWD_{max} , (d, e, f) MWD_{thr} , (g, h, i) AWD.

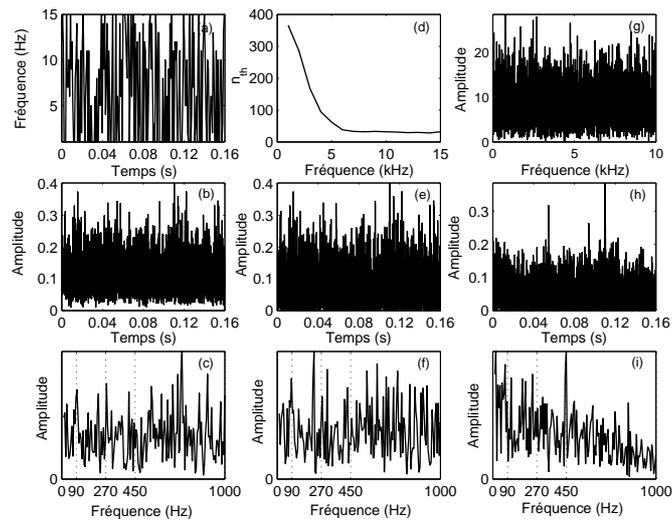


FIG. I.14 – Démodulation et détection de la fréquence du train d’impulsion pour BPFI $20mm^2$ par la méthode : (a, b, c) MWD_{max} , (d, e, f) MWD_{thr} , (g, h, i) AWD.

la fondamentale et trois harmoniques qui caractérisent le défaut. Cependant **AWD** a un spectre plus lisible dont l’interprétation est plus facile.

Pour BPFI $8mm^2$, figure I.14, les résultats sont mitigés. En effet, les spectres sont très bruités, les raies caractéristiques ne sont pas évidentes. Ces pics sont présents pour MWD_{max} et MWD_{thr} , cependant de nombreuses raies parasites viennent perturber le signal ce qui rend difficile la distinction entre les raies significatives et les raies non significatives. **AWD** montre une raie à 450Hz et la fondamentale (90Hz), notons la présence d’un pic à 16Hz qui est la vitesse de rotation du moteur.

I.3.6 Conclusion

En conclusion, la détection d'un défaut bague extérieure et bague intérieure est possible avec les trois méthodes. Cependant **AWD** présente des avantages. Elle est très performante et nécessite un temps de calcul relativement faible. Si **AWD** nécessite un temps de calcul de 1 CPU times, **MWD** nécessite 225 CPU times. Le calcul est alors quasi instantané pour **AWD**. De plus les résultats présentent une meilleure lisibilité pour l'interprétation. La comparaison entre ces deux méthodes est réalisée dans le tableau I.3.

TAB. I.3 – Indicateurs de performance pour les deux méthodes

Indicateurs	MWD	AWD
CPU times (unités)	225	1
Mise en œuvre	Ajustements des paramètres	Essai au marteau de choc
Pouvoir de résolution	faible	élevé
Interprétation des résultats	facile	très facile
Détection BPFO (non bruité)	++++	+++
Détection BPFO (bruité)	+	++
Détection BPF1 (non bruité)	+++	++
Détection BPF1 (bruité)	+	+

Le nombre de + qualifie la qualité de la détection

I.4 Conclusion et orientation de la thèse

L'analyse vibratoire est aujourd'hui un outil performant dans un monde industriel recherchant un maximum de productivité. Elle intervient dans le système de maintenance conditionnelle, permettant ainsi de limiter les arrêts intempestifs de la production. L'analyse vibratoire offre trois principaux niveaux d'analyse : la surveillance, le diagnostic et le suivi de l'endommagement.

De nombreux travaux de recherches se développent encore aujourd'hui autour de nouvelles techniques d'analyse vibratoire. Elles reposent souvent sur des méthodes de traitement avancées du signal. Ces techniques se sont également améliorées grâce à la connaissance du système mécanique en terme vibratoire. C'est pourquoi, nous introduisons dans ce chapitre la dynamique des structures.

La prise en compte du comportement dynamique des structures couplée aux algorithmes de traitement du signal a permis d'élaborer une nouvelle méthode de détection qui repose sur une ondelette adaptée à la réponse vibratoire du système mécanique et qui s'avère être plus performante et plus rapide que les techniques avancées classiques.

Nous avons également noté que la qualité d'une analyse vibratoire est considérablement conditionnée par la position des capteurs de vibrations. Il est recommandé effectivement de le placer au plus près du défaut. Cependant les signaux enregistrés peuvent être le résultat d'un mélange de plusieurs sources vibratoires caractéristiques de composants mécaniques différents et parfois identiques (telles que deux défauts de roulements), surtout dans le cas où l'accessibilité du système ne permet pas de placer le capteur au plus près du composant étudié.

C'est pourquoi, la séparation de ces sources sur le signal pourrait s'avérer très intéressante pour chaque niveau d'analyse. La séparation de chaque source permettrait de surveiller individuellement chaque composant critique en associant un indicateur temporel à chacun d'entre eux. Le diagnostic en serait amélioré car nous pourrions localiser et quantifier les défauts dans le cas où la structure possède plusieurs composants identiques. Et enfin, le suivi vibratoire s'effectuerait

spécifiquement sur chaque composant et non sur un ensemble de composants permettant un suivi simultané de l'état d'endommagement de deux roulements identiques.

Cette remarque nous amène au chapitre suivant qui propose un tour d'horizon sur les problèmes inverses qui sont à la base de la restitution des sources.

Chapitre II

Tour d'horizon sur les problèmes inverses

Ce chapitre présente les problèmes inverses afin de soulever la problématique de cette thèse. Leur aspect général sera d'abord traité pour illustrer les domaines d'applications et leur mise en œuvre. Ensuite, les problèmes inverses linéaires seront amplement étudiés dans le cadre d'une application sur un système MIMO. Le principe d'inversion, les limites et l'optimisation de l'inversion seront des notions abordées pour situer le sujet de cette présente thèse. Enfin, les problèmes inverses sont décrits dans le cadre d'une application à l'analyse vibratoire.

II.1 Introduction aux problèmes inverses

II.1.1 Définition

Un problème inverse consiste à déterminer des *causes* connaissant des *effets*. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, dont le but est de déterminer des effets en connaissant les causes. Les causes comme les effets peuvent être de nature très variée. On peut citer pour les effets : potentiel, déplacement, accélération, température, contrainte, champ électrique... et pour les causes : force, condition limite, excitation, C'est pourquoi, suivant le contexte, le terme "effets" est subordonné par les termes "sorties", "observations" tandis que le terme "causes" est subordonné par les termes "entrées", "sources". D'un point de vue pratique, les problèmes inverses exigent souvent une bonne connaissance du modèle direct afin d'appréhender les entrées.

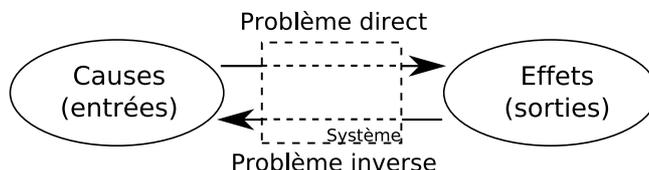


FIG. II.1 – Problème direct et problème inverse.

Le problème inverse est classé dans la catégorie des problèmes mal posés introduit par Hadamard [Hada 02] au début du siècle dernier. Un problème bien posé au sens de Hadamard doit satisfaire les trois conditions suivantes : la solution existe, elle est unique, elle est stable (elle dépend continûment des données).

La réalité expérimentale montre que les problèmes inverses sont le plus souvent mal posés car ils ne répondent pas à la troisième hypothèse. Le problème est instable quand de petites

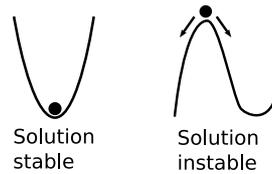


FIG. II.2 – Illustration de la stabilité de la solution.

variations sur les données sorties entraînent de grandes variations sur les données entrées. Cette stabilité est liée au système étudié, et va indiquer la robustesse de l'inversion face aux problèmes de bruit de mesures.

Des travaux récents, traitant les problèmes inverses (cf [Aude 94], [Bonn 99]), distinguent deux communautés :

- Celle de la physique mathématique. Ces méthodes ont été initiées par les travaux de Tikhonov et Arsenine [Tikh 76]. Elles consistent à augmenter la stabilité de l'inversion en proposant des solutions approchées de la solution exacte. En quelque sorte, ces méthodes consistent à remplacer le problème mal posé par un problème bien posé.
- Celle du traitement statistique des données ou l'inversion bayésienne. Tarantola [Tara 87], Menke [Menk 84] considèrent les variables comme aléatoires afin de représenter toutes les incertitudes. La notion de densité de probabilité est la base de ces méthodes.

Selon Demonet [Demo 99], ces deux communautés se distinguent par la dimension du système considéré. La communauté déterministe, dont l'ensemble des études vibro-acoustiques, se place en dimension infinie où les questions d'existence, d'unicité et de stabilité sont abordées et résout le problème numériquement en dimension finie. La seconde communauté résout un problème déjà discrétisé permettant d'introduire des informations *a priori*.

Nous pouvons distinguer trois grandes familles de problématiques qui utilisent les méthodes inverses, figure II.3. La première consiste à déterminer des paramètres du modèle d'un système à partir de la connaissance des causes et des effets. On peut citer les techniques de caractérisation des matériaux, [Moul 06], les méthodes d'analyse modale [Lemb 88], ou encore la méthode de recalage de modèles éléments finis.

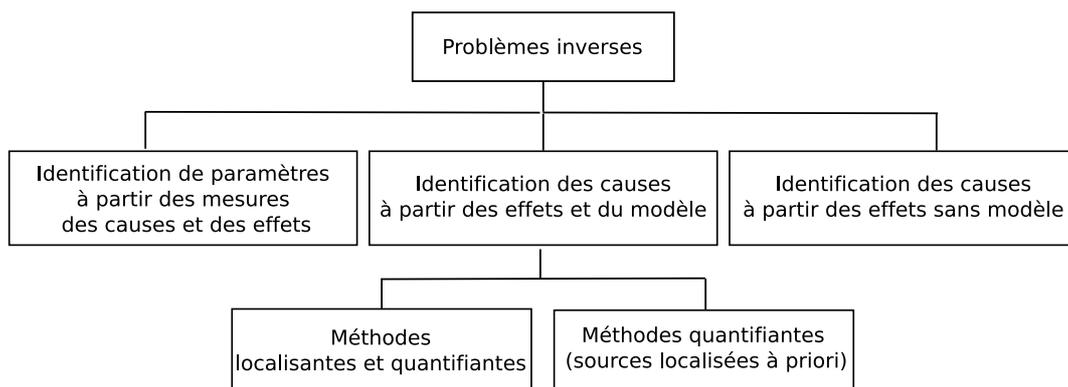


FIG. II.3 – Branches d'applications des problèmes inverses.

La deuxième famille, où s'inscrit ce présent travail, consiste à identifier les causes sollicitant le système à partir d'un modèle du système et de mesures de son état. Cette approche peut être séparée en deux catégories ; une catégorie qui localise et identifie les sources et une catégorie qui quantifie des sources déjà localisées *a priori*. Le modèle mathématique utile à ces deux catégories

est identique mais la première catégorie présente un caractère mal posé car elle nécessite de calculer un nombre important de sources avec peu d'observations. Effectivement la localisation est par nature un problème mal posé due aux nombres finis d'observations dont nous pouvons disposer. Par contre le problème avec des sources localisées *a priori* ne l'est pas nécessairement car la connaissance du nombre de sources permet de prévoir un nombre d'observations. En pratique, le caractère mal posé du problème vient de la stabilité de la solution.

La troisième famille se distingue par le fait que le modèle ainsi que les causes sont inconnus. Cette famille est connue sous le nom de séparation aveugle de sources (SAS) et fait l'objet de nombreux développements depuis 1985. Elle nécessite des hypothèses sur le modèle. Cette famille sera plus amplement étudiée dans la suite de ce travail.

II.1.2 Domaines d'applications

Les domaines d'applications des problèmes inverses sont très nombreux, et il est impossible d'en faire une liste complète. C'est pourquoi quelques exemples, axés sur la mécanique, sont ici présentés pour illustrer chacune des familles décrites précédemment.

II.1.2.1 Identification des causes à partir des effets sans le modèle

L'identification des causes à partir des effets sans le modèle est plus communément appelée séparation aveugle de source (ou SAS). Les premiers travaux dans ce domaine ont été proposés par Hérault, Jutten et Ans en 1985 [Hrau 85] avec un mélange instantané linéaire de la forme :

$$\{Y\} = [H]\{X\} \quad (\text{II.1})$$

Son origine est liée à la modélisation d'un phénomène biologique. Depuis ces vingt dernières années, la SAS suscite l'intérêt de nombreux chercheurs : en acoustique [Thi 93], en sismique [Thir 95], pour contrôler la dégradation de l'écran thermique d'un réacteur nucléaire [DUrs 95], en mécanique vibratoire [Gell 98].

Le modèle a évolué prenant en compte les retards, symbolisant la propagation des signaux. Le modèle devient convolutif linéaire, équation (II.2).

$$\{Y\} = [H] * \{X\}, \text{ * est le produit de convolution} \quad (\text{II.2})$$

Depuis quelques années les modèles non-linéaires apparaissent. Une façon d'introduire la non linéarité, dans le cadre des mélanges instantanés, est d'appliquer une transformation non linéaire (inversible) sur chaque mélange (mélange post-nonlinéaire) [Tale 99], [Acha 03].

L'utilisation des méthodes développées dans le cadre de la séparation de sources nécessitent quelques hypothèses réalistes qu'il faudra vérifier : les sources sont considérées mutuellement indépendantes, le nombre d'observations est au moins égal au nombre d'entrées, le mélange est toujours considéré comme linéaire, homogène et stationnaire, et les sources sont non gaussiennes sauf au plus une. Dans le cas où l'on n'exploite pas d'hypothèse supplémentaire sur le signal, l'écriture de l'indépendance se traduit par des critères non linéaires impliquant des statistiques d'ordre supérieur à deux. Gelle en 1993, [Gell 98], met en œuvre ces méthodes avec des cumulants d'ordre deux. Comon [Como 94] introduit en 1987 la notion d'analyse en composantes indépendantes (ACI). Elle consiste à trouver une transformation de l'espace des observations en un espace de représentation dans lequel les composantes sont aussi indépendantes que possible.

Cependant la séparation de sources contient des indéterminations inhérentes au système d'équation (II.1), exprimées par la relation mathématique d'indétermination suivante :

$$[H]' = [H][\Delta][\varepsilon][\Pi], \quad [X]' = [\Pi]^T[\varepsilon][\Delta]^{-1} \implies [H]'[X]' = [H][X] \quad (\text{II.3})$$

Trois facteurs d'indétermination interviennent :

- Un facteur de permutation. La matrice carrée, $[\Pi]$, correspondante, comporte un seul terme non nul alors égal à 1 sur chaque ligne (et colonne).
- Un facteur d'échelle. La matrice carrée correspondante $[\Delta]$ est diagonale, les éléments diagonaux sont strictement positifs.
- Un facteur de signe. La matrice carrée correspondante $[[\varepsilon]$ est diagonale, les éléments diagonaux sont égaux à ± 1 .

Les sources sont reconstituées qu'à ces trois facteurs près : permutation, échelle et signe [Tong 90].

La méthode de séparation de sources est schématisée de la façon suivante :

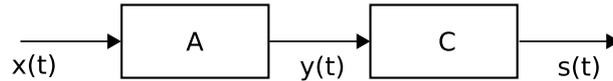


FIG. II.4 – Schéma de la séparation de sources.

$\{x(t)\}$ est le vecteur des sources inconnues de dimension N , $\{y(t)\}$ le vecteur d'observations de dimension P , $[A(t)]$ est la matrice de mélange du système caractérisant le milieu de propagation, enfin $[C(t)]$ est la matrice séparante permettant de reconstituer les signaux sources. Le principe est donc de déterminer la matrice séparante qui permettra ensuite à partir d'un nombre fini d'observations de restituer les signaux sources. Cette séparation est dite aveugle car seules les informations reçues par le capteur permettent d'obtenir les signaux sources (les sources $\{x\}$ sont inconnues).

Dans le domaine vibratoire de nombreux travaux ont été réalisés. Gelle [Gell 98], fut un des précurseurs en 1993. Depuis les méthodes ne cessent de se développer. El-Rhabi [ElRh 05] propose l'utilisation du critère de l'information mutuelle pénalisée appliqué sur des machines tournantes. Bouguerriou [Boug 05] intègre dans l'algorithme de séparation la notion "wide-sense cyclostationary". Cette notion mise en évidence par Randall en 2001 [Rand 01], devient un nouveau critère de séparation. Peled [Pele 05] emploie le Kurtosis, critère employé traditionnellement pour la détection de défauts de roulements. Le Kurtosis des signaux séparés est utilisé comme critère de maximisation.

Antoni, [Anto 05], en 2005, redéfinit les objectifs de l'application des techniques de séparation de sources dans le cadre des vibrations mécaniques. La restitution n'est possible que pour des contributions vibratoires distinctes : périodiques, stationnaires aléatoires, et non-stationnaires aléatoire. Ainsi de nombreuses études séparent des signaux provenant de composants de nature différente, engendrant des sources indépendantes statistiquement. C'est le cas des travaux de Servière [Serv 05] dont l'intérêt est de séparer le bruit de combustion et le signal engendré par le piston. Ce constat est confirmé dans l'étude menée par Chimentin [Chie 04], où l'étude d'un système analytique à deux degrés de liberté, figure II.5, montre que la séparation de sources est inefficace sur des signaux sources de nature identique, harmoniques dans cette étude. Une permutation des canaux ne permet pas de restituer à chaque degré de liberté les forces sinusoïdales qui y sont exercées. Dans le cadre de la restitution de sources de même nature, la connaissance *a priori* du milieu de propagation semble nécessaire.

II.1.2.2 Identification des causes à partir des effets avec le modèle, méthodes localisantes et quantifiantes

Pezerat, [Peze 96] [Peze 00], a développé une technique de localisation des sources. Son application est la restitution de la contribution des forces appliquées à une structure analytique. Ceci exige de connaître la fonction analytique de la structure et le champ de déplacement d'où le be-

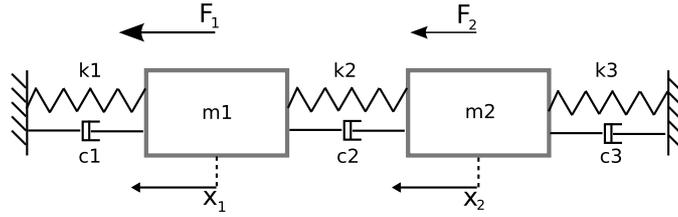


FIG. II.5 – Illustration d'un système 2 degrés de liberté.

soin d'un grand nombre d'observations (obtenus par les capteurs). Pezerat valide cette technique sur une poutre régie par la fonction analytique suivante :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho S \omega^2 w = F(x, \omega) \quad (\text{II.4})$$

L'intérêt du problème inverse est de déterminer les distributions des forces sur la structure, F à partir des données du système : E le module d'Young, I le moment d'inertie, ρ la masse volumique, w le déplacement transverse de la poutre. S est la section de la poutre.

Le travail de Pezerat met en œuvre une méthode de localisation basée sur le calcul des dérivées spatiales du déplacement vibratoire en utilisant un schéma de différences finies, soit :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Rightarrow \delta_i^4 = \frac{1}{\Delta^4} (w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) \quad (\text{II.5})$$

i correspond à un point de mesure et Δ est la distance entre deux points. Ainsi :

$$F_i = EI \delta_i^4 - \rho S \omega^2 w_i \quad (\text{II.6})$$

Notons que le calcul d'une force sur une poutre nécessite la mesure de 5 déplacements vibratoires et dans le cas d'une plaque, il en nécessite 13. Ces méthodes d'inversion souffrent d'instabilité. Pour augmenter la stabilité de ces méthodes, Pezerat a développé une méthode de régularisation, la Résolution Inverse Fenêtrée Filtrée (RIFF). Cette régularisation consiste à utiliser un fenêtrage spatial pour adoucir les discontinuités et un filtre passe-bas pour éliminer les incertitudes liées à la mesure.

La fenêtre spatiale correspond à une fenêtre de Hanning de longueur α pour adoucir les discontinuités obtenues sur les conditions limites par le phénomène de Gibbs. Elle est égale à :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 0.5 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{\alpha}\right) \text{ pour } x < \alpha \\ \psi(x) &= 1 \text{ pour } \alpha \leq x \leq L - \alpha \\ \psi(x) &= 0.5 \left(1 - \cos \frac{\pi(x - L + 2\alpha)}{\alpha}\right) \text{ pour } x > L - \alpha \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Le filtre passe-bas de fréquence de coupure k_c s'exprime de cette façon :

$$F_i^{filtre} = \Delta \sum_{j=0}^{M-1} F_{jfenetre} \cdot H((i-j)\Delta) \quad (\text{II.8})$$

$$H(x) = \frac{1}{2\pi x} \left(1 + \cos \frac{k_c x}{2}\right) \sin(k_c x) \quad (\text{II.9})$$

avec $x \in [-2\pi/k_c; 2\pi/k_c;]$ et $H(x) = 0$ sinon

II.1.2.3 Identification des paramètres à partir des mesures et des effets

L'identification des paramètres à partir des mesures et des effets permet de déterminer les caractéristiques du milieu étudié. Ainsi, de nouveaux essais mécaniques voient le jour, basés sur l'identification à partir de champs cinématiques (déplacements, déformations, pentes...) et/ou thermiques (caméras infrarouge), [Grdi 02], [Moul 06]. L'idée principale est que la richesse de telles mesures (typiquement plusieurs centaines de milliers de points de mesures indépendants) permet de mettre en œuvre et de dépouiller des essais mécaniques complexes menant à des champs cinématiques hétérogènes.

Nous pouvons citer plus particulièrement la méthode des champs virtuels introduit par Grédiac en 1989. Cette méthode repose sur le principe des travaux virtuels :

$$-\int_V \sigma : \epsilon^* dV + \int_{S_f} \{T\} \{\nu\}^* dS = 0 \quad (\text{II.10})$$

σ est le tenseur des contraintes, ϵ^* est le tenseur des déformations virtuelles associé au vecteur des déplacements virtuels $\{\nu\}$. $\{T\}$ est la densité d'effort surfacique sur la surface S_f .

D'après la relation de comportement, on peut écrire la relation entre contraintes et déplacements :

$$\sigma_i = Q_{ij} \epsilon_j \quad (\text{II.11})$$

Le problème inverse offre la possibilité de déterminer les paramètres caractérisant la structure : les coefficients de Cauchy. En admettant que la structure est homogène, les coefficients de Cauchy Q_{ij} ne dépendent pas des coordonnées x, y, z . L'injection de la relation (II.11) dans (II.10) fournit une équation linéaire pour un champ virtuel donné. Ainsi pour un ensemble de champs virtuels, nous avons une relation matricielle linéaire, équation (II.12), dont l'inversion est triviale pour déterminer les paramètres de Cauchy.

$$[P]\{Q\} = \{R\} \quad (\text{II.12})$$

$[P]$ est une matrice carrée et $\{Q\}$ est un vecteur composé des coefficients Q_{ij}

L'emboutissage fait également appel à une approche inverse développée depuis ces quinze dernières années par Batoz et Guo [Guo 90], [Bato 98], [Guo 04]. Ces recherches répondent à un besoin industriel. Cette approche inverse peut substituer en partie l'expérimentation coûteuse pécuniairement et temporellement et diminuer les coûts de matière. D'ailleurs de nombreux logiciels se partagent le marché (AUTOFORM, PAM-STAMP, OPTRIS, LS-DYNAD,...). Cette méthode consiste, à partir de la forme de l'embouti final, à déterminer les déplacements effectués par chaque point de la structure est de restituer le flan plan d'origine. Les paramètres tels que l'épaisseur, la forme du contour initial du flan de départ, l'intensité des actions des outils sont calculés. La faisabilité de l'emboutissage est ainsi déduite.

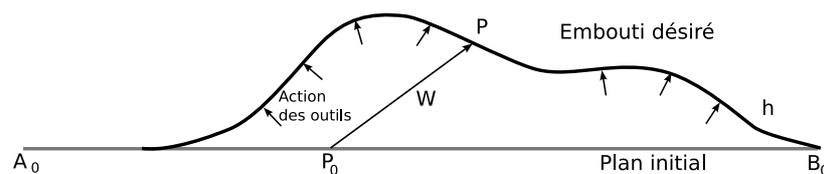


FIG. II.6 – Illustration de l'emboutissage.

II.1.2.4 Identification des causes à partir des effets avec le modèle, méthodes quantifiantes (sources localisées *a priori*)

L'identification des sources vibratoires localisées *a priori* a pour principe la détermination de chaque source à partir d'observations. Une fois quantifiées, les sources peuvent être traitées indépendamment. Dans le domaine vibratoire, Stevens [Stev 87] en 1987 déclare que chaque réponse vibratoire, générée par une force, caractérise cette dernière. Ainsi, lors d'une mesure de réponse vibratoire générée par un ensemble de forces, la contribution de chacune d'entre elles peut être déterminée.

Le domaine vibratoire exploite largement ce type d'identification. Les procédures d'identification s'organisent en trois grandes étapes :

- la description du comportement de la structure,
- l'acquisition de la réponse de la structure (observation) soumise aux sollicitations inconnues (sources),
- la quantification des sources à partir de la réponse de la structure.

Dib [Dib 02], puis Leclère [Lecl 03] mettent en œuvre cette procédure pour la détermination d'efforts. Les sources sont localisées *a priori*, ce qui permet de déterminer les fonctions de transfert entre les excitations et les sources avant l'étape de quantification. Leclère applique cette méthode pour la détermination des efforts internes d'un moteur DIESEL et plus particulièrement la détermination des efforts au niveau des pistons. Dib s'intéresse aux forces transmises par un moteur à la structure. Cette famille sera amplement étudiée dans la section destinée aux problèmes inverses linéaires en vibrations.

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans ce type d'approche.

II.1.3 Exemples de problèmes mal posés

Cette section est une sensibilisation aux conséquences des problèmes mal posés. Il y sera abordé un exemple de problème bayésien et deux exemples de type déterministe.

II.1.3.1 Les sondages

Les sondages sont des problèmes mal posés par nature. Pour connaître l'avis d'une population il est rare d'interroger l'ensemble de la population, sauf dans des cas où l'erreur est interdite (les présidentielles, référendum...). Seul un échantillon est prélevé pour représenter l'ensemble de la population. Il n'est pas rare en France de représenter 60 millions d'habitants avec 1000 personnes. Le fait d'extrapoler l'avis de quelques personnes est un problème inverse. Et il est par nature mal posé. Si l'échantillon ne contient que des doctorants, la représentation sera faussée. La connaissance *a priori* de la population (statut social, âge...) est indispensable. Nous sommes ici dans une approche type bayésienne où les statistiques sont essentielles. Dans ce cas, il peut être plus judicieux de prendre un nombre de personnes bien choisi que de prendre aléatoirement un plus grand nombre. Il s'agit donc d'un compromis entre quantité et qualité de l'information.

II.1.3.2 L'inversion matricielle

Traisons désormais un problème déterministe. L'inversion des systèmes linéaires de la forme $\{Y\} = [H]\{X\}$ s'avère quelquefois instable si la matrice $[H]$ est mal conditionnée. Considérons le système suivant :

$$[H] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}, \{X\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Le paramètre a caractérise l'indépendance des vecteurs colonnes de la matrice $[H]$. Ainsi, si a est nul, les vecteurs colonnes sont nuls rendant la matrice non inversible. Plus a devient grand, plus l'indépendance est forte. Le vecteur Y est obtenu par calcul matriciel :

$$\{Y\} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 + 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Désormais, inversons le système, mais en entachant d'erreur le vecteur Y soit $\delta Y = \{\varepsilon, 0\}$

$$\{X\} = [H]^{-1}(\{Y\} + \{\delta Y\}) = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 2 + a & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 + \varepsilon \\ 5 + 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon + 2\varepsilon/a \\ 2 - \varepsilon/a \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Pour une erreur relative de 1% sur les données Y_1 , soit $\delta Y_1/Y_1 = 0.01$, on obtient une erreur relative sur les données X_i :

$$\begin{aligned} \text{pour } a = 1; \delta X_1/X_1 &= 0.15, \delta X_2/X_2 = 0.025 \\ \text{pour } a = 10; \delta X_1/X_1 &= 0.06, \delta X_2/X_2 = 0.0025 \\ \text{pour } a = 0.1; \delta X_1/X_1 &= 1.05, \delta X_2/X_2 = 0.25 \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

La diminution de a augmente l'erreur sur les sources restituées. Ainsi la qualité de l'inversion, en présence d'erreur, dépend de l'indépendance entre les vecteurs colonnes de la matrice $[H]$. Les systèmes linéaires peuvent être sujets à l'amplification des erreurs à travers l'inversion de la matrice.

II.1.3.3 Détermination des forces appliquées à une structure

La reconstruction des forces appliquées à une structure se confronte aussi aux problèmes de stabilité. Prenons l'exemple donné par Bonnet [Bonn 99] dans son ouvrage, concernant la reconstruction d'un effort appliqué à une poutre, figure II.7.

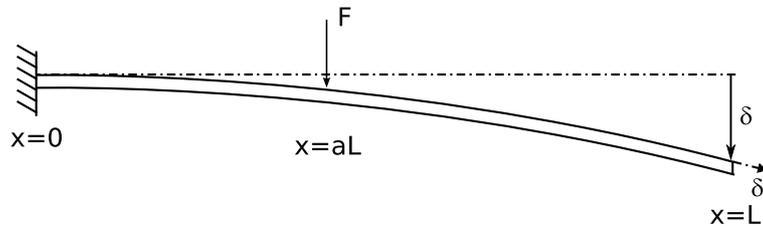


FIG. II.7 – Poutre droite et reconstruction d'une force ponctuelle.

Le calcul donne la force F et l'emplacement aL de la force en fonction des données connues, E le module d'Young, L la longueur, I le moment d'inertie, et les observations mesurées, la flèche $\delta(L)$ et la rotation d'extrémité $\delta'(L)$, soit :

$$aL = 3(L - (\delta/\delta')), \quad F = 2EI\delta'(aL)^{-2} \quad (\text{II.17})$$

Une perturbation sur les valeurs connues, $\delta(L)$ et $\delta'(L)$:

$$\delta'_{mesure} = \delta'_{exact}(1 + \varepsilon); \quad (\delta/\delta')_{mesure} = (\delta/\delta')_{exact}(1 + \varepsilon') \quad (\text{II.18})$$

induit une erreur sur la reconstruction de F :

$$F_{mesure}/F_{exact} - 1 = (a\varepsilon + (a - 3)\varepsilon')/(a + \varepsilon'(3 - a)) \quad (\text{II.19})$$

L'erreur expérimentale augmente quand a diminue, c'est-à-dire lorsque le point d'application de la force s'approche de l'encastrement. Par exemple, pour une erreur relative de 1% sur $\delta(L)$ et $\delta'(L)$, on trouve des erreurs de reconstruction :

$$\begin{aligned} \text{pour } a = 0.25 & \quad F_{mesure}/F_{exact} - 1 = 0.117 \\ \text{pour } a = 0.1 & \quad F_{mesure}/F_{exact} - 1 = 0.240 \\ \text{pour } a = 0.05 & \quad F_{mesure}/F_{exact} - 1 = 0.384 \end{aligned} \tag{II.20}$$

Une erreur de 1% sur les observations peut engendrer une erreur relative 38 fois plus importantes sur les données reconstruites. D'où la nécessité de considérer l'importance de la stabilité d'un problème inverse.

II.1.4 Les méthodes de résolutions des problèmes inverses.

Gili [Gill 05] propose une figure synoptique, figure II.8, des méthodes pour la solution des systèmes d'équations. Ce tableau montre la diversité des cas où les méthodes de résolution s'appliquent. De nombreux domaines traitent les problèmes inverses ce qui implique des systèmes mathématiques très différents. Ce paragraphe n'a pas la prétention de présenter l'ensemble des méthodes, il souligne la diversité des méthodes d'inversion. Le choix de la méthode dépend du style de problème : linéaire ou non-linéaire, de la forme des matrices, creuses, pleines, du choix du type d'inversion, directe ou itérative...

On pourra trouver dans la littérature les méthodes décrites [Varg 62], [Youn 71], [Barr 94], [Nash 90], [Jeff 88].

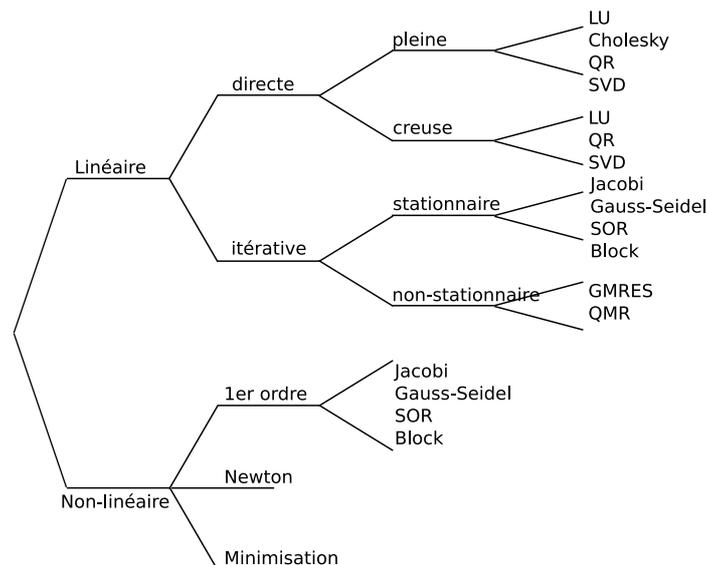


FIG. II.8 – Synoptique des méthodes pour la solution de systèmes d'équations.

La section suivante s'oriente sur les systèmes linéaires et la méthode d'inversion connue sous le nom de décomposition en valeurs singulières (DVS).

II.2 Problèmes inverses linéaires

II.2.1 Système Linéaire

De nombreux phénomènes physiques peuvent s'exprimer par le biais d'un système linéaire défini par la relation (II.21).

$$\{Y\} = [H]\{X\} \quad (\text{II.21})$$

$\{Y\}$ et $\{X\}$ sont respectivement le vecteur de sorties et le vecteur d'entrées. $[H]$ est la matrice de mélange.

II.2.2 Inversion de la matrice

II.2.2.1 Principe

Le problème initial est de déterminer les entrées $\{X\}$ connaissant les sorties $\{Y\}$ et la matrice $[H]$ liées par la relation $\{Y\} = [H]\{X\}$. La matrice doit subir un changement de base permettant l'inversion du système. Ce changement peut être réalisé par les méthodes de Cholesky, de LU, de la décomposition en valeurs singulières (DVS)... Après changement, la matrice est inversée. La méthode décrite, dans le cadre de cette thèse, est la DVS car elle s'avère plus stable [Gill 05].

II.2.2.2 La DVS

La décomposition en valeurs singulières (ou DVS) est devenue depuis quelques décennies un outil fondamental pour étudier les problèmes linéaires. Stewart [Stew 93] retrace l'histoire de la technique DVS découvert par des mathématiciens. Cette technique a été initiée notamment par Beltrami il y a plus de cent ans, mais elle devint stable numériquement seulement en 1965 grâce à Golub [Golu 65]. Cette décomposition est un changement de base permettant une diagonalisation. Nous verrons en particulier que cette technique donne une solution simple pour les problèmes de moindres carrés.

Le théorème principal qui définit la DVS est décrit par l'équation :

$$[H] = [U][\Sigma][V]^T, \text{ avec } [\Sigma] = \begin{pmatrix} [\Sigma_1]_{R \times R} & [0]_{R \times (N-R)} \\ [0]_{(M-R) \times R} & [0]_{(M-R) \times (N-R)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$[H] \in \mathbb{R}^{M \times N}$ une matrice de rang R . $[U] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ ($[U][U]^T = [U]^T[U] = I_M$), et $[V] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($[V][V]^T = [V]^T[V] = I_N$) sont deux matrices orthogonales, $[\Sigma] \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $[\Sigma_1] = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_R)$ et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_R > 0$.

Si l'on note $[U] = (u_1, \dots, u_M)$, $[V] = (v_1, \dots, v_N)$, les colonnes des matrices $[U]$ et $[V]$, les vecteurs u_j et v_j sont, respectivement, les vecteurs singuliers droits et gauches associés à la valeur singulière σ_j .

Du point de vue géométrique, la décomposition représente une dilatation dans chaque direction après un changement de base orthogonale. Pour illustrer cette transformation, considérons un cercle de rayon unité, figure II.9. Celui-ci est projeté sur la base orthogonale des vecteurs singuliers à gauche $\{v_R\}$, une rotation est réalisée. Chaque composante est ensuite dilatée par un facteur correspondant aux valeurs singulières σ_R , ainsi la sphère devient une ellipsoïde. Enfin une rotation de l'ellipsoïde est effectuée pour passer des axes principaux $\{v_R\}$ aux axes principaux $\{u_R\}$ correspondants aux vecteurs singuliers droits.

Les vecteurs singuliers de gauche représentent l'orientation de l'énergie associée à la valeur singulière correspondante. L'énergie quelle que soit la direction peut être reconstruite à partir des vecteurs singuliers qui constituent une base de vecteurs orthogonaux. Cette notion d'énergie permet de séparer l'information du signal et celle du bruit. Les techniques de séparation du signal et de blanchiment utilisent largement cette notion [Fabr 01].

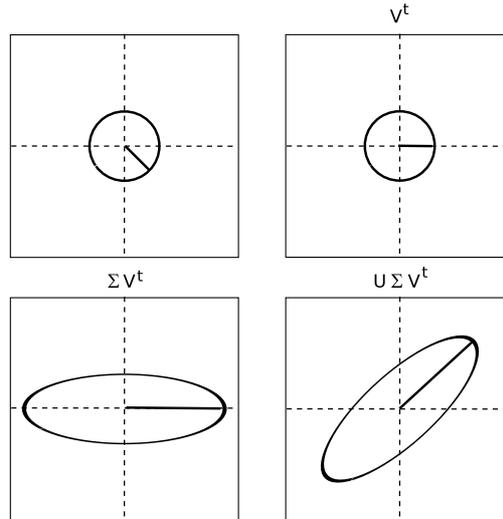


FIG. II.9 – Signification géométrique de la DVS.

Notons que les valeurs singulières ont un lien avec les valeurs propres. En effet, les valeurs propres de la matrice $[H]^T[H]$ sont les nombres σ_j^2 , $j = 1, \dots, N$, et ses vecteurs propres sont les vecteurs singuliers à gauche de $[H]$. De même, les valeurs propres de la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & [H]^T \\ [H] & 0 \end{bmatrix}$$

sont les nombres $\pm\sigma_j$, $j = 1, \dots, N$, et ses vecteurs propres sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_j \\ \pm u_j \end{bmatrix}$$

II.2.2.3 Inversion

L'inversion du système $\{Y\} = [H]\{X\}$ est ensuite réalisée. Nous obtenons ainsi le vecteur des entrées $\{X\}$ par la relation :

$$\{X\} = [V][\Sigma]^{-1}[U]^T\{Y\} \tag{II.23}$$

Ce système équivaut à la résolution du système d'équation (II.24) dans la base modale, où les vecteurs $\{X_{bm}\}$ et $\{Y_{bm}\}$ représentent respectivement les vecteurs $\{X\}$ et $\{Y\}$ exprimés dans la base modale.

$$\begin{aligned} [\Sigma]\{X_{bm}\} &= \{Y_{bm}\} \\ \text{avec } \{X_{bm}\} &= [V]^T\{X\} \text{ et } \{Y_{bm}\} = [U]^T\{Y\} \end{aligned} \tag{II.24}$$

De cette relation, le noyau et l'image de $[H]$ sont définis par :

$$Ker([H]) = vect(v_{R+1}, \dots, v_N), \quad Im([H]) = vect(u_1, \dots, u_R) \tag{II.25}$$

Ainsi la solution du problème existe si $\{Y\}$ appartient à $Im([H])$, et est unique si le noyau de $[H]$, $Ker([H])$, est nul, ou si le nombre de valeurs singulières est égal au nombre de lignes de $\{Y\}$, $R = N$. Dans le cadre où la solution existe et est unique, $M = N = R$ la solution s'écrit :

$$\{X\} = \sum_{i=1}^R \frac{y_{bm,i}}{\sigma_i} \{v_i\} \tag{II.26}$$

Dans la plupart des cas, le noyau est non nul et le nombre de valeurs singulières est inférieur à N , il existe une infinité de solutions d'où la notion de quasi-solutions notées :

$$\{X\} = \sum_{i=1}^R \frac{y_{bm,i}}{\sigma_i} \{v_i\} + \sum_{i=R+1}^N \alpha_i \{v_i\} \quad (\text{II.27})$$

α_i sont des paramètres de régularisation. Les quasi-solutions sont déterminées par la méthode des moindres carrés. Ainsi le problème initial qui est de déterminer $\{X\}$ à partir de la relation $\{Y\} = [H]\{X\}$, devient un problème de minimisation d'une fonction coût d'après les moindres carrés, équation (II.28).

$$\{Y\} = [H]\{X\} \implies \{X\} | \min \| [H]\{X\} - \{Y\} \|_2 \quad (\text{II.28})$$

II.2.2.4 Nombre de conditionnement

La stabilité de l'inversion face aux petites variations des données d'entrées est en lien avec le nombre de conditionnement, notion primordiale des problèmes inverses. Ce nombre de conditionnement pour une matrice rectangulaire est défini pour toutes les normes par :

$$c([H]) = \| [H] \| \| [H]^{-1} \| \quad (\text{II.29})$$

On notera que ce nombre, à la norme 1, est défini comme le rapport entre la plus grande et la plus petite des valeurs singulières, soit :

$$c([H]) = \frac{\sigma_1}{\sigma_R} \quad (\text{II.30})$$

Ce nombre varie entre 1 et $+\infty$, et traduit l'indépendance entre les colonnes de la matrice $[H]$. Une valeur de 1 montre que les vecteurs colonnes sont orthogonaux entre eux. La solution existe et est unique. Au contraire, des vecteurs liés génèrent un nombre de conditionnement infini et l'impossibilité d'inverser la matrice. Dans ce cas, la matrice $[H]$ possède des valeurs singulières nulles ; la matrice est dégénérée, et son rang est égal au nombre de valeurs singulières non nulles.

Cependant l'effet du bruit entache les données sur la matrice $[H]$ la rendant inversible dans tous les cas. Ainsi, la singularité du système est masquée. Ce phénomène est abordé dans l'ouvrage de Tikhonov et Arsénine en 1976 [Tikh 76] et est constaté dans les premiers travaux d'application de la méthode pour le calcul d'efforts indirectement par Fabunmi [Fabu 87], et Lee et Park [Lee 94]. C'est pourquoi le nombre de conditionnement joue un rôle majeur dans la stabilité du problème. Il amplifie les variations des entrées et de la matrice à travers l'inversion. Ainsi, un nombre élevé est synonyme d'un mauvais conditionnement de la matrice tandis qu'une faible valeur témoigne d'un bon conditionnement et donc une meilleure stabilité du système face aux petites variations. Au final, ce nombre de conditionnement est un très bon indicateur de confiance pour l'inversion.

Il faut savoir que si celui-ci est élevé, deux interprétations peuvent être faites :

- Le système est inversible, malgré un mauvais conditionnement.
- Le système est dégénéré (non-inversible), et les petites valeurs singulières sont en fait des valeurs nulles rendues non nulles par les incertitudes de mesures.

Ces deux interprétations sont le plus souvent indiscernables ce qui revient à dire que le rang reste indéterminé. D'ailleurs, des méthodes de régularisation se basent sur ces petites valeurs singulières ; méthodes qui seront exposées un peu plus tard.

En pratique, la matrice $[H]$ et le vecteur de sorties $\{Y\}$ sont entachés d'erreurs de mesures notées $[\delta H]$ et $\{\delta Y\}$. Le système linéaire (II.1) devient :

$$(\{Y\} + \{\delta Y\}) = [H + \delta H](\{X\} + \{\delta X\}) \quad (\text{II.31})$$

Dans ce cas, tout livre d'analyse, [Gill 05], démontre que l'erreur sur les données entrées reconstituées est majorée, équation (II.32).

$$\frac{\|\{\delta X\}\|_2}{\|\{X\}\|_2} \leq c([H]) \left(\frac{\|\{\delta H\}\|_2}{\|[H]\|_2} + \frac{1}{\cos\theta} \frac{\|\{\delta Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \right) + c([H])^2 \tan\theta \frac{\|\{\delta Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \quad (\text{II.32})$$

L'angle θ mesure l'écart entre les vecteurs $\{Y\}$ et $[H]\{X\}$, autrement dit la taille du résidu. Ainsi, si le résidu est petit, le conditionnement "effectif" est proche de $c([H])$, par contre, si le résidu est relativement grand le conditionnement est de l'ordre de $c([H])^2$. Enfin, si θ est proche de $\pi/2$ la solution est beaucoup plus petite que le résidu, le conditionnement "effectif" devient non-borné même en présence d'un $c([H])$ faible. Raisonnablement on considère que le résidu est petit, donc θ proche de 0, ainsi la relation (II.32) est simplifiée, le conditionnement "effectif" est $c([H])$, équation (II.33).

$$\frac{\|\{\delta X\}\|_2}{\|\{X\}\|_2} \leq c([H]) \left(\frac{\|\{\delta H\}\|_2}{\|[H]\|_2} + \frac{\|\{\delta Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \right) \quad (\text{II.33})$$

Zhang en 1997 [Zhan 97], définit des domaines d'erreurs dues à la propagation du bruit. Les erreurs sur les sources après la propagation des erreurs sur les réponses sont définies à l'intérieur d'un domaine :

$$\frac{1}{c^2([H])} \frac{\|\{\delta Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \leq \frac{\|\{\delta X\}\|_2}{\|\{X\}\|_2} \leq c^2([H]) \frac{\|\{\delta Y\}\|_2}{\|\{Y\}\|_2} \quad (\text{II.34})$$

L'erreur relative de la matrice des sources est estimée plus près de la limite supérieure. Ceci confirme la notion du nombre de conditionnement, c'est-à-dire que l'inversion sera d'autant plus stable si le nombre de conditionnement est petit.

De même, les erreurs sur la matrice de mélange se propagent et l'erreur relative se situe dans ce domaine :

$$\frac{\|\{\delta X\}\|_2}{\|\{X\}\|_2} \leq \frac{1}{\sigma_{min}^2} \cdot \|\delta(H)\|_2^2 \quad (\text{II.35})$$

Cette formule révèle que le risque d'erreur peut devenir grand si la valeur singulière minimale de la matrice de transfert, σ_{min}^2 , est petite. Cette petite valeur est à l'origine de l'hyper sensibilité de la matrice face à l'inversion.

II.2.3 Méthode de régularisation

La régularisation, introduite dès 1976 par Tikhonov et Arsenine [Tikh 76], permet de stabiliser le problème. Ces techniques se déclinent en deux grandes familles : la troncature de valeurs singulières et la régularisation de celles-ci par optimisation.

Le principe de la troncature est issu d'une propriété du problème direct. Effectivement, ré-écrivons la solution de l'inversion :

$$x_i = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j} v_{ij} \sum_{k=1}^M u_{kj}^* y_k \quad (\text{II.36})$$

Les valeurs singulières apparaissent aux dénominateurs. Par conséquent, une valeur singulière nulle ou qui tend vers 0, génère un nombre de conditionnement élevé et peut amplifier les erreurs de mesures. Désormais, explicitons cette relation par le biais du problème direct :

$$y_i = \sum_{j=1}^N \sigma_j u_{ij} \sum_{k=1}^N v_{kj}^* x_k \quad (\text{II.37})$$

Le formalisme mathématique du problème direct montre que si la valeur singulière est proche de 0, sa contribution peut être négligée. Ainsi, l'idée est de supprimer les valeurs singulières inférieures à un certain seuil dans le cadre d'une approche inverse.

$$x_i = \sum_{j=1, \sigma_j > \sigma_{lim}}^N \frac{1}{\sigma_j} v_{ij} \sum_{k=1}^M u_{kj}^* y_k \quad (\text{II.38})$$

La troncature est la première méthode historique. Elle consiste à annuler les plus petites valeurs singulières considérées comme du bruit. Ainsi, on part d'une quasi-solution et les plus petites singulières, à partir d'un ordre $R < N$, sont annulées. Le conditionnement est ainsi meilleur.

$$\{X\} = \sum_{i=1}^R \frac{y_{bm,i}}{\sigma_i} \{v_i\} + \sum_{i=R+1}^N \alpha_i \{v_i\} \quad (\text{II.39})$$

α_i sont les paramètres de régularisation. La deuxième famille correspond à la régularisation des petites valeurs singulières par le biais d'une variable. La technique d'optimisation est basée sur la régularisation des valeurs singulières qui minimise la fonction-coût J_β suivante :

$$J_\beta = (1 - \beta) \|[H]\{X\} - \{Y\}\|_2^2 + \beta \|\{X\} - \{X_0\}\|_2^2 \quad (\text{II.40})$$

β est le paramètre de régularisation. Si $\beta = 0$, la régularisation est inexistante et le problème n'est pas régularisé. Si $\beta = 1$, la minimisation de la fonction-coût conduit à la solution $\{X\} = \{X_0\}$, cela signifie que seule l'information *a priori* est prise en compte. Pour augmenter la stabilité de l'inversion, il est nécessaire d'augmenter le paramètre β , mais cette augmentation écarte la solution calculée de la solution exacte du problème.

L'art de la régularisation est d'estimer, le seuil et le paramètre de régularisation. Il dépend du niveau de bruit qui lui-même est difficile à définir avec précision. Des méthodes d'estimation de ce paramètre existent dans la littérature, la méthode GCV ("Generalized Cross Validation") [Golub 79] et la méthode L-Curve [Hans 92].

La méthode L-Curve consiste à rechercher un optimum d'une fonction objectif composée de deux termes, RN et SN, définis par l'équation (II.41).

$$RN = \|\{Y\} - [H]\{X\}\|_2, \quad SN = \|\{X\}\|_2 \quad (\text{II.41})$$

RN (Residu Norm) représente le résidu tandis que SN (Solution norm) représente la norme de la solution. La courbe logarithmique décrivant SN en fonction de RN forme un "L". Effectivement, cette courbe est composée de deux parties, une partie verticale pour laquelle une augmentation de β cause une diminution de (SN) sans une augmentation significative de la norme résiduelle (RN), et une partie horizontale pour laquelle l'augmentation de β cause une faible diminution de SN. Le point optimal correspond à l'angle de la L-Curve, pour lequel l'augmentation de β a causé une importante augmentation de SN sans une augmentation significative de RN.

La méthode GCV est une technique appréciée pour la détermination du paramètre de régularisation car elle s'exprime simplement par la minimisation d'une fonction objectif :

$$E_\beta = \frac{\left\| \left([H][H]^T + \beta[I] \right)^{-1} \{X\} \right\|_2}{\text{tr} \left(\left([H][H]^T + \beta[I] \right)^{-1} \right)} \quad (\text{II.42})$$

Reprenons l'exemple numérique de la section "Exemples de problèmes mal posés" où nous avons :

$$[H] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}, \quad \{X\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{pmatrix} 5 + \varepsilon \\ 5.2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.43})$$

La décomposition en valeurs singulières de la matrice $[H]$, réalisée numériquement, fournit la décomposition suivante :

$$[H] = [U][\Sigma]^{-1}[V]^T = \begin{pmatrix} -0.6930 & 0.7209 \\ -0.7209 & 0.6930 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.2263 & 0 \\ 0 & 0.0310 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4383 & -0.8989 \\ -0.8989 & 0.4383 \end{pmatrix}^T \quad (\text{II.44})$$

La différence entre les deux valeurs singulières est très importante, soit un nombre de conditionnement de 104.1. Le problème est ainsi mal posé car mal conditionné. Le tableau II.2.3 montre que l'erreur relative sur les sources est de 107.9%. Pour régulariser le problème nous utilisons les formules (II.40) et (II.39), avec $\{X_0\} = (1; 2)$.

	Troncature		Optimisation			
	Non tronquée	Tronquée	$\beta = 0$	$\beta = 0.03$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$
$\ \{\delta X\}/\{X\}\ _2$ (%)	107.9	1.82	107.9	107.9	1.20	0

TAB. II.1 – Résultats des régularisations.

La troncature à l'ordre 1 (suppression de la petite valeur singulière) a permis d'améliorer significativement la solution, passant d'une erreur de l'ordre de 100% à 2%. L'optimisation par le paramètre β est encore plus efficace mais cette méthode nécessite des informations *a priori* sur la solution, pour évaluer les paramètres de régularisation. Et ceci est souvent peu aisé, et délicat : une information utile peut subir une distortion ou être supprimée. C'est pourquoi, la connaissance des phénomènes physiques générant le problème linéaire est primordiale.

II.3 Application au domaine vibratoire

II.3.1 Problèmes inverses et vibrations

Le chapitre précédent introduit le système MIMO pour les problèmes vibratoires. Le système MIMO s'écrit sous une forme linéaire dans le domaine fréquentiel $\{Y(\omega)\} = [H(\omega)]\{X(\omega)\}$ où $[H(\omega)]$ est la fonction de transfert. Ce système, linéaire dans le domaine fréquentiel, se prête à l'application des techniques d'inversion linéaire. Les sources sont le plus souvent des forces [Lecl 03], [Dib 02], [Peze 96]. Les observations sont réalisées à partir d'accéléromètres piézoélectriques décrits dans le chapitre précédent. Cependant, le développement technologique dans ce domaine fournit des nouvelles méthodes d'acquisitions sans contact tels que les vibromètres-lasers.

II.3.2 Mode opératoire

L'application des techniques d'inversion, pour la mesure indirecte, se dissocie en trois grandes étapes.

- La première étape est une étape de prétraitement, les fonctions de transfert entre les réponses et les sources vibratoires de la machine en arrêt sont déterminées, ce qui permettra de constituer les matrices de transfert.
- La deuxième étape est l'étape d'acquisition des données. Les mesures sont effectuées lors du fonctionnement de la machine. Ces mesures correspondent aux mesures indirectes.
- La troisième étape est l'étape d'inversion. Elle consiste à calculer par les méthodes inverses les sources vibratoires.

Ces trois étapes sont primordiales et doivent être réalisées avec beaucoup de précision. Chacune de ces étapes fait l'objet d'une optimisation pour stabiliser l'inversion dans le cas où le problème est effectivement mal posé.

La première étape offre la possibilité d'estimer les fonctions de transfert de manière expérimentale ou numérique, si le modèle est disponible. Les fonctions de transfert numériques peuvent

être d'une grande utilité pour un calcul rapide, cependant elles peuvent s'éloigner du modèle expérimental. Les fonctions de transfert expérimentales sont, quant à elles, fidèles au modèle réel mais elles demandent une détermination plus lourde à mettre en œuvre. Cependant, ces fonctions permettent de meilleures performances de restitution. Notons que la machine est en arrêt donc les erreurs sur $[H]$ sont faibles. La deuxième étape, étape d'acquisition, est opérée lors du fonctionnement de la machine, c'est pourquoi les acquisitions peuvent être perturbées par des sources non connues. La troisième étape applique les méthodes d'inversion comme la DVS. Pour stabiliser celle-ci, les modèles mathématiques font appel aux propriétés des structures.

II.3.3 Conditionnement et analyse modale

D'après la section précédente, l'inversion du système est influencée par le nombre de conditionnement de $[H]$, donc l'interprétation de cette matrice est très intéressante. L'expression de la matrice $[H]$, peut être déduite de l'analyse modale de la structure étudiée. Cette matrice de mélange est une matrice de transfert entre les points d'excitations et les points de mesures. Cette fonction a été explicitée dans le chapitre précédent, équation (II.45). Cette relation est la base de nombreuses explications physiques expliquant le conditionnement du problème.

$$h_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r(i)\phi_r(j)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \quad (\text{II.45})$$

Plusieurs raisons sont à l'origine du mauvais conditionnement de la matrice de transfert. La première concerne la position des excitations, Powell et Seering [Powe 84] montrent que deux excitations physiquement trop proches génèrent des déformées trop semblables, plus particulièrement en basses fréquences, ce qui crée une dépendance linéaire entre deux colonnes de la matrice de transfert. La deuxième concerne la restitution des fréquences proches de la résonance, comme le montre Hilary et Ewins [Hill 84], Fabumni [Fabu 86], puis Desanghere [Desa 87]. En effet, à ces fréquences, un seul mode propre régit la structure et donc l'ensemble des colonnes est fortement lié, et ceci est d'autant plus vrai que la structure est peu amortie. Le rang de la matrice vaut ainsi 1. La troisième raison concerne le nombre de modes participant à la réponse. Fabumni [Fabu 86], [Fabu 87] mis en évidence le principe, où la participation modale à une excitation modale est très importante car c'est elle qui définit le nombre de sources identifiables. Le nombre de réponses doit être supérieur au nombre de modes excités de la structure. La figure II.10, présentée par Leclère [Lecl 03], représente l'ensemble des situations de la restitution sur un système à deux degrés de liberté. Les points de mesures ne sont pas représentés mais sont jugés bien placés sur la structure.

En conclusion, le bon conditionnement de la matrice est assuré si les conditions suivantes sont satisfaites :

- le nombre de points de mesure doit être supérieur au nombre de points d'excitation, et ils doivent être uniformément répartis sur la structure,
- les sources recherchées doivent être suffisamment espacées pour produire des réponses différentes,
- le nombre de modes régissant la structure doit être supérieur ou égal au nombre de sources.

Ces trois conditions ont fait l'objet d'études afin de fiabiliser l'inversion et de stabiliser le problème. Nous allons donc expliciter les moyens d'applications de ces conditions à travers la section suivante.

II.3.4 Optimisation de l'inversion

L'inversion peut être améliorée soit par l'apport des phénomènes physiques soit par l'apport de techniques purement mathématiques. Cependant le plus souvent, la régularisation du problème

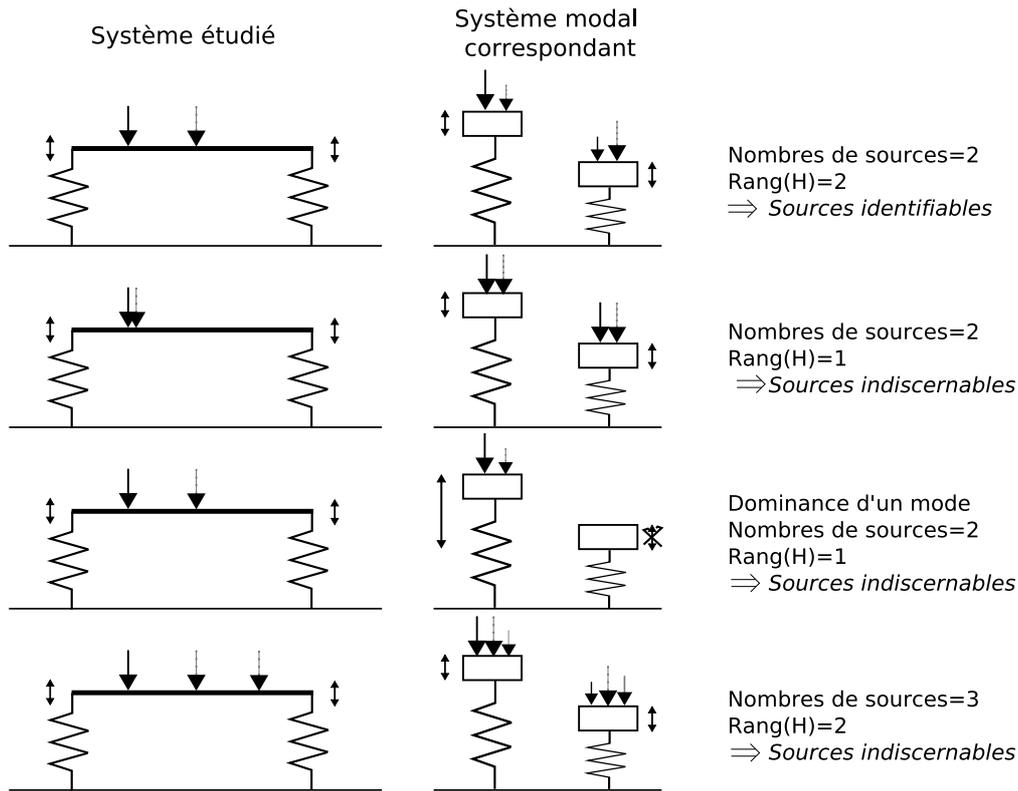


FIG. II.10 – Faisabilité de la mesure indirecte de sources, extrait de la thèse [Lecl 03].

est issue d'un équilibre entre ces deux principes.

II.3.4.1 Méthodes mécaniques

Dans la plupart des cas, la restitution est réalisée à partir d'observations de type accélérations, vitesse de la structure. [Hill 84], [Elli 88] et [Han 90] utilisent d'autres types de données, respectivement les contraintes et les rotations, qui tendent à rendre l'inversion plus stable. Hilary et Ewins [Hill 84] montrent notamment que l'utilisation d'une matrice de contrainte est par nature mieux conditionnée qu'une matrice composée de données accélérométriques.

Certaines études concernent l'optimisation du placement des observations [Lee 94], [Hadj 01]. Le principe s'apparente à changer le problème à inverser à travers le placement des observations. Il s'agit donc de minimiser le nombre de conditionnement de la matrice de mélange, en diminuant l'écart entre les valeurs singulières. Lee [Lee 94], propose une méthode basée sur la maximisation de la norme d'une sous matrice carrée $[U_{11}]$ de $[U]$ calculée lors de la décomposition en valeurs singulières. Cette sous matrice est définie de la façon suivante :

$$[H]_{M \times N} = [U]_{M \times M} [\Sigma]_{M \times N} [V]_{N \times N}^H \quad (\text{II.46})$$

$$[H]_{M \times N} = \begin{bmatrix} [U_{11}]_{N \times N} \\ [U_{21}]_{(M-N) \times N} \end{bmatrix} [\Sigma_1]_{N \times N} [V]_{N \times N}^H \quad (\text{II.47})$$

avec :

$$\begin{aligned}
[U]_{M \times M} &= \begin{bmatrix} [U_{11}]_{N \times N} & [U_{12}]_{N \times (M-N)} \\ [U_{21}]_{(M-N) \times N} & [U_{22}]_{(M-N) \times (M-N)} \end{bmatrix} \\
[\Sigma]_{M \times N} &= \begin{bmatrix} [\Sigma_1]_{N \times N} \\ [0]_{(M-N) \times N} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{II.48}$$

Les lignes de $[H]$ pour lesquelles la norme de la sous matrice $[U_{11}]$ est maximale, correspondent aux localisations optimales des capteurs.

Hadjit [Hadj 01] définit un nouveau critère de choix de réponses en considérant l'apport d'informations indépendantes. Le critère est basé sur la matrice de Fischer, notée $[F_i]$, (II.49).

$$[F_i] = [H]^H [H] \tag{II.49}$$

$$[E] = [H][F_i]^{-1}[H]^H \tag{II.50}$$

La matrice $[E]$ a la propriété d'avoir une trace égale à son rang. Les observations choisies correspondent aux termes diagonaux les plus importants. Notons que ces deux méthodes nécessitent un large nombre d'observations, donc de capteurs, permettant ensuite de réaliser une sélection.

D'autres études se sont penchées sur la restitution des fréquences proches de la résonance. Lee et Park [Lee 94] proposent d'ajouter un batteur de manière à décaler la fréquence propre sujette à la restitution. La figure II.11 illustre une régularisation par une modification du comportement d'une poutre encastree libre. L'apport de ce système modifie la structure ce qui déplace les résonances de structure. Ainsi, la dominance du mode est atténuée augmentant le rang de la matrice de $[H]$ et en rendant la reconstruction des sources possibles. Cependant l'ajout du batteur change de manière significative la structure et peut modifier en ce cas les sources excitatrices et recherchées.

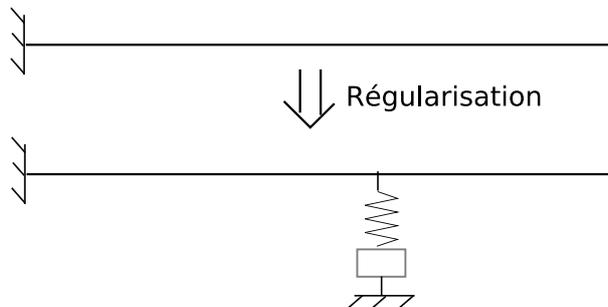


FIG. II.11 – Régularisation par masse ajoutée.

Un autre procédé, mis en place par Mas *et al.* [Mas 94], s'intéresse à l'amortissement de la structure. En effet, une structure amortie présente des pics de résonance moins aigus ce qui améliore le conditionnement. Lee et Park [Lee 95] proposent d'ajouter numériquement de l'amortissement aux fonctions de transfert mesurées. Mais ceci introduit une erreur de biais due à la surestimation de l'amortissement réel présent dans la mesure des observations.

II.3.4.2 Méthodes statistiques

Les méthodes statistiques permettent de limiter le bruit, ces méthodes consistent à utiliser les matrices spectrales des réponses et des sources et les matrices interspectrales. On définit une

matrice interspectrale entre les signaux $x(t)$ et $y(t)$ moyennés sur Ns signaux, équation (II.51), avec $X(f)$ et $Y(f)$, les transformées de Fourier respectives.

$$[\Gamma_{xy}] = \frac{1}{Ns} \sum_{k=1}^{Ns} \{X(f)\}\{Y(f)\}^H \quad (\text{II.51})$$

Le système MIMO linéaire devient une relation entre la matrice des densités spectrales de sorties $[\Gamma_{yy}]$ et celle d'entrées $[\Gamma_{xx}]$, équation (II.52). Les travaux dans le domaine vibratoire utilisent très largement ces techniques [Dib 02], [Lecl 03].

$$[\Gamma_{yy}] = [H]^H \cdot [\Gamma_{xx}] \cdot [H] \quad (\text{II.52})$$

De même, nous avons la relation entre la matrice spectrale des entrées et la matrice interspectrale entre l'entrée et la sortie, équation (II.53)

$$[\Gamma_{xy}] = [H] \cdot [\Gamma_{xx}] \quad (\text{II.53})$$

La fonction de transfert est également estimée avec les statistiques. Il existe plusieurs estimations de cette matrice $[H]_1$, $[H]_2$, $[H]_T$, $[H]_W$, $[H]_p$ [Maia 97], [Ewin 00]. Elles possèdent chacune des caractéristiques propres face au bruit et/ou sur les incidents fréquentiels (résonance et anti-résonance). Les estimateurs les plus usuels sont le $[H]_1$ et le $[H]_2$. En particulier le $[H]_1$ est utilisé par les nouvelles chaînes d'acquisition. On définit les trois premiers indicateurs comme suit :

$$\begin{aligned} [H]_1 &= [\Gamma_{xy}] / [\Gamma_{xx}] \\ [H]_2 &= [\Gamma_{yy}] / [\Gamma_{xy}] \\ [H]_3 &= \sqrt{[H]_1 [H]_2} \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

$[H]_1$ a la particularité d'éliminer le bruit aléatoire additif sur la réponse car $[\Gamma_{yy}]$ n'intervient pas, mais il est biaisé en présence de bruit à l'entrée. D'après le même raisonnement, $[H]_2$ est préférable si il y a des problèmes de bruit en entrée. $[H]_3$ est un compromis entre les deux autres. $[H]_1$ sous-estime tandis que $[H]_2$ surestime la fonction de transfert alors que $[H]_3$ est la moyenne géométrique entre $[H]_1$ et $[H]_2$.

Dib [Dib 02] met en œuvre des méthodes de conditionnement des signaux basées sur les cohérences partielles. Ces dernières sont définies par la relation (II.55).

$$\gamma_{X_2 Y_i \bullet 1}^2 = \frac{\Gamma_{X_2 Y_i \bullet 1}^* \Gamma_{X_2 Y_i \bullet 1}}{\Gamma_{X_2 X_2 \bullet 1} \Gamma_{Y_i Y_i \bullet 1}^*} \quad (\text{II.55})$$

$\Gamma_{X_2 Y_i \bullet 1}$, $\Gamma_{X_2 X_2 \bullet 1}$ et $\Gamma_{Y_i Y_i \bullet 1}$ sont respectivement l'interspectre entre l'entrée X_2 et la sortie Y_i , l'autospectre de l'entrée X_2 , l'autospectre de la sortie Y_i , amputées de l'entrée X_1 .

Elles s'appuient sur des références supposées moins contaminées par les parasites que la matrice spectrale des réponses. Ainsi le conditionnement des réponses en utilisant des références proches de la source à caractériser permet de minimiser leur contamination. Le choix des références nécessite la connaissance au préalable des parasites et de la propagation de source excitatrice. Le principe est d'éliminer de la matrice spectrale de réponses la partie de l'énergie qui n'est pas cohérente avec les références. Cela améliore les résultats pour des sources indépendantes mais se montre inefficace pour des observations trop bruitées.

La méthode consiste à mesurer la matrice spectrale des références, $[\Gamma_{ry}]$ et d'une façon séquentielle la matrice interspectrale entre les points de références et les points de réponses permettant d'augmenter le nombre de mesures sans augmenter le nombre de capteurs, équation (II.56).

$$[\Gamma_{yy}] = [\Gamma_{ry}]^H [\Gamma_{rr}]^{-1} [\Gamma_{ry}] \quad (\text{II.56})$$

r correspond aux références.

II.3.4.3 Méthodes de régularisation

Les méthodes de régularisation ont été décrites lors de la section 2.2.3. Cette section explique comment les problèmes inverses linéaires en vibrations les intègrent. On rappelle que ceux-ci sont utilisés lorsque la matrice est mal conditionnée, due aux incertitudes sur les données. Nous avons vu que la matrice n'est que rarement singulière car le bruit suffit pour avoir une matrice de rang N . C'est pourquoi les premiers travaux sur la restitution des sources ont très vite utilisé les méthodes dites de régularisation.

Dans le cadre des vibrations, la première méthode, décrite par Powell et Seering en 1984 [Powe 84], consiste à annuler les plus petites valeurs singulières qui sont considérées comme non nulles dues au bruit. Le seuil de troncature est défini généralement en fonction du niveau d'incertitude des fonctions de transfert composant $[H]$, [Elli 88], [Thit 03a]. La méthode de l'optimisation par Tikhonov fut mise en œuvre dans le domaine de mesures indirectes d'efforts par Nelson en 1998 [Nels 98] et plus récemment par Kim [Kim 02], et Thite [Thit 03b].

La difficulté d'emploi des deux méthodes réside dans le choix du seuil ou le paramètre de régularisation. Romano et Lopez [Roma 96] décide de rejeter les valeurs singulières inférieures à 10% de la valeur prédominante. Powell et Seering [Powe 84] évalue le seuil en fonction du niveau de bruit présent dans la matrice de transfert. Mais il reste à estimer l'erreur entachant les fonctions de transfert. Quelque soit la solution adoptée, le choix du seuil reste relativement arbitraire. En ce qui concerne la régularisation de Tikhonov, le choix du paramètre est plus délicate car il faut *a priori* connaître les sources.

Selon Lanczos [Lanc 61], *A lack of information cannot be remedied by any mathematical trickery*. Cette citation prouve bien que les méthodes de régularisation permettent de stabiliser le problème mais biaisent l'inversion en modifiant les valeurs singulières. La matrice peut être mal conditionnée du fait d'un mauvais placement des réponses et non dû au bruit, donc réduire une valeur singulière à zéro peut signifier l'annulation d'une source.

II.3.4.4 Moindres carrés pondérés/totaux

Leclère [Lecl 03] met en œuvre deux stratégies dans le cadre de la mesure indirecte d'efforts, une stratégie de pondération des moindres carrés et une stratégie utilisant les moindres carrés totaux.

La première méthode est basée sur l'importance donnée à chaque réponse lors de la minimisation du résidu par le biais d'une matrice diagonale $[W]$. Il est donc possible de diminuer l'importance de certaines réponses vibratoires situées sur des ventres de vibrations et vice-versa pour les réponses situées sur des nœuds.

$$[W] \{Y\} = [W] [H] \{X\} \quad (\text{II.57})$$

$$\{X\} = [[W] [H]]^{-1} [W] \{Y\} \quad (\text{II.58})$$

Ainsi la matrice de transfert se voit attribuer un meilleur conditionnement, ce qui améliore la stabilité de l'inversion. En pratique la matrice $[W]$ est choisie de sorte que, pour un vecteur $\{X\}$ unitaire, on obtienne un vecteur $[W]\{Y\}$ unitaire d'où :

$$W_{ii} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N |H_{ij}|^2\right)^{-1}} \quad \text{avec } i \in [1, \dots, M] \quad (\text{II.59})$$

La deuxième méthode est basée sur l'incertitude sur chaque fonction de transfert. Cette incertitude est calculée avec les fonctions de cohérence, équation (II.60), les fonctions ayant la plus mauvaise cohérence, c'est-à-dire entachées de grandes erreurs dues au bruit, ne sont pas prises en compte.

$$\gamma_{ij}^2 = \frac{|\Gamma_{ji}|}{\Gamma_{ii}\Gamma_{jj}} \quad (\text{II.60})$$

L'approche consiste à pondérer les réponses par la moyenne des cohérences des fonctions de transfert associées soit :

$$W_{ii} = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\gamma_{ij}|^2\right)^p \quad \text{avec } i \in [1, \dots, M] \quad (\text{II.61})$$

p est un paramètre de pondération, variant de 0 à quelques unités. Il vaut quelques unités lorsque le nombre de fenêtrage temporel est faible. Leclère [Lecl 03] valide cette technique de pondération sur une poutre composée de deux sections de taille différente, offrant des déplacements vibratoires d'amplitudes différentes, figure II.12.

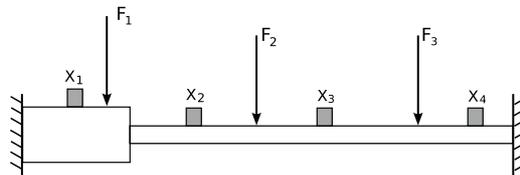


FIG. II.12 – Structure illustrant l'utilité des moindres carrés pondérés, extrait thèse [Lecl 03].

La deuxième stratégie est une stratégie de moindres carrés totaux. Elle consiste à considérer les erreurs sur les observations mais aussi sur les données de la matrice, alors que la méthode classique des moindres carrés considère des erreurs de mesure sur les données réponses. Cependant cette méthode est moins performante que les moindres carrés pondérés, Leclère lui confère le rôle d'indicateur de qualité de restitution, c'est-à-dire, une restitution similaire par les deux techniques permet d'avoir de résultats fiables.

Cette méthode utilise l'hypothèse où le vecteur $\{Y\}$ est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de $[H]$, ce qui signifie que le rang de la concaténation de $\{Y\}$ et de $[H]$ vaut n , équation (II.62).

$$\text{rang}([[H]_{M \times N} | \{Y\}_{M \times 1}]) = N \quad (\text{II.62})$$

La décomposition en valeurs singulières de la matrice concaténée donne l'équation (II.63).

$$[[H]_{M \times N} | \{Y\}_{M \times 1}] = [[U]_{M \times N} | \{U\}_{M \times 1}] \begin{bmatrix} [\Sigma]_{N \times N} & 0 \\ 0 & [\Sigma]_{1 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{V\}_{N \times N} & \{V\}_{N \times 1} \\ \{V\}_{1 \times N} & \{V\}_{1 \times 1} \end{bmatrix}^H \quad (\text{II.63})$$

L'hypothèse décrite par l'équation (II.62) implique que la matrice $\Sigma_{1 \times 1}$ est nulle. Nous obtenons ainsi les relations :

$$\begin{aligned} [H]_{M \times N} \{V\}_{N \times 1} + \{Y\}_{M \times 1} V_{1 \times 1} &= 0 \\ -[H]_{M \times N} \{V\}_{N \times 1} V_{1 \times 1}^{-1} &= \{Y\}_{M \times 1} \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

La solution $\{X\}$ est obtenue en injectant la relation (II.64) dans la relation linéaire $\{Y\} = [H]\{X\}$, soit :

$$\{X\}_{N \times 1} = -\{V\}_{N \times 1} V_{1 \times 1}^{-1} \quad (\text{II.65})$$

II.3.4.5 Méthodes d'inversion en coordonnées modales.

Lorsqu'on traite les problèmes inverses linéaires dans le domaine vibratoire, on se doit d'explicitier la méthode en coordonnées modales car elle fut à l'origine de nombreuses études en considérant les propriétés modales de la structure. Cette méthode, initiée par Desanghere [Desa 87], exploite la relation linéaire (II.66) pour faire ressortir les réponses et les sources dans la base modale, équation (II.67).

$$\{Y(\omega)\} = [H(\omega)]\{X(\omega)\} \quad (\text{II.66})$$

$$\{Y_g(\omega)\} = [H_g(\omega)]\{X_g(\omega)\} \quad (\text{II.67})$$

avec :

$$\begin{aligned} \{Y_g(\omega)\} &= [\phi]^T \{Y(\omega)\} \\ \{X_g(\omega)\} &= [\phi]^T \{X(\omega)\} \\ [H_g(\omega)] &= \text{diag}\left(\frac{1}{-\omega^2 m_j + i\omega c_j + k_j}\right) \\ \text{où } [\phi] &\text{ est la matrice modale} \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

L'inversion de la relation (II.67) est simple puisque la matrice $[H_g(\omega)]$ est diagonale. Le problème réside dans la détermination des réponses et sources modales. Les paramètres modaux de la matrice $[H_g(\omega)]$ ainsi que la matrice des vecteurs propres $[\phi]$ peuvent être obtenus par l'analyse modale expérimentale ou par un calcul numérique. Ensuite les réponses $\{Y(\omega)\}$ de la structure sont exploitées pour déterminer les réponses modales $\{Y_g(\omega)\}$. Les sources modales, $\{X_g(\omega)\}$, sont obtenues par inversion du modèle (II.67) et enfin les sources $\{X(\omega)\}$ sont déterminées par la relation (II.66). Notons que cette méthode fournit une solution unique si le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues, c'est-à-dire que le nombre de modes doit être supérieur au nombre de sources à identifier.

Cette méthode présente des inconvénients qui ont fait qu'elle n'a pas pu s'imposer face à la décomposition traditionnelle en valeurs singulières. Effectivement, le premier inconvénient réside dans le nombre de réponses, qui doit être nécessairement supérieur au nombre de modes identifiés dans la bande étudiée. Dib [Dib 02] illustre ce fait à travers l'application sur une cage sur suspensions viscoélastiques. La DVS donne de très bons résultats d'identification avec quatre réponses alors que la méthode en coordonnées modales nécessite au moins 12 réponses car la structure possède 12 modes sur la bande d'étude, 0-1000Hz. Le deuxième inconvénient majeur est l'omission d'un mode propre non négligeable dans la fonction de transfert, ce qui biaise la construction de la matrice de transfert rendant difficile la reconstruction des sources.

Il est donc admis donc que l'utilisation des fonctions de transfert mesurées subordonnée à l'inversion par la décomposition en valeurs singulières pour chaque abscisse fréquentielle est plus performante et moins contraignante. C'est pourquoi nous ne traitons pas plus longuement les méthodes d'inversion en coordonnées modales.

II.3.4.6 Conditions pratiques à respecter pour diminuer les erreurs

Même si certaines erreurs sont inévitables, nous pouvons les limiter. Pour cela, Dib [Dib 02] donne quelques principes à respecter :

1. les fonctions de transfert sont déterminées, en utilisant un pot vibrant (plus adéquate que le marteau de choc) et l'utilisation de l'estimateur $[H]_1$
2. Le montage expérimental ne doit pas changer lors des différentes campagnes de mesures. La mesure des réponses doit être simultanée.
3. Le nombre de moyennes pour déterminer les données doit être élevé afin de diminuer les erreurs statistiques.
4. Il faut surdéterminer le problème, c'est-à-dire avoir plus de réponses que de sources.
5. Les positions des réponses doivent être choisies pour obtenir le meilleur rapport signal/bruit et pour intégrer la réponse de tous les modes. Il est ainsi préférable d'effectuer une analyse modale pour éviter les nœuds modaux.

Cette thèse a pour sujet de réflexion les deux derniers points dont l'énoncé semble peu précis. L'analyse modale peut apporter des informations plus précises quant aux choix de la position des réponses, d'où la nécessité d'un développement de la matrice de transfert.

II.4 Conclusion

Les problèmes inverses ont un domaine d'investigation très large, ils s'appliquent aussi bien à la thermique, à la mécanique, à la météorologie, aux statistiques... De même, les méthodes de résolutions sont aussi nombreuses que différentes car elles dépendent du modèle du système étudié : problème linéaire ou non-linéaire, méthode itérative ou directe, matrice creuse ou non ... Cette grande disparité nécessite de cibler l'étude, et d'utiliser la méthode adaptée.

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine vibratoire qui est un problème linéaire, $\{Y\} = [H]\{X\}$, où, à partir des observations $\{Y\}$, les sources $\{X\}$ sont calculées. Cependant ce problème souffre d'instabilité face à l'inversion. Le développement de nombreux outils de restitution notamment pour stabiliser le problème permet d'obtenir des résultats tout à fait prometteurs. Ce travail de thèse s'inspire de ces travaux, pour mettre en œuvre la restitution pour le compte de la maintenance conditionnelle, notamment le lien entre la stabilité et l'analyse modale, et l'importance de la localisation des observations.

Effectivement, l'originalité consiste à déterminer la relation étroite entre la stabilité du problème et la position des observations en vue d'un emploi limité de capteurs autour des fréquences caractéristiques de défauts introduites au chapitre 1. L'objectif est ainsi non pas d'augmenter la **quantité** de l'information mais la **qualité** (donnée par les observations). Notons également que la nature des quantités à restituer sont des accélérations alors que les études précédentes proposent la restitution de forces. Ce choix permet de comparer les quantités restituées et mesurées, et permet également d'avoir des sources et des observations de même ordre de grandeur ce qui stabilise le problème. Nous œuvrons dans le chapitre 3, avec les notions abordées dans les deux premiers chapitres, pour obtenir une relation entre les paramètres modaux et la position des observations soit par voie numérique soit par voie expérimentale.

Chapitre III

Développement d'une méthode d'inversion et application sur un cas académique

III.1 Introduction

Le chapitre précédent introduit la notion de problèmes inverses, notamment dans le domaine vibratoire. Les avantages et les inconvénients y sont mentionnés, soulignant les développements possibles. En particulier, un inconvénient majeur de ce type de problème est la stabilité de l'inversion du modèle de mélange ce qui a donné lieu à de nombreuses études.

Ce chapitre se consacre à stabiliser l'inversion pour augmenter la qualité de la restitution à travers la position d'un nombre limité d'observations.

Dans un premier temps, la détermination de ces positions fait l'objet d'un développement de deux approches mises en corrélation. La première approche mise en œuvre est une approche numérique dont la signification physique a donné naissance à une deuxième approche, expérimentale, à travers l'analyse modale. Ces deux approches mettent en évidence des zones d'optimisation de la position d'observations à travers une carte en lignes de niveaux appelée "carte de conditionnement". Des modes opératoires quant à leur détermination sont mise en œuvre.

Dans un deuxième temps, les deux approches sont validées sur un cas académique, une plaque encastrée-libre excitée par deux pots vibrants. Les résultats de restitution des sources seront directement confrontés avec des méthodes de régularisation qui mettra en évidence le bien fondé des approches proposées.

III.2 Développement des approches

III.2.1 Stabilité de l'inversion et approche numérique

III.2.1.1 Carte de conditionnement

La première approche est une approche essentiellement numérique nécessitant un modèle éléments finis de la structure. Elle fut historiquement la première à être mise en évidence. Ce modèle permet de déterminer, suivant la position des sources, les positions optimales pour les observations afin d'augmenter une stabilité de l'inversion. Ces positions seront mises en évidence par des cartes nommées "cartes de conditionnement". Elles représentent les isovaleurs des nombres de conditionnement. Ainsi les zones optimales sont le lieu où le nombre de conditionnement sera la plus faible.

III.2.1.2 Mode opératoire de l'approche numérique

Cette approche nécessite un modèle numérique de la structure étudiée. Une observation est considérée comme étant une variable tandis que les autres observations sont disposées sur la structure. L'observation variable balaie l'ensemble des nœuds possibles du modèle numérique. Pour chaque nœud de la structure, le nombre de conditionnement est calculé, d'où la naissance de zones d'optimisation et de la carte de conditionnement. Cette carte, ainsi obtenue, permet de visualiser très rapidement la position à adopter pour la dernière observation, c'est-à-dire dans une zone où l'inversion est stable.

III.2.2 Stabilité de l'inversion et approche expérimentale

L'approche expérimentale est née d'une volonté de donner une signification physique aux cartes obtenues par l'approche numérique. Ceci nous a amené à manipuler le modèle mathématique MIMO. Pour mettre en évidence cette approche expérimentale, nous explicitons mathématiquement le nombre de conditionnement à la norme 1, $c([H]) = \|[H]\|_1 \|[H]^{-1}\|_1$, où cette norme est définie par :

$$\|[H]\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^N \|h_{ij}\|_2. \quad (\text{III.1})$$

Comme les observations et les sources sont de la même grandeur, c'est-à-dire des accélérations, la matrice de mélange est une matrice de transmissibilité (cf. Chapitre 1), ainsi pour des raisons d'écriture nous notons $[T]$ cette matrice, d'où :

$$c([T]) = \|[T]\|_1 \|[T]^{-1}\|_1 \quad (\text{III.2})$$

avec

$$[T] = \begin{pmatrix} t_{x_1 \rightarrow y_1} & \cdots & t_{x_{p'} \rightarrow y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{x_1 \rightarrow y_p} & \cdots & t_{x_{p'} \rightarrow y_p} \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

$t_{x_i \rightarrow y_j}$ est la fonction de transmissibilité, rapport dans le domaine fréquentiel du signal sortie y_j et du signal entrée x_i . p' est le nombre de sources et p est le nombre d'observations. Comme nous décidons de limiter le nombre d'observations au nombre de sources, la matrice \mathbf{T} est carrée, $p'=p$. Dans ce cadre, chaque fonction de transmissibilité est obtenue à partir de la fonction de transfert dite classique, tronquée à N modes, équation (III.4).

$$h_{ij}(\omega) = \frac{D(y_j)}{F(x_i)} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_r(x_i)\phi_r(y_j)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \quad (\text{III.4})$$

h_{ij} est la fonction de transfert entre les points x_i et y_j . $\phi_r(i)$ est la composante du vecteur propre du r -ième mode correspondant au point i . $A(y_j)$, $D(y_j)$ et $F(y_j)$ sont respectivement l'accélération au point y_j , le déplacement au point y_j et la force appliquée au point x_i . m_r , k_r et c_r sont respectivement les r -ième composantes de la diagonale des matrices de masse, de raideur, et d'amortissement exprimées dans la base modale. Les fonctions de transmissibilité sont ainsi obtenues, équation (III.5).

$$t_{x_j \rightarrow y_i}(\omega) = \frac{A(y_i)}{A(x_j)} = \frac{-\omega^2 D(y_i)}{-\omega^2 D(x_j)} = \frac{D(y_i)}{F(x_j)} \cdot \frac{F(x_j)}{D(x_j)} = \frac{h_{ji}(\omega)}{h_{jj}(\omega)} = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(y_i)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r}}{\sum_{r=1}^N \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(x_j)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r}} \quad (\text{III.5})$$

Ces fonctions constituent la matrice de mélange. L'entrée est considérée fixe et l'étude est réalisée en bande étroite autour des fréquences que l'on souhaite restituer. Ce qui signifie que la fonction de transmissibilité ne dépend que de l'observation y_i . Par conséquent, la fonction de transmissibilité devient une combinaison linéaire de N modes, équation (III.6).

$$t_{x_j \rightarrow y_i}(\omega) = \sum_{r=1}^N a_r(x_j, \omega) \phi_r(y_i) \quad (\text{III.6})$$

Procédons au calcul du nombre de conditionnement pour une norme 1, soit :

$$c([T]) = \|[T]\|_1 \|[T]^{-1}\|_1 \quad (\text{III.7})$$

or :

$$\|[T]\|_1 = \max_{i=1,p} \left\{ \sum_{j=1,p} \left\| \sum_{r=1}^N a_r(x_i, \omega) \phi_r(y_j) \right\|_2 \right\} \quad (\text{III.8})$$

et la norme 1 de la matrice de transmissibilité inverse est :

$$\|[T]^{-1}\|_1 = \frac{1}{\det([T])} \max_{i=1,p} \left\{ \sum_{j=1,p} \left\| \sum_{r=1}^N a_r(x_j, \omega) \phi_r(y_i) \right\|_2 \right\} \quad (\text{III.9})$$

ainsi le nombre de conditionnement s'écrit :

$$c([T]) = \frac{1}{\det([T])} \max_{i=1,p} \left\{ \sum_{j=1,p} \left\| \sum_{r=1}^N a_r(x_i, \omega) \phi_r(y_j) \right\|_2 \right\} \max_{i=1,p} \left\{ \sum_{j=1,p} \left\| \sum_{r=1}^N a_r(x_j, \omega) \phi_r(y_i) \right\|_2 \right\} \quad (\text{III.10})$$

Nous désirons ainsi obtenir le nombre de conditionnement le plus proche de 1.

Cependant le développement de cette relation ne donne pas de résultats exploitables directement. Nous tentons donc de simplifier le problème et déclarer que l'inversion sera stable si le dénominateur de l'équation (III.10), $\det([T])$, est non nul pour des structures mécaniques. Cet aspect de la simplification nécessite une validation expérimentale qui sera réalisée dans les sections suivantes. Pour obtenir un déterminant non nul, nous procédons en plusieurs étapes. Avant cela, l'introduction de la notion des modes dominants est primordial. Ces modes définissent également les modes participant à la réponse de la structure. Ceci s'exprime à travers l'équation (III.6) où le nombre de termes correspond au nombre de modes dominants. Ainsi, l'étude de la contribution de chaque terme $a_k(x_j, \omega)$ permet de simplifier l'écriture à N_{dom} termes ($N_{dom} \leq N$) correspondant aux modes dominants, équation (III.11). Le nombre de conditionnement dépend essentiellement des modes dominants de la structure étudiée.

$$t_{x_j \rightarrow y_i}(\omega) = \sum_{\substack{r:\text{indice des} \\ \text{modes dominants}}} a_r(x_j, \omega) \phi_r(y_i) = \sum_{r:dom} a_r(x_j, \omega) \phi_r(y_i) \quad (\text{III.11})$$

III.2.2.1 Cas où un mode domine, deux sources, deux observations

Le cas où un mode domine correspond au phénomène de résonance d'où $\omega = \omega_u$. Ce cas est très simple et fut mis en évidence par Fabunmi dès 1986 [Fabu 86]. Le nombre de modes dominants étant inférieur au nombre de sources, la matrice de transmissibilité est de rang 1, donc non inversible. Autrement dit, les colonnes de la matrice sont liées. On retrouve ce principe à partir des relations suivantes. La relation (III.5) peut s'écrire sous une autre forme, équation (III.12), mettant en évidence le terme correspondant à la pulsation propre $\omega = \omega_u$.

$$t_{x_j \rightarrow y_i}(\omega_u) = \frac{\frac{\phi_u(x_j)\phi_u(y_i)}{-\omega_u^2 m_u + i\omega_u c_u + k_u} + \sum_{r=1, \dots, N; r \neq u} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(y_i)}{-\omega_u^2 m_r + i\omega_u c_r + k_r}}{\frac{\phi_u(x_j)\phi_u(x_j)}{-\omega_u^2 m_u + i\omega_u c_u + k_u} + \sum_{r=1, \dots, N; r \neq u} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(x_j)}{-\omega_u^2 m_r + i\omega_u c_r + k_r}} \quad (\text{III.12})$$

Dans le cas d'un amortissement faible (cas de structures métalliques), le premier terme du dénominateur et du numérateur a une contribution dominante. Les termes suivants sont négligeables. Cela signifie que le mode u est représentatif de notre fonction de transmissibilité. On dira qu'un seul mode domine. Ainsi la relation (III.12) peut être simplifiée en équation (III.13), ce qui donne la matrice de transmissibilité, équation (III.14).

$$t_{x_j \rightarrow y_i} = \frac{\phi_u(y_i)}{\phi_u(x_j)} \quad (\text{III.13})$$

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\phi_u(y_1)}{\phi_u(x_1)} & \frac{\phi_u(y_1)}{\phi_u(x_2)} \\ \frac{\phi_u(y_2)}{\phi_u(x_1)} & \frac{\phi_u(y_2)}{\phi_u(x_2)} \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Le déterminant de l'équation (III.14) est nul d'où l'impossibilité d'inverser la matrice de transmissibilité en théorie. Cependant, en pratique, l'inversion est toujours possible à cause des erreurs de mesures engendrant des vecteurs colonnes non liés. Ceci amènera à un résultat tronqué.

III.2.2.2 Cas N_{dom} modes dominants, p sources et p observations

Dans le cadre général, le terme général de la matrice de transmissibilité s'écrit équation (III.15).

$$t_{x_j \rightarrow y_i} = [T(\omega)]_{i,j} = \frac{\sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(y_i)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r}}{\sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(x_j)}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r}} \quad \text{avec } i, j = 1, \dots, p \quad (\text{III.15})$$

x_i et y_i désignent respectivement les sources et les observations. m_r , c_r et k_r sont les r -èmes composantes de la diagonale des matrices de masse, de raideur, et d'amortissement exprimées dans la base modale. $\{\phi_r\}$ est le r -ème vecteur propre. Pour alléger l'écriture, la notation suivante est introduite.

$$D_r = -\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r$$

$$\begin{aligned}
 \det([T(\omega)]) &= \left| \begin{array}{ccc} \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_1)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(x_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(x_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(x_p)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} & \vdots \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(x_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(x_2)}{D_r} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_p)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(x_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(x_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(x_p)}{D_r} \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{\sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(x_1)}{D_r}} \left| \begin{array}{ccc} \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_1)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(x_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(x_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(x_2)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_p)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(x_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(x_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(x_p)}{D_r} \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{\prod_{j=1}^p \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(x_j)}{D_r}} \left| \begin{array}{ccc} \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_1)}{D_r} \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_p)}{D_r} & \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_p)}{D_r} \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{\prod_{j=1}^p \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(x_j)}{D_r}} \det([T(\omega)]')
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

Pour avoir un système inversible, la relation (III.16) doit être non nulle, or

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^p \sum_{r:\text{dom}} \frac{\phi_r(x_j)\phi_r(x_j)}{D_r}} \neq 0$$

Dans ce cas, le déterminant de $\det([T'(\omega)])$ doit être non nul. Sa valeur dépend des sources, des observations et de la pulsation.

$$\det([T'(\omega)]) = \begin{vmatrix} \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} & \cdots & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_1)}{D_r} \\ \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_p)}{D_r} & \vdots & \vdots & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_p)\phi_r(y_p)}{D_r} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{III.17})$$

Dans le but de développer ce déterminant, nous procédons à une récurrence sur le nombre de sources et d'observations.

Système N_{dom} modes, 2 sources, 2 observations

La relation est ici déterminée dans le cas de deux sources, deux observations et N_{dom} modes dominants. Dans ce cadre, le déterminant de la matrice de transmissibilité s'exprime simplement :

$$\det([T'(\omega)]) = \begin{vmatrix} \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} \\ \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} \end{vmatrix} \quad (\text{III.18})$$

$$\det([T'(\omega)]) = \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} \cdot \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} - \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} \cdot \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} \quad (\text{III.19})$$

Après développement, d'une part les termes en D_i^2 s'annulent, d'autre part le développement des termes croisés $D_i D_j$ permet d'obtenir l'équation (III.20).

$$\begin{aligned} \det([T'(\omega)]) &= \frac{[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) - \phi_1(x_2)\phi_2(x_1)] [\phi_1(y_1)\phi_2(y_2) - \phi_1(y_2)\phi_2(y_1)]}{D_1 D_2} \\ &+ \frac{[\phi_1(x_1)\phi_3(x_2) - \phi_1(x_2)\phi_3(x_1)] [\phi_1(y_1)\phi_3(y_2) - \phi_1(y_2)\phi_3(y_1)]}{D_1 D_3} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{[\phi_{m-1}(x_1)\phi_m(x_2) - \phi_{m-1}(x_2)\phi_m(x_1)] [\phi_{m-1}(y_1)\phi_m(y_2) - \phi_{m-1}(y_2)\phi_m(y_1)]}{D_{m-1} D_m} \\ &= \sum_{j:dom, k:dom; j < k} \frac{[\phi_j(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_j(x_2)\phi_k(x_1)] [\phi_j(y_1)\phi_k(y_2) - \phi_j(y_2)\phi_k(y_1)]}{D_j D_k} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Pour un système MIMO, 2 sources, 2 observations et N_{dom} modes dominants, la relation à vérifier est l'équation (III.21).

$$\left\| \left\| \sum_{j:dom, k:dom; j < k} \frac{1}{D_j D_k} [\phi_j(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_j(x_2)\phi_k(x_1)] [\phi_j(y_1)\phi_k(y_2) - \phi_j(y_2)\phi_k(y_1)] \right\| \right\|_2 \neq 0 \quad (\text{III.21})$$

Notons le cas intéressant où le nombre de modes dominants est 2, ($N_{dom} = 2, p = 2$). Deux modes, notés u et v , traduisent le comportement de la structure. Ainsi, la relation devient :

$$\det([T]) = \frac{1}{A} \cdot (\phi_u(x_2)\phi_v(x_1) - \phi_u(x_1)\phi_v(x_2)) \cdot (\phi_u(y_2)\phi_v(y_1) - \phi_u(y_1)\phi_v(y_2)) \quad (\text{III.22})$$

avec

$$A = \sum_i \left(\frac{\phi_u^2(x_i)}{-\omega^2 m_u + i\omega c_u + k_u} + \frac{\phi_v^2(x_i)}{-\omega^2 m_v + i\omega c_v + k_v} \right)$$

Ce résultat montre que le déterminant n'est pas toujours nul, mais peut l'être si les modes sont orthogonaux en certains points de la structure. Ceci explique que le déterminant est nul pour certains points et pour certaines fréquences.

Pour que la matrice soit inversible, il est nécessaire de vérifier l'équation (III.23)

$$\left[\phi_u(x_2)\phi_v(x_1) - \phi_u(x_1)\phi_v(x_2) \right] \cdot \left[\phi_u(y_2)\phi_v(y_1) - \phi_u(y_1)\phi_v(y_2) \right] \neq 0 \quad (\text{III.23})$$

Cette relation est symétrique car, d'une part, un terme correspond aux sources et d'autre part, un terme correspond aux observations. Chacun des termes doit être différent de zéro pour avoir un déterminant non nul.

Illustrons cette relation par un exemple. Nous considérons une barre encastrée-encastrée dont la réponse vibratoire par des forces extérieures est régie par les modes 2 et 3. La relation (III.23), si on ne considère pas le terme liant les sources, s'écrit :

$$\phi_2(y_2)\phi_3(y_1) - \phi_2(y_1)\phi_3(y_2) \neq 0 \quad (\text{III.24})$$

Vérifier la relation précédente revient à réaliser un produit en croix comme illustré sur la figure III.1. L'expression peut se simplifier si une déformée modale d'un point est située sur un

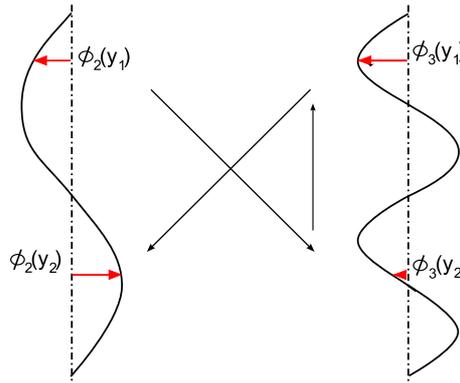


FIG. III.1 – Illustration lorsque deux modes dominant.

nœud de vibration d'un mode. Il peut sembler judicieux de placer une sortie sur un nœud de vibration. Si y_2 est placée sur un ventre du mode 3, $\phi_3(y_2) = 0$, donc la relation précédente devient simplement :

$$\phi_2(y_2)\phi_3(y_1) \neq 0 \quad (\text{III.25})$$

Cas N_{dom} modes, 3 sources, 3 observations

Le déterminant pour un système 3 sources, 3 observations s'écrit équation (III.26).

$$\det([T']) = \begin{vmatrix} \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_1)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_3)\phi_r(y_1)}{D_r} \\ \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_2)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_3)\phi_r(y_2)}{D_r} \\ \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_1)\phi_r(y_3)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_2)\phi_r(y_3)}{D_r} & \sum_{r:dom} \frac{\phi_r(x_3)\phi_r(y_3)}{D_r} \end{vmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Le calcul du déterminant est réalisé par le développement à partir de la troisième colonne, équation (III.27).

$$\begin{aligned}
\det([T']) &= \sum_{k:dom} \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_1)}{D_k} \cdot \sum_{j,k:dom;j < k} \frac{[\phi_j(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_j(x_2)\phi_k(x_1)][\phi_j(y_2)\phi_k(y_3) - \phi_j(y_3)\phi_k(y_2)]}{D_j D_k} \\
&- \sum_{k:dom} \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_2)}{D_k} \cdot \sum_{j,k:dom;j < k} \frac{[\phi_j(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_j(x_2)\phi_k(x_1)][\phi_j(y_1)\phi_k(y_3) - \phi_j(y_3)\phi_k(y_1)]}{D_j D_k} \\
&+ \sum_{k:dom} \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_3)}{D_k} \cdot \sum_{j,k:dom;j < k} \frac{[\phi_j(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_j(x_2)\phi_k(x_1)][\phi_j(y_1)\phi_k(y_2) - \phi_j(y_2)\phi_k(y_1)]}{D_j D_k}
\end{aligned} \tag{III.27}$$

Le développement de l'expression précédente est réalisé en deux étapes, le développement des termes en $D_k D_l D_l$, noté $T_1 = \sum_{k,k,l;l < k} t_1(k, k, l)$, $k < l$, et des termes en $D_k D_l D_q$, $k < l < q$, noté $T_2 = \sum_{k,l,q;k < l < q} t_2(k, l, q)$.

$$\det([T']) = T_1 + T_2 = \sum_{k,k,l;l < k} t_1(k, k, l) + \sum_{k,l,q;k < l < q} t_2(k, l, q) \tag{III.28}$$

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_1)}{D_k D_k D_l} \cdot [\phi_k(x_1)\phi_l(x_2) - \phi_k(x_2)\phi_l(x_1)][\phi_k(y_2)\phi_l(y_3) - \phi_k(y_3)\phi_l(y_2)] \\
&- \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_2)}{D_k D_k D_l} \cdot [\phi_k(x_1)\phi_l(x_2) - \phi_k(x_2)\phi_l(x_1)][\phi_k(y_1)\phi_l(y_3) - \phi_k(y_3)\phi_l(y_1)] \\
&+ \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_3)}{D_k D_k D_l} \cdot [\phi_k(x_1)\phi_l(x_2) - \phi_k(x_2)\phi_l(x_1)][\phi_k(y_1)\phi_l(y_2) - \phi_k(y_2)\phi_l(y_1)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_1)}{D_k} \cdot \frac{1}{D_l D_q} \cdot [\phi_l(x_1)\phi_q(x_2) - \phi_l(x_2)\phi_q(x_1)][\phi_l(y_2)\phi_q(y_3) - \phi_l(y_3)\phi_q(y_2)] \\
&+ \frac{\phi_l(x_3)\phi_l(y_1)}{D_l} \cdot \frac{1}{D_k D_q} \cdot [\phi_k(x_1)\phi_q(x_2) - \phi_k(x_2)\phi_q(x_1)][\phi_k(y_2)\phi_q(y_3) - \phi_k(y_3)\phi_q(y_2)] \\
&+ \frac{\phi_q(x_3)\phi_q(y_1)}{D_q} \cdot \frac{1}{D_l D_k} \cdot [\phi_l(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_l(x_2)\phi_k(x_1)][\phi_l(y_2)\phi_k(y_3) - \phi_l(y_3)\phi_k(y_2)] \\
&- \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_2)}{D_k} \cdot \frac{1}{D_l D_q} \cdot [\phi_l(x_1)\phi_q(x_2) - \phi_l(x_2)\phi_q(x_1)][\phi_l(y_1)\phi_q(y_3) - \phi_l(y_3)\phi_q(y_1)] \\
&- \frac{\phi_l(x_3)\phi_l(y_2)}{D_l} \cdot \frac{1}{D_k D_q} \cdot [\phi_k(x_1)\phi_q(x_2) - \phi_k(x_2)\phi_q(x_1)][\phi_k(y_1)\phi_q(y_3) - \phi_k(y_3)\phi_q(y_1)] \\
&- \frac{\phi_q(x_3)\phi_q(y_2)}{D_q} \cdot \frac{1}{D_l D_k} \cdot [\phi_l(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_l(x_2)\phi_k(x_1)][\phi_l(y_1)\phi_k(y_3) - \phi_l(y_3)\phi_k(y_1)] \\
&+ \frac{\phi_k(x_3)\phi_k(y_3)}{D_k} \cdot \frac{1}{D_l D_q} \cdot [\phi_l(x_1)\phi_q(x_2) - \phi_l(x_2)\phi_q(x_1)][\phi_l(y_2)\phi_q(y_1) - \phi_l(y_1)\phi_q(y_2)] \\
&+ \frac{\phi_l(x_3)\phi_l(y_3)}{D_l} \cdot \frac{1}{D_k D_q} \cdot [\phi_k(x_1)\phi_q(x_2) - \phi_k(x_2)\phi_q(x_1)][\phi_k(y_2)\phi_q(y_1) - \phi_k(y_1)\phi_q(y_2)] \\
&+ \frac{\phi_q(x_3)\phi_q(y_3)}{D_q} \cdot \frac{1}{D_l D_k} \cdot [\phi_l(x_1)\phi_k(x_2) - \phi_l(x_2)\phi_k(x_1)][\phi_l(y_2)\phi_k(y_1) - \phi_l(y_1)\phi_k(y_2)]
\end{aligned}$$

Une factorisation est possible, révélant les termes représentant les vecteurs propres des observations, notés $\Phi(y, k, l, q)$ et des sources, notés $\Phi(x, k, l, q)$:

$$t_2 = \frac{1}{D_k D_q D_l} \Phi(x, k, l, q) \Phi(y, k, l, q)$$

avec

$$\Phi(y, k, l, q) = \sum_{i=1,2,3;j=0,1} (-1)^j \phi_k(y_{i+2j}) \phi_l(y_{i+1}) \phi_q(y_{i+2-2j}), \quad i + 3k' \equiv i [3], \quad k' \in \mathbb{N}$$

$$\Phi(x, k, l, q) = \sum_{i=1,2,3;j=0,1} (-1)^j \phi_k(x_{i+2j}) \phi_l(x_{i+1}) \phi_q(x_{i+2-2j}), \quad i + 3k' \equiv i [3], \quad k' \in \mathbb{N}$$

Le déterminant de $[T]$ se simplifie donc en équation (III.29).

$$\det([T']) = T_1 + T_2 = T_2 \tag{III.29}$$

Pour un système MIMO, 3 sources, 3 observations et N_{dom} modes dominants la relation à vérifier est donnée par l'équation (III.30).

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k,l,q:dom} \frac{1}{D_k D_l D_q} \Phi(x, k, l, q) \cdot \Phi(y, k, l, q) \right\|_2 \neq 0, \quad k < l < q \\
\Phi(x, k, l, q) &= \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j=0,1}} (-1)^j \phi_k(x_{i+2j}) \phi_l(x_{i+1}) \phi_q(x_{i+2-2j}) \\
\Phi(y, k, l, q) &= \sum_{\substack{i=1,2,3 \\ j=0,1}} (-1)^j \phi_k(y_{i+2j}) \phi_l(y_{i+1}) \phi_q(y_{i+2-2j}) \\
& \text{Les indices de } x \text{ et } y \text{ sont modulo } 3
\end{aligned} \tag{III.30}$$

Système N_{dom} modes, p sources, p observations

L'équation (III.30) peut être généralisée à un système MIMO p sources, p observations et N_{dom} modes dominants. La relation est obtenue à l'aide d'une récurrence et un développement sur la p -ième colonne. Le détail du calcul étant fastidieux, seul le résultat apparaît, équation (III.31).

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p: dom} \frac{1}{D_{k_1} \dots D_{k_p}} \Phi(x, k_1, \dots, k_p) \cdot \Phi(y, k_1, \dots, k_p) \right\|_2 \neq 0, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_p, \quad \forall i, k_i \in \mathbb{N} \\
\text{où } \Phi(x, k_1, \dots, k_p) &= \sum_{\substack{i=1 \text{ à } p \\ j=0,1}} (-1)^j \phi_{k_1}(x_{i+(p-1)j}) \phi_{k_2}(x_{i+1+(p-3)j}) \dots \phi_{k_p}(x_{i+(p-1)+(p-(2p-1))j}) \\
\text{où } \Phi(y, k_1, \dots, k_p) &= \sum_{\substack{i=1 \text{ à } p \\ j=0,1}} (-1)^j \phi_{k_1}(y_{i+(p-1)j}) \phi_{k_2}(y_{i+1+(p-3)j}) \dots \phi_{k_p}(y_{i+(p-1)+(p-(2p-1))j}) \\
& \text{Les indices de } x \text{ et } y \text{ sont modulo } p, \quad p \geq 3
\end{aligned} \tag{III.31}$$

III.2.2.3 Mode opératoire de l'approche expérimentale

Les équations liant le nombre de conditionnement de la matrice de mélange et les modes propres permettent d'appréhender la position des observations et de limiter leur nombre au nombre de sources. Ce principe permet d'éviter les systèmes surdéterminés où l'information d'une des observations peut nuire à la restitution. De plus, il est intéressant de limiter leur nombre, c'est-à-dire, le nombre de capteurs, car la disposition d'un grand nombre de capteurs est peu viable, économiquement et expérimentalement. Pour une fréquence d'excitation, la structure peut être régie par un ou plusieurs modes propres. Nous avons établi une procédure expérimentale pour déterminer les zones optimales pour la position des capteurs.

- Réaliser l'analyse modale de la structure
- Déterminer le nombre de modes dominants pour chacune des fréquences que nous souhaitons restituer.
- Pour n observations, positionner $(n-1)$ observations sur des nœuds de vibrations de certains modes (nœuds pour lesquels la déformée propre est nulle) pour faciliter la manipulation de l'équation (III.31) permettant de placer le n -ième capteur.

III.3 Application à un cas académique : une plaque encastrée.

III.3.1 Définitions sources réelles/virtuelles, observations

Ce paragraphe définit le vocabulaire spécifique employé lors des essais expérimentaux permettant une meilleure lisibilité de ce manuscrit. Une source réelle est physiquement la cause qui

peut exciter la structure (pot vibrant, roulement, engrenage,...). Le terme "source" est renommé en tant que "source virtuelle", noté x , qui est une position où le signal enregistré correspond à une source réelle fonctionnant seule. L'"observation", notée y , correspond à la position où le signal enregistré résulte du fonctionnement simultané des sources réelles.

III.3.2 Description du banc d'expérimentation et recalage du modèle

Nous allons employer les deux approches dans un premier temps sur un cas académique, une plaque encastrée libre, figure III.2.a, dont les propriétés sont répertoriées dans le tableau III.1. Deux pots vibrants forment les sources réelles. Ils sont fixés par des élastiques qui permettent d'éviter les modes rigides issus d'une fixation elle-même rigide pouvant perturber les mesures. Ces pots excitent la plaque en deux points distincts, V3 et V7. Sept capteurs sont placés sur la structure dont les positions sont notées V2 à V8, figure III.4. Les signaux sont collectés à travers un système d'acquisition 8 voies, Siglab. Celui-ci permet également de générer des signaux excitateurs qui commandent les pots vibrants.

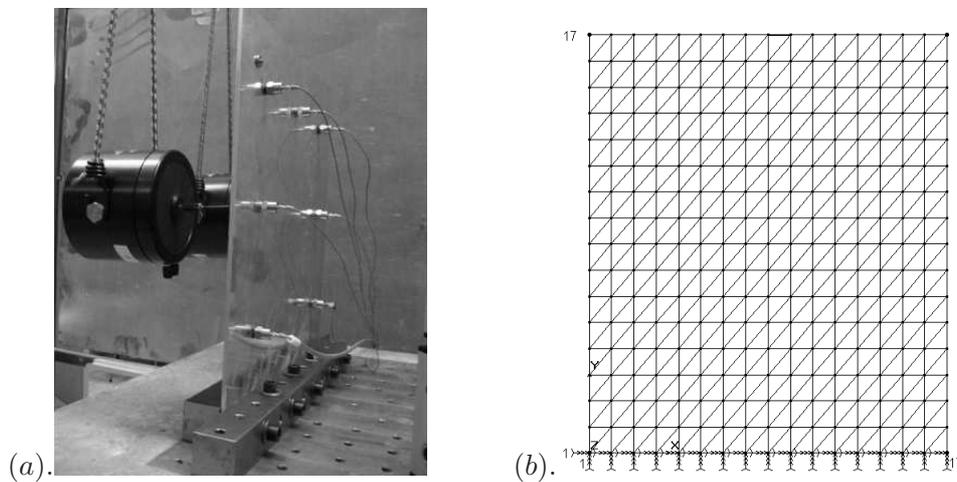


FIG. III.2 – (a) Banc d'expérimentation. (b) Modèle numérique de la plaque encastrée-libre.

Le modèle numérique a été réalisé à partir d'un logiciel éléments finis. La plaque est constituée de 512 éléments plaques triangulaires et de 289 nœuds, figure III.2.b. Les nœuds de la droite $y = 0$ sont bloqués en rotation et en translation pour illustrer l'encastrement, figure III.2.a. La liaison avec les pots vibrants n'est pas considérée. La géométrie de la structure est donnée par la mesure, soit par un pied à coulisse, soit par un régllet pour les côtes plus importantes. Les propriétés mécaniques sont *a priori* choisies par défaut par le logiciel pour un aluminium. Le recalage est donc nécessaire et effectué sur l'ensemble de ces caractéristiques (géométriques et générales) afin d'obtenir un modèle numérique le plus proche du modèle expérimental. L'analyse modale expérimentale est réalisée à partir des enregistrements des sept voies correspondant à la réponse à un essai de type choc. Notons qu'il n'est pas nécessaire, vu la simplicité de la structure, d'optimiser l'emplacement des capteurs pour réaliser l'analyse modale via la SDT Toolbox Balmès [Balm 00]. La visualisation des spectres des réponses montre une densité modale faible sur la bande de fréquences $0 - 500\text{Hz}$, figure III.3. Le chapitre 1 nous enseigne qu'un recalage sur les fréquences propres est suffisant pour une densité modale faible.

Le recalage est effectué sur les neuf premières fréquences propres (tableau III.2) en affectant les propriétés du matériaux et la géométrie de la structure. Ceci est réalisé à partir d'une boucle minorant une fonction objectif traduisant la différence quadratique entre les fréquences propres numériques, f_{num_i} et f_{id_i} identifiées, équation (III.32).

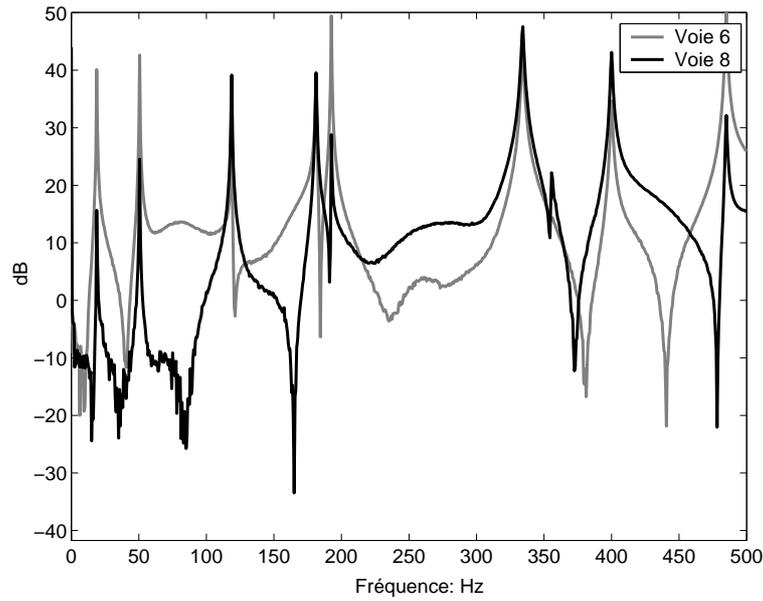


FIG. III.3 – FRFs de la plaque.

$$f_{obj} = \sum_i \left(\frac{f_{num_i} - f_{id_i}}{f_{id_i}} \right)^2 \quad (\text{III.32})$$

Le recalage sur les fréquences propres identifiées est réalisé avec une précision satisfaisante, avec un écart maximum de 1.71% sur la première fréquence, tableau III.1. La largeur de la plaque et le coefficient de Poisson ne sont pas affectés. Par contre, les valeurs du module d'Young et de la longueur se voient augmentées respectivement de 2.1% et 2.0%, et la valeur de l'épaisseur se voit diminuée de 2.6%.

	Avant recalage	Après recalage
Longueur (m)	0.460	0.4615
Largeur (m)	0.4	0.4
Épaisseur (m)	0.005	0.00487
E (Pa)	$7.40 \cdot 10^{10}$	$7.56 \cdot 10^{10}$
ν	0.35	0.35

TAB. III.1 – Caractéristiques de la plaque avant et après recalage.

III.3.3 Sources réelles, sources virtuelles, observations

Comme nous l'avons déjà évoqué, les sources réelles sont les deux pots vibrants. Le pot 1 délivre une composition de deux sinus de fréquences 70 et 110Hz tandis que le pot 2 délivre deux sinus de 110 et 320Hz. Notons que la fréquence 110Hz est présente pour les deux sources, ce qui ne les rend pas statistiquement indépendantes. Les sources virtuelles sont les signaux enregistrés en V3 et V7. Ces sources sont obtenues lorsque les pots fonctionnent indépendamment.

L'étude est donc réalisée sur des bandes étroites de fréquences; autour de 70, 110Hz et 320Hz.

Modes	Fréquences réelles (Hz)	Fréquences numériques après recalage (Hz)	Écart relatif (%)
1	18.7	19.3	1.71
2	50.6	52.3	1.65
3	118.7	118.5	0.08
4	181.2	184.5	0.90
5	192.5	193.9	0.36
6	334.4	334.2	0.03
7	355.1	354.3	0.13
8	400.7	398.6	0.26
9	485.6	484.5	0.11

TAB. III.2 – Comparaison des fréquences identifiées et numériques après recalage.

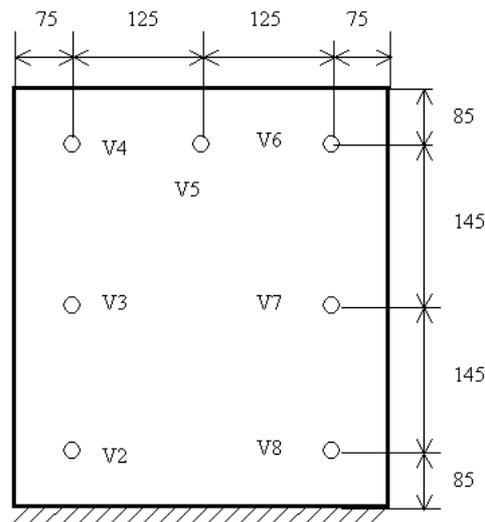


FIG. III.4 – Position des accéléromètres et du point d'excitation des pots vibrants.

III.3.4 Vérification de la linéarité de la structure

Il est nécessaire, au préalable, de vérifier la linéarité du système MIMO pour chacune des fréquences étudiées (c'est-à-dire 70, 110, et 320Hz). On rappelle que la restitution n'est possible qu'à partir d'un système linéaire, $\{Y(\omega)\} = [H(\omega)].\{X(\omega)\}$. Pour cela nous traçons l'évolution de la sortie en fonction de l'entrée lorsque que la force augmente. L'obtention d'une droite signifie la linéarité du système. Nous vérifions cette linéarité sur des bandes de fréquences étroites autour des fréquences d'études, 70Hz, 110Hz et 320Hz. La figure III.5 justifie la linéarité pour une de ces fréquences, 110Hz. Ceci est justifié par le cas simple que nous traitons.

III.3.5 Détermination des cartes de conditionnement

III.3.5.1 Principe

Le système est régi par deux sources réelles, ainsi on opte pour un système MIMO carré avec deux sources virtuelles et deux observations. Une première observation est fixée au point V5 de

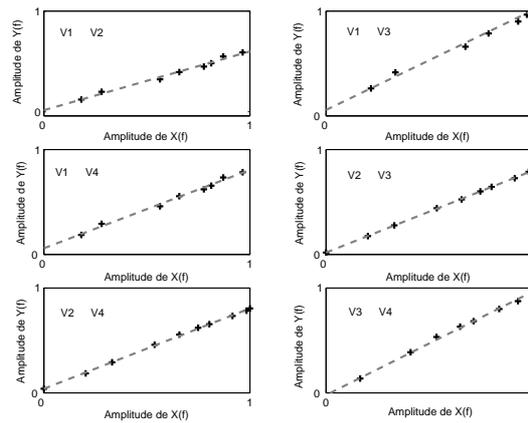


FIG. III.5 – Vérification de la linéarité de la structure.

la structure, figure III.4. Sa position est choisie de telle sorte que la symétrie du système soit respectée, ce qui permettra d'appréhender au mieux les résultats. Désormais, nous déterminons les cartes de conditionnement pour les deux approches, numérique et expérimentale, décrites précédemment, et que nous allons confronter.

III.3.5.2 Approche numérique

Détermination de la carte de conditionnement

La première observation est fixée en V5 pour les raisons citées précédemment. La deuxième balaie tous les nœuds de la structure, faisant varier la matrice de mélange et, par conséquent, le nombre de conditionnement. Chaque nœud de la structure correspond à un nombre de conditionnement d'où la création d'"une carte de conditionnement". Celle-ci représente la plaque avec une représentation en ligne de niveaux des nombres de conditionnement, figure III.6.a,b,c,d.

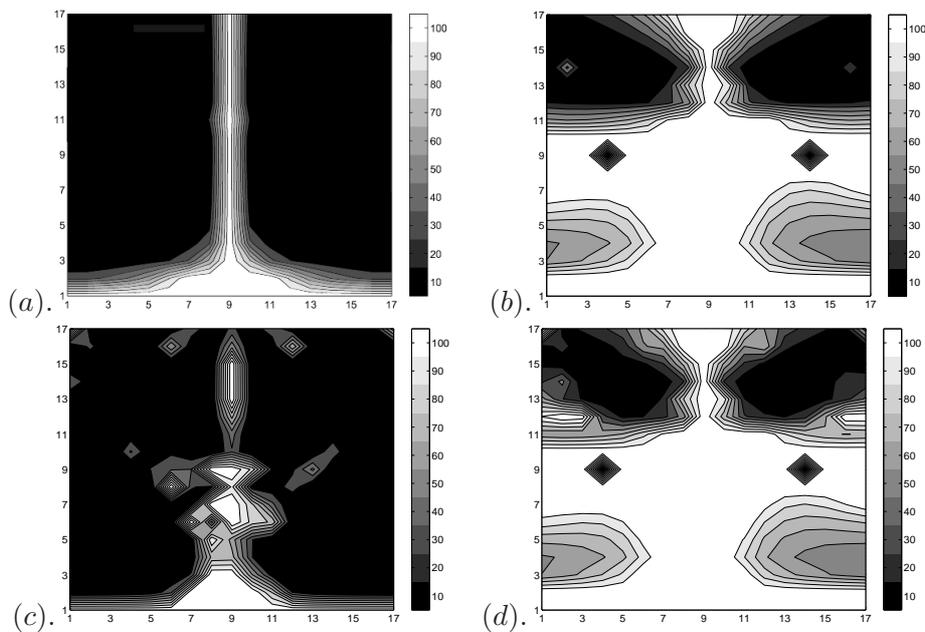


FIG. III.6 – Carte de conditionnement, représentant les iso-valeurs des nombres de conditionnement pour (a) 70Hz, (b) 110Hz, (c) 320Hz. (d) Carte globale.

Les taches très sombres représentent des zones bien conditionnées. Notons que ces cartes sont différentes suivant la fréquence étudiée. La carte pour 70Hz permet un large choix quant à la position de l'observation tandis que la carte pour 110Hz présente une zone plus restreinte. Ces cartes peuvent être réalisées, soit pour chacune des fréquences, figure III.6.a,b,c, soit de manière globale, superposant les diverses cartes, figure III.6.d, où le nombre de conditionnement global est calculé à partir des nombres de conditionnement calculés pour chacune des fréquences, équation (III.33).

$$c_{global}(i, j) = \max(c_{70Hz}(i, j), c_{110Hz}(i, j), c_{320Hz}(i, j)) \quad (III.33)$$

$c_{70Hz}(i, j)$ représente le terme (i, j) de la carte de conditionnement autour de la fréquence de 70Hz. Nous avons constaté que les zones où le nombre de conditionnement est inférieur à 20 correspondent à une zone où l'observation doit être placée pour obtenir une bonne restitution des sources. Chacune des deux méthodes apporte leurs informations. La première méthode permet d'obtenir un critère quant à la qualité de la restitution de chaque bande de fréquences. Si l'observation est placée au point V2, le bon conditionnement de la matrice pour les fréquences 70 et 320Hz signifie que la restitution pour ces fréquences sera satisfaisante. Par contre, le conditionnement pour la fréquence de 110Hz causera l'accentuation des erreurs commises sur les données des observations et de la matrice de transmissibilité. La méthode globale nous renseigne directement sur les positions optimales des observations afin d'obtenir le plus petit conditionnement possible, sans fournir d'informations sur la restitution des différentes fréquences.

Evolution d'une carte

L'approche numérique nous offre la possibilité de réaliser relativement rapidement une carte de conditionnement. Ainsi, il est intéressant de voir l'évolution de cette carte de conditionnement sur une bande de fréquences choisie arbitrairement : 50-300Hz, figure III.7.

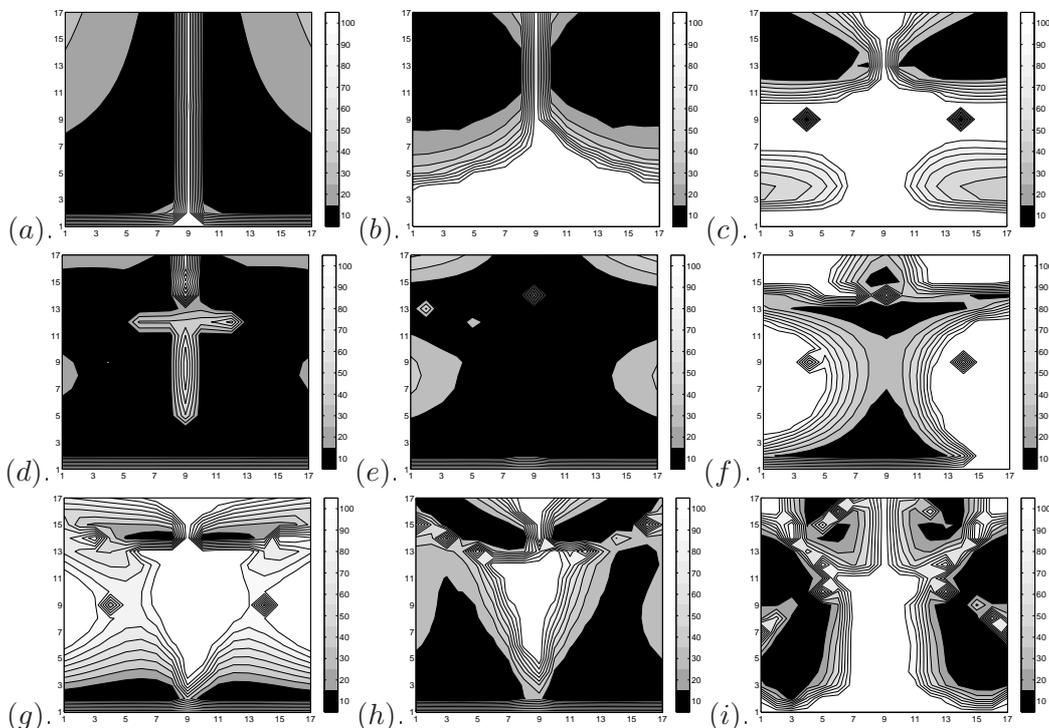


FIG. III.7 – Evolution de la carte de conditionnement sur la bande de fréquences 50-300Hz. (a) 50Hz, (b) 80Hz, (c) 110Hz, (d) 140Hz, (e) 170Hz, (f) 200Hz, (g) 230Hz, (h) 260Hz, (i) 290Hz.

Pour la plaque, les cartes évoluent très vite. Ceci s'explique par le fait que les cartes sont

réalisées sur une bande de fréquences où il existe 5 modes propres, d'où un changement fréquent des modes dominants. On peut constater que certaines cartes sont plus complexes que d'autres, du fait d'un nombre de modes dominants élevé à cette fréquence. Alors que certaines cartes possèdent une zone large pour la position de la deuxième observation, d'autres proposent une zone très restreinte n'offrant que très peu de possibilités. Remarquons que certaines cartes ne sont pas totalement symétriques alors que l'observation fixe a été placée de façon à obtenir des cartes symétriques. Ceci est dû au maillage, figure III.2, qui lui n'est pas parfaitement symétrique.

III.3.5.3 Approche expérimentale

A partir du mode opératoire décrit dans la section 3.2, des zones d'optimisation seront déduites pour une bande de fréquences étroite autour de 70Hz. D'abord, les modes dominants sont déterminés pour simplifier la relation à vérifier. Ensuite, la disposition des observations est déduite.

Recherche des modes dominants

La recherche des modes dominants est primordiale pour déduire la relation utile à notre cas et pour construire la carte de conditionnement. Pour déterminer la contribution de chaque mode, l'écriture de la fonction de transmissibilité est simplifiée en considérant l'entrée fixe. Ainsi, la fonction de transmissibilité ne dépend que de j , équation (III.34) à partir de laquelle l'équation (III.35), permettant le calcul de contribution, est déduite.

$$t_{i \rightarrow j}(j) = \sum_m a_m(i, \omega) \phi_m(j) \quad (\text{III.34})$$

$$\% \text{contribution}_p = \frac{a_p(i, \omega)}{\sum_k a_k(i, \omega)} \quad (\text{III.35})$$

La détermination des modes de la structure est réalisée à partir de l'identification modale expérimentale et de la toolbox SDT Balmès. Cette toolbox définit par expansion les déformées propres expérimentales de la plaque. Ensuite, une excitation sinusoïdale de fréquence 70Hz est simulée et appliquée sur les nœuds du modèle obtenus pour déterminer les fonctions de transmissibilité. Comme le système sources-observation 1 est symétrique les fonctions de transmissibilité sont identiques, c'est-à-dire $t_{x_1 \rightarrow y_1} = t_{x_2 \rightarrow y_1}$. Une régression linéaire multiple est réalisée entre les déformées propres expérimentales et chacune des fonctions de transmissibilité afin de définir la contribution de chaque mode pour ces fonctions. Le tableau III.3 indique la contribution des 10 premiers modes et montre que seuls les trois premiers modes interviennent à raison de 92.2%. Il y a donc trois modes dominants.

Modes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(%)	19.5	51.8	20.9	6.50	0.37	0.34	0.32	0.01	0.25	0.01

TAB. III.3 – Contribution en % de chacun des modes.

La connaissance de la forme des déplacements modaux est primordiale pour la suite de la construction. Les trois modes sont illustrés par la figure III.8. Les modes un et trois sont des modes de flexion tandis que le mode deux est un mode de torsion.

Le problème se résume à un système à deux sources, deux observations et trois modes, c'est

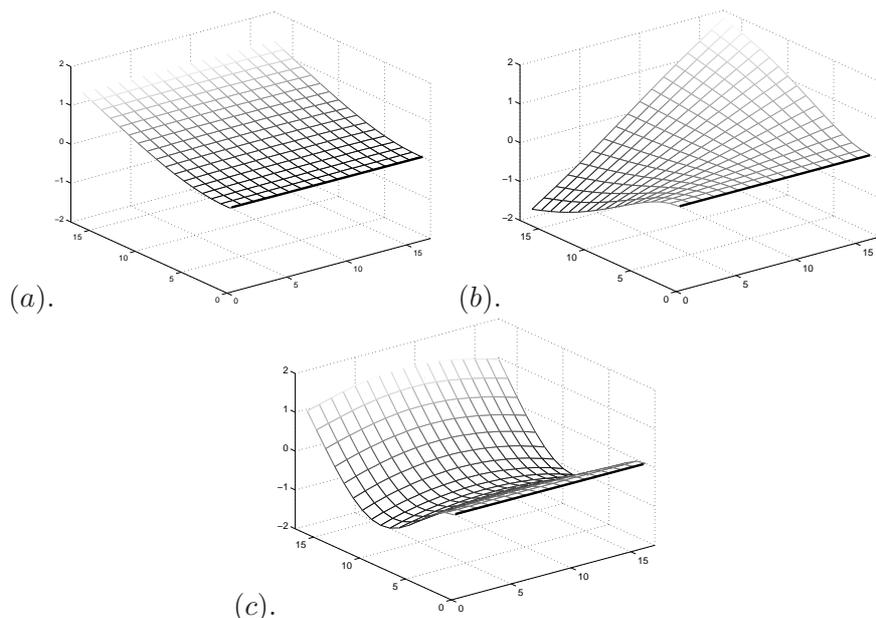


FIG. III.8 – (a) Mode 1, (b) Mode 2, (c) Mode 3 de la plaque encastée-libre.

pourquoi il est déduit de l'équation (III.21), l'équation simplifiée (III.36).

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{D_1 D_2} (\phi_1(y_1)\phi_2(y_2) - \phi_1(y_2)\phi_2(y_1))(\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) - \phi_1(x_2)\phi_2(x_1)) \right. \\ & + \frac{1}{D_1 D_3} (\phi_1(y_1)\phi_3(y_2) - \phi_1(y_2)\phi_3(y_1))(\phi_1(x_1)\phi_3(x_2) - \phi_1(x_2)\phi_3(x_1)) \\ & \left. + \frac{1}{D_2 D_3} (\phi_2(y_1)\phi_3(y_2) - \phi_2(y_2)\phi_3(y_1))(\phi_2(x_1)\phi_3(x_2) - \phi_2(x_2)\phi_3(x_1)) \right\|_2 \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

avec $D_i = -\omega^2 m_i + i\omega c_i + k_i$

La vérification de cette formule va permettre de dégager des zones d'optimisation. Pour manipuler cette équation, il est nécessaire d'effectuer des simplifications en considérant les déformées propres et les symétries du système. Nous abordons cette simplification à travers la section suivante.

Mise en évidence de zones d'optimisation

La connaissance des déformées propres (figure III.8), et de la position des sources virtuelles entraînent de nombreuses simplifications de l'équation (III.36). Les modes 1 et 3 sont symétriques, donc la déformée de chacun de ces modes sur le point de la première source est identique à celle de la deuxième source. Par contre, ces déformées seront contraires pour le deuxième mode. Le choix de la position de l'observation 1 n'est pas arbitraire, elle est placée en V5 pour avoir une déformée propre nulle. Le tableau III.4 décrit les différentes informations que nous apporte la position des sources et de la première observation

Cause	Conséquence
Position du capteur 1	$\phi_2(y_1) = 0$
Mode 1	$\phi_1(x_1) = \phi_1(x_2)$
Mode 2	$\phi_2(x_1) = -\phi_2(x_2)$
Mode 3	$\phi_3(x_1) = \phi_3(x_2)$

TAB. III.4 – Simplifications dues aux caractéristiques du système.

Ces informations, insérées dans l'équation (III.36), permet de la simplifier donnant ainsi

l'équation (III.37).

$$\left\| \frac{1}{D_1 D_2} (\phi_1(y_1) \phi_2(y_2)) (2\phi_1(x_1) \phi_2(x_2)) + \frac{1}{D_2 D_3} (-\phi_2(y_2) \phi_3(y_1)) (2\phi_2(x_1) \phi_3(x_2)) \right\|_2 \neq 0 \quad (\text{III.37})$$

La seule variable est le déplacement modal du deuxième mode au point de la deuxième observation. Ainsi, il en ressort que $\phi_2(y_2)$ doit être différent de zéro. Ceci signifie que l'observation 2 peut être placée n'importe où sur la plaque sauf sur les nœuds de vibrations du mode 2 (points pour lesquels la déformée propre est nulle), soit sur la base de la plaque et sur l'axe central. Une carte de conditionnement peut être déduite, figure III.9. Celle-ci est très significative de la position optimale de la deuxième observation, et correspond bien à la carte obtenue par l'approche numérique, figure III.6.a. L'axe central ainsi que la zone proche de l'encastrement sont des zones mal conditionnées.

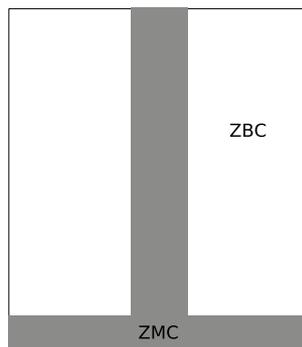


FIG. III.9 – Carte de conditionnement réalisée par l'approche expérimentale.

Notons que si le nombre de modes dominants est petit, il est possible de déterminer une carte de conditionnement moyennant une bonne disposition des sources.

La réalisation de la carte de conditionnement paraît difficile dans de nombreux cas, car elle nécessite de connaître le nombre de modes dominants et la déformée de chaque fonction de transmissibilité composant la matrice de transmissibilité, ce qui semble peu aisé. Sa construction sur une structure plus complexe pourra nous éclairer sur ce sujet.

III.3.6 Restitution des sources virtuelles

III.3.6.1 Descriptions sources et observations

Les excitations sont sinusoïdales, de fréquences 70, 110Hz pour la source 1 et 110, 320Hz pour la source 2. Les sources virtuelles sont enregistrées aux points V3 et V7. Ainsi, les spectres de ces signaux présentent respectivement les fréquences 70, 110Hz et les fréquences 110, 320Hz, figure III.10. La restitution est réalisée à partir de plusieurs choix d'observations correspondant à un cas d'inversion stable (**ZBC**, Zone Bien Conditionnée), un cas d'inversion instable (**ZMC**, Zone Mal Conditionnée) et un cas avec un système surdéterminé dont les combinaisons sont répertoriées dans le tableau III.5.

Les observations sont le résultat des deux excitations dont les trois fréquences d'étude sont présentes dans le spectre du signal comme l'indique la figure III.10.b.

III.3.6.2 Restitution par la méthode proposée à l'aide d'un système carré

Ce paragraphe illustre des restitutions dans le cas d'une position optimisée et d'une position non optimisée. La figure III.11 montre le spectre en fréquences des signaux sources restituées et

	Sources virtuelles	Observations
ZBC	V3, V7	V4, V5
ZMC	V3, V7	V2, V5
Surdéterminé	V3, V7	V2 à V7

TAB. III.5 – Choix des observations dans le cadre de la restitution.

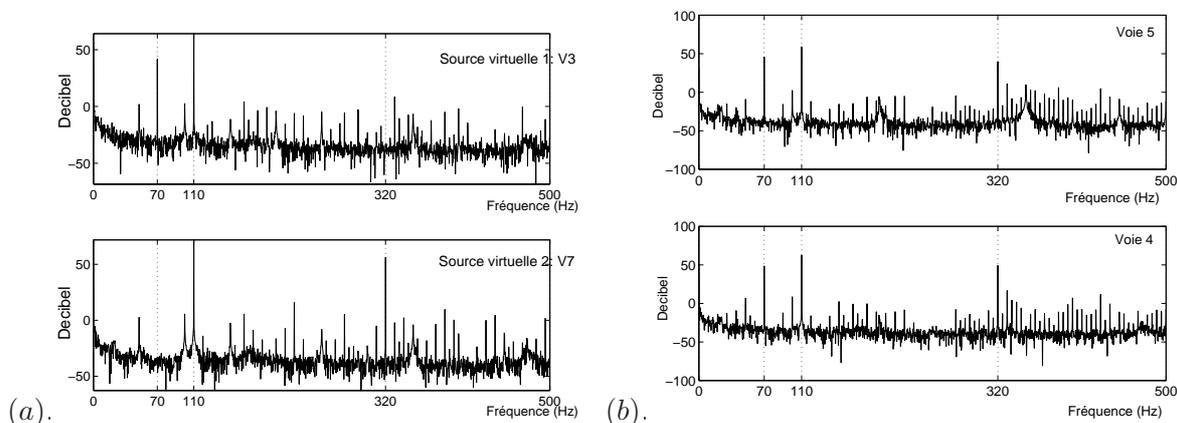


FIG. III.10 – (a) Spectres des signaux sources en V3 et V7, (b) Spectres des observations en V5 et V4.

mesurées. Les spectres sont zoomés sur les plages d'études pour mieux appréhender les résultats. Le tableau III.6 répertorie les erreurs relatives entre les sources virtuelles mesurées et les sources virtuelles restituées pour, soit chacune des bandes étroites de fréquences étudiées, soit l'ensemble de ces bandes. Les cases remplies d'un tiret "-" correspondent à l'inexistence de la raie spectrale à cette fréquence d'où l'inutilité de calculer l'erreur.

En observant l'erreur relative globale, la restitution à partir d'une **ZMC** donne des résultats peu satisfaisants, avec une erreur proche des 20%. Par contre, dans une **ZBC**, l'erreur baisse à 1%. La stabilité de l'inversion est donc vérifiée et montre ses premiers avantages.

Désormais, intéressons-nous aux erreurs relatives pour chacune des bandes de fréquences étudiées. Les erreurs pour la **ZBC** n'excèdent pas les 4% mais pour la **ZMC**, l'erreur atteint les 56.5%. Donc une erreur relative sur une bande étroite peut être masquée par une erreur relative sur l'ensemble des bandes par effet de compensation. Nous notons également que les grandes erreurs de restitution sont sur la bande autour de 110Hz. Ceci s'explique par les cartes de conditionnement obtenues par l'approche numérique, figure III.6. Effectivement, d'après ces cartes, les fréquences 70Hz et 320Hz sont sujettes à une bonne stabilité face à l'inversion, contrairement à la fréquence 110Hz, c'est pourquoi l'inversion à cette fréquence peut être vouée à l'échec. Et ceci sera d'autant plus vrai si les observations ou les fonctions de transmissibilité sont contaminées par du bruit. Nous rappelons que l'instabilité ne signifie pas nécessairement mauvaise restitution. Effectivement, s'il n'y a pas d'erreurs sur les données à inverser, la restitution sera satisfaisante malgré l'instabilité. Cependant, en pratique, les bruits de mesures sont fréquents. Ainsi, les notions de stabilité et d'inversion sont intimement liées.

III.3.6.3 Restitution par système surdéterminé avec une régularisation type L-Curve

Les résultats de restitution par notre méthode **ZBC** et par la méthode du système surdéterminé sont comparés. Les sept observations sont ainsi utilisées, dont la disposition est relativement

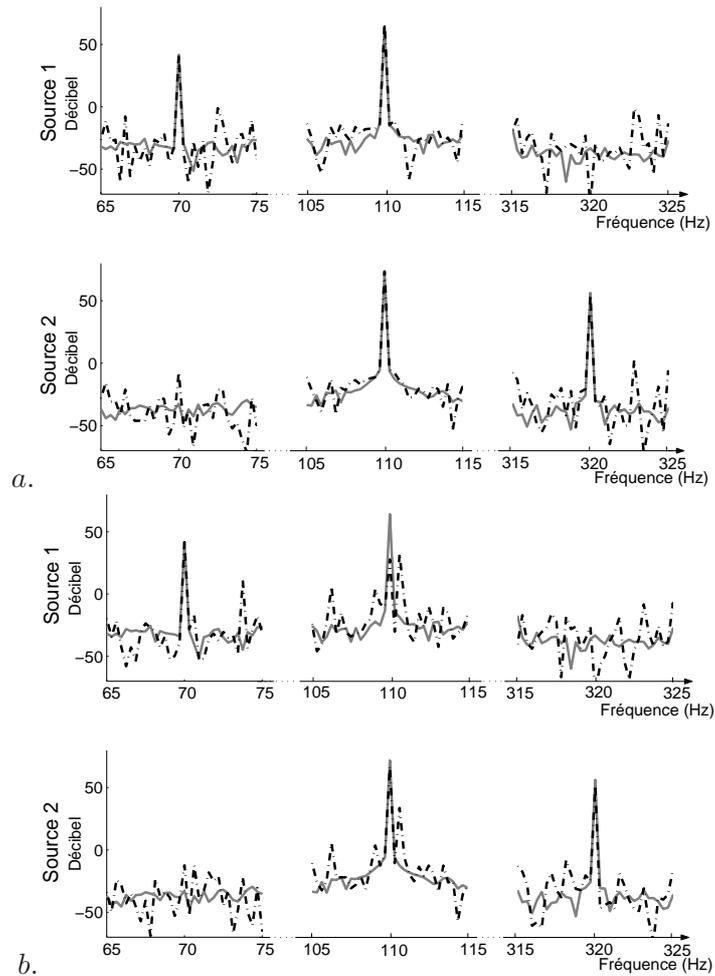


FIG. III.11 – Comparaison de la restitution à partir d’une zone bien et mal conditionnée. Sources restituées à partir de la voie : (a) V4 (**ZBC**) et (b) V8 (**ZMC**). (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

large comme le préconise la littérature sur son utilisation. Les fonctions de transmissibilité sont par conséquent au nombre de quatorze. Notons que cette remarque oblige un plus grand nombre de calcul. La L-Curve est tracée pour des valeurs de β comprises entre 0.1 et 20, figure III.12. Nous rappelons que la valeur de β optimale est obtenue à l’endroit où le changement de pente est le plus important, d’où $\beta=11.7$.

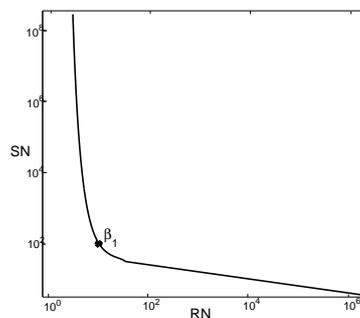


FIG. III.12 – La méthode L-Curve, détermination du paramètre de régularisation.

Comparaison 1	ZBC				ZMC			
	70Hz	110Hz	320Hz	global	70Hz	110Hz	320Hz	global
Erreur x_1 (%)	0.1	3.7	-	-1.8	0	56.5	-	34.2
Erreur x_2 (%)	-	2.2	2.5	0.2	-	6.7	8.0	7.3
Erreur globale(%)	0.93				19.5			
Comparaison 2	Surdéterminé				ZBC			
	70Hz	110Hz	320Hz	global	70Hz	110Hz	320Hz	global
Erreur x_1 (%)	1.2	5.5	-	3.3	0.1	3.7	-	-1.8
Erreur x_2 (%)	-	4.4	0.7	2.1	-	2.2	2.5	0.2
Erreur globale(%)	3.2				0.93			
Comparaison 3	Surdéterminé (perturbé)				ZBC (perturbé)			
	70Hz	110Hz	320Hz	global	70Hz	110Hz	320Hz	global
Erreur x_1 (%)	75	0.1	-	29.0	11.3	9.33	-	1.81
Erreur x_2 (%)	$+\infty$	30.4	29.7	1.54	-	10.5	24.0	8.20
Erreur globale(%)	12.2				5.31			

TAB. III.6 – Comparaisons entre les méthodes avec et sans perturbations extérieures. (Comparaison 1) Comparaison entre une zone bien conditionnée et une zone mal conditionnée, (Comparaison 2) Comparaison entre une zone bien conditionnée et une méthode régularisante, (Comparaison 3) Comparaison entre une zone bien conditionnée et une méthode régularisante avec perturbation extérieure. x_1 et x_2 représentent les sources virtuelles.

Les résultats de l'identification sont présentés en figure III.13 et en tableau III.6. Ils sont directement confrontés aux résultats générés par notre méthode à partir d'une **ZBC**. La méthode régularisante par la méthode L-Curve présente de bons résultats face aux possibles perturbations de mesures, l'erreur ne s'élève qu'à 3.2%, même si l'ordre de grandeur pour la méthode **ZBC** est de seulement 1%. Dans les deux cas, les erreurs les plus élevées se trouvent sur la bande autour de 110Hz.

III.3.6.4 Stabilité face à une perturbation extérieure

Une perturbation est numériquement introduite sur le vecteur des observations. Cette perturbation est un bruit blanc. La restitution est réalisée par la méthode L-Curve et par la méthode proposée **ZBC** en figure III.14. Les erreurs relatives sont répertoriées dans le tableau III.6. A partir de la méthode décrite dans ce chapitre, l'erreur relative globale s'élève à 5.31% seulement. Par contre l'erreur globale commise par la méthode par la L-Curve est de 12.2%, soit une erreur 2 fois plus importante. Si nous regardons en détails les erreurs pour chacune des fréquences à restituer, l'erreur maximale pour la méthode décrite est de 24% tandis que, pour la L-Curve, l'erreur est de 75%. De plus, une raie à la fréquence de 70Hz sur la seconde source est restituée alors qu'elle n'existe pas d'où la notation " $+\infty$ ". Notons que l'erreur relative globale peut s'avérer plus petite que les erreurs relatives pour chaque pic de fréquence car il peut y avoir des compensations lors des sommations des énergies spectrales.

La méthode décrite dans ce chapitre paraît plus performante qu'une méthode utilisant un système surdéterminé combiné à une méthode de régularisation. Les signaux de certains accéléromètres sont apparemment préjudiciables à la restitution provoquant un système mal conditionné. Le tableau III.7 englobe les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

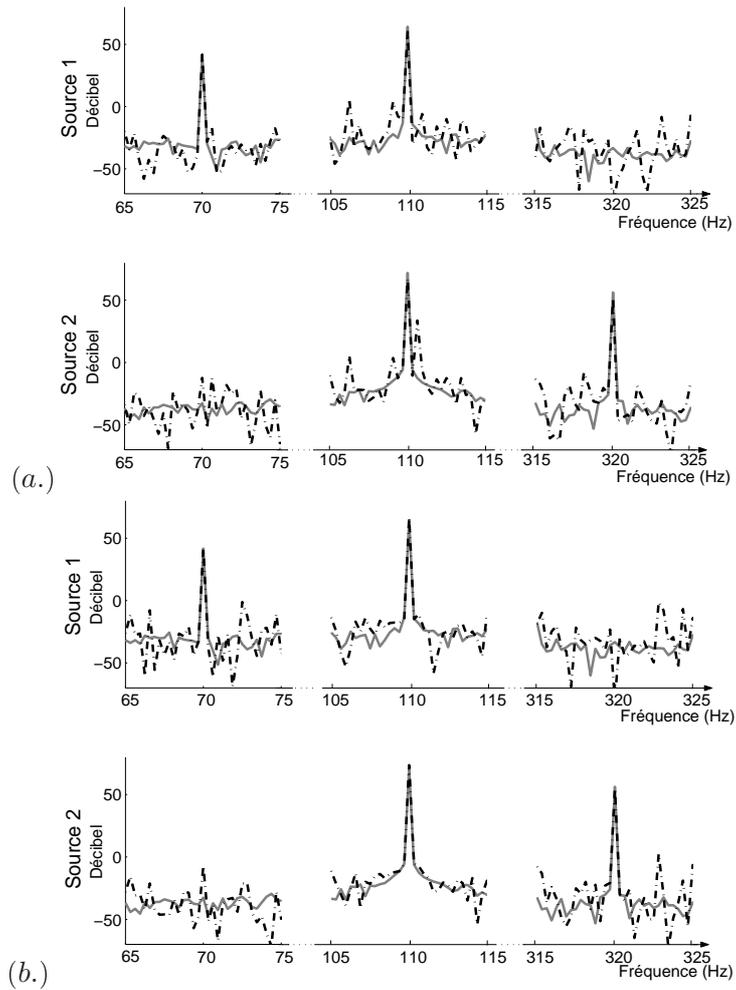


FIG. III.13 – Comparaison entre la méthode L-Curve et la méthode proposée **ZBC** sans perturbation extérieure. Spectres des sources restituées, (a) par méthode de régularisation, (b) par **ZBC**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

	Restitution avec régularisation	Restitution ZBC
Nombre de capteurs	Nombre important	Équivalent aux sources
Restitution	Dans une large bande	Dans une bande étroite
Stabilité de l'inversion	Bonne	Très bonne
Mise en œuvre	Facile	Difficile

TAB. III.7 – Tableau récapitulatif sur les caractéristiques des deux méthodes.

III.3.6.5 Conclusion intermédiaire

La restitution par la méthode décrite **ZBC** présente des résultats satisfaisants par rapport à une méthode **ZMC** (ce qui est facilement justifiable) et par rapport à une méthode dite de régularisation. Ceci s'explique par la "détérioration" du modèle de mélange par la régularisation. On tente de rendre une inversion stable sans en connaître les conséquences physiques. Notre travail consiste à conserver l'ensemble des informations fournies par ce système et pour cela, nous tentons de rendre stable l'inversion en changeant le problème, à travers la position des capteurs.

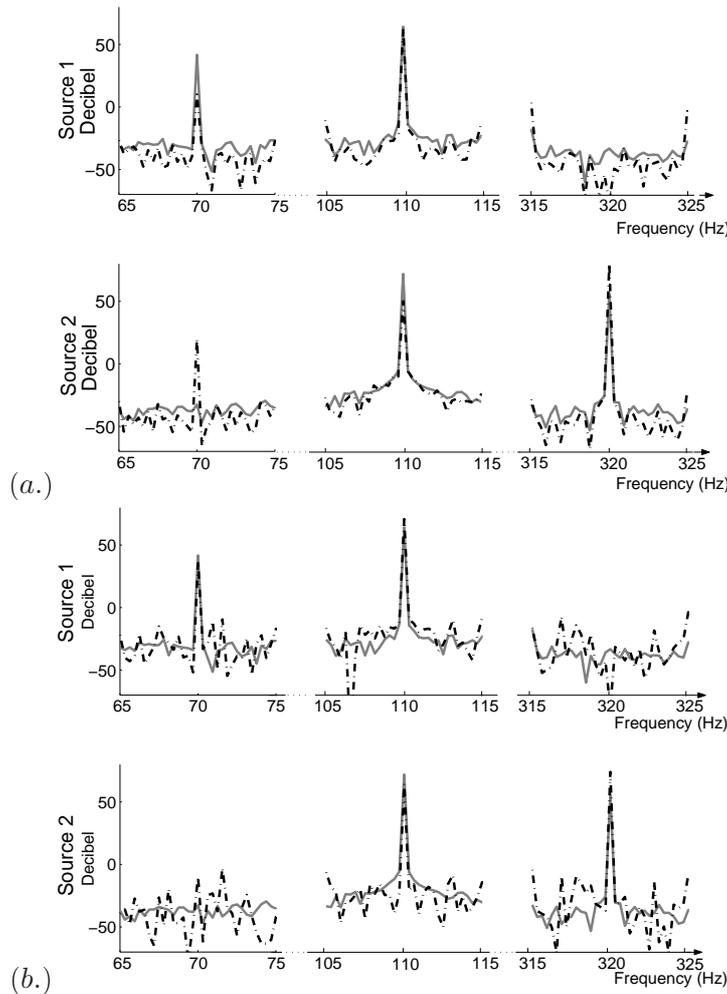


FIG. III.14 – Comparaison entre la méthode L-Curve et la méthode proposée **ZBC** avec la présence d'une perturbation extérieure. Spectres des sources restituées, (a) par méthode de régularisation, (b) par **ZBC**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

III.4 Conclusion

Ce chapitre élabore deux approches pour stabiliser l'inversion dans le cadre de la restitution des sources vibratoires. Ces approches sont de natures différentes, numérique et expérimentale. Elles définissent des cartes en lignes de niveaux ("cartes de conditionnement") révélant des zones adéquates au placement des capteurs. La mise en corrélation de ces approches a mis en évidence deux points importants dans la compréhension des "cartes de conditionnement" :

- la notion de modes dominants,
- la relation entre nombre de conditionnement et la position des observations à travers l'analyse modale.

L'approche numérique présente une méthodologie relativement simple. Elle nécessite seulement un modèle numérique recalé. La deuxième approche est purement expérimentale mais plus contraignante. Sa mise en œuvre demande plusieurs étapes :

- réaliser l'analyse modale de la structure,
- déterminer le nombre de modes dominants pour chacune des fréquences de défauts dont la présence est possible,
- sur n capteurs, positionner $(n-1)$ capteurs sur des nœuds de vibrations pour faciliter la

manipulation de l'inéquation (III.36) permettant de placer le n -ième capteur. Cette approche expérimentale nécessite de connaître un nombre de nombres dominants qui doit être relativement restreint pour manipuler l'inéquation proposée. Si ce nombre est trop élevé la manipulation de l'inéquation semble difficile et s'avère être une limite de l'approche.

L'étude d'une plaque est simplifiée de part sa géométrie, ce qui a permis une compréhension du phénomène de restitution. C'est pourquoi une étude sur une structure plus complexe s'inscrit dans la suite de ce chapitre afin de valider l'utilisation des approches proposées. Le chapitre suivant concerne l'étude numérique et expérimentale d'un carter constitué de deux roulements accouplé à un moteur.

Chapitre IV

Analyse numérique et expérimentale d'un carter sans action du moteur

IV.1 Introduction

Ce présent chapitre ainsi que le suivant ont pour objectif de valider les approches développées dans le chapitre précédent sur un cas industriel. Pour y parvenir nous avons utilisé un carter constitué de deux paliers à roulements accouplés ou non à un moteur. La validation va être effectuée en trois grandes étapes :

- les sources vibratoires sont simulées par des pots vibrants sans accouplement moteur,
- les sources vibratoires sont simulées par des pots vibrants avec accouplement moteur,
- les sources vibratoires sont des roulements endommagés.

Pour plus de clarté, cette étude est scindée en deux parties faisant chacune l'objet d'un chapitre (4 et 5). La première partie concerne le carter dissocié du moteur et la seconde partie concerne le même carter lié au moteur par un accouplement, élément mécanique qui joue le rôle ici de perturbateur.

Après une description du banc expérimental, un modèle numérique recalé illustrant ce banc expérimental est proposé. Ensuite, la mise en œuvre des approches proposées précédemment est réalisée et elles sont comparées à la méthode du système surdéterminé avec un paramètre de régularisation.

IV.2 Description, analyse modale et recalage du module roulement

IV.2.1 Caractéristiques du banc

La structure étudiée est un module disposé sur une plate forme d'essais né d'un contrat état région intitulé "SURVIB", SURveillance de machines industrielles par diagnostic VIBratoire dans une stratégie de maintenance prédictive. Ce projet entre dans le cadre d'un financement de "Contrat Plan État Région" sur 4 ans correspondant au plan quadriennal 2003-2007. "SURVIB" mobilise 18 chercheurs de compétences diverses : le traitement du signal (CReSTIC¹), la mécanique vibratoire (GMMS/LMA²), la mécanique numérique (GMMS/LMN). Deux industriels ont également pris part à ce projet, l'entreprise Altéad Industries Est, prestataire de services en ingénierie de maintenance à Reims et le CETIM, Centre d'Etudes Techniques des Industries

¹<http://crestic.univ-reims.fr/>

²<http://lma.univ-reims.free.fr/>

Mécaniques de Senlis. Cette plate-forme est vouée à la validation de nouvelles méthodes de séparation de sources [ElRh 05], à l'élaboration de méthodes d'inversion [Chie 07b], [Chie 07c] et de détection [Chie 07d], [Chie 07a], à la validation de nouvelles lois d'endommagement, à l'élaboration de modèles numériques intégrant l'endommagement par fatigue...

La plate-forme d'essai "SURVIB" est composée d'un bâti massif en béton sur lequel sont insérés une plaque rainurée en acier, deux modules de motorisation de 10kW, dont un moteur frein, des modules démontables d'étude de composants mécaniques (un module détection de défauts de roulements, un module détection de défauts d'engrenages, un module fatigue roulement, un module de fatigue d'engrenages), figure IV.2.1.

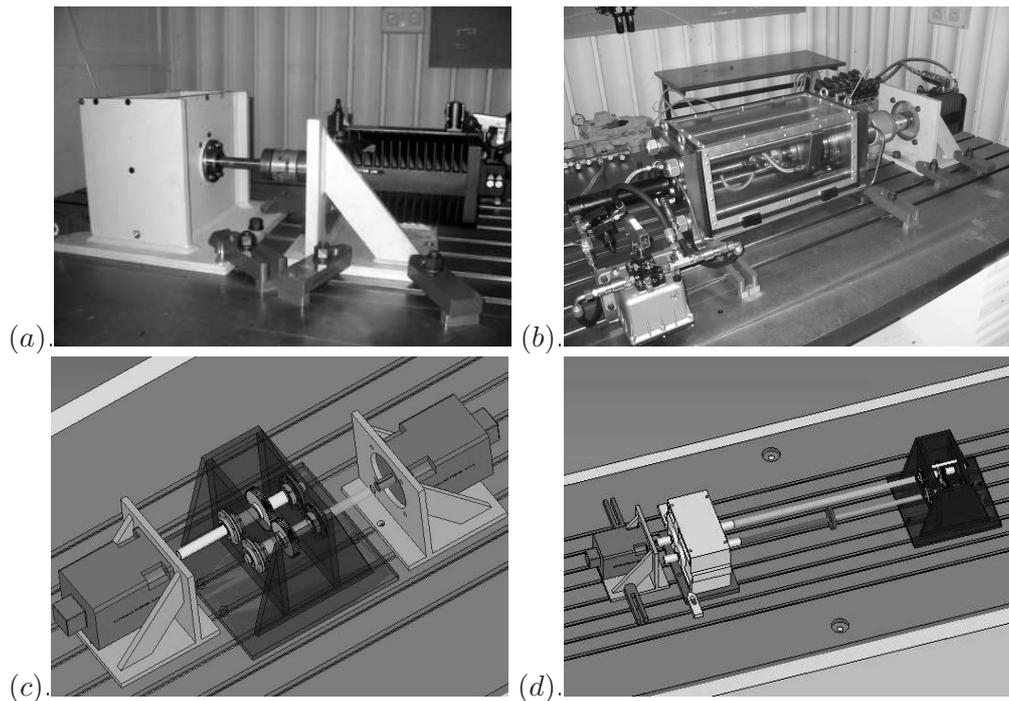


FIG. IV.1 – (a) Module de détection de défauts de roulements. (b) Module de fatigue de roulements. (c) Module de détection de défauts d'engrenages. (d) Module de fatigue d'engrenages.

Cette thèse s'appuie sur l'étude du module détection de défauts de roulements, figure IV.1.a. Le module est composé de deux paliers à roulements 6206 qui joueront le rôle de sources excitatrices dans le chapitre 5. Dans un premier temps, la construction d'un modèle numérique est réalisée, ce qui nécessite une analyse modale et un recalage. Dans un deuxième temps, nous appliquerons les approches d'inversion proposées.

IV.2.2 Modèle numérique et recalage

IV.2.2.1 Description de la démarche

Il a été jugé nécessaire de réaliser un modèle numérique en plusieurs étapes. Chacune d'elles fait intervenir de nouveaux paramètres de recalage et fait appel à une identification modale et à un recalage du modèle. Les 4 étapes du recalage sont réalisées sur :

- le carter en libre-libre,
- l'arbre en libre-libre,
- l'ensemble carter, arbre, roulement en libre-libre,
- l'ensemble encastré sur le banc.

Les deux premières étapes consistent donc à modéliser uniquement le carter puis l'arbre ayant pour principaux paramètres de recalage, les dimensions et les propriétés des matériaux. Ensuite l'ensemble carter, arbre, roulement en libre-libre permet de modifier les paramètres concernant la liaison entre l'arbre et le carter et donc, plus particulièrement, les roulements. Le modèle utilisé est présenté dans une section suivante. Enfin, l'ensemble est encastré, ce qui permet de recaler le modèle numérique par le biais de paramètres liés à l'encastrement.

IV.2.2.2 Carter seul en libre-libre

Le carter est tout d'abord étudié seul, figure IV.2.a. Celui-ci est suspendu par des élastiques qui permettent d'isoler le système de parasites extérieurs. L'instrumentation du carter est réalisée pour identifier les 11 premiers modes situés dans une plage de fréquences de 0 à 1500Hz.

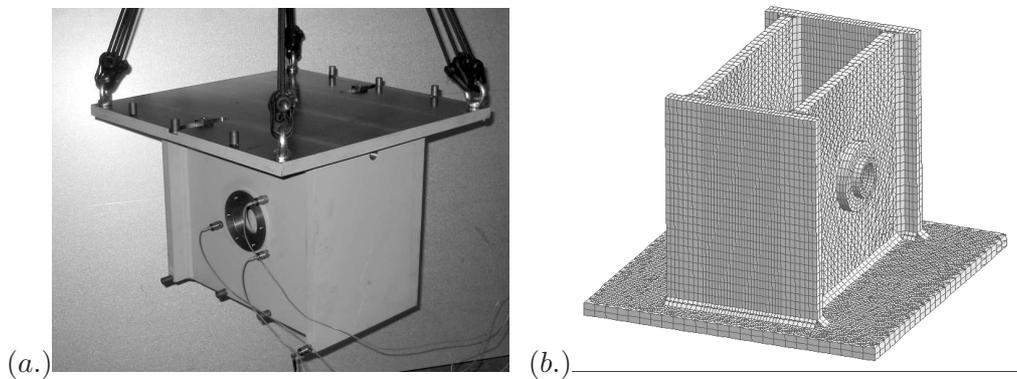


FIG. IV.2 – (a) Module roulement suspendu. (b) Modèle numérique du carter.

Comme il a été introduit au chapitre 1, le nombre d'observabilités (points de mesures) et de commandabilités, ainsi que leur position sont donnés à l'aide d'un modèle numérique (non recalé). C'est pourquoi le modèle numérique et l'analyse modale expérimentale doivent être utilisés simultanément pour réaliser un recalage satisfaisant. Chacun des modèles peut nous informer quant à la conduite à suivre pour réaliser l'analyse modale. Ce modèle numérique est constitué de 17000 éléments volumiques à 8 nœuds, figure IV.2.b. Nous avons choisi un modèle numérique présentant un nombre d'éléments important pour faciliter la modélisation, notamment pour l'introduction des soudures. L'utilisation d'éléments plaque pour les supports et la base aurait pu être judicieuse, cependant les résultats furent très satisfaisants pour la version comprenant des éléments volumiques solides.

En ce qui concerne le nombre et la position des observabilités, il a été montré en chapitre 1 que l'emploi de la matrice des MAC permet de vérifier la décorrélation des modes que l'on souhaite observer. Ainsi les termes extra-diagonaux de cette matrice devraient être nuls. La disposition de 10 observabilités et l'emploi d'une commandabilité n'offrent pas une identification modale possible car les modes 1 et 7 sont corrélés, figure IV.3.a. Par contre, l'emploi de 25 observabilités offre une décorrélation de tous les modes, figure IV.3.b. Ainsi, l'analyse modale de ce carter nécessite 25 observabilités et 1 commandabilité, soit 25 fonctions réponse en fréquences (FRFs). Or, comme seules 7 voies sont disponibles pour réaliser les acquisitions, il fut nécessaire de procéder à plusieurs vagues de mesures en déplaçant chacune des voies. C'est pourquoi, chaque position non occupée par un capteur est occupée par une masselotte, de même masse, pour compenser.

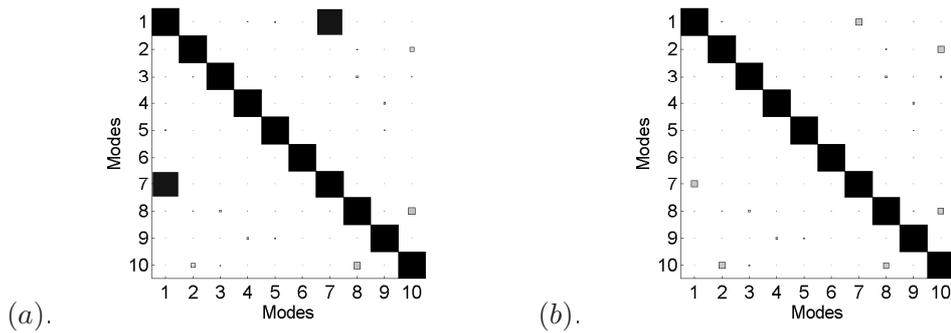


FIG. IV.3 – Matrice des MAC pour (a) 10 observabilités, (b) 25 observabilités.

Identification modale expérimentale

L'identification des modes expérimentaux est réalisée à travers des outils d'analyse avancés : le graphe de Nyquist, le spectre en fréquences, le spectre en phase et les déformées modales par les méthodes d'expansion. Quelques FRFs sont présentées en figure IV.4. Il est à noter que les raies spectrales sont assez distinctes.

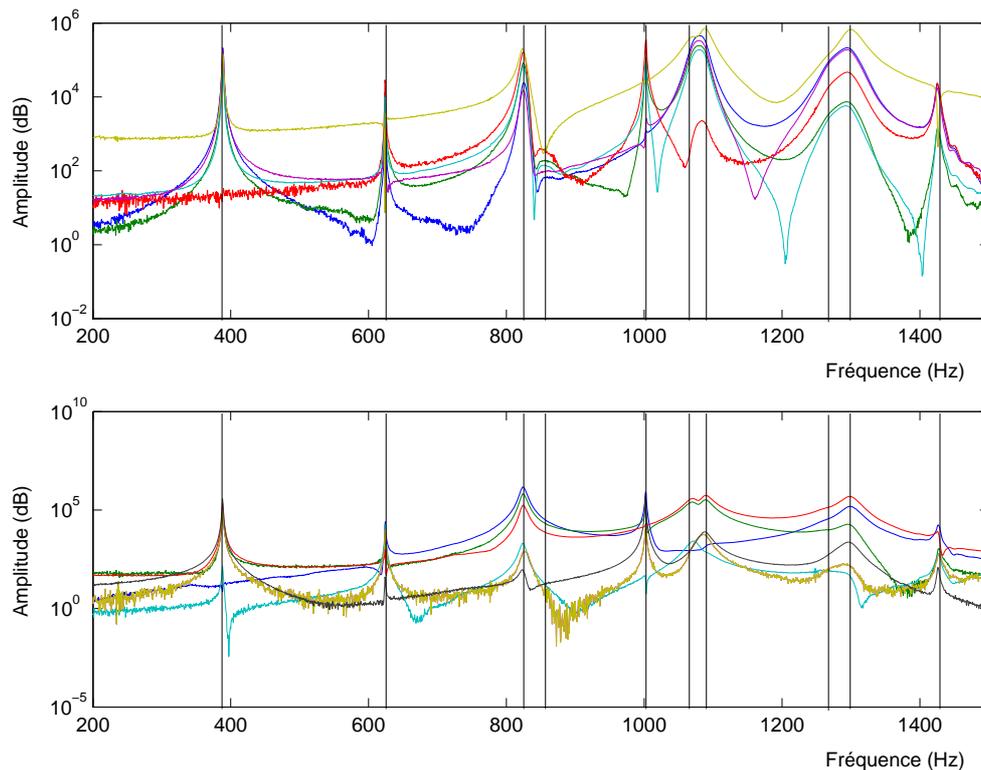


FIG. IV.4 – FRFs du carter seul en libre-libre.

Les résultats de l'identification sont illustrés par le tableau IV.2. Sur la bande 0-1500Hz, 10 modes apparaissent distinctement, la première fréquence étant 388Hz.

Choix du critère de corrélation

La densité modale étant moyenne dans certaines bandes de fréquences, le recalage est effectué sur les fréquences propres et les déformées propres qui seront illustrées par les MAC. Ainsi,

nous allons recaler le modèle numérique en minimisant la fonction objectif quadratique, $f_{objectif}$, équation (IV.1).

$$f_{objectif} = \sum_j \left(\left(\frac{f_{idj} - f_{numj}}{f_{idj}} \right)^2 + \left(\frac{MAC_j - 100}{100} \right)^2 \right) \quad (IV.1)$$

f_{idj} , f_{numj} sont respectivement la j -ième fréquence identifiée et la j -ième fréquence numérique. MAC_j est le j -ième terme diagonal de la matrice des MAC.

Choix des paramètres à recaler

Les paramètres disponibles pour le recalage sont les caractéristiques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson, densité) et la géométrie de la structure (mesures de la base, taille des soudures, dissymétrie entre la base et les montants, épaisseur des montants). La figure IV.5 résume les paramètres géométriques utilisés.

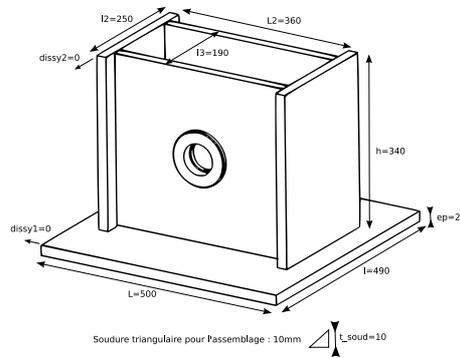


FIG. IV.5 – Paramètres géométriques utilisés pour le recalage.

Recalage

Le tableau IV.1 et la matrice des MAC, figure IV.6, confrontent les résultats numériques et expérimentaux avant et après le recalage. Notons qu'avant le recalage, les résultats sont déjà satisfaisants offrant une erreur relative maximale entre les modes numériques et expérimentaux de 4.17%. Par ailleurs, les valeurs extra-diagonales de la matrice des MAC sont quasi nulles grâce à l'emploi d'un nombre élevé d'observabilités. On constate, néanmoins, que l'identification par l'opérateur influe de manière considérable sur la pertinence des résultats, notamment en ce qui concerne les MAC.

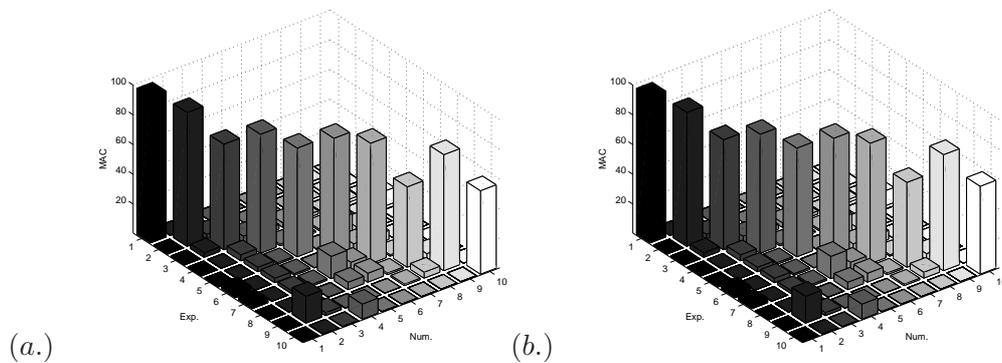


FIG. IV.6 – Matrice des MAC, (a) avant recalage, (b) après recalage.

Le recalage améliore tout de même les résultats présentés dans le tableau IV.1. Les caractéristiques mécaniques voient leurs valeurs évoluer de 2.1% au maximum, tandis que les côtes géométriques voient évoluer leurs valeurs jusqu'à 6%. La dimension concernée est la taille des soudures, passant de 10 à 10.6mm. Il est à noter que la dissymétrie entre les montants et la base, "dissy1", a joué un rôle important dans le recalage, par contre la dissymétrie, "dissy2", contraire le recalage. L'appariement des modes numériques et des modes expérimentaux est amélioré d'après la matrice des MAC, figure IV.6.b. Les termes extra-diagonaux sont faibles (inférieurs à 10%) ce qui prouve l'orthogonalité des modes, et donc un nombre d'observabilités suffisant.

	Avant recalage	Après recalage	Écart relatif
Module d'Young (GPa)	200	203.6	1.8
Coeff. de Poisson	0.290	0.296	2.1
Densité (kg.m ⁻³)	7900.	7913.8	0.2
Taille soudure (tsoud) (mm)	10.0	10.6	6.0
Épaisseur montants-base (ep) (mm)	20.0	19.6	2.0
Dissymétrie base-montants (dissy1) (mm)	0.00	0.45	-
Dissymétrie montant-montant (dissy2)(mm)	0.00	0.00	0.0
Dimension base (L*1) (mm)	490*500	484.8*500	1.1
Largeur coté sans roulement (l2)(mm)	250	248.9	0.4

TAB. IV.1 – Recalage des paramètres du carter.

Exp.	Avant recalage			Après recalage		
	Num.	%	MAC	Num.	%	MAC
388	395	1.80	98	398	2.58	98
624	597	4.17	90	601	3.53	90
823	805	1.60	71	756	1.07	74
829	811	-	80	793	-	80
1001	972	0.82	73	986	0.61	73
1066	1050	2.50	82	1064	0.00	82
1086	1067	2.07	81	1074	0.69	81
1251	1225	2.78	54	1254	0.48	57
1288	1257	2.10	78	1287	0.23	78
1426	1454	2.66	56	1366	1.87	59

TAB. IV.2 – Comparaison des modes propres numériques et expérimentaux du carter.

IV.2.2.3 Arbre seul en libre-libre

L'arbre seul en libre-libre a ensuite été étudié, figure IV.7, avec les propriétés référencées dans le tableau IV.4. L'arbre est suspendu par des élastiques. Le modèle numérique est constitué essentiellement d'éléments poutres, caractérisés par un ensemble de six sections, notées d1, d2, d3, d4, d5, d6, figure IV.9.

Identification modale

L'identification modale nous a amené à tester deux cas. Le premier cas est à proscrire mais il est jugé bon de le présenter pour montrer certaines contraintes de l'analyse modale expérimentale.

- Dans un premier temps (premier cas), huit capteurs ont été placés sur l'arbre afin d'obtenir les fréquences et les déformées modales en vue d'un recalage sur ces deux notions.

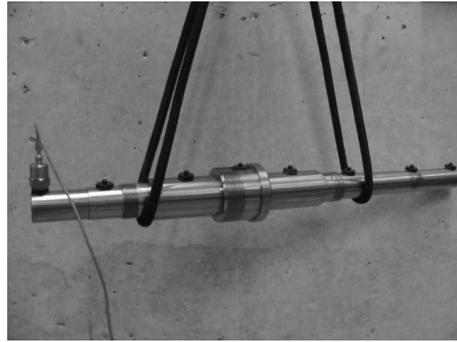


FIG. IV.7 – Modèle expérimental de l'arbre.

Cependant l'emploi d'un grand nombre de capteurs modifie notablement la structure (ceci se traduit par un bruit sourd lors d'un essai au marteau de choc).

- Dans un deuxième temps (deuxième cas), pour limiter le problème énoncé précédemment, seul un capteur est placé pour détecter les résonances de structure sans la modifier. Les FRFs, figure IV.8, montrent une densité modale faible, ce qui signifie qu'un recalage sur les fréquences propres est largement suffisant, et ceci ne nécessite pas le calcul des déformées propres.

Comme nous l'avons indiqué, les FRFs présentent des raies spectrales distinctes et marquées, ainsi il est facile d'identifier trois fréquences de résonances sur la bande 0 – 5000 Hz. Le modèle numérique nous enseigne que ces trois fréquences correspondent à des modes de flexion, tableau IV.3.

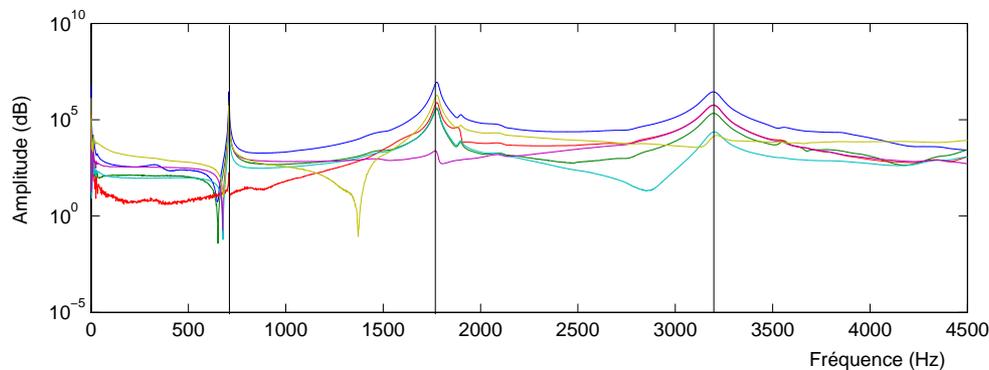


FIG. IV.8 – FRFs sur l'arbre.

Le modèle numérique fournit un mode de torsion à 4186Hz que nous ne pouvons pas visualiser expérimentalement car il n'est pas possible de placer les accéléromètres dans la direction des déplacements engendrés par la torsion.

Choix du critère de corrélation

Le critère de corrélation choisi est la minimisation quadratique entre les fréquences propres car la densité modale est faible.

$$f_{\text{objectif}} = \sum_j \left(\frac{f_{\text{id}j} - f_{\text{num}j}}{f_{\text{id}j}} \right)^2$$

$f_{\text{id}j}$, $f_{\text{num}j}$ sont respectivement la $j^{\text{ème}}$ fréquence identifiée et la $j^{\text{ème}}$ fréquence numérique.

Choix des paramètres à recalcer

Le modèle offre beaucoup de paramètres pour recalcer les trois fréquences. C'est pourquoi, nous devons prendre en compte la signification physique des résultats afin de tendre vers une solution unique. Les paramètres sont, soit liés au matériau (Module d'Young E , densité ρ , coefficient de Poisson ν), soit liés aux données géométriques ($d1$, $d2$, $d4$, $d5$, b , c , k , j), figure IV.9.

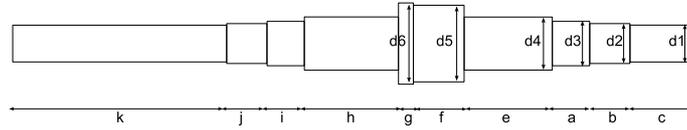


FIG. IV.9 – Cotations de l'arbre.

Exp.	Avant recalage		Après recalage	
	Num.	%	Num.	%
739	745	0.81	739	0.00
1862	1938	9.26	1862	0.00
3285	3418	6.84	3285	0.00

TAB. IV.3 – Comparaison des modes propres numériques et expérimentaux de l'arbre sur la bande 0 – 5000Hz.

Recalage

Le recalage nous amène à une fonction quadratique nulle. Le tableau IV.3 indique que les fréquences numériques sont égales aux fréquences expérimentales. Le recalage a surtout affecté les paramètres physiques du matériau et la longueur de l'arbre.

	Avant recalage	Après recalage	Différence relative (%)
E (GPa)	190GPa	176.6GPa	7.05
ρ (kg.m ⁻³)	7800	8530	9.35
ν	0.28	0.293	4.43
a (mm)	25.0	25.0	0.00
b (mm)	27.0	27.7	2.59
c (mm)	43.0	45.2	5.81
e (mm)	59.0	59.0	0.00
k (mm)	143.0	133.2	0.00
g (mm)	10.0	10.0	0.00
h (mm)	63.0	63.0	0.00
d1 (mm)	25.0	24.9	0.40
d2 (mm)	27.0	27.0	0.00
d3 (mm)	30.0	30.0	0.00
d4 (mm)	36.0	37.3	3.61
d5 (mm)	52.0	53.2	2.30
d6 (mm)	55.0	55.0	0.00

TAB. IV.4 – Recalage des paramètres pour l'arbre en libre-libre.

IV.2.2.4 Ensemble carter, arbre, roulements en libre-libre

Nous combinons désormais le carter et l'arbre avec l'ajout des roulements. Ainsi, les paramètres à recaler correspondent à l'interface arbre-carter, soit aux roulements. Les vis du palier sont fixées avec un couple de $15N/m$. Les roulements sont des roulements rigides à contact radial à une rangée de billes, de référence 6206. L'ensemble est suspendu par l'arbre via des élastiques. Ainsi, chacun des roulements est chargé radialement grâce au poids propre du montage, c'est-à-dire $120kg$, figure IV.10.a. L'ensemble est instrumenté de façon à avoir 31 observabilités et 4 commandabilités. Les commandabilités seront appliquées sur l'arbre (1) et sur le carter (3) (horizontalement et verticalement).

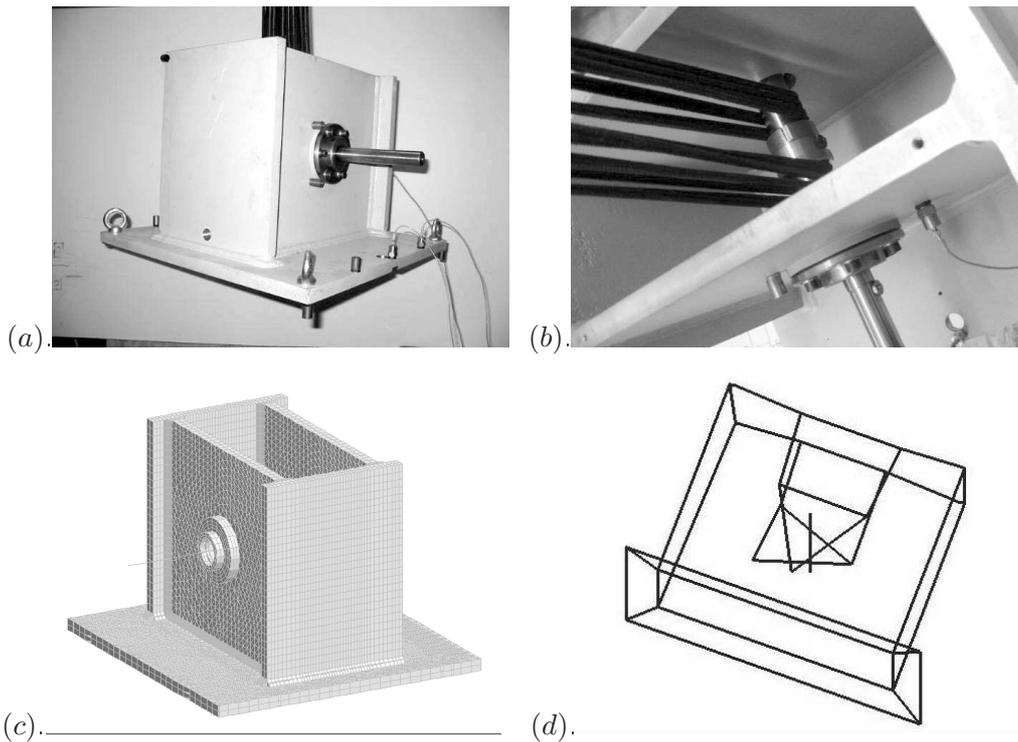


FIG. IV.10 – (a, b) Montage expérimental carter-arbre en libre-libre. (c) Modèle numérique associé. (d) Modèle pour la visualisation des déformées modales expérimentales.

Le modèle numérique nécessite l'intégration d'un modèle de roulement. La prise en compte dans la modélisation des roulements est importante dans le sens où ces derniers peuvent être sources de vibrations par le biais, par exemple, d'un écaillage. L'intégration du modèle roulement a été réalisée avec une boîte à outils numérique réalisée par Debray [Debr 04], [Debr 03]. Cette boîte à outils s'appuie sur le modèle proposé par DeMul, [Mul 89], qui intègre les forces centrifuges dans la résolution du problème d'équilibre statique des roulements. Le roulement est modélisé avec trois types d'éléments (figure IV.11) : (i) Des éléments poutres rigides à deux nœuds, qui modélisent l'incompressibilité de la bague intérieure sur l'arbre. Ces éléments relient la fibre neutre de l'arbre aux points de contact entre la bague intérieure et les éléments roulants. (ii) Des éléments poutres à deux nœuds, dont les matrices de raideurs sont déterminées par itérations (modèle de DeMul), en résolvant le problème d'équilibre non linéaire lié aux contacts entre les éléments roulants et les bagues (théorie de Hertz) sous l'effet des charges extérieures appliquées. Chaque bille est donc modélisée par un élément à deux nœuds. (iii) Enfin, des éléments coques à 4 nœuds représentent la bague extérieure et opèrent la jonction entre les éléments à deux caractérisant les éléments roulants et les éléments volumiques choisis pour le carter. Ces éléments

transmettent l'ensemble des degrés de liberté au carter.

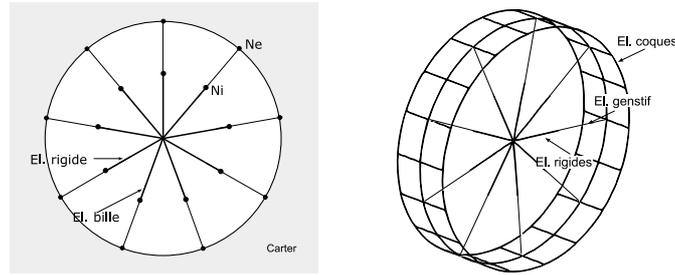


FIG. IV.11 – Modèle numérique du roulement.

Le chargement est modélisé par des forces radiales appliquées à deux nœuds de l'arbre représentant la charge. Ces forces ont une valeur de $1200N$. La résolution du problème statique global intégrant les non-linéarités dues à la prise en compte des contacts de Hertz entre les billes et les BE et BI conduit à la répartition des efforts, figure IV.12. Cette dernière est conforme à la réalité, seules les billes du haut sont chargées.

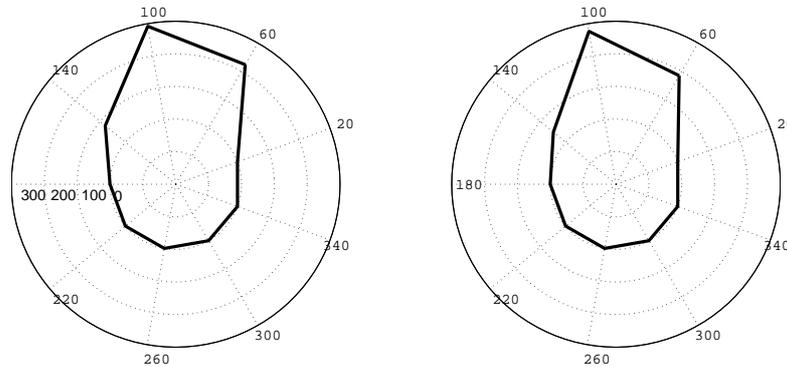


FIG. IV.12 – Distribution des forces sur les roulements.

Identification modale

Pour l'identification, on dispose de 5 commandabilités (3 sur le carter et 2 sur l'arbre) et 31 observabilités pour chaque commandabilité. Donc 155 FRFs sont utilisées pour l'identification. Les modèles numériques déterminés dans les sections suivantes offrent une aide précieuse pour réaliser l'identification. Leurs contributions sont couplées au modèle numérique du montage complet et aux déformées modales déterminées expérimentalement.

La combinaison de l'ensemble de ces informations nous permet d'établir une identification fiable. Les résultats de l'identification sont présents dans le tableau IV.5. Cependant, notons quelques modifications numériques au modèle proposé précédemment. Le modèle numérique du carter en libre-libre se voit ajouter la modélisation des paliers par des éléments solides et le modèle numérique de l'arbre en libre-libre voit les ddls de quelques nœuds bloqués au niveau des paliers. Les nouvelles fréquences propres, sur la bande 0-1500Hz, figurent dans le tableau IV.5.

Quatre grandes familles de fréquences identifiées ou numériques sont mises en valeur par ce tableau IV.5. Nous différencions en effet :

- les fréquences propres du carter avec les paliers en libre-libre,
- les fréquences propres de l'arbre avec conditions limites,
- les fréquences liées à la combinaison des sous-structures,
- les fréquences dites "intruses".

N°	Fréq.	Carter+palier	Arbre fixé	Montage num.	Modèle exp.	Écart relatif
1		-	-	317	-	-
2		405	-	408	380	7.37
3		-	497	424	454	-6.61
4		-	-	502	-	-
5		-	-	-	526	-
6		616	-	617	635	-2.83
7		756	-	750	817	-8.2
8		786	-	786	826	-4.94
9		-	-	854	862	-0.93
10		-	-	856	898	-4.68
11		-	-	-	953	-
12		982	-	982	1000	-1.8
13		1007	-	1007	1058	-4.82
14		1013	-	1010	1070	-5.61
15		-	-	1073	-	-
16		1222	-	1222	1253	-2.47
17		1253	-	1254	1273	-1.49
18		1441	-	1441	1393	3.45
19		-	-	-	1451	-
20		1524	-	1524	1477	3.18

TAB. IV.5 – Identification modale du montage.

Après analyse des fréquences propres et des déformées modales, il est facile d'identifier les modes du carter seul et de l'arbre seul, c'est-à-dire les fréquences 2,3,6,7,8,9,12,13,14,16,17,18,20.

Les modes 1 et 4 déterminés par le modèle numérique complet ne sont pas présents dans le modèle expérimental. L'analyse des déformées modales numériques montre que ces trois modes correspondent à un mouvement transversal de l'arbre, direction dépourvue d'accéléromètres donc d'information sur les déformées expérimentales concernées.

Le mode 9 correspond à une combinaison entre le mode 7 du carter seul avec le mode 3 de l'arbre. Le mode 15 et le mode 14 sont symétriques, c'est-à-dire que le mouvement de l'arbre par rapport au carter est opposé dans les deux modes.

Les modes expérimentaux 11 et 19 restent non expliqués. Ils correspondent probablement à une erreur d'identification.

Recalage

Les différences entre les fréquences propres numériques et expérimentales sont faibles et il n'a pas été jugé nécessaire d'effectuer un recalage. Cependant, notons que les paramètres que nous aurions pris en compte dans un cas différent seraient la valeur du chargement numérique des roulements et la localisation du chargement. L'identification a permis de connaître l'influence du couplage entre les différents éléments et de valider le modèle numérique.

IV.2.2.5 Ensemble carter, arbre, roulements encastré

Nous étudions enfin les conditions limites sur le carter lorsqu'il est encastré sur le banc. Cette dernière étape permettra d'obtenir un modèle numérique relativement proche du modèle expérimental. Le montage arbre, roulements, carter est monté sur la table de la plateforme d'essai SURVIB. L'ensemble est fixé par 4 appuis serrés avec un couple de 15N.m, figure IV.13.b,c. Un système de chargement a été conçu pour charger chacun des roulements, figure IV.13.c. Deux

vérins hydrauliques exercent une tension d'amplitude $5000N$ sur les extrémités de l'arbre à travers un câble en acier.

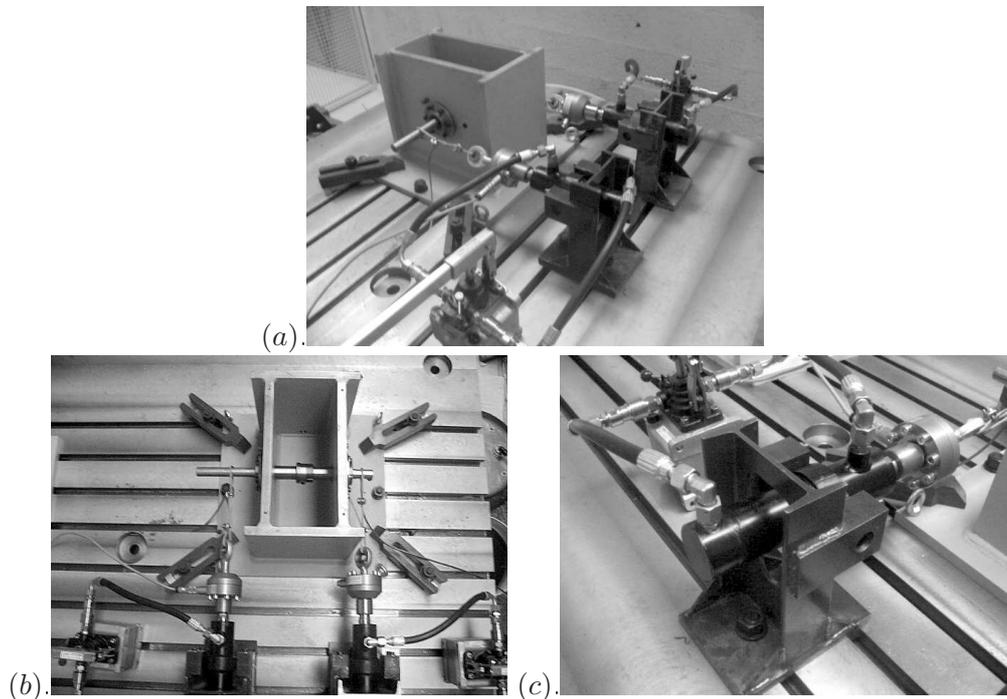


FIG. IV.13 – (a, b) Carter encastré. (c) Système de chargement.

Cette charge nécessite un changement dans le modèle numérique qui considérerait une charge sur les roulements de $1200N$. Cette valeur est augmentée à $5000N$.

En ce qui concerne l'encastrement, l'ensemble des degrés de liberté de la partie inférieure du carter est bloqué.

Identification modale

Pour l'identification, nous disposons de 3 commandabilités (2 sur le carter et 1 sur l'arbre) et 31 observabilités pour chaque commandabilité, soit 93 FRFs sont utilisées pour l'identification. Quelques FRFs sont représentées en figure IV.14. Notons que les FRFs ne présentent pas de pics distincts et propres comme dans le cas précédent car le chargement est élevé et l'encastrement rigidifie largement la structure.

Pour réaliser l'identification, plusieurs outils sont utilisés simultanément :

- le modèle numérique du carter encastré,
- les déformées modales expérimentales fournies par les accéléromètres.

La combinaison de l'ensemble de ces informations nous permet d'identifier les modes propres. Les résultats de l'identification sont donnés dans le tableau IV.6.

L'identification modale présente des résultats très satisfaisants puisqu'elle est proche de la réalité. Les résultats sont améliorés par rapport à l'étape où l'ensemble était en libre-libre. Ceci peut s'expliquer de différentes manières : soit il y a une coïncidence hasardeuse, soit le modèle du roulement est plus fiable pour des chargements élevés, soit les nœuds d'application des charges sont plus proches de la réalité que ceux utilisés précédemment. Les erreurs relatives entre les valeurs numériques et expérimentales n'excèdent pas 7.8%. Les modes 5 et 8 sont particuliers. Le mode 5 est identifié par le modèle expérimental et non par le modèle numérique. Ceci peut être dû au couplage roulement carter, cependant les déformées modales obtenues ne nous permettent

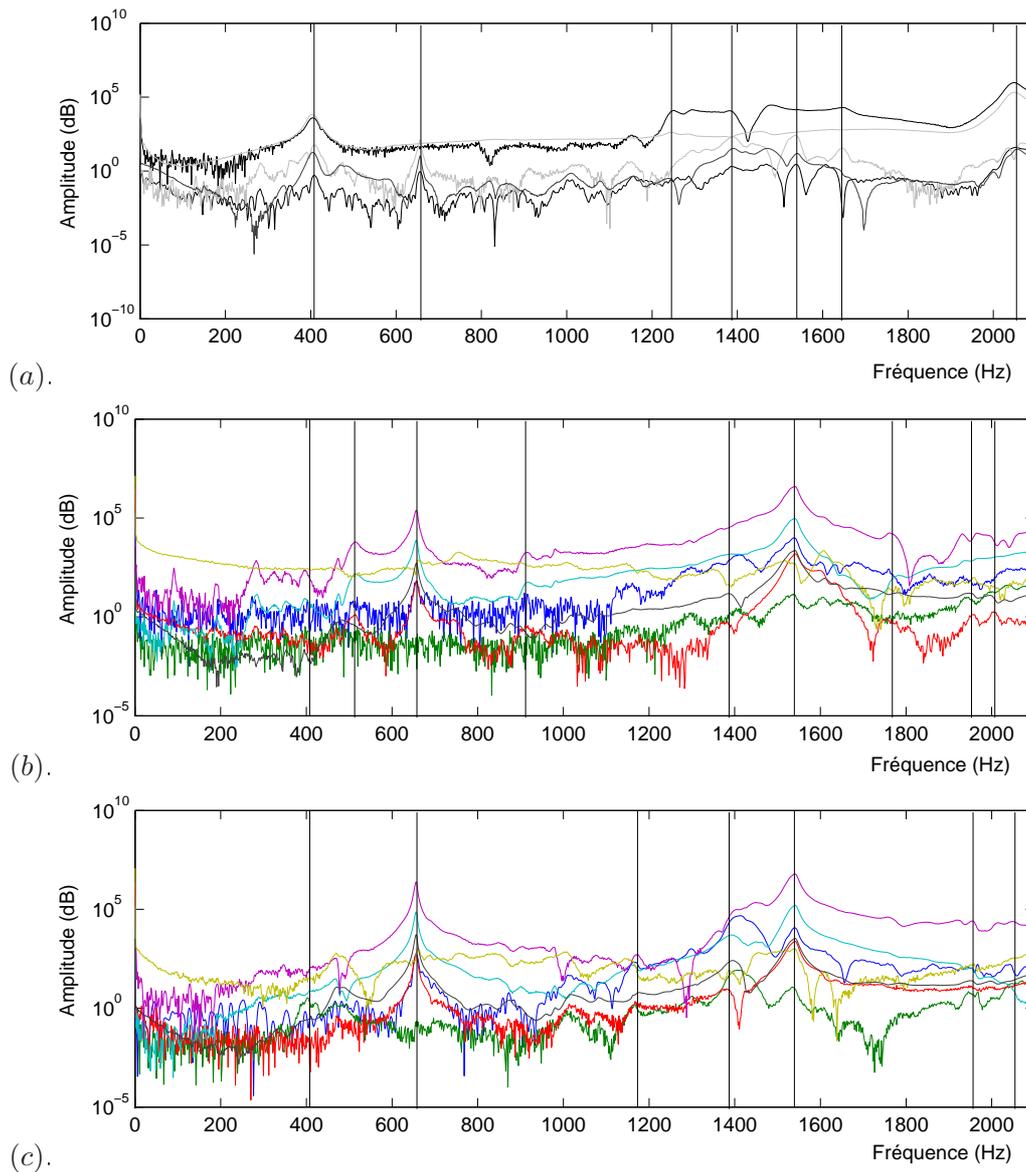


FIG. IV.14 – FRFs avec (a) commandabilités sur arbre, (b, c) commandabilités sur carter.

pas de valider la présence de ce mode. Au contraire, le mode 8 est présent sur le modèle numérique. L'observation des déformées propres en numérique nous montre que ce mode correspond à un mouvement de l'arbre dans un plan parallèle à la plaque, or les accéléromètres n'ont pas été placés pour enregistrer un tel mouvement. Ceci explique que ce mode ne soit pas observé expérimentalement.

En comparant les fréquences propres identifiées sur l'ensemble carter-arbre en libre-libre et les fréquences propres identifiées sur l'ensemble carter-arbre encastré, nous pouvons voir que certaines fréquences dites "parasites" ont disparu. Ceci est probablement dû au chargement de l'arbre qui est plus important dans le cas où le carter est encastré.

Choix des paramètres à recalibrer

Le paramètre de recalage est, comme nous l'avons annoncé, l'encastrement. Comme celui-ci est réalisé sur les quatre coins du carter, nous pouvons modifier le nombre de ddl bloqués sur la base de la structure même si les résultats de l'identification montrent qu'un recalage n'est pas

Modes	Modèle exp.	Modèle num.		Écart relatif	Modèle num.	
		encastrement total	encastrement partiel		encastrement total	encastrement partiel
1	406	438	438	7.8	438	7.8
2	470	460	460	2.1	460	2.1
3	656	641	634	2.3	634	3.4
4	746	694	686	6.9	686	7.0
5	801	–	–	–	–	–
6	1010	951	950	5.8	950	5.9
7	1082	1086	1074	0.4	1074	0.7
8	–	1144	1135	–	1135	–
9	1158	1149	1148	0.8	1148	0.9
10	1268	1285	1284	1.3	1284	1.3
11	1406	1453	1401	3.3	1401	3.3
12	1482	1539	1457	3.8	1457	1.7
13	–	–	1515	–	1515	–
14	1541	1557	1531	1.0	1531	0.6
15	1607	1582	–	1.6	–	–
16	1666	1643	1605	1.4	1605	3.7
17	1936	1902	1851	1.8	1851	4.4
18	1963	2002	2002	2.0	2002	2.0

TAB. IV.6 – Identification modale du montage encasturé.

nécessaire. L'encastrement de l'ensemble de la base semble assez proche de la réalité. Nous avons tout de même étudié son influence sur les modes propres.

Influence de l'encastrement

L'encastrement, d'un point de vue numérique, se limite à bloquer les ddl sur les quatre coins de la base, figure IV.15.

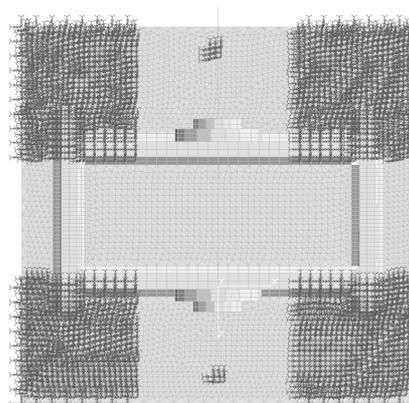


FIG. IV.15 – Conditions limites imposées au carter encasturé partiellement, vue de dessous.

Ainsi, nous parlons d'encastrement partiel. Les fréquences propres sont répertoriées dans le tableau IV.6. Pour des fréquences inférieures à 2000Hz, les modes propres de l'encastrement partiel sont très proches de ceux de l'encastrement total. Au contraire, pour les fréquences supérieures, les modes propres sont significativement différents car la base du carter se met en mouvement.

En effet, la base n'est pas influencée en basses fréquences à cause de sa rigidité. Nous conservons donc l'encastrement total pour ses résultats sensiblement meilleurs.

Désormais, ce module carter fait l'objet de la validation des deux approches proposées dans ce travail.

IV.3 Restitution de signaux générés par pots vibrants (sans accouplement moteur)

La première validation est réalisée sur le module détection sans accouplement moteur pour éviter l'ajout d'un élément inconnu, figure IV.16. Deux pots vibrants régissent la dynamique de la structure et forment les sources réelles. Ces pots excitent chaque extrémité d'arbre en vis à vis avec les chargements via une tige et une bague fixée sur l'arbre. Le carter est instrumenté de façon à obtenir 11 positions arbitraires de capteurs données par la figure IV.17. Ces capteurs sont placés normalement à la surface et sont répartis globalement sur la structure ce qui permettra de mettre en évidence les zones bien conditionnées, **ZBC**, et les zones mal conditionnées, **ZMC**.



FIG. IV.16 – Carter avec pots vibrants.

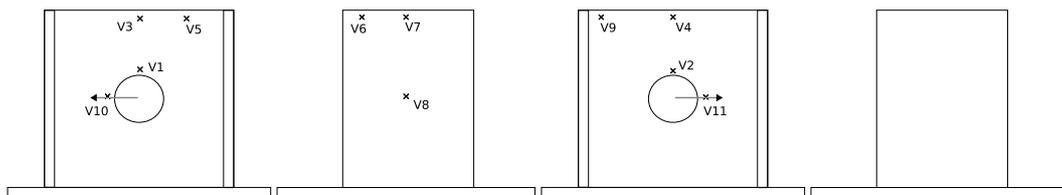


FIG. IV.17 – Illustration de la position des points de mesure.

IV.3.1 Choix des signaux d'excitation

Les pots vibrants étant les sources réelles, il convient de définir les signaux d'excitations. Nous choisissons des signaux composés de deux sinusoïdes dont les fréquences sont celles qui pourraient exciter la structure si un défaut était présent sur les roulements. Nous rappelons que ces fréquences caractéristiques sont fonction de la géométrie du roulement et de la cinématique du système, chapitre 1. Dans le cas où la vitesse de rotation de l'arbre est de 1500tr/mn, les fréquences de défauts du roulement 6206 sont 89.2Hz (BPFO), 115.5Hz (BSF) et 135.7Hz (BPFI).

Nous avons choisi d'appliquer au premier pot un signal composé de deux sinusoïdes de fréquences 89.2Hz et 115.5Hz et au deuxième pot, un signal composé de deux sinusoïdes de fréquences 89.2Hz et 135.7Hz. Notons que les signaux excitateurs connaissent des distorsions dues

au jeu existant au niveau de l'interface tige-arbre. Pour chacune de ces fréquences, nous allons déterminer la carte de conditionnement.

IV.3.2 Nombre et positions des sources virtuelles

Les sources réelles sont les deux pots vibrants, d'où un besoin de choisir deux sources virtuelles. Le nombre de sources est égal au nombre de pots vibrants sur la structure, soit 2.

Nous rappelons que la position des sources virtuelles n'est pas nécessairement le point d'application de la force excitatrice. En effet, on peut difficilement connaître l'emplacement de la véritable source lorsque le roulement est défectueux. Ainsi, nous choisissons deux sources virtuelles, dont les positions sont respectivement V1 et V2, figure IV.17, dont les signaux temporels et les spectres sont présentés en figure IV.18.

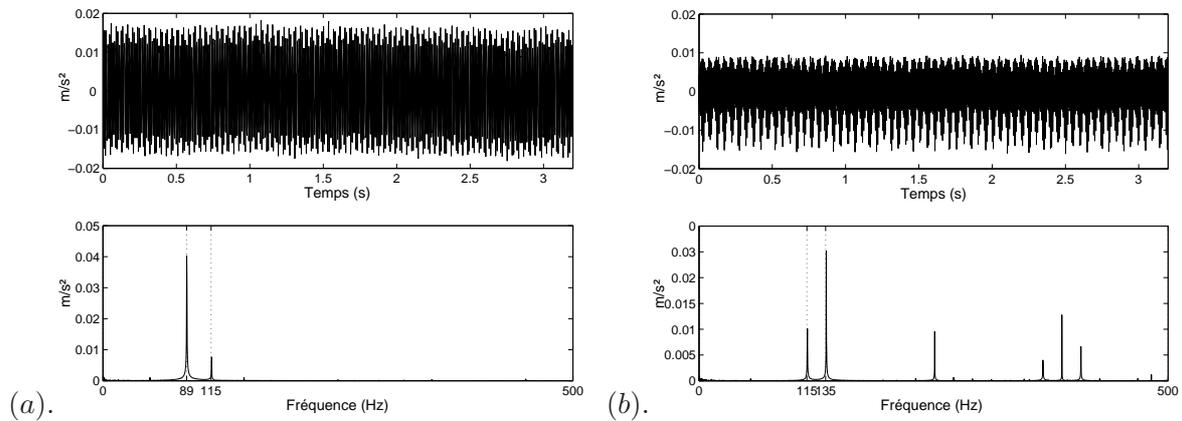


FIG. IV.18 – Signal temporel et son spectre (a) pour la source virtuelle 1, (b) pour la source virtuelle 2.

IV.3.3 Nombre et positions des observations

Le nombre d'observations se déduit du nombre de sources virtuelles, soit 2. Un nombre plus élevé d'observations sera utilisé ultérieurement pour comparer les approches proposées aux méthodes dites de régularisation.

La procédure consiste à choisir une observation fixe, tandis que l'autre sera mobile faisant office de paramètre, modifiant à chaque position le problème physique à inverser. La première observation est choisie en position V3 pour garder une symétrie du système et ainsi faciliter l'interprétation des résultats.

IV.3.4 Cartes de conditionnement

Les cartes de conditionnement sont déterminées par les deux approches mises en évidence précédemment. Pour expliquer les résultats, une dénomination des faces est donnée en figure IV.19.

Les cartes sont créées à l'aide des approches proposées. Nous vérifierons si les cartes obtenues proposent des zones exploitables.

IV.3.4.1 Approche numérique

L'approche numérique nécessite le modèle recalé. En chaque nœud du carter modélisé, les fonctions de transmissibilité sont calculées donnant la matrice de mélange et enfin le nombre de

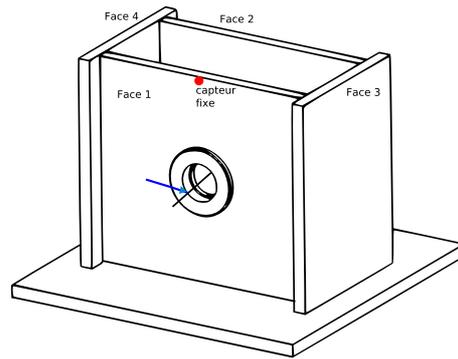


FIG. IV.19 – Dénominations des faces du carter, position de l'observation fixe et des excitations.

conditionnement associé à ce nœud. Les cartes de conditionnement sont réalisées pour les trois fréquences d'étude, 89, 115 et 135Hz, figure IV.20. Les cartes réalisées par l'approche numérique sont obtenues par le logiciel de visualisation graphique MEDIT³. Nous pouvons tirer des grandes conclusions à travers ces cartes.

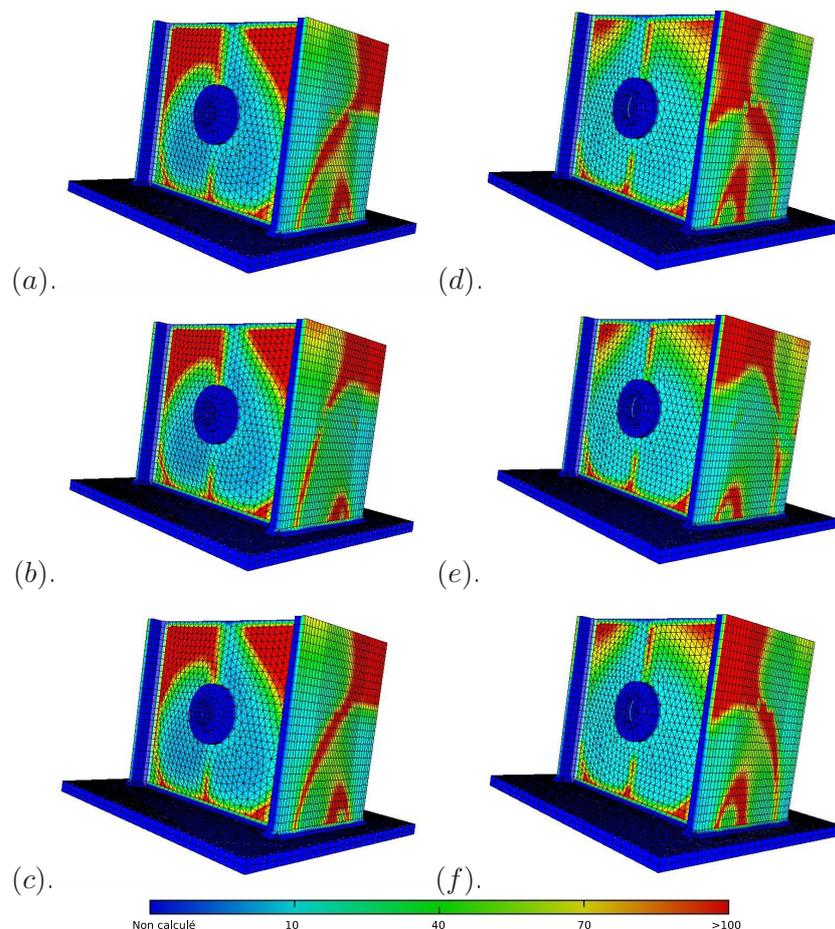


FIG. IV.20 – Cartes de conditionnement pour (a, d) 89Hz, (b, e) 115Hz, (c, f) 135Hz. (a, b, c) Vue 3/4 avant, faces 1 et 2. (d, e, f) Vue 3/4 arrière, faces 3 et 4.

³Logiciel libre de visualisation graphique conçu et réalisé au laboratoire Jacques Louis Lions de l'Université Pierre et Marie CURIE

- L'existence de zones où l'inversion sera stable et instable.
- Les cartes de conditionnement présentent des zones où le nombre de conditionnement est petit, donc des zones stables. Ainsi, la deuxième observation ne doit pas être placée sur la face où est présente la première observation.
- Les cartes sont très similaires pour les trois fréquences. On distingue une légère évolution des zones sur la face 3 et 4. Ceci signifie que nous nous trouvons dans une bande de fréquences où les modes dominants sont identiques.

IV.3.4.2 Approche expérimentale

Analyse modale et modes dominants

Dans un premier temps, l'analyse modale du carter permet d'obtenir les déformées modales expérimentales. Ensuite, le modèle obtenu par ces déformées est excité par des nœuds représentant l'arbre pour générer les fonctions de transmissibilité.

	Mode 4	Mode 5	Les autres modes
Contribution (pour 89Hz)	54.6%	33.2%	12.2%
Contribution (pour 115Hz)	52.8%	31.5%	15.7%
Contribution (pour 135Hz)	57.1%	35.7%	7.2%

TAB. IV.7 – Contribution des modes propres.

Une régression linéaire multiple entre les déplacements obtenus par l'excitation et les déformées modales nous donne la contribution de chaque mode. Le tableau IV.7 nous indique ces contributions qui sont relativement identiques pour ces trois fréquences. Ainsi deux modes dominant, les modes 4 et 5.

Cartes de conditionnement

Le paragraphe précédent montre la dominance de deux modes. Le problème se résume à un problème à 2 modes dominants, 2 sources, 2 observations ($N_{dom}=2, p=2$). Ainsi

L'inéquation (III.21) se simplifie en (IV.2).

$$\|(\phi_4(x_1)\phi_5(x_2) - \phi_4(x_2)\phi_5(x_1))(\phi_4(y_1)\phi_5(y_2) - \phi_4(y_2)\phi_5(y_1))\| \neq 0 \quad (IV.2)$$

Cette inéquation présente pour variable $\phi_4(y_2)$, $\phi_5(y_2)$. Les autres termes sont constants. Les déformées propres nous fournissent des informations importantes, figure IV.21. Le premier terme de l'inéquation est non nul car les déformations propres donne : $\phi_4(x_1) = -\phi_4(x_2)$ et $\phi_5(x_1) = \phi_5(x_2)$ d'où :

$$\begin{aligned} \|\phi_4(x_1)\phi_5(x_2) - \phi_4(x_2)\phi_5(x_1)\| &= \|\phi_4(x_1)\phi_5(x_2) + \phi_4(x_1)\phi_5(x_2)\| \\ &= \|2\phi_4(x_1)\phi_5(x_2)\| \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (IV.3)$$

La disposition des sources n'est pas dommageable quant à la stabilité de l'inversion, donc la disposition des capteurs est donnée par la relation, équation (IV.4).

$$\|\phi_4(y_1)\phi_5(y_2) - \phi_4(y_2)\phi_5(y_1)\| \neq 0 \quad (IV.4)$$

Plusieurs cas, matérialisés par des numéros sur la figure IV.21, sont considérés pour la positionner :

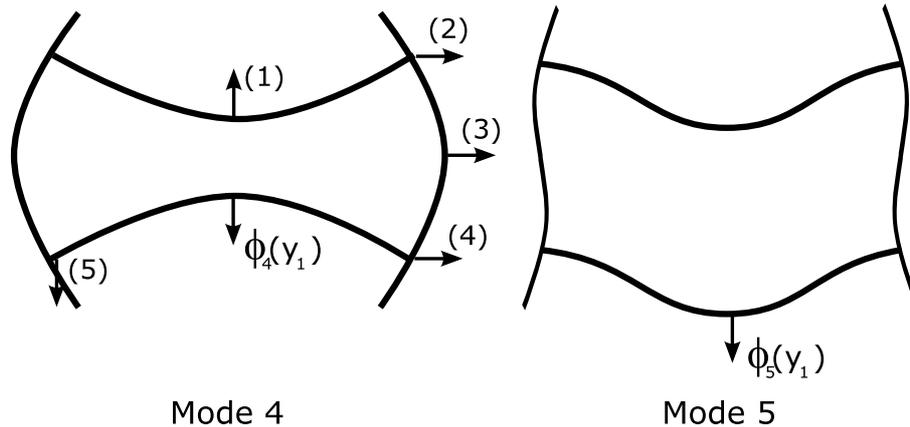


FIG. IV.21 – Déformées propres des modes dominants.

- L'observation 2 est placée près de la première observation : les déformées propres sont quasiment égales, donc la relation (IV.2) s'annule ce qui génère un nombre de conditionnement élevé. Plus le capteur 2 s'éloigne, meilleur est ce nombre. Ceci signifie que le capteur 2 doit être de préférence placé sur une autre face du carter.
- Le capteur 2 est placé en (1) : dans ce cas, nous avons $\phi_4(y_1) = -\phi_4(y_2)$ et $\phi_5(y_2) = \phi_5(y_1)$, donc

$$\phi_4(y_1)\phi_5(y_2) - \phi_4(y_2)\phi_5(y_1) = 2\phi_4(y_1)\phi_5(y_1) \neq 0.$$
 Le conditionnement sera ici très bon.
- L'observation 2 est placée en (3) : $\phi_5(y_2) = 0$, donc

$$\phi_4(y_1)\phi_5(y_2) - \phi_4(y_2)\phi_5(y_1) = -\phi_4(y_2)\phi_5(y_1) \neq 0$$
 Le conditionnement est également très bon.
- L'observation 2 est placée en (5) : $\phi_5(y_2) = 0$ et $\phi_4(y_2) = 0$ donc

$$\phi_4(y_1)\phi_5(y_2) - \phi_4(y_2)\phi_5(y_1) = 0$$
 Le conditionnement sera très mauvais.
- L'observation est placée en (2) ou (4) : la différence semble peu importante car les déformées propres sont quasi identiques mais cet exemple est plus délicat. En (2) le conditionnement sera bon mais pas en (4). Mathématiquement nous avons les égalités suivantes : $\phi_4(y_2)_{(2)} = \phi_4(y_2)_{(4)}$ et $\phi_5(y_2)_{(2)} = -\phi_5(y_2)_{(4)}$. Ainsi, dans le cas (4), la relation à vérifier est nulle.

D'après ces différents cas, nous pouvons affirmer qu'il n'est pas toujours facile d'interpréter les zones bien conditionnées. Certains cas, comme le point (1) ou (3), sont très faciles à étudier. Par contre, la différence entre la position (2) et (4) est plus difficile à interpréter.

Nous pouvons dire avec certitude que la face où se trouve la deuxième source est une zone bien conditionnée de même qu'il est de bon sens d'ajouter que la zone où se trouve le premier capteur est à éviter. Pratiquement, on ne positionnerait pas les deux capteurs sur la même face.

IV.3.5 Restitution

Nous illustrerons, à travers ce paragraphe l'emploi de ces cartes de conditionnement dans le cadre d'une restitution des défauts vibratoires. Avant de réaliser une restitution, il a été jugé nécessaire de vérifier la linéarité de la structure. Ensuite, nous appliquerons la méthode d'inversion à partir d'une **ZBC**, d'une **ZMC** et à partir d'un système surdéterminé avec régularisation. Nous étudierons également l'influence des perturbations extérieures.

IV.3.5.1 Linéarité de la structure

La linéarité du système est vérifiée en observant la variation de la sortie en fonction de l'entrée (l'excitation du pot fait varier l'entrée), figure IV.22. La linéarité entre différentes voies

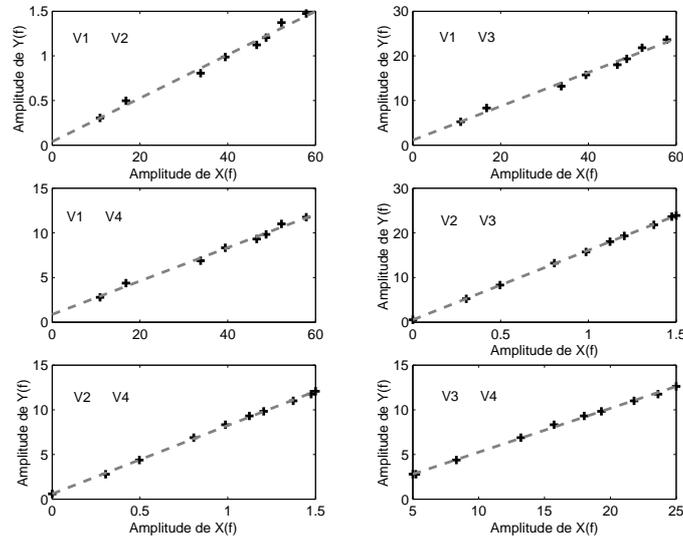


FIG. IV.22 – Vérification de la linéarité de la structure.

est parfaitement vérifiée. Ceci peut s'expliquer par la position des capteurs qui sont tous sur le carter lui-même. Ainsi, les méthodes linéaires d'inversion sont applicables.

IV.3.6 Fonctions de transmissibilité

Les fonctions de transmissibilité, via les fonctions de transfert, sont déterminées de deux manières différentes pour comparer les prises de mesures : à l'aide d'un marteau de choc et à l'aide d'un pot vibrant.

L'essai au pot vibrant est plus contraignant car cela nécessite de le fixer sur la structure. Cette fixation crée un contact extérieur à la structure propre ce qui peut fausser la fonction de transmissibilité trouvée. Dans la pratique, la fixation du pot est réalisée de façon à ne pas provoquer un effort radial supplémentaire sur l'arbre. Ensuite, nous balayons les fréquences utiles pour déterminer la fonction de transmissibilité $[T(\omega)]$.

L'utilisation du marteau de choc est plus simple. La réponse impulsionnelle permet de balayer l'ensemble de la bande de fréquences. Cependant, les résultats seront plus satisfaisants avec le pot vibrant car l'énergie spectrale ne se disperse pas sur l'ensemble du spectre. La faible différence des résultats peut justifier l'utilisation des fonctions de transmissibilité par marteau de choc. Cependant, notons que les fonctions de transfert déterminées par le marteau de choc sont très sensibles aux bruits d'où le besoin de faire un grand nombre de mesures que l'on moyennera.

Les essais de restitution seront réalisés par la suite avec les fonctions de transmissibilité déterminées par le marteau de choc.

IV.3.6.1 Cas zone bien conditionnée (ZBC)

La deuxième observation est positionnée dans une zone apparemment bien conditionnée en voie V4, figure IV.17.

Le nombre de conditionnement moyen, calculé pour cette configuration, est de 15 ce qui correspond relativement à la valeur fournie par la carte de conditionnement, soit 9. Les spectres

en fréquences des deux observations (en V4 et V3) présentent les trois raies étudiées correspondant au mélange des deux sources, figure IV.23.

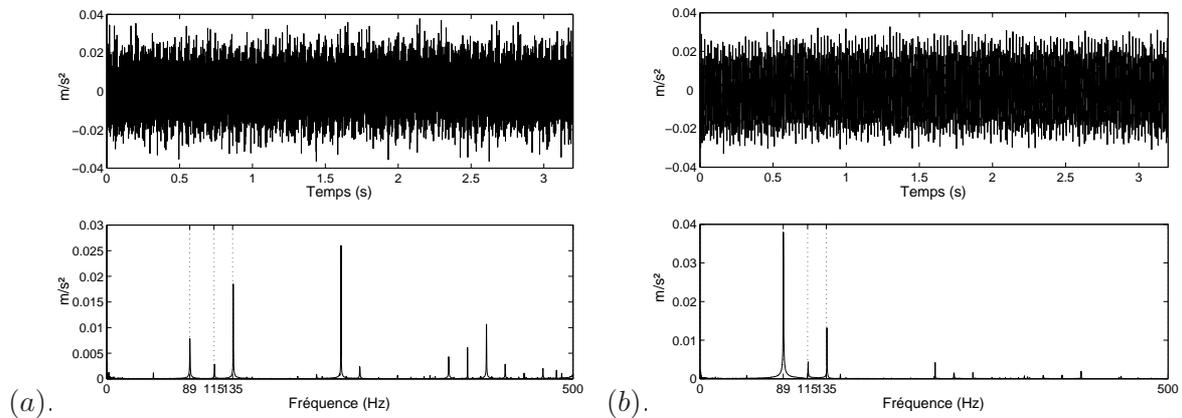


FIG. IV.23 – Signal temporel et son spectre (a) pour l'observation 1, (b) pour l'observation 2.

La restitution des sources virtuelles est apparente en figure IV.24. Les erreurs relatives entre les sources virtuelles mesurées et restituées sont déterminées au tableau IV.8. La restitution est très satisfaisante. L'erreur n'excède pas la valeur de 0.5% pour une erreur globale de 0.3%. Les fréquences étudiées sont restituées à chaque source virtuelle appropriée. Notons que les raies spectrales à 115Hz rendant les signaux non décorrélés sont bien restituées à chacune des sources.

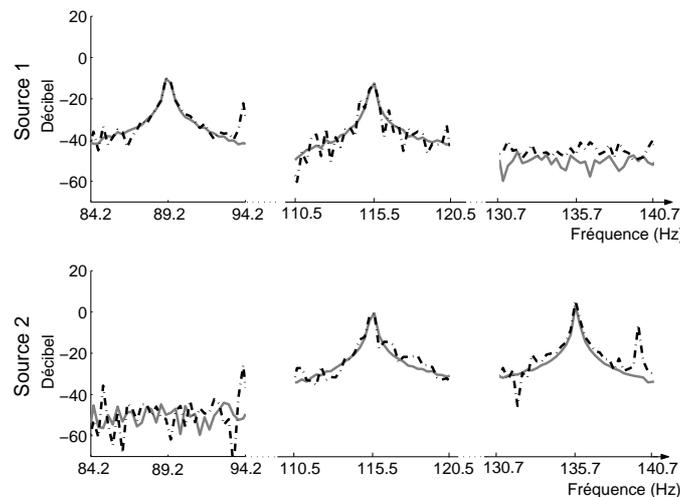


FIG. IV.24 – Restitution à partir d'une **ZBC**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

IV.3.6.2 Cas zone mal conditionnée (ZMC)

Désormais, la deuxième observation est positionnée dans une **ZMC**, en voie V9. La restitution, figure IV.25, est également très satisfaisante malgré un nombre de conditionnement élevé qu'il soit obtenu numériquement ou expérimentalement (environ 150). Le tableau IV.8 le confirme avec une erreur globale de 12.3%, ce qui est raisonnable. Rappelons que le nombre de conditionnement caractérise la stabilité de l'inversion, donc l'inversion peut être satisfaisante avec un nombre de conditionnement relativement élevé. Nous étudierons, dans une section suivante, les cas où une perturbation extérieure est appliquée pour tester l'effet de l'instabilité.

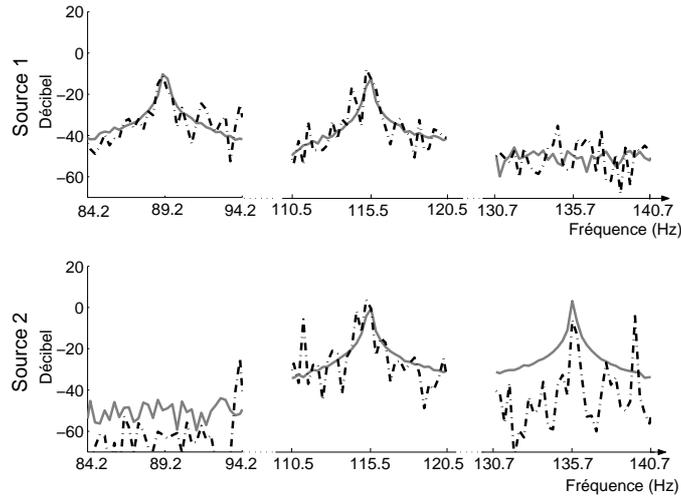


FIG. IV.25 – Restitution à partir d'une **ZMC**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

IV.3.6.3 Système surdéterminé

La restitution est réalisée à partir d'un système surdéterminé. Le nombre d'observations est largement augmenté : 6, distribuées sur le carter. Elles sont placées en V3,V4,V5,V6,V7. Parmi ces observations, certaines sont en **ZBC** et d'autres en **ZMC**.

La méthode de la L-Curve, permettant d'évaluer le paramètre de régularisation, est utilisée (cf. chapitre 2). La figure IV.27 représentant SN en fonction de RN fournit une valeur de 12.3 pour le paramètre β . Malgré un nombre relativement important d'observations, la restitution est de qualité moindre, figure IV.27. Certes, la raie spectrale à 135Hz présente une erreur de 10.3%, mais le plus contraignant est une raie existante à 89Hz pour la source virtuelle 2 qui n'a pas lieu d'être. Ceci s'explique par l'influence de certaines observations sur la matrice de transmissibilité qui détériore la stabilité du problème et qui augmente l'inclusion de bruit de mesures. Cependant notons que le nombre de conditionnement est moindre par rapport à celui déterminé en **ZMC**, soit 97 contre 150.

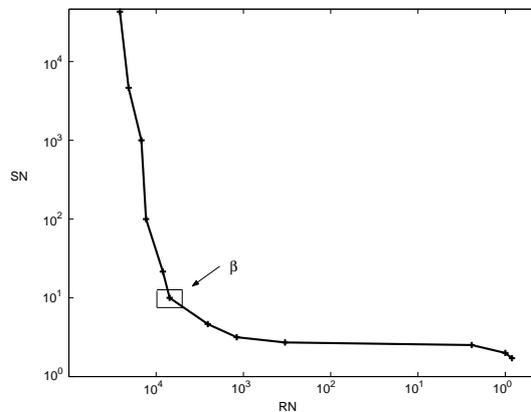


FIG. IV.26 – Détermination du paramètre de régularisation β par la méthode L-Curve.

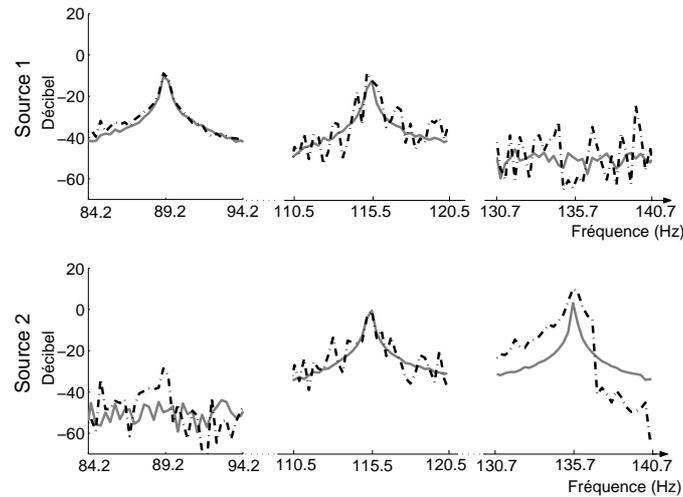


FIG. IV.27 – Restitution à partir d'un système surdéterminé. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

IV.3.6.4 Influence d'une perturbation

La structure étudiée a été isolée des perturbations extérieures permettant ainsi de valider les approches proposées sans difficultés majeures. Désormais, une perturbation extérieure est ajoutée lors de l'acquisition des signaux. Cette perturbation est de type choc, ce qui perturbera l'ensemble du spectre en fréquences. La perturbation entraîne ainsi d'erreurs les mesures et va devenir l'arbitre quant à la stabilité des méthodes. Les résultats sont exposés en figures IV.28, IV.29, IV.30 et représentent respectivement les restitutions à partir d'une **ZBC**, d'une **ZMC**, et d'un système surdéterminé. Le tableau IV.8 présente le calcul des erreurs relatives entre les sources mesurées et restituées.

La restitution grâce à une **ZBC** est de façon significative plus satisfaisante, avec une erreur globale de 4.2%. La stabilité de l'inversion joue ici un rôle très important pour satisfaire la restitution.

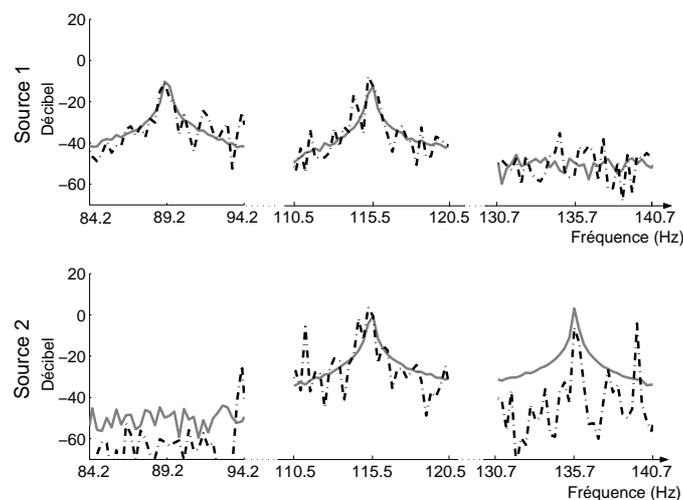


FIG. IV.28 – Restitution à partir d'une **ZBC** avec perturbation. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

Par contre, la restitution grâce à une **ZMC** fournit des résultats faux. Nous notons des erreurs relatives importantes pour certaines raies spectrales, et de plus, certaines raies sont attribuées à des sources ne devant pas être présentes, notamment la raie à 89Hz pour la source virtuelle 2.

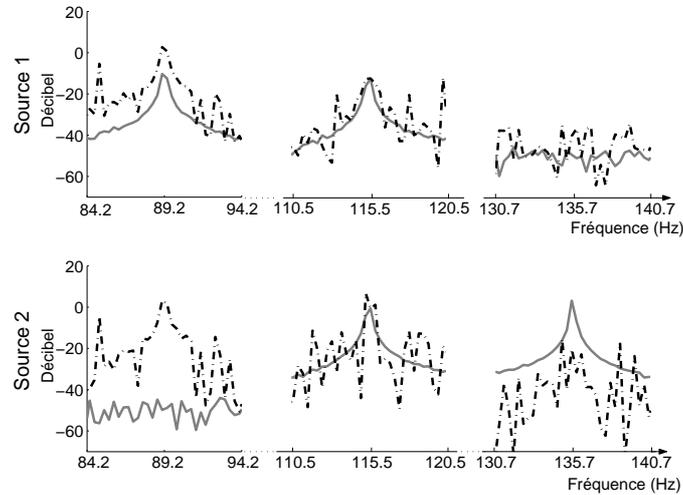


FIG. IV.29 – Restitution à partir d'une **ZMC** avec perturbation. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

Le système surdéterminé, figure IV.30, présente une restitution plus stable que pour les **ZMC**, figure IV.29. Chaque raie spectrale est associée à la source virtuelle correspondante. Il est à noter, par ailleurs, que l'erreur relative globale est satisfaisante même si elle n'égale pas l'approche **ZBC**, 16.2% contre 4.2%.

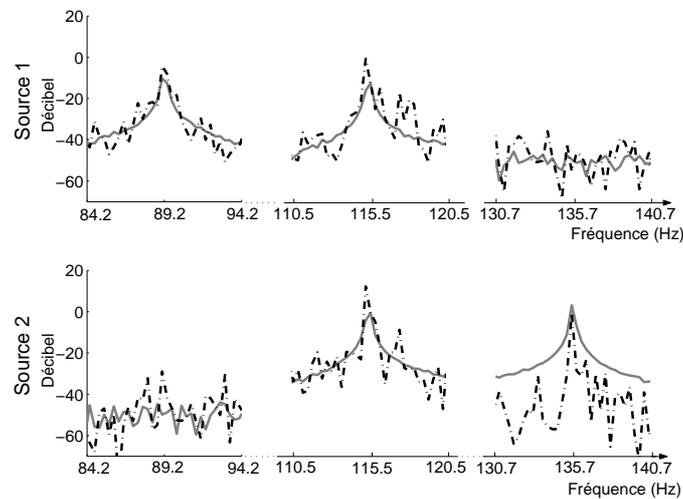


FIG. IV.30 – Restitution à partir d'un système surdéterminé avec perturbation. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

Comparaison 1	ZBC			ZMC			Surdéterminé		
	70Hz	110Hz	320Hz	70Hz	110Hz	320Hz	70Hz	110Hz	320Hz
Erreur x_1 (%)	0.02	0.01	-	-0.1	+4.3	-	-0.3	3.0	-
Erreur x_2 (%)	-	0.5	0.2	-	-5.1	-17.2	∞	0.4	10.3
Err. globale (%)		0.3			12.3			∞	
Comparaison 2	ZBC			ZMC			Surdéterminé		
	70Hz	110Hz	320Hz	70Hz	110Hz	320Hz	70Hz	110Hz	320Hz
Erreur x_1 (%)	2.1	3.4	-	22.3	9.33	-	9.7	15.2	-
Erreur x_2 (%)	-	2.5	17.1	∞	10.5	∞	-	17.5	-3.2
Err. globale (%)		4.2			∞			16.2	

TAB. IV.8 – Comparaisons entre les méthodes, (Comparaison 1) sans perturbation extérieure, (Comparaison 2) avec perturbation extérieure.

IV.4 Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en place les approches de restitution stabilisée sur un cas type industriel : un carter composé de deux roulements. D'une part, l'analyse modale du carter et d'autre part, le modèle numérique du carter ont permis de créer les cartes de conditionnement pour mettre en évidence l'emplacement des capteurs sur la structure. La voie expérimentale reste la méthode la plus lourde d'utilisation car elle nécessite de connaître les modes dominants, et, si ce nombre est trop important, il devient impossible de déterminer simplement la position des capteurs. La méthode numérique est plus simple lorsqu'on dispose du modèle car, une fois le modèle obtenu les cartes sont déterminées rapidement.

Les approches que nous proposons sont comparées à la méthode dite de régularisation (L-Curve method) comme dans le chapitre précédent avec et sans perturbation extérieure. On montre alors que la qualité des prises de mesures proposées par notre méthode prend le pas sur la quantité de mesures proposées par les méthodes d'un système surdéterminé.

Le chapitre suivant est la suite, voir le complément, de celui-ci car le moteur sera cette fois-ci en fonctionnement faisant ainsi office de perturbateur via les roulements. La première partie consistera à considérer les pots vibrants comme sources réelles pour quantifier l'influence du moteur. La deuxième partie du chapitre proposera d'utiliser des roulements endommagés comme sources réelles, introduisant la notion de suivi d'endommagement des composants.

Chapitre V

Analyse numérique et expérimentale d'un carter accouplé au moteur

Dans une première partie, la contribution du moteur est étudiée car elle peut jouer le rôle de perturbateur par la mise en mouvement des éléments tournants pouvant influencer le système. La deuxième partie correspond à un cas réel où les sources vibratoires sont des roulements défectueux. Chaque type de défaut sera étudié puis traité simultanément en soulignant l'intérêt des méthodes proposées. La position des capteurs que nous employons sera mise en corrélation avec les points optimaux dans un cas "classique" de détection, comme le suggère Estocq [Esto 04]. Ensuite, nous restituerons des valeurs RMS caractéristiques de chaque source vibratoire pour suivre l'évolution de l'endommagement à partir d'un indicateur global.

V.1 Restitution de signaux générés par pots vibrants (avec accouplement moteur)

V.1.1 Description du banc

Nous appliquons les méthodes de restitution sur le carter accouplé au moteur. Ce dernier va engendrer des perturbations dans le système par sa contribution directe comme la vitesse de rotation, les efforts dynamiques, les courants électromagnétiques et par une contribution indirecte comme l'effet de balourd, les roulements en rotation. Le moteur dont nous disposons a une puissance maximale de 10kW, et est commandé par un variateur de vitesse fixant la vitesse de rotation entre 1 tr/mn et 3000 tr/min, figure V.1.a.

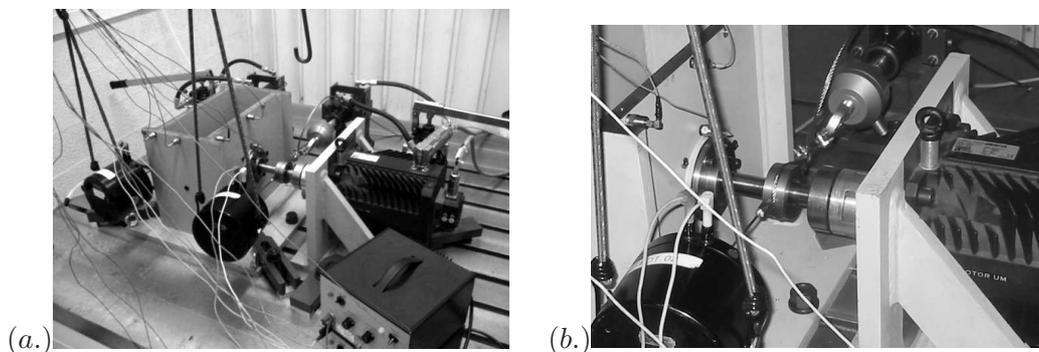


FIG. V.1 – Carter encastré avec pots vibrants et moteur.

Le carter est monté avec des roulements sains. Comme les éléments tournants vont être en

mouvement, le système d'excitation subit une modification au niveau de la liaison arbre-tige d'excitation. Cette liaison est réalisée par un palier muni d'un roulement 6205, figure V.1.b. Ce même palier est chargé par le vérin via un câble acier.

V.1.2 Mesures préliminaires/Identification des raies spectrales

Avant de réaliser tout essai, il a été jugé utile de connaître les raies spectrales caractéristiques du fonctionnement du moteur. Pour cela, les capteurs sont disposés sur le moteur et l'équerre de fixation, figure V.2. Les voies V1 et V2 sont positionnées sur l'équerre, radialement pour V2, axialement pour V1. Les signaux sont enregistrés avec 8192 points à une fréquence d'échantillonnage de 51200Hz.

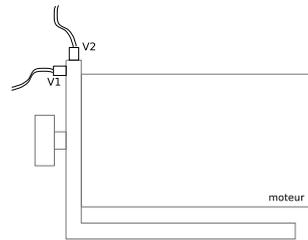


FIG. V.2 – Position des capteurs pour déterminer les raies caractéristiques du moteur en fonctionnement.

Le moteur sous tension fournit un spectre disposant d'une raie à 12 kHz, figure V.3. Cette raie correspond à la fréquence de commande MLI (modulation à largeur d'impulsion) du variateur de vitesse.

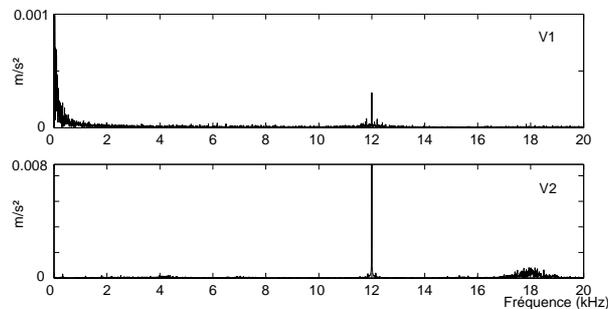


FIG. V.3 – Spectres du moteur sous tension.

Désormais, le moteur est en fonctionnement avec une vitesse de rotation de 1500 tr/mn. Les spectres de raies sont en figure V.4. Nous distinguons à nouveau la fréquence à 12kHz, explicitée auparavant, accompagnée de raies séparées de 100Hz correspondant à la fréquence du secteur.

Enfin, le moteur et le carter sont couplés. Les spectres sur les bandes 0-200Hz et 0-700Hz dévoilent des raies spectrales séparées de 25Hz correspondant à la fréquence de rotation, figure V.5. Sur le spectre 0-200Hz, nous distinguons la fondamentale 25Hz, ses harmoniques et également la fréquence des défauts de bague extérieure (89.2Hz) et bague intérieure (135.8Hz). Ceci est certainement dû au phénomène de déversement de bague. Cependant celles-ci sont peu énergétiques car elles sont noyées par le peigne de raies à 25Hz, comme le confère le spectre sur 0-700Hz, figure V.5.

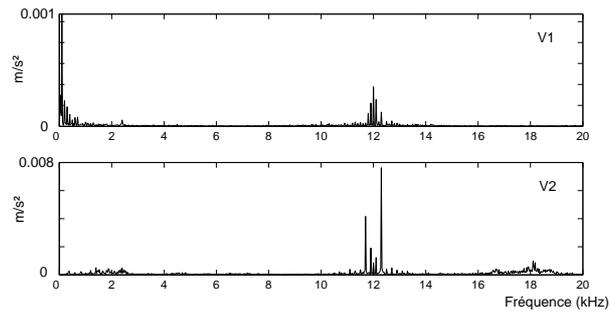


FIG. V.4 – Spectres du moteur en fonctionnement.

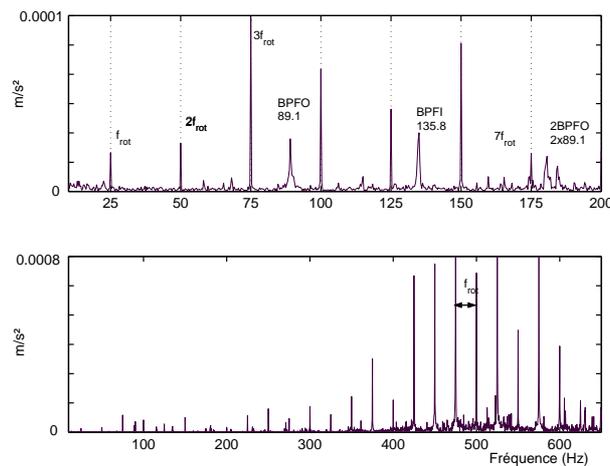


FIG. V.5 – Spectres dans le cas où le moteur et le carter sont accouplés.

V.1.3 Instrumentation du banc

Le carter est instrumenté de façon à enregistrer 15 signaux, figure V.6. Les 15 emplacements sont notés V1 à V15. La direction de la charge est symbolisée par une flèche. Ces différents signaux permettront de juger du bon ou mauvais conditionnement de la matrice de transmissibilité en vue d'une inversion. Remarquons que deux voies, V1 et V2, sont positionnées radialement sur chaque palier des roulements. Ces positions seront comparées aux lieux classiques de détection dans une section suivante.

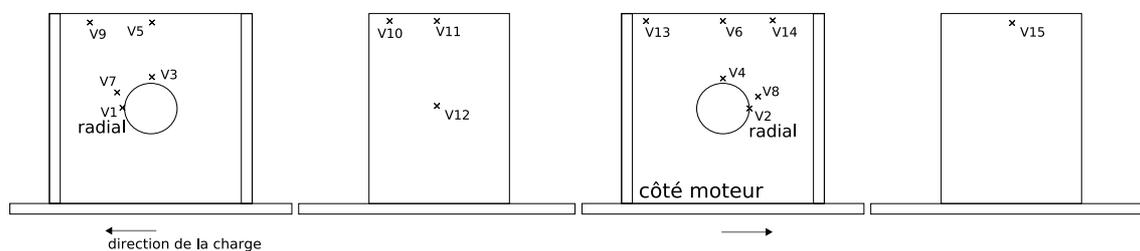


FIG. V.6 – Disposition des voies d'enregistrement sur le carter.

V.1.4 Sources réelles, sources virtuelles, observations

Comme dans le chapitre précédent, les sources réelles sont les pots vibrants. Le premier pot génère un signal sinusoïdal de fréquences 89.2Hz et 115.5Hz; tandis que le deuxième pot

génère un signal sinusoïdal de fréquences 115.5 et 135.8Hz. Les sources virtuelles sont choisies au dessus des paliers du carter, V3 pour la source virtuelle 1 et V4 pour la source virtuelle 2, dont les signaux temporels sont représentés par la figure V.7.a.b. Les signaux des observations, figure V.7.c.d, choisies pour la restitution correspondent aux positions V5 pour l'observation 1 et V6 pour l'observation 2. Cette configuration est donnée par les cartes de conditionnement déterminées expérimentalement et numériquement au chapitre précédent où le système est bien conditionné.

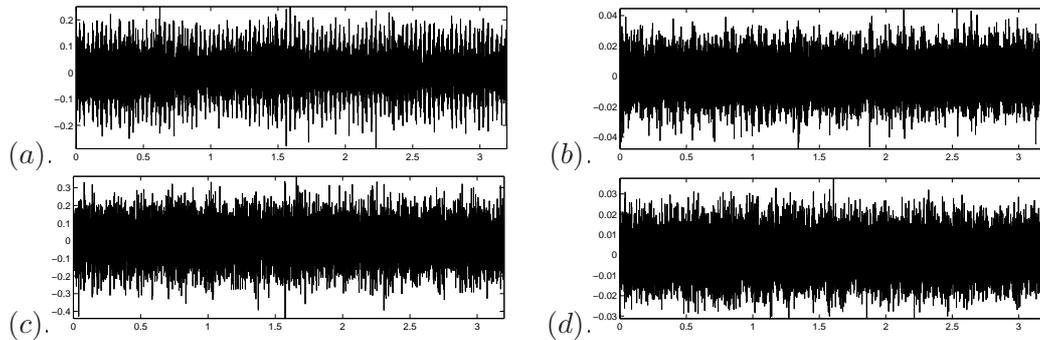


FIG. V.7 – Signaux temporels des sources virtuelles et des observations. (a) Source virtuelle 1. (b) Source virtuelle 2. (c) Observation 1. (d) Observation 2

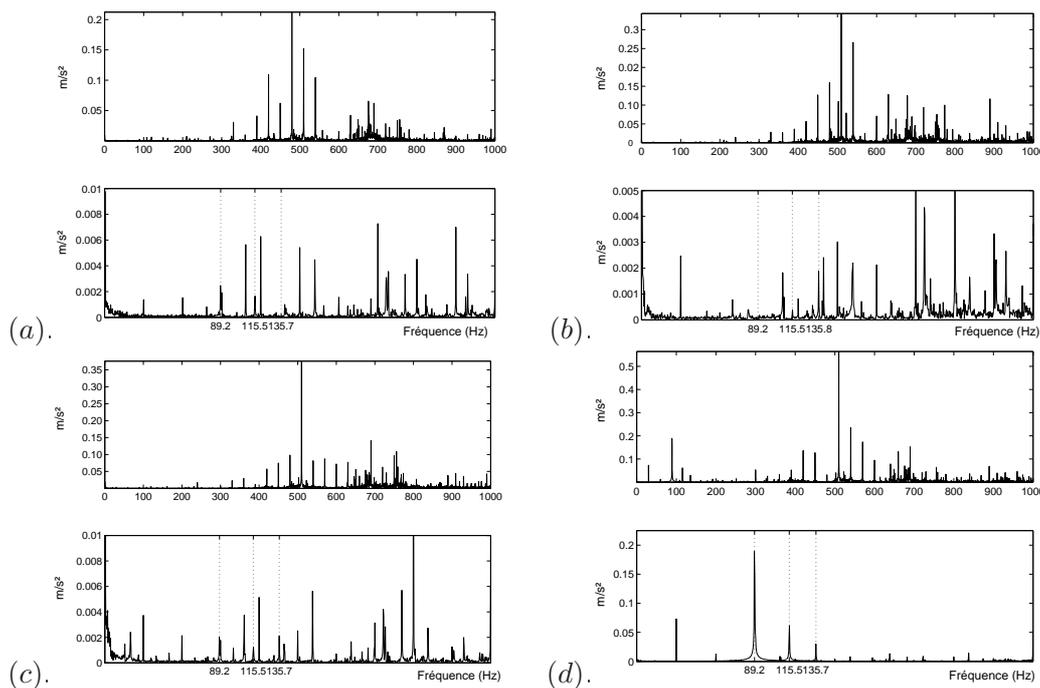


FIG. V.8 – Spectres sur les plages 0-1000 et 0-300Hz de : (a) Source virtuelle 1. (b) Source virtuelle 2. (c) Observation 1. (d) Observation 2.

Notons que les signaux ne sont pas simplement une somme de deux sinusoïdes car du jeu existe entre le pot vibrant et la tige et entre la tige et le palier ce qui crée des perturbations dans le signal.

Les spectres des signaux des sources virtuelles et des observations sont présentés en figure V.8. On observe des résonances de structure sur la bande 400-600Hz et autour de 700Hz correspondant aux premiers modes de la structure (460Hz et 694Hz). Sur les spectres 0-300Hz, on distingue les

fréquences caractéristiques que nous étudions. Les raies spectrales 89.2 et 115.5Hz sont présentes sur la source 1 et les raies 115.5 et 135.7Hz sont sur la source 2. Les spectres des observations présentent le mélange des deux sources où nous retrouvons les trois raies spectrales.

Globalement, les raies spectrales pour les fréquences d'études ne sont pas très énergétiques face aux raies ayant des fréquences proches des premières fréquences propres du carter. La question est de savoir si leur énergie est suffisante face à l'énergie du bruit.

V.1.5 Cartes de conditionnement

Les cartes de conditionnement sont celles obtenues au chapitre précédent car les sources virtuelles, les sources réelles et la première observation ne sont pas modifiées. Nous les indiquons de nouveau en figure V.9. Dans la configuration choisie, nous avons un nombre de conditionnement qui ne dépassent pas la valeur de 12.7 pour les bandes de fréquences étudiées.

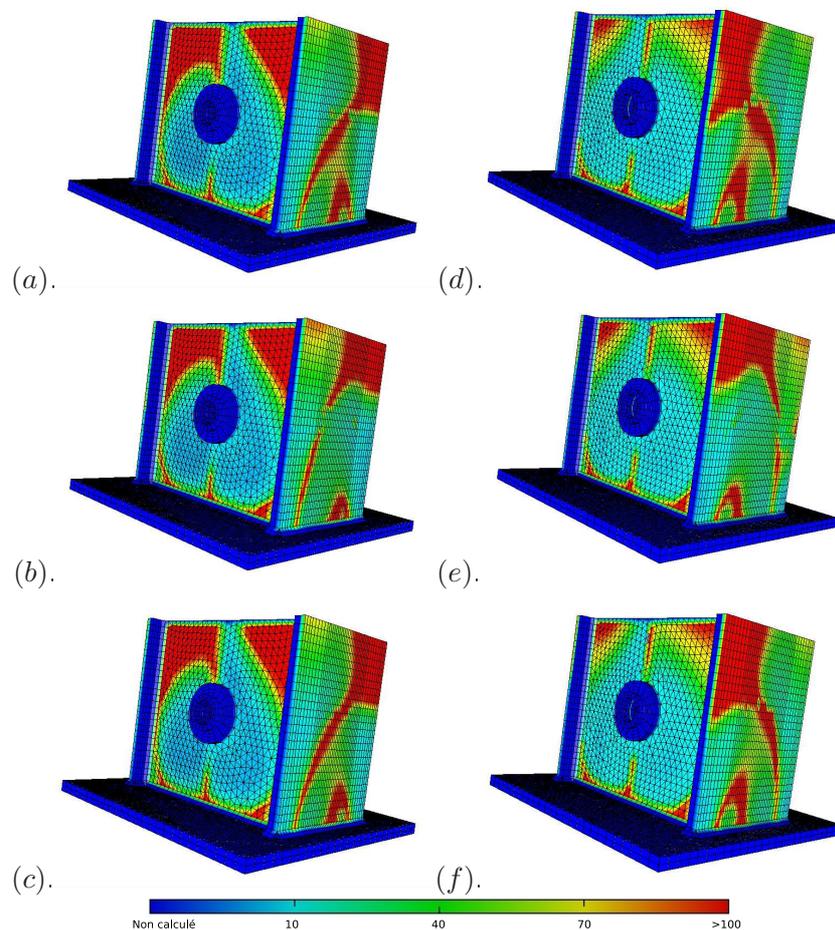


FIG. V.9 – Carte de conditionnement pour (a, d) 89Hz, (b, e) 115Hz, (c, f) 135Hz. (a, b, c) Vue 3/4 avant et (d, e, f) Vue 3/4 arrière.

V.1.6 Restitution

Nous réalisons nos mesures avec 8192 points avec une fréquence d'échantillonnage de 5160Hz. La restitution dans ce cas, figure V.10, est très satisfaisante. Les erreurs de restitution n'excèdent

pas les 2dB. Les fréquences 89.2 et 115.5Hz sont restituées à la source 1 tandis que les fréquences 115.5 et 135.8Hz sont restituées à la source 2.

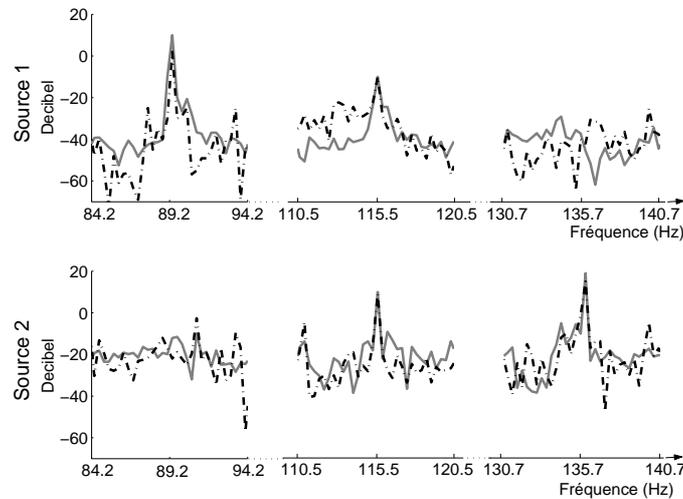


FIG. V.10 – Restitution. (—) Sources virtuelles mesurées. (---) Sources virtuelles restituées.

V.2 Restitution de signaux générés par des roulements défectueux

V.2.1 Description du banc d'essais

La dernière application s'approche d'une configuration réelle où ce sont les roulements qui sont les sources réelles, figure V.11.

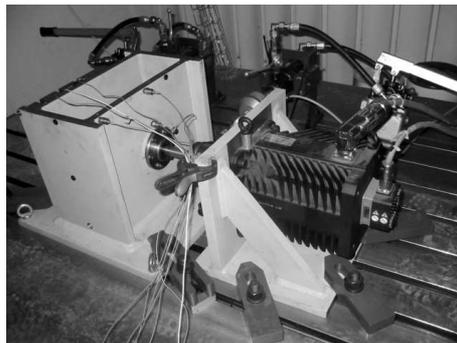


FIG. V.11 – Carter et moteur accouplés.

Des défauts sur les roulements sont réalisés par électroérosion. Ils sont positionnés soit sur la bague extérieure soit sur la bague intérieure, figure V.12.a. Des défauts sur bille ont été également effectués par électroérosion en même temps que la création des autres types de défauts. Le type de roulement dont nous disposons empêche l'usinage de la bille seule. Un outil spécial a été conçu pour l'élaboration des trous. Il est composé d'un porte-embout coudé pour accéder à la bague intérieure et d'un embout interchangeable de la forme elliptique où le grand axe est dans le sens de la largeur du roulement, figure V.12.b. Cette forme est choisie pour simuler la répartition de la pression résultant du contact entre les éléments tournants déterminés par la théorie de Hertz.

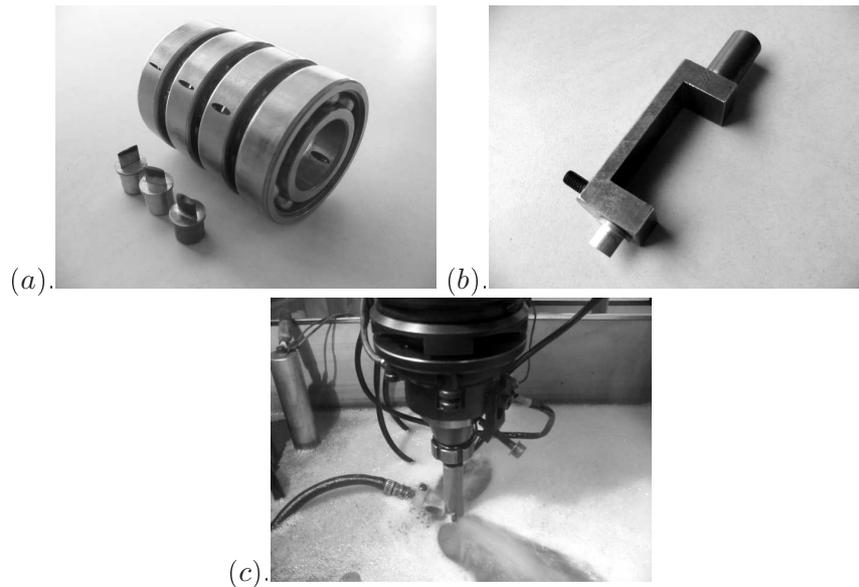


FIG. V.12 – (a) Roulements électroérodés. (b) Outil d’usinage. (c) Processus d’usinage.

V.2.2 Sources virtuelles, sources réelles, observations

Les sources réelles sont dans ce cas les roulements. Les sources virtuelles sont choisies comme précédemment en position V3, source virtuelle 1, et V4, source virtuelle 2. Une première observation est positionnée en V6, observation 2. La deuxième est déterminée dans la section suivante par les cartes de conditionnement.

V.2.3 Cartes de conditionnement

Les forces excitatrices se voient déplacées au niveau des roulements, plus particulièrement au niveau du contact entre la bille et le défaut. Nous devons alors redéterminer les cartes de conditionnement. Nous nous limitons à les redéfinir à partir du modèle numérique. Les forces excitatrices sont appliquées sur un nœud faisant la liaison bille-bague extérieure, c’est-à-dire sur un nœud d’un élément genstif, figure V.13.

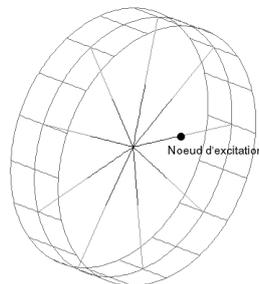


FIG. V.13 – Nœud d’excitation sur le modèle numérique pour la création des cartes de conditionnement.

Nous déterminons ainsi une carte de conditionnement globale pour la bande de fréquences 0-400Hz, figure V.14. Elle nous permet de choisir la position de la deuxième observation, soit, comme précédemment, V5. Remarquons que la carte est peu différente des cartes obtenues auparavant.

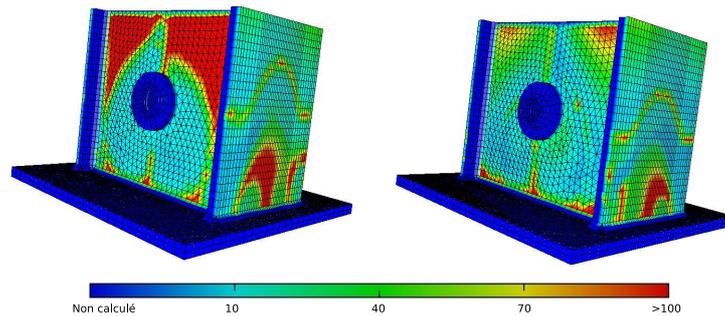


FIG. V.14 – Carte de conditionnement pour la bande 0-400Hz, vue 3/4 avant et 3/4 arrière.

V.2.4 Restitution

Nous allons chercher à restituer les différents défauts pouvant être présents dans un roulement. Cependant, nous décidons de procéder par étape en considérant chacun des défauts avant de les combiner car ceux-ci se manifestent différemment. Le signal d'un défaut sur bague extérieure contient des réponses aux chocs d'amplitude identique tandis que le signal du défaut sur la bague intérieure comporte une forte modulation d'amplitude due à la variation de la charge. Le signal du défaut sur bille est quant à lui difficile à obtenir car l'apparition de la fréquence de défaut suppose que celui-ci tourne dans le plan de roulement, ce qui est peu probable dans un roulement à bille. Ensuite, les défauts seront combinés pour permettre l'étude de la détection et du suivi.

V.2.4.1 Effet de glissement

Nous tenons à souligner à travers cette section l'influence du glissement qui pénalise la restitution. Effectivement, les raies spectrales peuvent glisser de quelques points fréquentiels ce qui peut mettre à mal l'inversion. C'est pourquoi, pour éviter ces phénomènes, il est nécessaire de réaliser les mesures avec beaucoup de précautions. Plusieurs prises de mesures sont parfois nécessaires pour accorder les points fréquentiels caractéristiques.

V.2.4.2 Cas bagues extérieures, BEs

Le premier cas étudié, qui semble le plus simple, est le défaut sur bague extérieure. Effectivement, le montage est réalisé avec la bague extérieure fixe, ainsi le défaut le sera également. Ainsi, l'impact a lieu toujours au même endroit ce qui ne fait pas varier la matrice de transmissibilité. Notons que la fréquence de défaut est de 89.2Hz. Deux roulements sont électroérochés avec un défaut de surface 20mm^2 , constituant les sources réelles. Les signaux temporels des sources virtuelles et des observations ainsi que leurs spectres sont illustrés par les figures V.15, V.16, V.17, V.18. Les signaux temporels sont présentés pour différentes fréquences d'échantillonnage pour appréhender l'effet de celles-ci, notamment l'effet du filtrage. La visualisation des spectres permet d'observer les résonances de structure et les fréquences caractéristiques sur différentes plages de fréquences.

Les réponses aux chocs sont plus distinctes pour la source virtuelle 2 qui est située vers le moteur. Ceci est probablement dû au chargement plus élevé du côté du moteur car le bras de levier est plus grand de ce côté. Cet aspect est justifié en observant les spectres, figures V.16, V.18, où les défauts sur BE excitent plus nettement les hautes fréquences, figure V.16.

D'après la carte de conditionnement déterminée sur 0-400Hz, nous déployons nos méthodes pour restituer la fondamentale et les harmoniques présentant une fréquence inférieure à 400Hz.

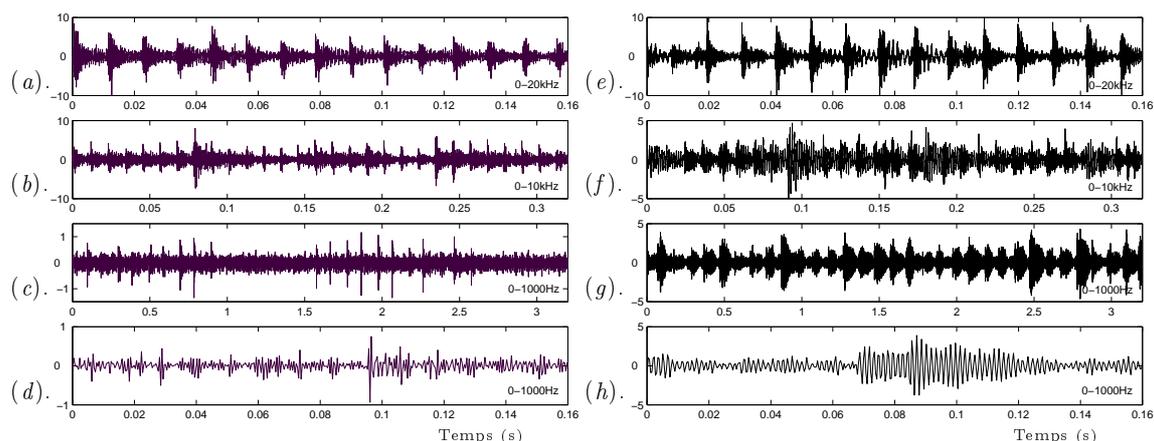


FIG. V.15 – Signaux temporels des sources virtuelles mesurées dans le cas **BEs**. Source virtuelle 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomé sur 0.16s. Source virtuelle 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomé sur 0.16s.

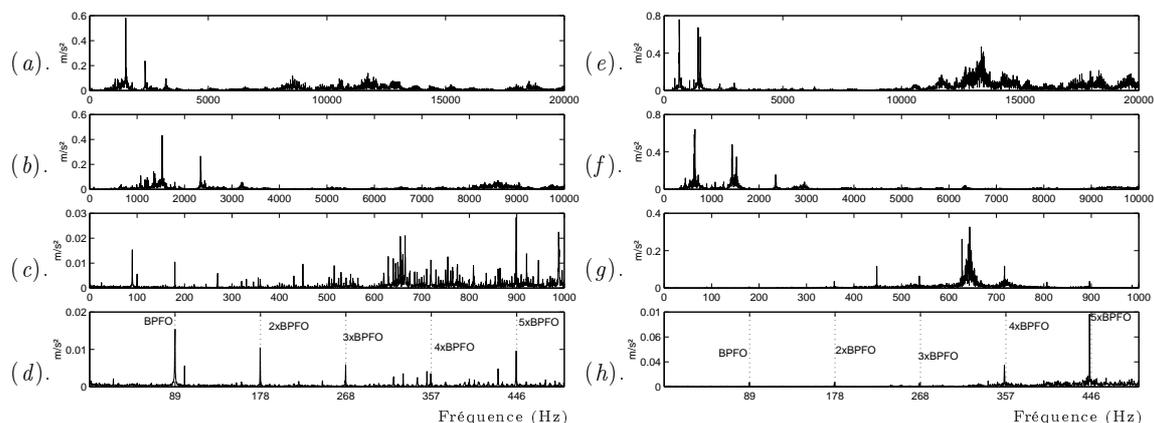


FIG. V.16 – Spectres des sources virtuelles mesurées dans le cas **BEs** Spectres de la source virtuelle 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-500Hz. Spectres de la source virtuelle 2 sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

Cependant, à titre de vérification, nous tentons de restituer deux fréquences au delà. Ainsi la restitution est réalisée sur les bandes de fréquences étroites autour de la fondamentale (89.2Hz) et 5 harmoniques (178.4, 267.6, 356.8, 446.0 et 535.2Hz), figure V.19. La restitution des raies spectrales entre 0 et 400Hz est très satisfaisante, n'excédant pas l'erreur de 1.5dB. Par contre, les raies spectrales au delà de 400Hz subissent une mauvaise restitution. Les harmoniques à 446.0Hz et 535.2Hz ne sont pas restituées pour la source virtuelle 2. Pour réaliser un diagnostic, dans ce cas de restitution, la présence d'une fondamentale et trois harmoniques semble suffisant pour s'assurer de la présence d'un défaut bague extérieure sur les deux roulements.

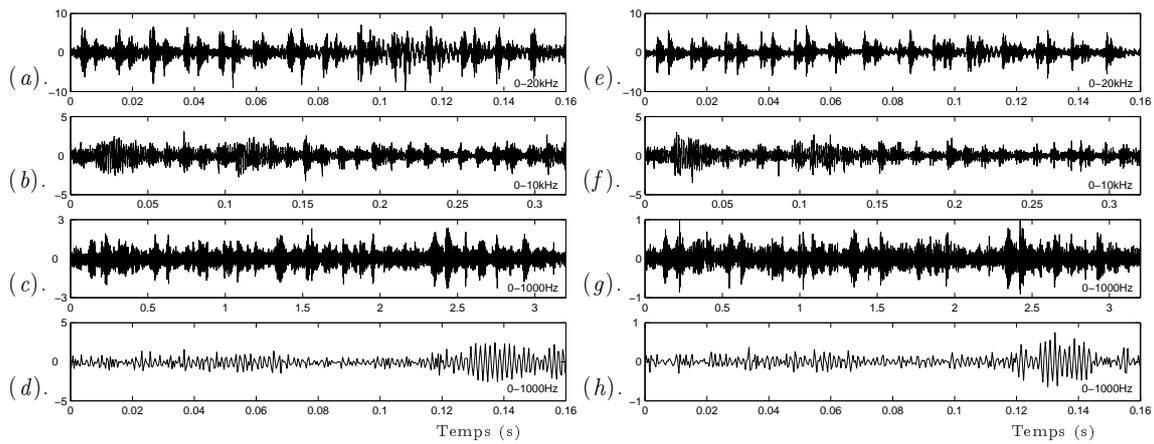


FIG. V.17 – Signaux temporels des observations dans le cas **BEs**. Observation 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Observation 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s.

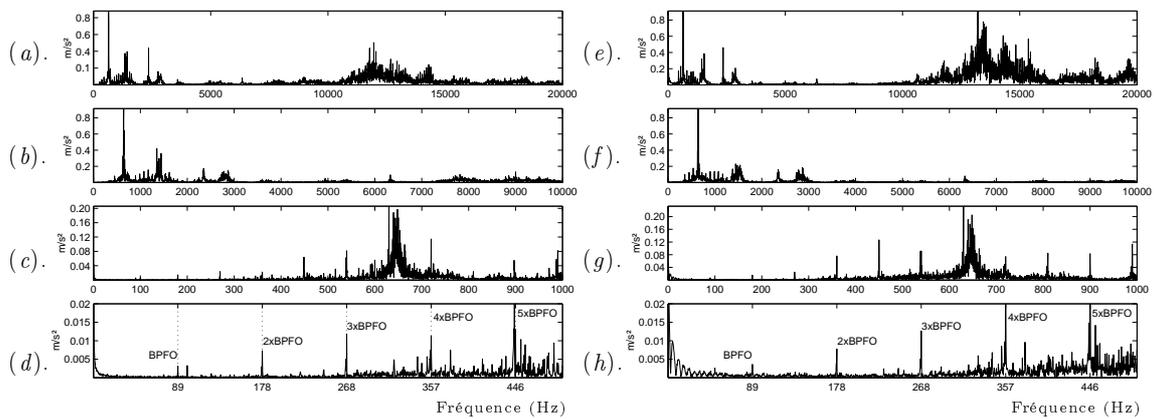


FIG. V.18 – Spectres des observations dans le cas **BEs**. Spectres de l'observation 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-500Hz. Spectres de l'observation sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

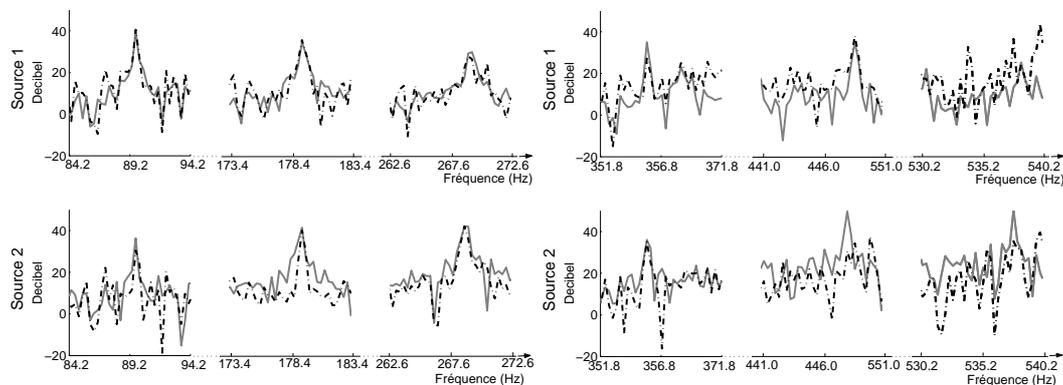


FIG. V.19 – Restitution de la fondamentale et des harmoniques dans le cas **BEs**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées

V.2.4.3 Cas bagues intérieures, BIs

Des défauts sur bague intérieure sont désormais étudiés. Un défaut de 20mm^2 est réalisé sur la bague intérieure de deux roulements où la fréquence de défaut est de 115.2Hz . Ce cas est intéressant à étudier car l'endroit où a lieu le choc est différent au cours du temps à cause de la rotation de la bague intérieure. Ainsi, le chargement conduit à dire que seul un tiers du périmètre du roulement peut engendrer un impact conséquent. En effet, lorsque le défaut est opposé au chargement, l'impact est faible voire inexistant car les billes et la bague intérieure sont peu en contact. Nous obtenons des signaux fortement modulés, figure V.20. Ce lieu d'impact qui varie, modifie la matrice de transmissibilité, ce qui peut être préjudiciable pour la restitution. Les signaux temporels sources virtuelles et observations sont présentés respectivement en figures V.20 et V.22. Les spectres associés sont en figures V.21 et V.23.

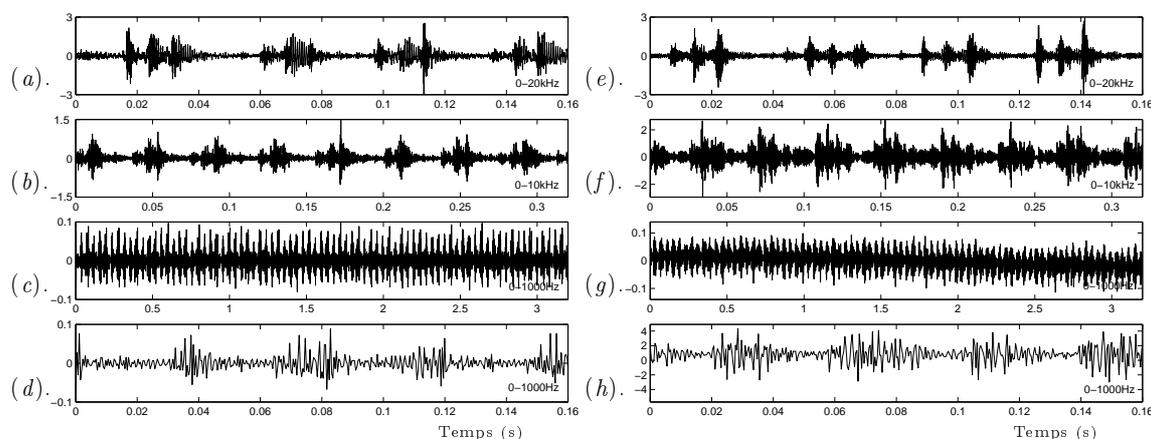


FIG. V.20 – Signaux temporels des sources virtuelles mesurées dans le cas **BIs**. Source 1 échantillonnée à (a) 51200Hz , (b) 25600Hz , (c) 2560Hz , (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s . Source 2 échantillonnée à (e) 51200Hz , (f) 25600Hz , (g) 2560Hz , (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s

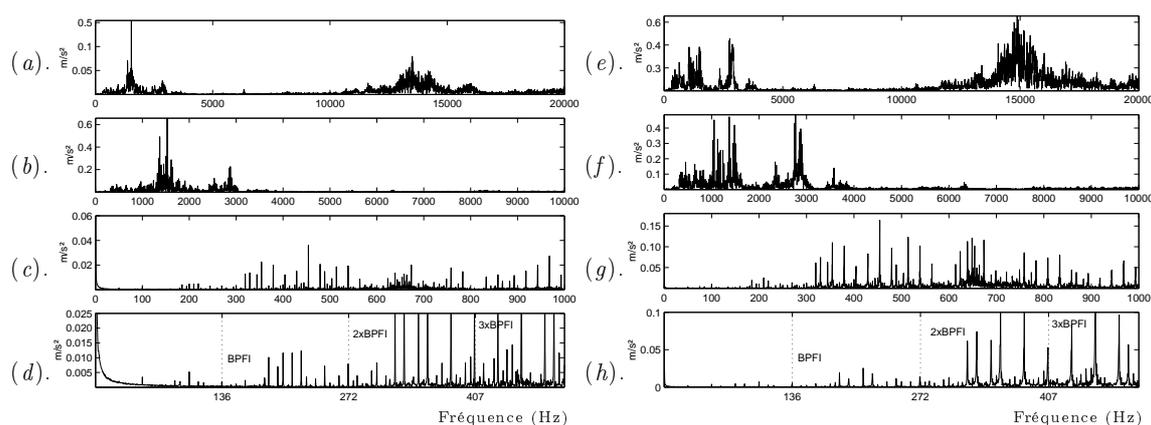


FIG. V.21 – Spectres des sources virtuelles mesurées dans le cas **BIs**. Spectres de la source 1 sur (a) $0-20000\text{Hz}$, (b) $0-10000\text{Hz}$, (c) $0-1000\text{Hz}$, (d) $0-500\text{Hz}$. Spectres de la source 2 sur (e) $0-20000\text{Hz}$, (f) $0-10000\text{Hz}$, (g) $0-1000\text{Hz}$, (h) $0-500\text{Hz}$.

Les spectres des sources virtuelles en figure V.21, présentent une raie spectrale à 135Hz quasi inexistante correspondant au défaut BI. Seules ces harmoniques sont présentes. Malgré cela,

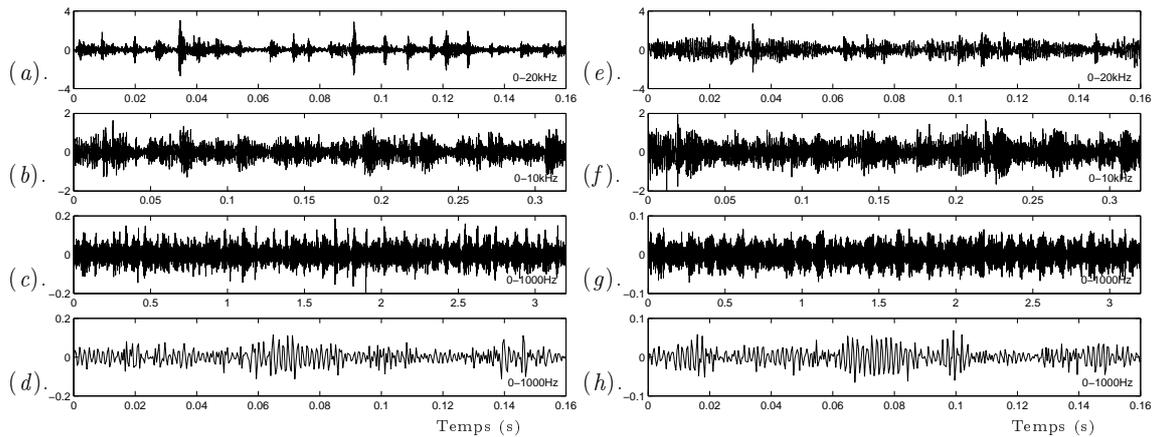


FIG. V.22 – Signaux temporels des observations dans le cas **BI**s. Observation 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Observation 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s

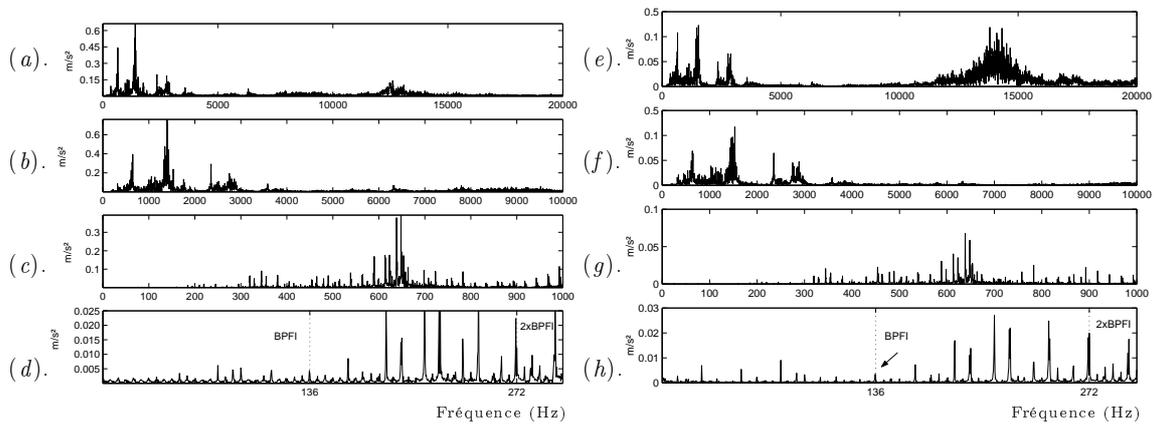


FIG. V.23 – Spectres des observations dans le cas **BI**s. Spectres de l'observation 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-300Hz. Spectres de l'observation 2 sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

la restitution est correcte pour les fréquences 135.8 et 267.6Hz, figure V.24. Cependant, cette restitution ne nous permet pas de réaliser un diagnostic fiable car seule une harmonique à 270Hz est caractéristique de l'endommagement. Ainsi, le cas de la BI nous amène à nous interroger sur le principe de détection.

Nous pouvons tirer deux grandes conclusions au sujet de cette restitution. La première concerne la faisabilité des approches proposées. Malgré une fonction de transmissibilité qui varie suivant le point d'impact dû au défaut, les résultats sont satisfaisants ce qui justifie l'utilisation des méthodes d'inversion. La variation du lieu du choc est minime face aux distances entre les sources virtuelles et les observations. La deuxième conclusion se rapporte au principe de détection. Effectivement, notre cas de restitution ne permettrait pas dans la pratique de diagnostiquer un défaut sur BI car on n'obtient après restitution qu'une seule raie caractéristique du défaut (270Hz). De ce fait, on introduit la notion de placement des sources virtuelles sur le principe de la détection classique. Nous aborderons ce point dans une section suivante.

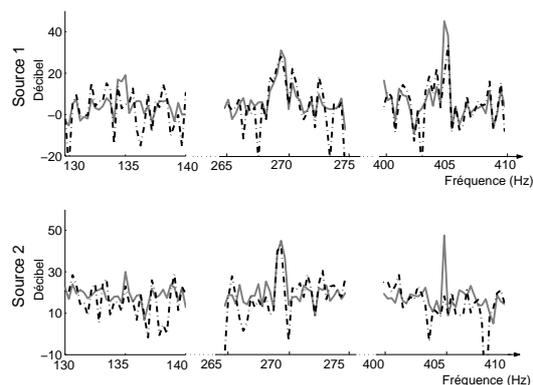


FIG. V.24 – Restitution de la fondamentale et des harmoniques dans le cas **BI**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

V.2.4.4 Cas de la bille

Le cas d'un défaut de bille s'avère un cas difficile à interpréter. Nous n'avons pas pu réaliser des défauts sur bille avec les roulements dont nous disposons. Nous avons généré dans le cadre de défauts combinés des trous sur la bague extérieure ou intérieure débouchant sur la bille. Cependant, nous avons remarqué que le défaut sur la bille devenait un défaut de cage. Effectivement, à cause de l'inertie de la bille usinée, le défaut migre dans la direction normale à la piste et vient frictionner la cage du roulement ce qui génère une fréquence de cage à 10Hz. C'est pourquoi, nous n'avons pas traité plus longtemps ce cas.

V.2.4.5 Cas bague extérieure/bague intérieure, BE/BI

Dans cette partie, nous disposons de deux roulements dont les défauts sont situés soit sur la bague extérieure soit sur la bague intérieure. Ce cas illustre le fait que l'emploi d'un seul accéléromètre peut, certes, révéler la présence des défauts bague intérieure et extérieure mais ne révèle pas le roulement défaillant. Ainsi, la restitution peut également jouer le rôle ici de localisation. La première source réelle contient le défaut bague extérieure d'une surface de 8mm^2

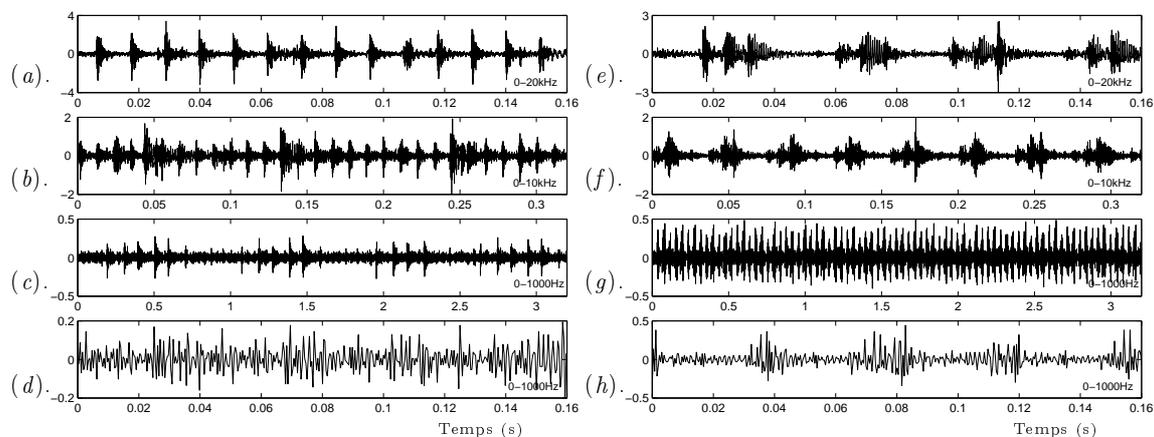


FIG. V.25 – Signaux temporels des sources mesurées virtuelles dans le cas **BE/BI**. Source 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Source 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s

d'une fréquence de 135.8Hz, et la deuxième source réelle contient le défaut de bague intérieure d'une surface de 20mm² d'une fréquence de 89.2Hz. Les signaux temporels sont représentés à la figure V.25. Cette différence de surface s'explique par la puissance du choc engendrée par les deux types de défauts. Effectivement, un test a été réalisé avec des surfaces identiques mais le défaut sur BE noie le signal généré par le défaut sur BI. Les raies spectrales caractéristiques du défaut BI étaient alors invisibles.

Les signaux observations, figure V.27 présentent des signaux temporels bien moins "propres" que les sources virtuelles car le mélange des signaux provenant des deux types de défauts s'opère, figure V.28.

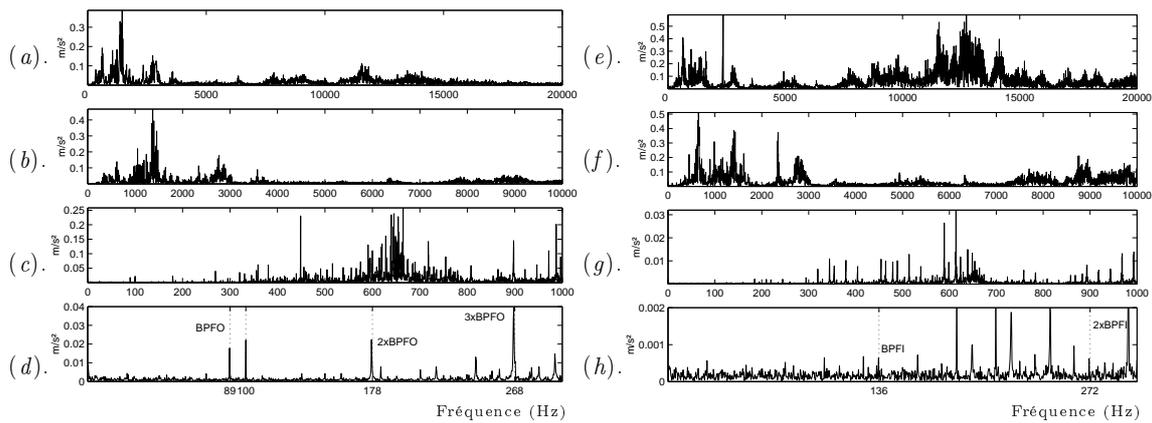


FIG. V.26 – Spectres des sources virtuelles mesurées dans le cas **BE/BI**. Spectres de la source 1 sur (a). 0-20000Hz, (b). 0-10000Hz, (c). 0-1000Hz, (d). 0-300Hz. Spectres de la source 2 sur (e). 0-20000Hz, (f). 0-10000Hz, (g). 0-1000Hz, (h). 0-500Hz.

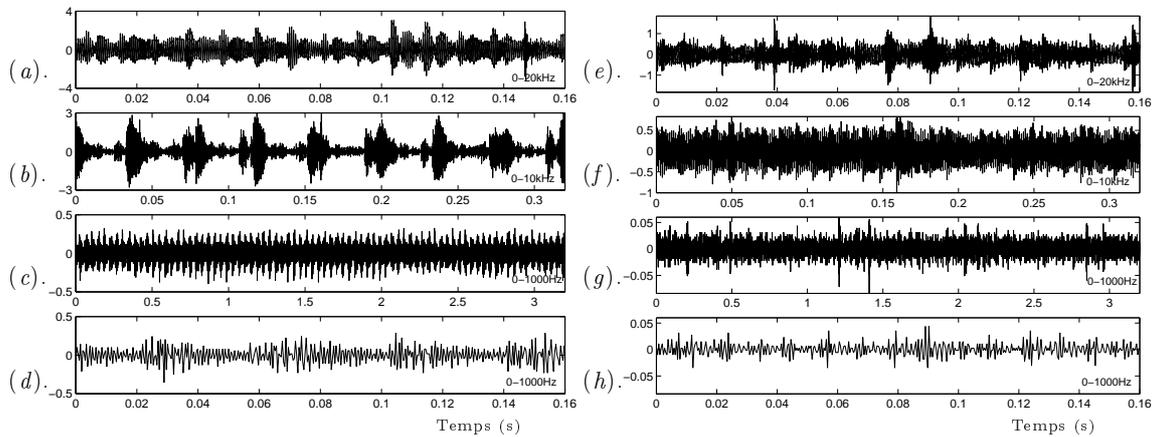


FIG. V.27 – Signaux temporels des observations dans le cas **BE/BI**. Observation 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Observation 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s

L'observation des spectres des sources virtuelles mesurées et des observations est pleine d'enseignements, figures V.26 et V.28. Les raies spectrales de la source virtuelle 1 (cas BE) sont plus distinctes et plus énergétiques. Par contre celles de la source 2 sont faibles, elles se distinguent faiblement du bruit. Les spectres des observations, figure V.28, présentent les raies caractéristiques d'un défaut BI et BE, ainsi ils nous informent que le système présente les deux défauts

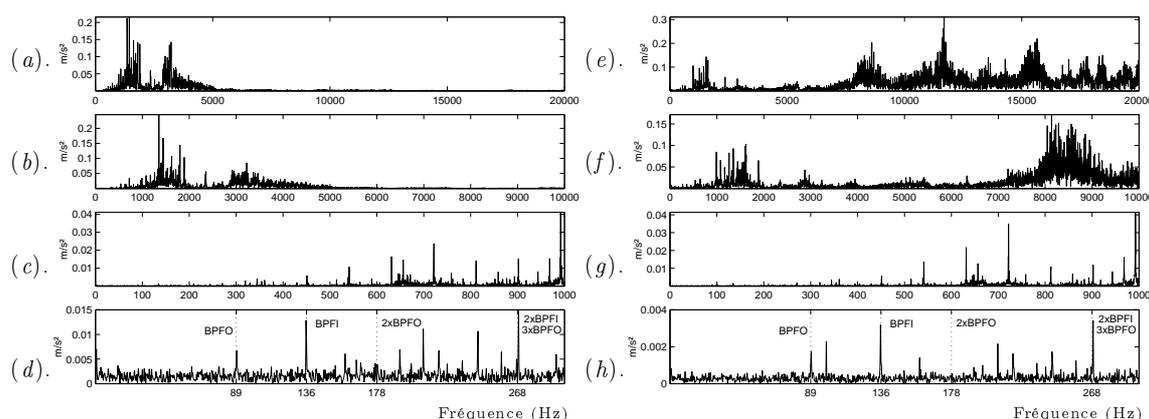


FIG. V.28 – Spectres des observations dans le cas **BE/BI**. Spectres de l'observation 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-300Hz. Spectres de l'observation 2 sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

mais ne les localisent pas. L'inversion permet donc de localiser. La restitution de chaque bande étudiée autour de la fréquence caractéristique est réalisée en figure V.29. Les bandes de fréquences étudiées sont donc autour de 89.2, 135.8, 178.4, 267.6, 356.8 et 407.3Hz.

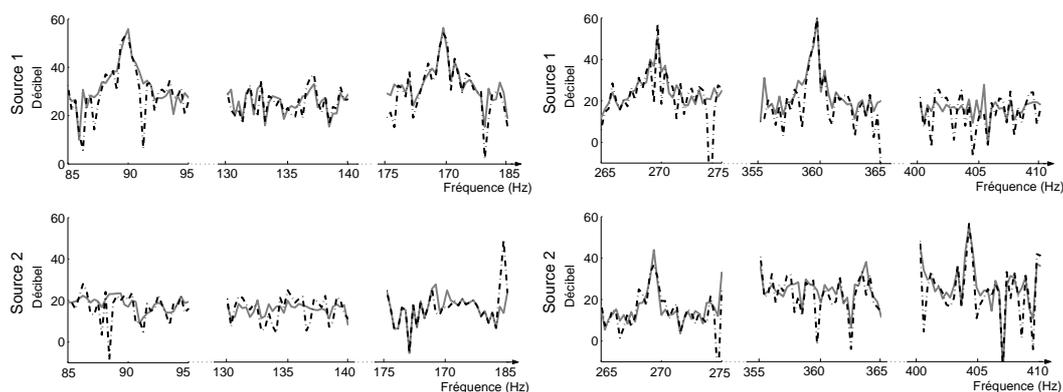


FIG. V.29 – Restitution de la fondamentale et des harmoniques dans le cas **BE/BI**. (—) Sources virtuelles mesurées. (.-.) Sources virtuelles restituées

Les fréquences caractéristiques sont associées à chaque source virtuelle, donc à chaque source réelle. Ainsi, nous pouvons diagnostiquer un défaut de bague extérieure sur le premier roulement et un défaut de bague intérieure sur le deuxième. Il est à noter que la fréquence de 405Hz, qui est hors bande optimisée, est bien restituée. Ceci prouve qu'un problème instable ne signifie pas nécessairement restitution inexacte.

V.2.4.6 Cas bagues extérieures/bagues intérieures, BEs/BIs

Désormais, nous réalisons des essais avec des défauts combinés. Les deux roulements comportent un défaut de bague extérieure de 8mm^2 et un défaut de bague intérieure de 20mm^2 , dont les fréquences sont respectivement 89.2Hz et 135.8Hz . L'écart entre les deux surfaces a été expliqué dans la section 5.2.4.5.

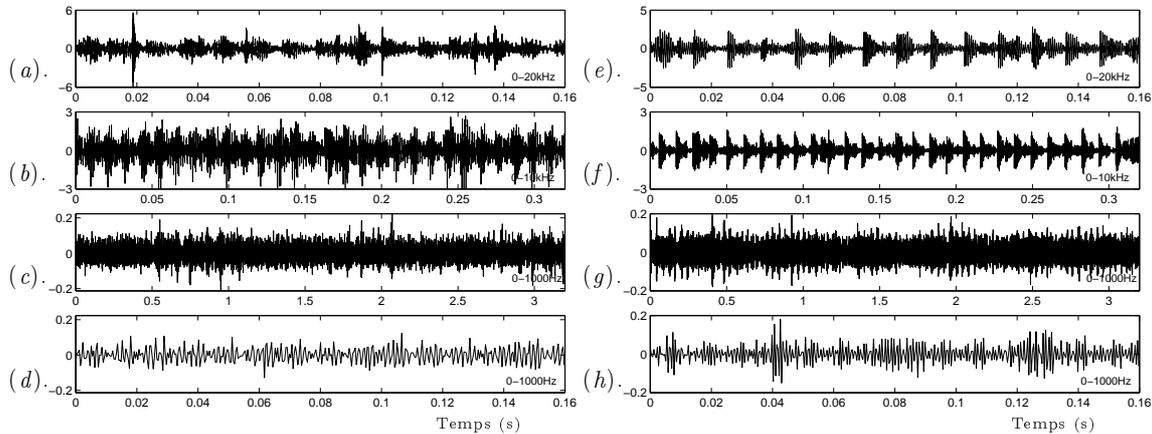


FIG. V.30 – Signaux temporels des sources virtuelles mesurées dans le cas **BEs/BIs**. Source 1 échantillonnée à (a) 51200Hz , (b) 25600Hz , (c) 2560Hz , (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s . Source 2 échantillonnée à (e) 51200Hz , (f) 25600Hz , (g) 2560Hz , (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s .

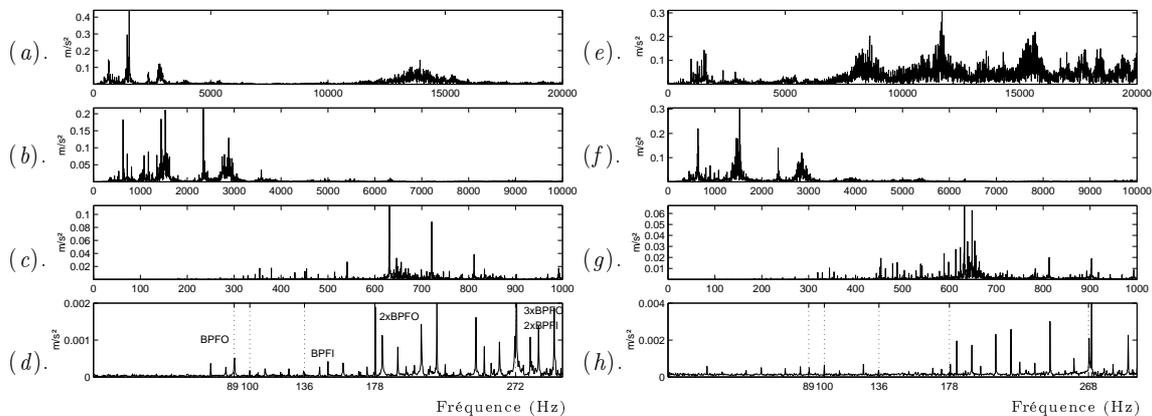


FIG. V.31 – Spectres des sources virtuelles mesurées dans le cas **BEs/BIs**. Spectres de la source 1 sur (a) $0-20000\text{Hz}$, (b) $0-10000\text{Hz}$, (c) $0-1000\text{Hz}$, (d) $0-300\text{Hz}$. Spectres de la source 2 sur (e) $0-20000\text{Hz}$, (f) $0-10000\text{Hz}$, (g) $0-1000\text{Hz}$, (h) $0-500\text{Hz}$.

Les signaux temporels, figure V.30, des sources virtuelles correspondent à des réponses à des signaux chocs d'un défaut bague extérieure et bague intérieure ce qui génèrent des signaux ininterprétables sans une transformée de Fourier. Les signaux temporels des observations résultent donc de quatre défauts provenant des deux roulements, figure V.32. Les spectres des sources virtuelles, figure V.31, présentent toutes les raies caractéristiques des défauts, c'est-à-dire 89.2 , 135.8 , 178.4 , 267.6 , 356.8Hz . Les spectres des observations, figure V.33, par contre ne les présentent pas toutes. La raie à 135Hz n'existe pas sur le spectre de l'observation 2. Pour les 4 spectres, des sources virtuelles et des observations, nous distinguons les deux fréquences carac-

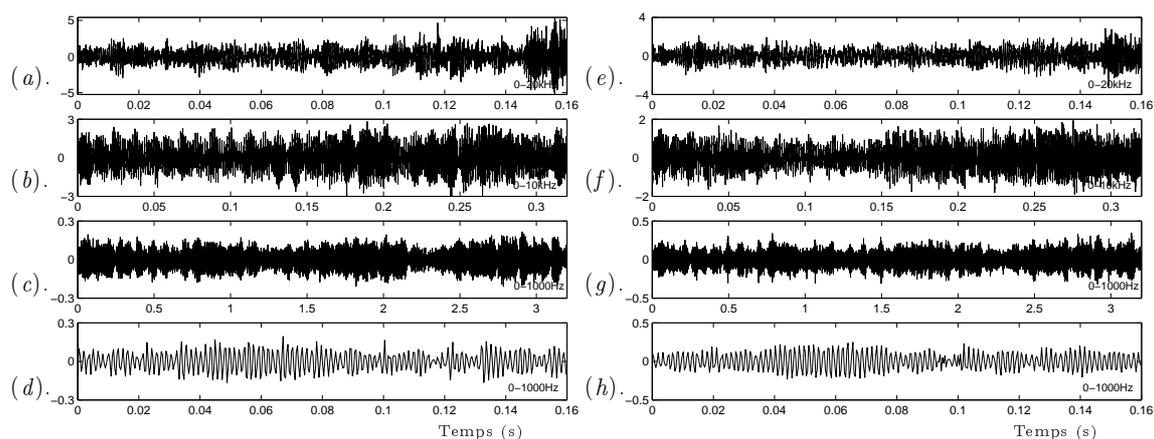


FIG. V.32 – Signaux des observations dans le cas **BEs/BIs**. Observation 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Observation 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s.

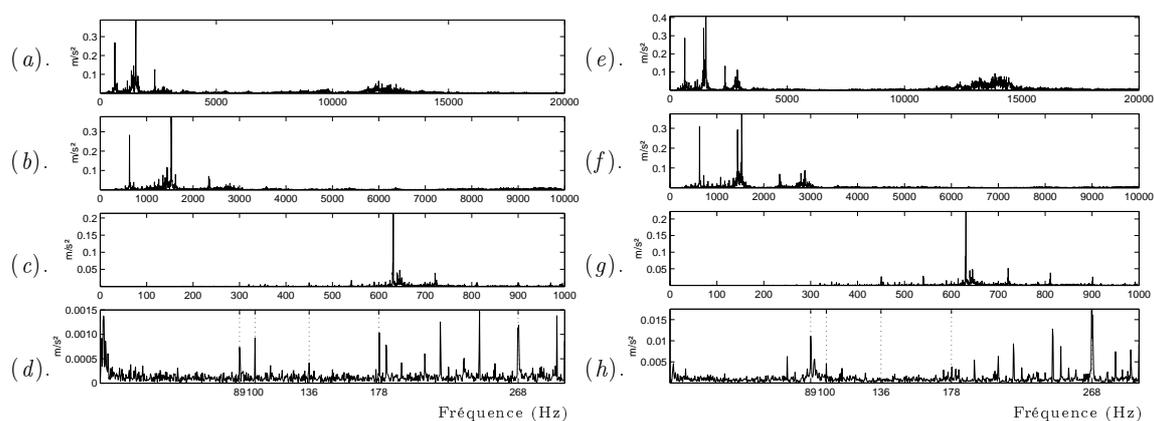


FIG. V.33 – Spectres des observations dans le cas **BEs/BIs**. Spectres de l'observation 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-300Hz. Spectres de l'observation 2 sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

téristiques proches de 270Hz, c'est-à-dire la deuxième harmonique du défaut BI et la troisième harmonique du défaut BE.

Les restitutions, figure V.34, présentent des résultats tout à fait convenables. Nous revenons bien aux fréquences caractéristiques présentes dans les spectres des sources virtuelles pour les fréquences comprises entre 0 et 400Hz, par contre la fréquence 405Hz est sujette à une mauvaise restitution. Remarquons que la détection d'un défaut BI n'est possible qu'à partir d'une harmonique car la fondamentale est inexistante sur les sources virtuelles choisies. Il est alors intéressant de corrélérer l'emplacement des capteurs pour la restitution, avec les positions optimales de la détection "classique".

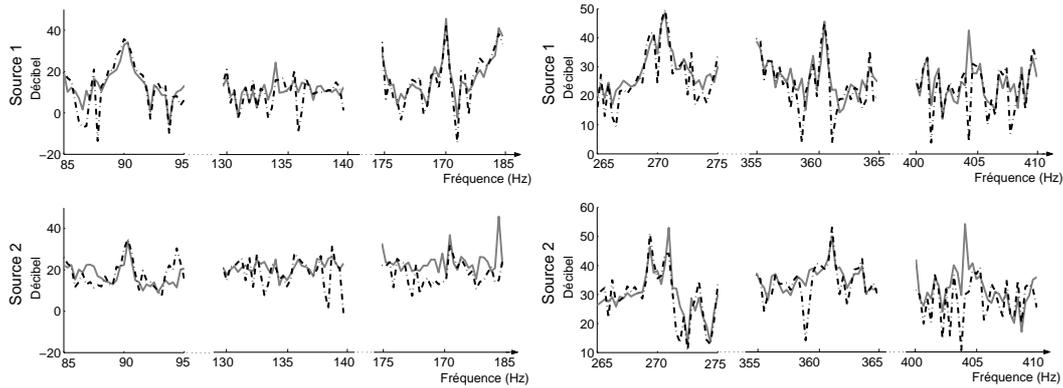


FIG. V.34 – Restitution de la fondamentale et des harmoniques dans le cas **BEs-BIs**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées

V.2.5 Corrélation avec la meilleure position du capteur dans le cadre d'une détection classique

Dans cette section, nous allons corréler les points optimaux de mesures utilisés dans le cadre d'une détection classique et les méthodes de restitution. Les points optimaux pour ce principe de détection correspondent aux amplitudes maximales en accélérations. Ainsi, les meilleurs points de mesures sont en pratique les points situés radialement sur le palier de chaque roulement. C'est pourquoi nous choisissons comme nouvelles sources virtuelles, les points radiaux sur chaque palier dans la direction de la charge.

Les deux observations choisies sont confondues avec les sources virtuelles. Ainsi nous profitons des meilleurs points de mesures donnés par la pratique. Concrètement, nous disposons de deux accéléromètres permettant de définir les sources virtuelles d'une part et les observations d'autre part. Dans cette configuration, les termes diagonaux de la matrice de transmissibilité sont égaux à l'unité. Dans ce cas précis, le conditionnement déterminé est de 6.5 ce qui justifie la stabilité du problème.

Par ailleurs, nous pouvons vérifier les points de mesures optimaux pour diagnostiquer l'état des roulements avec la méthodologie présentée dans la thèse d'Estocq [Esto 04] par voie numérique. L'excitation du modèle numérique est réalisée avec un signal triangulaire sur un nœud représentant la liaison bille-bague extérieure, figure V.35.

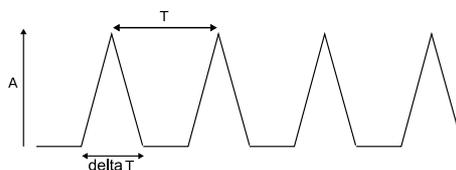


FIG. V.35 – Signal choc modélisé.

Ce signal est défini par trois paramètres : ΔT , A , T . ΔT caractérise la largeur du défaut, A représente l'intensité du signal d'excitation dont l'amplitude est fixée par une valeur arbitraire liée à la charge statique appliquée au roulement. T représente la période du signal qui est directement déduite de la fréquence caractéristique d'un défaut de BE.

L'analyse de l'amplitude du signal numérique montre les points optimaux de détection. Ces points correspondent à une amplitude maximale du déplacement. La figure V.36 les illustre. Le calcul de l'amplitude des signaux sur l'ensemble de la structure, figure V.36.a, montre que les nœuds des paliers situés dans la direction de la charge présentent les signaux d'amplitudes

maximales. Ces amplitudes sont de l'ordre de 10 fois supérieures à celles obtenues sur une face du carter, ainsi les amplitudes élevées au palier noient les informations sur les autres faces.

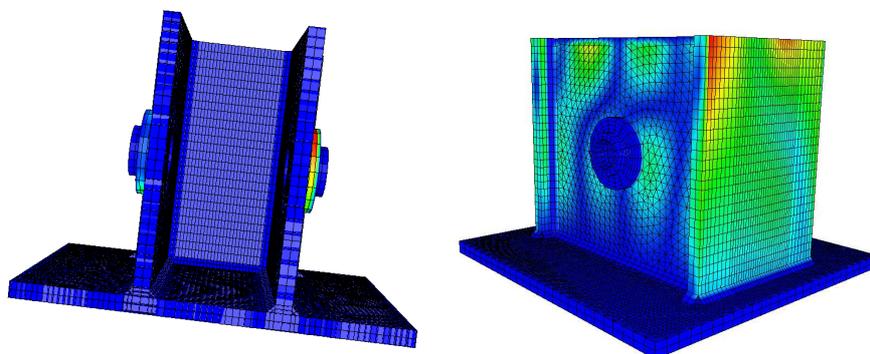


FIG. V.36 – Détermination de la meilleure position. (a) Calcul réalisé sur l'ensemble du carter. (b) Calcul réalisé sans les paliers.

La suppression des paliers au niveau du calcul permet d'observer les autres points optimaux sur la structure, figure V.36.b. Sans les paliers, les points optimaux sont localisés sur les montants car les positions sont radiales par rapport à l'excitation, et au plus proche du roulement sur l'axe du chargement. Ceci correspond aux résultats trouvés par Estocq lors de son étude sur un carter du même type mais dont les parois étaient beaucoup plus souples.

Nous considérons le cas de défauts simultanés **BEs/BIs**, où la restitution présentée précédemment donne un diagnostic de défaut BI peu fiable. Nous rappelons que les deux défauts sont présents sur chaque roulement et ont pour fréquence 89.2Hz pour le défaut BE et 135.8Hz pour le défaut BI. Pour ce nouveau cas, les réponses aux chocs sont plus distinctes que pour une position axiale, figure V.37. De même, les spectres des sources virtuelles, figure V.38, et des observations, figure V.39, présentent des raies spectrales plus significatives sauf pour la fréquence harmonique de 178.4Hz de la source virtuelle 2. Ainsi, la restitution est améliorée pour l'ensemble des fréquences.

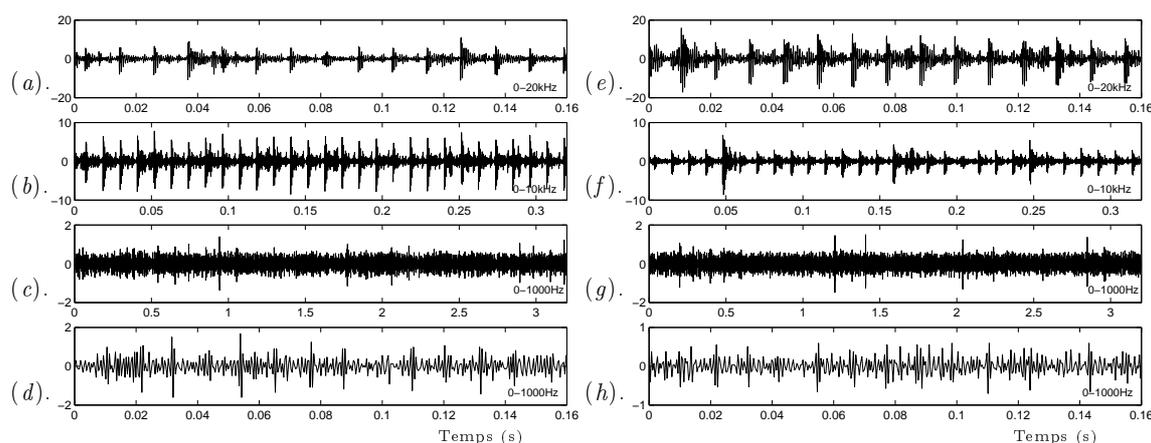


FIG. V.37 – Signaux temporels des sources virtuelles mesurées **BEs/BIs** en position radiale. Source 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Source 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s

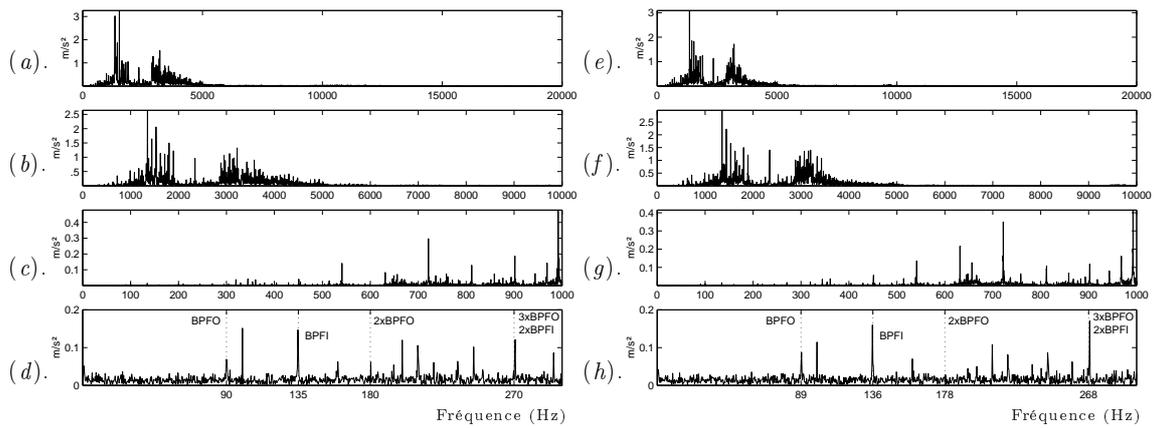


FIG. V.38 – Spectres des sources virtuelles mesurées **BEs/BIs en position radiale**. Spectres de la source 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-300Hz. Spectres de la source 2 sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

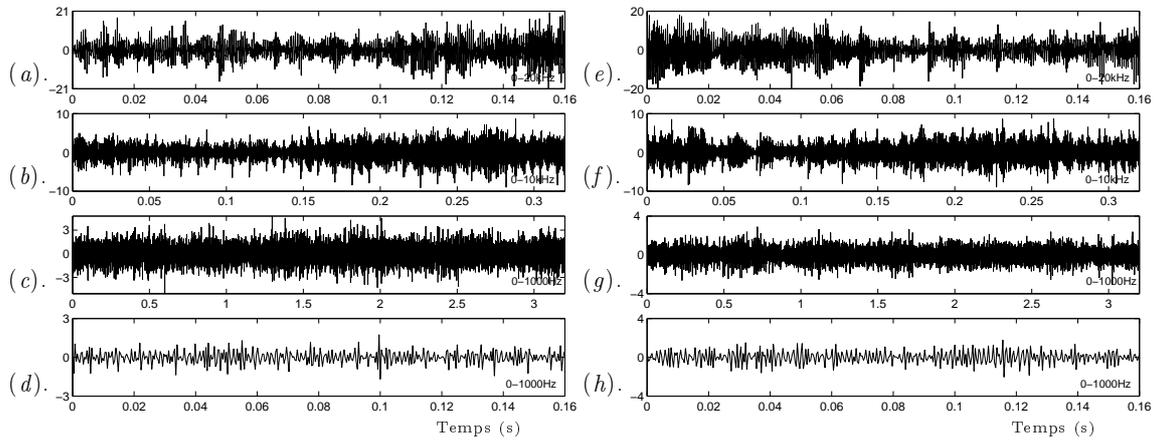


FIG. V.39 – Signaux temporels des observations **BEs/BIs en position radiale**. Observation 1 échantillonnée à (a) 51200Hz, (b) 25600Hz, (c) 2560Hz, (d) 2560Hz zoomée sur 0.16s. Observation 2 échantillonnée à (e) 51200Hz, (f) 25600Hz, (g) 2560Hz, (h) 2560Hz zoomée sur 0.16s

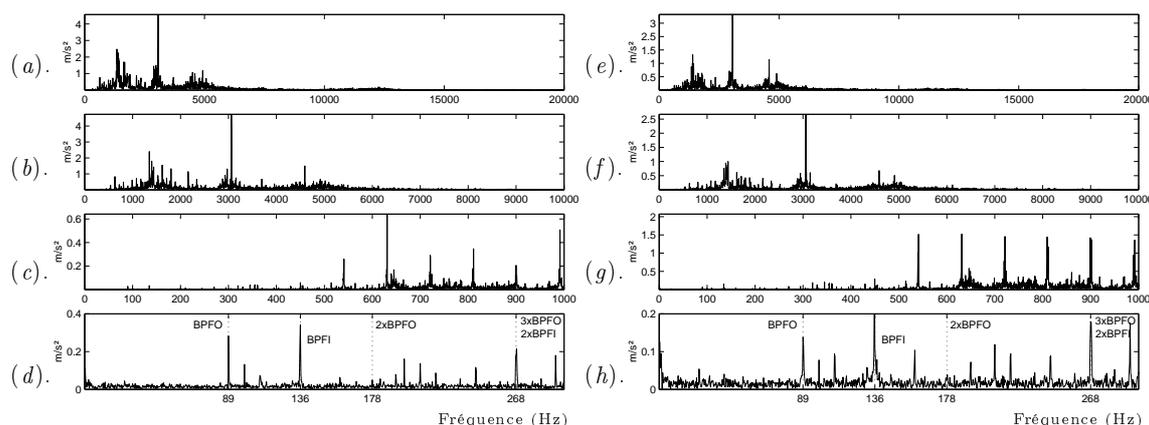


FIG. V.40 – Spectres des observations **BEs/BIs en position radiale**. Spectres de l'observation 1 sur (a) 0-20000Hz, (b) 0-10000Hz, (c) 0-1000Hz, (d) 0-300Hz. Spectres de l'observation 2 sur (e) 0-20000Hz, (f) 0-10000Hz, (g) 0-1000Hz, (h) 0-500Hz.

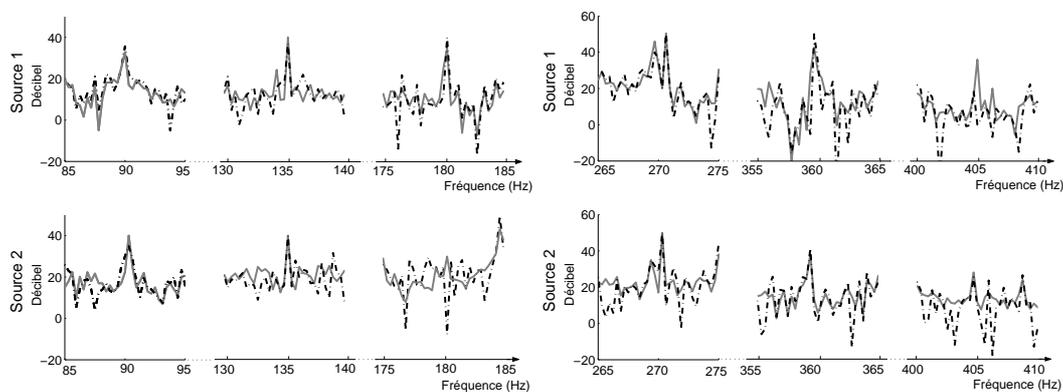


FIG. V.41 – Restitution de la fondamentale et des harmoniques **BEs/BIs en position radiale**. (—) Sources virtuelles mesurées. (-.-) Sources virtuelles restituées.

V.2.6 Restitution de la valeur RMS

Dans le sens d'un diagnostic de l'état de l'endommagement, nous tentons de restituer un indicateur temporel (valeur RMS) pour chacune des sources réelles. En pratique, la valeur RMS est calculée à partir d'une mesure vibratoire et caractérise à l'endommagement global du système. Le principe de restitution des sources va nous permettre d'obtenir des valeurs RMS qui correspondent à l'endommagement d'un seul composant et ainsi le surveiller dans le temps. Les valeurs RMS des signaux enregistrés par les deux accéléromètres sont calculées avant et après inversion. Cette valeur RMS calculée pourrait permettre de suivre l'évolution des tailles de défauts.

Ce principe est utilisé sur le cas où les deux roulements possèdent un défaut sur BE. Les signaux restitués sont filtrés autour des fréquences caractéristiques (90Hz et ses multiples). Le calcul de la valeur RMS est effectué sur les signaux temporels restitués. Une valeur RMS est calculée également sur des signaux restitués dans la bande 0-1000Hz pour montrer l'inefficacité de restitution sur une large bande de fréquences. Les résultats sont répertoriés dans le tableau V.1. Nous rappelons que l'accéléromètre 1, noté Acc.1, peut jouer le rôle d'observation ou de source virtuelle.

Dans le cas de la restitution sur la bande 0-1kHz, les valeurs RMS des signaux mélangés sont

0-1kHz	Acc.1	Acc.2	Filtré	Acc.1	Acc.2
obs.	0.342	0.351	obs.	0.0247	0.0173
s. mes.	0.158	0.291	s. mes.	0.0140	0.0261
s. restituée	0.282	0.387	s. restituée	0.0158	0.0244
Ecartés relatifs	78%	33%	Ecartés relatifs	13%	6%

TAB. V.1 – Valeur RMS sur la bande 0-1kHz et valeurs RMS filtrées autour de la fondamentale et trois harmoniques

supérieures aux valeurs RMS mesurées en présence d'un seul roulement endommagé. Cependant, les valeurs RMS des deux signaux restitués ne sont pas satisfaisantes. Les écarts relatifs entre les valeurs mesurées en présence d'un seul des roulements défectueux et les valeurs mesurées sur les signaux restitués sont de 78% et 33%.

Par contre, les résultats, dans le cadre d'une restitution optimisée, sont très satisfaisants. Les erreurs relatives n'excèdent pas les 13%. Ainsi, les valeurs RMS calculées après inversion sont représentatives des valeurs RMS mesurées dans le cas d'un seul roulement défectueux, sur la bande de fréquence étudiée. Cependant, notons que nous sommes limités à une bande de fréquences relativement étroite (entre 0 et 400Hz) car les zones optimisées par les cartes de conditionnement ne sont valables que dans cette bande. Ceci pénalise la signification de la valeur RMS car elle ne reflète qu'un signal avec une bande relativement étroite, ce qui peut poser des problèmes d'interprétation. Dans notre cas, les valeurs RMS de la source 2 sont plus élevées que pour le mélange sur l'accéléromètre 2.

V.2.7 Suivi de l'état d'endommagement

L'intérêt majeur de la restitution est de suivre dans le temps l'évolution de la sévérité des défauts. Nous allons à travers cette section faire un pas vers ce procédé. Les limitations de la restitution sur des bandes de fréquences étroites offrent des valeurs RMS tronquées, ce qui peut pénaliser le suivi dans le temps.

Nous simulons, à travers la taille du défaut sur bague extérieure, le grossissement de celui-ci. Pour cela nous disposons de trois roulements avec des tailles de défaut différentes (20, 14 et 8mm²) comme première source réelle et d'un roulement avec une taille de défaut de 20mm² pour la deuxième source réelle. Le tableau V.2 résume les combinaisons utilisées.

	Source 1 réelle	Source 2 réelle
Cas 1	BE 8mm ²	BE 20mm ²
Cas 2	BE 14mm ²	BE 20mm ²
Cas 3	BE 20mm ²	BE 20mm ²

TAB. V.2 – Configuration.

Pour chacun des cas, la valeur RMS est calculée pour les signaux observations et les signaux sources virtuelles dont l'évolution suivant la taille du défaut paraît en figure V.42.b. Il apparaît que le suivi de l'endommagement réalisé à partir du signal vibratoire des signaux observations n'est pas fiable car il résulte d'un mélange de deux sources vibratoires. Les observations 1 et 2 surestiment l'endommagement de la source 1 et sous-estiment l'endommagement de la source 2.

L'inversion du système, à partir des informations enregistrées par les observations, permet de restituer une valeur RMS caractéristique de chaque source réelle. Ces résultats sont présentés en figure V.42.a. Nous obtenons des valeurs RMS pour les sources virtuelles calculées et restituées proches l'une de l'autre. On peut même noter une évolution qui semble être linéaire. Cependant,

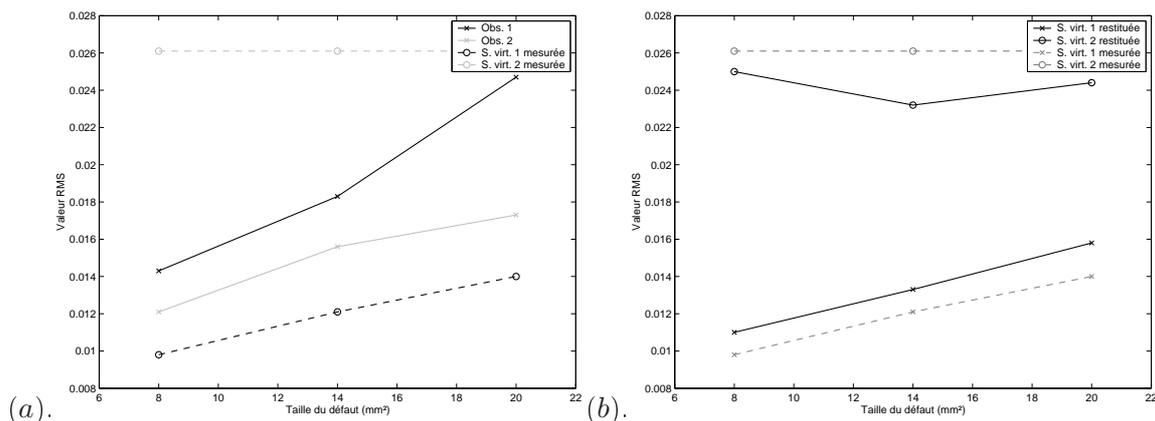


FIG. V.42 – (a) Valeurs RMS en fonction de la taille du défaut BE du roulement 1. (b) Comparaison de la valeur RMS calculée pour les sources virtuelles mesurées et restituées en fonction de la taille du défaut BE du roulement 1.

le nombre de cas simulant le grossissement du défaut est faible et ne permet pas de définir une tendance fiable. Il serait donc intéressant de poursuivre cette investigation aussi bien dans le choix de l'indicateur que dans le nombre de cas pour confirmer la tendance.

V.3 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons validé les méthodes de restitution sur une structure proche d'une structure industrielle. Ces méthodes permettent de quantifier mais aussi de localiser les défauts de roulements dans la structure. Ces défauts peuvent être de quatre natures différentes : défaut sur BE, défaut sur BI, défaut de cage et défaut de bille. Les deux premiers types de défauts sont les plus souvent rencontrés et sont sujets à des restitutions très satisfaisantes malgré un défaut sur BI mobile. Par contre, les deux autres types de défauts sont particuliers. Effectivement, nous ne disposons pas de roulements adéquats pour élaborer des défauts simplement sur bille ou sur cage, ce qui est peu préjudiciable car ils se manifestent rarement.

Nous soulignons également que le diagnostic sera amélioré si les raies spectrales caractéristiques sont présentes, c'est pourquoi une étude des points optimaux (position radiale) obtenus pour la détection est recommandée. De plus, ce cas permet de stabiliser d'autant plus l'inversion car les raies spectrales sont le plus souvent énergétiques. Enfin, nous éclairons la piste d'un suivi vibratoire de l'endommagement. Effectivement, les valeurs RMS des observations permettent d'obtenir des valeurs RMS caractéristiques du fonctionnement de chaque source réelle et ainsi, il devient possible de suivre l'état d'endommagement de chacune d'entre elles.

Conclusion générale et Perspectives

Ce travail de thèse met en œuvre les problèmes inverses dans le cadre de la maintenance préventive conditionnelle en vue de quantifier et de localiser les sources vibratoires générées par la défaillance d'un composant ou de plusieurs composants mécaniques. Deux approches, axées sur l'optimisation de la position des capteurs, sont proposées et validées expérimentalement.

La maintenance préventive conditionnelle par analyse vibratoire permet aujourd'hui d'augmenter la disponibilité des équipements et de sécuriser le personnel d'une entreprise. Aujourd'hui encore, les outils employés pour élaborer une politique de maintenance se voient améliorés avec l'appui, en particulier, de la dynamique des structures. L'analyse vibratoire en maintenance permet d'intervenir à trois niveaux d'analyse à partir de mesures vibratoires : la surveillance à l'aide d'indicateurs dits globaux, le diagnostic avec des techniques avancées et le suivi qui permet de prédire le comportement de l'élément étudié.

Notre objectif est alors d'améliorer le diagnostic et le suivi par l'introduction des méthodes inverses. Ce travail étudie le cas particulier des roulements, omniprésents dans le parc des machines tournantes.

Les mesures de vibrations sont généralement réalisées grâce à des accéléromètres positionnés sur la structure suivant une certaine pratique. Dans le cas du suivi des roulements, ces positions sont situées au plus près de l'élément, dans des directions axiales et radiales pour que le signal recueilli résulte au mieux du fonctionnement du roulement et non d'un mélange de plusieurs composants. Cependant, le mélange est parfois inévitable, et d'autant plus si le palier est inaccessible obligeant à déplacer le capteur sur une autre partie de la structure. Les indicateurs utilisés tels que valeur RMS, Kurtosis ou facteur crête caractérisent ce mélange et ne sont en aucun cas significatifs du comportement d'un composant mécanique unique.

Nous proposons donc, dans ce travail, de localiser et quantifier les défauts vibratoires sur chaque composant et de déduire une valeur RMS caractéristique de chaque composant afin de répondre à notre objectif : amélioration du diagnostic et du suivi. Nous introduisons de ce fait la notion de problèmes inverses.

La notion de problème inverse est introduite dans le chapitre 2. Ce chapitre offre un tour d'horizon sur ces problèmes afin de cibler leur implication dans le domaine vibratoire. L'approche qui s'inscrit dans notre problématique est l'approche linéaire où le modèle de mélange et les mélanges sont connus. Ce type d'approche rentre dans la famille des problèmes mal-posés car il souffre d'instabilité face à l'inversion. Effectivement, des erreurs de mesures ou du bruit de mesures peuvent s'amplifier pendant l'inversion et fausser les résultats des sources restituées. Un critère de stabilité, bien connu, est le nombre de conditionnement. Sa valeur est d'autant plus grande que le problème est instable. Ce chapitre décrit la méthode d'inversion utilisée : la décomposition en valeurs singulières (DVS). La présentation de la DVS met en avant les éléments sujets

à beaucoup d'attention : les valeurs singulières. Elles définissent le nombre de conditionnement de la matrice de transfert, c'est-à-dire la stabilité de l'inversion. Ce besoin de stabilité a donné naissance à des méthodes de stabilisation qui se traduisent physiquement et mathématiquement. Les méthodes physiques sont basées sur la position des capteurs, la modification de la structure par l'ajout d'un batteur, la pondération des réponses vibratoires. Les méthodes mathématiques proposent soit de tronquer ou régulariser les petites valeurs singulières, soit d'utiliser les moindres carrés totaux basés sur la concaténation de la matrice de transfert et du vecteur des réponses.

Ce travail de thèse s'inspire de ces travaux pour mettre en œuvre la restitution des sources vibratoires pour le compte de la maintenance conditionnelle préventive. Certains points se démarquent des études précédentes, comme le nombre d'observations (capteurs), la bande de fréquences étudiée et la nature des quantités restituées.

Effectivement, nous souhaitons utiliser un nombre restreint d'observations, et optimiser la restitution sur des bandes étroites de fréquences autour des fréquences caractéristiques de défauts de roulements introduites au chapitre 1. **L'objectif est ainsi non pas d'augmenter la quantité d'informations mais la qualité** (données par les capteurs). La nature des quantités restituées se détache des autres études qui restituent des forces à partir de mesures en accélération, alors que notre travail restitue des mesures en accélération à partir de mesures de même nature.

La démarche fut naturellement d'évaluer l'existence de zones d'une structure où le problème d'inversion est stable à partir d'un système carré et pour une bande de fréquences étroite. Ceci donne lieu à des cartes représentant les lignes de niveaux des nombres de conditionnement. Cette évaluation est effectuée par une approche numérique où, pour chaque configuration de positions des capteurs, la matrice de transmissibilité (les quantités restituées sont des mesures d'accélération) est déterminée ainsi que le nombre de conditionnement. Ces zones ont été ensuite définies physiquement ce qui a donné naissance à une deuxième approche dite expérimentale. Ces zones ont été corrélées avec la position des capteurs par l'expression du nombre de conditionnement de la matrice de transmissibilité en fonction des déformées propres. Cette corrélation met en évidence une relation mathématique qui donne la position des capteurs sur la structure.

Nous développons la notion de "carte de conditionnement". Ces cartes représentent en lignes de niveaux des nombres de conditionnement et révèlent ainsi les zones optimales de stabilité. Celles-ci sont déterminées par deux approches, numérique et expérimentale via l'analyse modale.

Les méthodologies de ces deux approches ont été validées et comparées avec une méthode de régularisation type L-Curve, tout d'abord sur une plaque encadrée-libre régie par deux pots vibrants, puis, sur un carter constitué de deux roulements pouvant être endommagés. De part sa géométrie réelle, la plaque a permis de vérifier la symétrie des zones, et ainsi de juger de la fiabilité des résultats. Le carter, quant à lui, permet de se rapprocher d'une configuration industrielle. La détermination des zones de stabilité a été déterminée par ces deux approches, expérimentale et numérique. La restitution a pu ensuite avoir lieu dans un cadre où le problème est stable. Les résultats de restitution sont très prometteurs dans le cas des différents types de défauts, bague extérieure, bague intérieure. Nous attribuons aux techniques traitées par les problèmes inverses différents rôles suivant les cas d'endommagements. Si un seul défaut est présent sur l'un des deux roulements, l'inversion a le rôle de localisation et de quantification du défaut. Si plusieurs défauts de même type (bague extérieure par exemple) existent, on confère à l'inversion le rôle de quantification du défaut sur chaque roulement. Si plusieurs défauts sont présents, l'inversion

permet de quantifier chacun des défauts et de les localiser même s'ils sont de nature différente, si la détection est possible.

Nous avons également mis en corrélation les points optimaux de détection dans le cas classique, c'est-à-dire au plus près du palier radialement, et les zones fournies par nos deux approches. Les positions des capteurs déterminées sont optimisées pour stabiliser l'inversion, cependant parfois leur disposition ne permet pas d'obtenir des signaux significatifs du défaut sur la bande étudiée. Cette corrélation permet alors d'obtenir de meilleurs résultats du point de vue de la fiabilité du diagnostic.

Enfin, nous introduisons l'avantage d'une inversion dans le cas d'un suivi de l'endommagement pour l'analyse des vibrations qu'il génère. Trois défauts de tailles différentes ont été réalisés sur deux roulements et l'inversion a permis la détermination de la contribution via la valeur RMS de chacun des deux roulements. Cette méthodologie donne le calcul des valeurs RMS des deux roulements et a surtout l'avantage de fiabiliser le diagnostic par un suivi industriel de l'évolution d'une dégradation sur un ou plusieurs roulements.

Ces approches sont réalisées sur des bandes étroites de fréquences et en basses fréquences. Une évolution intéressante aux approches présentées serait une stabilisation de l'inversion pour une large bande de fréquences pour obtenir plus de fréquences caractéristiques des défauts en présence, c'est-à-dire des harmoniques. Les perspectives peuvent s'inscrire soit dans une logique de ces travaux, notamment à travers des compléments, soit dans une nouvelle technique grâce aux systèmes de calculs de plus en plus performants.

La fiabilité des approches proposées doit être testée pour différents cas :

- sur différentes structures pour s'assurer l'existence de zones de bon conditionnement,
- sur des composants de nature différente tels que les engrenages,
- sur différents effets de montage, quantité de lubrifiant, type de lubrifiant, forme du défaut, car ces paramètres font que le signal enregistré n'est jamais identique.

L'investigation en ce qui concerne le suivi doit être poursuivie pour étudier les évolutions de valeurs RMS locale en fonction de la taille de défauts et de la valeur RMS globale, sur des défauts obtenus soit par électro-érosion, soit naturellement. L'étude peut également être portée sur le choix d'un indicateur adéquat.

Les progrès permanent des systèmes de calculs permettent d'envisager de traiter le problème en problème direct par le biais d'une boucle sur les sources afin d'éviter les problèmes de régularisation.

Annexe A

Pression de Hertz

Quand deux solides a et b sont mis en contact sous charge, ils se touchent dans un premier temps en un point O puis sur une petite surface face aux dimensions des deux solides. Cette surface augmente à mesure que la charge augmente. La théorie de Hertz considère les contraintes et les déformations de deux corps lisses et ellipsoïdes en contact, figure A.1.

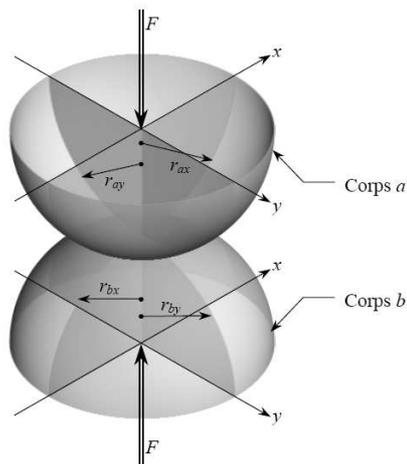


FIG. A.1 – Caractéristiques dimensionnelles de deux ellipsoïdes en contact

L'application de la théorie de Hertz nécessite quelques hypothèses :

- les matériaux doivent être homogènes,
- les contraintes doivent être inférieures à la limite d'élasticité de ces matériaux ;
- les dimensions de la zone de contact sont faibles par rapport aux rayons des ellipsoïdes ;
- les corps sont en équilibre statique.

La distribution de pression sur la surface de contact entre les deux ellipsoïdes nécessite de définir quelques paramètres géométriques.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}$$

$$\alpha_r = \frac{R_y}{R_x} \tag{A.1}$$

$$\tag{A.2}$$

où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_x} &= \frac{1}{r_{ax}} + \frac{1}{r_{bx}} \\ \frac{1}{R_y} &= \frac{1}{r_{ay}} + \frac{1}{r_{by}}\end{aligned}\tag{A.3}$$

Nous définissons la relation du paramètre constitutif, E , qui lie tous les caractéristiques des matériaux. E_a , E_b , ν_a , ν_b , sont les modules d'Young et les coefficients de Poisson des deux matériaux.

$$E = \frac{2}{\frac{(1-\nu_a^2)}{E_a} + \frac{(1-\nu_b^2)}{E_b}}\tag{A.4}$$

La distribution de pression sur la surface, figure A.2, forme une ellipse de contact dont les diamètres principaux sont D_x et D_y . Cette distribution est donnée par la relation :

$$p = p_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{D_x}\right)^2 - \left(\frac{2y}{D_y}\right)^2}\tag{A.5}$$

avec :

$$\begin{aligned}D_x &= 2\sqrt[3]{\frac{6\Xi FR}{\pi k_e E}} \\ D_y &= 2\sqrt[3]{\frac{6k_e^2 \Xi FR}{\pi E}}\end{aligned}\tag{A.6}$$

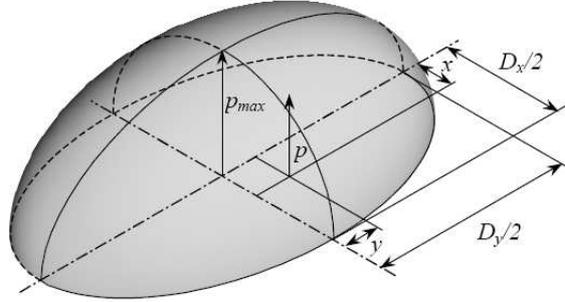


FIG. A.2 – Distribution de la pression sur la surface de contact entre deux corps.

Ξ est l'intégrale elliptique du premier type, k_e est le paramètre elliptique. Suivant la théorie classique de Hertz, ces trois grandeurs sont déduites de la solution d'une équation transcendantale les reliant à la géométrie des corps en contact. Hamrock [Hamr 99] propose cependant une solution analytique dépendant directement du paramètre géométrique α_r , tableau A.1.

Si $1 \leq \alpha_r \leq 100$	Si $0.01 \leq \alpha_r \leq 1$
$k_e = \alpha_r^{2/\pi}$	$k_e = \alpha_r^{2/\pi}$
$\Xi = 1 + \frac{\pi/2 - 1}{\alpha_r}$	$\Xi = 1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \alpha_r$

TAB. A.1 – Expressions analytiques pour les paramètres k_e , Ξ , [Hamr 99]

Bibliographie

- [Acha 03] S. Achard. *Mesures de dépendance pour la séparation aveugle de sources, Application aux mélanges post non linéaires*. Thèse, Université de Grenoble, 2003.
- [Alle 82] R. Allemang et D. Brown. “A correlation coefficient for modal vector analysis.”. Dans : *IMAC*, 1982.
- [Anto 05] J. Antoni. “Blind separation of vibration components : Principles and demonstrations.”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19, No. 6, pp. 1166–1180, 2005.
- [Aude 94] S. Audebert. *Evaluation comparative de différentes méthodes d'inversion*. Collection de notes internes de la direction des études et recherches, EDF, 1994.
- [Auge 01] D. Augeix. “Analyse vibratoire des machines tournantes”. *Les techniques de l'ingénieur*, Vol. BM5145, 2001.
- [Balm 00] E. Balmès. *Structural Dynamics Toolbox : User's guide, version 4*. Scientific Software Group, 2000.
- [Bard 94] O. Bardou. *Sur des méthodes de surveillance et de diagnostic vibratoire de machines tournantes*. Thèse, Institut National Technologique de Grenoble, 1994.
- [Barr 94] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, et V. der Vorst. “Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods”. *2nd ed. Philadelphia, PA : SIAM*, 1994.
- [Bato 98] J. Batoz, Y. Guo, et F. Mercier. “The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal formings parts.”. *Engineering Computations*, Vol. 15, No. 6, pp. 133–148, 1998.
- [Bayd 01] N. Baydar et A. Ball. “A comparative study of acoustic and vibration signals in detection of gear failures using Wigner-Ville distribution”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 6, pp. 1091–1107, 2001.
- [Bert 73] C. Bert. “Material damping : An introductory review of mathematical modes, measures, and experimental techniques”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 29, No. 2, pp. 129–153, 1973.
- [Bola 02] F. Bolaers. *Contribution à l'étude et au développement d'un système intégré de suivi de l'endommagement de composants mécaniques sur machines tournantes*. Thèse, Université de Reims, 2002.
- [Bola 04] F. Bolaers, B. Pottier, et J.-P. Dron. “Dispositif de détection des défauts des machines tournantes pour la détection des composants mécaniques des machines tournantes.”. *Brevet d'invention n° 04 11036 du 19 Octobre 2004*, Vol. 2 876 795, 2004.
- [Boll 79] S. Boll. “Suppression of acoustic noise in speech using spectral subtraction”. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing*, Vol. 28, No. 2, 1979.
- [Bonn 99] Bonnet. *Problèmes inverses : De l'expérimentation à la modélisation*. Paris, 1999.

- [Boub 98] O. Boubal et J. Oksman. "Application of the reallocated smoothed pseudo Wigner-Ville distribution to knock detection". *Traitement du signal*, Vol. 15, No. 4, pp. 337–347, 1998.
- [Boug 05] N. Bouguerriou, M. Haritopoulos, C. Capdessus, et L. Allam. "Novel cyclostationarity-based blind source separation algorithm using second order statistical properties : Theory and application to the bearing defect diagnosis.". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19, No. 6, pp. 1260–1281, 2005.
- [Boul 98] A. Boullenger et C. Pachaud. *Diagnostic vibratoire en maintenance préventive*. Dunod, 1998.
- [Brau 75] S. Braun. "The extraction of periodic wave forms by domain averaging". *Acoustica*, Vol. 32, pp. 69–77, 1975.
- [Camp 85] Campagna-Varenne. "Etude des roulements par analyse spectrale". *Vibrations actualités 3*, 1985.
- [Caug 60] T. Caughey. "Classical normal modes in damped linear dynamic systems". *Journal of Applied Mechanics*, pp. 269–271, 1960.
- [Chat 81] G. Chaturverdi et D. Thomas. "Bearing fault detection using adaptive noise canceling". *Publication of the ASME*, Vol. Paper 81-DET-7, New-York, 1981.
- [Chie 04] X. Chimentin, F. Bolaers, L. Rasolofondraibe, et J.-P. Dron. "Systematic restitution method of vibratory sources for a mechanical system". Dans : *5th International Conference Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques.*, CETIM-Senlis, Octobre 2004.
- [Chie 07a] X. Chimentin, F. Bolaers, et J.-P. Dron. "Early detection of fatigue damage on rolling element bearings using adapted wavelet.". *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 129, No. 4, pp. 495–506, 2007.
- [Chie 07b] X. Chimentin, F. Bolaers, L. Rasolofondraibe, et J.-P. Dron. "Inverse approach to the reconstruction and quantification of vibratory sources". *Journal of Vibration and Control*, Vol. 13, No. 8, pp. 1169–1190, 2007.
- [Chie 07c] X. Chimentin, F. Bolaers, L. Rasolofondraibe, et J.-P. Dron. "Localisation et restitution des sources vibratoires. Une approche numérique et expérimentale.". *Mécanique et Industrie*, Vol. 7, No. 5-6, pp. 537–551, 2007.
- [Chie 07d] X. Chimentin, L. Rasolofondraibe, F. Bolaers, et O. Cousinard. "Application of an adapted wavelet to bearing defect vibratory signal.". *Journal of Vibration and Control*, p. En presse, 2007.
- [Cohe 89] L. Cohen. "Time-frequency distributions - A review". *Proceedings of the IEEE*, Vol. 77, No. 7, pp. 941–981, 1989.
- [Como 94] P. Comon. "Independence components analysis, a new concept.". *Signal Processing*, Vol. 36, No. 3, pp. 287–314, 1994.
- [Debr 03] K. Debray. *Contribution au développement d'outils numériques en maintenance prédictive et en simulation de l'emboutissage de tôles minces*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Reims, 2003.
- [Debr 04] K. Debray, F. Bogard, et Y. Guo. "Numerical vibration analysis on defect detection in revolving machines using two bearing models.". *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 74, No. 1-2, pp. 287–314, 2004.
- [DelP 89] M. DelPedro et P. Pahud. *Mécanique vibratoire. Systèmes discrets linéaires*. Presses Polytechniques Romandes ;, 1989.

- [Demo 99] G. Demoment et J. Idier. *Approche bayésienne pour la résolution des problèmes inverses en imagerie.*, Chap. Chapitre III, pp. 59–77. Vol. 22, Arago, 1999.
- [Desa 87] G. Desanghere. *Identification and quantification of noise and vibration sources using frequency response and coherence functions.* Thèse, Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium, 1987.
- [Dib 02] R. Dib. *Caractérisation vibratoire des machines industrielles par des méthodes pseudo inverses : méthodologie, instrumentation et expérimentation.* Thèse, Université de Technologie Compiègne, 2002.
- [Dono 95] D. Donoho. “Denoising by soft-thresholding”. Dans : *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1995.
- [Dron 04] J.-P. Dron, F. Bolaers, et L. Rasolofondraibe. “Improvement of the sensitivity of the scalar indicators (crest factor, kurtosis) using a de-noising method by spectral subtraction : Application to the detection of defects in ball bearings”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 470, No. 1-2, pp. 61–73, 2004.
- [Dron 95] J.-P. Dron. *Elaboration et adaptation d’outils pour l’étude et le suivi de l’endommagement de composants mécaniques par analyse vibratoire.* Thèse, Université de Reims, 1995.
- [DUrs 95] G. D’Urso et L. Cai. “Sources separation method applied to reactor monitoring.”. Dans : *Proceedings Workshop Athos working group*, Girona, Spain, 1995.
- [Elli 88] K. Elliott, J.-N. Juang, et J. Robinson. “Force prediction using singular value decomposition.”. Dans : *Proceedings of IMAC*, Kissimmee, FL, USA, 1988.
- [ElRh 05] M. ElRhabi, H. Fenniri, G. Gelle, et G. Delaunay. “Blind Separation of rotating machine signals using Penalized Mutual Information criterion and Minimal Distortion Principle”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2005.
- [Esto 04] P. Estocq. *Une approche méthodologique numérique et expérimentale d’aide à la détection et au suivi vibratoire de défauts d’écaillage de roulements à billes.* Thèse, Université de Reims, 2004.
- [Ewin 00] D. Ewins. “Modal Testing.”. *London, UK :Research Studies*, 2000.
- [Fabr 01] P. Fabry. *Techniques de séparation de sources appliquées à des signaux vibratoires de machines tournantes.* Thèse, INPG Grenoble, 2001.
- [Fabu 86] J. Fabunmi. “Effects of structural modes on vibratory force determination by the pseudo-inverse technique.”. *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 3, pp. 504–509, 1986.
- [Fabu 87] J. Fabunmi. “Feasibility of dynamic load determination from measured mobilities.”. Dans : *Proceedings of SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, Houston, TX, USA, 1987.
- [Folt 98] E. Foltête. *Identification modale de structures linéaires et faiblement non-linéaires.* Thèse, Université de Besançon, 1998.
- [Fris 95] M. Friswell et J. Mottershead. *Finite element updating in structural dynamics.* Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [Garg 01] A.-K. Garga, K.-T. McClintic, R.-L. Campbell, Y. Chih-Chung, M.-S. Lebold, T.-A. Hay, et C.-S. Byington. “Hybrid reasoning for prognostic learning in CBM systems.”. *Aerospace Conference IEEE Proceedings.*, Vol. 6, pp. 2957–2969, 2001.
- [Gell 98] G. Gelle. *Les statistiques d’ordre supérieur appliquées à la détection et à la séparation de sources. Utilisation en analyse vibratoire et acoustique.* Thèse, Université de Reims, 1998.

- [Gill 05] M. Gilli. “Méthodes numériques”. 2005. Cours, Département d'économétrie, Université de Genève.
- [Golu 65] G. Golub et W. Kahan. “Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix.”. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics : Series B, Numerical Analysis*, Vol. 2, No. 2, pp. 205–224, 1965.
- [Golu 79] G.-H. Golub, M. Heath, et G. Wahba. “Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter.”. *Technometrics*, Vol. 21, No. 2, pp. 215–223, 1979.
- [Grdi 02] M. Grédiac, E. Toussaint, et F. Pierron. “Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1.Principle and definition.”. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2691–2705, 2002.
- [Guo 04] Y. Guo, Y. Li, F. Bogard, et K. Debray. “An efficient Pseudo Inverse Approach for damage modelling in sheet forming process”. *Journal of Material Processing Technology*, pp. 88–97, 2004.
- [Guo 90] Y. Guo, J. D. J.L. Batoz, et P. Duroux. “Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts.”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1385–1401, 1990.
- [Hada 02] J. Hadamard. “Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique.”. *Princeton University Bulletin*, pp. 49–52, 1902.
- [Hadj 01] R. Hadjit. *Méthodes inverses adaptées à l'identification de forces d'excitation de structures mécaniques*. Thèse, Faculté Polytechnique de Mons, 2001.
- [Hamr 99] B.-J. Hamrock, B. Jacobson, et S.-R. Schmid. *Fundamentals of Machine Elements*. McGraw-Hill, New York, 1999.
- [Han 90] M. Han et A. Wicks. “Force determination with slope and strain response measurement.”. Dans : *Proceedings of IMAC 8*, Orlando, USA, 1990.
- [Hans 92] P. Hansen. “Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve.”. *SIAM Review*, No. 561-580, 1992.
- [Hass 96] C. E. Hassani, A. Nabil, et J. Hèrault. *Séparation auto-adaptative de sources dans les mélanges convolutifs. Application à la téléphonie mains-libres dans les voitures*. Thèse, Institut national polytechnique de Grenoble, 1996.
- [Hill 84] B. Hillary et D. Ewins. “The use of strain gauges in force determination and frequency response function measurements”. Dans : *Proceedings of IMAC 2*, Orlando, FL, USA, 1984.
- [Hrau 85] J. Hèrault, C. Jutten, et B. Ans. “Détection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimétique en apprentissage non supervisé.”. Dans : *Actes du Xème colloque GRETSI*, Nice, France, 1985.
- [Jard 05] A. Jardine, D. Lin, et D. Banjevic. “A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, pp. 1483–1510, 2005.
- [Jeff 88] H. Jeffreys et B. S. Jeffreys. *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge, England : Cambridge University Press, 1988.
- [Kim 02] J. Kim, T. Waters, et P. Nelson. “Numerical modelling of vibration sources in hard disk drive by inverse methods.”. Dans : *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamic Modelling*, Funchal, Portugal, 2002.
- [Lanc 61] C. Lanczos. *Linear differential operators*. Van Nostrand Reinhold Ed., New York, 1961.

- [Lecl 03] Q. Leclère. *Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts : application à l'identification des sources internes d'un moteur Diesel*. Thèse, L'institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2003.
- [Lee 94] J. Lee et Y.-S. Park. "Response selection and dynamic damper application to improve the identification of multiple input forces of narrow frequency band.". *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 8, No. 6, pp. 649–664, 1994.
- [Lee 95] J. Lee et Y.-S. Park. "Error analysis of indirect force determination and a regularization method to reduce force determination error.". *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 9, No. 6, pp. 615–633, 1995.
- [Lemb 88] F. Lembregts. *Frequency domain identification techniques for experimental multiple input modal analysis*. Thèse, Katholieke Universiteit, Leuven, 1988.
- [Luce 94] S. Luce. *Amélioration de la disponibilité des équipements de production par l'optimisation de la gestion des stocks de maintenance*. Thèse, Université de Reims, 1994.
- [Maia 97] N. Maia et J. Silva. "Theoretical and experimental modal analysis.". *London UK : Research Studies*, 1997.
- [Mart 95] H. Martin et F. Honarvar. "Application of statistical moments to bearing failure detection". *Applied Acoustics*, Vol. 44, pp. 67–77, 1995.
- [Mas 94] P. Mas, P. Sas, et K. Wyckaert. "Indirect force identification based upon impedance matrix inversion : a study on statistical and deterministical accuracy.". Dans : *Proceedings of ISMA 19*, Leuven, Belgique, Septembre 1994.
- [McFa 84] P. McFadden et J. Smith. "Vibration monitoring of rolling element bearings by the high-frequency resonance technique-a review". *Tribology International*, Vol. 17, pp. 3–10, 1984.
- [McFa 87] P. McFadden. "A revised model for the extraction of periodic wave forms by time domain averaging". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 1, pp. 83–95, 1987.
- [Meng 91] Q. Meng et L. Qu. "Rotating machinery fault diagnosis using Wigner distribution". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, pp. 155–166, 1991.
- [Menk 84] W. Menke. *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*. Academic Press, 1984.
- [Misi 03] Misiti. *Les ondelettes et leurs applications*. Paris. Hermès Science Publications. : Lavoisier., 2003.
- [Miya 86] T. Miyachi et K. Seki. "An investigation of the early detection of defects in ball bearings using vibration monitoring, practical limit of detectability and growth speed of defects.". Dans : *Proceedings of the international Conference of Rotordynamics*, pp. 403–408, JSME-IFTToMM, Tokyo, 1986.
- [Mori 96] K. Mori, N. Kasashima, T. Yoshioka, et Y. Ueno. "Prediction of spalling on a ball bearing by applying the discrete wavelet transform to vibration signals". *Wear*, Vol. 195, pp. 162–168, 1996.
- [Moul 06] R. Moulart, S. Avril, et F. Pierron. "Identification of the through-thickness rigidities of a thick laminated composite tube". *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, Vol. 37, No. 2, pp. 326–336, 2006.
- [Mul 89] J. D. Mul, J. Vree, et D. Maas. "Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in 5 degrees of freedom while neglecting frictions. Part I : General theory and application to ball bearings.". *Journal of Tribology*, Vol. 111, No. 1, pp. 142–148, 1989.

- [Nash 90] J. Nash. *Compact Numerical Methods for Computers : Linear Algebra and Function Minimisation*. 2nd ed. Bristol, England : Adam Hilger, 1990.
- [Nels 98] P. Nelson et S. Yoon. "Estimation of acoustic source strength by inverse method : Part 1 : Conditioning of the inverse problem.". *Institute of Sound and Vibration Research*, 1998.
- [NFEN 01] NFEN13306. "Terminologie de la maintenance.". Tech. Rep., 2001.
- [Niko 02] N. Nikolaou et I. Antoniadis. "Demodulation of vibration signals generated by defects in rolling element bearings using complex shifted morlet wavelets.". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 16, No. 4, pp. 677–694, juillet 2002.
- [Paya 97] B. Paya, I. Esat, et M. Badi. "Artificial neural network based fault diagnostics of rotating machinery using wavelet transforms as a preprocessor". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 11, No. 5, pp. 751–765, 1997.
- [Pele 05] R. Peled, S. Braun, et M. Zacksenhouse. "A blind deconvolution separation of multiple sources, with application to bearing diagnostics.". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19, No. 6, pp. 1181–1195, 2005.
- [Peng 04] Z. Peng et F. Chu. "Application of the wavelet transform in machine condition monitoring and fault diagnostics : A review with bibliography.". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, No. 2, pp. 199–221, 2004.
- [Peze 00] C. Pezerat et J. Guyader. "Identification of vibration sources.". *Applied Acoustics*, Vol. 61, No. 3, pp. 309–324, 2000.
- [Peze 96] C. Pezerat. *Méthode d'identification des efforts appliqués sur une structure vibrante, par résolution et régularisation du problème inverse*. Thèse, Villeurbanne-doc'insa lyon, 1996.
- [Plou 98] A. Plouin et E. Balmès. "Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior". Dans : *IMAC*, pp. 1440–1446, 1998.
- [Powe 84] R. Powell et W. Seering. "Multichannel structural inverse filtering.". *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, Vol. 106, pp. 22–28, 1984.
- [Rand 01] R. Randall, J. Antoni, et S. Chobsaard. "The relationship between spectral correlation and envelope analysis in the diagnostics of bearing faults and other cyclostationary machine signals.". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 5, pp. 945–962, 2001.
- [Roma 96] J. Romano et J. Lopez. "Practical application of transfer path analysis to resolve structure-borne noise problems in vehicle design.". Dans : *Proceedings of ISMA 21*, Leuven, Belgium, 1996.
- [Rubi 01] R. Rubini et U. Meneghetti. "Application of the envelope and wavelet transform analyses for the diagnosis of incipient faults in ball bearings". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 15, No. 2, pp. 287–302, mai 2001.
- [Serv 05] C. Servière, J.-L. Lacoume, et M. E. Badaoui. "Separation of combustion noise and piston-slap in diesel engine, Part II : Separation of combustion noise and piston-slap using blind source separation methods.". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 19, No. 6, pp. 1218–1229, 2005.
- [Sidd 03] A. Siddique, Y. G-S., et S. B. "Applications of artificial intelligence techniques for induction machine stator fault diagnostics : Review.". Dans : *Proceedings of the IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives*, pp. 29–34, New-York, 2003.

- [Stas 98] W. Staszewski. "Wavelet based compression and feature selection for vibration analysis". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 5, pp. 735–760, 1998.
- [Stev 87] K. Stevens. "Force Identification Problems-an Overview.". Dans : *Proceedings of SEM Springs Conference on Experimental Mechanics*, Houston, TX, USA, 1987.
- [Stew 93] G. W. Stewart. "On the Early History of the Singular Value Decomposition". *SIAM Review*, Vol. 35, No. 4, pp. 551–566, 1993.
- [Sun 02] Q. Sun et Y. Tank. "Singularity analysis using continuous wavelet transform for bearing fault diagnosis". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 16, No. 6, pp. 1025–1041, 2002.
- [Tale 99] A. Taleb et C. Jutten. "Source separation in post non linear mixtures.". *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 47, No. 10, pp. 2807–2820, 1999.
- [Tand 99] N. Tandon et A. Choudhury. "A review of vibration and acoustic measurement methods for the detection of defects in rolling element bearings". *Tribology International*, Vol. 32, pp. 469–480, 1999.
- [Tara 87] A. Tarantola. *Inverse problem theory - methods for data fitting and model parameter estimation*. Elsevier, 1987.
- [Thi 93] L. N. Thi. *Séparation aveugle de sources à large bande dans un mélange convolutif*. Thèse, INPG Grenoble, 1993.
- [Thir 95] N. Thirion. *Séparation d'ondes en prospection sismique*. Thèse, INPG Grenoble, 1995.
- [Thit 03a] A. Thite et D. Thompson. "The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 1 : Improved singular value rejection methods.". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, pp. 411–431, 2003.
- [Thit 03b] A. Thite et D. Thompson. "The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 2 : Use of regularization techniques.". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 264, pp. 433–451, 2003.
- [Thom 05] M. Thomas et F. Laville. *Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink, et Ansys*. Editions ETS, 2005.
- [Tikh 76] A. Tikhonov et V. Arsénine. *Méthodes de résolution des problèmes mal posés*. Moscou, 1976.
- [Tong 90] L. Tong et R. Liu. "Blind estimation of correlated source signals.". Dans : *Proceedings 24th Asilomar Conference*, 1990.
- [Varg 62] Varga. *R. Matrix Iterative Analysis*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1962.
- [Wang 93] W. Wang et P. McFadden. "Early detection of gear failure by vibration analysis I. Calculation of the time-frequency distribution". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 7, pp. 193–203, 1993.
- [Youn 71] D. Young. *Iterative Solutions of Large Linear Systems*. New York : Academic Press, 1971.
- [Zhan 01] C. Zhang, S. Liang, et J. Qiu. "Bearing failure prognostic model based on damage mechanics and vibration monitoring.". *Tribology Transactions*, Vol. 44, No. 4, pp. 603–608, 2001.
- [Zhan 97] A. Zhang. *Détermination des forces appliquées aux structures industrielles par des méthodes inverses*. Thèse, Université de Technologie Compiègne, 1997.