



Approche micromécanique de la rupture ductile dans les procédés de mise en forme des matériaux. Prise en compte de l'effet de forme des cavités.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 20 avril 2007

pour l'obtention du

**Grade de DOCTEUR de l'Université de Reims
Champagne-Ardenne**

Spécialité : Mécanique et Matériaux

par

MOHAND OULD OUALI

Composition du jury

<i>Président :</i>	Pr. HABIBOU MAITOURNAM	École Polytechnique, Palaiseau
<i>Rapporteurs :</i>	Pr. DJIMÉDO KONDO Pr. PAUL LIPINSKI	Université de Lille I, Villeneuve d'Ascq Directeur de Recherche à l'ENIM, Metz
<i>Examineurs :</i>	Pr. YING-QIAO GUO Dr. ERIC LORENTZ Dr. FRANÇOIS MOUSSY Pr. LARBI SIAD	Directeur du Laboratoire GMMS, Reims Ingénieur Recherche & Développement, EDF Expert Matériaux, Technocentre Renault Université de Reims Champagne-Ardenne

Mis en page avec la classe thloria.

*Je tiens à remercier le Conseil Général des Ardennes pour le soutien financier qu'il a
accordé à mes travaux de recherche.*

À ma mère OUDADA.

Table des matières

Table des figures	7
Liste des tableaux	13
Notations	15
Introduction	17

Chapitre 1 Rupture ductile - aspects théoriques et modélisation
--

1.1	Introduction	23
1.2	Deux approches de la rupture ductile	24
1.2.1	Approche thermodynamique phénoménologique	25
1.2.2	Approche micromécanique	27
1.3	Mécanismes physiques de la rupture ductile	28
1.3.1	Nucléation des cavités	29
1.3.1.1	Description du mécanisme	29
1.3.1.2	Modèles de germination	30
1.3.2	Croissance des Cavités	32

1.3.2.1	Description du mécanisme	32
1.3.2.2	Modèles de croissance	34
1.3.3	Coalescence des cavités	36
1.3.3.1	Critères de coalescence	37
1.3.3.2	Modèles de coalescence	39
1.4	Le modèle GTN	41
1.4.1	Le critère de plasticité	41
1.4.2	Loi d'écoulement associée par normalité	43
1.4.3	Évolution de la porosité	45
1.4.4	Prise en compte de l'écrouissage	45
1.4.5	Prise en compte de l'élasticité	46
1.5	Présentation du modèle GLD	47
1.5.1	Le critère de plasticité	47
1.5.2	Loi d'écoulement	51
1.5.3	Évolution du paramètre de forme	51
1.5.4	Modélisation des cas limites des formes des cavités	53
1.5.5	Modélisation de la coalescence	58
1.6	Couplage température-comportement	58
1.6.1	Couplage température-plasticité	58
1.6.1.1	Couplage thermomécanique « fort »	59
1.6.1.2	Couplage thermomécanique « faible » - Échauffement adiabatique	60
1.6.2	Extension à la thermo-hypoélasticité	61
1.7	Conclusion	61

Appendice 1**63****Chapitre 2****Implémentation numérique du modèle GLD**

2.1	Introduction	67
2.2	Discrétisation spatio-temporelle	68
2.2.1	Formulation variationnelle	68
2.2.2	schémas de résolution	74
2.2.2.1	Le schéma Statique Implicite - Problème mécanique	74
2.2.2.2	Le schéma Dynamique Explicite - Problème mécanique	76
2.2.2.3	Le schéma Dynamique Explicite - problème thermomécanique	78
2.2.3	Discrétisation temporelle	80
2.2.3.1	Généralités	80
2.2.3.2	La θ -Méthode	81
2.2.3.3	Méthode asymptotique	81
2.3	Implémentation numérique du modèle GLD	81
2.3.1	Algorithme local d'Aravas	82
2.3.1.1	Prédicteur élastique	82
2.3.1.2	Correction plastique	83
2.3.1.3	Opérateur tangent consistant	85
2.3.2	Implémentation du modèle GLD	87

2.3.2.1	Mise en équation	87
2.3.2.2	Prédicteur élastique	87
2.3.2.3	Correction plastique	89
2.4	Extension aux grandes déformations	92
2.4.1	Milieus à configuration intermédiaire	93
2.4.2	Extension aux grandes déformation dans Abaqus	95
2.5	Conclusion	97

Appendice 2 99

Chapitre 3

Validation sur des essais simples

3.1	Introduction	105
3.2	La cellule élémentaire	105
3.3	Technique de calcul explicite du comportement des cellules	107
3.3.1	Description du dispositif de chargement de la cellule	108
3.3.2	Simulations successives	110
3.3.3	Validation de la technique	111
3.4	Validation de l'implémentation du modèle GTN	113
3.5	Validation de l'implémentation du modèle GLD	115
3.6	Influence de la température sur la réponse d'un élément axisymétrique	118
3.7	Striction d'une barre cylindrique lisse	120
3.7.1	Description des conditions de la simulation	121
3.7.2	Discussion des résultats	122

3.8	Rupture d'une éprouvette axisymétrique entaillée	127
3.8.1	Description des conditions de la simulation	127
3.8.2	Discussion des résultats	129
3.9	Conclusion	135

Chapitre 4

Applications aux procédés de mise en forme des matériaux

4.1	Introduction	137
4.2	Écrasement de lopins	137
4.2.1	Description des conditions de la simulation	139
4.2.2	Discussion des résultats	141
4.3	Emboutissage de Swift	151
4.3.1	Description des conditions de la simulation	152
4.3.2	Discussion des résultats	154
4.4	Étude du procédé de laminage	159
4.4.1	Description des conditions de la simulation	159
4.4.2	Discussion des résultats	160
4.5	Conclusion	169

Appendice au chapitre 4	171
--------------------------------	------------

Conclusion générale	175
----------------------------	------------

Annexe A**Méthode de longueur d'arc**

A.1	Introduction	179
A.2	Formulation du problème	179
A.3	Méthodes de résolution	181
A.3.1	La méthode de CRISFIELD de longueur d'arc sphérique . . .	181
A.3.2	La méthode de RIKS-RAMM de longueur d'arc linéarisée . .	183

Annexe B**Gestion numérique du contact frottement**

B.1	analyse du contact	186
B.1.1	Contact unilatéral	186
B.1.2	Contact bilatéral	187
B.2	Gestion incrémentale du contact	187
B.3	Modèles de frottement usuels	189
B.3.1	Modèle de COULOMB	189
B.3.2	Modèle de TRESCA	190
B.4	Approche du contact dans Abaqus	191

Bibliographie**193**

Table des figures

1	Schématisation des mécanismes de la rupture ductile.	18
1.1	Schématisation de la nucléation des cavités.	29
1.2	Schématisation de la croissance des cavités.	32
1.3	Taux de croissance des cavités dans des éprouvettes axisymétriques entaillées en acier [Ben00]	34
1.4	Différents modes de coalescence observés par BENZERGA et al. [Ben00]	36
1.5	V.E.R. correspondant au critère de THOMASON [Tho85, Tho90]. . .	37
1.6	V.E.R. multi-couches correspondant au critère de PERRIN [PER92].	38
1.7	Graphe de l'évolution de la fonction $f^*(f)$	39
1.8	V.E.R correspondant au critère de GURSON pour cavités sphériques.	41
1.9	Cavités aplatie et allongée	48
1.10	Différentes forme des cavités	55
2.1	Structure en équilibre.	68
2.2	Structure en équilibre	71
2.3	Organigramme de résolution du schéma statique implicite	76
2.4	Organigramme de résolution d'un problème mécanique en utilisant un schéma dynamique explicite	77
2.5	Organigramme de résolution séquentiel d'un problème thermomé- canique en utilisant un schéma dynamique explicite	79

2.6	Le schéma d'intégration local d'ARAVAS[Ara87]	85
2.7	Organigramme de l'implémentation du modèle GLD	91
2.8	Configuration intermédiaire relâchée	93
3.1	Modélisation micromécanique : Représentation des différentes échelles.	106
3.2	Dispositif de chargement de la cellule (V.E.R.).	108
3.3	Comparaison des résultats des calculs de cellules implicites et explicites pour différents paramètres de forme W , de porosités f et de triaxialité $\mathcal{T}$	112
3.4	Amélioration des chargements successifs de la cellule et variations de triaxialités leurs correspondants.	113
3.5	Simulations de la réponse d'un élément axisymétrique chargé en traction axiale. Comparaison des résultats obtenus avec la routine Vumat (GTN-Vumat) et ceux obtenus avec Abaqus (GTN-Abaqus).	114
3.6	Comparaison des résultats de calculs en utilisant le modèle GLD et ceux obtenus sur des cellules élémentaires pour une porosité initiale $f_0 = 1\%$ et une triaxialité $\mathcal{T} = 1$ [PH00].	116
3.7	Maillages initial et final de l'élément axisymétrique et de la cellule élémentaire correspondant à une cavité initialement allongée $W_0 = 6$	117
3.8	Comparaison des résultats obtenus en utilisant le modèle GLD et ceux obtenus à partir des calculs de cellules pour une porosité initiale $f_0 = 1\%$ et une triaxialité $\mathcal{T} = 1$ [SOO06].	118
3.9	Effet de l'échauffement thermique sur la rupture d'un élément axisymétrique (CAXR ou CAXRT). Comparaison des résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab." pour une porosité initiale $f_0 = 0.1\%$ et une triaxialité $\mathcal{T} = 1$	119
3.10	Maillages initial et déformé du quart de l'éprouvette axisymétrique lisse et conditions aux limites et de chargement utilisés lors de la simulation de l'essai de traction.	121
3.11	Évolution de la contrainte nominale $F/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ en fonction : a) de la déformation nominale u/l_0 , b) de la réduction de rayon $\Delta R/R_0$ de l'éprouvette	122

3.12	Évolution des états mécanique et microstructural de la barre lisse au niveau du col.	124
3.13	Isovaleurs de la porosité f à trois instants différents du chargement.	125
3.14	Isovaleurs de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$ et du paramètre de forme S à trois instants différents du chargement.	126
3.15	Maillages initial et déformé du quart de l'éprouvette axisymétrique entaillée et conditions aux limites et de chargement utilisés lors de la simulation de cet essai.	128
3.16	Effet de la température sur la rupture d'une éprouvette AER_4 . Comparaison des résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.".	128
3.17	Évolution de l'état de l'éprouvette axisymétrique entaillée au niveau de l'entaille	131
3.18	Isovaleurs de la porosité f de l'éprouvette entaillée à trois instants différents du chargement.	132
3.19	Isovaleurs du paramètre de forme S de l'éprouvette entaillée à trois instants différents du chargement.	133
3.20	Isovaleurs de la température T de l'éprouvette entaillée à trois instants différents du chargement.	134
4.1	Maillages initiaux et déformés des lopins conique, cylindrique et à épaulement ainsi que les conditions aux limites et de chargement.	140
4.2	Évolution des déformations axiale E_{zz} et orthoradiale $E_{\theta\theta}$ ainsi que des contrainte axiale Σ_{zz} et orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ sur la surface extérieure centrale des lopins conique, à épaulement et cylindrique.	142
4.3	Évolution de la force de forgeage en fonction de réduction de la hauteur du lopin.	143
4.4	Étude de trois éléments du lopin cylindrique.	144
4.5	Isovaleurs de la porosité f et du paramètre de forme S lors de l'écrasement du lopin cylindrique.	146
4.6	Étude de trois points du lopin à épaulement.	147
4.7	Isovaleurs de la porosité f et paramètre de forme S lors de l'écrasement du lopin à épaulement.	148

4.8	Étude de trois points du lopin conique.	149
4.9	Isovaleurs de la porosité f et paramètre de forme S lors de l'écrasement du lopin conique.	150
4.10	Schématisation de l'essai d'emboutissage de Swift.	151
4.11	Maillage initial et final et conditions de chargement au cours de l'essai d'emboutissage de Swift.	153
4.12	Évolution de la force d'emboutissage F en fonction du déplacement du poinçon u	155
4.13	Initiation de la rupture sur l'embouti. [KOK07]	156
4.14	Évolution de la microstructure de quatre éléments de l'embouti. . .	156
4.15	Isovaleurs de la porosité f et paramètre de forme S dans l'embouti.	157
4.16	Isovaleurs de la pression hydrostatique σ_p et de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$ dans l'embouti.	158
4.17	Maillages initial et final de la barre laminée.	160
4.18	Évolution de la force de laminage F et de l'élargissement de la barre.	161
4.19	Évolution de la contrainte équivalente normalisée de von Mises Σ_{eq}/σ_0 , de la microstructure (f et S) et de la température T de quatre éléments de la barre.	163
4.20	Isovaleurs de la porosité f à deux instants différents du procédé de laminage. IS, AD et NA correspondent, respectivement, aux résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab."	164
4.21	Isovaleurs du paramètre de forme S à deux instants différents du procédé de laminage. IS, AD et NA correspondent, respectivement, aux résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab."	165
4.22	Isovaleurs de la température T à deux instants différents du procédé de laminage. AD et NA correspondent, respectivement, aux résultats obtenus avec les modèles "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab."	166
4.23	Influence du frottement sur la force de la minage F et l'élargissement e .	167
4.24	Influence de la vitesse des rouleaux et de la température initiale de la barre sur la force de laminage F et l'élargissement e	168

B.1	Deux solides en contact	186
B.2	Erreur due à l'approximation de la surface de l'outil par un plan. . .	188
B.3	Représentation du modèle de COULOMB	190
B.4	Représentation du modèle de TRESCA	190

Liste des tableaux

3.1	Valeurs initiales de l'angle φ	110
3.2	Paramètres de coalescence utilisés lors de la simulation [Ben02]. . .	115
3.3	Paramètres de coalescence utilisés lors de la simulation [Ben02] . .	120
3.4	Caractéristiques thermiques du matériau	120
3.5	Valeurs des principaux paramètres utilisés lors de la simulation de l'essai de traction d'une barre cylindrique lisse.	122
3.6	Principaux résultats de l'essai de traction d'une barre cylindrique lisse.	123
3.7	Valeurs des principaux paramètres utilisés lors de la simulation de l'essai de traction	129
3.8	Principaux résultats de l'essai de traction d'une éprouvette axisy- métrique entaillée.	130
4.1	Caractéristiques géométriques des lopins cylindrique, conique et à épaulement.	139
4.2	Caractéristiques microstructurales du matériau constitutif des trois lopins	140
4.3	Forces maximales d'écrasement des trois lopins.	144
4.4	Caractéristiques microstructurales de l'alliage d'aluminium.	154
4.5	Points représentatifs de la courbe force-déplacement au cours de l'essai d'emboutissage de Swift.	154
4.6	Constantes de Hill du flan et celles d'un matériau isotrope.	155

4.7	Valeurs des principaux paramètres utilisés lors de l'étude du procédé de laminage d'une barre de section carrée.	160
4.8	Points représentatifs des tracés décrivant les variations de la force de laminage et de l'élargissement.	162

Notations

Notation tensorielles

A	scalaire
$\mathbf{A}$	vecteur ou tenseur
$\dot{\mathbf{A}}$	taux du vecteur ou tenseur
$\cdot$	produit contracté une fois
$:$	produit doublement contracté
$\otimes$	produit tensoriel
$\mathbf{1}$	tenseur unité d'ordre 2
$\mathbf{I}$	tenseur unité d'ordre 4
$\mathbf{J}$	$= \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$
$\mathbf{A}'$	déviateur du tenseur $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}_m$	partie moyenne de $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{A}\ $	norme au sens de MISES

Autres notations

Σ	tenseur des contraintes macroscopiques
σ	tenseur des contraintes microscopiques
$\mathbf{E}$	tenseur des déformations macroscopiques
ε	tenseur des déformations microscopiques
$\mathbf{E}^e$	tenseur des déformations élastiques macroscopiques
$\mathbf{E}^p$	tenseur des déformations plastiques macroscopiques
$\mathbf{E}^{th}$	tenseur des déformations thermiques macroscopiques
π	dissipation microscopique
Π	dissipation macroscopique
σ_i	contrainte à l'interface matrice-inclusion
u	vecteur des déplacements
T	température
$\bar{\sigma}$	contrainte d'écoulement
S	paramètre de forme
f	porosité

Introduction

Le besoin grandissant des entreprises à répondre aux exigences de fiabilité et de qualité de leurs produits tout en optimisant les coûts et les délais de réalisation les pousse à prendre en considération tous les facteurs entrant dans le processus de conception de pièces mécaniques. Parmi ces facteurs, il y a lieu de citer la prédiction de la rupture des structures sous certains chargements. L'étude de ce paramètre fait souvent appel à la simulation numérique qui nécessite l'utilisation de lois de comportement "avancées" pouvant décrire la dégradation du matériau en cours de déformation.

L'endommagement est le mécanisme physique qui décrit le mieux la ruine généralement ductile des matériaux métalliques. Il est aujourd'hui reconnu que ce mode de rupture survient suivant trois stages successifs que sont la nucléation (ou germination) des cavités, leurs croissances sous l'effet d'un chargement approprié et la coalescence des vides à un stade plus avancé de la déformation, comme indiqué sur la figure 1.

L'approche locale décrit les effets associés à ces trois stages. En particulier, l'antagonisme entre l'écrouissage du matériau et son adoucissement suite à la croissance des microcavités puis la perte totale de rigidité pour des niveaux de porosités relativement élevés sont convenablement pris en compte. Cette théorie se décompose en deux branches : l'approche thermodynamique phénoménologique et l'approche micromécanique physique. Les fondements de ces deux branches sont sensiblement différents ; alors que l'approche multi-échelles se base sur des concepts mathématiques rigoureux (représentation localisation et homogénéisation), pour modéliser les trois mécanismes physiques de la rupture ductile, celle des milieux continus endommageables se fonde sur les principes de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI).

Plusieurs modèles ont été formulés dans le cadre de cette théorie. On peut les classer dans deux catégories : les modèles « couplés » pour lesquels l'endommagement est lié à la déformation plastique par l'intermédiaire d'un critère, et les modèles « non couplés » pour lesquels des lois d'évolution de l'endommagement ont été établies indépendamment de la loi de comportement du matériau. Parmi les modèles « non couplés », nous pouvons citer les modèles micromécaniques de MCCLINCTOCK [McC68] et de RICE et TRACEY [RT69], ou encore le modèle

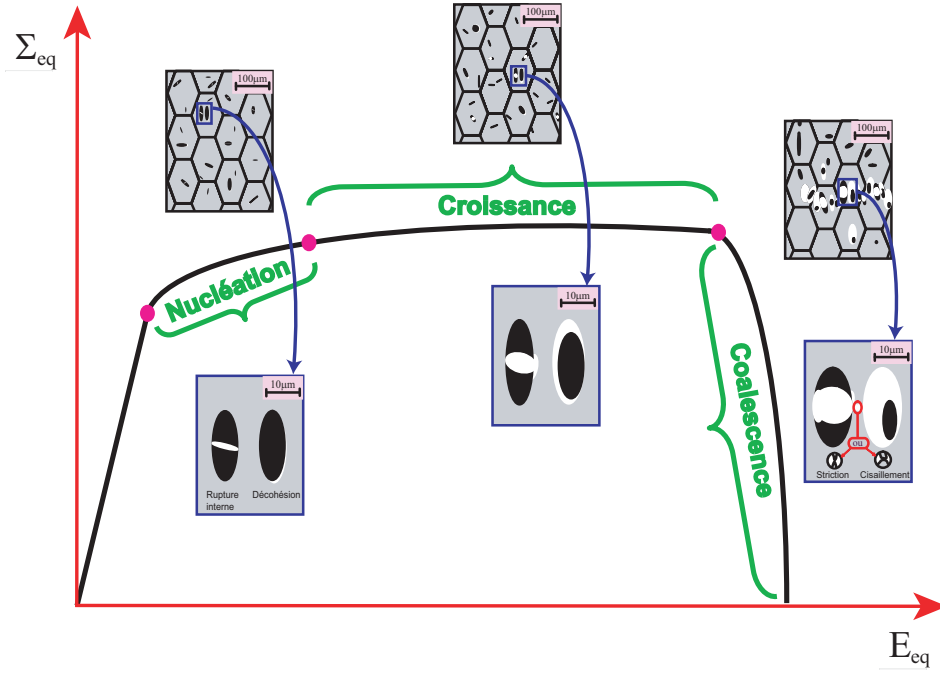


FIG. 1 – Schématisation des mécanismes de la rupture ductile.

de LEMAITRE (1985) qui a été obtenu dans le cadre de l'approche thermodynamique. En pratique, les modèles « non couplés » jouent un rôle d'indicateur de l'évolution du dommage sans pour autant avoir une influence sur le comportement global du matériau, ce qui est en soi une limitation conséquente. Pour combler ces faiblesses, des modèles « couplés » ont été développés tel que le modèle de ROUSSELIER [Rou87] qui est un modèle basé sur les principes de thermodynamique des processus irréversibles, ou encore le célèbre modèle micromécanique de GURSON [Gur77], qui a été obtenu dans le cadre de l'analyse limite d'un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) sphérique ou cylindrique contenant une cavité de même forme. Pour cette dernière loi de comportement, il est supposé que le vide conserve sa forme au cours du chargement. Ce modèle, qui comprend un critère de plasticité, une loi d'écoulement régie par la règle de normalité et une loi d'évolution de la porosité, a eu un grand succès et a fait l'objet de plusieurs extensions et améliorations [Yam78, CN80, Tve81, TN84, NT84, Ara87, KN88, PL90, Per92, GLD93, BSH95, LPD95, BBP99, Leb03]. Une de ces contributions est due à GOLOGANU et al. [GLD93, GLD94, GLD97] qui ont proposé une extension au cas de cavités non sphériques pouvant changer de forme au cours du chargement. Ces auteurs ont suivi une analyse semblable à celle de GURSON cette fois-ci appliquée à un V.E.R. ellipsoïdal aplati ou allongé contenant une cavité de même forme et qui lui est confocale. La nouvelle loi de comportement, connue sous le nom du modèle GLD¹, introduit une variable interne supplémentaire qu'est le paramètre de forme.

¹En référence aux auteurs GOLOGANU, LEBLOND et DEVAUX

Les lois phénoménologiques, comparativement à celles établies dans le cadre des concepts micromécaniques, ont déjà montré leurs capacités à prédire l'endommagement du matériau au cours du chargement. Cela peut s'expliquer particulièrement par :

- ◆ la formulation moins complexe de ces modèles, ce qui permet des réductions de temps, et par conséquent des coûts de calcul ;
- ◆ le développement de méthodologies numériques et expérimentales permettant l'identification des différents paramètres de ces lois [Khe04, Ber01].

Les obstacles cités précédemment, auxquels a été confrontée l'approche micromécanique semblent aujourd'hui dépassés, ou tout au moins réduits, notamment grâce au développement de gros calculateurs et de méthodes d'identification [Ben00, BBP04a].

La simulation du comportement mécanique des métaux en cours de mise en forme a été d'un grand apport pour l'optimisation des procédés de fabrication. Cependant, le domaine de la prédiction numérique des zones d'endommagement et des conditions de son amorçage reste encore ouvert. En effet, l'étude de la ruine des corps mécaniques pendant de telles opérations doit prévenir l'apparition de fissures internes ou surfaciques ainsi que leurs propagations pour provoquer la rupture totale de la structure. En général, une telle dégradation implique couramment des grandes déformations irréversibles qui contribuent au développement de zones de localisation des déformations provoquant ainsi l'apparition de différents défauts. Par exemple, les fissures en surface apparaissent en général lors des process d'écrasement et de laminage, alors qu'on retrouve les fissures internes lors de l'extrusion et le filage. Cependant, l'apparition de tels défauts peut être souhaitée comme dans la circonstance du procédé de découpe, où il jouent un rôle "favorisant" quand ils s'amorcent dans les régions de découpe.

Il apparaît de ce qui précède que le grand nombre de paramètres qui contrôlent le processus de déformation nécessite des modélisations fines incluant l'évolution de la microstructure du matériau sur la réponse globale de la pièce en cours de formage. Il s'ensuit que l'approche multi-échelles de la rupture ductile peut s'avérer intéressante à exploiter. Le présent travail de recherche se situe dans le cadre des deux idées citées ci-dessus et qui peuvent se résumer en ces termes : *les modèles micromécanique sont-ils appropriés pour la prévision de l'endommagement des matériaux ductiles lors des procédés de mise en forme ?*

La réponse à donner à cette problématique est faite d'une manière graduelle à travers ce mémoire de thèse qui est composé de quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les deux branches composant l'approche locale de la rupture ductile : l'approche phénoménologique et l'approche micromécanique. Puis nous présentons les trois mécanismes physiques qui gouvernent la ruine ductile des métaux en rappelant quelques modèles établis pour décrire chacun

d'eux. Nous décrivons ensuite le modèle GTN², extension du modèle GURSON, et le modèle GLD. Nous proposons à la fin du chapitre une extension du modèle GLD au cas où l'échauffement thermique d'origine mécanique dû à la déformation plastique du matériau au cours du chargement est pris en compte. Le couplage température-plasticité-endommagement ainsi effectué est censé mieux rendre compte de l'état de la microstructure, notamment en raison de l'adoucissement thermique qui y est généré.

Un rappel des schémas implicite et explicite de résolution d'un problème mécanique et/ou thermomécanique adiabatique est donné dans le deuxième chapitre. Dans le cas d'un comportement thermomécanique non adiabatique, nous présentons le schéma de résolution explicite séquentiel qui permet une résolution en deux temps : calcul de la solution mécanique et de la dissipation plastique correspondante, puis estimation de l'échauffement thermique générée par cette dissipation. Nous décrivons ensuite la procédure suivie pour l'implémentation du modèle GLD dans le code de calcul Abaqus en utilisant le schéma d'intégration local proposé par ARAVAS [Ara87]. Nous abordons par la suite les précautions à prendre lors de l'implémentation du modèle GLD pour pouvoir l'utiliser dans le cadre de l'hypothèse des grandes déformations. Ces dernières jouent un rôle important lors de la simulation des procédés de mise en forme. Notons enfin que l'implémentation du modèle GTN s'est faite de la même manière que celle du modèle GLD.

Le troisième chapitre est consacré à la validation de l'implémentation du modèle GLD. Nous proposons d'abord une technique de calcul explicite de cellules permettant de maintenir une triaxialité constante au cours du chargement. Cette méthode peut être utilisée aussi bien dans le cas d'une matrice dense que poreuse [OOS06, SOOB07]. Nous comparons les résultats obtenus avec le modèle GLD, en utilisant la technique précédente, avec ceux obtenus à partir des calculs de cellules élémentaires. Nous effectuons ensuite deux études numériques de traction d'éprouvettes. La première, effectuée en utilisant les modèles GLD et GTN concerne la traction d'une barre cylindrique lisse. Cette application permet de mettre en évidence le rôle du changement de forme des cavités lors d'un chargement de traction monotone et unidirectionnel. La deuxième étude est un essai de traction d'une éprouvette axisymétrique entaillée. Elle est réalisée dans le but de faire ressortir le rôle du couplage thermomécanique.

Le quatrième chapitre est dédié à l'application du modèle GLD à des procédés industriels. Les procédés de mise en forme choisis sont l'écrasement de lopins, l'emboutissage d'une tôle et le laminage d'une barre. Dans les deux premiers exemples, nous comparons les résultats des simulations numériques avec ceux obtenus expérimentalement afin de vérifier la pertinence de l'utilisation des modèles GTN ET GLD en mise forme des matériaux. Dans la dernière application, nous réalisons une étude sur l'influence de différents paramètres qui gouvernent le laminage, y compris l'effet du couplage thermomécanique. Les résultats de l'écrasement des trois

²En référence aux auteurs GURSON, TVERGAARD et NEEDLEMAN

lopins ont été comparés à ceux obtenus par GOUVEIA et al. [GRM96, GRM00], quant aux travaux expérimentaux concernant l'essai d'emboutissage, ils sont tirés des travaux du Cetim/Senlis[Khe04, KOK07].

Chapitre 1

Rupture ductile - aspects théoriques et modélisation

1.1 Introduction

La mécanique de la rupture des matériaux est une science qui a pour but de prévoir et prévenir l'apparition et la propagation de défauts dans les structures. Son essor a été possible grâce au développement des industries de pointe telles que l'aéronautique et le nucléaire [Leb98]. Elle est généralement subdivisée en deux sous-disciplines³ : la mécanique de la rupture fragile et la mécanique de la rupture ductile, qui sont gouvernées par des mécanismes fondamentalement différents. Cette différence se manifeste à l'échelle macroscopique à travers le rôle que joue la plasticité au cours de ces deux modes de rupture. Elle est supposée peu importante dans le cas de la rupture fragile (sauf au voisinage immédiat du front de fissure : plasticité confinée en pointe de fissure). En revanche, elle joue un rôle essentiel pendant la rupture ductile des matériaux au point de négliger, le plus souvent, l'effet de l'élasticité (plasticité "envahissante" ou écoulement plastique libre).

Un des travaux pionniers dans le cadre de la rupture fragile est dû à GRIF-FITH [Gri20] qui a établi un critère de rupture énergétique dans le but de prédire la propagation des fissures dans les structures. Le succès rencontré par cette analyse a poussé les scientifiques à essayer de transposer les raisonnements et méthodes de la rupture fragile à la rupture ductile. Cette façon de procéder est connue sous le nom d'approche globale de la rupture ou encore sous le nom de mécanique élastoplastique de la rupture. Par analogie au critère de GRIF-FITH, RICE [Ric68] a proposé un critère de rupture pour matériaux élastoplastiques ductiles en introduisant la notion d'intégrale de contour, notée généralement J . La rupture ductile

³Dans le cas de chargements monotones, c'est-à-dire exception faite de la rupture par fatigue

du matériau survient quand J atteint la valeur critique J_c , appelée aussi tenacité. L'approche globale souffre cependant de la transférabilité des données des éprouvettes tests aux structures. Cette limitation était prévisible car cette approche ne prend pas en compte certaines zones critiques qui sont le siège de fortes contraintes. Pour palier ces insuffisances une autre approche, utilisant cette fois-ci sur une modélisation plus fine des mécanismes physiques de l'endommagement ductile que sont :

- ◆ la germination des cavités, qui survient le plus souvent, soit par décohésion à l'interface matrice-inclusion, soit par rupture des inclusions ;
- ◆ la croissance de ces cavités par écoulement plastique de la matrice ;
- ◆ et la coalescence de ces cavités conduisant à la formation d'une fissure macroscopique.

s'est développée. L'approche locale de la rupture se différencie par le fait qu'elle étudie l'évolution des différentes variables qui caractérisent le comportement des matériaux (contraintes, déformation, écrouissage...) et son endommagement (porosité, variables d'endommagement scalaire ou tensorielles, facteur de forme des cavités, leurs espacements...) en chaque point de la structure. Elle peut aussi prévoir l'amorçage de la fissure à un stage microscopique et suivre son évolution jusqu'à sa propagation finale.

Nous donnons dans ce qui suit une description des mécanismes physiques qui accompagnent la rupture ductile des matériaux. Nous commençons par présenter deux approches utilisées pour modéliser la rupture ductile des matériaux, puis nous exposons avec plus de détails les trois phases de la rupture ductile ainsi que quelques modèles proposés dans la littérature pour décrire chacune d'elles. Les deux modèles de comportement des matériaux endommageables utilisés dans cette étude que sont le GTN et le GLD ainsi que les étapes principales de leurs obtentions sont ensuite décrits. Nous proposons à la fin du chapitre une extension du modèle GLD dans le but de tenir compte de l'échauffement thermique dû à la dissipation plastique qui peut s'effectuer dans des conditions adiabatique ou non.

1.2 Deux approches de la rupture ductile

Deux approches sont couramment utilisées pour la modélisation locale de la rupture ductile des matériaux. Il s'agit de l'approche thermodynamique phénoménologique [Ger73, Ger86, LC85] et de l'approche micromécanique physique [McC68, RT69, Gur77]. En plus des différences dans les fondements théoriques sur lesquels se basent les deux approches, il y a lieu de préciser que la variable d'endommagement qui caractérise l'approche micromécanique est la porosité, alors que pour l'approche phénoménologique, la variable d'endommagement peut être la porosité, comme dans le cas du modèle de Rousselier [Rou87], ou tout

autre variable scalaire ou tensorielle caractérisant la dégradation du matériau soumis à un chargement.

1.2.1 Approche thermodynamique phénoménologique

Elle fait usage des principes de la thermodynamique des processus irréversibles qui repose sur la théorie de la méthode de l'état local. Cette dernière stipule que l'élément de volume d'un milieu continu thermostatique peut être caractérisé par un nombre fini de variables internes qui décrivent son évolution. En plus des principes d'objectivité, de respect de la symétrie de la matière et de consistance⁴ que doit satisfaire toute loi de comportement, celles établies dans le cadre de l'approche phénoménologique doivent vérifier l'inégalité fondamentale de la thermodynamique. Cette dernière, connue sous le nom de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM, fournit une condition nécessaire de l'existence d'un potentiel thermodynamique associé aux variables internes. Elle est donnée par

$$\rho \left(T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{de}{\partial t} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{q}{T} \geq 0 \quad (1.1)$$

où ρ , s , T et q désignent respectivement la masse volumique, l'entropie massique, la température et le flux de chaleur reçu par le matériau.

Les étapes de la formulation des lois de comportement dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles peuvent être regroupées comme suit :

- ◆ choix des phénomènes physiques (élasticité, plasticité, endommagement, etc) et des variables qui s'y rapportent ainsi que des variables associées ;
- ◆ choix du potentiel d'état : définition des variables d'état ;
- ◆ analyse des dissipations : définition des relations complémentaires.

Nous présentons, à titre d'illustration, deux modèles obtenus dans le cadre de cette approche.

LEMAITRE (1985) a proposé une loi de comportement pour des matériaux élastoplastiques endommageables. Ce modèle emploie le concept de contrainte « effective », introduit par KACHANOV [Kac58], qui est déduit de l'hypothèse de l'équivalence en énergie élastique développée par CORDEBOIS et SIDOROFF [CS79] et qui s'énonce comme suit :

L'énergie élastique d'un milieu endommagé sous la contrainte réelle $\boldsymbol{\Sigma}$ et la déformation élastique réelle $\mathbf{E}^e$ est égale à celle du milieu sain soumis à la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ et la déformation élastique effective $\tilde{\mathbf{E}}^e$.

⁴c'est-à-dire vérification des lois de conservation de la matière (masses et quantité de mouvement).

L'hypothèse d'équivalence précédente a ensuite été généralisée à l'équivalence en énergie totale [SFB94]. La contrainte effective s'exprime par

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{1 - D} \quad (1.2)$$

où D est la variable d'endommagement : $D = 0$ pour un matériau non-endommagé et $D = 1$ pour un matériau totalement endommagé.

En choisissant l'énergie libre de HELMHOLTZ Υ comme potentiel thermodynamique, l'inégalité (1.1) conduit dans l'hypothèse des petites perturbations isothermes aux équations :

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathbf{E}^e, D, r) &= \Upsilon_e(\mathbf{E}^e, D) + \Upsilon_p(r, D) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \tilde{\Lambda}(D) : \mathbf{E}^e + \frac{S_0}{(s_0 + 1)} \left(\frac{-Y}{S_0} \right)^{s_0+1} r \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\dot{D} = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} r \quad (1.4)$$

où :

$$\begin{cases} S_0 \text{ et } s_0 \text{ sont les paramètres de l'endommagement ;} \\ \tilde{\Lambda}, \text{ le tenseur des modules élastiques effectifs;} \\ Y, \text{ la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement } D. \end{cases}$$

LEMAITRE a établi l'expression suivante de Y :

$$Y = -\frac{\Sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1-\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (1.5)$$

où Σ_m et Σ_{eq} sont respectivement la contrainte moyenne et équivalente. E et ν sont le module de YOUNG et le coefficient de POISSON.

ROUSSELIER (1987) a proposé un critère de plasticité pour matériaux poreux qui dérive d'une analyse thermodynamique [Rou87]. Le potentiel thermodynamique choisi s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \varphi_e(E^e) + \varphi_p(p) + \varphi_\beta(D) \quad (1.6)$$

où p est la variable d'écrouissage et D la variable d'endommagement.

Le potentiel plastique pour matériaux endommageables $\Phi \left(\tilde{\Sigma}_m, \tilde{\Sigma}_{eq}, P, Y \right)$ proposé par ROUSSELIER s'écrit :

$$\Phi \left(\tilde{\Sigma}_m^R, \tilde{\Sigma}_{eq}^R, P, Y \right) = \Phi_1 \left(\tilde{\Sigma}_{eq}^R, P \right) + \Phi_2 \left(\tilde{\Sigma}_m^R, Y \right) \quad (1.7)$$

où :

$$\begin{cases} \tilde{\Sigma}^R = \frac{\Sigma}{\rho} \text{ est le tenseur des contraintes effectives ;} \\ P, \text{ la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage } p; \\ Y, \text{ la force thermodynamique associée à la variable d'endommagement } D; \text{ et} \\ \rho, \text{ la densité actuelle du matériau.} \end{cases}$$

En choisissant la fonction d'endommagement sous la forme :

$$Y(D) = \sigma_1 f \quad (1.8)$$

où σ_1 est relié à la contrainte d'écoulement du matériau par la relation $\sigma_1 \cong 2\bar{\sigma}(p)/3$, ROUSSELIER a proposé le potentiel suivant :

$$\Phi(\Sigma_m, \Sigma_{eq}, \bar{\sigma}, \rho) = \frac{\Sigma_{eq}}{\rho} + C_R \sigma_1 f \exp\left(\frac{\Sigma_m}{\rho \sigma_1}\right) - \bar{\sigma}(p) \quad (1.9)$$

où f et $\bar{\sigma}(p)$ sont respectivement la porosité et la contrainte d'écoulement du matériau et C_R , un paramètre qui est déduit de tests. La valeur de C_R varie entre 1,5 et 2.

Le critère de ROUSSELIER présente la propriété remarquable de pouvoir rendre compte des observations de KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88] en ce qui concerne l'arrêt de la progression du flan latéral de la cellule élémentaire lors de la phase de coalescence⁵.

1.2.2 Approche micromécanique

L'approche micromécanique s'intéresse à modéliser la rupture ductile des matériaux à des échelles très fines pour remonter ensuite à l'échelle macroscopique en appliquant des concepts micromécaniques rigoureux (représentation, localisation et homogénéisation). La formulation des lois de comportement dans le cadre de l'approche micromécanique se fait en général suivant trois étapes :

- ◆ définition de la composition de la microstructure du V.E.R à partir de paramètres morphologique et rhéologique : processus de représentation ;

⁵Cette constatation se traduit, rappelons-le nous, par l'annulation de la composante radiale du tenseur taux de déformation [BD01].

- ◆ expression des données sur les cellules locales en fonction des grandeurs macroscopiques : processus de localisation ;
- ◆ définition des comportements moyens locaux sur le V.E.R, puis détermination des grandeurs macroscopiques du V.E.R en prenant des moyennes appropriées : processus d'homogénéisation.

McCLINCTOCK [McC68] et RICE et TRACEY [RT69] ont été les pionniers à proposer des modèles micromécaniques de croissance de cavités. Ces critères ont la particularité d'appartenir à la catégorie de modèles « non couplés »⁶ pour lesquels la déformation plastique n'est pas couplé à l'endommagement (la porosité f) par l'intermédiaire d'un critère.

La particularité de l'apparition chronologiquement tardive des potentiels plastiques d'endommagement dans l'approche micromécanique fait que les premiers modèles micromécaniques, c'est-à-dire les modèles « non couplés » jouaient en pratique un rôle d'indicateur de l'évolution de l'endommagement, sans influence sur le comportement global du matériau. En effet, une description « couplée » des processus d'endommagement des matériaux doit couvrir au moins deux aspects⁷ :

- ◆ l'évolution de la variable d'endommagement, c'est-à-dire le changement du volume des cavités,
- ◆ et l'adoucissement (ou le durcissement) du matériau à cause de cette évolution.

1.3 Mécanismes physiques de la rupture ductile

Il est aujourd'hui admis que la rupture ductile des métaux survient suivant trois stages que sont la nucléation, la croissance et la coalescence des cavités. Ces phases ne sont en réalité successives que lorsque l'on étudie un vide isolé. En effet, alors que certaines cavités commencent à nucléer en un endroit de la structure sous certaines conditions de chargement, d'autres se trouvent en pleine phase de croissance. Il est aussi rapporté dans la littérature que les détails de chacun de ces mécanismes peuvent varier d'un matériau à un autre selon l'état de contrainte qui règne dans la structure ou dans une partie de celle-ci [VSCL⁺85]. Dans cette section, nous donnons une description des trois stages ainsi que de quelques modélisations correspondant à chacun d'eux.

⁶Les premiers modèles couplés ont commencé à apparaître dans les années 70, le plus célèbre d'entre eux est dû à GURSON [Gur77]. Ce modèle ainsi que ses extensions sont présentés dans la section (1.4).

⁷Cette condition n'est pas limitative. En effet, d'autres aspects importants tels que l'effet du changement de forme et d'orientation des cavités et la présence d'inclusions dans le matériau ont été introduits par la suite [PCZ94, KAP00, APC04, GLD97, Gol97, SL04b, SL04a].

1.3.1 Nucléation des cavités

1.3.1.1 Description du mécanisme

La nucléation des cavités correspond à la création de vides généralement au niveau des inclusions soit par décohésion de l'interface particule-matrice, soit par rupture interne de l'inclusion comme le montre le schéma de la figure (1.1).

Cette situation a été observée expérimentalement pour la première fois par TIPPER, rapporté par ST-ONE et al. [VSCL⁺85]. Elle provient essentiellement de la localisation des champs de contrainte et déformation au voisinage des particules de seconde phase. En ce qui concerne les métaux, la nucléation survient en général par fissuration des grosses particules sous l'effet du chargement pour donner naissance aux cavités de première population, alors que les cavités de deuxième et troisième populations apparaissent par décohésion à l'interface particule-matrice [VSCL⁺85, GM87, Ben00]. Ce deuxième mode de germination est provoqué soit par la séparation des faces de la particule et de la matrice initialement en contact, soit par glissement relatif de ces deux faces, sans ouverture de la cavité. Des études expérimentales et théoriques ont montré que la germination de cavités dépend de plusieurs paramètres liés au système matrice-inclusion [Arg95, Arg75] :

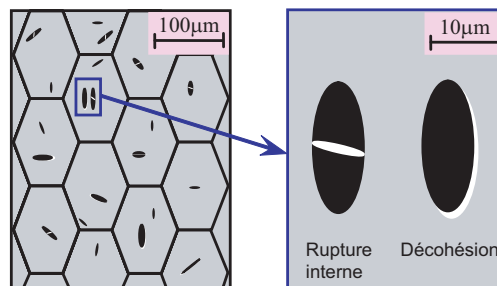


FIG. 1.1 – Schématisation de la nucléation des cavités.

Les paramètres morphologiques sont ceux liés à la microstructure du matériau. On peut citer la nature du matériau composant les inclusions, la forme et l'orientation de ces dernières, ainsi que leurs tailles et leurs fractions volumiques.

Les paramètres rhéologiques définissent singulièrement le comportement des deux constituants. Ce sont essentiellement les modules de YOUNG de la matrice $E^{(M)}$ et de l'inclusion $E^{(I)}$, leurs coefficients de POISSON $\nu^{(M)}$ et $\nu^{(I)}$, les propriétés d'écoulement de la matrice $\sigma_0^{(M)}$ et $n^{(M)}$ et éventuellement ceux de l'inclusion $\sigma_0^{(I)}$ et $n^{(I)}$... où $n^{(I)}$ et $n^{(M)}$ sont respectivement les exposants d'écrouissage de l'inclusion et de la matrice. En général, la germination de nouvelles cavités est propice dans le cas où les rigidités de la matrice et de l'inclusion sont très différentes⁸.

⁸Il est à noter que la nucléation de nouveaux vides est amplifiée dans la situation où les inclusions sont plus rigides que la matrice.

Les paramètres de chargement concernent l'orientation des axes principaux des contraintes ainsi que l'état de chargement qui peut être de compression ou de traction. Des analyses expérimentales ont abouti à la possibilité de germination de nouvelles cavités par fissuration de la matrice au voisinage de l'inclusion. Ce mode de nucléation a été notamment observé par BENZERGA qui a noté qu'il survenait à un stade tardif du processus de germination [Ben00].

1.3.1.2 Modèles de germination

Un des premiers modèles de germination des cavités est dû à GURLAND et al. [GP63] qui ont proposé un critère énergétique de nucléation par rupture de particules de formes sphériques. Plusieurs autres modèles de germination de cavités ont été proposés. Certains ont été obtenus en exploitant les résultats de GURLAND et al. [Arg75, FG81a, FG81b], d'autres en étudiant expérimentalement la nucléation dans certains matériaux [Ber81]. NEEDLEMAN et RICE [NR78] ont développé un critère de nucléation phénoménologique [NR78].

Modèle d'ARGON : ARGON et al. [Arg75, Arg76, Arg95] ont analysé la distribution des contraintes et déformations autour d'une particule rigide de forme cylindrique dans le cas d'un champ de déformation lointain $E_{11}^{\infty} = -E_{22}^{\infty}$. Ils ont montré que la condition énergétique de GURLAND et al. [GP63] était nécessaire mais pas suffisante et qu'elle doit s'accompagner de la condition que la contrainte au niveau de l'interface σ_i soit supérieure à la limite de traction σ_0 .

Dans le cas où l'écoulement de la matrice est non-linéaire, ils ont trouvé que la contrainte au niveau de l'interface σ_i peut être bornée par :

$$\frac{3}{2}\bar{\tau} \leq \sigma_i \leq 2\bar{\tau} \quad (1.10)$$

où $\bar{\tau}$ est la contrainte d'écoulement en cisaillement. Et puisque dans la situation où le champ de déformation n'est pas purement tangentielle la composante hydrostatique Σ_m doit être soustraite de la contrainte à l'interface σ_i , ils ont proposé le critère :

$$\sigma_i = A_A \Sigma_{eq} + \Sigma_m \quad (1.11)$$

où l'approximation $\sigma_0 \approx \sqrt{3}\bar{\tau}$ est employée, et où $\bar{\tau}$ est remplacée par la contrainte équivalente de VON MISES Σ_{eq} . $A_A = 1$ pour des inclusions cylindriques et $A_A = 1,77$ pour des inclusions sphériques [MM86]. Un défaut de ce modèle est qu'il ne prend pas en compte l'effet de taille des cavités ou ce qui revient au même, l'interaction entre vides.

Modèle de Beremin : Le groupe Beremin [Ber81] ont proposé un critère de germination de cavités. Celui-ci a été établi en analysant des sections longitudinales de différentes éprouvettes rompues lors d'essais de traction. Les résultats ainsi obtenus sur un acier A508 ont été ensuite comparés à des calculs éléments finis. La contrainte critique de rupture à l'interface matrice-inclusion σ_i s'écrit donc :

$$\sigma_i = \Sigma_I + \frac{K(S^p)}{c_B} (\Sigma_{eq} - \bar{\sigma}) \quad (1.12)$$

où Σ_I est la contrainte principale maximale, c_B un coefficient qui prend en compte l'écroutissage local de la matière et $K(S^p)$ un paramètre dépendant de la forme des inclusions. Bien que ce critère soit largement utilisé pour décrire la phase de nucléation [FMT87, BBS99, HBP05, LSP06], il présente cependant la faiblesse de ne pas expliquer le passage d'un mode de nucléation par rupture interne à celui par décohésion, selon l'orientation des particules par rapport à la direction de chargement maximale [Ber01]. Bien que cette modélisation soit plus riche que celle proposée par ARGON et al. (1.11), vu qu'elle prend en compte la forme des particules, elle se réduit cependant à cette dernière pour des particules sphériques et une matrice non écroutissable.

Modèle de NEEDLEMAN et RICE : Ces auteurs ont élaboré un critère de nucléation piloté par la contrainte d'écoulement $\bar{\sigma}$ et de la contrainte moyenne Σ_m suivant la formule [NR78] :

$$\dot{f}_n = \mathcal{A}\dot{\bar{\sigma}} + \mathcal{B}\dot{\Sigma}_m \quad (1.13)$$

où $\dot{\bar{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}}$ est le taux de contrainte d'écoulement lié au taux de déformation plastique cumulée par l'intermédiaire du module plastique $\dot{\bar{\sigma}}$ ⁹. La relation (1.13) offre la possibilité de contrôler la nucléation des cavités soit par la déformation plastique cumulée $\mathcal{B} = 0, \mathcal{A} > 0$, soit par la contrainte normale maximale $\mathcal{B} > 0, \mathcal{A} = 0$, soit par les deux en même temps $\mathcal{B} > 0, \mathcal{A} > 0$. Dans la première situation ($\mathcal{B} = 0$ et $\mathcal{A} > 0$), CHU et NEEDLEMAN [CN80] ont supposé que la germination de nouveaux vides suit une distribution normale avec une déformation moyenne ε_N et un écart type s_N :

$$\dot{f}_n = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (1.14)$$

où f_N est la fraction volumique de cavités dont l'amorçage est gouverné par la déformation plastique cumulée. Les mêmes auteurs proposent les valeurs $s_N = 0, 1, \varepsilon_N = 0, 3$ et $f_N = 0, 04$. Ces dernières sont largement utilisées dans la littérature.

⁹Dans le cas d'une matrice ayant un comportement thermomécanique, l'influence de la température T doit être prise en compte : $\dot{\bar{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}}$. Une telle étude n'a jamais été effectuée à notre connaissance.

Cependant, le choix de ces trois paramètres doit se faire avec précaution après étude de la microstructure du matériau [BD01]. En effet, les valeurs précédentes signifient que la moitié des inclusions présentes dans le matériau est rompue pour une déformation cumulée $\bar{\varepsilon}^p = 0,3$, et qu'à un niveau de déformation $\bar{\varepsilon}^p = 0,5$ la quasi-totalité de ces inclusions sont rompues. Alors que des études expérimentales ont montré, comme nous l'avons vu précédemment, que la germination des cavités dépend de plusieurs facteurs.

1.3.2 Croissance des Cavités

1.3.2.1 Description du mécanisme

La phase de croissance correspond au grossissement de volume des cavités déjà nucléées. Elle se produit en raison de l'écoulement plastique de la matrice qui provoque un durcissement de celle-ci autour du vide.

Les frontières de la cavité deviennent alors solidaires de la matière et évoluent avec elle suivant le chargement (figure 1.2). Il a été observé expérimentalement que la phase de croissance peut commencer avant la décohésion totale de la matrice autour de l'inclusion. Cette situation pose le problème du rôle de la particule lors de la croissance qui aura tendance à contenir cette croissance le long des surfaces restant en contact. Notons aussi que rien n'interdit à ce que la décohésion reste incomplète jusqu'à coalescence. Un modèle prenant en compte la croissance et la coalescence des cavités en présence d'inclusions a été proposé par SIRUGUET et LEBLOND [SL04a, SL04b]. Il permet de mettre en évidence l'influence de la présence de particules sur la rupture ductile des matériaux.

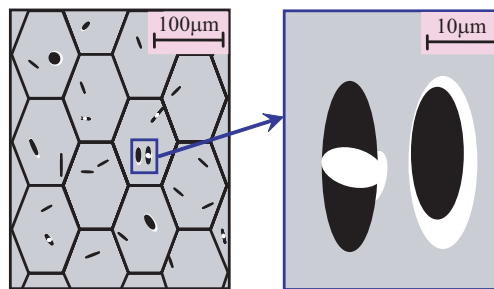


FIG. 1.2 – Schématisation de la croissance des cavités.

Des études ont abouti au résultat que la croissance des cavités dépend essentiellement de deux paramètres [Tve81, Gol97, GLD97, Ben00, BBP04a, BBP04b] :

L'interaction entre cavités : dans la situation où les fractions volumiques de vides sont faibles, l'évolution de leurs volumes peut être considérée indépendante de celle des cavités situées dans leurs voisinages. Cette circonstance concerne la majorité des modélisations de cette phase qui adoptent les hypothèses simplificatrices que ce mécanisme s'effectue :

- ◆ d'une manière non contrainte, c'est-à-dire que la nucléation de cavités est totale et instantanée ;
- ◆ sans interactions avec d'autres vides, c'est-à-dire que les cavités sont supposées assez éloignées les unes des autres pour pouvoir négliger l'interaction des champs mécaniques qui les entourent.

Cependant dès que l'ordre de grandeur des porosités devient relativement élevé, les vides commencent à interagir. Par conséquent, une analyse plus fine incluant ces effets doit être utilisée.

Le taux de triaxialité : la croissance des volumes des cavités est sensible à l'état de contrainte qui règne autour d'elles. Cette dépendance est selon plusieurs études liée à la triaxialité $\mathcal{T}$ ¹⁰ qui règne dans le matériau. MCCLINTOCK [McC68] et RICE et TRACEY [RT69] ont établi une relation exponentielle entre le taux de croissance des cavités et la triaxialité. BENZERGA et al. [Ben00] ont mené une étude expérimentale pour mettre en évidence le rôle de cette dernière sur la croissance des vides. Pour cela, ils ont effectué des essais de traction sur des barres axisymétriques entaillées en acier ferrito-perlitique de classe X52. Le paramètre d'entaille ζ des éprouvettes est donné par la relation $\zeta = 10 \frac{r}{R}$, où r est le rayon de l'entaille et R le rayon de la section minimale de l'éprouvette comme le montre la figure 1.3-a. L'effet de cette grandeur a été pris en compte en choisissant trois valeurs du rayon d'entaille initial et en gardant le même rayon de la section minimale : plus le rayon de l'entaille r est grand, plus ζ est grand, ce qui implique que la triaxialité $\mathcal{T}$ est petite. Les barreaux utilisés sont désignés par AER_ζ . Les figures 1.3-b, 1.3-c et 1.3-d représentent trois cavités situées au centre des trois éprouvettes dont les paramètres d'entaille sont respectivement $\zeta = 2$, $\zeta = 4$ et $\zeta = 10$.

Les figures 1.3-e et 1.3-f résument les mesures quantitatives des dimensions des cavités, selon la longueur d_L et selon la largeur d_S , rapportées aux dimensions moyennes initiales des inclusions MnS, $(d_L)_0$ dans le sens longitudinal et $(d_S)_0$ dans le sens de la largeur, en fonction de leurs positions radiales r normalisées par rapport au diamètre de la section minimale après rupture ϕ_{min} . Il est à noter sur la figure 1.3-f que la croissance des vides est plus élevée au centre que dans les régions proches du bord extérieur de l'éprouvette. Le taux de croissance latérale de la cavité centrale est plus important dans le cas de fortes triaxialités ($\zeta = 2$), il est d'environ 9 fois l'épaisseur moyenne initiale. Alors qu'il est de l'ordre de 5 fois cette épaisseur pour des triaxialités moyennes ($\zeta = 4$) et 3,5 fois l'épaisseur initiale pour de faibles triaxialités $\zeta = 10$. Enfin, nous observons sur la figure 1.3-e que les niveaux de croissance sont plus importants au centre de la barre pour une triaxialité forte comparativement à ceux des vides sous faible triaxialité.

Notons enfin que plusieurs autres études ont été effectuées dans le but d'analyser l'influence d'autres paramètres tels le coefficient d'écrouissage BUDIANSKY et

¹⁰La triaxialité est définie comme le rapport de la contrainte moyenne Σ_m à la contrainte équivalente Σ_{eq} : $\mathcal{T} = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$

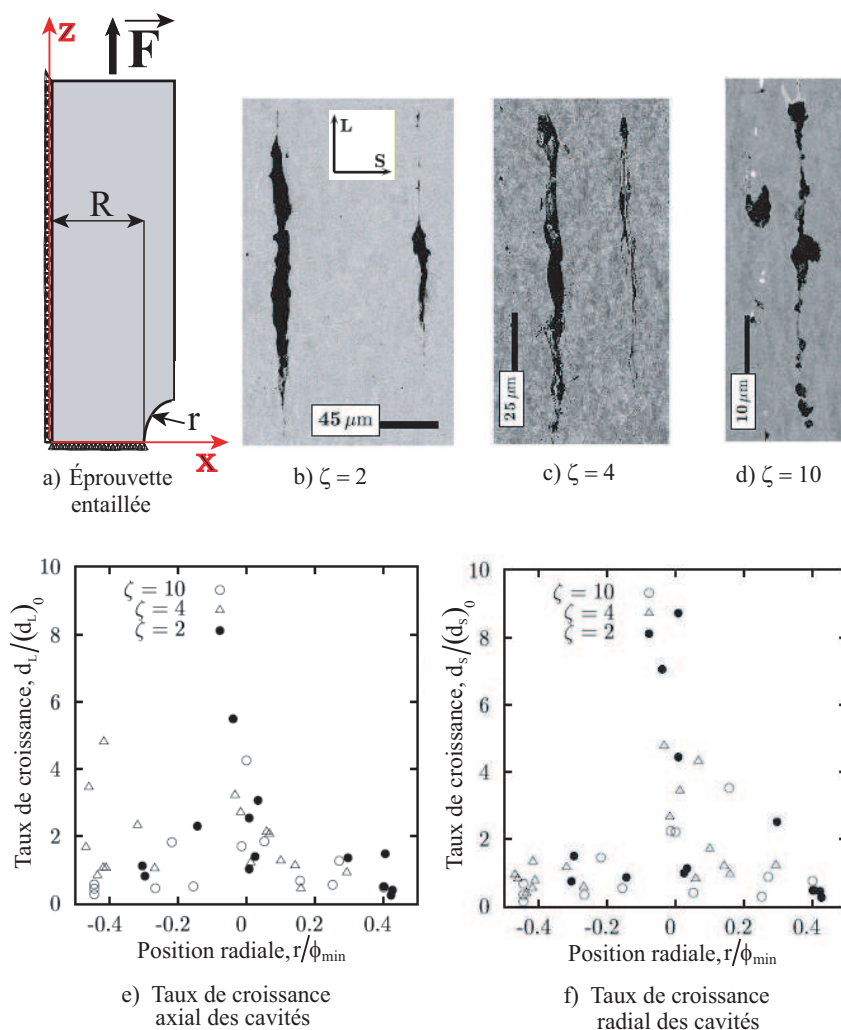


FIG. 1.3 – Taux de croissance des cavités dans des éprouvettes axisymétriques entaillées en acier [Ben00]

al. [BHS82], la vitesse de déformation et la température HAO et BROCKS [HB97], NEEDLEMAN et TVERGAARD [NT85].

1.3.2.2 Modèles de croissance

Plusieurs travaux ont été menés dans le domaine de la modélisation de l'évolution du volume des vides au cours du chargement ([McC68, RT69, Gur77, Tve81, NT84, PL90, GLD93, GLD94, GLD97, SL04a]). Nous présentons quelques résultats des travaux entrepris par MCCLINTOCK [McC68] et RICE et TRACEY [RT69]. Ces deux auteurs ont proposé des critères de croissance des cavités sphériques et sphéroïdales pour des matrices parfaitement plastiques et écrouissables.

McCLINTOCK a élaboré une loi d'évolution d'une cavité elliptique noyée dans une matrice écouissable obéissant à une loi d'écrouissage de type $\bar{\sigma} = K\varepsilon^n$, où n est le coefficient d'écrouissage. Elle est donnée par

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(1-n)} \sinh \left(\sqrt{3} (1-n) \mathcal{T} \right) \dot{E}^p \quad (1.15)$$

où R est le rayon moyen de l'ellipse.

McCLINTOCK a aussi proposé un critère de croissance d'une cavité sphérique contenue dans une matrice ayant un comportement parfaitement plastique. Le rayon de la sphère R obéit dans ce cas à

$$\frac{\dot{R}}{R\dot{E}_{33}} = \sqrt{3} \sinh \left(\sqrt{3} \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{eq}} \right) \quad (1.16)$$

où Σ_{11} est la contrainte suivant la direction perpendiculaire à l'axe de chargement, Σ_{eq} est la contrainte équivalente de VON MISES et $\dot{E}_{33}$ est le taux de déformation suivant l'axe de chargement.

RICE et TRACEY ont établi une loi d'évolution du rayon R d'un vide sphérique noyé dans une matrice rigide-parfaitement plastique :

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0,283 \exp \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) \dot{E}^p \quad (1.17)$$

Dans le cas d'une matrice écouissable, la relation 1.17 se met sous la forme

$$\frac{\dot{R}}{R} = 0,283 \exp \left(\frac{3}{2} \mathcal{T} \right) \dot{E}^p \quad (1.18)$$

HUANG [Hua91] a montré que le terme 0,283 est sous estimé pour des taux de triaxialités élevés. Il propose le modèle :

$$\begin{cases} \frac{\dot{R}}{R} = 0,427 \exp \left(\frac{3}{2} \mathcal{T} \right) \dot{E}^p & \text{pour } \mathcal{T} \geq 1 \\ \frac{\dot{R}}{R} = 0,427 \mathcal{T}^{1/4} \exp \left(\frac{3}{2} \mathcal{T} \right) \dot{E}^p & \text{pour } \frac{1}{3} \leq \mathcal{T} \leq 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

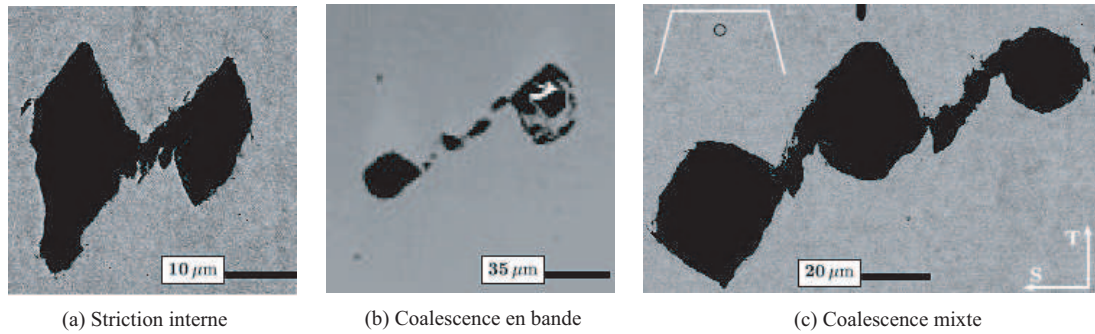


FIG. 1.4 – Différents modes de coalescence observés par BENZERGA et al. [Ben00]

1.3.3 Coalescence des cavités

Par coalescence nous distinguons celle dite microscopique et qui est le résultat de la jonction entre cavités voisines, tandis que la coalescence macroscopique est définie à une échelle plus grande comme étant la frontière entre un état d'endommagement "diffus" et celui avec "fissure" [Ben00]. C'est le mécanisme physique le moins compris de la rupture ductile en raison notamment :

- ◆ des difficultés expérimentales à observer un tel phénomène qui une fois amorcé, conduit rapidement à la rupture de l'élément de matière ;
- ◆ de la variété des modes de coalescence :
 - striction interne du ligament de matière entre vides comme le montre la figure 1.4-a,
 - formation d'une bande de cisaillement comme indiqué sur la figure 1.4-b,
 - coalescence en mode mixte, c'est-à-dire qu'à la striction interne entre grosses cavités succède une localisation de la déformation plastique, due à la coalescence des petites cavités, qui conduit, en général, à la rupture du ligament par cisaillement 1.4-c.
- ◆ de la forme des cavités et de l'espacement entre celles-ci [BBP99] ainsi que la présence d'une population de cavités de petites tailles situées entre les grosses cavités [Per92].

Dans le but de surmonter ces difficultés expérimentales, plusieurs auteurs se sont tournés vers l'outil numérique pour mieux comprendre ce phénomène. Une étude remarquable dans ce domaine est due à KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88] qui ont analysé les résultats de simulations numériques effectuées sur des cellules élémentaires de formes cylindriques constituées d'une matrice élastoplastique contenant un vide en son centre. Ces calculs ont montré qu'au cours de la coalescence le flan latéral de la cellule cesse de progresser et que les couches de matériau situées au dessus et au dessous du vide et touchant ses pôles cessent de se déformer. Cependant, la modélisation de la coalescence soulève deux problématiques. La première est la détermination d'un critère qui caractérise le début de ce stage. La deuxième concerne l'élaboration d'un modèle capable de décrire le comportement du matériau du début de la coalescence jusqu'à la rupture finale.

1.3.3.1 Critères de coalescence

Critère de THOMASON. À un stade avancé de la croissance des cavités, de fortes interactions apparaissent entre elles transformant la matière en forme de ligaments [Tho85, Tho90, Ben00].

Ceux situés entre les vides voisins commencent alors à strier permettant ainsi aux cavités de se rejoindre : c'est la coalescence par striction interne (figures 1.4-a). THOMASON a proposé de modéliser ce phénomène en supposant que la striction du ligament survient quand celui-ci atteint sa charge plastique limite. Il a aussi observé expérimentalement qu'à ce niveau de chargement, la déformation se concentre brusquement sur une couche perpendiculaire à l'axe principal de chargement et les zones de matériau situées en dessus et en dessous de cette couche cessent de se déformer.

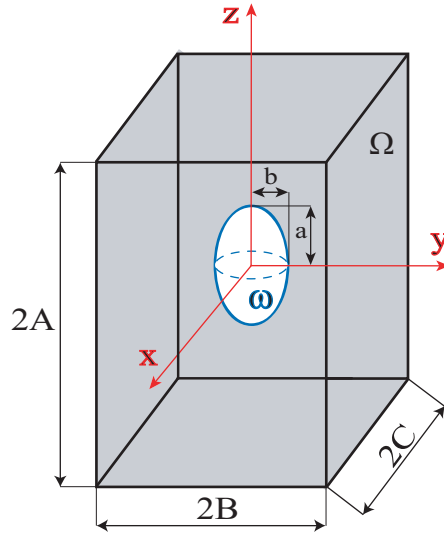


FIG. 1.5 – V.E.R. correspondant au critère de THOMASON [Tho85, Tho90].

Partant de ces observations, THOMASON [Tho85, Tho90] a effectué une analyse limite d'un V.E.R. de forme prismatique carrée contenant une cavité ellipsoïdale (figure 1.5) pour aboutir au critère :

$$\left[\frac{0,1}{\left(\frac{a}{B-b}\right)^2} + \frac{1,2}{\sqrt{\frac{b}{B}}} \right] \cdot \left[1 - \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} f_0 \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{b}{R_0} \right) \exp(E_{zz}) \right] = \frac{\Sigma_{zz}}{\sigma_0} \quad (1.20)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ sont les demi-axes de la cavité dans les directions radiale et axiale;} \\ A \text{ et } B, \text{ la largeur et la hauteur du V.E.R.;} \\ \sigma_0 \text{ et } \Sigma_{zz}, \text{ la limite d'élasticité de la matrice et la contrainte macroscopique dans la} \\ \quad \text{direction axiale } z; \text{ et} \\ f_0, \text{ la porosité initiale du V.E.R.} \end{array} \right.$$

L'équation (1.20) peut être reformulée différemment en introduisant les variables adimensionnelles $\chi = \frac{b}{B} = \left(\frac{3}{2}f\lambda e^{-S}\right)^{\frac{1}{3}}$, $W = a/b$ et $\lambda = \frac{A}{B} = \lambda_0 \exp\left(\frac{3}{2}E_{eq}\right)$ qui représentent respectivement, la taille du ligament, le paramètre de forme de la

cavité et l'espacement entre cavités [Ben02, BBP04b, BD01, PH00]. Le critère se réécrit :

$$\frac{\Sigma_{zz}}{\bar{\sigma}} = (1 - \chi^2) \left[0, 1 \left(\frac{1 - \chi}{\chi W} \right)^2 + 1, 2 \sqrt{\frac{1}{\chi}} \right] \quad (1.21)$$

Critère de PERRIN-LEBLOND. PERRIN et LEBLOND [Per92, PL93, Leb03] ont proposé un critère de coalescence utilisant la théorie de localisation de la déformation de RUDNICKI et RICE [RR75]. PERRIN a repris l'analyse de YAMAMOTO [Yam78] effectuée sur un matériau obéissant au modèle de GURSON et montré que les porosités critiques ainsi obtenues surestiment celles calculées numériquement par KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88] et BECKER et al. [BSRA89].

Il a expliqué cet écart par le fait que la théorie de RUDNICKI ET RICE prévoit la possibilité de formation de bandes de cisaillement inclinées par rapport au plan perpendiculaire à la direction de chargement, alors que les résultats des simulations ne prédisent de coalescence que dans ce plan. Une deuxième explication est liée au fait que l'étude de YAMAMOTO [Yam78] ne prend pas en compte l'effet de la fraction volumique initiale de vide sur la porosité critique de coalescence. Quantité que plusieurs auteurs s'accordent à dire qu'elle joue un rôle primordial.

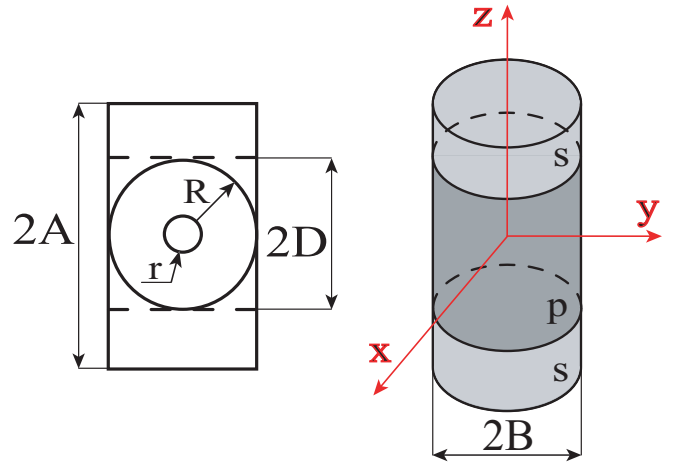


FIG. 1.6 – V.E.R. multi-couches correspondant au critère de PERRIN [PER92].

En exploitant les observations de KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88] en ce qui concerne l'existence d'une couche fortement poreuse située entre deux couches rigides au début de la coalescence, PERRIN [Per92] a proposé d'appliquer le formalisme de RUDNICKI ET RICE (analyse revisitée avec LEBLOND [PL93]) à une couche centrale poreuse. Cette couche dont le comportement obéit au modèle GTN [Gur77, Tve81, TN84] est située entre deux couches saines obéissant au critère de VON MISES introduisant ainsi la notion du V.E.R. multicouche (figure 1.6). Le critère élaboré s'écrit :

$$\left[\frac{\Sigma_{eq}^{(p)}}{\sigma_0} - q_1 q_2 f^{(p)} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_0} \right) \right]^2 = \frac{3(1 - \nu) \sigma_0}{E} q_1^2 q_2 (1 - f^{(p)}) f^{(p)} \sinh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_0} \right) \times \left[\cosh \left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m^{(p)}}{\sigma_0} \right) - q_1 f^{(p)} \right]$$

où l'exposant (p) fait référence à une quantité exprimée dans la couche poreuse (par exemple f^p est la porosité de la couche poreuse), q_1 et q_2 sont les coefficients de TVERGAARD [Tve81] et σ_0 la limite d'élasticité. Une des faiblesses de

ce critère est qu'il a été obtenu en utilisant le modèle de croissance GTN. Par conséquent, la pertinence de l'utilisation de ce critère avec des modèles de croissance autres que celui avec lequel il a été obtenu n'est pas assurée. Par ailleurs SUQUET [GLD97, GLPD01] a noté que la modélisation du V.E.R. par un multicouche pendant la phase de coalescence induit des conséquences sur la surface de charge macroscopique au cours de la croissance. Celle-ci devient nécessairement anisotrope à cause de la présence de couches de matériaux différentes.

1.3.3.2 Modèles de coalescence

Modèle de TVERGAARD-NEEDLEMAN : TVERGAARD et NEEDLEMAN [TN84] ont proposé un modèle de coalescence initialement élaboré pour corriger le critère de Gurson [Gur77] qui prédit mal la rupture finale du matériau.

Cependant, celui-ci ne présente pas de restriction pour une utilisation avec un autre modèle de croissance. Ces auteurs ont pris en compte l'évolution rapide de la porosité au cours de cette dernière phase de la rupture ductile en remplaçant la porosité f , qui apparaît dans le potentiel plastique de GURSON, par une fonction f^* dont l'expression est la suivante (figure 1.7) :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f < f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f \geq f_c \end{cases} \quad (1.22)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = (f_u - f_c) / (f_F - f_c) \text{ a été introduit pour représenter l'augmentation rapide de la porosité après coalescence;} \\ f_c \text{ et } f_F \text{ désignent respectivement la porosité de début de coalescence et à rupture;} \\ f_u \text{ est la valeur que prendrait } f^* \text{ lorsque l'élément de volume ne peut plus supporter de contraintes } (\Sigma = \mathbf{0}). \end{array} \right.$$

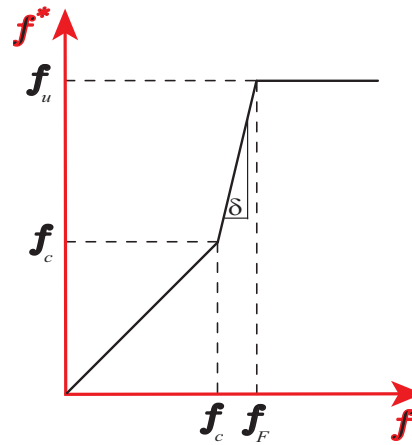


FIG. 1.7 – Graphe de l'évolution de la fonction $f^*(f)$.

Modèle de BENZERGA : BENZERGA [Ben02] a élaboré un modèle complet de coalescence par striction en utilisant le critère de THOMASON (équation 1.21). La possibilité du passage de la forme de la cavité, au cours de ce stage, d'un ellipsoïde à un cône a été prise en compte, d'une manière phénoménologique, en introduisant un facteur de forme γ dont les valeurs varient entre $\gamma_c = \frac{1}{2}$ (cavité forme ellipsoïdale)

et $\gamma_f = 1$ (cavité conique). BENZERGA [Ben02] propose l'expression suivante pour γ :

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_c & \text{si } \chi < \chi_c \\ \gamma_c + \frac{\gamma_f - \gamma_c}{1 - \chi_c} (\chi - \chi_c) & \text{si } \chi \geq \chi_c \end{cases}$$

où χ_c est la taille du ligament au début de la coalescence. L'expression de la taille du ligament s'écrit cette fois-ci

$$\chi = \frac{b}{B} = (3\gamma f \lambda e^{-S})^{\frac{1}{3}} \quad (1.23)$$

BENZERGA et al. [BBP99, Ben00, BBBP02] proposent de remplacer la porosité f par la nouvelle variable interne χ , car elle semble plus appropriée à décrire la striction du ligament, et de réécrire le critère de THOMASON (1.21) sous une forme plus générale :

$$\Phi^c(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, \chi, W) = \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} + \frac{3}{2} \frac{|\Sigma_m|}{\bar{\sigma}} - \frac{3}{2} (1 - \chi^2) \mathcal{C}(\chi, W) \quad (1.24)$$

où la quantité

$$\mathcal{C}(\chi, W) = 0,1 \left(\frac{\chi^{-1} - 1}{W^2 + 0,1\chi^{-1} + 0,02\chi^{-2}} \right)^2 + 1,3 \sqrt{\frac{1}{\chi}}, \quad (1.25)$$

a été modifiée d'une manière phénoménologique, puis calibrée sur des calculs de cellules afin d'éviter la divergence du terme au dénominateur dans le cas de vides très aplatis ($W \rightarrow 0$). La relation (1.24) se réduit à (1.21) dans la circonstance d'une modélisation axisymétrique. La condition de l'arrêt de l'avancement du flan latéral observé lors de la phase de coalescence est vérifiée par le nouveau critère (1.24) ; nous avons bien

$$\dot{E}_{xx} = \dot{\lambda}_p \frac{\partial \Phi^c}{\partial \Sigma_{xx}} = 0 \quad (1.26)$$

où λ_p est le multiplicateur plastique.

BENZERGA a complété le modèle en proposant des lois d'évolution des différentes variables internes. Pour cela, il a exploité les résultats obtenus par KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88] qui peuvent s'exprimer sous forme mathématique comme suit (figure 1.5) :

$$\dot{B} \big|_{coal} = 0 \text{ et } \dot{a} \big|_{coal} = \dot{A} \big|_{coal} \quad (1.27)$$

La loi d'évolution de variable taille de ligament χ a été obtenue en dérivant l'équation de la conservation du volume de la matrice par rapport au temps. En introduisant les relations (1.27) nous aboutissons à

$$\dot{\chi} = \frac{3}{4} \frac{\lambda}{W} \left[\frac{3\gamma}{\chi^2} - 1 \right] \dot{\varepsilon}^p + \frac{\chi}{2\gamma} \dot{\gamma} \quad (1.28)$$

Celle du paramètre de forme a été établie en calculant la dérivée temporelle de $W = a/b$, puis en injectant les équations (1.27-b) et (1.28)

$$\dot{W} = \frac{9}{4} \frac{\lambda}{\chi} \left[1 - \frac{\gamma}{\chi^2} \right] \dot{\bar{\epsilon}}^p + \frac{W}{2\gamma} \dot{\gamma} \quad (1.29)$$

Enfin, la variable d'espace λ est gouvernée par

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \lambda \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (1.30)$$

1.4 Le modèle GTN

Dans cette section nous présentons le modèle de Gurson ainsi que les différentes extensions et améliorations qui lui ont été apportées.

1.4.1 Le critère de plasticité

GURSON [Gur77] a proposé un modèle de comportement pour matériaux poreux obtenu par analyse limite d'un V.E.R. sphérique ou cylindrique contenant un vide de même forme.

Le modèle est la donnée d'un critère de plasticité, d'une loi d'écoulement régie par la règle de normalité et d'une loi d'évolution de la porosité. Le matériau constitutif utilisé par GURSON pour décrire le comportement de la matrice est supposé rigide parfaitement plastique obéissant au critère de VON MISES. Le V.E.R., schématisé sur la figure 1.8 dans le cas d'une forme sphérique, est soumis à des conditions de taux de déformation homogènes au bord :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur le bord extérieur } \partial V_T \quad (1.31)$$

GURSON a utilisé la méthode cinématique de la théorie de l'analyse limite qui consiste à :

- ♦ trouver une famille de champs de vitesses, compatibles avec les conditions aux limites,

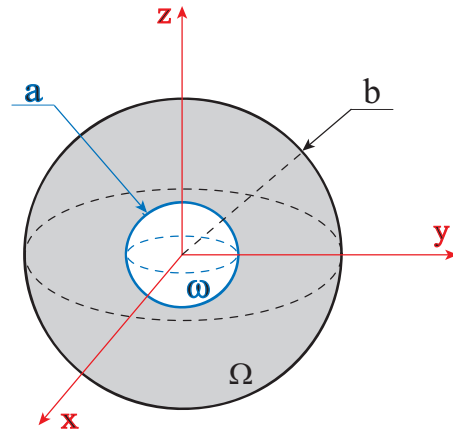


FIG. 1.8 – V.E.R correspondant au critère de GURSON pour cavités sphériques.

- ◆ minimiser la dissipation plastique correspondante.

Le champ proposé par GURSON est de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{x} + \frac{b^3}{r^2} E_m \mathbf{e}_r$$

où $\dot{\mathbf{E}}'$ est le déviateur du tenseur taux de déformations macroscopiques $\dot{\mathbf{E}}$ et $E_m = E_{kk}/3$, le taux de déformation macroscopique moyen. $\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale. Le critère obtenu s'écrit :

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.32)$$

Le critère (1.32) connu sous le nom de critère original de GURSON, présente les particularités suivante :

- ◆ dans le cas d'un matériau dense pour lequel la porosité est nulle ($f = 0$), nous retrouvons l'expression du critère de MISES :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} - 1 = 0$$

- ◆ La règle d'écoulement plastique macroscopique associée par la règle de normalité restant valable dans le cas d'un matériau poreux [Gur77, Leb03], le tenseur des taux de déformations plastiques macroscopiques s'écrit :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} = \dot{\lambda}_p \left[\frac{3}{\sigma_0^2} \Sigma' + \frac{2f}{\sigma_0} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) \mathbf{1} \right] \quad (1.33)$$

En calculant la trace de ce tenseur $tr \dot{\mathbf{E}}^p$, nous obtenons

$$tr \dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda}_p \frac{6f}{\sigma_0} \sinh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) \quad (1.34)$$

Il s'ensuit que pour une porosité et une contrainte moyenne toutes deux non nulles ($f \neq 0$ et $\Sigma_m \neq 0$) le volume total varie ($tr \dot{\mathbf{E}}^p \neq 0$) selon l'état de chargement (signe de Σ_m). Cette variation traduit le fait que le modèle de Gurson prend bien en compte le changement de volume des vides.

- ◆ le critère (1.32) présente la faiblesse de ne pas pouvoir prédire une porosité réaliste à la rupture. En effet, un modèle de comportement doit vérifier les lois qui le régissent jusqu'à la rupture totale, c'est-à-dire jusqu'à la perte totale du matériau de sa capacité à supporter des charges¹¹. Sachant qu'à ce moment, l'équation 1.32 prend la forme

$$\Phi = (1 - f)^2 = 0 \quad (1.35)$$

¹¹Cela se traduit mathématiquement par l'écriture : $\Sigma = \mathbf{0}$

Par conséquent, la porosité à rupture est égale à $f = 1$. C'est-à-dire, matériau totalement constitué de vide. Il va de soit que ce niveau de fractions volumiques de vide n'est jamais atteint en pratique.

Le critère (1.32) donne de bonnes approximations pour de fortes triaxialités. Il surestime cependant la déformation à rupture (ou ductilité) du matériau pour de faibles triaxialités [BD01, Leb03]. Pour remédier à cette situation, due en partie à la non-prise en compte de l'interaction entre cavités, TVERGAARD [Tve81] a proposé d'introduire trois coefficients q_1 , q_2 et q_3 . Il a en outre remplacé dans l'équation (1.32) la limite d'élasticité σ_0 par la contrainte d'écoulement $\bar{\sigma}$, comme suggéré par GURSON [Gur77], pour inclure l'écrouissage isotrope du matériau. Il a abouti à

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f, \bar{\sigma}) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (1.36)$$

Si un certain consensus semble se dégager sur les valeurs de $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$, le coefficient q_1 a fait l'objet de plusieurs propositions variant de $q_1 = 1$ à $q_1 = 1,5$. PERRIN et LEBLOND [PL90] ont obtenu la valeur de $q_1 = 1/e = 1,47$ à partir d'un raisonnement de type auto-cohérent. Si cette extension améliore les prédictions du modèle pendant la phase de croissance [Tve81, TN84, Per92, Leb03], elle ne résout toujours pas la problématique de la description de la coalescence. En effet, le nouveau critère prédit une porosité à rupture $f = 1/q_1$, qui est de l'ordre de $f = 0,68$ pour $q_1 = 1,47$. Ce niveau de fractions volumiques de vide reste encore élevé. Pour prendre en compte la perte « rapide » de rigidité du matériau pendant le stage de coalescence, TVERGAARD et NEEDLEMAN [TN84] ont couplé le modèle de coalescence qu'ils ont élaboré (décrit au paragraphe 1.3.3.2) avec le critère 1.36. Le potentiel plastique modifié s'écrit

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f, \bar{\sigma}) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 = 0 \quad (1.37)$$

où f^* est donnée par l'équation (1.22).

L'introduction de la porosité fictive f^* permet de mieux modéliser le processus de coalescence, mais introduit un nouveau couple de paramètres à identifier (f_c, f_F) ou (f_c, δ). De plus, Benzerga [Ben02] rapporte qu'il n'existe pas de couple unique (f_c, δ) pour décrire le processus de rupture en utilisant le critère (1.37).

1.4.2 Loi d'écoulement associée par normalité

Soit une structure, composée de matière et de vides, ayant un volume total V_{Tot} de frontière ∂V_{Tot} . Notons V_{mat} et V_{vid} le volume de la matière et des vides, respectivement. Le lemme de HILL-MANDEL s'énonce comme suit :

Lemme de HILL-MANDEL Soient $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ un champ de vitesse cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x}$ sur la frontière ∂V_{Tot} , et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ un champ de contrainte statiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant la condition $\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ dans V_{Tot} et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ sur ∂V_{Tot} . Ces deux champs ne sont, a priori, pas reliés par une loi de comportement. Nous avons :

$$(1 - f) < \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) >_{V_{mat}} = < \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) >_{V_{Tot}}$$

où $< . >_V$ désigne la moyenne sur le volume V . En prolongeant le champs $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ par $\mathbf{0}$ sur le volume des vides V_{vid} nous aboutissons à l'expression du lemme de HILL-MANDEL :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} = < \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) >_{V_{Tot}} = (1 - f) < \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) >_{V_{mat}} \quad (1.38)$$

Étudions maintenant un point sur la surface de charge $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R})$ caractérisé par un écoulement plastique $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ et un état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. $\mathbf{R}$ représente l'écrouissage du matériau, c'est-à-dire qu'à l'état initial, sans écrouissage, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. En appliquant pendant cet écoulement rigide plastique un état de contrainte virtuel $\boldsymbol{\sigma}^*$ caractérisé par $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{R}) \leq 0$, le Principe du Travail Plastique Maximal de HILL (P.T.P.M.) s'énonce comme suit :

L'état de contrainte qui provoque un écoulement plastique donné est celui qui développe le plus grand travail plastique, comparé à celui de tout autre état de contrainte ne violant pas le critère de plasticité.

ou encore sous forme mathématique :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \quad \text{soit} \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq 0 \quad (1.39)$$

De ce principe découlent deux conséquences :

- ◆ la convexité du domaine élastique définie par $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R}) \leq 0$,
- ◆ la loi d'écoulement plastique $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ doit être nécessairement normale à la surface de charge $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{R})$ en $\boldsymbol{\sigma}$.

En utilisant le lemme de HILL-MANDEL nous pouvons écrire

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\mathbf{E}} = (1 - f) < (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} >_{V_{mat}}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^*$ sont respectivement les tenseurs des contraintes macroscopiques correspondant à $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}^*$. Il s'ensuit

$$(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*) : \dot{\mathbf{E}}^P \geq 0 \quad (1.40)$$

Nous passons ainsi d'une écriture à l'échelle microscopique (1.39) à l'échelle macroscopique (1.40). Ce qui nous permet de conclure que la loi d'écoulement plastique macroscopique satisfait la règle de normalité :

$$\dot{\mathbf{E}}^P = \dot{\lambda}_p \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \quad \dot{\lambda}_p \geq 0 \quad (1.41)$$

1.4.3 Évolution de la porosité

La loi d'évolution de la porosité peut être approchée en utilisant la condition d'incompressibilité plastique de la matrice. Dans le cas où la nucléation de nouveaux vides n'est pas prise en compte, nous avons :

$$V_{mat} = V_{Tot} - V_{vid} = C^{te} \Rightarrow \dot{V}_{Tot} = \dot{V}_{vid}$$

En utilisant la définition de la porosité $f = V_{vid}/V_{Tot}$, l'expression précédente s'écrit :

$$\dot{f} = \frac{\dot{V}_{vid}}{V_{Tot}} - \frac{V_{vid}}{V_{Tot}^2} \dot{V}_{Tot} = \left(1 - \frac{V_{vid}}{V_{Tot}}\right) \frac{\dot{V}_{Tot}}{V_{Tot}}$$

Sachant que $\dot{V}_{Tot}/V_{Tot} = tr \dot{\mathbf{E}}^p$, nous aboutissons à la loi :

$$\dot{f} = 3(1 - f) \dot{E}_m^p \quad (1.42)$$

Dans la circonstance où la nucléation doit être prise en compte, nous devons distinguer deux contributions dans la loi de croissance : une partie due à l'augmentation du volume des vides existants $\dot{V}_{vid}^c$ et une autre correspondant à la germination de nouvelles cavités $\dot{V}_{vid}^n$. Cependant, il faut noter que le taux de croissance du volume total n'est lié qu'à la partie $\dot{V}_{vid}^c$, c'est-à-dire $\dot{V}_{Tot} = \dot{V}_{vid}^c$. Nous pouvons donc écrire

$$\dot{f} = \frac{\dot{V}_{vid}}{V_{Tot}} - \frac{V_{vid}}{V_{Tot}^2} \dot{V}_{Tot} = \frac{\dot{V}_{vid}^c + \dot{V}_{vid}^n}{V_{Tot}} - \frac{V_{vid}}{V_{Tot}^2} \dot{V}_{Tot} = \left(1 - \frac{V_{vid}}{V_{Tot}}\right) \frac{\dot{V}_{Tot}}{V_{Tot}} + \frac{\dot{V}_{vid}^n}{V_{Tot}}$$

Soit en notant le taux de nucléation de nouvelles cavités $\dot{f}_n = \frac{\dot{V}_{vid}^n}{V_{Tot}}$:

$$\dot{f} = \dot{f}_c + \dot{f}_n = 3(1 - f) \dot{E}_m^p + \dot{f}_n \quad (1.43)$$

1.4.4 Prise en compte de l'écrouissage

Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4.1, l'écrouissage isotrope peut être introduit en remplaçant la limite d'élasticité σ_0 qui apparaît dans le critère de plasticité par la contrainte d'écoulement $\bar{\sigma}$ [Gur77]. L'évolution de cette dernière est déduite de l'équivalence entre la dissipation plastique macroscopique du matériau $\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p$ et la dissipation plastique microscopique $\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p$, tout en tenant compte de la présence de vides dans le matériau ; ce qui amène à

$$(1 - f) \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{\sigma}} = \bar{h}_\varepsilon \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\boldsymbol{E}}^p}{(1-f)\bar{\sigma}} \quad (1.45)$$

Cette extension heuristique, mise en œuvre par TVERGAARD et NEEDLEMAN [TN84], n'est cependant rigoureusement correcte que pour des exposants d'écroutissage $n < 0,2$. Au delà de cette valeur l'écriture précédente conduit à une surestimation de la croissance des cavités [BD01]. Pour palier cette situation, LEBLOND et al. [LPD95] ont proposé de modifier le critère (1.32) en remplaçant la limite d'élasticité σ_0 , qui apparaît deux fois dans le critère par deux paramètres σ_1 et σ_2 qui dépendent de la porosité initiale f_0 et de E_{eq} et E_m qui s'expriment comme suit :

$$E_{eq} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{E}}' : \dot{\boldsymbol{E}}'} dt; \quad E_m = \int_0^t |\dot{E}_m| dt$$

Le critère de plasticité s'écrit donc

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_1^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_2}\right) - 1 - f^2 = 0$$

Les exposants d'écroutissage des matériaux retenus pour les applications envisagées dans ce travail de thèse sont inférieurs à 0,2. Par conséquent, nous utilisons l'expression du critère de plasticité donnée par l'équation (1.37).

1.4.5 Prise en compte de l'élasticité

Il est important, lors de l'implémentation de lois de comportement dans un code de calcul, d'incorporer une relation décrivant le domaine élastique du matériau. Puisque le cadre eulérien s'impose aisément pour l'écriture de tels modèles, notamment pour pouvoir prendre en compte les grandes déformations, la loi d'élasticité sera écrite dans le même cadre [Leb03]. Dans le souci de vérifier le principe d'objectivité, la loi d'élasticité est écrite sous sa forme hypoélastique

$$\check{\boldsymbol{\Sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (1.46)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega} \text{ est le tenseur taux de rotation du référentiel lié à la matière par rapport à celui} \\ \text{de l'observateur;} \\ \check{\boldsymbol{\Sigma}} \text{ et } \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \text{ sont les dérivées temporelles de } \boldsymbol{\Sigma} \text{ dans les référentiels liés à l'observateur} \\ \text{et à la matière, respectivement;} \\ \boldsymbol{\Lambda}^e \text{ est le tenseur des modules élastiques;} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \text{ est le tenseur taux de déformation élastique.} \end{array} \right.$$

Ce travail de recherche consiste à implémenter une loi de comportement élasto-plastique pour matériaux endommageables connue sous le nom du GLD en référence aux auteurs (M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND et J. DEVAUX). L'objectif est d'étudier l'influence du changement de forme des cavités au cours des opérations de mise en forme des métaux. Une extension de ce modèle à la situation où un échauffement thermique lié à la dissipation plastique est généré dans matériau est élaborée. Le GLD ainsi que la procédure suivie pour effectuer le couplage thermomicromécanique sont présentés dans les sections (1.5) et (1.6) respectivement. Les détails de l'implémentation de cette modélisation le sont au chapitre 2.

1.5 Présentation du modèle GLD

GOLOGANU et al. [GLD93, GLD94, Gol97] ont proposé un modèle micromécanique pour décrire le comportement de matériaux contenant des cavités sphéroïdales aplaties ou allongées pouvant changer de forme au cours du chargement. Les hypothèses d'axisymétrie de la géométrie des vides et de leur alignement font que l'isotropie transverse de la matière est respectée.

1.5.1 Le critère de plasticité

Le modèle GLD a été développé dans le cadre de l'analyse limite et de l'homogénéisation. Le V.E.R. étudié est un ellipsoïde axisymétrique, allongé ou aplati, contenant une cavité de même forme et qui lui est confocale (figure 1.9). La distance focale c des deux ellipsoïdes est donnée par la relation :

$$c = \sqrt{|a^2 - b^2|} = \sqrt{|A^2 - B^2|} \quad (1.47)$$

Une telle géométrie est entièrement définie par la donnée de deux paramètres scalaires adimensionnels qui sont la porosité $f = ab^2 / (AB^2)$ et le paramètre de forme S défini par $S = \ln(a/b)$. Le matériau constitutif de la matrice est supposé rigide-parfaitement plastique obéissant au critère de VON MISES. L'excentricité de la cavité est $e_1 = c/a$, celle de l'ellipsoïde extérieur est $e_2 = c/A$ dans le cas d'un V.E.R allongé. Dans la situation où ce dernier est aplati, ces deux caractéristiques sont données par les relations $e_1 = c/b$ et $e_2 = c/B$. Ces quantités en fonction de f et S sont les suivantes :

$$e_1 = \sqrt{1 - e^{-2|S|}}$$

$$f \frac{1 - e_2^2}{e_2^3} = \frac{1 - e_1^2}{e_1^3} \quad \text{dans le cas d'une cavité allongée, et}$$

$$f \frac{\sqrt{1 - e_2^2}}{e_2^3} = \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^3} \quad \text{dans le cas d'une cavité aplatie.}$$

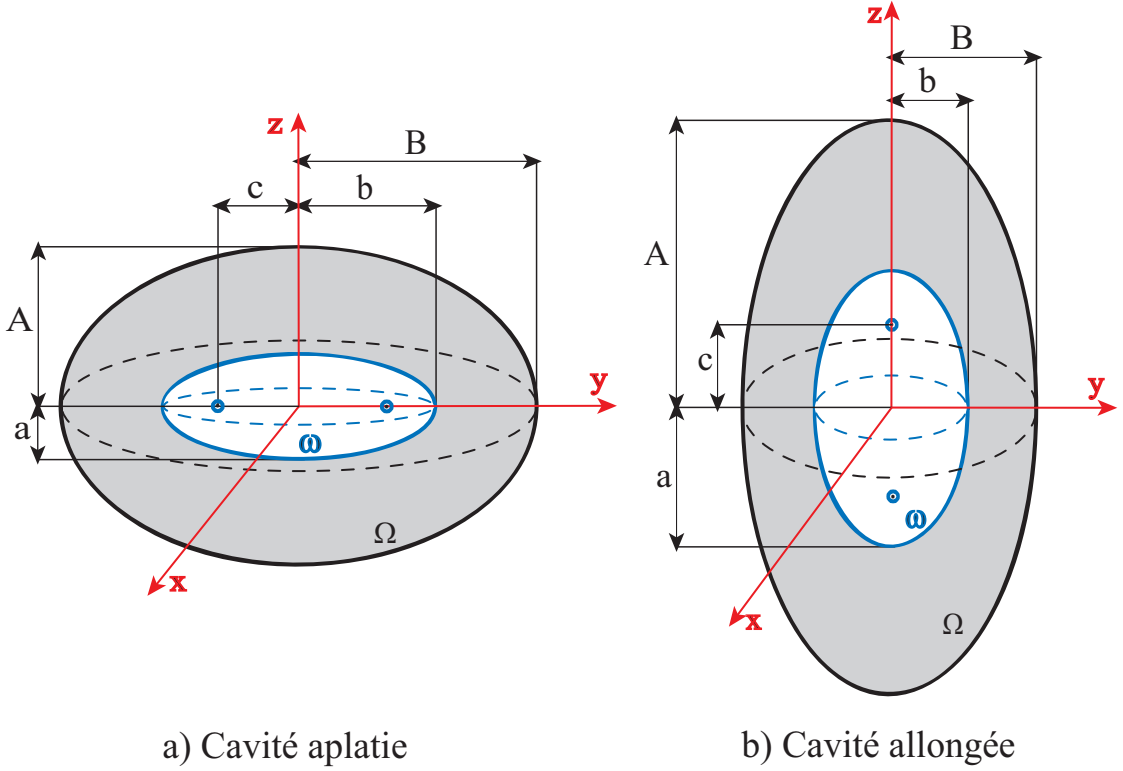


FIG. 1.9 – Cavités aplaties et allongées

La dissipation plastique macroscopique $\Pi(\dot{\mathbf{E}})$ est définie par

$$\Pi(\dot{\mathbf{E}}) = \inf (1 - f) < \pi(\dot{\mathbf{\epsilon}}(\mathbf{v})) >_{\Omega - \omega}$$

où $\dot{\mathbf{E}}$ est le tenseur taux de déformation macroscopique et $\dot{\mathbf{\epsilon}}(\mathbf{v})$ est le tenseur taux de déformation microscopique associé au champ de vitesse $\mathbf{v}$. $\pi(\dot{\mathbf{\epsilon}})$ est la contrepartie microscopique de $\Pi(\dot{\mathbf{E}})$. Sa valeur n'est finie que dans la situation où les champs de vitesse respectent l'incompressibilité de la matrice. Son expression est donnée en fonction de la limite d'élasticité σ_0 et du taux de déformation microscopique équivalent $\dot{\epsilon}_{eq}$ par

$$\pi(\dot{\mathbf{\epsilon}}) = \bar{\sigma}_0 \dot{\epsilon}_{eq}$$

L'écriture $< >_{\Omega - \omega}$ représente la moyenne sur le volume de la matrice $\Omega - \omega$. Nous avons donc :

$$< \pi(\dot{\mathbf{\epsilon}}(\mathbf{v})) >_{\Omega - \omega} = \frac{1}{\Omega - \omega} \int_{\Omega - \omega} \pi(\dot{\mathbf{\epsilon}}(\mathbf{v})) d\Omega$$

GOLOGANU et al. ([GLD93, GLD94]) ont choisi un champ de vitesses composé de deux parties, la première $\mathbf{v}^{(A)}$ dérivant de la famille proposée par LEE et MEAR [LM92] et le second correspond à un taux de déformation déviatorique uniforme $\mathbf{v}^{(B)}$:

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}^{(A)} + B\mathbf{v}^{(B)} \quad A \text{ et } B \text{ sont deux constantes.} \quad (1.48)$$

Pour être compatible avec le problème étudié, le champ (1.48) doit être incompressible, axisymétrique et satisfaire les conditions aux limites de taux de déformation homogène sur le bord extérieur du volume élémentaire :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur le bord extérieur } \partial V_T \quad (1.49)$$

Le V.E.R. est soumis à un chargement axisymétrique de la forme :

$$\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \neq 0, \Sigma_{zz} \neq 0, \text{ autres } \Sigma_{ij} = 0 \quad (1.50)$$

Le problème consiste donc à trouver le critère de plasticité en résolvant l'équation :

$$\Sigma = \frac{\partial \Pi(\dot{\mathbf{E}})}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (1.51)$$

Après calcul, GOLOGANU et al. [GLD93, GLD94, Gol97] ont abouti à l'expression compacte suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}, \Sigma_{zz}, f, S) &= \frac{C}{\sigma_0^2} (\Sigma_{eq} + \eta \Sigma_h)^2 + 2q(g+1)(g+f) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right) \\ &- (g+1)^2 - q^2(g+f)^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

où $\Sigma_{eq} = |\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}|$ est la contrainte équivalente de VON MISES dans le cas axisymétrique, Σ_h est la contrainte hydrostatique pondérée par le coefficient α_2 qui tient compte de la géométrie de la cavité. Elle gouverne, par son apparition dans le terme cosinus hyperbolique, la croissance des vides [Ben00]. Elle est donnée dans le cas axisymétrique par

$$\Sigma_h = 2\alpha_2 \Sigma_{xx} + (1 - 2\alpha_2) \Sigma_{zz} \quad (1.53)$$

C , η , κ , α_2 et g sont les coefficients du modèle GLD. Ils ne dépendent que de la porosité f et du paramètre de forme S (voir l'appendice du chapitre 1). C , η ont été calculés en imposant au critère approché (1.52) et à celui exact (1.51) de se croiser et d'être tangents en des points particuliers $(\Sigma_{xx}, \Sigma_{zz})$ appartenant aux surfaces de charge de certaines formes connues de cavités. Ces formes limites que sont le cylindre, la sphère, la structure « sandwich » (couche de vide située entre deux couches de matériau), et la fissure en forme de « pièce de monnaie » sont présentées dans la section (1.5.4). les coefficients κ et α_2 ont été obtenus moyennant plusieurs approximations (voir [Gol97] pour les détails des calculs). κ est présent dans le cosinus hyperbolique du critère. Il a été introduit pour corriger au travers le produit $\kappa \Sigma_h$ l'effet du changement de formes des vides sur leurs croissances [Ben00]. Le coefficient g est explicitement nul dans le cas de cavités

sphériques ou allongées. Il a la signification physique de porosité fictive dans le cas de fissure en forme de « pièce de monnaie », comme nous le verrons dans la section (1.5.4). Le coefficient q , qui ne dépend que du paramètre de forme S et du paramètre q_0 ($1 \leq q_0 \leq 1.6$), est l'équivalent du coefficient q_1 de TVERGAARD dans le modèle GTN. Il s'écrit :

$$q = 1 + 2(q_0 - 1) \frac{e^S}{1 + e^{2S}} \quad (1.54)$$

En raison des conditions dans lesquelles il a été élaboré, le critère (1.52) ne peut être rigoureusement utilisé que dans le cas de chargements axisymétriques. Pour palier cette limitation, GOLOGANU et al. [GLD97, Gol97] ont repris l'analyse limite du V.E.R. dès le début en imposant de nouvelles conditions au critère :

- ◆ être invariant dans la transformation $\Sigma \rightarrow -\Sigma$;
- ◆ se réduire à celui de VON MISES pour des fractions volumiques de vides nulles, ou de « porosités équivalentes » nulles dans le cas de fissures en forme de « pièce de monnaie » ; et
- ◆ respecter l'isotropie transverse autour de l'axe de chargement Oz ,

et en rajoutant de nouveaux champs de vitesse $\mathbf{v}^{(C)}$, $\mathbf{v}^{(D)}$ et $\mathbf{v}^{(E)}$ qui correspondent à des taux de déformation déviatorique homogènes :

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v}^{(A)} + B\mathbf{v}^{(B)} + \Delta\mathbf{v}^{(C)} + D_{xz}\mathbf{v}^{(D)} + D_{yz}\mathbf{v}^{(E)} \quad (1.55)$$

De même, le tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ a été choisi comme suit :

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{xx} & 0 & \dot{E}_{xz} \\ 0 & \dot{E}_{yy} & \dot{E}_{yz} \\ \dot{E}_{zx} & \dot{E}_{zy} & \dot{E}_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

où les coefficients A , B et Δ qui interviennent dans l'équation (1.55) dépendent des composantes $\dot{E}_{xx}$, $\dot{E}_{yy}$ et $\dot{E}_{zz}$. L'écriture simplifiée¹² du nouveau potentiel plastique est donnée par [Gol97, Ben00, BBP04b, PH00, PH03, CLOC03a] :

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma, f, S) &= \frac{C}{\sigma_0^2} \|\Sigma' + \eta \Sigma_h \mathbf{X}\|^2 + 2q(g+1)(g+f) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma_h}{\sigma_0}\right) \\ &- (g+1)^2 - q^2(g+f)^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme au sens de MISES et $\mathbf{X}$ est le tenseur d'expression :

¹²La simplification vient du fait que le critère obtenu par GOLOGANU [Gol97] inclut le terme $\frac{1-C}{\sigma_0^2} (\|\Sigma'\|^2 - \Sigma_{eq}^2)$. Cependant, cette quantité est négligée dans la majorité des études, notamment en raison des valeurs prises par le coefficient C qui sont très proches de 1.

$$\mathbf{X} = \frac{1}{3}(-\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$$

Les coefficients C , η , κ , α_2 , g sont donnés par les mêmes relations (appendice du chapitre 1). En revanche, la contrainte hydrostatique pondérée Σ_h se met sous la forme :

$$\Sigma_h = \alpha_2 (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) + (1 - 2\alpha_2)\Sigma_{zz} \quad (1.58)$$

De plus, ces auteurs ont introduit un troisième paramètre qu'est le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la cavité $\mathbf{e}_z$. Celui-ci est utilisé pour décrire les éventuels changements d'orientation des cavités au cours du chargement. Son évolution est gouvernée par la relation :

$$\dot{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.59)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est le tenseur des taux de rotation.

1.5.2 Loi d'écoulement

Comme mentionné précédemment, l'écoulement plastique dans les matériaux poreux reste régi par la règle de normalité (1.41). Cependant, le calcul des composantes du tenseur des déformations plastiques dans la circonstance de l'utilisation du critère GLD axisymétrique présente des particularités [GLD93, GLD94, Gol97, SL04a]. En effet, les seules composantes non nulles dans le cas d'un tel chargement $\dot{E}_{xx}^p = \dot{E}_{yy}^p$ et $\dot{E}_{zz}^p$ sont :

$$\dot{E}_{xx}^p = \frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{xx}} \quad , \quad \dot{E}_{zz}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{zz}} \quad (1.60)$$

L'apparition du facteur 1/2 dans l'équation (1.60-a) est dû au fait qu'au cours de l'estimation des deux relations précédentes, la composante Σ_{xx} est remplacée par $(\Sigma_{yy} + \Sigma_{xx})/2$ dans l'expression du critère (1.52). Alors que Σ_{xx} et Σ_{yy} sont considérées distinctes. Après calcul de $\dot{E}_{xx}^p$, nous procédons à l'égalisation de ces deux quantités ($\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}$) [Gol97, SL04a].

1.5.3 Évolution du paramètre de forme

Le modèle GLD est complété par des relations qui décrivent l'évolution des variables internes f et S . La première est supposée dans notre étude gouvernée par les équations (1.43) et (1.14), dans la situation où la nucléation de nouvelles cavités est prise en compte. La deuxième est l'objet de ce paragraphe.

Devant l'absence de critères variationnels permettant d'approcher la loi d'évolution du paramètre de forme S , GOLOGANU et al. [GLD93, GLD94, GLD97, Gol97], ont proposé la relation

$$\dot{S} = \dot{\varepsilon}_{zz}^v - \dot{\varepsilon}_{xx}^v$$

où $\dot{\varepsilon}^v$ est le tenseur taux de déformation de la cavité. GOLOGANU et al. [GLD93, GLD94, GLD97, GLPD01] établissent deux définitions des composantes $\dot{\varepsilon}_{xx}^v$ et $\dot{\varepsilon}_{zz}^v$. La première est dite « ponctuelle » car elle relie l'évolution de S à l'évolution de deux points situés sur la surface du vide et repérés par leurs distances a et b du centre de l'ellipsoïde comme indiqué sur la figure 1.9. Elle découle de la dérivée directe par rapport au temps de $S = \ln \frac{a}{b}$:

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^v = \frac{\dot{b}}{b}, \quad \dot{\varepsilon}_{zz}^v = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1.61)$$

La deuxième est une définition par « des moyennes ». Il s'ensuit que les composantes $\dot{\varepsilon}_{xx}^v$ et $\dot{\varepsilon}_{zz}^v$ sont définies par des moyennes sur la surface du vide. Elles s'expriment en fonction des composantes du tenseur taux de déformation microscopique $\dot{\varepsilon}$ par

$$\dot{\varepsilon}_{xx}^v = \langle d_{xx} \rangle_\omega = \frac{1}{\omega} \int_\omega \dot{\varepsilon}_{xx}(\mathbf{v}) d\omega, \quad \dot{\varepsilon}_{zz}^v = \langle \dot{\varepsilon}_{zz} \rangle_\omega = \frac{1}{\omega} \int_\omega \dot{\varepsilon}_{zz}(\mathbf{v}) d\omega \quad (1.62)$$

Les deux relations (1.61) et (1.62) définissant $\dot{S}$ ne coïncident rigoureusement que dans le cas où la cavité garde sa forme ellipsoïdale au cours du chargement. Une telle occurrence est rarement observée. Nous adoptons dans ce qui suit la définition (1.62).

L'expression de $\dot{S}$ a été obtenue en effectuant une analyse à deux champs de vitesses du V.E.R. décrit sur la figure (1.9) et soumis à un chargement axisymétrique. Elle se formule comme suit :

$$\dot{S} = \left(\dot{E}_{zz}^p \right)' - \left(\dot{E}_{xx}^p \right)' + 3 \left(\frac{1 - 3\alpha_1}{f} + 3\alpha_2 - 1 \right) \dot{E}_m^p \quad (1.63)$$

où α_1 est un coefficient qui dépend de la géométrie de la cavité. $\left(\dot{E}_{xx}^p \right)'$ et $\left(\dot{E}_{zz}^p \right)'$ sont, respectivement, les composantes radiale et axiale du déviateur du tenseur taux de déformation macroscopique $\mathbf{E}$. Il est donné en appendice. La relation (1.63) ne prédit pas correctement le changement de forme des cavités sphériques ou qui s'y rapprochent (petites valeurs de e_1). GOLOGANU et al. [GLD97, Gol97] ont proposé de remédier à cette situation en multipliant le terme déviatorique $\left[\left(\dot{E}_{zz}^p \right)' - \left(\dot{E}_{xx}^p \right)' \right]$ de l'équation (1.63) par un paramètre h_1 déduit de simulations numériques. La loi d'évolution corrigée s'écrit alors

$$\dot{S} = h_1 \left[\left(\dot{E}_{zz}^p \right)' - \left(\dot{E}_{xx}^p \right)' \right] + 3h_2 \dot{E}_m^p \quad (1.64)$$

avec

$$h_1 = 1 + h_f(f) h_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) h_S(S) \quad (1.65)$$

$$h_2 = \frac{1 - 3\alpha_1}{f} + 3\alpha_2 - 1 \quad (1.66)$$

$h_f(f)$ et $h_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$ ont été incorporés d'une manière purement numérique pour tenir compte des effets de la porosité f et de la triaxialité $\mathcal{T} = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}$. Leurs expressions respectives sont :

$$h_f(f) = \left(1 - \sqrt{f} \right)^2 \quad (1.67)$$

$$h_{\mathcal{T}} = \begin{cases} 1 - \frac{\mathcal{T}^2 + \mathcal{T}^4}{9} & \text{si } (\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}) \text{tr} \Sigma > 0 \\ 1 - \frac{\mathcal{T}^2 + \mathcal{T}^4}{18} & \text{si } (\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}) \text{tr} \Sigma < 0 \end{cases} \quad (1.68)$$

$h_S(S)$ a été introduit d'une manière théorique en utilisant la solution d'Eshelby. Son rôle est de prendre en compte l'effet de la forme de la cavité, il est donné par

$$h_S = \frac{9}{2} \frac{\alpha_1 - \alpha_1'}{1 - 3\alpha_1} \quad (1.69)$$

L'équation (1.64) élaborée dans le cas d'un chargement axisymétrique, a été généralisée à un chargement quelconque en imposant à la nouvelle relation de respecter l'isotropie transverse du matériau. Le terme déviatorique a ainsi été modifié et calibré sur des calculs de cellules. La loi d'évolution généralisée correspondante s'écrit

$$\dot{S} = \frac{3}{2} h_1 \left(\dot{E}_{zz}^p \right)' + 3h_2 \dot{E}_m^p \quad (1.70)$$

où h_1 et h_2 sont donnés par les équations (1.65) et (1.66).

1.5.4 Modélisation des cas limites des formes des cavités

Selon l'état de chargement auquel est soumis le V.E.R., il arrive que les cavités s'aplatissent ou s'allongent excessivement au point de se refermer dans certains cas. Les formes « limites » que peuvent prendre les vides sont montrées sur la figure 1.10. Ce sont la fissure en forme de « pièce de monnaie », la structure « sandwich »

(couche de vide située entre deux couches de matériau), la sphère, le cylindre et la cavité en forme d'une « aiguille ». Elles correspondent à des valeurs particulières du paramètre de forme S et de la porosité f qui induisent des expressions simplifiées du critère de plasticité $\Phi(\Sigma, f, S, \bar{\sigma})$ et de la loi d'évolution du paramètre de forme $\dot{S}$ dans chacune des différentes situations. D'un point de vue numérique, le passage d'une forme à une autre doit se faire d'une manière minutieuse en prenant en compte les valeurs singulières que prendraient les coefficients $e_1, e_2, g, \alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2, \kappa, C$ et η .

Il va de soi que la loi décrivant la croissance des vides (1.42), déduite de la condition d'incompressibilité plastique du matériau, ne dépend pas de la forme des cavités.

Cavités en forme d'une "pièce de monnaie". Elle correspond à une cavité très aplatie qui commence à se refermer sous l'effet d'un chargement adéquat (figure 1.10-a). La porosité du matériau tend alors à s'annuler ($f \rightarrow 0$) et le paramètre de forme prend des valeurs très grandes ($S \rightarrow -\infty$). Il s'ensuit que le critère de plasticité (1.57) s'exprime indépendamment de la porosité par la formule

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2gg(g+1) \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_h}{\bar{\sigma}}\right) - (g+1)^2 - (gg)^2 = 0 \quad (1.71)$$

La non-apparition de la fraction volumique de vides f dans l'équation (1.71) n'est qu'apparente. En effet, le coefficient g trouve ici une signification physique de « porosité fictive » [GLD97, Gol97, Ben00]. Elle représente celle qu'aurait un matériau lorsque l'on remplace la cavité réelle qui a la géométrie d'une « pièce de monnaie » par une autre fictive sphérique de rayon égal à la distance focale c (ou pareillement dans le cas présent au rayon de la fissure). GOLOGANU et al. [GLD97] ont établi la relation

$$g = \frac{4\pi c^3}{3\Omega} \quad (1.72)$$

où Ω est le volume total du V.E.R.. Les valeurs constantes que prennent les coefficients du GLD dans le cas présent sont

$$e_1 = 1, e_2 < 1, g = f_{eq}, \alpha_1 = 0, \alpha'_1 = 0, e_2 = 0, \kappa = \frac{3}{2}, C = 1, \eta = 0. \quad (1.73)$$

Une autre particularité intéressante à laquelle il fallait s'attendre est que la contrainte hydrostatique ne dépend plus des composantes radiales Σ_{xx} et Σ_{yy} . En effet, ces dernières n'ayant plus d'effet sur la croissance des vides qui sont fortement aplatis ($a \simeq 0$), par conséquent Σ_h ne s'écrit plus qu'en fonction de la composante axiale Σ_{zz} :

$$\Sigma_h = \Sigma_{zz}$$

L'évolution du paramètre de forme est obtenue en remplaçant les coefficients $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2$ par leur valeurs, ce qui conduit à

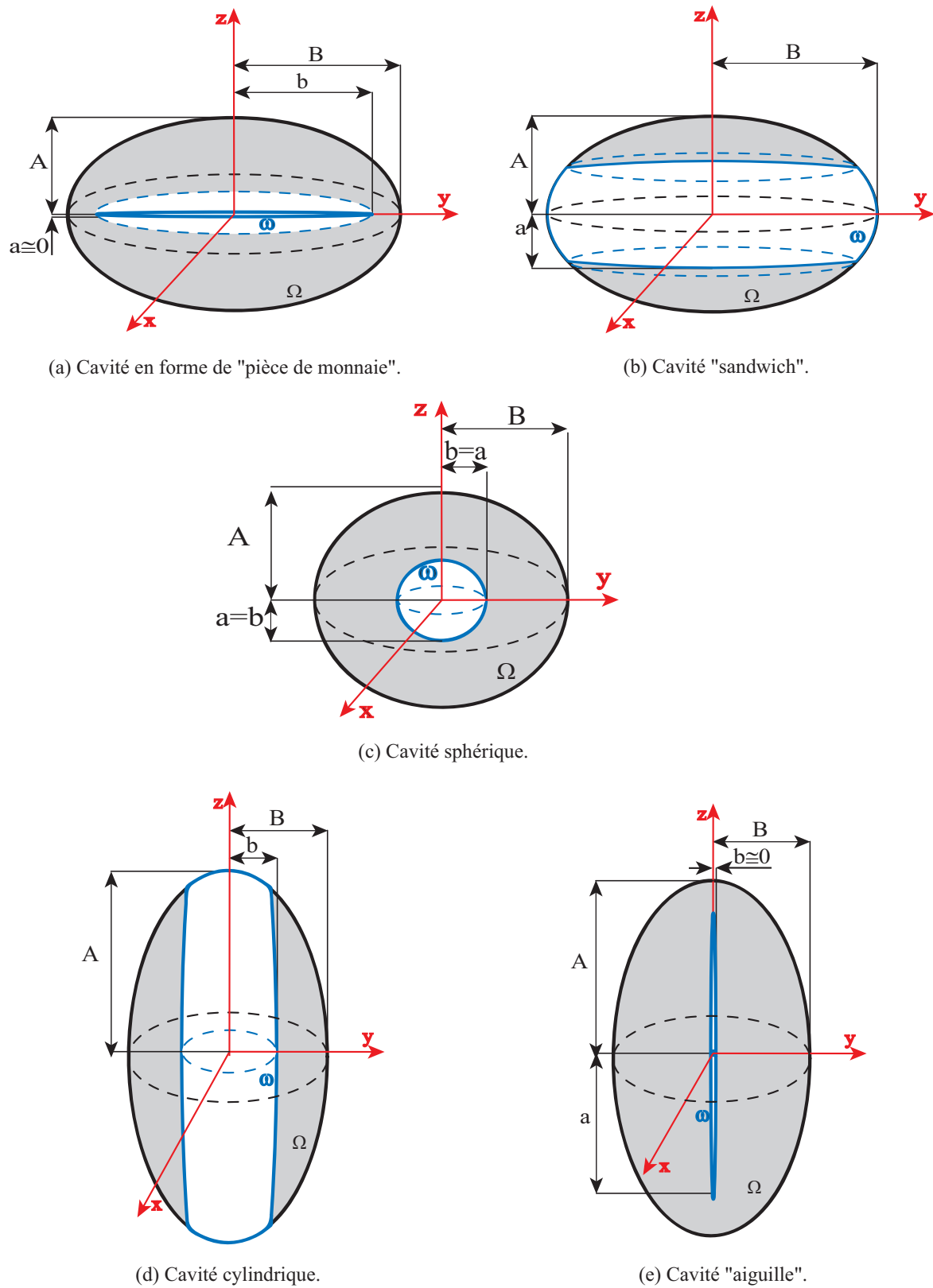


FIG. 1.10 – Différentes forme des cavités

$$\dot{S} = \frac{3}{2} \dot{E}_z^p + 3 \left(\frac{1}{f} - 1 \right) \dot{E}_m^p \quad (1.74)$$

L'apparition de la porosité au dénominateur du deuxième terme de l'équation (1.74) peut paraître intrigante. Cependant, GOLOGANU et al. [GLD97] montrent que cette écriture est exacte, puisque la porosité n'atteint pas explicitement une valeur nulle. En effet, une valeur nulle de celle-ci signifierait que le matériau est redevenu dense, par conséquent régi par le critère de VON MISES. L'équation (1.74) permet en fait d'envisager la possibilité que la cavité se rouvre sous certains chargements.

Cavités en forme d'un "sandwich". La structure « sandwich » est composée d'une couche de vide de volume non nul située entre deux couches de matériaux. Dans cette circonstance, la cavité devient très aplatie ($S \rightarrow -\infty$) sans se refermer (figure 1.10-b). Le critère élaboré par GOLOGANU et al. [GLD97] dans ce cas-ci a été obtenu en faisant un développement en puissance par rapport à g de l'équation (1.57). Il s'écrit :

$$|\Sigma_{xx}| \leq \bar{\sigma} (1 - f), \Sigma_{zz} = 0 \quad (1.75)$$

Les valeurs des coefficients du GLD correspondant à la forme actuelle des vides sont données par

$$e_1 = 1, e_2 = 1g = \infty, \alpha_1 = 0, \alpha_1' = 0, \alpha_2 = 0, C = 1, \eta = 0. \quad (1.76)$$

La loi d'évolution du paramètre de forme S a dans la situation présente la même expression que dans le cas d'une cavité en forme de « pièce de monnaie » (1.74). À la différence près que la porosité peut maintenant atteindre des valeurs élevées.

Cavités sphériques. Le critère de plasticité dans ce cas prend une forme semblable à celui de GURSON pour vides sphériques (1.36). Le paramètre de forme est alors explicitement nul (figure 1.10-c). Nous écrivons donc :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2qf \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\Sigma_h}{\bar{\sigma}} \right) - 1 - (qf)^2 = 0 \quad (1.77)$$

Il s'ensuit que la contrainte hydrostatique pondérée Σ_h est égale à la contrainte moyenne Σ_m

$$\Sigma_h = \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} + \Sigma_{zz}}{3} = \Sigma_m \quad (1.78)$$

Les coefficients du GLD ont les valeurs particulières suivantes :

$$e_1 = 0, e_2 = 0, g = 0, \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_1' = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \kappa = \frac{3}{2}, C = 1, \eta = 0. \quad (1.79)$$

L'évolution du paramètre de forme S est donnée par

$$\dot{S} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{9}{2} \xi_T (1 - \sqrt{f})^2 \right) \dot{E}_{zz}^p \quad (1.80)$$

Cavités cylindriques. Dans ce cas, la porosité a une valeur finie alors que le paramètre de forme devient infini ($S \rightarrow +\infty$), comme indiqué sur la figure 1.10-d. Le critère de plasticité correspondant à un vide cylindrique est semblable à celui de GURSON pour la même forme. Il s'écrit :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2qf \cosh \left(\frac{\sqrt{3}\Sigma_h}{\bar{\sigma}} \right) - 1 - (qf)^2 = 0 \quad (1.81)$$

La contrainte hydrostatique, qui ne dépend plus de la contrainte axiale Σ_{zz} en raison de la forme du V.E.R., est la contrainte latérale moyenne

$$\Sigma_h = \frac{\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}}{2} \quad (1.82)$$

Les coefficients du modèle sont donnés par

$$e_1 = 1, e_2 = 1, g = 0, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_1' = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \kappa = \sqrt{3}, C = 1, \eta = 0 \quad (1.83)$$

La loi d'évolution du paramètre de forme s'exprime par

$$\dot{S} = \frac{3}{2} \dot{E}_z^p + 3 \left(\frac{-1}{2f} + \frac{1}{2} \right) \dot{E}_m^p \quad (1.84)$$

Cavités en forme d'une "aiguille". À l'inverse de la cavité en forme d'une pièce de monnaie, celle ayant la géométrie d'une aiguille est fortement allongée dans la direction axiale ($S \rightarrow +\infty$) et une porosité nulle ($f \rightarrow 0$), comme le montre la figure 1.10-e). Le critère de plasticité se réduit, dans le cas présent, à celui de VON MISES :

$$\Phi = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} - 1 = 0 \quad (1.85)$$

Les coefficients du modèle prennent alors les valeurs :

$$e_1 = 1, e_2 < 1, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_1' = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \kappa = \sqrt{3}, \eta = 0 \text{ et } C = 1. \quad (1.86)$$

La loi d'évolution du paramètre de forme est donnée par

$$\dot{S} = \frac{3}{2} \dot{E}_{zz}^p + 3 \left(\frac{-1}{2f} + 3\alpha_2 - 1 \right) \dot{E}_m^p \quad (1.87)$$

1.5.5 Modélisation de la coalescence

La coalescence de vides a été introduite dans le critère GLD en faisant usage de la modélisation proposée par TVERGAARD et NEEDLEMAN [TN84]. Pour cela, nous avons remplacé la porosité réelle f qui apparaît, d'une manière explicite, dans l'expression du potentiel plastique (1.57) par une porosité fictive f^* donnée par l'équation (1.22).

Cependant, dans le cas du présent modèle, la porosité ultime f_u dépend du paramètre de forme :

$$f_u = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } S \geq 0 \\ \frac{(1+g-gf)}{q} & \text{si } S < 0 \end{cases} \quad (1.88)$$

1.6 Couplage température-comportement

Nous présentons dans ce qui suit l'extension du modèle GLD pour tenir compte de l'influence de l'échauffement thermique dû à la dissipation plastique sur la réponse du matériau en cours de déformation. Nous nous plaçons dans la situation où les températures n'atteignent pas des ordres de grandeurs pour lesquelles les effets viscoplastiques sont activés. Par conséquent, nous nous situons à des niveaux de températures inférieurs à la limite $0, 4T_f$ à $0, 5T_f$, où T_f est la température de fusion du matériau. La modélisation thermo-micromécanique ainsi obtenue est supposée mieux décrire le comportement du matériau au cours du chargement.

Dans cette section, nous décrivons d'abord la procédure suivie pour réaliser le couplage température-plasticité-endommagement. Celui-ci s'est effectué en négligeant l'élasticité afin de respecter les hypothèses dans lesquelles a été élaboré le modèle GLD (matrice rigide-parfaitement plastique). Par la suite, nous proposons une extension à la thermo-hypoélasticité.

1.6.1 Couplage température-plasticité

Le couplage température-plasticité a été effectué en incluant l'effet de la température T sur la contrainte d'écoulement $\bar{\sigma}$. Ce qui nous permet d'écrire :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p, T) \quad (1.89)$$

Il s'ensuit que :

$$d\bar{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p} d\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} dT \quad (1.90)$$

ou encore

$$d\bar{\sigma} = \hbar_\varepsilon d\bar{\varepsilon}^p + \hbar_T dT \quad (1.91)$$

où $\hbar_\varepsilon = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}^p}$ est le module plastique à température constante et $\hbar_T = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T}$, le module thermique à déformation constante. Les expressions de ces deux modules dépendent de la loi d'écrouissage utilisée. Nous choisissons une loi de la forme [BSH95, HB97] :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p) [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1.92)$$

où β est un paramètre matériau et $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)$ la loi d'écrouissage de la matrice à température ambiante qui s'écrit dans notre cas comme suit

$$\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_0 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}_0} \right)^n \quad (1.93)$$

Pour compléter le modèle, il est nécessaire d'établir des lois d'évolution de la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}^p$ et de la température T . La première est déduite en écrivant de l'équivalence entre les dissipations plastique macroscopique et microscopique

$$(1 - f)\bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p$$

Nous obtenons donc

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1 - f)\bar{\sigma}} \quad (1.94)$$

Pour établir la deuxième relation, nous distinguons deux situations selon que l'échauffement thermique s'opère dans des conditions adiabatiques ou non.

1.6.1.1 Couplage thermomécanique « fort »

La loi d'évolution de la température est obtenue en résolvant l'équation générale de la chaleur qui est déduite du premier principe de la thermodynamique : La variation de l'énergie interne massique $\mathbb{E}$ d'un matériau en un point de position x de l'écoulement vérifie la relation

$$\rho \frac{d\mathbb{E}}{dt} = -\text{div} \mathbf{q} + \bar{\sigma}\dot{\bar{\varepsilon}} + \Psi \quad (1.95)$$

où ρ est la masse volumique du métal, Ψ la densité volumique de production de chaleur et $\mathbf{q}$ le vecteur flux de chaleur qui est déduit de la loi de FOURIER

$$\mathbf{q} = -\mathcal{K} \mathbf{grad} T \quad (1.96)$$

où $\mathcal{K}$ est la conductivité thermique du métal.

Il est admis que l'énergie interne $\mathbb{E}$ des alliages métalliques ne dépend que de la température T et de la déformation totale $\bar{\varepsilon}$, nous écrivons

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}(T, \bar{\varepsilon}) \Rightarrow \frac{d\mathbb{E}}{dt} = \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \bar{\varepsilon}} \dot{\bar{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial T} \dot{T} \quad (1.97)$$

où $C_v = \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial T}$ est la chaleur spécifique massique du matériau. En insérant les formules (1.96) et (1.97) dans (1.95), l'équation de la chaleur se met sous la forme

$$\rho C_v \dot{T} = \text{div}(\mathcal{K} \mathbf{grad} T) + \left(\bar{\sigma} - \rho \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \bar{\varepsilon}} \right) \dot{\bar{\varepsilon}} + \Psi \quad (1.98)$$

En introduisant le facteur adimensionnel ξ

$$\xi = 1 - \frac{\rho}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \bar{\varepsilon}}, \quad (1.99)$$

connu sous le nom du coefficient de TAYLOR-QUINNEY qui est de l'ordre de 0,85 à 0,95 pour les métaux, nous obtenons à

$$\rho C_v \dot{T} = \text{div}(\mathcal{K} \mathbf{grad} T) + \xi \bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} + \Psi \quad (1.100)$$

En utilisant l'hypothèse selon laquelle les déformations élastiques sont négligées, ce qui implique que $\dot{\bar{\varepsilon}} \simeq \dot{\bar{\varepsilon}}^p$, puis en insérant l'équation (1.94) dans l'équation (1.100), nous aboutissons finalement à

$$\rho C_v \dot{T} = \text{div}(\mathcal{K} \mathbf{grad} T) + \xi \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)} + \Psi \quad (1.101)$$

L'équation non-linéaire (1.101) introduit un couplage thermomécanique « fort ».

1.6.1.2 Couplage thermomécanique « faible » - Échauffement adiabatique

Dans la situation où l'échauffement thermique se fait dans des conditions adiabatiques, le terme de conduction $\text{div}(\mathcal{K} \mathbf{grad} T)$ dans l'équation (1.101) sont négligés¹³. Par conséquent, l'équation de la chaleur se réduit à :

¹³La densité volumique de production de chaleur Ψ est aussi négligée dans le cas adiabatique. Cette hypothèse se justifie par le fait que : d'une part, il n'y a pas de possibilité de coupler dans Abaqus la production externe de chaleur à la loi de comportement ; d'autre part, les études retenues dans ce travail ne sont pas concernées à ce genre de chargement.

$$\rho c_v \dot{T} = \xi \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)}$$

Cette écriture traduit l'équivalence entre travail plastique et chaleur spécifique. Il s'ensuit que l'évolution de la température est régie par

$$\dot{T} = \frac{\xi}{\rho c_v} \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)} \quad (1.102)$$

1.6.2 Extension à la thermo-hypoélasticité

Pour effectuer le couplage entre l'élasticité et la température, nous adoptons une décomposition additive de la déformation élastique totale, notée $\mathbf{E}_{tot}^e$ en une partie due au comportement purement mécanique $\mathbf{E}^e$ et une autre partie générée par l'échauffement thermique $\mathbf{E}_{th}^e$:

$$\dot{\mathbf{E}}_{tot}^e = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}_{th}^e \quad (1.103)$$

avec [BSH96, HB97] :

$$\dot{\mathbf{E}}_{th}^e = \alpha \dot{T} \mathbf{1} \quad (1.104)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique et $\mathbf{1}$ le tenseur unité d'ordre deux. T et T_0 sont respectivement la température actuelle et la température de référence. Finalement, la loi thermo-hypoélastique s'écrit

$$\check{\boldsymbol{\Sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}^e : \left(\dot{\mathbf{E}}^e + \alpha \dot{T} \mathbf{1} \right) \quad (1.105)$$

1.7 Conclusion

Nous avons donné dans ce chapitre une description des principaux phénomènes physiques qui gouvernent la rupture ductile des matériaux élastoplastiques endommageables. Des modèles élaborés pour décrire ces phases ont aussi été abordés. Nous nous sommes attardés sur la présentation du modèle GLD que nous avons choisi pour effectuer notre étude. Une extension du modèle GLD au cas d'un échauffement thermique pouvant avoir lieu dans des conditions adiabatiques ou non est proposée. Cette modélisation permet d'inclure la possibilité de l'adoucissement de la matière suite à son échauffement.

Nous consacrons le chapitre suivant à la description du cadre général de l'implémentation numérique du modèle GLD en insistant sur la présentation de l'algorithme d'intégration de la loi de comportement que nous utilisons. Nous donnons aussi les précautions à prendre pour l'utilisation de cette loi de comportement dans le cadre de la théorie des grandes déformations.

Appendice 1

a. coefficients du modèle GLD

Dans cette section, les expressions des différents coefficient du modèle GLD, dans le cas d'une matrice parfaitement plastique et écrouissable sont précisées.

$$\begin{aligned} e_1 &= \sqrt{1 - e^{-2|S|}} \\ f \frac{1 - e_2^2}{e_2^3} &= \frac{1 - e_1^2}{e_1^3} \quad (\text{allongée}) \\ f \frac{\sqrt{1 - e_2^2}}{e_2^3} &= \frac{\sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^3} \quad (\text{aplatie}) \end{aligned}$$

$$g = \begin{cases} 0 & (\text{Allongée}) \\ \frac{e_2^3}{\sqrt{1 - e_2^2}} & (\text{Aplatie}) \end{cases}$$

$$\kappa^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\ln f} \left\{ (\sqrt{3} - 2) \ln\left(\frac{e_1}{e_2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{3 + e_1^2 + 2\sqrt{3 + e_1^4}}{3 + e_2^2 + 2\sqrt{3 + e_2^4}} \right\} & (\text{Allongée}) \\ \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{3}(g_f - g_1) + \frac{2}{3}(g_f^{5/2} - g_1^{5/2})\left(\frac{4}{3} - g_f^{5/2} - g_1^{5/2}\right)}{\ln(g_f/g_1)} & (\text{Aplatie}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
g_f &= \frac{g}{g+f}, \quad g_1 = \frac{g}{g+1} \\
\alpha_1 &= \begin{cases} \frac{1}{2e_1^2} - \frac{1-e_1^2}{2e_1^3} \tanh^{-1}(e_1) & \text{(Allongée)} \\ -\frac{1-e_1^2}{2e_1^2} + \frac{\sqrt{1-e_1^2}}{2e_1^3} \sin^{-1}(e_1) & \text{(Aplatie)} \end{cases} \\
\alpha_1' &= \begin{cases} \frac{1}{3-e_1^2} & \text{(Allongée)} \\ \frac{1-e_1^2}{3-2e_1^2} & \text{(Aplatie)} \end{cases} \\
\alpha_2 &= \begin{cases} \frac{1+e_2^2}{3+e_2^4} & \text{(Allongée)} \\ \frac{(1-e_2^2)(1-2e_2^2)}{3-6e_2^2+4e_2^4} & \text{(Aplatie)} \end{cases} \\
C &= -\frac{\kappa(g+1)(g+f) \sinh(\kappa H)}{\eta(Q+\eta H)} \\
Q &= 1-f, \quad H = 2(\alpha_1 - \alpha_2)
\end{aligned}$$

Matrice plastique

$$\eta = -\frac{q\kappa Q(g+1)(g+f) \sinh(\kappa H)}{(g+1)^2 + q^2(g+f)^2 + q(g+1)(g+f)[\kappa H \sinh(\kappa H) - 2 \cosh(\kappa H)]}$$

Matrice écouissable

$$\begin{aligned}
\eta &= -\frac{q\kappa Q(g+1)(g+f) \sinh(\kappa H)}{(g+1)^2 + q^2(g+f)^2 + q(g+1)(g+f)[\kappa H \sinh(\kappa H) - 2 \cosh(\kappa H)]} \\
q &= \tan^{-1}(4(2.5 - T)) \left| \frac{b(S, f, n)^{-1}}{\pi} \right| + \frac{b(S, f, n)}{2} + \frac{1}{2} \\
b &= 1 + (0.655 - 1.75n - 0.533\sqrt[4]{f}) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1}(2(1-S))}{\pi} - 0.0288e^{-1.08(0.2+S)} \right)
\end{aligned}$$

b. Expressions mathématiques des modèles implémentés dans Abaqus

Le modèle GLD-adiabatique

Nous présentons dans ce paragraphe les équations constituant le modèle GLD dans le cas du couplage thermomécanique adiabatique.

$$\begin{aligned}
\Phi(\Sigma, f, S, \bar{\sigma}, T) &= \frac{C}{\bar{\sigma}^2} \|\Sigma' + \eta \Sigma_h \mathbf{X}\|^2 + 2q(g+1)(g+f^*) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma_h}{\bar{\sigma}}\right) \\
&- (g+1)^2 - q^2(g+f^*)^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{\Sigma} &= \dot{\Sigma} + \Sigma \cdot \Omega - \Omega \cdot \Sigma \\
\dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \\
\dot{S} &= \frac{3}{2} h_1 \left(\dot{E}_{zz}^p \right)' + 3 h_2 \dot{E}_m^p \\
\dot{f} &= 3(1-f) \dot{E}_m^p + \mathcal{A} \dot{\varepsilon}^p \\
\dot{\sigma} &= h_\varepsilon \dot{\varepsilon}^p + h_T \dot{T} \\
\dot{T} &= \frac{\xi}{\rho c_p} \frac{\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)}
\end{aligned}$$

Le modèle GTN-adiabatique

La mise en équation de la loi de comportement GTN couplée à la températures dans des conditions adiabatiques est donnée dans ce qui suit :

$$\Phi(\Sigma_{eq}, \Sigma_m, f, \bar{\sigma}, T) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\bar{\sigma}^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\Sigma_m}{\bar{\sigma}}\right) - 1 - (q_1 f^*)^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\check{\Sigma} &= \dot{\Sigma} + \Sigma \cdot \Omega - \Omega \cdot \Sigma \\
\dot{\mathbf{E}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \\
\dot{f} &= 3(1-f) \dot{E}_m^p + \mathcal{A} \dot{\varepsilon}^p \\
\dot{\sigma} &= h_\varepsilon \dot{\varepsilon}^p + h_T \dot{T} \\
\dot{T} &= \frac{\xi}{\rho c_p} \frac{\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Implémentation numérique du modèle GLD

2.1 Introduction

Le développement de l'ingénierie simultanée propulsée par des exigences de réduction du coûts et du temps de fabrication ont poussé les industriels à s'intéresser de plus en plus à la simulation numérique. La généralisation de l'utilisation des outils virtuels pour l'optimisation des pièces mécaniques a été possible grâce à l'apparition de logiciels performants et flexibles. Ce chapitre est consacré à la présentation des aspects numériques liés à l'implémentation du modèle GLD dans le code de calcul Abaqus [ABA05]. Ce dernier offre la possibilité d'introduire de nouvelles lois de comportement en utilisant des sous-routines utilisateurs qui dépendent du schéma de résolution choisi. La sous-routine Umat est utilisée lors de la simulation avec le schéma Statique Implicite (S.I.), alors que la sous-routine Vumat est employée avec le schéma Dynamique Explicite (D.E.).

Une description de la discrétisation spatiale, par éléments finis employée dans le code de calcul Abaqus est d'abord donnée. Puis nous présentons les schémas de résolution Statique Implicite (Abaqus/Standard) et Dynamique Explicite (Abaqus/Explicit) dans le cas d'un problème mécanique ainsi que le schéma Dynamique Explicite Séquentiel (D.E.S.) dans la circonstance d'un problème thermomécanique couplé. Nous rappelons ensuite les deux méthodes de discrétisations temporelles utilisées pour l'incrément des variables internes du modèle GLD. L'implémentation de celui-ci s'est faite suivant l'algorithme local d'intégration des lois de comportement proposé par Aravas [Ara87]. Nous décrivons à la fin du chapitre le cadre de travail dans Abaqus pour l'extension des lois comportement aux transformations finies.

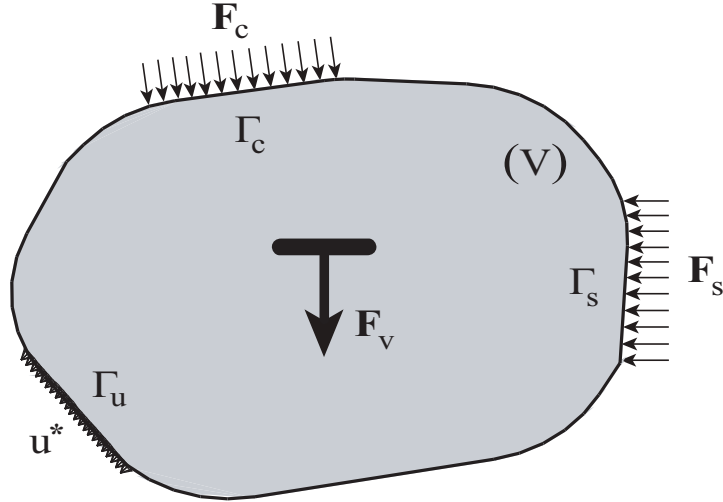


FIG. 2.1 – Structure en équilibre.

2.2 Discrétisation spatio-temporelle

2.2.1 Formulation variationnelle

Problème mécanique - Principe des puissances virtuelles

Soit un solide en équilibre occupant à un instant donné un volume V de frontière Γ . Il est soumis, comme le montre la figure 2.1, à des forces volumiques $\mathbf{F}_v$, des surfaciques $\mathbf{F}_s$ appliquées sur la partie Γ_s de sa frontière Γ et à des efforts de contact $\mathbf{F}_c$ sur la portion Γ_c de Γ .

Les conditions aux limites en déplacement $\mathbf{u}^*$ imposées au solide sur le domaine Γ_u de Γ (figure 2.1).

Les différentes parties de la frontière Γ doivent vérifier les relations :

$$\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_c \cup \Gamma_u \text{ et } \Gamma_s \cap \Gamma_c \cap \Gamma_u = \emptyset$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{div}} \Sigma + \mathbf{F}_v = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

où $\ddot{\mathbf{u}}$ représente la dérivée seconde du vecteur déplacement $\mathbf{u}$.

Le problème consiste à déterminer les champs de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, de déplacement $\mathbf{u}$, de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ et les variables internes du modèles GLD à tout instant t et en tout point $\mathbf{x}$, connaissant les conditions initiales de chacun des champs.

Les champs de vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ doivent respecter :

◆ les conditions aux limites en déplacement

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ sur } \Gamma_u \quad (2.2)$$

◆ les conditions aux limites portant sur les efforts

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_c \text{ sur } \Gamma_s \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_c \text{ sur } \Gamma_C \quad (2.4)$$

Les champs mécaniques et les variables d'état doivent vérifier, en chaque point du solide V , les équations (1.57), (1.41), (1.70), (1.43), (1.45) et (1.46) du modèle GLD.

La base d'une formulation éléments finis en déplacement est l'introduction d'approximations spatiales de la solution. Pour développer une telle approximation on remplace les équations du mouvement (2.1) par une forme faible équivalente en la multipliant par une fonction test. La fonction test adoptée dans Abaqus [ABA05, ZT00] est un champ de vitesses virtuel arbitraire $\delta \dot{\mathbf{u}}$ suffisamment continu et vérifiant les conditions aux limites $\delta \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ sur Γ_u . Après développement, nous aboutissons à l'écriture du Principe des Puissances Virtuelles (PPV) :

$$- \int_V \boldsymbol{\Sigma} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV + \int_V \mathbf{F}_v \delta \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_s} \mathbf{F}_s \delta \dot{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mathbf{F}_c \delta \dot{\mathbf{u}} d\Gamma = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \dot{\mathbf{u}} dV \quad (2.5)$$

où $\delta \dot{\mathbf{E}}$ est l'accroissement virtuel des taux de déformations, lié à $\delta \dot{\mathbf{u}}$ par les relations de compatibilité :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} [\text{grad} \dot{\mathbf{u}} + {}^T \text{grad} \dot{\mathbf{u}}], \quad (2.6)$$

La fonctionnelle (2.5) est une équation non linéaire qui doit être résolue par une méthode itérative en utilisant un développement approprié. Nous présentons dans ce qui suit la procédure de linéarisation de cette fonctionnelle dans le cas de l'utilisation d'éléments isoparamétriques, c'est-à-dire d'éléments pour lesquels les fonctions géométriques sont confondues avec les fonctions d'interpolation.

Les déplacements réels et virtuels de tout point du solide V sont reliés aux déplacements des nœuds adjacents par des fonctions appropriées [Zie77, ZT00, DT84, DT05]. En utilisant la méthode de GALERKIN

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}_n \mathbf{u}_n^e \quad (2.7)$$

$$\delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N}_n \delta \mathbf{u}_n^e \quad (2.8)$$

$\mathbf{N}_n$ sont les fonctions d'interpolations nodales sur l'élément (e). Elles dépendent des coordonnées spatiales et sont exprimées dans l'espace de référence. $\mathbf{u}_n^e$ désigne le vecteur contenant les déplacements de chaque nœud de l'élément.

Les vitesses réelles et virtuelles ainsi que l'accélération sont interpolées en dérivant les équations (2.7) et (2.8) :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{N}_n \dot{\mathbf{u}}_n^e \\ \delta \dot{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{N}_n \delta \dot{\mathbf{u}}_n^e \\ \ddot{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{N}_n \ddot{\mathbf{u}}_n^e\end{aligned}\tag{2.9}$$

En introduisant les approximations (2.7)-(2.9) dans l'équation (2.5), nous obtenons une fonctionnelle élémentaire de la forme :

$$\mathbf{I}_e = (\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{F}_{int}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \delta \dot{\mathbf{u}}^e = 0\tag{2.10}$$

où $\mathbf{M}^e$ est la matrice masse élémentaire cohérente ou consistante dans le sens où elle est calculée avec les fonctions d'interpolations $\mathbf{N}_n$ de l'élément. $\mathbf{F}_{int}^e$ est le vecteur élémentaire des efforts internes et $\mathbf{F}_{ext}^e$ le vecteur des forces externes de l'élément (e). Ces trois grandeurs sont données par

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^e &= \int_{V_e} \rho^T \mathbf{N}_n \mathbf{N}_n dV \\ \mathbf{F}_{int}^e &= \int_{V_e} {}^T \mathbf{B}_n^e \boldsymbol{\sigma} dV \\ \mathbf{F}_{ext}^e &= \int_{V_e} {}^T \mathbf{N}_n \mathbf{F}_v dV + \int_{\Gamma_s^e} {}^T \mathbf{N}_n \mathbf{F}_s d\Gamma + \int_{\Gamma_c^e} {}^T \mathbf{N}_n \mathbf{F}_c d\Gamma\end{aligned}\tag{2.11}$$

où la matrice déformations-déplacements $\mathbf{B}_n^e$ de l'élément (e) s'écrit comme suit :

$$\mathbf{B}_n^e = \frac{\partial \mathbf{N}_n}{\partial \mathbf{x}_n}$$

L'équilibre du système global obtenu en assemblant les fonctionnelles élémentaires $\mathbf{I}_e$ sur toute la structure est de la forme :

$$\mathbf{I} = \sum_e \mathbf{I}_e = \left[\sum_e (\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{F}_{int}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \right] \delta \dot{\mathbf{u}}^e = 0\tag{2.12}$$

ou encore :

$$\mathbf{I} = (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}) \delta \dot{\mathbf{u}} = 0\tag{2.13}$$

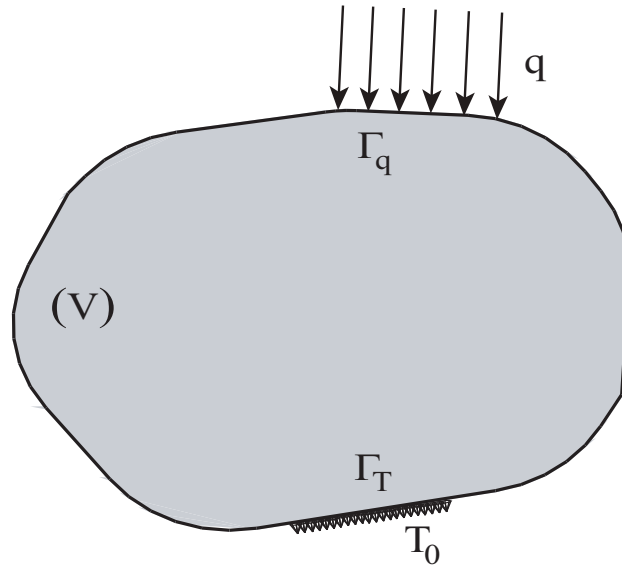


FIG. 2.2 – Structure en équilibre

Le système algébrique précédent est non-linéaire. Il exprime l'équilibre dynamique de la structure. Sa résolution incrémentale par linéarisation sur chaque incrément de temps peut être envisagée par plusieurs méthodes. Nous présentons dans la section (2.2.2) deux de ces méthodes qui nous intéressent dans la présente étude : le schéma Statique Implicite (S.I.) et le schéma Dynamique Explicite (D.E.).

Problème thermique

Considérons le même solide de volume V soumis à un flux de chaleur $\mathbf{q}$ sur la bord Γ_q de sa frontière Γ et à un champ de température T_0 sur une autre partie Γ_T de Γ comme indiqué sur la figure 2.2.

Les différentes portions de la frontière Γ doivent vérifier les relations :

$$\Gamma = \Gamma_q \cup \Gamma_T \quad \text{et} \quad \Gamma_q \cap \Gamma_T = \emptyset$$

L'équation de chaleur (1.101) peut se réécrire comme suit :

$$\rho c_v \dot{T} = \text{div} (\mathcal{K} \mathbf{grad} T) + \Psi + r_{pl} \quad (2.14)$$

où $r_{pl} = \xi \left(\boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}}^p \right) / (1 - f)$ est la source interne de chaleur provenant de la contribution mécanique. L'équation (2.14) est résolue par la méthode de GALERKIN sous les conditions aux limites :

◆ de température imposée

$$T = T_0 \text{ sur } \Gamma_T \quad (2.15)$$

- ◆ de flux de chaleur imposé q_f sur Γ_f
- ◆ de convection

$$q_c = h(T - T_e) \quad (2.16)$$

où h est le coefficient d'échange convectif de Γ_c et T_e la température extérieure,

- ◆ de rayonnement

$$q_r = C_B \varpi [(T - T_a)^4 - (T_e - T_a)^4] \quad (2.17)$$

où $C_B = 5.6704 \cdot 10^{-8} JK^{-1}m^{-2}s^{-1}$ est la constante de STEFAN-BOLTZMANN et ϖ l'émissivité du matériau.

Le flux de chaleur q est alors égal à

$$q = q_f + q_c + q_r \text{ sur } \Gamma_q \quad (2.18)$$

En supposant que les caractéristiques thermiques du métal sont constantes, la formulation variationnelle de l'équation de la chaleur (2.14) s'écrit

$$\int_V \delta T \rho c_v \dot{T} dV - \int_V \delta T \mathfrak{L}(\mathcal{K}T) dV - \int_V \delta T r_{pl} dV - \int_V \delta T \Psi dV + \int_{\Gamma_q} \delta T q d\Gamma = 0 \quad (2.19)$$

où $\mathfrak{L}(\mathcal{K}T) = (\mathcal{K}T_{,i})_{,i}$ est l'opérateur Laplacien de la température et δT l'accroissement de température virtuelle vérifiant les conditions aux limites thermiques sur Γ_q . En utilisant la relation :

$$\int_V \delta T \mathfrak{L}(\mathcal{K}T) dV = \int_V [\delta T \mathcal{K}T_{,i}]_{,i} dV - \int_V \delta T_{,i} \mathcal{K}T_{,i} dV \quad (2.20)$$

$$\int_V [\delta T \mathcal{K}T_{,i}]_{,i} dV = \int_{\Gamma_T} [\delta T \mathcal{K}T_{,i}] n_i d\Gamma = \int_{\Gamma_T} \delta T \bar{q} d\Gamma \quad (2.21)$$

Où $\bar{q}$ est le flux de chaleur inconnu correspondant au champ de température connu sur la frontière Γ_T . En insérant les équations 2.20 et 2.21 dans la relation 2.19 nous obtenons la formulation variationnelle faible

$$\int_V \delta T \rho c_v \dot{T} dV - \int_{\Gamma_T} \delta T \bar{q} d\Gamma + \int_V \delta T_{,i} \mathcal{K}T_{,i} dV - \int_V \delta T r_{pl} dV - \int_V \delta T \Psi dV + \int_{\Gamma_q} \delta T q d\Gamma = 0 \quad (2.22)$$

Les températures réelle et virtuelle de tout point du solide V sont reliés aux déplacements des nœuds adjacents par des fonctions appropriées. En utilisant la méthode de GALERKIN, nous obtenons les approximations

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{N}_n^q \mathbf{T}_n^e \quad (2.23)$$

$$\delta \mathbf{T}^e = \mathbf{N}_n^q \delta \mathbf{T}_n^e \quad (2.24)$$

où $\mathbf{N}_n^T$ sont les fonctions d'interpolations nodales de la température sur l'élément (e). Elles dépendent des coordonnées spatiales et sont exprimées dans l'espace de référence. $\mathbf{T}_n^e$ désigne le vecteur des températures nodales de l'élément (e). De même, les taux de température sont interpolés en dérivant l'équation 2.23

$$\dot{\mathbf{T}}^e = \mathbf{N}_n^q \dot{\mathbf{T}}_n^e \quad (2.25)$$

En introduisant les approximations 2.23-2.25 dans l'équation 2.22, nous obtenons la fonctionnelle élémentaire

$$\mathbf{J}_e = \left(\mathbb{C}^e \dot{\mathbf{T}}^e + \mathbb{R}_{int}^e - \mathbb{R}_{ext}^e \right) = 0 \quad (2.26)$$

où $\mathbb{C}^e$ est la matrice capacitance élémentaire, $\mathbb{R}_{int}^e$ est le vecteur force intérieures et $\mathbb{R}_{ext}^e$ le vecteur force extérieures. Ces trois quantités ont pour expressions

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^e &= \int_{V_e} \rho C_v^T \mathbf{N}_n^q \mathbf{N}_n^q dV \\ \mathbb{R}_{ext}^e &= \int_{V_e} \mathbf{T} \mathbf{N}_n^q \Psi dV \\ \mathbb{R}_{int}^e &= \int_{\Gamma_T} \mathbf{T} N_n^q \bar{q} d\Gamma + \int_{V_e} \mathbf{T} \mathbf{Z}_n^e (\kappa T) \mathbf{Z}_n^e dV - \int_{V_e} \mathbf{T} N_n^q r_{pl} dV - + \int_{\Gamma_q} \mathbf{T} N_n^q q d\Gamma \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $\mathbb{Z}_n^e$ est la matrice température-déplacement de l'élément (e)

$$\mathbb{Z}_n^e = \frac{\partial \mathbf{N}_n^q}{\partial x_n} \quad (2.28)$$

L'équilibre global sur toute la structure est obtenu en assemblant toutes les quantités élémentaires

$$\mathbf{J} = \sum_e \mathbf{J}_e = \left[\sum_e \left(\mathbb{C}^e \dot{\mathbf{T}}^e + \mathbb{R}_{int}^e - \mathbb{R}_{ext}^e \right) \right] \delta \mathbf{T}^e = 0 \quad (2.29)$$

ou encore :

$$\mathbf{J} = \left(\mathbb{C} \dot{\mathbf{T}} + \mathbb{R}_{int} - \mathbb{R}_{ext} \right) \delta \mathbf{T} = 0 \quad (2.30)$$

Le système algébrique non-linéaire 2.29 exprime l'équilibre thermique de la structure. Sa résolution avec un schéma explicite séquentiel dans le cadre d'un problème thermomécanique couplé est présentée dans la section 2.2.2.3.

2.2.2 schémas de résolution

2.2.2.1 Le schéma Statique Implicite - Problème mécanique

Le schéma statique implicite correspond à la situation où le terme d'inertie qui apparaît dans l'équation (2.12) peut être négligé. Par conséquent, l'équation (2.12) se réduit à :

$$\mathbf{R}_{n+1} = (\mathbf{F}_{int})_{n+1} - (\mathbf{F}_{ext})_{n+1} \quad (2.31)$$

où $\mathbf{R}_{n+1}$ est le résidu de l'équilibre statique à l'instant $n + 1$. La résolution de cette équation dans le cadre du package Standard du code Abaqus [ABA05] est effectuée par la méthode itérative de Newton-Raphson modifiée. Le résidu $\mathbf{R}_{n+1}$ est donc linéarisé en utilisant un développement limité de Taylor d'ordre 1 :

$$\mathbf{R}_{n+1}^{iter+1} = \mathbf{R}_n^{iter} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right)^{iter} \delta \mathbf{U}_n + \dots = 0 \quad (2.32)$$

où $\delta \mathbf{U}_n = \mathbf{U}_{n+1}^{iter+1} - \mathbf{U}_n^{iter}$ est l'incrément de déplacement entre les itérations successives ($iter$) et ($iter + 1$). Ce processus itératif continue jusqu'à convergence du système ($|\mathbf{R}_{n+1}| \leq \varepsilon$) (convergence du système itératif).

L'équation (2.32) fait apparaître l'expression de la matrice tangente à l'itération ($iter$) :

$$[\mathbf{K}_T^{iter}(\mathbf{U}_n)] = - \left(\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right)^{iter} \quad (2.33)$$

$[\mathbf{K}_T^{iter}(\mathbf{U}_n)]$ joue un rôle central dans la vitesse de convergence de ce schéma itératif [Ara87, Zav92, ZN95, SH98]. La détermination de cet opérateur se fait par le calcul du résidu $\mathbf{R}_n$ dont la formulation dans l'espace de référence est donnée par

$$\mathbf{R}_n = \int_{V_e^0} {}^T \mathbf{B}_n^e : \Sigma \mathbf{J} dV_e^0 - \int_{V_e^0} {}^T \mathbf{N}_n^e \mathbf{F}_v \mathbf{J} dV_e^0 - \int_{\Gamma_s} {}^T \mathbf{N}_n^e \mathbf{F}_s \mathbf{J}_s d\Gamma_e^0 - \int_{\Gamma_c} {}^T \mathbf{N}_n^e \mathbf{F}_c \mathbf{J}_s d\Gamma_e^0 = 0$$

où $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}_s$ sont, respectivement, les jacobiens de volume et de surface entre l'élément de référence et l'élément réel. La matrice tangente $[\mathbf{K}_T^{iter}(\mathbf{U}_n)]$ de chaque élément est obtenue en calculant la variation de $\mathbf{R}_n$ par rapport aux déplacements. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_T^e(\mathbf{U}_n)] &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_n} \left[\int_{V_e^0} {}^T \mathbf{B}_n^e : \Sigma \mathbf{J} dV_e^0 - \int_{V_e^0} {}^T \mathbf{N}_n^e \mathbf{F}_v \mathbf{J} dV_e^0 - \int_{\Gamma_s} {}^T \mathbf{N}_n^e \mathbf{F}_s \mathbf{J}_s d\Gamma_e^0 \right] \\ &- \left[\int_{\Gamma_c} {}^T \mathbf{N}_n^e \mathbf{F}_c \mathbf{J}_s d\Gamma_e^0 \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

La formule précédente peut être simplifiée en adoptant deux hypothèses, généralement vérifiées, qui ont trait aux faibles variations de la géométrie de l'élément au cours de l'incrément de chargement et au type de forces appliquées. L'introduction de ces deux hypothèses permet une réduction du temps de calcul, sans avoir une influence majeure sur la précision des résultats :

- ◆ dans la situation de faibles variations géométriques au cours de l'incrément de déformation, les termes $\mathbf{B}_n^e$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}_s$ peuvent être négligés :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_n^e}{\partial \mathbf{U}_n} \simeq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{U}_n} \simeq 0, \quad \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial \mathbf{U}_n} \simeq 0, \quad (2.35)$$

- ◆ il est généralement admis que les efforts appliqués sont des forces non suiveuses. Par conséquent, les approximations suivantes peuvent être adoptées¹⁴ :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \mathbf{U}_n} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_n} = 0. \quad (2.36)$$

La matrice tangente se réduit donc à la contribution de deux quantités, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le vecteur force de contact $\mathbf{F}_c$. On obtient finalement :

$$[\mathbf{K}_T^e(\mathbf{U}_n)] = \int_{V_e^0} {}^T \mathbf{B}_n^e : \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}} : \mathbf{B}_n^e J dV_e^0 - \int_{\Gamma_c} {}^T \mathbf{N}_n^e \frac{\partial \mathbf{F}_c}{\partial \mathbf{U}_n} \mathbf{J}_s d\Gamma_e^0 \quad (2.37)$$

L'équation 2.37 fait apparaître l'opérateur tangent $\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{E}}$. Ce dernier dépend de la loi de comportement au travers des variables d'état qui interviennent dans le calcul de la contrainte $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ à chaque itération. Une méthode de calcul de ce terme en utilisant l'algorithme d'ARAVAS [Ara87], qui est retenu pour l'implémentation du GLD, est présentée dans la section (2.3). En effet, l'obtention de cet opérateur doit être cohérente avec le schéma d'intégration de la loi de comportement si l'on veut préserver la vitesse de convergence quadratique du schéma global de Newton-Raphson [Ara87, Zav92, ZN95, SH98]. Il sera désigné, dans ce qui suit, sous le nom d'opérateur tangent consistant ou incrémental afin de le distinguer de l'opérateur tangent continu obtenu en utilisant la condition de consistance.

¹⁴En pratique, ces approximations sont adoptées même dans le cas où les charges sont des forces suiveuses. Dans cette situation, la vitesse de convergence n'est pas trop altérée, notamment en raison du temps de calcul nécessaire pour estimer les quantités qui apparaissent dans l'équation (2.36).

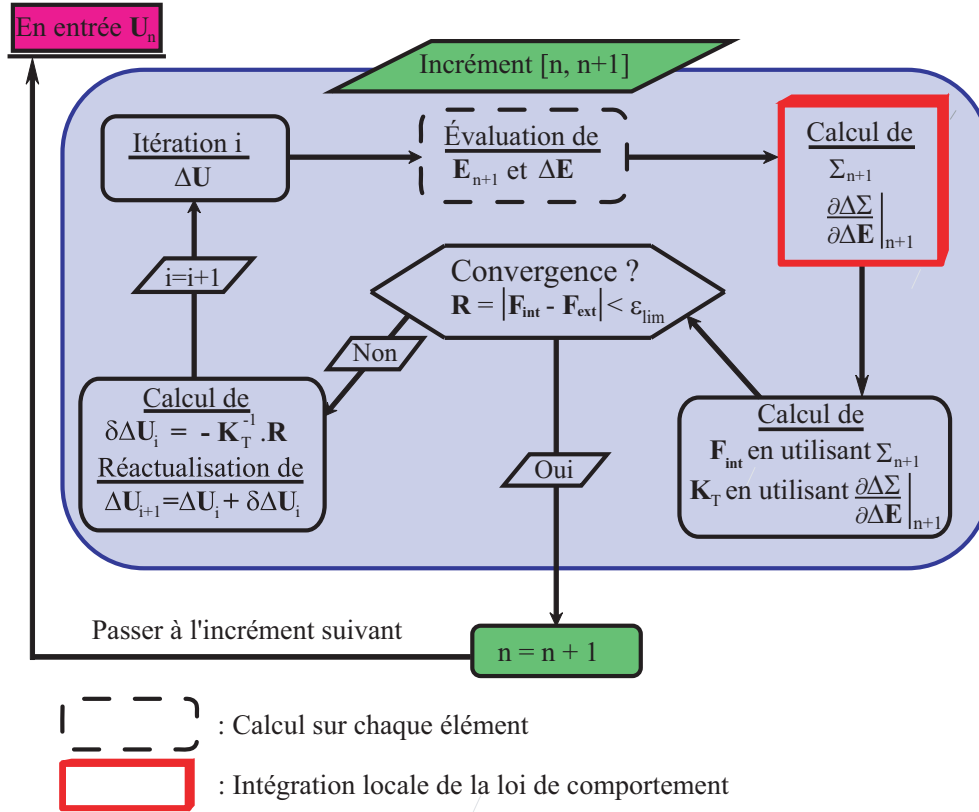


FIG. 2.3 – Organigramme de résolution du schéma statique implicite

Nous représentons sur la figure 2.3 les principales étapes de résolution d'un problème mécanique en utilisant un schéma statique implicite.

2.2.2.2 Le schéma Dynamique Explicite - Problème mécanique

À l'opposé de la méthode implicite, le schéma de résolution explicite n'est pas itérative. Il consiste en une résolution explicite des équations du mouvement. De plus, cet algorithme ne nécessite pas le calcul de la matrice tangente qui peut s'avérer une tâche ardue pour certains modèles de comportement qui font intervenir plusieurs variables internes scalaires et tensorielles.

La procédure explicite est souvent utilisée pour des problèmes invoquant de fortes non-linéarités géométrique tels que la simulation en quasi-statique des procédés de mise en forme. Elle n'est cependant fiable que sous certaines conditions. En effet, à l'inverse des formulations implicites qui sont inconditionnellement stables, celles dites explicites présentent une stabilité numérique conditionnée par la taille de l'incrément de temps Δt . Nous présentons dans ce qui suit ce schéma.

L'équation (2.12) s'écrit dans le cadre d'une analyse dynamique explicite sous la forme :

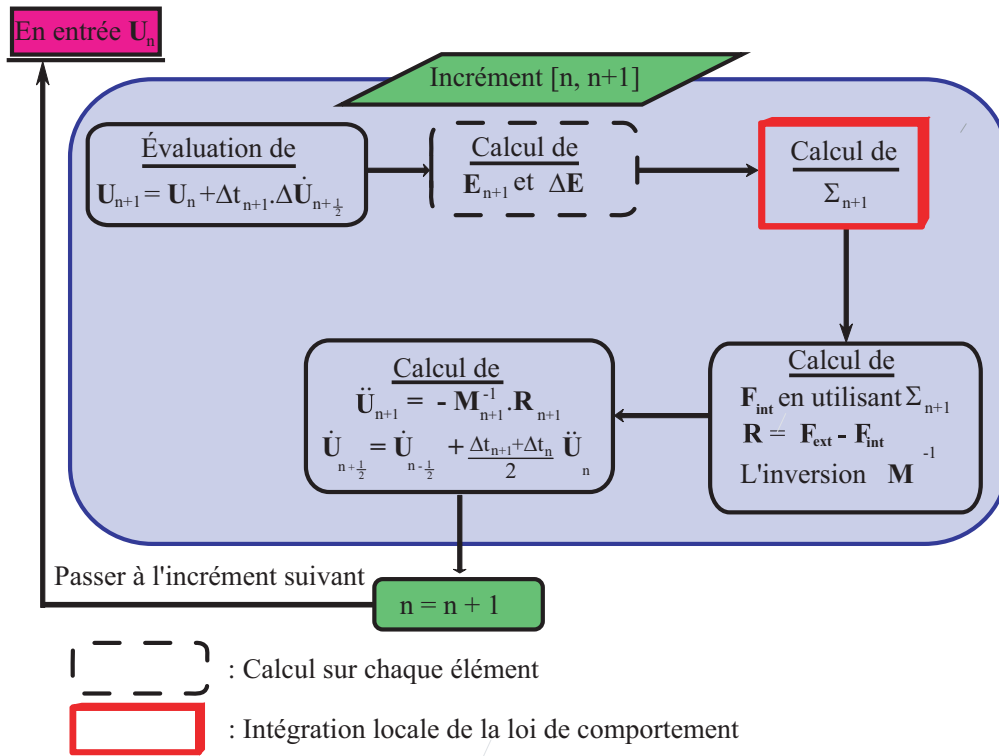


FIG. 2.4 – Organigramme de résolution d'un problème mécanique en utilisant un schéma dynamique explicite

$$M\ddot{U} + R = 0 \quad (2.38)$$

La recherche de la solution de l'équation (2.38) dans le cadre de ce schéma utilise la méthode des différences centrées :

$$\ddot{U}_n = M_n^{-1} R_n \quad (2.39)$$

$$\dot{U}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{U}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{n+1} + \Delta t_n}{2} \ddot{U}_n \quad (2.40)$$

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t_{n+1} \dot{U}_{n+\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

Il apparaît des relations précédentes (2.39)-(2.41) que la résolution de l'équation (2.12) nécessite le calcul de la matrice masse. Cette dernière peut être avantageusement diagonalisée pour optimiser le temps de calcul [BCCF01, DP05]. Les principales étapes de résolution du schéma dynamique explicite sont récapitulées sur la figure 2.4.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la stabilité et la précision de la résolution dépendent fortement du pas de temps Δt . Une estimation du pas de temps optimal obtenue en calculant la limite de stabilité pour une solution non amortie est donnée par

$$\Delta t \leq \frac{2}{w_{max}}$$

où w_{max} est la plus grande pulsation du système.

Pour des oscillations à hautes fréquences, un coefficient de sécurité est introduit :

$$\Delta t \leq \frac{2}{w_{max}} \left[\sqrt{1 + \psi^2} - \psi \right]$$

ψ est la valeur de l'amortissement, $\psi \leq 1$. Ce facteur permet de réduire la taille de l'incrément.

Une estimation de l'incrément de temps stable est proposée dans Abaqus. Elle est obtenue en fonction de la plus petite taille des éléments. Ainsi la limite de stabilité peut être réécrite comme suit :

$$\Delta t = \min \left[\frac{L_e}{c_d} \right] \quad (2.42)$$

où L_e est la longueur caractéristique actuelle de l'élément (e) et c_d la vitesse d'une onde élastique traversant cet élément. Elle est égale à

$$c_d = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

où ρ est la densité du matériau et E son module d'YOUNG.

2.2.2.3 Le schéma Dynamique Explicite - problème thermomécanique

Nous présentons dans ce qui suit le schéma de résolution séquentiel d'un problème thermomécanique couplé. Le principe d'un tel schéma consiste à calculer d'abord la solution mécanique, puis la solution thermique après avoir estimé les dissipations mécaniques. Le problème thermomécanique est formulé sous la forme

$$\mathbf{I} = \sum_e \mathbf{I}_e = \left[\sum_e (\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{u}}^e + \mathbf{F}_{int}^e - \mathbf{F}_{ext}^e) \right] \delta \dot{\mathbf{u}}^e = 0 \quad (2.43)$$

$$\mathbf{J} = \sum_e \mathbf{J}_e = \left[\sum_e (\mathbb{C}^e \dot{\mathbf{T}}_n^e + \mathbb{R}_{int}^e - \mathbb{R}_{ext}^e) \right] \delta \mathbf{T}^e = 0 \quad (2.44)$$

La résolution explicite de l'équation 2.43 a été traitée dans la section 2.2.2.2. Nous donnons le schéma de résolution explicite de l'équation 2.44. Le couplage séquentiel entre ces deux solutions est montré sur la figure 2.5 .

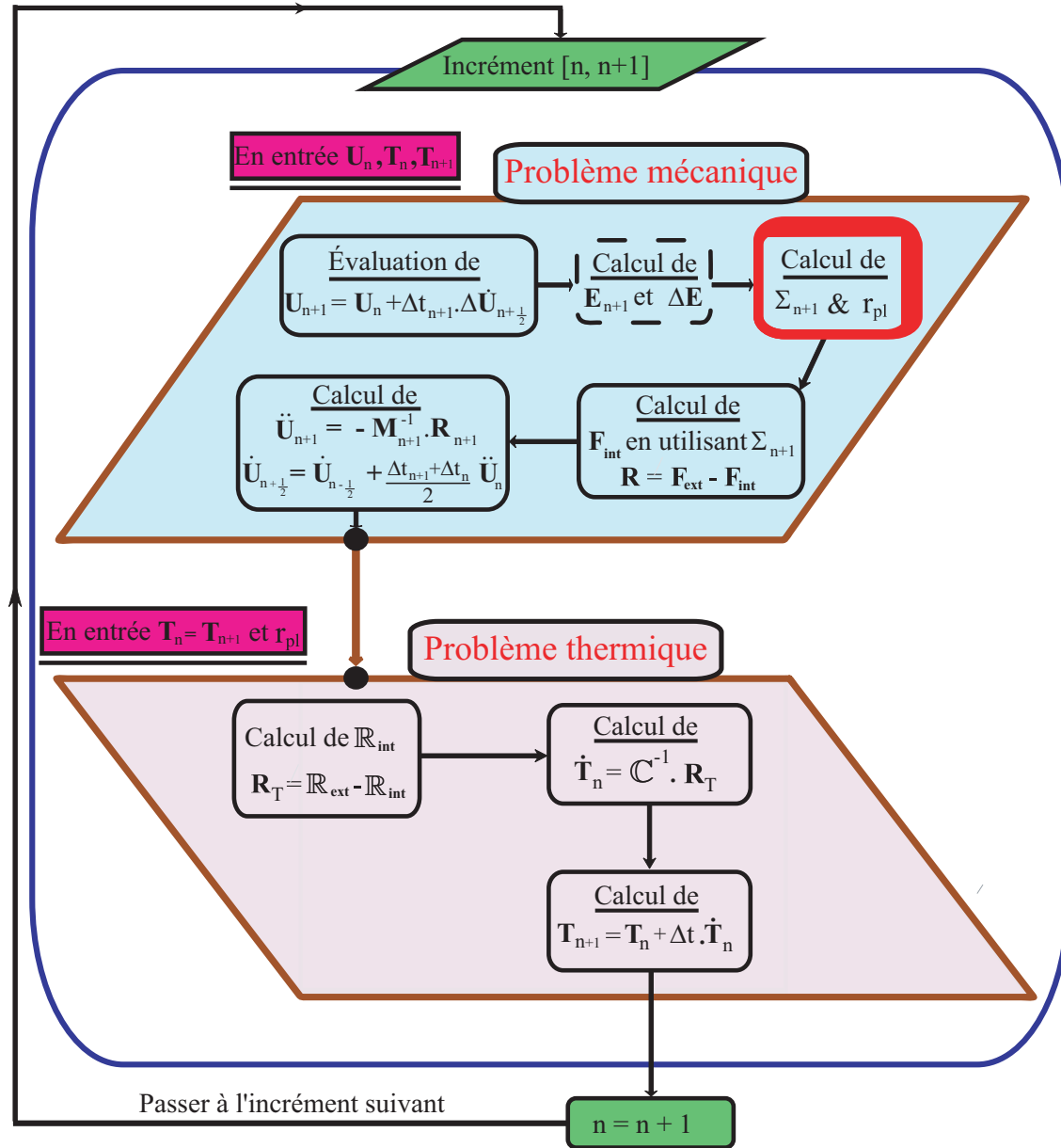


FIG. 2.5 – Organigramme de résolution séquentiel d'un problème thermomécanique en utilisant un schéma dynamique explicite

L'équilibre thermique global s'écrit :

$$\mathbb{C} \dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} + \mathbb{R}_{int} - \mathbb{R}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

Il s'ensuit que le vecteur taux de température est trouvé égal à

$$\dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} = \mathbb{C}^{-1} (\mathbb{R}_{ext} - \mathbb{R}_{int}) \quad (2.46)$$

Le champ de température à la fin d'incrément est alors calculé par la relation

$$\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_{\mathbf{n}} + \Delta t_n \dot{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} \quad (2.47)$$

$$= \mathbf{T}_{\mathbf{n}} + \Delta t_n [\mathbb{C}^{-1} (\mathbb{R}_{ext} - \mathbb{R}_{int})] \quad (2.48)$$

Le schéma dynamique explicite est conditionnellement stable. Une estimation de la limite de stabilité de la solution thermique¹⁵ est donnée par

$$\Delta t = \min \left[\frac{L_e^2}{2\varsigma} \right]$$

où $\varsigma = \frac{\mathcal{K}}{\rho C_v}$ est la diffusivité du matériau.

2.2.3 Discrétisation temporelle

2.2.3.1 Généralités

Les lois d'évolution temporelle des différentes variables internes qui interviennent dans une loi de comportement doivent être réactualisées à la fin de chaque incrément. Les lois d'évolution de ces variables sont en général des équations différentielles ordinaires (EDO) non linéaires du premier ordre¹⁶. Elles peuvent donc se mettre sous la forme :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathcal{G}(\mathbf{t}, \mathbf{Y}) \quad (2.49)$$

avec des conditions initiales associées qui s'écrivent de la manière suivante :

$$\mathbf{Y}_{t=0} = \mathbf{Y}_0 \quad (2.50)$$

Nous présentons deux méthodes implicites d'intégration temporelle du système (2.49-2.50) classées dans la catégorie "à pas indépendants". C'est-à-dire celles pour lesquelles les valeurs des composantes du vecteur $\mathbf{Y}(\mathbf{t})$ à l'instant t_{n+1} sont obtenues à partir de celles connues à l'instant t_n , indépendamment instants précédents ($t_{n-1}, t_{n-2} \dots$).

¹⁵Dans la circonstance d'un problème thermomécanique couplé, la limite de stabilité est prise égale à la plus petite valeur des limites de stabilité des problèmes mécanique et thermique pris séparément.

¹⁶Il est toujours possible de ramener des équations d'un ordre supérieur à 1 au 1^{er} ordre.

2.2.3.2 La θ -Méthode

Elle est basée sur l'introduction dans l'équation d'EULER d'un paramètre θ pouvant prendre des valeurs comprises entre 0 et 1. Son expression générale est de la forme :

$$\mathbf{Y}_{n+\theta} = (1 - \theta) \mathbf{Y}_n + \theta \mathbf{Y}_{n+1} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \cdot \mathcal{G}(t_{n+\theta}, \mathbf{Y}_{n+\theta}) \quad (2.52)$$

Une des formulations les plus utilisées de cette discrétisation est déduite de la méthode des trapèzes généralisés pour laquelle la solution à la fin de l'incrément est donnée par

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \left[(1 - \theta) \dot{\mathcal{G}}(t_n, \mathbf{Y}_n) + \theta \dot{\mathcal{G}}(t_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}) \right] \Delta t \quad (2.53)$$

La résolution d'une EDO en utilisant la formule 2.53) prend des appellations différentes selon la valeur de θ . Lorsque $\theta = 0$, le schéma est explicite ; pour $\theta = 1$ il est implicite. Dans le cas où $\theta = 1/2$ il est dit semi-implicite.

2.2.3.3 Méthode asymptotique

Le principe de l'intégration asymptotique est d'exprimer les équations différentielles sous la forme :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \varphi(\mathbf{Y}) [\mathbf{A}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}] \quad (2.54)$$

En discrétisant la relation précédente par la méthode du point milieu, nous obtenons la solution :

$$\mathbf{Y}_\theta = e^{-\theta \varphi(\mathbf{Y}_\theta) \Delta t} \mathbf{Y}_n + [1 - e^{-\theta \varphi(\mathbf{Y}_\theta) \Delta t}] \mathbf{A}(\mathbf{y}_\theta) \quad (2.55)$$

$$\mathbf{Y}_{n+1} = e^{-\varphi(\mathbf{Y}_{n+1}) \Delta t} \mathbf{Y}_n + [1 - e^{-\varphi(\mathbf{Y}_{n+1}) \Delta t}] \mathbf{A}(\mathbf{y}_{n+1}) \quad (2.56)$$

2.3 Implémentation numérique du modèle GLD

Nous présentons dans cette section les principales étapes de l'implémentation du modèle GLD dans le code de calcul Abaqus. Pour cela nous commençons par décrire l'algorithme proposé par ARAVAS [Ara87, GA95, ZN95] pour l'intégration des lois de comportement élastoplastique. Puis nous présentons l'application de cet algorithme à l'implémentation du modèle GLD, après avoir décrit l'extension de ce schéma au cas de l'hypoélasticité ou de la thermo-hypoélasticité selon que l'échauffement thermique est pris en compte ou non.

2.3.1 Algorithme local d'Aravas

ARAVAS [Ara87] a proposé un algorithme de résolution incrémental des problèmes non-linéaires. Ce schéma bien qu'élaboré pour des matériaux élastoplastiques dépendant de la contrainte moyenne ne présente pas de restrictions particulières quant à son utilisation pour l'intégration d'autres modèles élastoplastique [GA95, ZN95, Zha95, ?, MW03, KG05]. Le processus de résolution du problème se base sur la méthode du "prédicteur élastique- correction plastique".

Une loi de comportement élastoplastique peut se mettre sous la forme :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mathcal{H}}) = 0 \quad (2.57)$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \quad (2.58)$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \boldsymbol{F}_H(\boldsymbol{\Sigma}, \dot{\boldsymbol{E}}^p, \boldsymbol{\mathcal{H}}) \quad (2.59)$$

où $\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mathcal{H}})$ est le critère de plasticité et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ le vecteur contenant les variables d'état.

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations (HPP), l'extension aux transformations finies est présentée dans la section suivante. La procédure d'intégration consiste à calculer le tenseur des contraintes correspondant à une solution élastique puis à apporter si nécessaire, une correction plastique.

2.3.1.1 Prédicteur élastique

L'algorithme Aravas [Ara87] a été initialement proposé pour un matériau élastoplastique dont l'élasticité est linéaire isotrope, donc gouvernée par la loi de Hooke généralisée :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Lambda}^e : \boldsymbol{E}_{n+1}^e \quad (2.60)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Lambda}_{ijkl}^e = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} \text{ est la matrice des modules élastiques;} \\ G \text{ et } K \text{ sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient d'incompressibilité du matériau;} \\ \delta_{ij} \text{ est le symbole de KRONECKER;} \text{ et} \\ \text{les indices } (n) \text{ et } (n+1) \text{ se rapportent au début et à la fin de l'incrément respectivement} \end{array} \right.$$

Puisque l'hypothèse des petites perturbations (HPP) est adoptée par ARAVAS il s'ensuit que l'additivité de la décomposition de la déformation totale $\mathbf{E}$ en une partie élastique $\mathbf{E}^e$ et plastique $\mathbf{E}^p$ est consacrée :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$$

En insérant l'équation précédente dans l'équation (2.60) et en utilisant la relation $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta\mathbf{E}$, nous obtenons

$$\Sigma_{n+1} = \Lambda^e : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p) = \Sigma^{pred} - \Lambda^e : \Delta\mathbf{E}^p \quad (2.61)$$

où Σ^{pred} est le prédicteur élastique qui s'exprime comme suit :

$$\Sigma^{pred} = \Lambda^e : (\mathbf{E}_n^e + \Delta\mathbf{E}) \quad (2.62)$$

2.3.1.2 Correction plastique

Une fois le prédicteur élastique évalué, nous procédons à l'estimation du critère de plasticité. Dans le cas où celui-ci est négatif, alors la solution est élastique et le prédicteur élastique. Par conséquent, le tenseur des contraintes calculé est solution du problème. Dans le cas où le critère contraire, une correction plastique en résolvant le système (2.57)-(2.59) s'impose. Pour ce faire, ARAVAS commence par écrire la décomposition des tenseurs des contraintes et des incréments de déformations plastiques en leurs parties sphérique et déviatorique :

$$\Sigma = -\Sigma_p \mathbf{1} + \frac{2}{3} \Sigma_{eq} \mathbf{N} \quad (2.63)$$

$$\Delta\mathbf{E}^p = \frac{1}{3} \Delta E_p \mathbf{1} + \Delta E_q \mathbf{N} \quad (2.64)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_p = -\Sigma : \mathbf{1}/3 \text{ et } \mathbf{N} = 3\Sigma' / (2\Sigma_{eq}) \text{ sont respectivement la contrainte moyenne} \\ \text{et le vecteur normal unitaire;} \\ \delta_{ij} \text{ est le symbole de KRONECKER;} \end{array} \right.$$

$\Delta E_p = -\Delta\lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial\Sigma_p} \right)$ et $\Delta E_q = \Delta\lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial\Sigma_{eq}} \right)$ ont été obtenus par ARAVAS [Ara87] en projetant le tenseur des incréments de déformation sur $\mathbf{1}$ et $\mathbf{N}$. En éliminant $\Delta\lambda$ des deux équations précédentes, nous obtenons

$$\Delta E_p \frac{\partial\phi}{\partial\Sigma_{eq}} + \Delta E_q \frac{\partial\phi}{\partial\Sigma_p} = 0 \quad (2.65)$$

Les indices désignant le début et la fin de l'incrément des quantités intervenant dans les équations (2.63) (2.64) ainsi que ceux des expressions qui vont suivre dans cette section sont volontairement omis. Il s'ensuit que toutes les quantités non indicées sont exprimées en fin de pas, sauf indication contraire.

En projetant l'équation (2.61) sur $\mathbf{1}$ et $\mathbf{N}$ puis en identifiant à l'équation (2.63), nous obtenons

$$\Sigma_p = \Sigma_p^{pred} + K \Delta E_p \quad (2.66)$$

$$\Sigma_{eq} = \Sigma_{eq}^{pred} - 3G \Delta E_q \quad (2.67)$$

où $\Sigma_P^{pred} = -\frac{1}{3} \Sigma^{pred} : \mathbf{1}$ et $\Sigma_{eq}^{pred} = \sqrt{\frac{2}{3} (\Sigma^{pred})' : (\Sigma^{pred})'}$.

En introduisant les quantités ΔE_p , ΔE_q , Σ_p et Σ_{eq} dans le système d'équations (2.57)-(2.59) se met sous la forme :

$$\Phi(\Sigma_p, \Sigma_{eq}, \mathcal{H}) = 0 \quad (2.68)$$

$$\Delta E_p \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma_{eq}} + \Delta E_q \frac{\partial \phi}{\partial \Sigma_p} = 0 \quad (2.69)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{F}_{\mathcal{H}}(\Delta E_p, \Delta E_q, \Sigma_p, \Sigma_{eq}, \mathbf{H}) \quad (2.70)$$

La solution du problème (2.68)-(2.70) s'obtient comme suit :

Nous résolvons d'abord le système de deux équations (2.68, 2.69) à deux inconnues ΔE_p et ΔE_q par un schéma de NEWTON-RAPHSON qui nous amène au système équivalent :

$$\begin{cases} A_{11}c_p + A_{12}c_q = b_1 \\ A_{21}c_p + A_{22}c_q = b_2 \end{cases} \quad (2.71)$$

où $c_p = \partial \Delta E_p$ et $c_q = \partial \Delta E_q$ sont respectivement les corrections de ΔE_p et ΔE_q . Les expressions générales des coefficients A_{ij} et b_j sont donnés en appendice.

Une fois les valeurs de c_p et c_q connues, nous procédons à la réactualisation de ΔE_p et ΔE_q

$$\Delta E_p \rightarrow \Delta E_p + c_p$$

$$\Delta E_q \rightarrow \Delta E_q + c_q$$

Puis nous réactualisons les valeurs de Σ_p et Σ_{eq} en utilisant les équations (2.66) et (2.67).

Enfin, nous passons à l'incrément des variables d'état $\mathcal{H}$. Ce schéma continue jusqu'à convergence totale.

Les principales étapes de cet algorithme sont résumées sur la figure 2.6.

1. Calcul du prédicteur élastique :

$$\Sigma^{pred} = \Lambda^e : (\mathbf{E}_n^e + \Delta \mathbf{E})$$

2. Calcul du critère :

$$\Phi(\Sigma^{pred}, \mathcal{H}) = 0$$

3. Vérification du signe du critère Φ :

Si $\Phi < 0$, alors la solution est élastique, on passe à l'incrément suivant

Sinon, la solution est plastique, on passe l'étape 4.

4. Initialisation de : ΔE_p , ΔE_q , Σ_p , Σ_{eq} et des variables d'état $\mathcal{H}$.

5. Calcul des corrections de c_p et c_q

6. Actualisation de ΔE_p , ΔE_q , Σ_p , Σ_{eq} .

7. Intégration temporelle des variables d'état $\mathcal{H}$.

8. Vérification de la convergence du schéma d'intégration :

Si la condition de convergence est satisfaite, passer à l'incrément suivant

Sinon, aller à l'étape 5.

FIG. 2.6 – Le schéma d'intégration local d'ARAVAS[Ara87]

2.3.1.3 Opérateur tangent consistant

Comme nous l'avons rappelé dans la section (2.2.2.1) un schéma d'intégration implicite faisant usage de la méthode de NEWTON-RAPHSON nécessite le calcul de l'opérateur tangent consistant. Sa formulation générale est donnée par

$$\mathbf{K}_{cons} = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mathbf{E}} \right)_{n+1} \quad (2.72)$$

Il définit la variation de la contrainte à la fin de l'incrément causée par la variation de la déformation totale. Il est en général différent de l'opérateur tangent continu

$$\mathbf{K}_{cont} = \frac{\Delta \Sigma}{\Delta \mathbf{E}} \quad (2.73)$$

qui lui dérive de la condition de consistance $\dot{\Phi} = 0$.

L'opérateur tangent consistant dépend de l'algorithme utilisé pour l'implémentation locale de la loi de comportement [Hug87, SH98, APC04, DP05]. Nous présentons ci-dessous l'expression de cet opérateur tel que proposé dans ARAVAS [Ara87].

L'équation de l'élasticité (2.60) peut se réécrire sous la forme

$$\Sigma = \Lambda^e : \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}_n^p - \frac{1}{3} \Delta E_p \mathbf{1} - \Delta E_q \mathbf{N} \right) \quad (2.74)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}^e : \left(\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{E} - \frac{1}{3}\partial\Delta E_p \mathbf{1} - \partial\Delta E_q \boldsymbol{N} - \Delta E_q \frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} \right) \quad (2.75)$$

où $\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}$ est donné par

$$\frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\Sigma}} \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}'}{\Sigma_{eq}} \right) = \frac{1}{\Sigma_{eq}} \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N} \right) \quad (2.76)$$

où $\partial\Delta E_p$ et $\partial\Delta E_q$ sont obtenues en différenciant l'équation (2.65).

Après calcul nous aboutissons au système :

$$\begin{cases} C_{11}\partial\Delta E_p + C_{12}\partial\Delta E_q &= (D_{11}\mathbf{1} + D_{12}\boldsymbol{N}) : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} \\ C_{21}\partial\Delta E_p + C_{22}\partial\Delta E_q &= (D_{21}\mathbf{1} + D_{22}\boldsymbol{N}) : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (2.77)$$

Les constantes C_{ij} et D_{ij} sont données en appendice. La résolution du système précédent conduit aux formules

$$\partial\Delta E_p = (\mathbf{m}_{PI}\mathbf{1} + \mathbf{m}_{PN}\boldsymbol{N}) : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} \quad (2.78)$$

$$\partial\Delta E_q = (\mathbf{m}_{QI}\mathbf{1} + \mathbf{m}_{QN}\boldsymbol{N}) : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} \quad (2.79)$$

où les coefficients $\mathbf{m}_{PI}$, $\mathbf{m}_{PN}$, $\mathbf{m}_{QI}$, $\mathbf{m}_{QN}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{PI} &= \frac{D_{11}C_{22} - D_{21}C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \\ \mathbf{m}_{PN} &= \frac{D_{12}C_{22} - D_{22}C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \\ \mathbf{m}_{QI} &= \frac{D_{21}C_{11} - D_{11}C_{21}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \\ \mathbf{m}_{QN} &= \frac{D_{22}C_{11} - D_{12}C_{21}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \end{aligned} \quad (2.80)$$

En substituant $\partial\Delta E_p$ et $\partial\Delta E_q$ dans l'équation (2.75) nous obtenons

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Lambda}^e : \boldsymbol{\mathcal{M}}) : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Lambda}^e : \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{E} \quad (2.81)$$

où $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \frac{1}{3}\mathbf{m}_{PI}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{3}\mathbf{m}_{PN}\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{N} + \mathbf{m}_{QI}\boldsymbol{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{m}_{QN}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N} + \Delta\epsilon_q \frac{\partial\boldsymbol{N}}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}$.

Finalement, l'opérateur tangent consistant $\boldsymbol{K}_{cons}$ s'écrit

$$\boldsymbol{K}_{cons} = \frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\boldsymbol{E}} = (\boldsymbol{\mathcal{M}} + \boldsymbol{\Lambda}^e)^{-1} \quad (2.82)$$

2.3.2 Implémentation du modèle GLD

Nous présentons dans cette section les principales étapes de l'implémentation du modèle GLD dans le code de calcul Abaqus [ABA05]. L'utilisation de l'algorithme proposé par ARAVAS [Ara87] pour l'intégration de la loi de comportement GLD (ou GTN) nécessite l'introduction de l'hypoélasticité ou de la thermo-hypoélasticité selon que l'échauffement thermique est pris en compte ou non. Cette extension a comme conséquence une modification de l'expression du prédicteur élastique.

2.3.2.1 Mise en équation

Avant de présenter les étapes de l'implémentation du modèle GLD couplé à la température dans des conditions adiabatiques, nous rappelons le système d'équations composant cette loi de comportement pour matériaux élastoplastiques endommageables :

$$\begin{aligned}\Phi(\Sigma, f, S, \bar{\sigma}) &= \frac{C}{\bar{\sigma}^2} \|\Sigma' + \eta \Sigma_h \mathbf{X}\|^2 + 2q(g+1)(g+f) \cosh\left(\kappa \frac{\Sigma_h}{\bar{\sigma}}\right) \\ &- (g+1)^2 - q^2(g+f)^2 = 0\end{aligned}\quad (2.83)$$

$$\check{\Sigma} = \dot{\Sigma} + \Sigma \cdot \Omega - \Omega \cdot \Sigma = \Lambda^e : (\dot{\mathbf{E}}^e + \alpha \dot{T} \mathbf{1}) \quad (2.84)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \quad (2.85)$$

$$\dot{S} = \frac{3}{2} h_1 \left(\dot{\mathbf{E}}_{zz}^p \right)' + 3 h_2 \dot{\mathbf{E}}_m^p \quad (2.86)$$

$$\dot{f} = 3(1-f) \dot{\mathbf{E}}_m^p + \mathcal{A} \dot{\varepsilon}^p \quad (2.87)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = h_\varepsilon \dot{\varepsilon}^p + h_T \dot{T} \quad (2.88)$$

$$\dot{T} = \frac{\xi}{\rho C_v} \frac{\Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)} \quad (2.89)$$

Le problème consiste à résoudre le système non linéaire précédent d'une manière incrémentale. C'est-à-dire, connaissant l'incrément de déformation totale et le tenseur des déformations totales au début du pas de temps, nous devons trouver les valeurs des contraintes ainsi que des variables d'état à la fin de pas.

2.3.2.2 Prédicteur élastique

Cas de l'hypoélasticité. La loi d'hypoélasticité (2.84) peut s'écrire sous la forme incrémentale comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta \Sigma + \Sigma \cdot \Delta \Omega - \Delta \Omega \cdot \Sigma &= \Lambda^e : \Delta E^e \\ \Rightarrow \Delta \Sigma &= \Lambda^e : \Delta E^e - \Sigma \cdot \Delta \Omega + \Delta \Omega \cdot \Sigma\end{aligned}\tag{2.90}$$

En injectant les relations

$$\Delta \Sigma = \Sigma_{n+1} - \Sigma_n \tag{2.91}$$

$$\Delta E^e = \Delta E - \Delta E^p \tag{2.92}$$

dans l'équation (2.90) nous obtenons :

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma^{pred} - \Lambda^e : \Delta E^p$$

où Σ^{pred} est le prédicteur élastique donné par

$$\Sigma^{pred} = \Sigma_n + \Lambda^e : \Delta E - \Sigma_n \cdot \Delta \Omega - \Delta \Omega \cdot \Sigma_n$$

Cas de la thermo-hypoélasticité. La prise en compte de l'influence de la température sur le comportement élastique du matériau s'effectue en introduisant la déformation thermique $E^{th} = \alpha (T - T_0) \mathbf{1}$ dans l'équation de la déformation totale. Nous écrivons

$$\Delta E = \Delta E^e + \Delta E^p + \Delta E^{th} \tag{2.93}$$

$$\Rightarrow \Delta E^e = \Delta E - \Delta E^p - \Delta E^{th} \tag{2.94}$$

En procédons de la même manière que dans le cas de l'hypoélasticité, nous aboutissons à

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma^{pred} - \Lambda^e : \Delta E^p \tag{2.95}$$

où le prédicteur élastique Σ^{pred} s'écrit à présent comme suit :

$$\Sigma^{pred} = \Sigma_n + \Lambda^e : (\Delta E - \Delta E^{th}) - \Sigma_n \cdot \Delta \Omega - \Delta \Omega \cdot \Sigma_n \tag{2.96}$$

2.3.2.3 Correction plastique

Dans le cas où la valeur du critère de plasticité Φ est positive, une correction plastique est nécessaire afin de satisfaire la condition $\Phi(\Sigma^{pred}, f, S, \bar{\sigma}) = 0$. La solution de ce problème est obtenue en résolvant le système d'équations (2.83)-(2.88). Les valeurs du champ de contrainte, obtenues lors du calcul du prédicteur élastique, ainsi que celles de toutes les variables d'état intervenant dans la loi de comportement se retrouvent ainsi réactualisées à la fin d'incrément.

La première étape de l'implémentation du modèle GLD couplé à la température dans des conditions adiabatiques consiste à exprimer le critère de plasticité ainsi que les lois d'évolution des différentes variables d'état en fonction des variables utilisées dans l'algorithme d'ARAVAS. Le système d'équations à résoudre se met sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi(\Sigma_p, \Sigma_{eq}, f, S, \bar{\sigma}) &= \frac{C(f, S)}{\bar{\sigma}^2} \Sigma_{dev}(\Sigma_p, \Sigma_{eq}, f, S) + 2q(S) \cdot [g(f, S) + 1] \\ &\times [g(f, S) + f] \cosh \left[\kappa(f, S) \frac{\Sigma_h(\Sigma_p, \Sigma_{eq}, f, S)}{\bar{\sigma}} \right] \\ &- [g(f, S) + 1]^2 - q(S)^2 [g(f, S) + f]^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_1 &= \Delta f = (1 - f) \Delta E_p + \mathcal{A} \frac{-\Delta E_p \Sigma_p + \Delta E_q \Sigma_{eq}}{(1 - f) \bar{\sigma}} \\ \Delta \mathcal{H}_2 &= \Delta S = \frac{3}{2} h_1(\Sigma_p, \Sigma_q, f, S) \left(\frac{1}{3} \Delta E_p + n_z \Delta E_q \right) + h_2(f, S) \Delta E_p \\ \Delta \mathcal{H}_3 &= \Delta \bar{\sigma} = \left(\frac{\hbar_\varepsilon(\bar{\sigma}, T)}{\bar{\sigma}} + \hbar_T(\bar{\sigma}, T) \frac{\xi}{\rho c_p} \right) \frac{-\Delta E_p \Sigma_p + \Delta E_q \Sigma_{eq}}{(1 - f)} \\ \Delta \mathcal{H}_4 &= \Delta T = \frac{\xi}{\rho c_p} \frac{-\Delta E_p \Sigma_p + \Delta E_q \Sigma_{eq}}{(1 - f)} \end{aligned}$$

où les expressions de $\Sigma_{dev}(\Sigma_p, \Sigma_{eq}, f, S)$ et $\Sigma_h(\Sigma_p, \Sigma_{eq}, f, S)$ sont données en appendice. Les expressions des autres coefficients ont été données au chapitre 1.

Une fois le système non-linéaire mis en place, nous commençons par chercher les valeurs de c_p et c_q solutions du système

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_p \\ c_q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

Le calcul des coefficient A_{ij} et b_j nécessite le calcul des dérivées partielles du critère ainsi que celles des variables internes. Les expressions de ces six coefficients dans le cas présent sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} + \Delta E_p \left(K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial S} \frac{\partial S}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial \bar{\sigma}} \right. \\
&\quad \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial T} \frac{\partial T}{\partial \Delta E_p} \Big) + \Delta E_q \left(K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial S} \right. \\
&\quad \times \frac{\partial S}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial T} \frac{\partial T}{\partial \Delta E_p} \Big) \quad (2.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_p} + \Delta E_p \left(-3G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial S} \frac{\partial S}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial \bar{\sigma}} \right. \\
&\quad \times \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial T} \frac{\partial T}{\partial \Delta E_q} \Big) + \Delta E_q \left(-3G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_q} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial S} \frac{\partial S}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial T} \frac{\partial T}{\partial \Delta E_q} \right) \quad (2.98)
\end{aligned}$$

$$A_{21} = K \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_p} \quad (2.99)$$

$$A_{22} = -3G \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_q} \quad (2.100)$$

$$b_1 = -\Delta E_p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} - \Delta E_q \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_p} \quad (2.101)$$

$$b_2 = -\Phi \quad (2.102)$$

Les expressions des dérivées partielles des variables d'état f , S et $\bar{\sigma}$ par rapport aux variables ΔE_p et ΔE_q sont données en appendice.

Une fois c_p et c_q calculées, nous procédons à la réactualisation de ΔE_p et ΔE_q :

$$\Delta E_p \rightarrow \Delta E_p + c_p \quad (2.103)$$

$$\Delta E_q \rightarrow \Delta E_q + c_q \quad (2.104)$$

Puis, nous réactualisons les contraintes équivalente Σ_{eq} et moyenne de pression Σ_p en employant les relations

$$\Sigma_p = \Sigma_p^{pred} + K \Delta E_p \quad (2.105)$$

$$\Sigma_{eq} = \Sigma_{eq}^{pred} - 3G \Delta E_q \quad (2.106)$$

Finalement, l'intégration temporelle des variables d'état conduit à

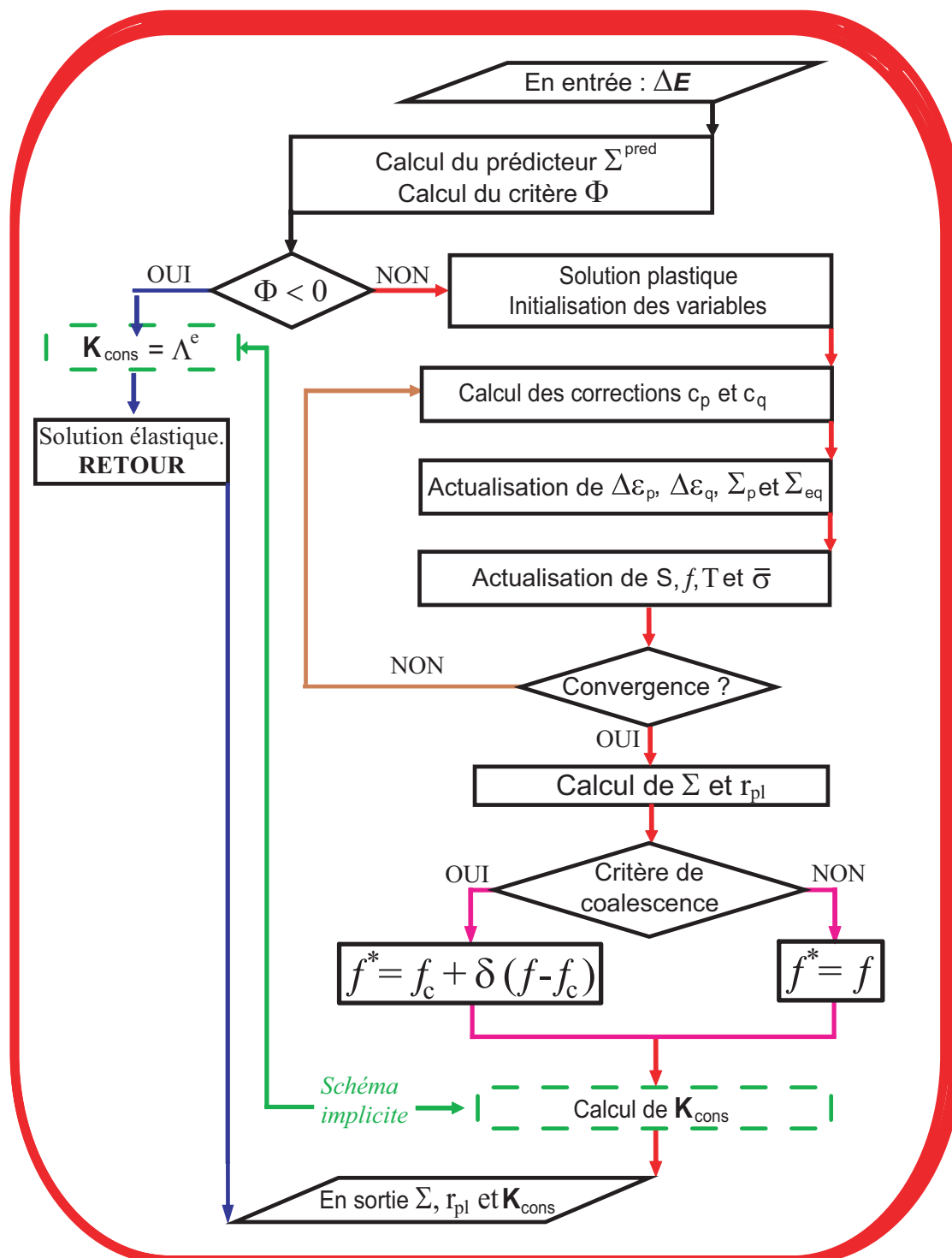


FIG. 2.7 – Organigramme de l'implémentation du modèle GLD

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + (1 - f_n) \Delta E_p + \mathcal{A} \frac{-\Delta E_p \Sigma_p + \Delta E_q \Sigma_{eq}}{(1 - f_n) \bar{\sigma}} \\
S_{n+1} &= S_n + \frac{3}{2} h_1 \left(\frac{1}{3} \Delta E_p + n_z \Delta E_q \right) + h_2 \Delta E_p \\
\bar{\sigma}_{n+1} &= \bar{\sigma}_n + \left(\frac{\hbar_\varepsilon}{\bar{\sigma}_n} + \hbar_T \frac{\xi}{\rho c_p} \right) \frac{-\Delta E_p \Sigma_p + \Delta E_q \Sigma_{eq}}{(1 - f_{n+1})} \\
T_{n+1} &= T_n + \frac{\xi}{\rho c_p} \frac{-\Delta E_p \Sigma_p + \Delta E_q \Sigma_{eq}}{(1 - f_{n+1})}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

où les valeurs de Σ_p , Σ_{eq} , ΔE_p et ΔE_q utilisées dans le système précédent sont les valeurs réactualisées. Le schéma continue jusqu'à convergence totale.

Nous avons vu précédemment que l'opérateur tangent est donnée par la formule

$$\mathbf{K}_{cont} = \frac{\partial \dot{\Sigma}}{\partial \dot{\mathbf{E}}} = (\mathcal{M} + \Lambda^e)^{-1}$$

où $\mathcal{M} = \frac{1}{3} \mathbf{m}_{PI} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{3} \mathbf{m}_{PN} \mathbf{1} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{m}_{QI} \mathbf{N} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{m}_{PN} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \Delta \varepsilon_q \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$. Les coefficients $\mathbf{m}_{PI}$, $\mathbf{m}_{PN}$, $\mathbf{m}_{QI}$ et $\mathbf{m}_{PN}$ dépendent de huit coefficients C_{ij} et D_{ij} (i et j allant de 1 à 2). Ces derniers sont donnés dans l'appendice de ce chapitre.

Les principales étapes de l'implémentation du modèle GLD sont récapitulées sur la figure 2.7.

2.4 Extension aux grandes déformations

La difficulté de l'écriture des lois de comportement en grandes déformations réside dans le fait que, contrairement aux cas de transformations infinitésimales où les configurations initiale et déformée sont voisines et exprimées dans le même repère spatial, en transformations finies ces deux configurations peuvent être très éloignées. Le problème du choix du repère spatial pour l'écriture de telles lois de comportement est donc posé. Deux possibilités sont offertes pour surmonter cette difficulté. La première consiste à proposer une nouvelle loi de comportement spécifique aux grandes déformations. La deuxième est d'utiliser une formulation permettant de transposer le modèle écrit sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP) aux grandes déformations moyennant quelques modifications [Dog89].

La deuxième alternative est celle adoptée dans Abaqus [ABA05]. Dans cette section, nous rappelons quelques notions théoriques sur l'extension des lois de comportement écrites en HPP aux transformations finies, puis nous présentons les précautions à prendre pour mettre en œuvre une telle procédure dans Abaqus/Standard et Abaqus/Explicit.

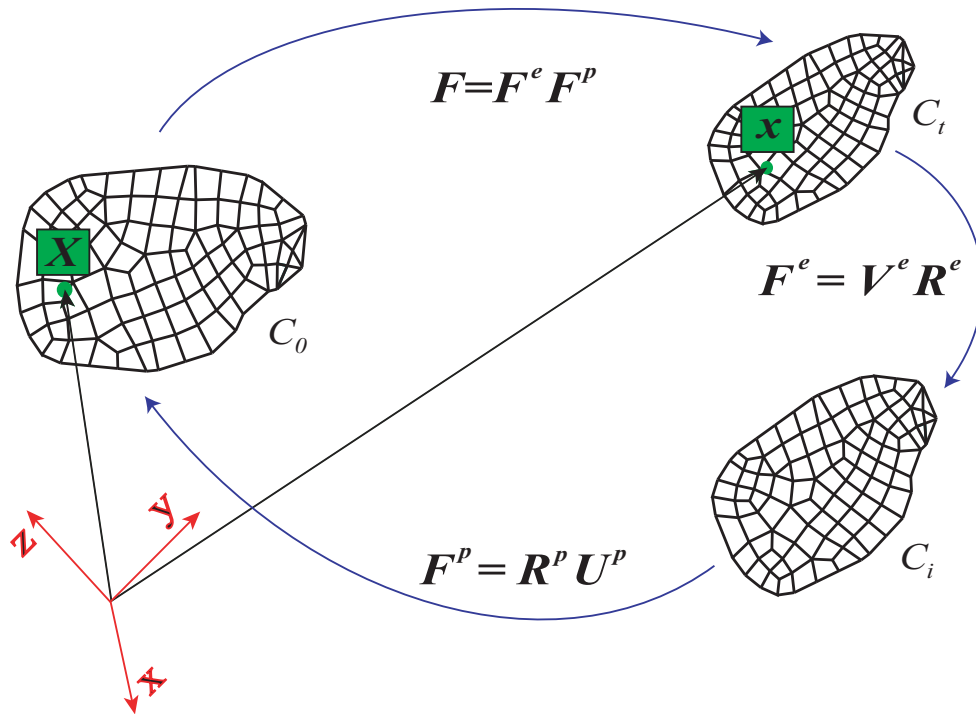


FIG. 2.8 – Configuration intermédiaire relâchée

2.4.1 Milieux à configuration intermédiaire

Soit un point matériel d'un solide V de coordonnées $\mathbf{x}$ dans la configuration déformée (C_t) et $\mathbf{X}$ dans la configuration de référence (C_0), comme indiqué sur la figure 2.8. Les expressions des tenseurs gradient de déformation $\mathcal{F}$ et gradient de vitesse $\mathcal{L}$ en ce point sont données par les relations

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.108)$$

$$\mathcal{L} = \dot{\mathcal{F}} \mathcal{F}^{-1} \quad (2.109)$$

La notion de configuration intermédiaire est introduite en procédant à un relâchement élastique local des contraintes à partir de la configuration déformée tout en bloquant les mécanismes de plasticité (figure 2.8). Un matériau élastoplastique a alors un comportement élastique vis-à-vis de la configuration intermédiaire [Dog89]. Le tenseur gradient des déformations se décompose, en tenant compte de cette nouvelle configuration, comme suit :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^e \mathcal{F}^p$$

où $\mathcal{F}^e$ est le tenseur gradient de déformation élastique qui permet le passage entre la configuration relâchée et la configuration déformée et $\mathcal{F}^p$ le gradient de

déformation plastique qui permet le passage entre la configuration relâchée et la configuration initiale. Les décompositions polaires de ces deux tenseurs s'écrivent

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}^e \cdot \mathbf{R}^e \quad (2.110)$$

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \cdot \mathbf{U}^p \quad (2.111)$$

où $\mathbf{R}^e$ et $\mathbf{R}^p$ sont les tenseurs rotation propre de corps rigide élastique et plastique respectivement ; $\mathbf{V}^e$ est le tenseur des déformations élastiques pure gauche ; et $\mathbf{U}^p$ est le tenseur des déformations plastique pure droit. Ces deux tenseurs sont symétriques définis positifs.

En insérant les équations (2.110) et (2.111) dans (2.109) nous obtenons

$$\mathcal{L} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{V}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1} \cdot (\mathbf{V}^e)^{-1} = \mathcal{L}^e + \mathbf{V}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1} \cdot (\mathbf{V}^e)^{-1} \quad (2.112)$$

Il apparaît de l'expression précédente qu'il n'y pas additivité entre les tenseurs gradient de vitesse élastique $\mathcal{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot (\mathbf{F}^e)^{-1}$ et plastique $\mathcal{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot (\mathbf{F}^p)^{-1}$:

$$\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^e + \mathcal{L}^p$$

Il en est alors ainsi des tenseurs taux de déformation $\mathbf{D}_L$ et taux de rotation $\mathbf{W}_L$, puisque

$$\mathbf{D}_L = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + {}^T\mathbf{L}) = \mathbf{D}_L^e + \left[\mathbf{V}^e \cdot \mathcal{L}^p \cdot (\mathbf{V}^e)^{-1} \right]^{sym} \quad (2.113)$$

$$\mathbf{W}_L = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - {}^T\mathbf{L}) = \mathbf{W}_L^e + \left[\mathbf{V}^e \cdot \mathcal{L}^p \cdot (\mathbf{V}^e)^{-1} \right]^{antisym} \quad (2.114)$$

L'additivité de ces tenseurs n'est obtenue qu'en admettant que les déformations élastiques sont infinitésimales $\mathbf{V}^e = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^e) \cong \mathbf{1}$. Cette hypothèse est justifiée dans le cas des métaux où les déformations élastiques sont de l'ordre du millième. Dans ce cas nous retrouvons l'additivité

$$\mathbf{D}_L = \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_J^e + \mathbf{D}_L^p \quad (2.115)$$

$$\mathbf{W}_L = \mathbf{W}_L^e + \mathbf{W}_L^p \quad (2.116)$$

où $\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_J^e$ est la dérivée de Jaumann de la déformation élastique [BCCF01].

Par conséquent, la décomposition additive des vitesses de déformation élastiques et inélastiques reste valable en transformations finies. Il s'ensuit que la construction d'une théorie générale garantissant l'objectivité des lois de comportement est possible. Pour cela l'utilisation de repères locaux objectifs fournit une méthode systématique pour transposer des lois HPP en grandes déformations.

Le référentiel corotationnel. Il existe une famille unique de référentiels locaux objectifs $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$ tels qu'en tout point et à chaque instant, le taux de rotation du milieu par rapport à ce référentiel soit nul.

Le tenseur des rotations $\mathcal{Q}$, défini dans un référentiel tournant orthonormé, vérifie les relations [Dog89] :

$$\dot{\mathcal{Q}}^T \mathcal{Q} = \mathcal{W}_{\mathcal{Q}}, \quad \mathcal{Q}^T \mathcal{Q} = \mathbf{1} \quad \mathcal{Q}(=0) = \mathbf{1} \quad (2.117)$$

À chaque tenseur $\mathfrak{A}$ on peut lui associer un tenseur $\mathfrak{A}_{\mathcal{Q}}$ qui s'exprime dans le référentiel tournant sous la forme

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{Q}} = {}^T \mathcal{Q} \mathfrak{A} \mathcal{Q} \quad (2.118)$$

Par conséquent, la dérivée du tenseur $\mathfrak{A}$ par rapport au référentiel tournant est :

$$\frac{D_{\mathcal{Q}} \mathfrak{A}}{Dt} = {}^T \mathcal{Q} \left[\frac{d(\mathcal{Q} \mathfrak{A} {}^T \mathcal{Q})}{dt} \right] \mathcal{Q} = \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{A} \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} - \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} \mathfrak{A} \quad (2.119)$$

où $\dot{\mathfrak{A}}$ désigne la dérivée matérielle classique.

De cette écriture, on peut postuler que la formulation de lois de comportement dans un référentiel tournant n'utilise que les dérivées matérielles classiques et des variables tensorielles exprimées dans le même repère. Donc, l'extension de modèles écrits en petites déformations aux transformations finies peut se faire simplement en travaillant dans de tels référentiels. La difficulté d'adopter ce cadre de travail réside dans le choix du tenseur rotation $\mathcal{Q}$. Abaqus propose deux possibilités : la rotation de JAUMANN et la rotation propre de GREEN-NAGHDI.

2.4.2 Extension aux grandes déformation dans Abaqus

L'extension des lois de comportement écrites en HPP aux grandes déformations dans Abaqus utilise deux cinématiques. Comme nous l'avons vu précédemment, une telle extension nécessite l'écriture des lois de comportement dans un référentiel tournant défini par la rotation $\mathcal{Q}$. Le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est obtenu dans cette situation en intégrant le tenseur $\mathbf{D}_L$ (équation 2.115).

Rotation de JAUMANN Cette cinématique est utilisée par défaut dans Abaqus standard pour tous les éléments à l'exception des éléments coque et membrane. Nous avons vu précédemment que pour écrire une loi de comportement en grande déformation il est nécessaire de tourner les tenseurs pour garder leurs objectivités. Il s'ensuit que lors de l'implémentation d'une loi de comportement dans Abaqus, il est nécessaire d'affecter tout tenseur

intervenant dans le modèle d'un mouvement de corps rigide ; exception faite des tenseurs de déformation totale et de contrainte qui eux, ont été déjà tournés dans Abaqus [ABA05]. Par exemple, l'incrément de contrainte à la fin de l'incrément a été obtenu en utilisant la relation [BD01]

$$\Delta \Sigma = \Delta \check{\Sigma} + (\Delta \mathcal{W}_{\mathcal{Q}} \cdot \Sigma_n - \Sigma_n \cdot \Delta \mathcal{W}_{\mathcal{Q}}) = \Delta \check{\Sigma} + \mathcal{Q} \cdot \Sigma_n \cdot {}^T \mathcal{Q} \quad (2.120)$$

où $\Delta \check{\Sigma}$ est l'incrément de contrainte dans le référentiel tournant. Le tenseur des contraintes introduit dans Abaqus au début de l'incrément est effectivement $\mathcal{Q} \cdot \Sigma_n \cdot {}^T \mathcal{Q}$, il ne reste plus alors à l'utilisateur qu'à calculer le tenseur des contraintes à la fin de l'incrément. Cependant, les tenseurs déformation élastique $\mathbf{E}^e$ et plastique $\mathbf{E}^p$ doivent être tournés afin de vérifier le principe d'objectivité. Abaqus fournit une routine *ROTSIG* qui permet d'affecter tout tenseur d'un mouvement de corps rigide lors de l'implémentation des lois de comportement. Cette rotation doit se faire au début de l'incrément afin de transformer un tenseur $\mathfrak{A}_n$ en un autre tenseur $\mathcal{Q} \cdot \mathfrak{A}_n \cdot {}^T \mathcal{Q}$. Ce dernier sera utilisé pour calculer les tenseurs réactualisés à la fin de l'incrément $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Rotation de propre de GREEN-NAGHDI Cette cinématique est utilisée par défaut dans Abaqus/Explicit pour tous les éléments, et dans Abaqus Standard pour les éléments coque et membrane. Pour tout tenseur $\mathfrak{A}$ intervenant dans la loi de comportement, Abaqus effectue un transport en début d'incrément dans un référentiel tournant sous la forme suivante :

$$\mathfrak{A}_n = {}^T R_n \cdot \mathfrak{A}_n \cdot R_n \quad (2.121)$$

Après actualisation des variables à la fin de l'incrément, Abaqus procède au transport inverse

$$\mathfrak{A}_{n+1} = R_{n+1} \cdot \mathfrak{A}_{n+1} \cdot {}^T R_{n+1} \quad (2.122)$$

L'incrément de rotation du référentiel tournant est obtenu à partir du tenseur de rotation $\mathbf{R}$

$$\Delta \mathbf{Q} = \Delta \mathbf{R} \cdot {}^T \mathbf{R} \quad (2.123)$$

Cas du couplage thermomécanique Nous avons vu précédemment que dans la circonstance d'un comportement thermomécanique, la déformation totale peut être décomposée en trois parties élastique, plastique et thermique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^{th} \quad (2.124)$$

Pour éviter d'introduire une configuration thermique intermédiaire Abaqus [ABA05] propose de considérer les déformations thermiques $\mathbf{E}^{th}$ comme des

déformations élastiques dues à l'échauffement thermique. Par conséquent, la décomposition multiplicative du tenseur gradient de la déformation totale s'écrit toujours

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^e \mathcal{F}^p \quad (2.125)$$

2.5 Conclusion

Les aspects numériques liés au modèle théorique développé au chapitre 1 sont présentés dans ce chapitre. Les discrétisations spatiales des équilibres mécanique et thermique par la méthode des éléments finis sont données. Les schémas de résolution implicite et explicite du problème mécanique ainsi que la méthode séquentielle explicite d'intégration du problème thermomécanique sont rappelés. Les principales étapes de l'implémentation du modèle GLD dans Abaqus ainsi que les discrétisations temporelles des différentes variables d'état intervenant dans cette relation sont décrites. Nous avons évoqué les précautions à prendre lors de l'implémentation de cette loi de comportement pour une utilisation adéquate en grandes déformations. La mise en œuvre informatique de notre modélisation fait l'objet des deux chapitres suivants.

Appendice 2

Formulation générale des dérivées relatives des variables d'état par rapport à $\Delta\varepsilon_p$ et $\Delta\varepsilon_q$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^r}{\partial \Delta\varepsilon_p} = \sum c_{rs} \left(\frac{\partial \Delta \mathcal{H}^s}{\partial \Delta\varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta \mathcal{H}^s}{\partial \Sigma_P} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^r}{\partial \Delta\varepsilon_q} = \sum c_{rs} \left(\frac{\partial \Delta \mathcal{H}^s}{\partial \Delta\varepsilon_q} - 3G \frac{\partial \Delta \mathcal{H}^s}{\partial \Sigma_{eq}} \right)$$

où c_{rs} est l'inverse de la matrice dont les composantes sont $c_{rs} = \delta_{rs} - \frac{\partial^r}{\partial \mathcal{H}^s}$

Expressions générales des coefficients A_{ij} et b_j

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} + \Delta E_p \left(K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \Sigma_{eq}} + \sum_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial \mathcal{H}^s} \frac{\partial \mathcal{H}^s}{\partial \Delta E_p} \right) \\ &+ \Delta E_q \left(K \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p^2} + \sum_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \mathcal{H}^s} \frac{\partial \mathcal{H}^s}{\partial \Delta E_p} \right) \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_p} + \Delta E_p \left(-3G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq}^2} + \sum_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{eq} \partial \mathcal{H}^s} \frac{\partial \mathcal{H}^s}{\partial \Delta E_q} \right) \\ &+ \Delta E_q \left(-3G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \Sigma_{eq}} + \sum_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_p \partial \mathcal{H}^s} \frac{\partial \mathcal{H}^s}{\partial \Delta E_q} \right) \end{aligned} \quad (127)$$

$$A_{21} = K \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_p} + \sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{H}^s} \frac{\partial \mathcal{H}^s}{\partial \Delta E_p} \quad (128)$$

$$A_{22} = -3G \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} + \sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{H}^s} \frac{\partial \mathcal{H}^s}{\partial \Delta E_q} \quad (129)$$

$$b_1 = -\Delta E_p \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{eq}} - \Delta E_q \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_p} \quad (130)$$

$$b_2 = -\Phi \quad (131)$$

Contrainte déviatorique Σ_{dev} et hydrostatique Σ_h qui apparaissent dans l'expression du critère de plasticité :

$$\begin{aligned} \Sigma_{dev}(\Sigma_P, \Sigma_{eq}, f, S) &= \left\{ 1 + \frac{4}{9}(n_x + n_y) \alpha_2(f, S)^2 \eta(f, S)^2 + \frac{4}{9} n_z^2 [1 - 2\alpha_2(f, S)]^2 \right. \\ &\quad \times \eta(f, S)^2 + \frac{8}{9} n_z (n_x + n_y) [\alpha_2(f, S) - 2\alpha_2(f, S)^2] \eta(f, S)^2 \\ &\quad + \frac{2}{3} n_z (n_x + n_y) + \alpha_2(f, S) \eta(f, S) + n_z^2 (1 - 2\alpha_2(f, S)) \\ &\quad \times \eta(f, S) \Sigma_{eq}^2 + \eta(f, S)^2 \Sigma_P^2 + \left[\frac{4}{3} (n_x + n_y) \alpha_2(f, S) \eta(f, S)^2 \right. \\ &\quad \left. + n_z \eta(f, S)^2 - 2n_z \alpha_2(f, S) \eta(f, S)^2 - n_z \eta(f, S) \right] \Sigma_P \Sigma_{eq} \\ \Sigma_h(\sigma_p, \sigma_{eq}, f, S) &= -\Sigma_P + \frac{2}{3} [(n_x + n_y) \alpha_2(f, S) + n_z (1 - 2\alpha_2(f, S))] \sigma_{eq} \end{aligned}$$

Dérivées des variables d'état du modèle GLD-Adiabatique par rapport à $\Delta \varepsilon_p$ et ΔE_q :

Par rapport à ΔE_p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \Delta E_p} &= c_{11} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta E_p} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{12} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta E_p} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{13} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta E_p} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} \right) \\ &\quad + c_{14} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta E_p} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \Delta E_p} &= c_{21} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta E_p} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{22} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{23} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} \right) \\ &\quad + c_{24} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} &= c_{31} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{32} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{33} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} \right) \\ &+ c_{34} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \Delta \varepsilon_p} &= c_{41} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{42} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} \right) + c_{43} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} \right) \\ &+ c_{44} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_p} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right)\end{aligned}$$

Par rapport $\Delta \varepsilon_q$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \Delta \varepsilon_q} &= c_{11} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{12} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{13} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \\ &+ c_{14} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \Delta \varepsilon_q} &= c_{21} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{22} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{23} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \\ &+ c_{24} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} &= c_{31} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{32} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{33} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \\ &+ c_{34} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \Delta \varepsilon_q} &= c_{41} \left(\frac{\partial \Delta f}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{42} \left(\frac{\partial \Delta S}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} \right) + c_{43} \left(\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \\ &+ c_{44} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial \Delta \varepsilon_q} + K \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right)\end{aligned}$$

Les coefficients c_{ij} sont les composantes de la matrice $[c]$ donnée ci-dessous :

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial \Delta f}{\partial f} & -\frac{\partial \Delta f}{\partial S} & -\frac{\partial \Delta f}{\partial \bar{\sigma}} & -\frac{\partial \Delta f}{\partial T} \\ -\frac{\partial \Delta S}{\partial f} & 1 - \frac{\partial \Delta S}{\partial S} & -\frac{\partial \Delta S}{\partial \bar{\sigma}} & -\frac{\partial \Delta S}{\partial T} \\ -\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial f} & -\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial S} & 1 - \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \bar{\sigma}} & -\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial T} \\ -\frac{\partial \Delta T}{\partial f} & -\frac{\partial \Delta T}{\partial S} & -\frac{\partial \Delta T}{\partial \bar{\sigma}} & 1 - \frac{\partial \Delta T}{\partial T} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
D_{21} &= \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma_p} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \left(c_{11} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} + c_{12} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} + c_{13} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} + c_{14} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \phi}{\partial S} \left(c_{21} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} + c_{22} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} + c_{23} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} + c_{24} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\sigma}} \left(c_{31} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} + c_{32} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} + c_{33} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} + c_{34} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \phi}{\partial T} \left(c_{41} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_p} + c_{42} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_p} + c_{43} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_p} + c_{44} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_p} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22} &= - \left[\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma_{eq}} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \left(c_{11} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{12} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{13} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{14} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \right] \\
&- \left[\frac{\partial \phi}{\partial S} \left(c_{21} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{22} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{23} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{24} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \right] \\
&- \left[\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\sigma}} \left(c_{31} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{32} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{33} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{34} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \right] \\
&- \left[\frac{\partial \phi}{\partial T} \left(c_{41} \frac{\partial \Delta f}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{42} \frac{\partial \Delta S}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{43} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}}{\partial \Sigma_{eq}} + c_{44} \frac{\partial \Delta T}{\partial \Sigma_{eq}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Validation sur des essais simples

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre des simulation numériques utilisant les modèles GTN et GLD présentés au chapitre 1. Ces applications nous permettent de valider l'implémentation de ces deux modèles dans le code industriel Abaqus.

Nous commençons d'abord par rappeler le modèle de la cellule élémentaire qui est employé pour étudier la réponse d'un matériau supposé constitué d'un assemblage périodique de Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.). Nous décrivons par la suite la technique développée pour le calcul explicite de cellules tout en garantissant une triaxialité constante au cours du chargement. Cette méthode nous permet de comparer les résultats prédits par le modèle GLD avec ceux obtenus sur des calculs de cellules élémentaires. Toujours dans le cadre de la simulation de la réponse d'un élément axisymétrique, nous abordons l'influence de l'échauffement thermique sur la ruine finale de celui-ci.

Deux essais de traction de barreaux sont ensuite réalisés à la fin du chapitre. Le premier est effectué sur une barre cylindrique lisse en utilisant les modèles GTN et GLD. Le deuxième consiste en une étude de l'effet du couplage thermomécanique sur la rupture d'une éprouvette axisymétrique entaillée.

3.2 La cellule élémentaire

La cellule élémentaire est largement utilisée pour modéliser le comportement d'un matériau défini comme un assemblage périodique de cellules cylindriques à bases hexagonales. Ces dernières sont approchées par des cercles de rayon B permettant ainsi de simplifier la simulation en la ramenant au cas axisymétrique, comme

le montre la figure 3.1. La cellule ainsi modélisée peut être considérée comme un Volume Élémentaire Représentatif d'un matériau périodique [KN88, BSRA89, BSH95, GLD97, BBP99, GLPD01, PH00, Per92, SL04a, OOS06, SOOB07].

Les quantités calculées localement en chaque point de la cellule sont qualifiées de microscopiques alors que celles moyennées sur toute la cellule sont les valeurs mésoscopiques. Les grandeurs macroscopiques sont celles qui correspondent à toute la structure. Il est souvent difficile de distinguer entre échelles macroscopique et mésoscopique, nous employons dans la suite le vocable macroscopique dans les deux situations.

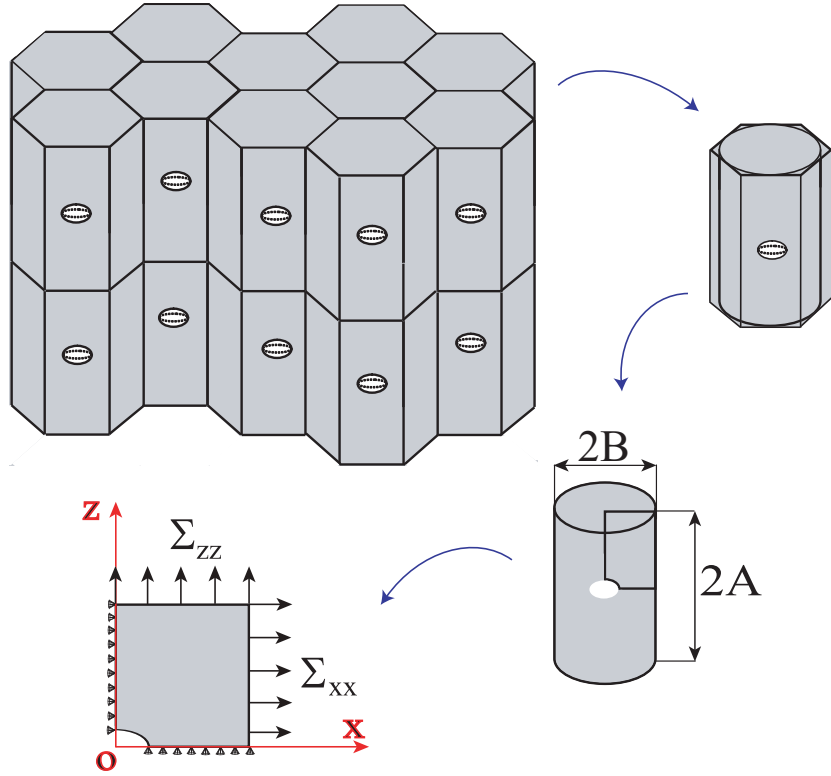


FIG. 3.1 – Modélisation micromécanique : Représentation des différentes échelles.

En raison des symétries de géométrie et de chargement, seul le quart de la cellule est considéré. Un chargement est appliqué sur ces deux faces extérieures. Les contraintes macroscopiques axiale Σ_{zz} et radiale Σ_{xx} sont formulées comme suit :

$$\Sigma_{xx} = \frac{F_x}{4\pi AB} , \quad \Sigma_{zz} = \frac{F_z}{\pi B^2} \quad (3.1)$$

où F_x et F_z sont les réactions au niveau de la face latérale et de la base du V.E.R. respectivement. Il s'ensuit que les contraintes macroscopiques moyenne Σ_m et équivalente Σ_{eq} sont données dans le cas axisymétrique par

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} (2\Sigma_{xx} + \Sigma_{zz}) , \quad \Sigma_{eq} = | \Sigma_{zz} - \Sigma_{xx} | \quad (3.2)$$

Les déformations macroscopiques axiale E_{zz} , radiale E_{xx} et équivalente E_{eq} sont définies par

$$E_{xx} = \ln \left(\frac{B + u_{xx}}{B} \right) , \quad E_{zz} = \ln \left(\frac{A + u_{zz}}{A} \right) , \quad E_{eq} = \frac{2}{3} | E_{zz} - E_{xx} | \quad (3.3)$$

La fraction volumique de vides $f = V_{vid}/2\pi AB^2$ peut être calculée de deux manières, soit par intégration numérique le long des points de la surface du vide, soit en utilisant la formule approchée

$$f = 1 - (1 - f_0) \left[1 + \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \Sigma_m \right] \frac{V_{tot}^0}{V_{tot}} \quad (3.4)$$

proposée par KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88]. V_{tot}^0 , V_{tot} , f_0 et f désignent respectivement les volumes initial et final et les porosités initiale et finale de la cellule.

Une des difficultés de l'étude numérique d'un V.E.R. en utilisant le modèle de la cellule élémentaire est le maintien de la triaxialité ($\mathcal{T} = \Sigma_m/\Sigma_{eq}$) à une valeur constante au cours du chargement. Dans le cas d'un calcul implicite, la méthode de RIKS [Cri91, BCCF01, ABA05] peut être avantageusement exploitée pour satisfaire cette condition. Dans le cas d'un calcul explicite nous proposons une technique capable de garantir une triaxialité constante au cours du chargement tout en offrant la possibilité de décrire le comportement du matériau jusqu'à sa rupture finale.

3.3 Technique de calcul explicite du comportement des cellules

Nous présentons dans ce qui suit une technique de calcul explicite de cellule permettant de maintenir une triaxialité constante en cours de déformation. Cette contrainte est satisfaite au bout d'un certain nombre de calculs. Le chargement est appliqué cette fois-ci par l'intermédiaire d'une barre fixée sur le coin supérieur de la cellule. La présente méthode peut être usitée aussi bien dans la circonstance d'une matrice saine que poreuse¹⁷.

¹⁷Une étude numérique de l'influence de la deuxième population de cavités (matrice poreuse modélisée en employant le modèle GTN) sur la rupture de cellules élémentaires en utilisant la présente technique est donnée dans [OOS06, SOOB07].

3.3.1 Description du dispositif de chargement de la cellule

Les chargements axisymétriques de la cellule sont pour l'ensemble des simulations numériques considérées, d'une part à traction axiale (le long de l'axe des z) dominante ($\Sigma_{zz} > \Sigma_{xx} = \Sigma_{yy}$) et, d'autre part, à triaxialité $\mathcal{T}$ constante. Les valeurs retenues pour celle-ci sont $\mathcal{T} = 1, 2$ et 3 . Dans les calculs de cellules, il existe un certain nombre de techniques permettant de maintenir la triaxialité constante lors du chargement de celles-ci. L'algorithme de Riks s'avère simple d'emploi dans le cas d'espèce considéré ici et néanmoins efficace [SH96]. Cependant, son utilisation ne peut être couplée avec une approche d'intégration explicite du fait du rôle du paramètre temps. D'un autre côté, dans sa version actuelle, Abaqus Standard (analyse implicite) exclut la prise en compte dans une analyse d'endommagement final des matériaux des paramètres de coalescence f_c et f_f . En revanche Abaqus/Explicit permet de la faire. Nous le retenons pour l'analyse aux éléments finis de la réponse du volume élémentaire poreux présenté dans la section précédente.

La figure 3.2 montre schématiquement un dispositif de chargement de la cellule qui permet par ajustements successifs de tendre vers la situation où la triaxialité est maintenue constante au cours de son évolution.

Une barre élastique PQ de longueur initiale L_o , de section constante d'aire S_b et inclinée d'un angle initial φ_o par rapport à l'horizontale est fixée en son extrémité P au coin supérieur droit de la cellule. Il s'ensuit que le chargement de la cellule s'effectue par l'intermédiaire de la barre PQ pour laquelle la position dans le plan (x, z) de son extrémité Q est imposée de sorte à garantir le maintien de la triaxialité à la valeur souhaitée. Un déplacement adéquat u^Q de son extrémité Q est imposé. On note u^P, u^Q les déplacements des extrémités P et Q dont les décompositions selon les direction (e_x, e_z) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^P &= u_x^P \mathbf{e}_x + u_z^P \mathbf{e}_z \\ \mathbf{u}^Q &= u_x^Q \mathbf{e}_x + u_z^Q \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

La position de l'extrémité Q est alors donnée par

$$\begin{cases} x^Q &= B_o + u_x^P + L \cos \varphi \\ z^Q &= A_o + u_z^P + L \sin \varphi \end{cases} \quad (3.6)$$

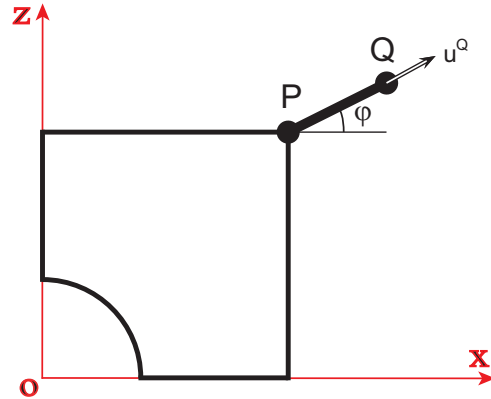


FIG. 3.2 – Dispositif de chargement de la cellule (V.E.R.).

où L est la longueur actuelle de la barre et l'angle φ est tel que (Fig. 3.2)

$$\cos \varphi = \cos \varphi_o - \frac{u_x^Q - u_x^P}{L_o}, \quad \sin \varphi = \sin \varphi_o + \frac{u_z^Q - u_z^P}{L_o} \quad (3.7)$$

avec φ_o la valeur de l'angle φ correspondant à $\mathbf{u}^P = \mathbf{u}^Q = \mathbf{0}$. La valeur courante de φ peut aussi être calculée par

$$\tan \varphi = \frac{z^Q - z^P}{x^Q - x^P} = \frac{L_o \sin \varphi_o + u_z^Q - u_z^P}{L_o \cos \varphi_o + u_x^Q - u_x^P} \quad (3.8)$$

On désigne par Σ_b la contrainte axiale sollicitant la barre PQ. Les contraintes principales et équivalente macroscopiques agissant sur la cellule sont données par

$$\Sigma_{xx} = \frac{\Sigma_b S_b \cos \varphi}{2\pi (B_o + u_x^P)(A_o + u_z^P)}, \quad \Sigma_{zz} = \frac{\Sigma_b S_b \sin \varphi}{\pi (B_o + u_x^P)^2} \quad (3.9)$$

$$\Sigma_{eq} = |\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}|$$

Moyennant une première approximation déduite de l'hypothèse d'invariance du volume global de la cellule au cours du chargement, il est possible d'établir une relation entre la triaxialité $\mathcal{T}$, l'angle φ et le déplacement vertical u_z^P du point P. En effet, par définition

$$\mathcal{T} = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\Sigma_{zz} + 2\Sigma_{xx}}{|\Sigma_{zz} - \Sigma_{xx}|} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 2\alpha}{|1 - \alpha|} \right) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\Sigma_{xx}}{\Sigma_{zz}} \quad (3.10)$$

La substitution de (3.9) dans l'expression de α conduit à

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{\tan \varphi} \frac{(B_o + u_x^P)}{(A_o + u_z^P)} = \frac{1}{2} \frac{L_o \cos \varphi_o + u_x^Q - u_x^P}{L_o \sin \varphi_o + u_z^Q - u_z^P} \frac{(B_o + u_x^P)}{(A_o + u_z^P)} \quad (3.11)$$

Par ailleurs, dans la circonstance où la matrice de la cellule est dense, KOPLIK et NEEDLEMAN [KN88] ont constaté que le volume global de celle-ci demeure constant tout au long du processus de son chargement. Admettons, en première approximation, la validité de cette observation pour une matrice poreuse au moins au début du chargement de la cellule. Dans cette circonstance, les composantes u_x^P et u_z^P vérifient la relation

$$B_o^2 A_o = (B_o + u_x^P)^2 (A_o + u_z^P) \quad (3.12)$$

qui permet d'exprimer explicitement u_x^P en fonction de u_z^P puisque nous avons

$$u_x^P = u_x^P(u_z^P) = B_o \left[\left(\frac{A_o}{A_o + u_z^P} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (3.13)$$

Le report de (3.12) dans (3.6) conduit à

$$\begin{cases} x^Q &= \frac{B_o \sqrt{A_o}}{(A_o + u_z^P)^{1/2}} + L \cos \varphi \\ x_2^Q &= (A_o + u_z^P) + L \sin \varphi \end{cases} \quad (3.14)$$

et par conséquent

$$\begin{cases} u_x^Q &= B_o \sqrt{\frac{A_o}{A_o + u_z^P}} + L \cos \varphi - (B_o + L_o \cos \varphi_o) \\ u_z^Q &= (A_o + u_z^P) + L \sin \varphi - (A_o + L_o \sin \varphi_o) \end{cases} \quad (3.15)$$

Au cours du chargement de la cellule, les composantes du déplacement du point P, la triaxialité $\mathcal{T}$ à travers le paramètre α et l'angle φ sont liés par la relation

$$\tan \varphi = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{B_o + u_x^P}{A_o + u_z^P} \right) = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{B_o \sqrt{A_o}}{(A_o + u_z^P)^{3/2}} \right) \quad (3.16)$$

Ainsi la valeur initiale φ_o est fixée par la triaxialité escomptée (paramètre α) et la géométrie du contour extérieur de la cellule (A_o et B_o) à travers la relation :

$$\tan \varphi_o = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{B_o}{A_o} \right) \quad (3.17)$$

Le tableau 3.1 donne les valeurs de φ_o associées à $\mathcal{T} = 1, 2$ et 3 dans le cas où $\lambda = A_o/B_o = 1$.

$\mathcal{T}$ α	1	2	3
$\cos \varphi_o$ $\sin \varphi_o$	0.4000 0.7809	0.6250 0.6247	0.72729 0.5665

TAB. 3.1 – Valeurs initiales de l'angle φ

3.3.2 Simulations successives

Première approximation : le volume global de la cellule demeure constant. Si tel est le cas, les relations (3.15) demeurent valides et peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} u_x^Q = B_o \left[\sqrt{\frac{A_o}{(A_o + u_z^P)}} - 1 \right] + (L \cos \varphi - L_o \cos \varphi_o) \\ u_z^Q = u_z^P + (L \sin \varphi - L_o \sin \varphi_o) \end{cases} \quad (3.18)$$

où φ et φ_o sont donnés par les relations (3.16) et (3.17). Le matériau élastique de la barre PQ est pris très rigide, aussi il est légitime de considérer que sa longueur reste approximativement constante, c'est-à-dire $L \approx L_o$.

Il est important de noter dès à présent que dans les relations 3.18, les quantités u_x^P et u_z^P ne représentent pas *stricto-sensu* les composantes usuelles du vecteur déplacement de l'extrémité **P** de la barre **PQ**. En fait, u_z^P est un *paramètre de chargement* dont l'utilité pratique est la détermination de la position à imposer à l'autre extrémité **P** de la barre.

Première amélioration de la première approximation : il va de soi qu'en raison de la porosité de la matrice du volume élémentaire, l'hypothèse de conservation du volume global de celui-ci n'est valide qu'en début de chargement. Cette hypothèse tombe en défaut pour les évolutions ultérieures pour lesquelles les déformations sont grandes. Une première amélioration de l'approximation peut être obtenue à partir du dépouillement du calcul issu de la première approximation qui permet d'avoir la dépendance de u_x^P en fonction de u_z^P plus proche de ce qu'il faut imposer :

$$\begin{cases} u_x^Q = u_x^P(u_z^P) + L_o(\cos \varphi - \cos \varphi_o) \\ u_z^Q = u_z^P + L_o(\sin \varphi - \sin \varphi_o) \end{cases} \quad (3.19)$$

La relation (3.17) devient

$$\tan \varphi = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{B_o + u_x^P(u_z^P)}{A_o + u_z^P} \right) \quad (3.20)$$

Ces améliorations successives doivent être répétées autant de fois que nécessaire pour avoir la triaxialité constante souhaitée.

Dans les relation (3.20), la composante u_x^P est une fonction de la composante u_z^P qui dépend elle même du temps. Cette dernière dépendance doit être suffisamment régulière pour atténuer les *effets dynamiques* indésirables.

3.3.3 Validation de la technique

La vérification de la pertinence de la technique proposée a été effectuée en faisant une série de calculs sur des cellules élémentaires de rayon initial $B_o = 1 \text{ mm}$ et de hauteur initiale $A_o = 1 \text{ mm}$ et dont le matériau constitutif obéit au critère de VON MISES. Le module de YOUNG du matériau est $E = 200 \text{ GPa}$, son coefficient de POISSON $\nu = 0,33$ et sa limite d'élasticité est $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$. Les résultats auxquels nous avons abouti ont été comparés à ceux obtenus en utilisant une approche implicite faisant usage de la méthode de RIKS¹⁸ pour les deux circonstances particulières que sont les situations où la matrice est écrouissable ($n = 0, 1$) et parfaitement plastique ($n = 0$) [OOS06, SOOB07]. Dans le premier cas, trois paramètres de forme ont été utilisés $W_0 = 1/6$, $W_0 = 1$ et $W_0 = 6$, la porosité

¹⁸Une description de deux variantes de la méthode de longueur d'arc (CRISFIELD et RIKS-RAMM) est donnée dans l'annexe A.

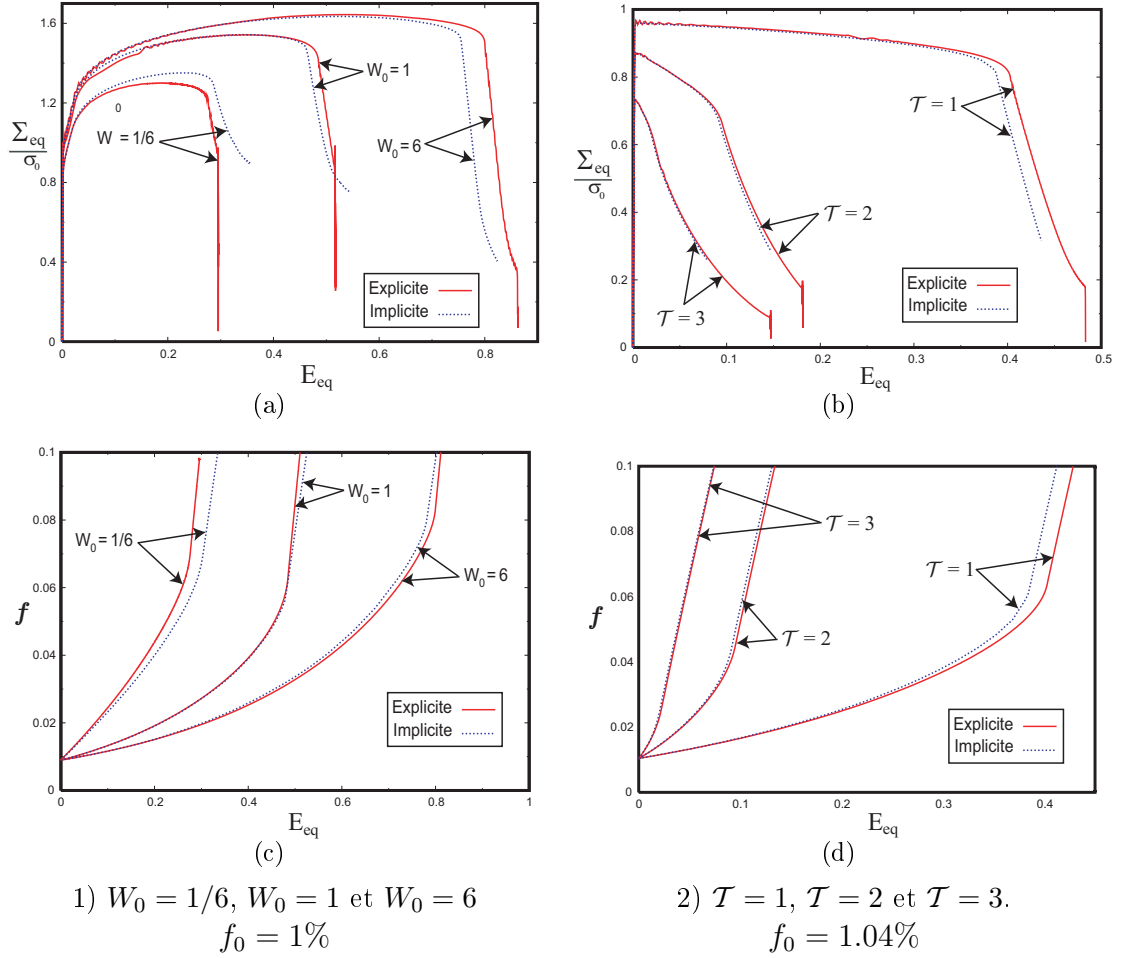


FIG. 3.3 – Comparaison des résultats des calculs de cellules implicites et explicites pour différents paramètres de forme W , de porosités f et de triaxialité $\mathcal{T}$.

initiale est $f_0 = 1\%$ et la triaxialité est égale à $\mathcal{T} = 1$. Dans le deuxième cas, le comportement de la matrice est supposé parfaitement plastique, les cellules sont sollicitées sous trois triaxialités différentes $\mathcal{T} = 1, \mathcal{T} = 2$ et $\mathcal{T} = 3$, les vides sont initialement sphériques ($W_0 = 1$) et la porosité initiale $f_0 = 1,04\%$.

Les graphes 3.3-a et 3.3-b donnent l'évolution de la contrainte équivalente normalisée Σ_{eq}/σ_0 ; les graphes 3.3-c et 3.3-d celle de la porosité f en fonction de la déformation équivalente E_{eq} pour les deux matériaux utilisés. Nous observons un bon accord entre les résultats obtenus avec les deux méthodes de calcul. Cependant, dans la situation où le matériau est écrouissable, un écart est observé lors de la prédiction de la contrainte de début de coalescence de la cellule ayant une cavité initialement allongée $W_0 = 6$. L'écart se réduit considérablement sur le graphe de variations de la porosité f correspondant (figure 3.3-c). Un léger écart apparaît lors du stage de coalescence de la cavité initialement aplatie $W_0 = 1/6$. En revanche, la phase de croissance est correctement prédite. Le début de coalescence présente un léger écart lors de la simulation sous une triaxialité $\mathcal{T} = 1$.

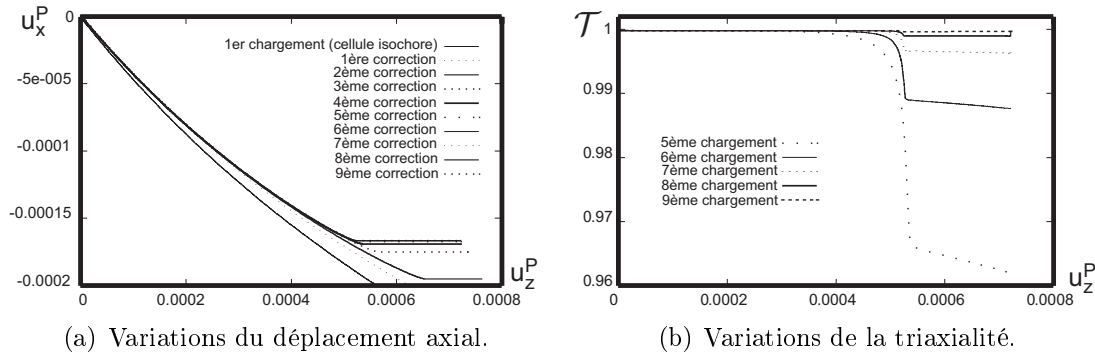


FIG. 3.4 – Amélioration des chargements successifs de la cellule et variations de triaxialités leurs correspondants.

La technique développée dans la présente section utilise des calculs successifs durant lesquels le chargement de la cellule est adapté à chaque calcul dans le but d'assurer une triaxialité constante.

Nous donnons sur la figure 3.4 l'évolution du chargement u_x^P et de la triaxialité $\mathcal{T}$ suivant les chargements consécutifs. Ces deux correspondent à la simulation de la réponse d'une cavité sphérique $W_0 = 1$ sous une triaxialité $\mathcal{T} = 1$. Nous observons que la valeur de la triaxialité se stabilise, calcul après calcul, à la valeur constante recherchée $\mathcal{T} = 1$. Dans le cas présent cette condition est satisfaite au bout du neuvième calcul.

3.4 Validation de l'implémentation du modèle GTN

Une comparaison des résultats obtenus avec le modèle GTN que nous avons implémenté dans Abaqus en utilisant la subroutine Vumat, noté dans la suite GTN-Vumat, avec ceux calculés avec le GTN disponible dans Abaqus/Explicit, noté GTN-Abaqus, est donnée ci-après. Nous rappelons que l'implémentation GTN-Vumat permet de prédire la coalescence soit en introduisant une valeur de la porosité critique f_c comme c'est le cas avec le GTN-Abaqus, soit en utilisant le critère de THOMASON. Cette deuxième option n'est pas disponible actuellement dans Abaqus. Nous choisissons de simuler la réponse d'un élément axisymétrique à quatre nœuds avec intégration réduite (CAXR). La base de l'élément est bloquée en déplacement dans la direction axiale alors que le déplacement de la partie située au niveau de l'axe de symétrie l'est dans le sens radial. Afin de maintenir une triaxialité constante, le chargement est appliqué suivant la procédure décrite dans la section 3.3. Deux matériaux constitutifs de la matrice ont été choisis, le premier est élastoplastique écrouissable de coefficient d'écrouissage $n = 0,1$ et le deuxième est élastique parfaitement plastique ($n = 0$). Le module de YOUNG, le

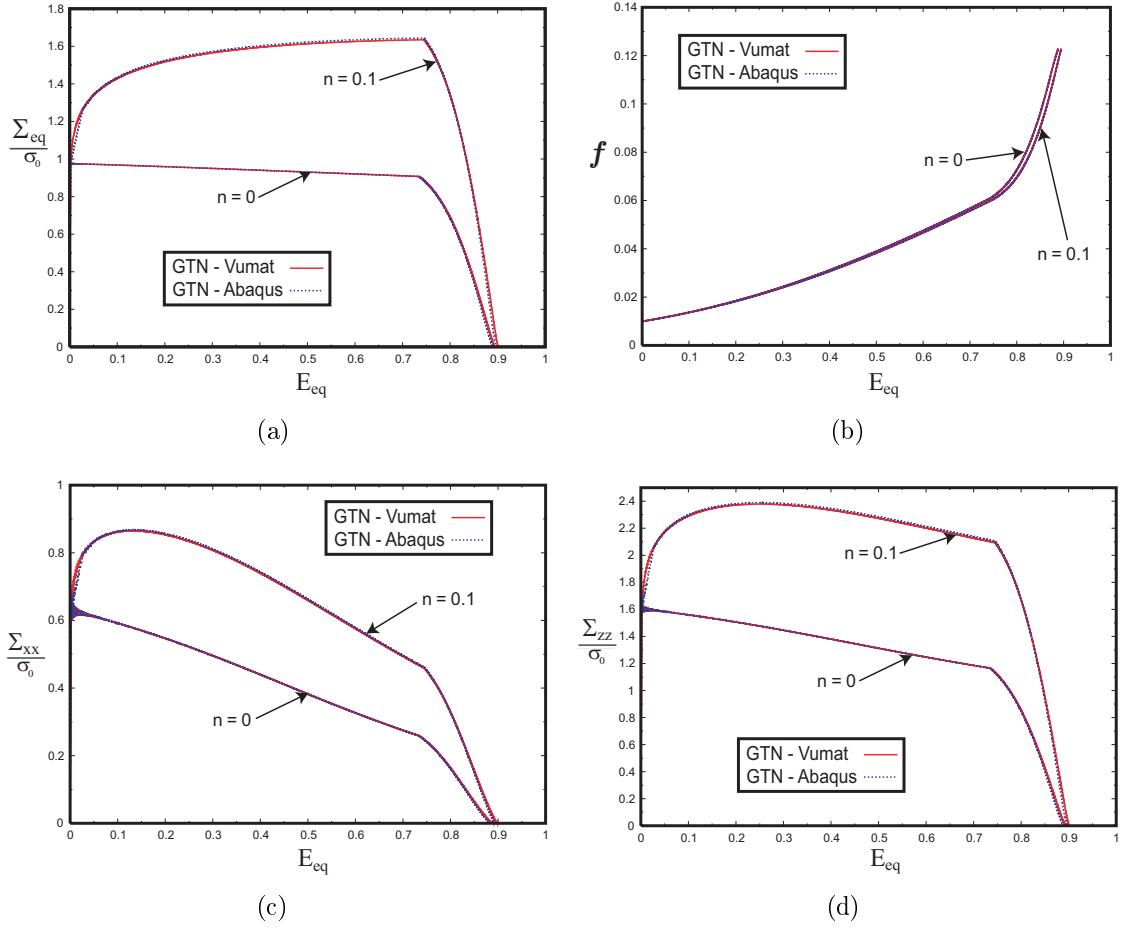


FIG. 3.5 – Simulations de la réponse d'un élément axisymétrique chargé en traction axiale. Comparaison des résultats obtenus avec la routine Vumat (GTN-Vumat) et ceux obtenus avec Abaqus (GTN-Abaqus).

coefficient de POISSON et la limite d'élasticité des deux matériaux sont respectivement $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$ et $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$. Les mêmes paramètres de coalescence $f_c = 0,06$ et $\delta = 13,5$ et la même porosité initiale $f_0 = 1\%$ sont utilisés pour toutes les simulations.

Les graphes de la figure 3.5 donnent l'évolution de la contrainte équivalente Σ_{eq} , des contraintes axiale Σ_{zz} et radiale Σ_{xx} normalisées par σ_0 et de la porosité f en fonction de la déformation équivalente E_{eq} obtenues avec le GTN-Abaqus et le GTN-Vumat. Nous observons sur les quatre graphes une excellente correspondance des résultats calculés dans les deux situations d'un matériau parfaitement plastique et écouissable. Ceci permet de valider notre implémentation du modèle GTN. Dans le cas du matériau écouissable les figures 3.5-a et 3.5-c-3.5-d montrent que les contraintes ont tendance à croître sous l'effet du durcissement de la matrice alors que la porosité n'évolue que lentement (figure 3.5 -b). Cette phase correspond à la croissance des cavités. Pendant le stage de coalescence nous observons une évolution rapide de la porosité qui, à partir de la valeur critique f_c , accélère

l'adoucissement du matériau et provoque une perte progressive de sa rigidité jusqu'à la rupture finale de l'élément de matière. Nous retrouvons approximativement les mêmes étapes dans le cas d'une matrice parfaitement plastique, à la différence que les courbes représentant l'évolution des contraintes n'augmentent pas durant la phase de croissance. Cela est dû au fait que la matrice ne fait que s'adoucir en raison de la croissance du volume des vides alors qu'aucun durcissement n'est possible dans ce cas-ci. Notons enfin qu'un des avantages de la simulation avec un schéma explicite est que nous pouvons prédire le comportement de l'élément de matière jusqu'à sa rupture totale, c'est-à-dire jusqu'à ce que le matériau ne puisse plus supporter de charges ($\Sigma = 0$).

3.5 Validation de l'implémentation du modèle GLD

Nous allons maintenant tenter une validation de notre implémentation du modèle GLD en confrontant ses prédictions à des résultats de calculs de cellules. Nous comparons d'abord les résultats des simulations effectuées avec le modèle GLD avec ceux obtenus par PARDOEN et HUTCHINSON [PH00]. Nous utilisons ensuite les résultats des calculs de cellules que nous avons obtenus [SOO06]. PARDOEN et HUTCHINSON [PH00] ont utilisé un matériau élastoplastique écrouissable dont la loi est de type puissance :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \left(1 + \frac{E\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_0}\right)^n \quad (3.21)$$

où $n = 0, 1$ est le coefficient d'écrouissage et $\sigma_0 = 400\text{MPa}$ la limite d'élasticité du matériau. Trois paramètres de forme initiaux $W_0 = 6, 1$ et $1/6$ ont été usités lors des simulations. Les cellules soumises à un chargement sous une triaxialité constante $\mathcal{T} = 1$ ont une porosité initiale $f_0 = 1\%$. Les valeurs de la porosité critiques f_c et du paramètre δ utilisés pour chacun des paramètres W_0 sont données dans le tableau 3.2

	$W_0 = 1/6$	$W_0 = 1$	$W_0 = 6$
f_c	6,58	6,19	9,00
δ	13,6	14,2	13,5

TAB. 3.2 – Paramètres de coalescence utilisés lors de la simulation [Ben02].

Les figures 3.6-a-3.6-c représentent, respectivement, l'évolution de la contrainte axiale normalisée Σ_{zz} , de la porosité f et du paramètre de forme S en fonction de la composante axiale de la déformation E_{zz} . Nous observons sur ces trois courbes

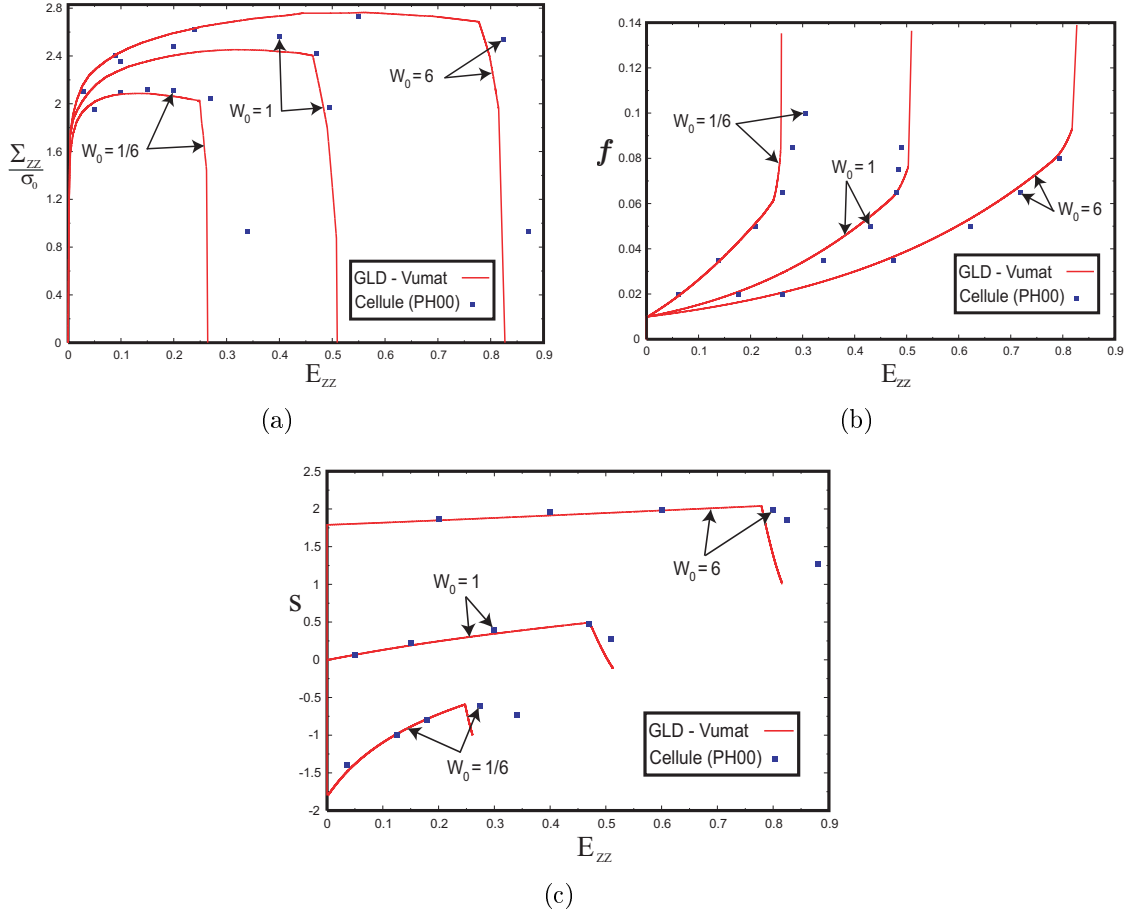


FIG. 3.6 – Comparaison des résultats de calculs en utilisant le modèle GLD et ceux obtenus sur des cellules élémentaires pour une porosité initiale $f_0 = 1\%$ et une triaxialité $\mathcal{T} = 1$ [PH00].

que le modèle GLD prédit correctement l'évolution de l'état de la cellule pour les trois paramètres de forme.

Dans la circonstance d'une cavité initialement allongée ($W_0 = 6$), la phase de croissance est bien décrite par le modèle GLD alors qu'un léger décalage apparaît pendant la coalescence. Nous observons la même situation dans le cas des courbes correspondant à une cavité initialement aplatie ($W_0 = 1/6$). Dans la situation d'une cavité sphérique ($W_0 = 0$), un léger décalage entre la courbe prédite par le GLD et celle fournie par les calculs de cellules est observé durant la période de croissance. Alors que le stage de coalescence est bien reproduit. La figure 3.6-a montre qu'un calcul explicite permet de modéliser le comportement du matériau jusqu'à sa rupture finale ($\Sigma = \mathbf{0}$) contrairement aux calculs de cellules effectués en implicite qui s'arrêtent bien avant.

Comme attendu, nous observons sur la figure 3.6-b que la porosité augmente modérément pendant la phase de croissance, puis son évolution s'accélère brusquement pendant la période de coalescence en raison de la jonction des cavités voisines

qui provoque l'augmentation rapide du volume total des vides [KN88, BSRA89, BSH95]. Les courbes prédites par le modèle GLD et celles obtenues à partir des calculs de cellules dans les deux cas d'une cavité initialement sphérique ($W_0 = 1$) et allongée ($W_0 = 6$) sont presque confondues. Cependant, dans le cas d'un vide aplati ($W_0 = 1/6$) un léger décalage est observé durant la coalescence.

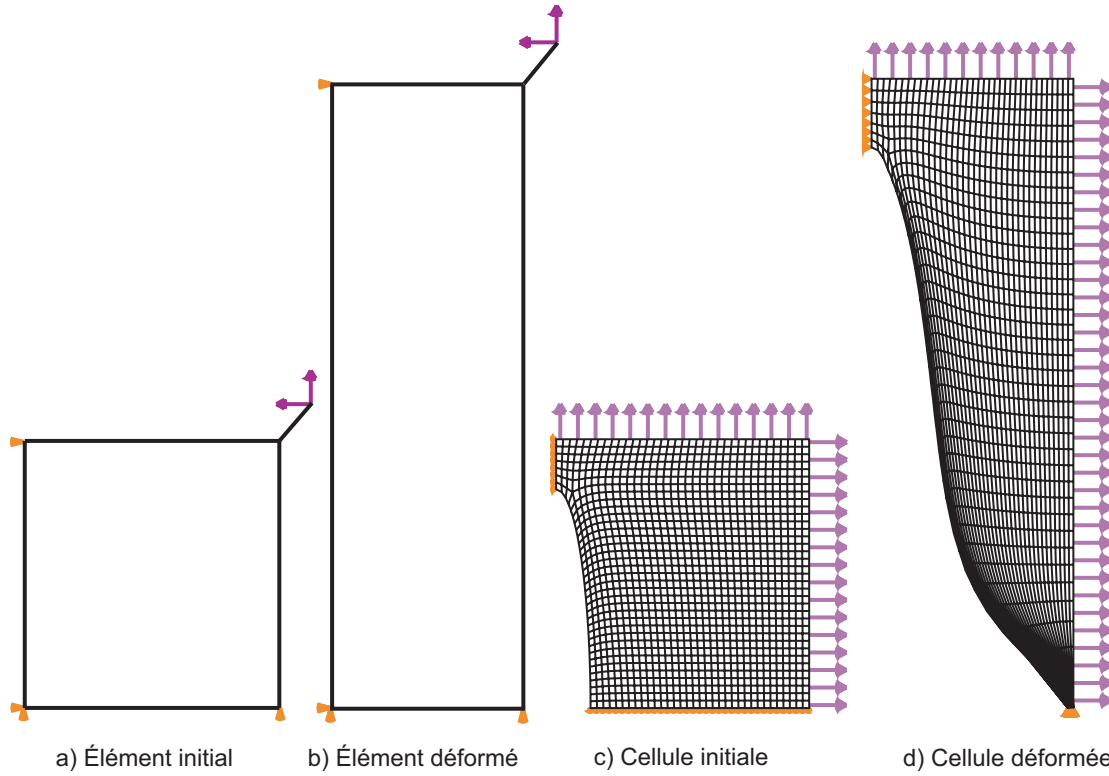


FIG. 3.7 – Maillages initial et final de l'élément axisymétrique et de la cellule élémentaire correspondant à une cavité initialement allongée $W_0 = 6$.

Les courbes de la figure 3.6-c indiquent que le paramètre de forme S augmente durant la phase de croissance, ce qui implique que la cavité s'allonge dans le sens axial qui est la direction de chargement. Pendant la période de coalescence, le paramètre de forme S commence à diminuer indiquant que la cavité commence à s'aplatir. En fait cet aplatissement doit être interprété avec précaution car ce n'est pas la cavité qui commence à se refermer dans la direction axiale, mais le flan latéral de celle-ci qui progresse horizontalement plus au moins vite vers la face extérieure du V.E.R. rejoignant ainsi la cavité voisine. C'est la coalescence.

Nous présentons dans ce qui suit une comparaison des résultats obtenus en utilisant le modèle GLD avec ceux des calculs de cellules que nous avons effectué [SOOB07]. Le matériau constitutif utilisé pour effectuer les simulations est un matériau élastoplastique dont l'écroutissage isotrope est gouverné par

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \right)^n \quad (3.22)$$

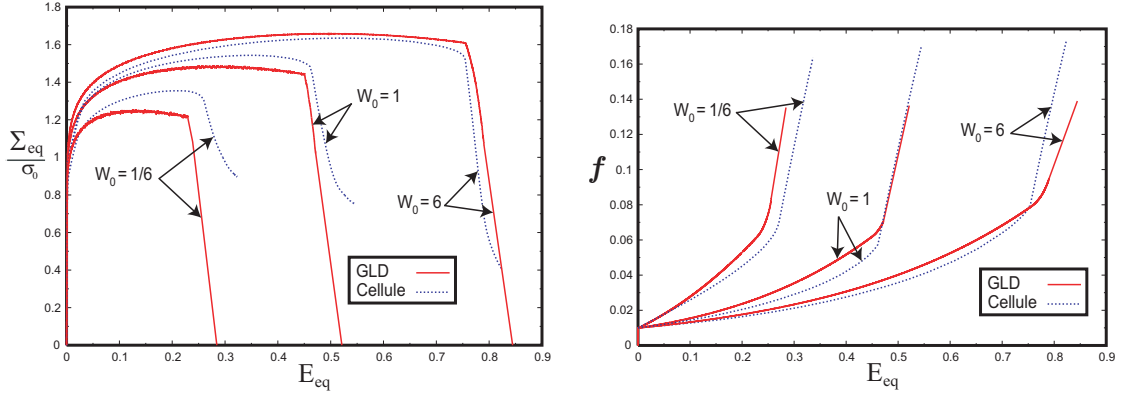


FIG. 3.8 – Comparaison des résultats obtenus en utilisant le modèle GLD et ceux obtenus à partir des calculs de cellules pour une porosité initiale $f_0 = 1\%$ et une triaxialité $\mathcal{T} = 1$ [SOO06].

où $n = 0.1$, $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$ et $\varepsilon_0 = \sigma_0/E = 0.002$ sont respectivement le coefficient d'écrouissage, la limite d'élasticité et la déformation initiale lui correspondant. Les maillages initial et déformé de la cellule dans le cas d'une cavité initialement allongée ($W_0 = 6$) sont représentés sur les figures 3.7-c et 3.7-d.

Les figures 3.8-a et 3.8 -b donnent les variations de la contrainte équivalente normalisée Σ_{eq}/σ_0 et de la porosité f en fonction de la déformation équivalente E_{eq} . Ces deux graphes font apparaître une bonne correspondance entre les résultats obtenus en employant le modèle GLD et ceux prédits par les calculs de cellules. La figure 3.8-a montre que dans le cas d'un vide initialement aplati ($W_0 = 1/6$) un écart est observé à l'approche de la coalescence. Dans les deux autres situations ($W_0 = 1$ et $W_0 = 6$), les phases de croissance et de coalescence sont bien reproduites. Nous retrouvons sur la figure 3.8-b le même écart entre les courbes représentant l'évolution de la porosité f dans le cas des cavités initialement aplaties ($W_0 = 1/6$). L'écart se réduit considérablement dans les autres circonstances ($W_0 = 1$ et $W_0 = 6$).

3.6 Influence de la température sur la réponse d'un élément axisymétrique

Nous présentons dans ce qui suit une étude de l'effet de la prise en compte de l'échauffement thermique d'origine mécanique sur la rupture d'un élément axisymétrique. Nous comparons les résultats obtenus avec le modèle GLD non couplé à la température que nous notons dans cette section "GLD-Isotherme", avec ceux obtenus avec le modèle GLD couplé à la température dans les conditions d'un échauffement adiabatique, noté "GLD-Adiabatique" et à ceux calculés à partir de la loi de comportement thermomécanique non adiabatique "GLD-Non adiab.".

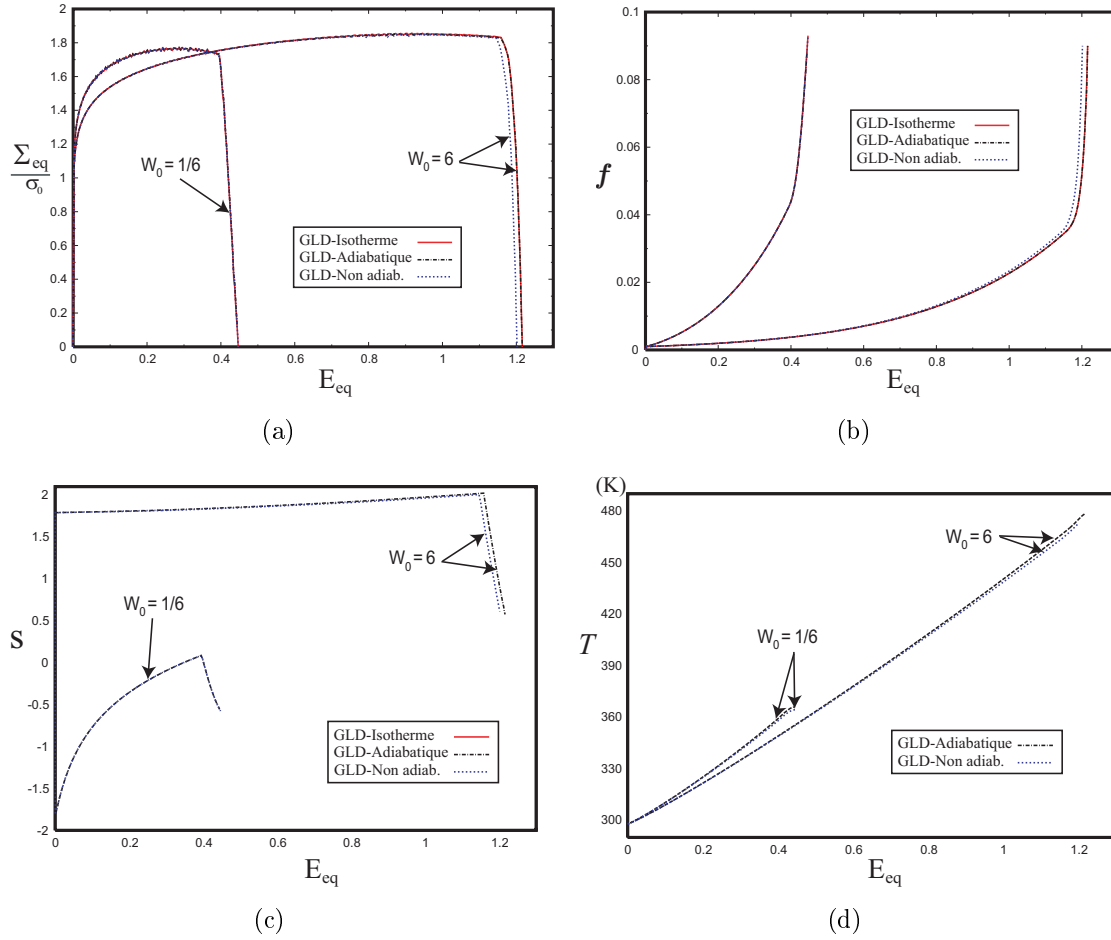


FIG. 3.9 – Effet de l'échauffement thermique sur la rupture d'un élément axisymétrique (CAXR ou CAXRT). Comparaison des résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab." pour une porosité initiale $f_0 = 0.1\%$ et une triaxialité $\mathcal{T} = 1$.

Le matériau constitutif de la matrice est élastoplastique écrouissable de coefficient d'écrouissage $n = 0,1$ et de limite d'élasticité $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$. Deux paramètres de forme initiaux $W_0 = 1/6$, et 6 ont été utilisés lors des simulations. Les cellules, soumises à un chargement sous une triaxialité constante $\mathcal{T} = 1$, ont une porosité initiale $f_0 = 0,1\%$. Les valeurs de la porosité critiques f_c et du paramètre δ utilisés pour chacun des paramètres W_0 sont données dans le tableau 3.3.

La masse volumique, le module YOUNG et le coefficient de POISSON usités dans cette étude sont respectivement $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $E = 200 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,33$. Les caractéristiques thermiques du matériau sont données dans le tableau 3.4.

	$W_0 = 1/6$	$W_0 = 6$
$f_c (\%)$	4, 27	3, 52
δ	13, 6	13, 5

TAB. 3.3 – Paramètres de coalescence utilisés lors de la simulation [Ben02]

$C_v (J/kgK)$	$\mathcal{K} (W/mK)$	$\alpha (K^{-1})$	ξ
586	52	$1,2 \cdot 10^{-5}$	0, 9

TAB. 3.4 – Caractéristiques thermiques du matériau

Les figures 3.9-a-3.9-d représentent une comparaison des évolutions de la contrainte équivalente normalisée Σ_{eq}/σ_0 , de la porosité f , du paramètre de forme S et de la température T en fonction de la déformation équivalente E_{eq} . Les phases de croissance et de coalescence sont bien prédites par les trois modèles dans le cas d'une cavité initialement aplatie $W_0 = 1/6$. Dans la situation d'un vide allongé $W_0 = 6$, les trois modèles prédisent de la même manière la croissance. Cependant, dans la circonstance d'une simulation thermomécanique non adiabatique le début de la coalescence survient pour une déformation équivalente E_{eq} moindre. Ceci peut s'expliquer en raison de l'échauffement thermique non adiabatique généré dans le matériau. Celui-ci provoque nécessairement un adoucissement supplémentaire du matériau. Et puisque l'amorçage de la coalescence est contrôlé par la porosité critique f_c (cette dernière garde la même valeur pendant les trois calculs), il s'ensuit que la porosité atteint sa valeurs critique, dans ce cas, avant les deux autres.

Les variations du paramètre de forme S sont bien décrites par les trois modèles ; exception faite de la coalescence de la cavité allongée $W_0 = 6$ simulée en utilisant le modèle "GLD-Non adiab.". Les températures prédites par le modèle "GLD-Adiabatique" sont plus élevées que celles calculées dans des conditions d'un échauffement non adiabatique dans la circonstance d'un vide allongé, à contrario de l'autre forme où les températures sont du même ordre de grandeur.

3.7 Striction d'une barre cylindrique lisse

Le comportement à rupture d'une barre cylindrique lisse soumise à une traction est l'objet de cette section. Cet exemple est choisi en raison des nombreuses études dont il a fait l'objet [NT84, TN84, Ara87, Tho90]. Nous comparons dans ce qui suit les résultats numériques prédits par les modèles GTN et GLD.

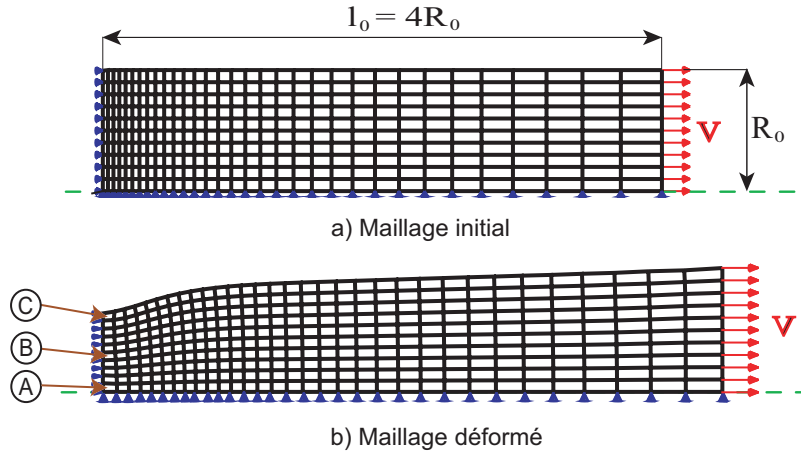


FIG. 3.10 – Maillages initial et déformé du quart de l'éprouvette axisymétrique lisse et conditions aux limites et de chargement utilisés lors de la simulation de l'essai de traction.

Il a été trouvé expérimentalement que la rupture de ce type de barres se produit en son milieu, selon le mode dit rupture "en tronc de cône" [TN84, Tho90]. En effet, en analysant des essais de traction interrompus d'éprouvettes cylindriques lisses en acier faiblement allié, THOMASON [Tho90] a montré que la fissure s'amorce d'abord au centre de celle-ci au niveau de l'axe de révolution, puis se propage horizontalement dans le plan perpendiculaire à l'axe de chargement. En se rapprochant de la surface extérieure, la fissure dévie d'un angle d'environ 45° par rapport à la direction de propagation, formant ainsi un tronc de cône (cup-cone), en raison de la symétrie de révolution de l'éprouvette.

3.7.1 Description des conditions de la simulation

Le rapport hauteur/rayon de la barre cylindrique est pris égal à 4 : $l_0/R_0 = 4$. Trois-cent-vingt (320) éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR) sont utilisés pour le maillage du quart de l'éprouvette. Les maillages initial et déformé ainsi que les conditions de chargement sont indiqués sur la figure 3.10. Le déplacement horizontal de la partie gauche de l'éprouvette au niveau de l'axe de symétrie est bloqué afin de respecter les conditions de symétrie.

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier courant avec un rapport $E/\sigma_0 = 500$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,33$. L'écrouissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi puissance avec un coefficient d'écrouissage $n = 0.1$. Le matériau est supposé initialement dense ($f_0 = 0$). Nous utilisons les mêmes paramètres de coalescence et de nucléation que ceux utilisés par TVERGAARD et NEEDLEMAN [TN84] : $f_c = 15\%$, $f_F = 25\%$ pour décrire la coalescence et $\varepsilon_N = 0,3$, $S_N = 0,1$ et $f_N = 0,04$ pour décrire la phase de nucléation de nouvelles cavités (Tableau 3.5).

	f_0 (%)	S_0	f_c (%)	f_F (%)	f_N (%)	ε_N	S_N	q_i
GLD	0	0	15	25	4	0,3	0,1	$q_0 = 1,6$
GTN	0	—	15	25	4	0,3	0,1	$q_1 = 1,5, q_2 = 1,1$

TAB. 3.5 – Valeurs des principaux paramètres utilisés lors de la simulation de l’essai de traction d’une barre cylindrique lisse.

3.7.2 Discussion des résultats

L’évolution de la contrainte nominale $F/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ en fonction de la déformation nominale u/l_0 et de la réduction de rayon $\Delta R/R_0$ pour les deux modèles de comportement GTN et GLD est représentée sur la figure 3.11. Les courbes obtenues par

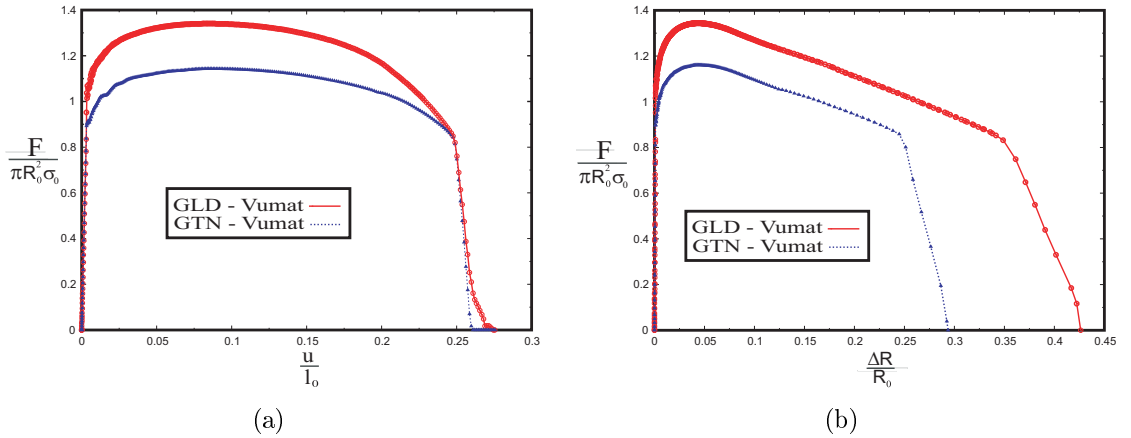


FIG. 3.11 – Évolution de la contrainte nominale $F/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ en fonction : a) de la déformation nominale u/l_0 , b) de la réduction de rayon $\Delta R/R_0$ de l’éprouvette

les deux modèles présentent les mêmes allures. La contrainte nominale $F/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ commence d’abord par augmenter jusqu’à atteindre un maximum puis la courbe se redresse et amorce une descente à cause de la diminution de la section au niveau du col de la barre. Cette chute s’accroît à la fin de l’essai en raison de la coalescence de certaines cavités au niveau du col de la barre. La force maximale atteinte correspond au début de la striction [TN84]. Dans le cas d’une simulation avec le modèle GLD, la force maximale est égale à $F_{max}^{GLD} = 1,344\pi\sigma_0 R_0^2$ alors que celle prédite par GTN est $F_{max}^{GTN} = 1,161\pi\sigma_0 R_0^2$. Les deux maxima sont obtenus pour un même allongement de la barre $u_{striction} = 0,0847 l_0$ et pour la même réduction du rayon $\Delta R_{striction} = 0,0433 R_0$. Les valeurs particulières relevées sur les deux graphes sont résumées dans le tableau 3.6.

	$\frac{F_{max}}{\pi\sigma_0 R_0^2}$	$\frac{u_{striction}}{l_0}$	$\frac{\Delta R_{striction}}{R_0}$	$\frac{u_{rupture}}{l_0}$	$\frac{\Delta R_{rupture}}{R_0}$
GLD	1,344	0,0847	0,0433	0,275	0,426
GTN	1,161	0,0847	0,0433	0,261	0,297

TAB. 3.6 – Principaux résultats de l'essai de traction d'une barre cylindrique lisse.

où $u_{rupture}$ et $\Delta R_{rupture}$ sont respectivement l'allongement et la réduction de rayon de la barre au moment de la rupture.

Une explication qualitative de cet écart a été donnée par ARAVAS et PONTE CASTAÑEDA [APC04] lors de la simulation de cet essai en utilisant le modèle proposé par KAILASAM et PONTE CASTAÑEDA [PCZ94]. Nous proposons de l'étendre au cas du modèle GLD. Pour cela nous représentons sur la figure 3.12 l'évolution de la contrainte équivalente de VON MISES Σ_{eq}/σ_0 , de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$, de la porosité f et du paramètre de forme S en fonction de la déformation nominale u/l_0 en trois points (A), (B) et (C) de la barre situés au niveau du col, comme indiqué sur la figure 3.10. L'intensité de la contrainte nominale dépend de l'aire de la section nette perpendiculaire au chargement au niveau du col qui supporte la charge. Cette surface diminue lorsque l'aire totale de la section de la barre au niveau du col diminue et/ou quand celle des vides situés dans le plan supportant la charge augmente. Comme nous l'avons mentionné précédemment la section de la barre pour laquelle le décalage entre la force maximale prédite par les modèles GLD et GTN est observé est la même et correspond à une réduction de rayon $\Delta R/R_0 = 0,0433$. Par conséquent, la différence de l'intensité de la force de chargement ne peut se justifier que par le deuxième point, c'est-à-dire la surface qu'occupent les vides au niveau du col de la barre.

Nous allons étudier plus en détails ce deuxième point en nous intéressant à l'évolution de la microstructure du matériau de la barre (porosité f et paramètre de forme S) au niveau du col.

a) L'évolution de la porosité f en fonction de la déformation nominale u/l_0 est représentée sur la figure 3.12-c. Nous observons que les niveaux de porosité prédits par les modèles GTN et GLD sont pratiquement les mêmes pour les trois éléments localisés au col de la barre. Ces courbes se confondent presque au moins jusqu'à la déformation nominale $u/l_0 = 0,0847$ qui correspond à la déformation de début de striction.

b) L'évolution du paramètre de forme S en fonction de la déformation nominale u/l_0 est représentée sur la figure 3.12 -d. Dans le cas du modèle GTN, les vides ont une forme sphérique qui ne change au cours du chargement ($S = 0$). Ils ne sont représentés qu'à titre de comparaison. Nous observons sur la figure 3.12-d que les vides ont tendance à s'allonger dans la

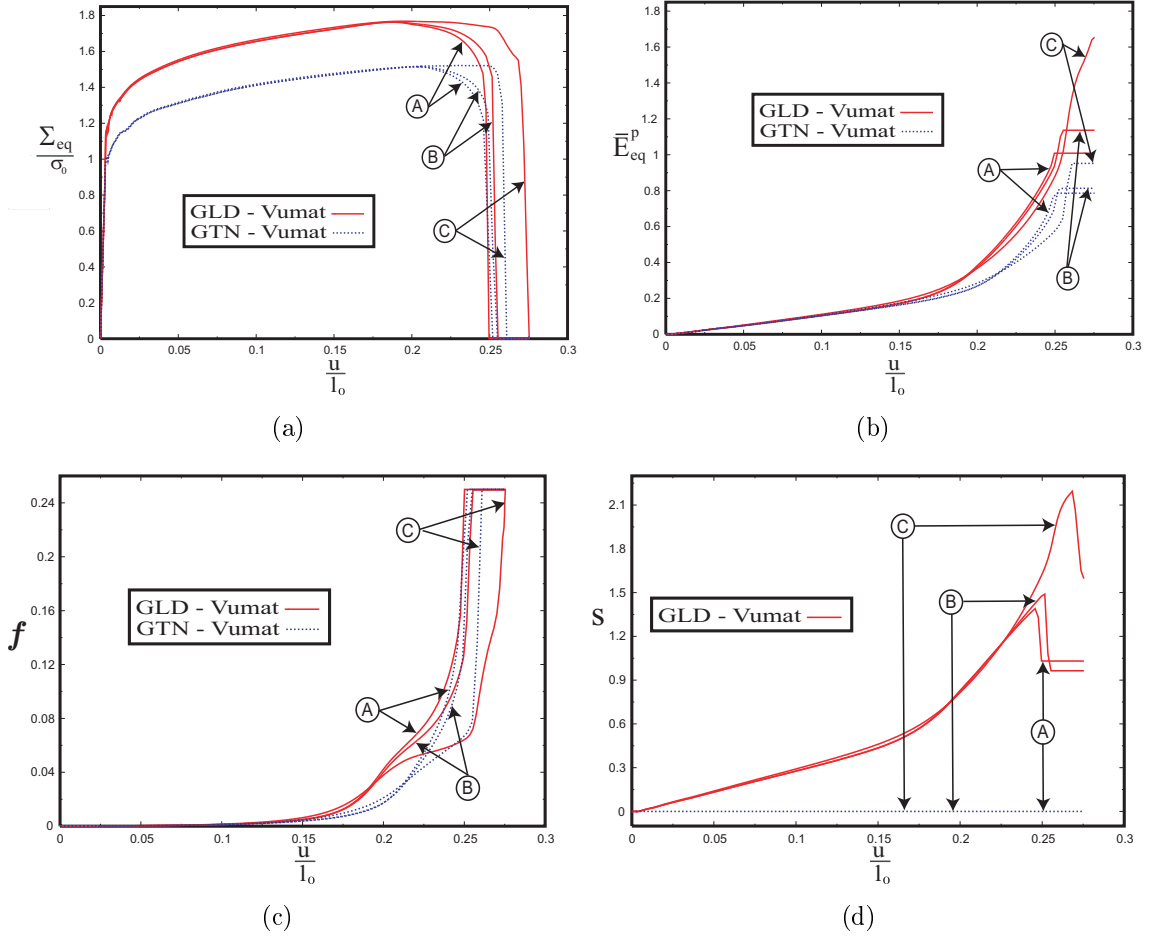
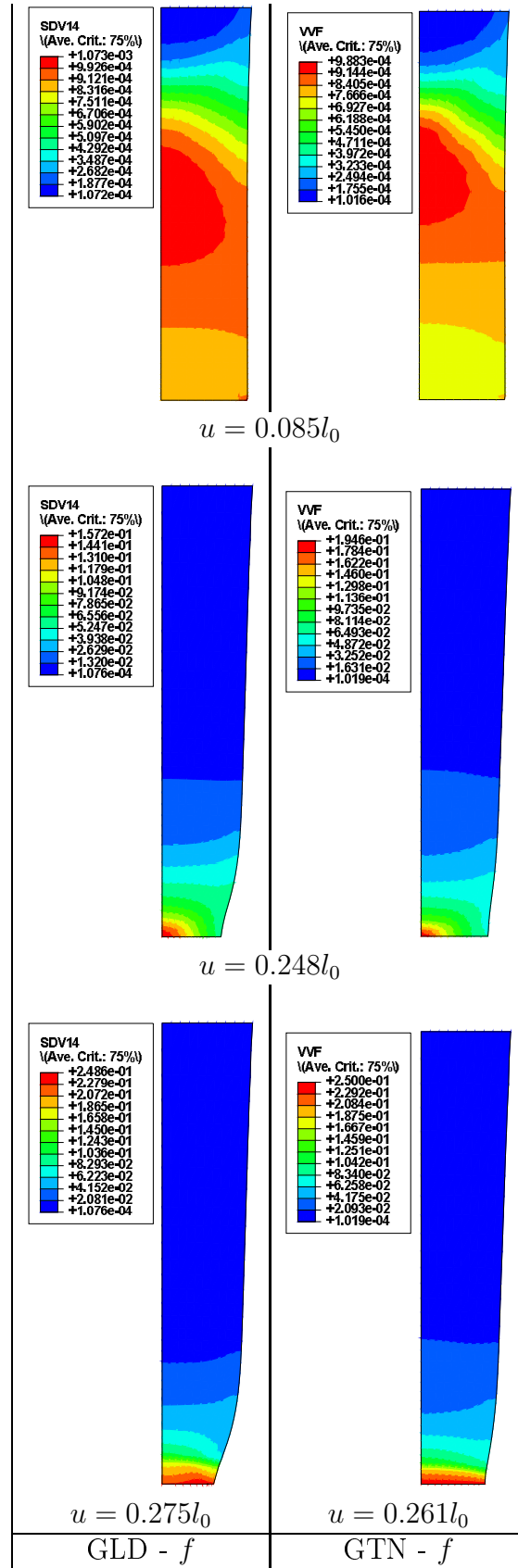


FIG. 3.12 – Évolution des états mécanique et microstructural de la barre lisse au niveau du col.

direction du chargement puisque le paramètre de forme S augmente. Il s'en suit que pour une même porosité, la surface occupée par les vides dans le plan de la section du col est plus petite dans le cas du modèle GLD où les cavités ont changé de forme en passant d'une forme initiale sphérique à une forme allongée.

Ainsi pour une même fraction volumique de vides, comme c'est le cas au moins jusqu'à la déformation à striction, la surface des vides se trouvant dans la section du col supportant le chargement est plus petite dans le cas du modèle GLD comparativement au modèle GTN. En effet, lors de la simulation avec ce dernier modèle l'augmentation de la porosité se fait par augmentation du diamètre des vides. Ce qui explique qualitativement la différence d'intensité de la force maximale prédite par les deux modèles.

Nous représentons sur les figures 3.13 et 3.14 la distribution de la porosité f et de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$ prédites par les modèles GTN et GLD ainsi que celle du paramètre de forme S décrit par le GLD à trois instants repré-

FIG. 3.13 – Isovaleurs de la porosité f à trois instants différents du chargement.

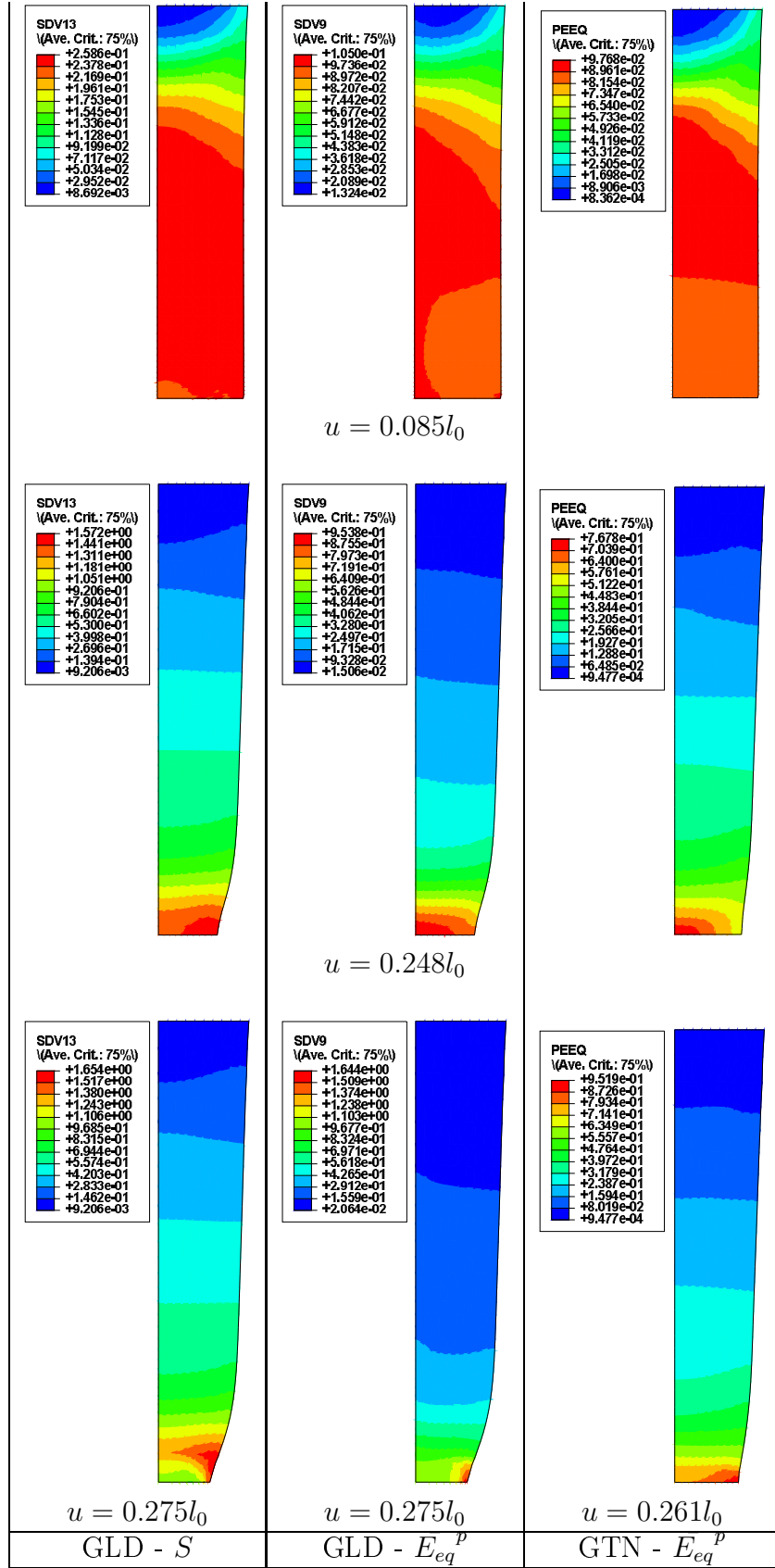


FIG. 3.14 – Isovaleurs de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$ et du paramètre de forme S à trois instants différents du chargement.

sentatifs différents. Le premier correspond au début de la striction ($u/l_0 = 0,085$), le deuxième à la coalescence du premier élément ($u/l_0 = 0,248$) et enfin le dernier est le moment de la rupture totale de la barre ($u/l_0 = 0,275$ dans le cas du GLD et $u/l_0 = 0,261$ dans le cas du modèle GTN). Au début de la striction, la porosité f se localise au milieu du quart de la barre modélisé du côté de l'axe de symétrie. À ce moment, la déformation plastique cumulée se concentre aux mêmes endroits que la porosité dans le cas du modèle GTN, alors que le GLD décrit une zone de concentration plus large. Les cavités se trouvant sur cette portion de la barre prennent des formes allongées ($S > 0$).

Sur les figures correspondant au début de la phase de coalescence ($u/l_0 = 0,248$) nous observons que la porosité se redistribue pour se concentrer au niveau du col, plus précisément au centre de l'éprouvette du côté de l'axe de symétrie, alors que les zones supérieures semblent avoir cessé de s'endommager. Les cavités continuent de s'allonger dans le sens du chargement, cette élongation est prononcée au niveau du col. En bon accord avec les résultats expérimentaux, nous observons que la rupture s'amorce d'abord au centre de l'éprouvette puis se propage vers la surface extérieure de la barre.

3.8 Rupture d'une éprouvette axisymétrique entaillée

Les éprouvettes axisymétriques entaillées sont couramment utilisées lors de l'étude la rupture ductile des matériaux [NT85, BBP04a, BBP04b, MDM⁺06]. Nous présentons dans ce qui suit les résultats obtenus lors de la simulation de la rupture de l'éprouvette AER_4 décrite dans la section 1.3.2. Dans le but de mettre en évidence l'effet de l'échauffement thermique au cours de cet essai, nous comparons les résultats prédits par les modèles GLD non couplé à la température que nous notons dans cette section "GLD-Isotherme", GLD couplé à la température dans des conditions adiabatiques noté "GLD-Adiabatique" et le modèle GLD couplé à la température dans les conditions d'un échauffement non adiabatique "GLD-Non adiab.".

3.8.1 Description des conditions de la simulation

La barre a une longueur initiale de $l_b = 18\text{ mm}$ et un rayon initial de $R_b = 9\text{ mm}$. Le rayon de l'entaille est $r = 4\text{ mm}$. Le maillage du quart de l'éprouvette est composé de six-cent-quatre-vingt (680) éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR ou CAXRT). Les maillages initial et déformé ainsi que les conditions aux limites et de chargement sont indiqués sur la figure 3.15. Le

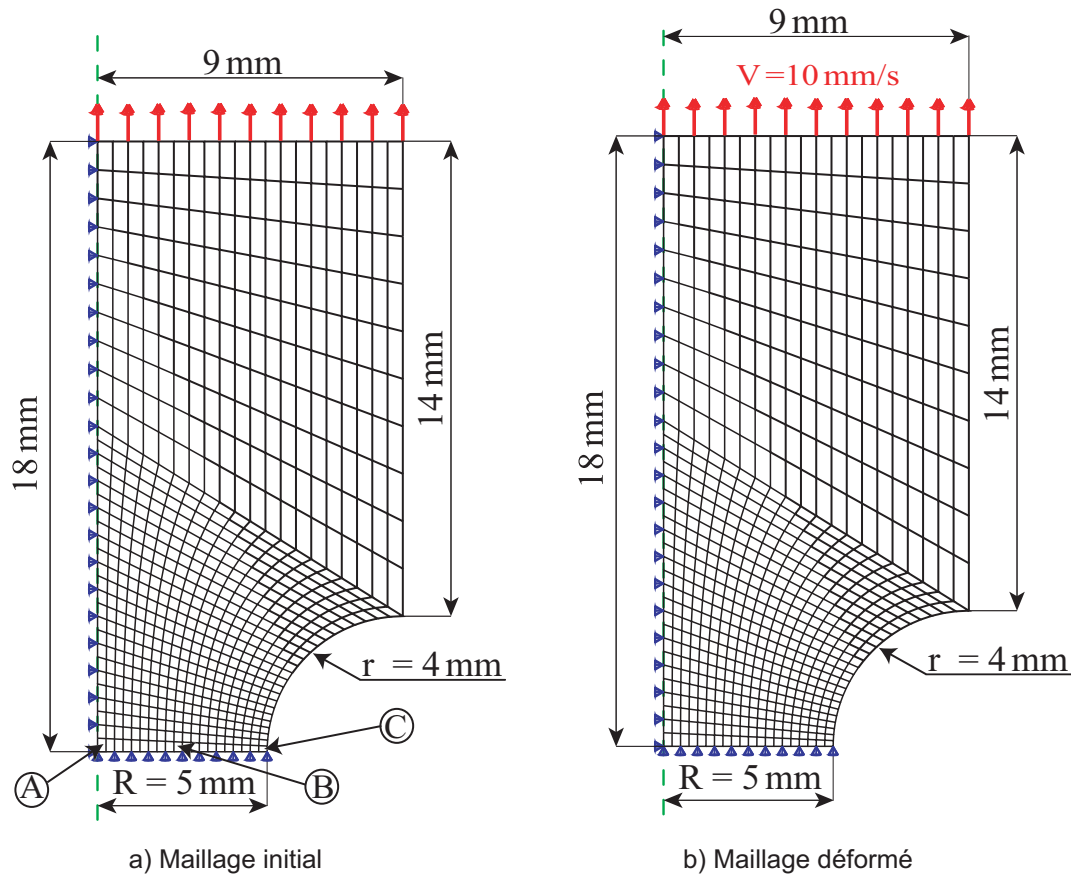


FIG. 3.15 – Maillages initial et déformé du quart de l'éprouvette axisymétrique entaillée et conditions aux limites et de chargement utilisés lors de la simulation de cet essai.

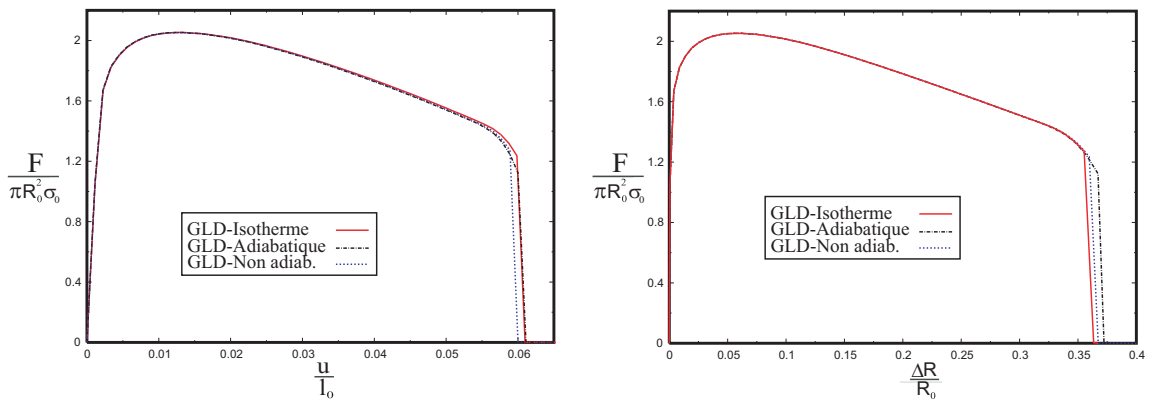


FIG. 3.16 – Effet de la température sur la rupture d'une éprouvette AER_4 . Comparaison des résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.".

déplacement horizontal de la partie gauche de l'éprouvette au niveau de l'axe de symétrie est bloqué afin de respecter les conditions de symétrie.

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier ayant une masse volumique $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, un module de YOUNG $E = 210 \text{ GPa}$ et un coefficient de POISSON $\nu = 0,33$. L'écrouissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi puissance avec un exposant d'écrouissage $n = 0,1$ et une limite d'élasticité $\sigma_0 = 400 \text{ MPa}$. Les caractéristiques thermiques ainsi que l'état de la microstructure initial du matériau sont donnés dans le tableau 3.7.

$f_0 (\%)$	S_0	λ	$C_v (J/kgK)$	$\mathcal{K} (W/mK)$	$\alpha (K^{-1})$	ξ	q_i
0,075	0,693	1,5	586	124	$1,2 \cdot 10^{-5}$	0,9	$q_0 = 1,6$

TAB. 3.7 – Valeurs des principaux paramètres utilisés lors de la simulation de l'essai de traction

3.8.2 Discussion des résultats

L'évolution de la contrainte nominale $F/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ en fonction de la déformation nominale u/l_0 et de la réduction de rayon $\Delta R/R_0$ au niveau de l'entaille est donnée sur la figure 3.16. Les deux courbes ont des allures semblables à celles obtenues lors de l'essai de traction d'une éprouvette lisse. La contrainte nominale commence d'abord par augmenter jusqu'à atteindre un maximum qui correspond au début de la striction, puis amorce une descente à cause de la diminution de la section au niveau de l'entaille.

La contrainte nominale maximale $F_{max}/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ prédite par les modèles "GLD-Isotherme" et "GLD-Adiabatique" sont pratiquement les mêmes. Cependant, celle obtenue en utilisant le "GLD-Non adiab." est plus petite que les deux autres (tableau 3.8). Ceci peut s'expliquer par l'adoucissement supplémentaire généré par la propagation de la chaleur dans l'éprouvette. Dans ce dernier cas, la contrainte de traction maximale $F_{max}/(\pi R_0^2 \sigma_0)$ a été obtenue pour une déformation nominale moindre et une réduction de diamètre plus grande que les deux simulations précédentes comme le montre le tableau suivant :

	$\frac{F_{max}}{\pi\sigma_0 R_0^2}$	$\frac{u_{striction}}{l_0}$	$\frac{\Delta R_{striction}}{R_0}$	$\frac{u_{rupture}}{l_0}$	$\frac{\Delta R_{rupture}}{R_0}$
GLD-Isotherme	2,0536	0,0136	0,0599	0,0601	0,3634
GLD-Adiabatique"	2,0534	0,0134	0,0618	0,0605	0,3723
GLD-Non adiab.	2,0497	0,0122	0,0677	0,0591	0,3673

TAB. 3.8 – Principaux résultats de l'essai de traction d'une éprouvette axisymétrique entaillée.

La rupture finale de la barre se produit à des niveaux de déformation et de réduction de diamètre différents. La déformation nominale à rupture obtenue en utilisant le modèle "GLD-Non adiab." est plus petite que celles prédites par les deux autres modèles. Cependant, la réduction de diamètre à rupture dans la situation d'un calcul dans des conditions d'un échauffement adiabatique est plus grande que dans les deux autres cas.

Nous donnons sur la figure 3.17 l'évolution de la contrainte équivalente normalisée de VON MISES Σ_{eq}/σ_0 , de la porosité f , du paramètre de forme S et de la température en fonction de la réduction de diamètre $\Delta R/R_0$ de trois éléments du maillage de la barre (A), (B) et (C) dont les positions initiales sont indiquées sur la figure 3.15. Les différentes courbes représentant les variations de la contrainte équivalente Σ_{eq}/σ_0 , de la porosité f et du paramètre de forme S des points (A) et (B) obtenues en utilisant les trois modèles sont presque confondues.

L'évolution du point (C), dont la position sur l'éprouvette est proche de l'entaille, est décrite de la même manière par les trois modèles durant la phase de croissance. Cependant la rupture de cet élément, qui se produit d'une manière un peu brutale, survient à des réductions de diamètres différentes selon le type de calculs. La figure 3.17-d montre que le niveau de température prédit au point (C) dans le cas d'une estimation dans des conditions adiabatiques est plus élevé que celui approximé en utilisant le modèle "GLD-Non adiab.". L'échauffement excessif de l'élément (C) semble être la cause de la plus grande réduction de diamètre à rupture.

Les figures 3.18-3.20 représentent les distributions de la porosité f , du paramètre de forme S et de la température T prédites par les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab." à trois instants représentatifs différents. Le premier est pris à une réduction de rayon égale à $\Delta R/R_0 = 0.2507$. Le deuxième correspond à la coalescence du premier élément. La diminution de rayon est alors égale à $\Delta R/R_0 = 0.339$. Le dernier moment est celui de la rupture totale de la barre.

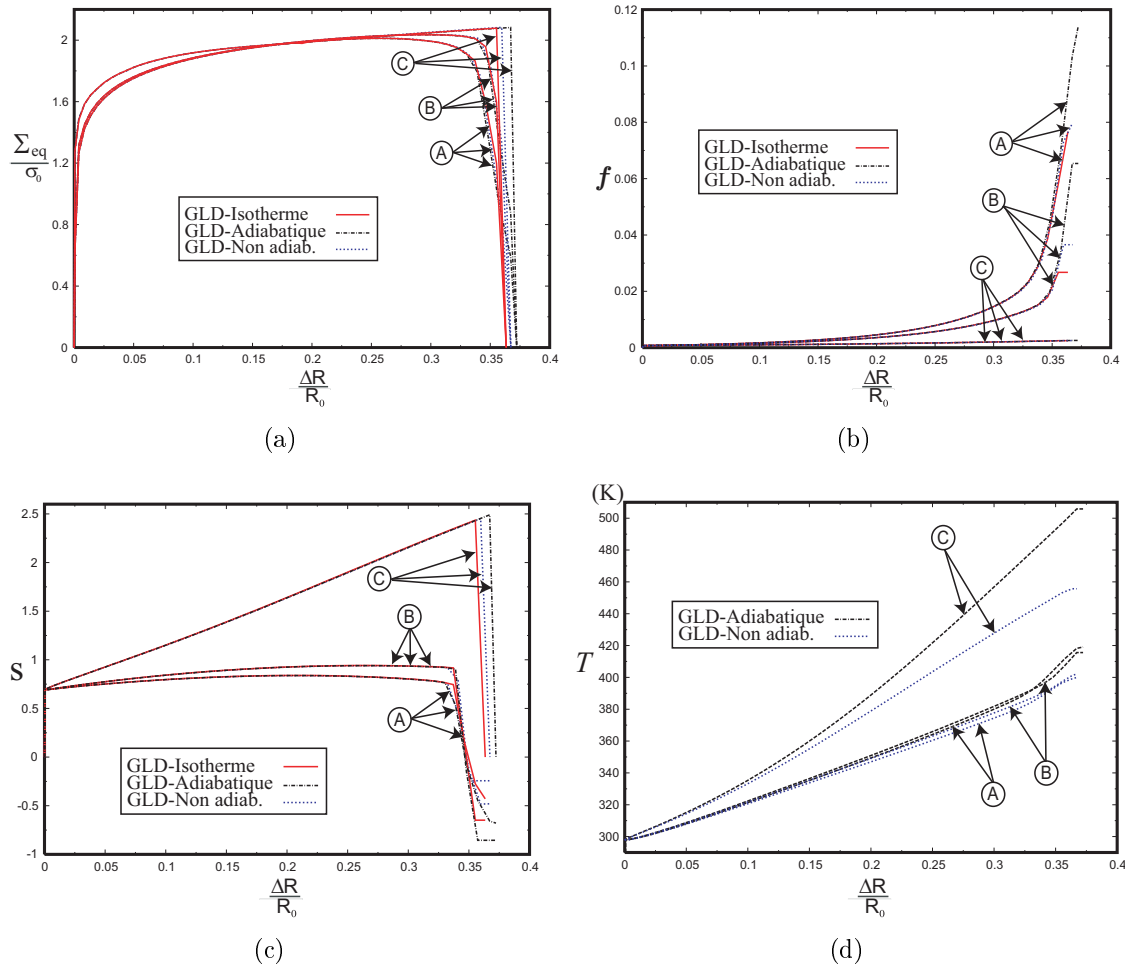


FIG. 3.17 – Évolution de l'état de l'éprouvette axisymétrique entaillée au niveau de l'entaille

La ruine de la barre est observée pour des réductions de rayon résumées dans le tableau 3.8. La porosité se localise d'abord au centre de l'éprouvette au niveau de l'axe de symétrie atteignant dix (10) fois la porosité initiale, puis se propage vers la surface extérieure, du côté de l'entaille comme indiqué sur la première ligne et deuxième ligne de la figure 3.18. Il apparaît sur la dernière ligne de la même figure qu'à la rupture la porosité atteint des valeurs d'environ deux-cent fois la porosité initiale. À ce moment, une diminution de la valeur du paramètre de forme est observée au milieu de la barre en raison de la coalescence des éléments qui s'y trouvent (figure 3.19). Les niveaux de températures obtenus par le modèle "GLD-Adiabatique" sont plus élevés que ceux calculés dans des conditions d'un échauffement non adiabatique (figure 3.20). Au cours de ces deux simulations, les températures se concentrent dans les régions extérieures proches de l'entaille, puis se propagent vers le centre de l'éprouvette. Ces zones de concentration sont plus larges au cours de la simulation dans des conditions non adiabatiques.

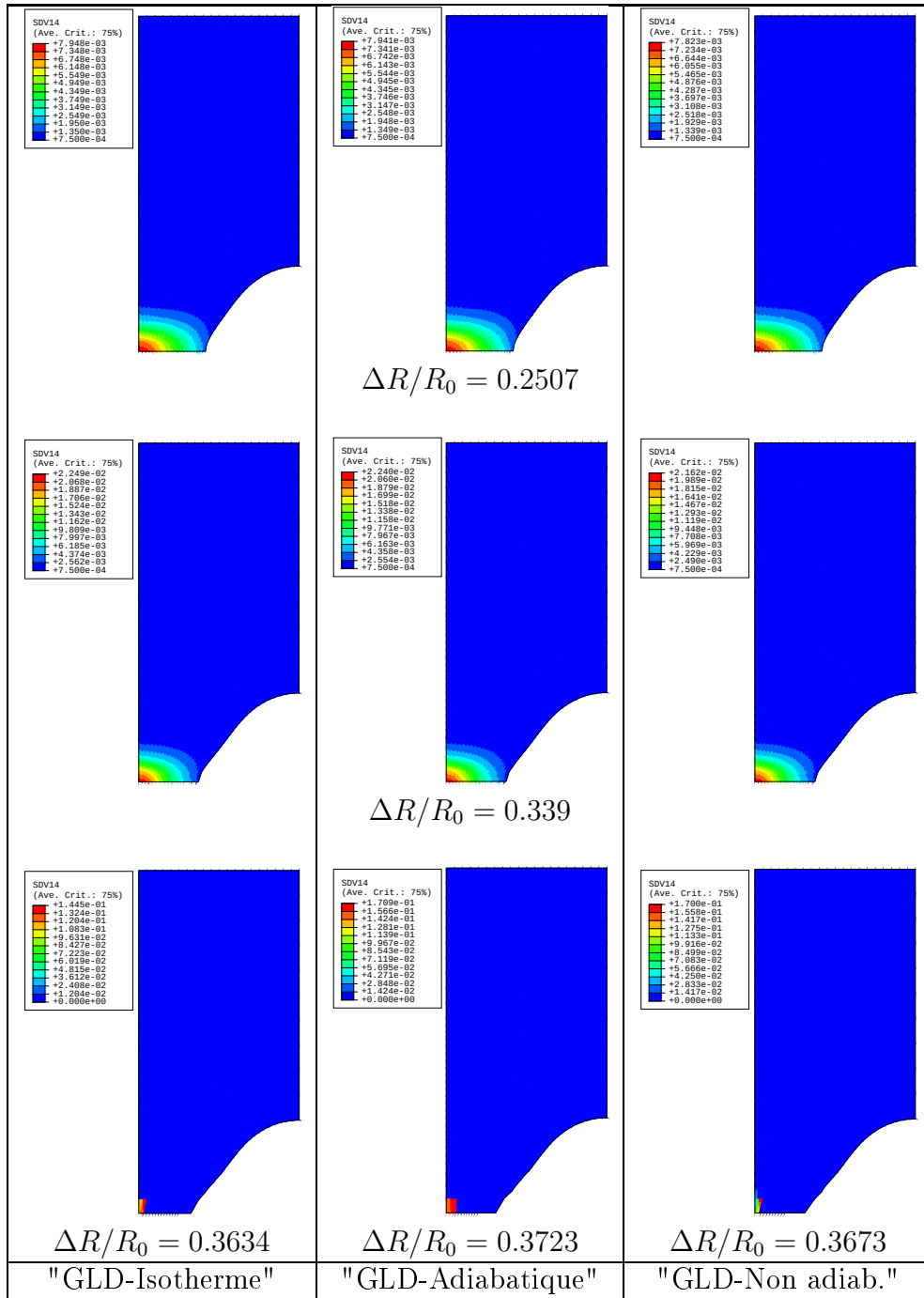


FIG. 3.18 – Isovaleurs de la porosité f de l'éprouvette entaillée à trois instants différents du chargement.

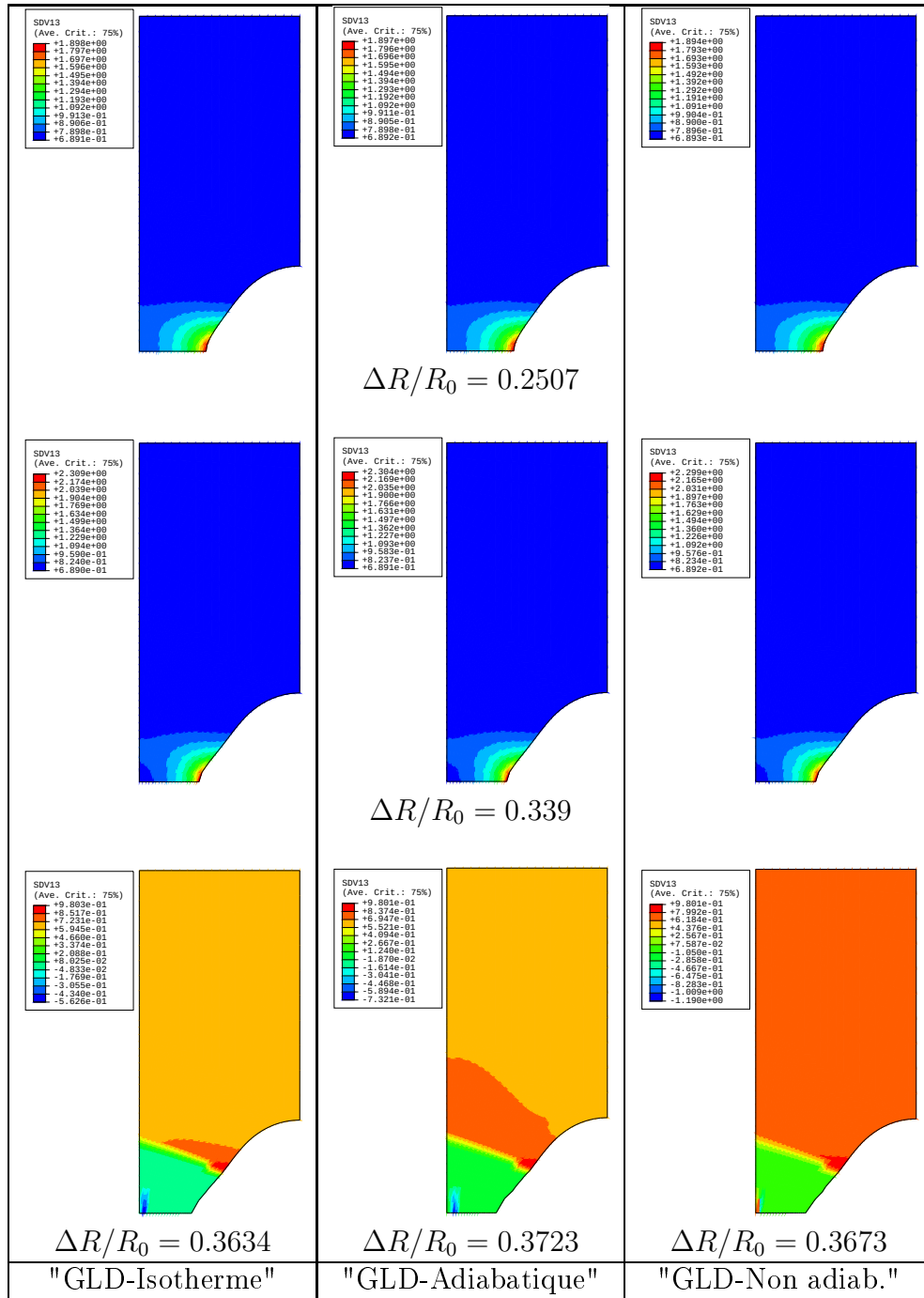


FIG. 3.19 – Isovaleurs du paramètre de forme S de l'éprouvette entaillée à trois instants différents du chargement.

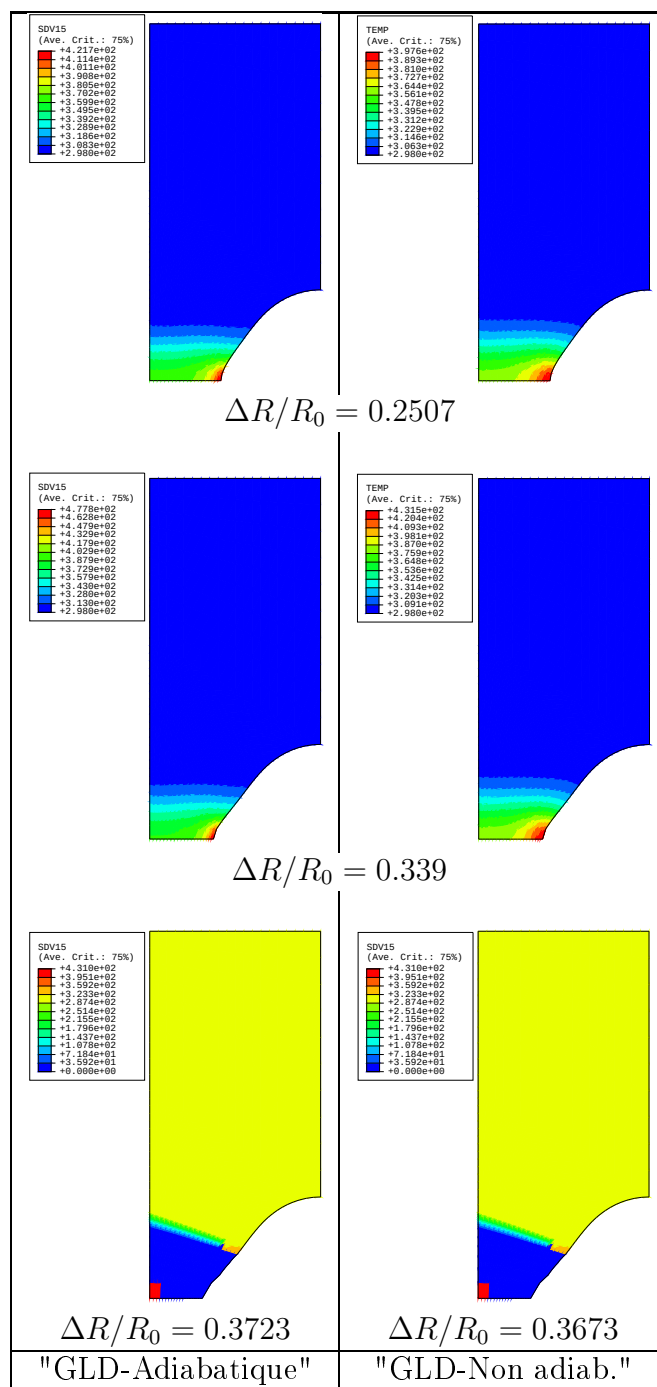


FIG. 3.20 – Isovaleurs de la température T de l'éprouvette entaillée à trois instants différents du chargement.

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des résultats de calculs simples afin de pouvoir valider l'implémentation des modèles GTN et GLD présentés au chapitre 1. La comparaison des prédictions du modèle GLD avec celles estimées sur des cellules élémentaires est très satisfaisante. L'étude de l'essai de traction de l'éprouvette cylindrique lisse a permis de mettre en valeur l'effet de la prise en compte de l'évolution de la microstructure, notamment le changement de forme des cavités, sur la réponse globale de l'éprouvette. La simulation de la traction d'une éprouvette axisymétrique entaillée a mis en évidence l'influence de la prise en compte de l'échauffement thermique de la matière au cours du chargement.

Afin d'apprécier la capacité du modèle GLD à prédire la rupture des structures lors des procédés de mise en forme des matériaux, nous donnons de ce chapitre suivant les résultats obtenus au cours de trois opérations que sont l'écrasement, l'emboutissage et le laminage.

Chapitre 4

Applications aux procédés de mise en forme des matériaux

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application du modèle GLD à des procédés industriels de mise en forme des matériaux par déformation plastique. L'implémentation du modèle GLD dans le code de calcul Abaqus s'est faite en faisant usage des sous-routines Umat et Vumat, qui correspondent respectivement aux schémas implicite et explicite. Cependant et afin d'éviter les problèmes de convergence de la solution que peuvent invoquer les simulations retenues dans cette étude, nous n'utilisons que la Vumat.

Trois procédés de mise en forme ont été choisis : l'écrasement de trois lopins, l'emboutissage d'une tôle et le laminage d'une barre. Le choix des deux premiers exemples est motivé par la disponibilité des résultats expérimentaux les concernant. La première application est une série d'écrasements de trois pièces de formes conique, cylindrique et à épaulement [GRM96, GRM00]. La deuxième est une comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus lors d'un essai d'emboutissage de Swift effectué au CETIM/Senlis [Khe04, KOK07]. La dernière application est une étude numérique du laminage d'une barre dans le but de mettre en évidence le rôle du couplage thermo-micromécanique au cours d'une telle opération.

4.2 Écrasement de lopins

Le forgeage est un terme générique qui désigne un ensemble d'opérations qui permettent de former, à chaud ou à froid, une pièce métallique par déformation plastique d'un brut appelé lopin. Il permet la production de pièces mécaniques ébauchées ou finies. Le choix des paramètres du procédé dépend :

- ◆ de la géométrie et de la cinématique de l'outillage ;
- ◆ de la rhéologie du corps en déformation ;
- ◆ des interactions superficielles entre le corps en cours de façonnement et les outils ;
- ◆ de la ductilité du corps déformé.

Cinq techniques dérivées composent ce procédé. Elle peuvent être classées comme suit :

L'estampage consiste à former, après chauffage, des pièces brutes par pression entre deux blocs appelés matrices, portant en creux la forme exacte du produit à réaliser. Cette technique de fabrication suppose l'exécution préalable d'outillages spécifiques aux produits à confectionner. Elle n'est donc utilisée que lorsque le nombre de pièces à produire est assez élevé.

Le matriçage suit la même procédure que l'estampage, à l'exception qu'il s'applique aux alliages non ferreux tels que les alliages d'aluminium, de cuivre, de titane, de nickel, etc.

L'extrusion repose sur le même principe que l'estampage mais elle est conduite à froid. À la température ambiante, on contraint le matériau à remplir complètement la forme en creux d'une matrice grâce à une très forte pression exercée sur un poinçon. Ce procédé donne des pièces de géométries encore plus précises que celles qui sont réalisées avec les deux premiers procédés. Elles présentent en plus des états de surface excellents ; ce qui permet souvent de les utiliser sans usinage complémentaire.

La forge libre est la plus ancienne de ces techniques. Elle permet d'obtenir à chaud des ébauches ou des pièces mécaniques brutes dont la forme est atteinte au terme d'un nombre plus ou moins grand de transformations successives. Ne nécessitant pas d'outillages spécifiques, cette technique est appliquée lorsqu'il s'agit de produire, dans des délais parfois courts, des pièces à l'unité ou en très petites séries. Ces ébauches peuvent avoir des dimensions importantes.

Le laminage permet d'obtenir des couronnes en tous matériaux. Elles peuvent avoir des profils rectilignes ou de toute autre forme ; intérieure, extérieure ou les deux à la fois.

Cette section est consacré à l'étude d'un exemple d'écrasement de trois pièces différentes. Les hauteurs des trois lopins sont réduites en appliquant un chargement en compression qui a pour effet l'augmentation de la section à la base, et de ce fait l'augmentation de la ductilité dans la direction radiale. Nous comparons les résultats numériques obtenus avec les modèles GTN et GLD avec les résultats expérimentaux tirés des travaux de GOUVEIA et al [GRM96, GRM00]. Des études similaires aussi bien expérimentales que numériques ont été effectuées par d'autres auteurs [LPC⁺03, APCdSCSNJ03].

4.2.1 Description des conditions de la simulation

Les trois lopins ont initialement la même hauteur $H = 2h = 37,5 \text{ mm}$ et le même diamètre extérieure $D = 2R = 25 \text{ mm}$ mesuré au niveau de l'équateur, comme le montre la figure 4.1. Le diamètre du lopin conique au niveau de sa base est $d = 2r = 15 \text{ mm}$, alors que celui de la pièce à épaulement est égal à $d = 2r = 20 \text{ mm}$. La hauteur de l'épaulement au niveau de l'équateur est $2e = 5 \text{ mm}$. Nous résumons les dimensions des trois lopins dans le tableau suivant :

Lopin	$H \text{ (mm)}$	$D \text{ (mm)}$	$d \text{ (mm)}$	$2e \text{ (mm)}$
cylindrique	37,5	25	—	—
conique	37,5	25	15	5
à épaulement	37,5	25	20	5

TAB. 4.1 – Caractéristiques géométriques des lopins cylindrique, conique et à épaulement.

Pour des raisons de symétries de chargement et de conditions aux limites nous modélisons à chaque fois un quart des trois lopins en axisymétrie. Les trois lopins sont maillés¹⁹ avec des éléments quadratiques axisymétriques avec intégration réduite (CAXR) : 561 éléments ont été utilisés pour mailler le lopin conique, 532 éléments pour le cylindrique et 376 éléments pour la pièce à épaulement. L'outil est modélisé comme solide rigide indéformable. Le lopin est bloqué dans la direction axiale au niveau de l'équateur, alors que le flan gauche est bloqué dans la direction radiale au niveau de l'axe de symétrie. Les maillages des pièces ainsi que les conditions aux limites et de chargement sont indiqués sur la figure 4.1. Un chargement sous forme d'un déplacement axial descendant $u = 12,19 \text{ mm}$ est affecté à l'outil dans le but de réduire les hauteurs initiales des lopins de 65%.

Le matériau constitutif des trois lopins est un alliage de plomb (UNS L52905²⁰) dont la composition chimique est donnée ci-dessous :

Composé chimique	Pb	Sb	Sn	As	S
Pourcentage (%)	95,5	4,0	0,3	0,15	0,003

Les caractéristiques mécaniques de ce métal sont les suivantes :

¹⁹Le nombre d'éléments choisi pour discrétiser chacune de ces trois pièces a été obtenu après étude de la convergence du maillage. En effet, il est bien connu qu'une analyse rigoureuse de la réponse du matériau doit s'affranchir de la dépendance de la solution vis-à-vis du maillage usité au cours de la simulation.

²⁰Unified Numbering System ASTM-SAE

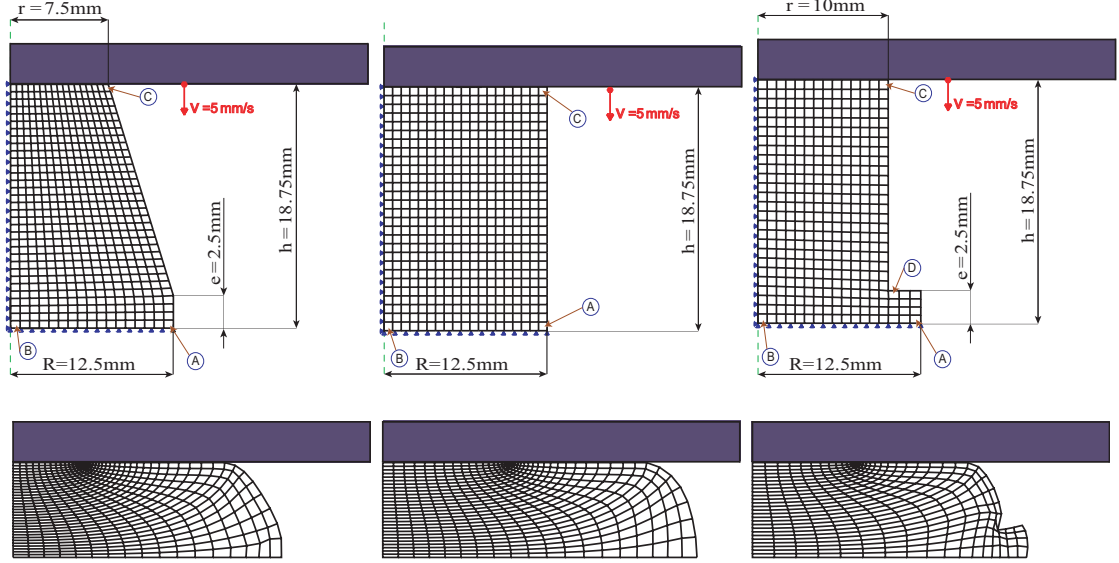


FIG. 4.1 – Maillages initiaux et déformés des lopins conique, cylindrique et à épaulement ainsi que les conditions aux limites et de chargement.

- ◆ module de YOUNG $E = 180\text{ GPa}$,
- ◆ coefficient de POISSON $\nu = 0.33$,
- ◆ densité $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$,
- ◆ et limite d'élasticité $\sigma_o = 256\text{ MPa}$.

La loi d'écoulement isotrope de la matrice est donnée par

$$\bar{\sigma} = 66,656 \bar{\varepsilon}^{0,10158}$$

Le coefficient de frottement²¹ entre le lopin et l'outil est égal à $\mu_f = 0.35$ [GRM96]. En l'absence de données expérimentales concernant la microstructure initiale de ce matériau, nous adoptons une porosité initiale $f_0 = 0,1\%$ et un paramètre de forme initial $S_0 = 2,71$ ²². Ces caractéristiques microstructurales sont résumées dans le tableau suivant :

	f_0 (%)	S_0	λ	q_i
GLD	0.1	2.71	1	$q_0 = 1.6$
GTN	0.1	—	1	$q_1 = 1.5, q_2 = 1.1$

TAB. 4.2 – Caractéristiques microstructurales du matériau constitutif des trois lopins

²¹Une description de la gestion numérique du contact ainsi que de quelques modèles de frottement disponibles dans le code Abaqus est donnée en annexe B.

²²Le choix de cette microstructure a été effectué après avoir calibré la réponse du lopin conique par rapport aux résultats expérimentaux. Une fois ce calibrage réalisé, cette microstructure a été figée et utilisée pour simuler la mise en forme des deux autres pièces (à épaulement et cylindrique).

4.2.2 Discussion des résultats

Nous présentons sur la figure 4.2 une série de comparaisons des résultats numériques calculés en utilisant les modèles GTN et GLD avec ceux obtenus expérimentalement par GOUVEIA et al [GRM96, GRM00]. Les graphes de la première colonne de la figure 4.2 décrivent l'évolution de la déformation orthoradiale $E_{\theta\theta}$ en fonction de la déformation axiale E_{zz} . Alors que ceux de la deuxième colonne représentent les variations des contraintes orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ et axiale Σ_{zz} suivant la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$. GOUVEIA et al. [GRM96] ont d'abord mesuré les déformations orthoradiale $E_{\theta\theta}$ et axiale E_{zz} sur la surface extérieure du lopin au niveau de l'équateur par la méthode de la grille. Puis, ils en ont déduit les contraintes orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ et axiale Σ_{zz} en suivant la méthode détaillée en appendice.

Nous observons sur la figure 4.2-a une bonne correspondance entre les courbes prédites par les simulations numériques et celles obtenues expérimentalement au début de l'écrasement du lopin conique. Une petite déviation des graphes numériques, plus prononcée dans le cas de la simulation avec le modèle GTN, apparaît à la fin du procédé. L'évolution des contraintes, dans ce cas-ci, est aussi bien reproduite par les deux modèles. Cependant, les contraintes orthoradiales $\Sigma_{\theta\theta}$ calculées en utilisant le GLD sont plus proches des résultats expérimentaux que celles estimées avec le GTN (figure 4.2-b). La composante axiale Σ_{zz} est reproduite correctement par les deux modèles. Au cours de cette opération Σ_{zz} , qui est une contrainte de compression diminue en module alors que la contrainte de traction $\Sigma_{\theta\theta}$ augmente, il s'ensuit que la contrainte hydrostatique $\Sigma_m = (\Sigma_{\theta\theta} + \Sigma_{zz})/3$ devient positive ($\Sigma_{rr} = 0$). Par conséquent, le risque de rupture du lopin augmente en cet endroit. Nous verrons plus loin que l'endommagement est maximal sur cette partie du lopin.

Le tracé des déformations obtenu en employant le modèle GLD est proche des points expérimentaux dans la situation de la compression de la pièce à épaulement. Cependant un décalage, qui s'accroît au cours de l'écrasement, est observé entre ces derniers et les résultats prédits par le modèle GTN (figure 4.2-c). Les variations de la contrainte orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ sont bien estimées avec les deux modèles, contrairement à la composante axiale Σ_{zz} qui est éloignée du graphe expérimental dans la circonstance d'une simulation avec le GTN (figure 4.2-d). Une diminution un peu brutale, plus prononcée dans le cas du modèle GTN, des deux courbes numériques représentant l'évolution des contraintes à une déformation cumulée d'environ $\bar{E}_{eq}^p \cong 0.1$ se distingue sur ce graphique. Elle correspond au moment où les deux surfaces extérieures au voisinage de l'épaulement se mettent en contact. Pareillement à l'opération précédente, nous remarquons que la contrainte moyenne est toujours positive $\Sigma_m = (\Sigma_{\theta\theta} + \Sigma_{zz})/3 > 0$ sur la surface extérieure au niveau de l'équateur. C'est la zone de rupture observée expérimentalement.

Les déformations orthoradiale $E_{\theta\theta}$ et axiale E_{zz} calculées avec les modèles GTN et GLD sont proches de celles mesurées expérimentalement au début du procédé

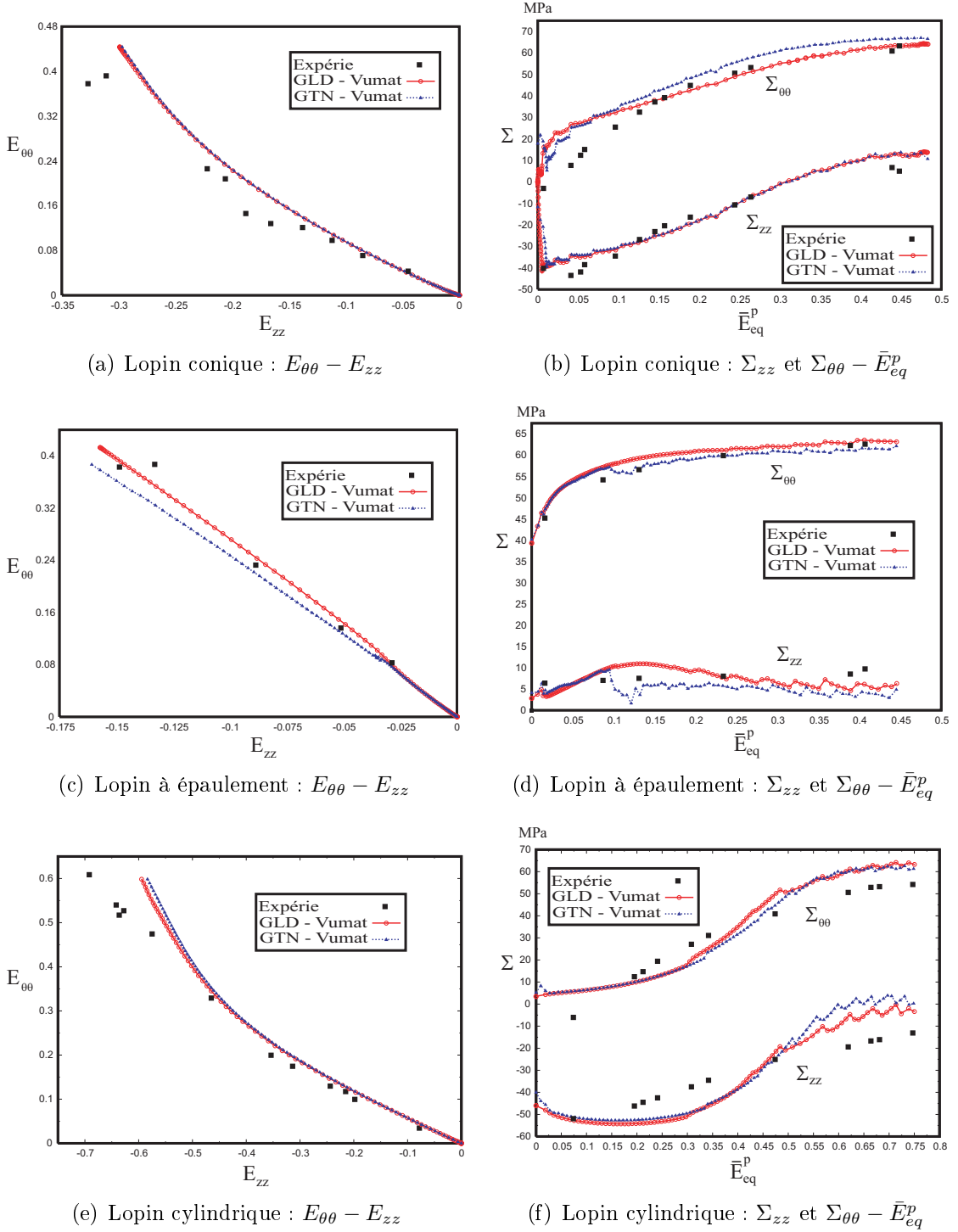


FIG. 4.2 – Évolution des déformations axiale E_{zz} et orthoradiale $E_{\theta\theta}$ ainsi que des contrainte axiale Σ_{zz} et orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ sur la surface extérieure centrale des lopins conique, à épaulement et cylindrique.

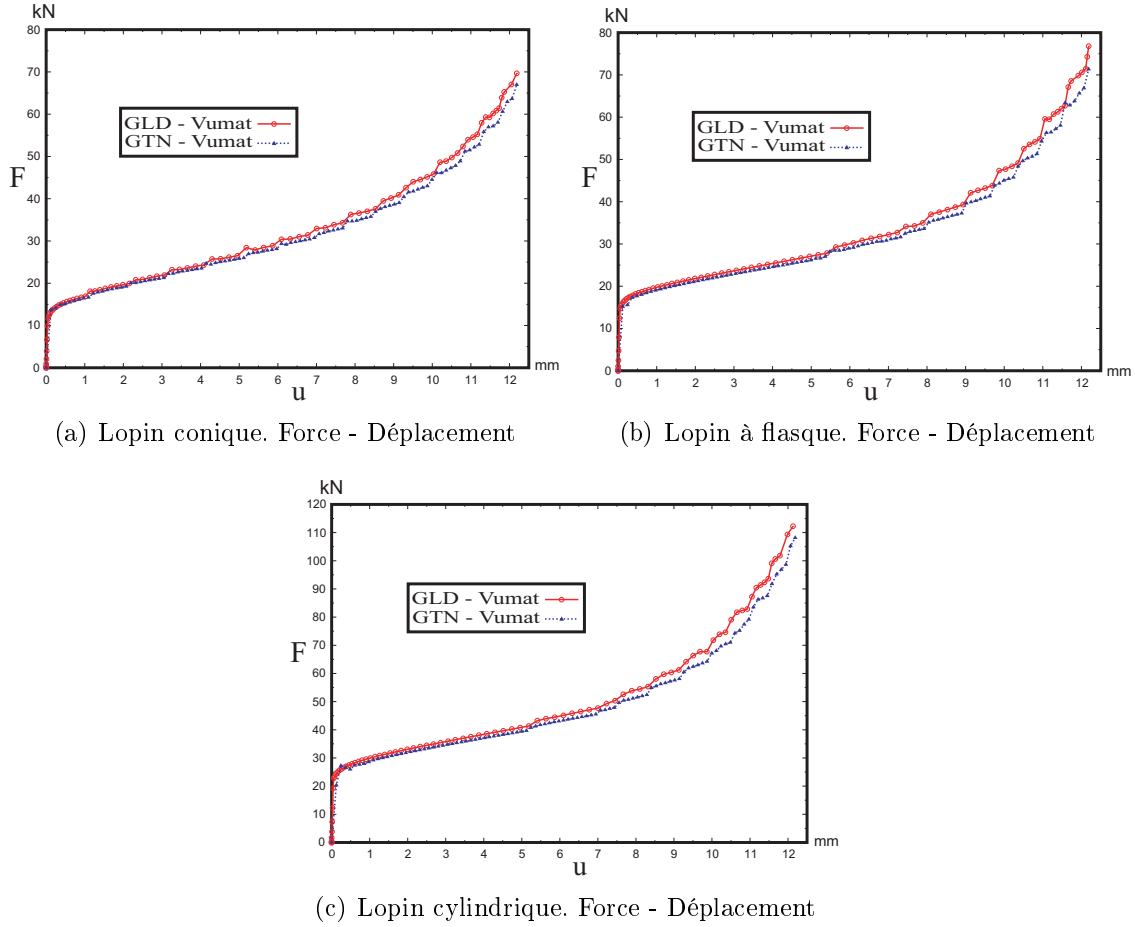


FIG. 4.3 – Évolution de la force de forgeage en fonction de réduction de la hauteur du lopin.

d'écrasement du lopin cylindrique (figure 4.2-e). Une déviation des deux courbes prédites numériquement par rapport aux résultats expérimentaux apparaît au fur et à mesure de l'augmentation du niveau de compression de la pièce. L'écart estimé par le GTN est cependant plus grand. Nous donnons sur la figure 4.2-f les variations des composantes orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ et axiale Σ_{zz} en fonction de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$ durant la même opération. Celles-ci sont correctement reproduites par les deux modèles. Cependant, un décalage des valeurs numériques de la contrainte axiale Σ_{zz} de celles mesurées expérimentalement apparaît. Cette différence est plus grande en comparaison avec les deux opérations de forgeages précédentes. Dans le cas d'une simulation avec le modèle GTN, la composante axiale Σ_{zz} change carrément de signe et devient une contrainte de traction. En revanche, l'évolution de cette composante telle que prédite par le modèle GLD reste une contrainte de compression, en bon accord avec les résultats expérimentaux.

Nous représentons sur la figure 4.3 des comparaisons de l'évolution de la force de forgeage F en fonction de la réduction de la hauteur des lopins, exprimée par le déplacement de l'outil u . L'effort d'écrasement évolue lentement au début

du procédé (course de l'outil d'environ $u = 8$ à 9 mm) puis change de pente et augmente d'une manière plus rapide.

Au début des trois opérations d'écrasements, les modèles GTN et GLD prédisent de la même manière l'évolution de la force de forgeage F . Puis, au fur et à mesure de la compression des lopins, l'effort calculé en utilisant le GLD devient supérieur à celui obtenu avec le GTN. Nous observons aussi que l'allure générale des trois graphiques est pratiquement la même. Cependant, les forces maximales sont sensiblement différentes, notamment dans le cas de la pièce cylindrique. Elles sont données dans le tableau 4.3.

	Conique	Cylindrique	à épaulement
$F_{max} (kN) - \text{GLD}$	69,67	112,24	76,82
$F_{max} (kN) - \text{GTN}$	66,96	108,15	71,34

TAB. 4.3 – Forces maximales d'écrasement des trois lopins.

Nous étudions dans ce qui suit l'évolution de l'état mécanique et microstructural des trois lopins cylindrique, conique et à épaulement au cours de leurs forgeages.

Lopin cylindrique

L'évolution de la microstructure de trois éléments (A), (B), et (C) que nous considérons représentatifs de trois régions du lopin cylindrique est étudiée dans ce qui suit. Les positions initiales de ces trois parties sont indiquées sur la figure 4.1. La zone (A) est située sur la surface extérieure au niveau de l'équateur, la région (B) au centre du lopin alors que la portion (C) se trouve sur la surface extérieure initialement en contact avec l'outil. Les graphes 4.4-a et 4.4-b représentent les va-

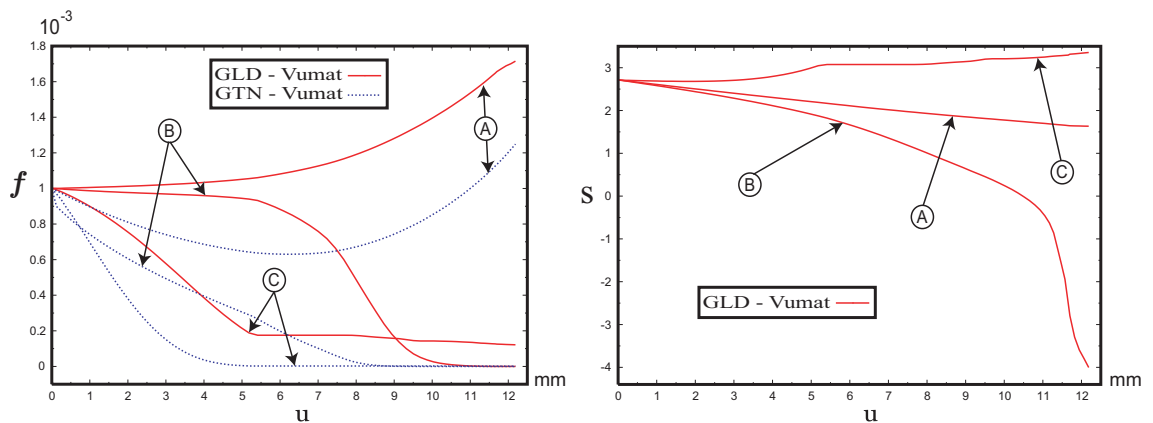


FIG. 4.4 – Étude de trois éléments du lopin cylindrique.

riations de la porosité f et du paramètre de forme S des trois points en fonction de

la course de l'outil u . Les cavités situées dans les régions (B) et (C) ont tendance à se refermer au cours du chargement. Cette fermeture se produit différemment dans les deux zones : alors que celles se trouvant dans (B) s'aplatissent, comme le montre la figure 4.4-b, pour se rapprocher de plus en plus de la forme d'une « pièce de monnaie », celles de la partie (C) ont tendance à se refermer tout en s'allongeant pour épouser, de plus en plus, la forme d'une "aiguille" (figure 4.4-b). Les fractions volumiques de vides atteintes dans la zone critique (A) sont proches de la porosité initiale dans le cas du modèle GTN, $f \cong (1,2 - 1,3) f_0$, alors que celle estimée par le GLD est de l'ordre de $f \cong (1,7 - 1,8) f_0$ à la fin de l'écrasement. Il s'ensuit que le modèle GLD prédit un plus grand endommagement comparativement au modèle GTN.

Nous donnons sur la figure 4.5 la distribution de la porosité f approximée par les modèles GTN et GLD ainsi que celle du paramètre de forme S dans la circonstance d'un calcul avec le GLD à trois réductions de hauteurs différentes. La première correspond à une diminution de 37,34% de la hauteur initiale (figure 4.5). À cet instant, la zone de concentration de la porosité maximale prédite par le GLD se trouve au voisinage de la surface extérieure, alors que le calcul avec le GTN la situe sur la partie en contact avec l'outil. Les formes des cavités situées au niveau de l'équateur s'aplatissent alors que celles se trouvant à l'intérieur du lopin au voisinage de l'outil ont tendance à s'allonger.

La deuxième ligne de la figure 4.5 correspond à une réduction de 53,55% de la hauteur initiale du lopin. La zone de porosité maximale calculée par le modèle GTN se trouve à présent sur la partie extérieure du lopin rejoignant ainsi les prédictions du modèle GLD. Ce dernier prédit cependant un niveau de porosité plus élevé. Il apparaît aussi que les cavités de la portion centrale interne au niveau de l'équateur continuent à s'aplatir.

La troisième ligne de la figure 4.5 correspond à une diminution de 65% de la hauteur de la pièce. Le modèle GTN prédit à ce moment la refermeture des cavités sur la majeure partie du lopin, excepté au niveau de la surface extérieure ainsi que sur deux petites zones en contact avec l'outil. Cependant, le GLD estime cet abaissement du volume des vides dans une zone moins grande de la pièce. Cette dernière va de la région centrale interne au niveau de l'équateur jusqu'à celle en contact avec l'outil. Les cavités situées au centre du lopin se referment tout en s'aplatissant alors que celles proches de l'outil ont tendance à s'allonger au cours de l'opération. Les porosités maximales sont localisées à la surface extérieure du lopin au niveau de l'équateur. Ces prédictions numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux de GOUVEIA et al. [GRM96]. Ces auteurs ont observé que la rupture du lopin a lieu en cet endroit.

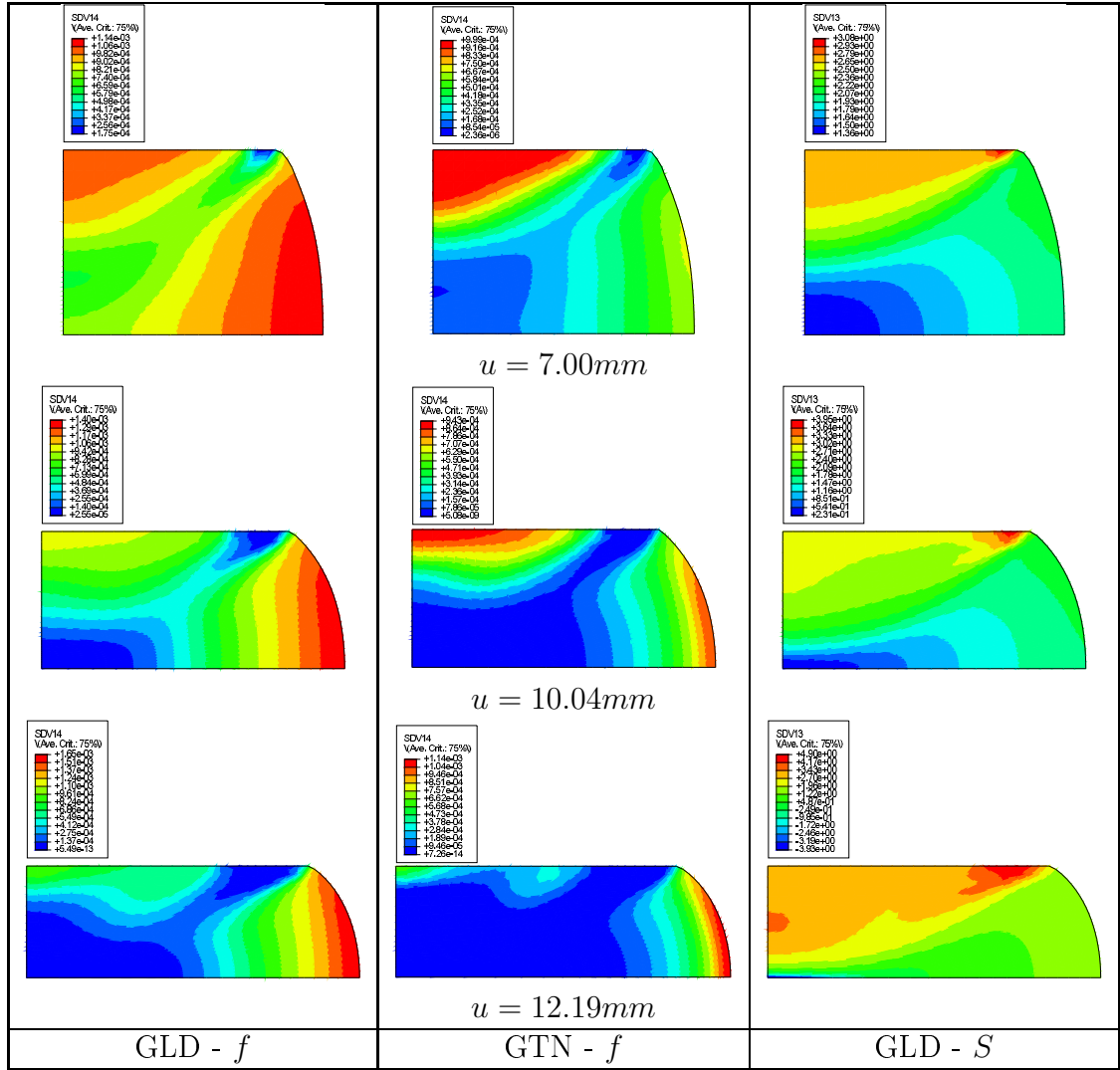


FIG. 4.5 – Isovaleurs de la porosité f et du paramètre de forme S lors de l'écrasement du lopin cylindrique.

Lopin à épaulement

Nous présentons dans ce paragraphe une étude de l'évolution de la microstructure de quatre éléments (A), (B), (C) et (D) du lopin à épaulement, que nous supposons représentatifs des quatre régions qui les avoisinent, et de la distribution de la porosité f et du paramètre de forme S .

La zone (A) représente la région extérieure au niveau de l'équateur, la zone (B) la zone intérieure centrale au niveau de l'équateur, la zone (C) la partie extérieure supérieure du lopin initialement en contact avec l'outil et enfin la zone (D) représente la région qui englobe les surfaces extérieures au niveau de l'épaulement qui sont candidates au contact, comme indiqué sur la figure 4.1. Les graphes 4.6-a et 4.6-b représentent respectivement les variations de la porosité f et du paramètre

de forme S en fonction de la course de l'outil u . Nous observons que les cavités à l'intérieur du lopin (B) ainsi que celles en contact avec l'outil (C) ont tendance à se refermer au cours du chargement. Alors que celles situées sur la surface extérieure du lopin (A) et (D) voient leurs volumes augmenter. De la même manière que dans le cas de l'écrasement de la pièce cylindrique, la refermeture des vides se produit différemment. Les cavités situées dans la zone centrale interne (B) s'aplatissent, comme le montre la figure 4.6-b, pour se rapprocher de plus en plus de la forme d'une « pièce de monnaie ». Alors que celles situées dans la zone en contact de l'outil (C) s'allongent au cours de leurs fermetures (figure 4.6-b. Le niveau de porosité atteint sur la surface extérieure dans la situation de l'écrasement de la pièce à épaulement est beaucoup plus grand que celui observé lors de la compression du lopin cylindrique. Il est de l'ordre de $f \cong (2.4 - 2.5) f_0$ dans la circonstance d'une simulation utilisant le modèle GTN et $f \cong (1.9 - 2.0) f_0$ dans celle d'un calcul avec le GLD.

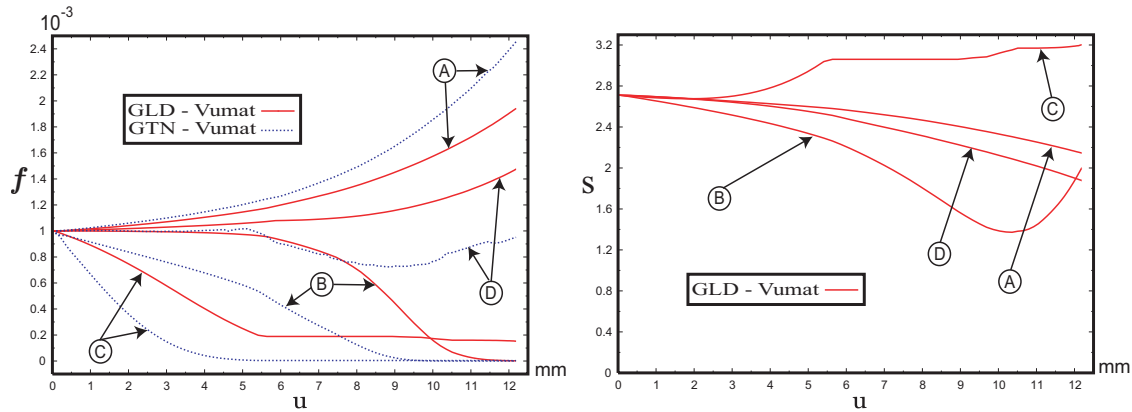


FIG. 4.6 – Étude de trois points du lopin à épaulement.

Nous donnons sur la figure 4.7 les distributions de la porosité f , prédite par les modèles GTN et GLD, et du paramètre de forme S estimé en utilisant le GLD à trois réductions de hauteurs différentes du lopin cylindrique. La première correspondant à une diminution de 37.34% de la hauteur initiale de la pièce. À cet instant, les deux modèles prédisent une concentration de la porosité maximale au niveau de l'épaulement. Cependant, le GLD prédit en plus un endommagement, qui est de même ordre, dans la zone située sur la portion extérieure au dessus de l'épaulement. Les vides les plus aplaties sont situés dans ce cas-ci, non plus au niveau de l'équateur, mais au centre de la pièce à mi-distance entre l'épaulement et l'outil. Néanmoins, les cavités les plus allongées se trouvent dans la région en contact avec l'outil.

La deuxième ligne de la figure 4.7 correspond à une réduction de 53.55% de la hauteur initiale de la pièce. À ce moment, les zones de porosité maximale se concentrent au mêmes endroits. En revanche, la portion de lopin qui contient des cavités qui se referment est plus grande.

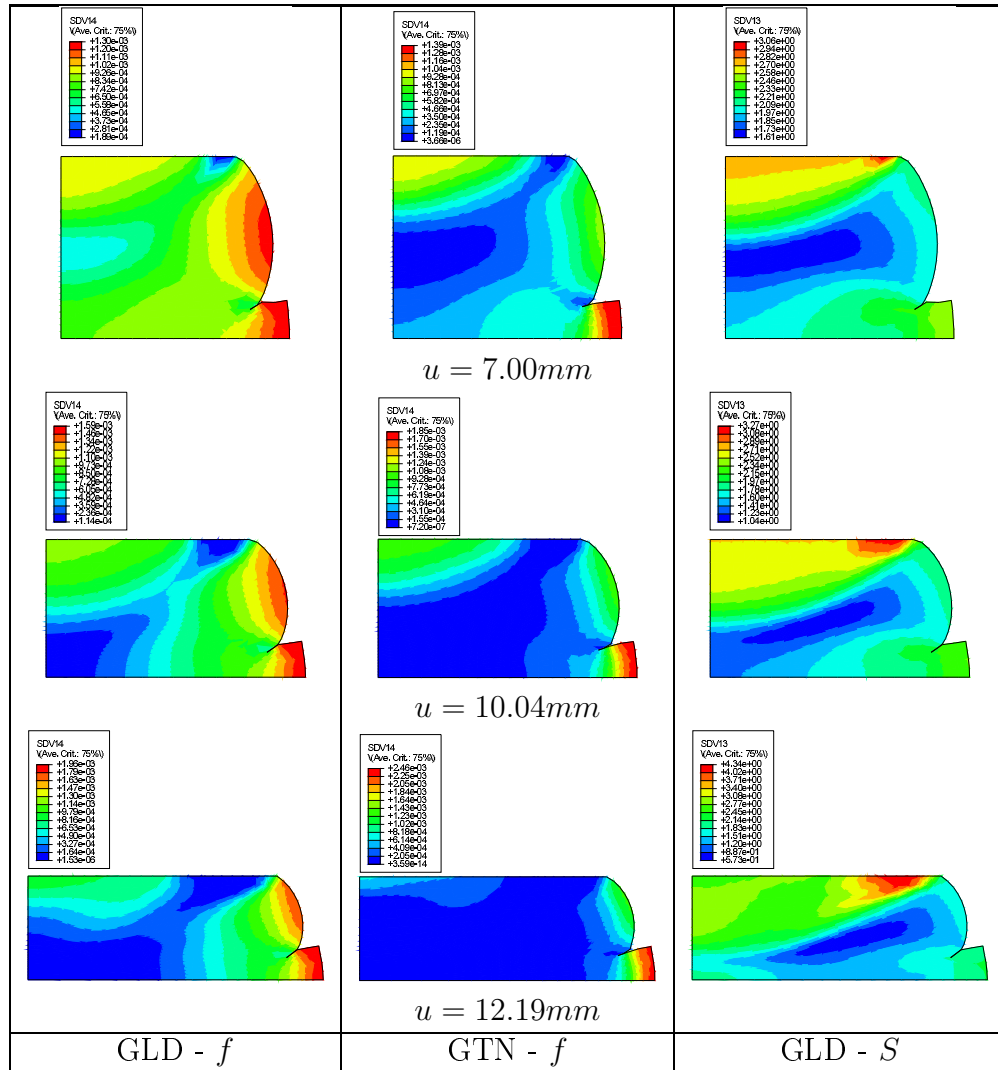


FIG. 4.7 – Isovaleurs de la porosité f et paramètre de forme S lors de l'écrasement du lopin à épaulement.

La troisième ligne de la figure 4.7 correspond à une réduction de 65% de la hauteur initiale de la pièce. Le modèle GTN prédit la refermeture des cavités sur la majeure partie du lopin excepté au niveau de la surface extérieure. Alors que la refermeture des cavités n'est observée, dans le cas du GLD, qu'au niveau de la zone s'étalant du centre du lopin jusqu'à la surface supérieure externe en contact avec l'outil. Comme dans le cas du lopin cylindrique et en accord avec les résultats expérimentaux de GOUVEIA et al [GRM96], la porosité maximale est localisée sur la surface extérieure du lopin au niveau de l'épaulement.

Lopin conique

Nous étudions dans cette section l'évolution de microstructure de trois éléments, notés (A), (B), et (C) que nous supposons représentatifs de trois zones du lopin conique, ainsi que les distributions de la porosité f et du paramètre de forme S . La région (A) est située sur la surface extérieure au niveau de l'équateur, (B) se trouve sur la région au centre du lopin toujours au niveau de l'équateur, et enfin la portion (C) est localisée sur la surface extérieure initialement en contact avec l'outil comme indiqué sur la figure 4.1-e. Les graphes 4.8-a et 4.8-b représentent respectivement,

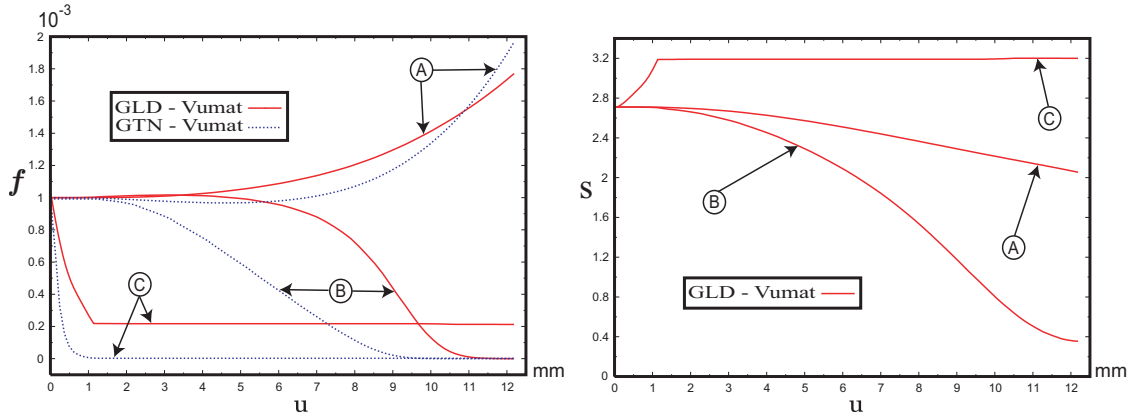


FIG. 4.8 – Étude de trois points du lopin conique.

l'évolution de la porosité f et du paramètre de forme S en fonction de la course de l'outil u dans les trois régions (A), (B), et (C). Les cavités à l'intérieur du lopin (B) ainsi que celles en contact avec l'outil (C) ont tendance à se refermer au cours du procédé de forgeage, alors que celles à la surface extérieure du lopin (A) voient leurs volumes augmenter. Dans ce cas aussi la refermeture des cavités se produit de deux manières. Les cavités situées dans la zone centrale interne (B) s'aplatissent alors que celles de la zone en contact avec l'outil s'allongent. Les plus grand niveaux de porosité sont atteints dans la zone critique (A). Les porosités à la fin de l'écrasement du lopin sont de l'ordre de $f \cong (1,9 - 2,0) f_0$ dans le cas du modèle GTN et $f \cong (1,7 - 1,8) f_0$ dans le cas du modèle GLD .

La figure 4.9 représente la distribution de la porosité f prédite par les modèles GTN et GLD ainsi que celle du paramètre de forme S prédite par le modèle GLD à trois réductions de hauteurs différentes de la pièce conique. Les isovaleurs de la première ligne de la figure 4.9 correspondent à une réduction de 37,34% de la hauteur initiale du lopin. À cet instant, le modèle GLD prédit une concentration de la porosité maximale au voisinage de la surface extérieure, alors que le modèle GTN prédit une concentration dans deux zones : la première est située dans la région centrale en contact avec l'outil et la deuxième sur la partie extérieure au niveau de l'équateur. À ce stade de déformation, les cavités situées au niveau de l'équateur prennent une forme de plus en plus aplatie, alors que celles situées dans la zone supérieure proches de l'outil ont tendance à s'allonger.

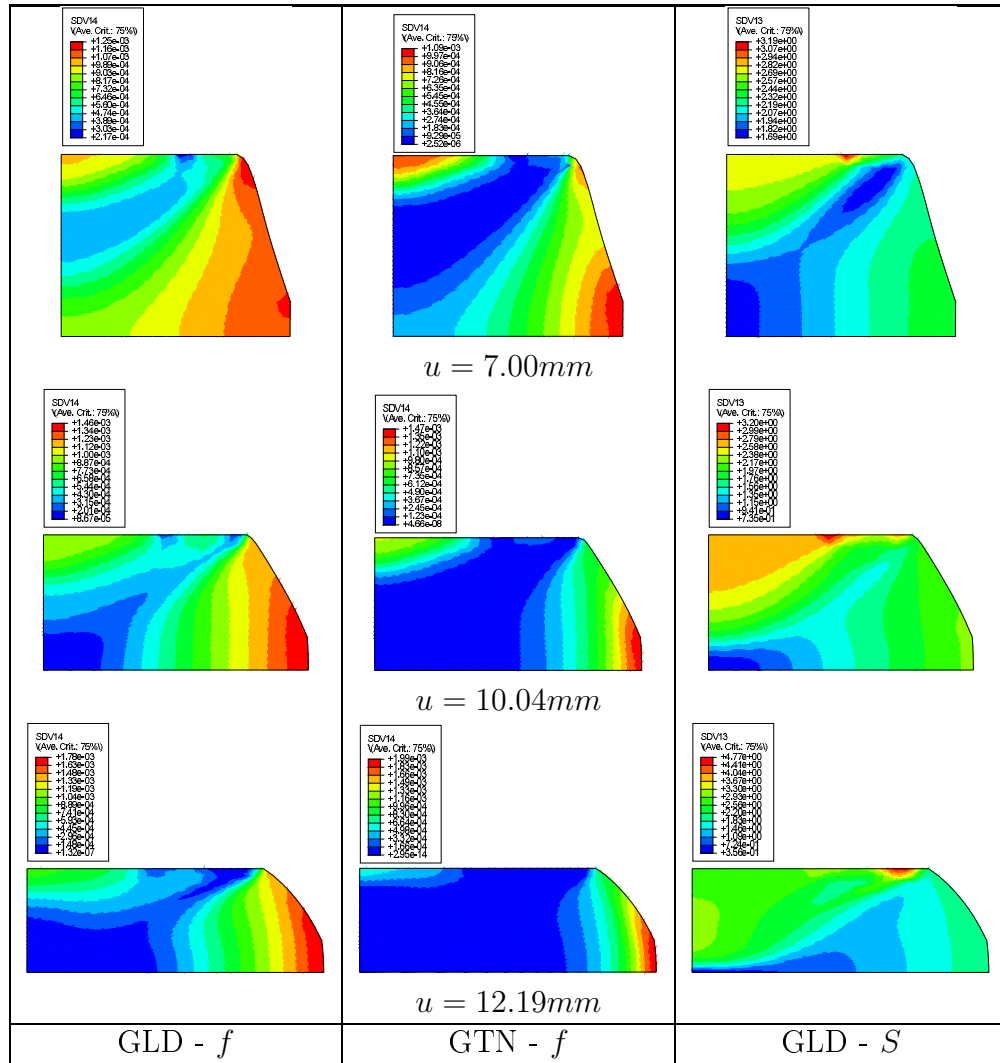


FIG. 4.9 – Isovaleurs de la porosité f et paramètre de forme S lors de l'écrasement du lopin conique.

La deuxième ligne de la figure 4.9 contient les isovaleurs obtenues pour une réduction de 53,55% de la hauteur initiale de la pièce conique. Les porions de porosités maximales calculées en utilisant les deux modèles GTN et GLD se trouvent sur la surface extérieure au niveau de l'équateur. Le modèle GLD prédit cependant un niveau supérieure de porosité et une zone de concentration plus large. Les vides dans la région centrale interne du lopin commence à se refermer, ceux localisés au niveau de l'équateur s'aplatissent alors que les cavités situées dans la zone supérieure proches de l'outil restent allongées.

La troisième ligne de la figure 4.9 correspond à une réduction de hauteur initiale de 65%. Comme dans le cas de l'écrasement du lopin cylindrique, le modèle GTN prédit la refermeture des cavités sur la majeure partie du lopin, excepté au niveau de la surface extérieure. Alors que le GLD estime la refermeture des cavités dans une portion moins grande de la pièce. Celle-ci s'étale de la zone centrale interne au

niveau de l'équateur jusqu'à la zone supérieure externe en contact avec l'outil. À ce niveau d'écrasement, les vides se trouvant au centre du lopin se referment en épousant une forme aplatie alors que ceux situés en contact avec l'outil ont tendance à s'allonger. Les régions de porosité maximale sont localisées sur la surface extérieure au niveau de l'équateur, résultats en accord avec les prévisions expérimentales de GOUVEIA et al. [GRM96].

En accord avec les résultats expérimentaux de GOUVEIA et al. [GRM96] nous observons sur les figures 4.5 et 4.9 que la géométrie finale du lopin conique est semblable à celle du lopin cylindrique.

4.3 Emboutissage de Swift

L'emboutissage est un procédé de formage par déformation à chaud ou à froid des métaux visant à transformer une tôle en une pièce plus ou moins compliquée. Dans le cas où la tôle à emboutir est mince (feuille d'épaisseur inférieure à 3 mm), celle-ci est appelée flan. La configuration de l'outillage au cours de cette opération détermine l'effet obtenu sur le flan : l'outil à simple effet comprend une matrice et un poinçon, alors que celui à double effet est composé en plus de ces deux éléments, d'un serre-flan.

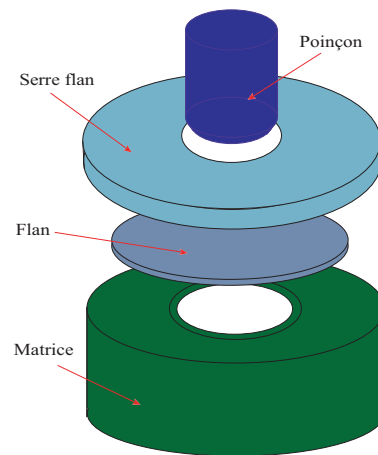


FIG. 4.10 – Schématisation de l'essai d'emboutissage de Swift.

Dans le cas général, le rôle de chacun des composants de l'outillage peut être décrit comme suit :

- ◆ le poinçon couissant plus ou moins vite sur l'axe vertical déforme la tôle à son empreinte au fond de la matrice ;
- ◆ la matrice sert d'appui à la pièce ; elle contribue aussi à donner la forme extérieure finale au retour élastique près ;
- ◆ le serre-flan permet de prévenir les risques de plis du flan au cours du procédé et contribue à l'obtention d'un écoulement homogène du métal.

Deux modes de déformation sont principalement observés lors de l'emboutissage : l'expansion et le retreint. Ces modes sont conditionnés par le type d'outillage utilisé.

Emboutissage en expansion : le flan est bloqué sur ses bords, il est obligé de s'allonger dans toutes les directions pour s'adapter à la forme imposée par la pénétration du poinçon.

Emboutissage en retreint : le métal glisse sous le serre-flan. C'est l'épaisseur entre ce dernier et la matrice qui diminue.

L'art de l'emboutissage consiste à réaliser le meilleur compromis entre ces deux modes de déformation, optimisant ainsi l'écoulement du métal entre le poinçon, la matrice et le serre-flan. De nombreux essais spécifiques ont été imaginés et utilisés pour juger l'aptitude d'une tôle à subir l'opération d'emboutissage. Dans cette section nous présentons une étude de l'essai de Swift (1954) schématisé sur la figure 4.10. Les résultats expérimentaux concernant cet exemple ont été obtenus par le CETIM/Senlis. Cette application consiste à emboutir une tôle en aluminium ayant une épaisseur de 1 mm jusqu'à rupture de celle-ci [Khe04, KOK07]. Sur ce type d'embouti on observe un glissement de la collerette entre le serre-flan et la matrice et un étirement de la jupe suivant la direction de déplacement du poinçon.

4.3.1 Description des conditions de la simulation

Les dimensions de l'outillage et du flan utilisés pour effectuer l'essai de Swift sont indiquées sur la figure 4.11. Nous en résumons les principales [Khe04] :

- ◆ La matrice
 - Diamètre extérieur : $\phi_{ext}^m = 100 \text{ mm}$
 - Diamètre intérieur : $\phi_{int}^m = 35.2 \text{ mm}$
 - Hauteur : $H^m = 10.5 \text{ mm}$
 - Rayon de raccordement : $r^m = 4 \text{ mm}$
- ◆ Le serre-flan
 - Diamètre extérieur : $\phi_{ext}^s = 90 \text{ mm}$
 - Diamètre intérieur : $\phi_{int}^s = 33.9 \text{ mm}$
 - Hauteur : $H^s = 10.5 \text{ mm}$
- ◆ Le poinçon
 - Diamètre : $\phi^p = 33 \text{ mm}$
 - Rayon de raccordement : $r^p = 5 \text{ mm}$
- ◆ Le flan
 - Diamètre : $\phi^F = 73 \text{ mm}$
 - Épaisseur : $e^F = 1 \text{ mm}$

Le flan est placé entre la matrice et le serre-flan. Le maillage²³ du flan est composé de six-cent-quarante (640) éléments axisymétriques avec intégration réduite CAXR, avec quatre couches d'éléments sur l'épaisseur. Le coefficient de frottement,

²³De même, la discrétisation géométrique utilisée au cours de cette simulation est obtenue après une étude de convergence du maillage.

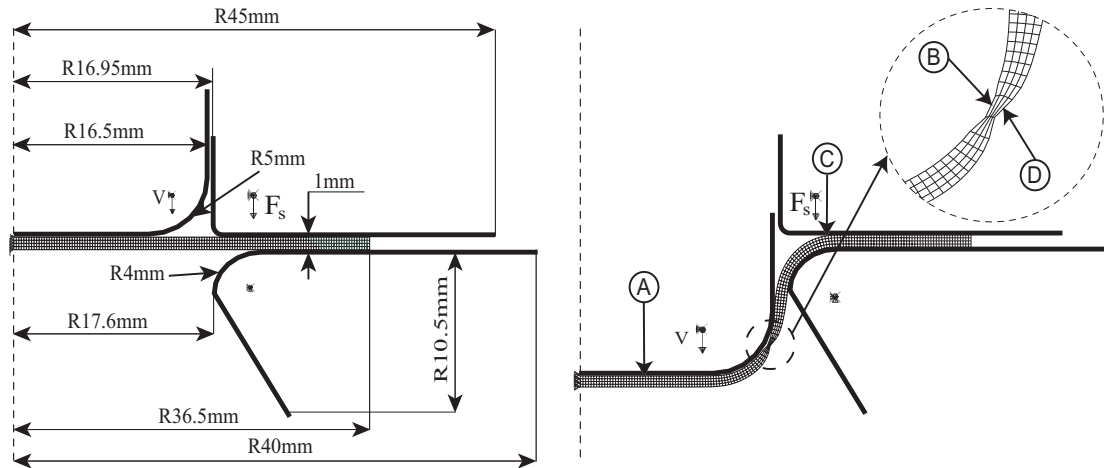


FIG. 4.11 – Maillage initial et final et conditions de chargement au cours de l'essai d'emboutissage de Swift.

pris pour l'ensemble des corps en contact, a été déterminé expérimentalement par le CETIM/Senlis et est égale à $\mu_f = 0,17$ [KOK07, Khe04]. Pour des considérations de symétrie de la géométrie et du chargement, l'essai est modélisé en axisymétrique. Les outils sont modélisés par des solides rigides indéformables. Un effort de serrage $F_s = 500 \text{ daN}$ est appliqué par le serre-flan, tout au long du chargement, pour restreindre le glissement du flan et pour prévenir de toute formation de plis ou cassures, comme le montre la figure 4.11. Les déplacements de la matrice sont totalement bloqués. La forme finale de la tôle est obtenue grâce au mouvement vertical du poinçon auquel nous avons affecté un déplacement $u = 12 \text{ mm}$. Afin d'assurer une modélisation axisymétrique, le déplacement radial du flan au niveau de l'axe de symétrie est bloqué.

Le matériau constitutif du flan est un alliage d'aluminium ayant les caractéristique suivantes :

- ◆ module de YOUNG $E = 70 \text{ GPa}$;
- ◆ coefficient de POISSON $\nu = 0,33$;
- ◆ densité $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$;
- ◆ limite d'élasticité $\sigma_0 = 114 \text{ MPa}$;

L'écouissage isotrope de la matrice est modélisé par la loi puissance (3.22) avec un exposant d'écouissage $n = 0,146$. En l'absence de données expérimentales sur la microstructure de l'alliage d'aluminium, nous avons choisi une porosité initiale $f_0 = 0,1\%$ et un paramètre de forme initial $S_0 = 1,38$:

	f_0 (%)	S_0	q_i
GLD	0,1	1,38	$q_0 = 1,6$
GTN	0,1	—	$q_1 = 1,5, q_2 = 1,1$

TAB. 4.4 – Caractéristiques microstructurales de l’alliage d’aluminium.

4.3.2 Discussion des résultats

La figure 4.12 représente une comparaison des tracés décrivant l’évolution de la force d’emboutissage en fonction de la course du poinçon, obtenus expérimentalement et numériquement en utilisant les modèles GLD et GTN. Nous observons une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et ceux prédit par le modèle GLD. L’effort maximal $F_{max}^{GLD} = 25,81 \text{ kN}$ obtenu en utilisant ce dernier est légèrement inférieur à celui obtenu expérimentalement $F_{max}^{exp} = 25,92 \text{ kN}$. Ces deux forces sont atteintes pour pratiquement un même déplacement du poinçon : $u_{max}^{GLD} = 10,17 \text{ mm}$ et $u_{max}^{exp} = 10,28 \text{ mm}$. Cependant, celle obtenue lors de la simulation avec le modèle GTN ($F_{max}^{GTN} = 22,43 \text{ kN}$) est sensiblement différente des deux premières. Le déplacement du poinçon à ce moment est lui aussi distinct $u_{max}^{GTN} = 9,15 \text{ mm}$. Nous donner dans le tableau 4.5 un récapitulatif des efforts maximaux d’emboutissage obtenus expérimentalement et numériquement avec les modèles GTN et GLD, ainsi que les déplacements du poinçon leurs correspondants.

	F_{max} (kN)	u (mm)	Erreur- F_{max}	Erreur- u
Expérience	25,92	10,28	0%	0%
GLD	25,81	10,17	0,4%	1,1%
GTN	22,43	9,15	13,5%	11,0%

TAB. 4.5 – Points représentatifs de la courbe force-déplacement au cours de l’essai d’emboutissage de Swift.

Une estimation de l’erreur commise lors de la prédiction de la force maximale d’emboutissage et du déplacements du poinçon lui correspondant lors de la simulation avec les deux modèles, en supposant les mesures expérimentales exactes, figure dans le même tableau. Cette erreur est relativement importante lors de la simulation avec le modèle GTN. Elle varie entre 11% (force) et 13,5% (déplacement). Alors que celle commise en utilisant le GLD est insignifiante, elle est de l’ordre de 0,4% pour l’effort et 1,1% pour le déplacement de l’outil.

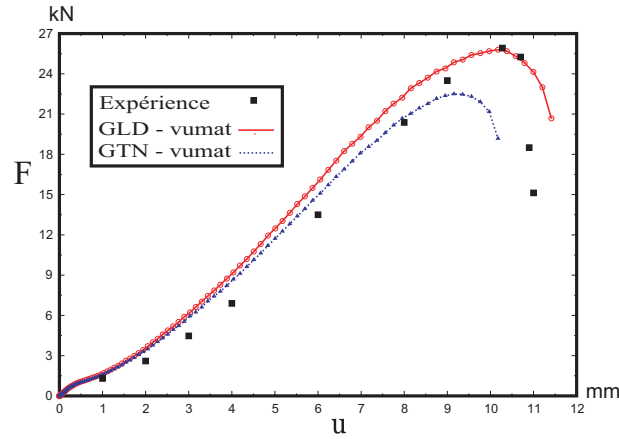


FIG. 4.12 – Évolution de la force d'emboutissage F en fonction du déplacement du poinçon u .

	F	G	H	L	M	N
Matériau isotrope	0,5	0,5	0,5	1,5	1,5	1,5
Matériau du flan	0,9	0,1	0,9	1,5	1,5	1,65

TAB. 4.6 – Constantes de Hill du flan et celles d'un matériau isotrope.

Bien que la force maximale d'emboutissage ait été prédite correctement par le modèle GLD, nous apercevons sur la figure 4.12 un certain décalage entre les courbes numérique et expérimentale. Cet écart peut trouver une explication dans le comportement du matériau du flan qui a été identifié expérimentalement comme un matériau orthotrope [Khe04, KOK07], alors que le comportement de la matrice lors de la simulation avec le modèle GLD est isotrope. Les constantes de HILL²⁴ identifiées pour simuler le comportement orthotrope du flan sont résumées dans le tableau 4.6. À titre de comparaison, nous donnons sur ce même tableau les valeurs de ces constantes dans le cas d'un matériau isotrope. Néanmoins, la prise en compte du changement de formes des cavités dans le modèle GLD permet de considérer le comportement macroscopique du matériau isotrope transverse. Ceci peut justifier la bonne prédiction par ce modèle de la force maximale d'emboutissage. Une amélioration du graphe "Force-Déplacement de l'outil" peut être envisagée en proposant une extension du modèle GLD au cas d'une matrice orthotrope.

La figure 4.13-a montre la répartition de la porosité au moment de l'initiation de la rupture du flan. Une comparaison de la forme de l'embouti obtenue expérimentalement et celle décrite numériquement par le modèle GLD nous permet de constater que les deux géométries sont pratiquement identiques, et que la rupture apparaît au même endroit (figure 4.13-b).

La figure 4.14 donne l'évolution de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$, de la porosité f et du paramètre de forme S en quatre éléments du flan (A), (B), (C) et

²⁴Un rappel sur le critère de HILL est donné en appendice

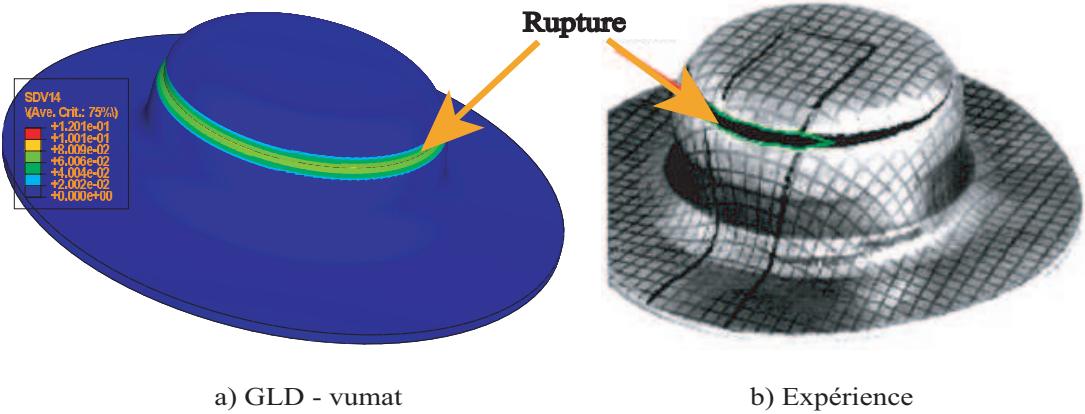


FIG. 4.13 – Initiation de la rupture sur l'embouti. [KOK07]

(D) en fonction de la course de l'outil u . Les positions de ces quatre éléments sont représentées sur la figure 4.11 pour un déplacement de l'outil $u = 11,82 \text{ mm}$. Nous observons sur la figure 4.14-a que la zone qui se plastifie le plus est située sur la jupe de l'embouti (B et D). Cependant, le degré de plastification de la surface du flan située du côté de la matrice (D) est plus prononcé que celui du côté de l'outil (B). La région se trouvant au fond de l'embouti (A) est la partie de l'embouti la moins plastifiée, alors que nous observons une plastification moyenne de la zone située entre le serre-flan et la matrice (C). Les degrés de plastification atteints pendant la simulation avec le GLD sont plus élevés que ceux atteints en utilisant le GTN.

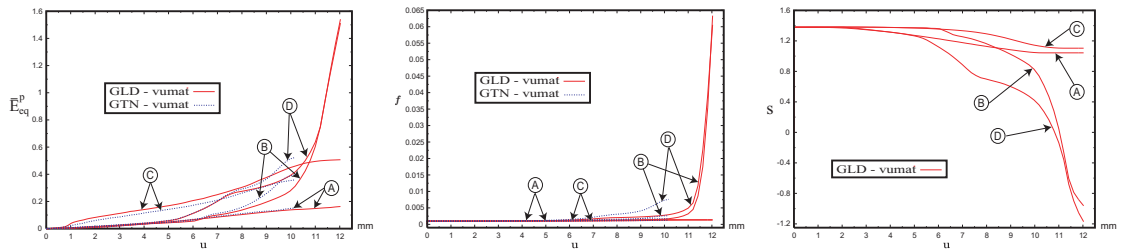


FIG. 4.14 – Évolution de la microstructure de quatre éléments de l'embouti.

L'évolution des porosités des parties (B) et (D) se fait lentement au début de l'emboutissage puis s'accélère au moment de la coalescence (figure 4.14-b). Cette augmentation est plus prononcée dans le cas de la simulation avec le modèle GLD. Les éléments (A) et (C) s'endommagent modérément au cours des deux simulations. Les cavités des quatre éléments ont tendance à s'aplatir au cours du procédé d'emboutissage (figure 4.14-c). Cet aplatissement s'accroît dans les régions (B) et (D) au début de la coalescence.

Nous donnons sur les figures 4.15 et 4.16 les isovaleurs de la porosité f , de la contrainte moyenne de pression σ_p et de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$.

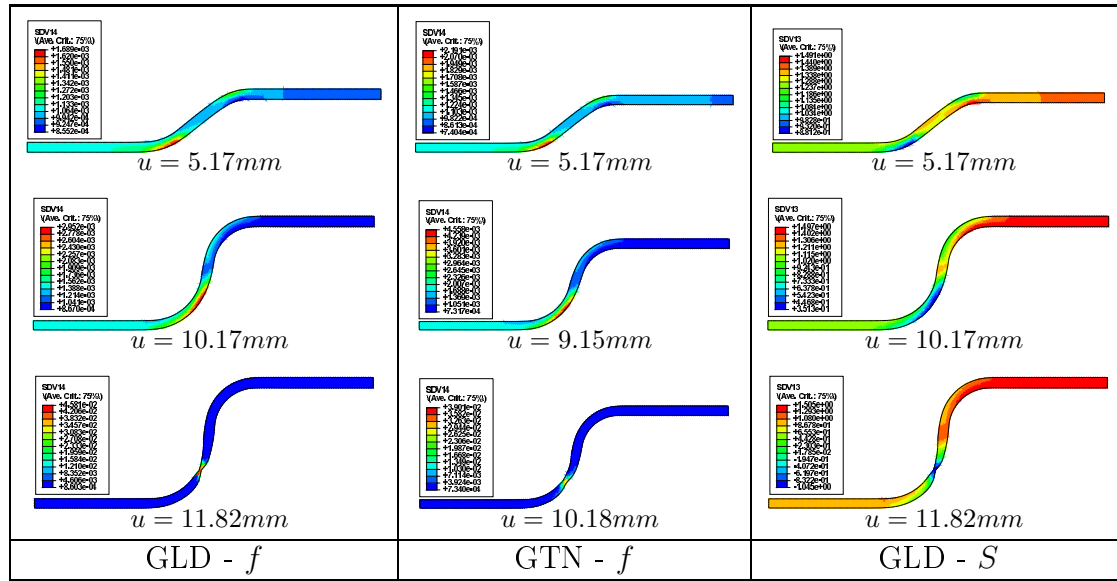


FIG. 4.15 – Isovaleurs de la porosité f et paramètre de forme S dans l'embouti.

estimées avec les modèles GTN et GLD ainsi que la distribution du paramètre de forme S calculée en employant le GLD à trois déplacements différents du poinçon.

La première ligne correspond à un déplacement de l'outil $u = 5,17\text{ mm}$. À cet instant, les modèle GLD et GTN prédisent un plus grand endommagement dans la portion au bas de la jupe de l'embouti, alors que les autres régions restent relativement peu endommagées. Les cavités se trouvant dans la zone de fortes porosités prennent des formes plus aplaties. La collerette et la région basse de sa jupe sont sollicitées en traction, alors que les autres portions le sont en compression, notamment celle située sous le serre-flan. Cette dernière est la plus plastifiée dans le cas des deux simulations en raison de l'effort de maintien appliqué par le serre-flan.

La deuxième ligne des deux figures 4.15 et 4.16 contient les isovaleurs obtenues au moment où la force maximale est atteinte. Cela correspond à un déplacement du poinçon égal à $u = 10,17\text{ mm}$ dans le cas du GLD et $u = 9,15\text{ mm}$ dans le cas du GTN. La porosité se concentre toujours au même endroit de la tôle. Cette zone d'endommagement maximale devient plus large dans le cas du modèle GLD. À ce stade d'emboutissage, les vides se trouvant sur la jupe de la tôle continuent à s'aplatir. Cet aplatissement est plus prononcé dans régions se trouvant du côté de la matrice. Nous observons la même situation en ce qui concerne le mode de chargement : la jupe et la collerette de la tôle sont sollicitées en traction, alors que la partie sous le serre-flan l'est en compression. Cette dernière région est la plus plastifiée à ce moment.

La dernière ligne correspond à un déplacement de l'outil $u = 11,82\text{ mm}$ dans la circonstance d'un calcul avec le GLD et $u = 10,18\text{ mm}$ dans celle d'une estimation avec le GTN. La rupture de la tôle survient au niveau de la partie inférieure de la jupe. Comme il fallait s'y attendre, les porosités maximales se concentrent dans

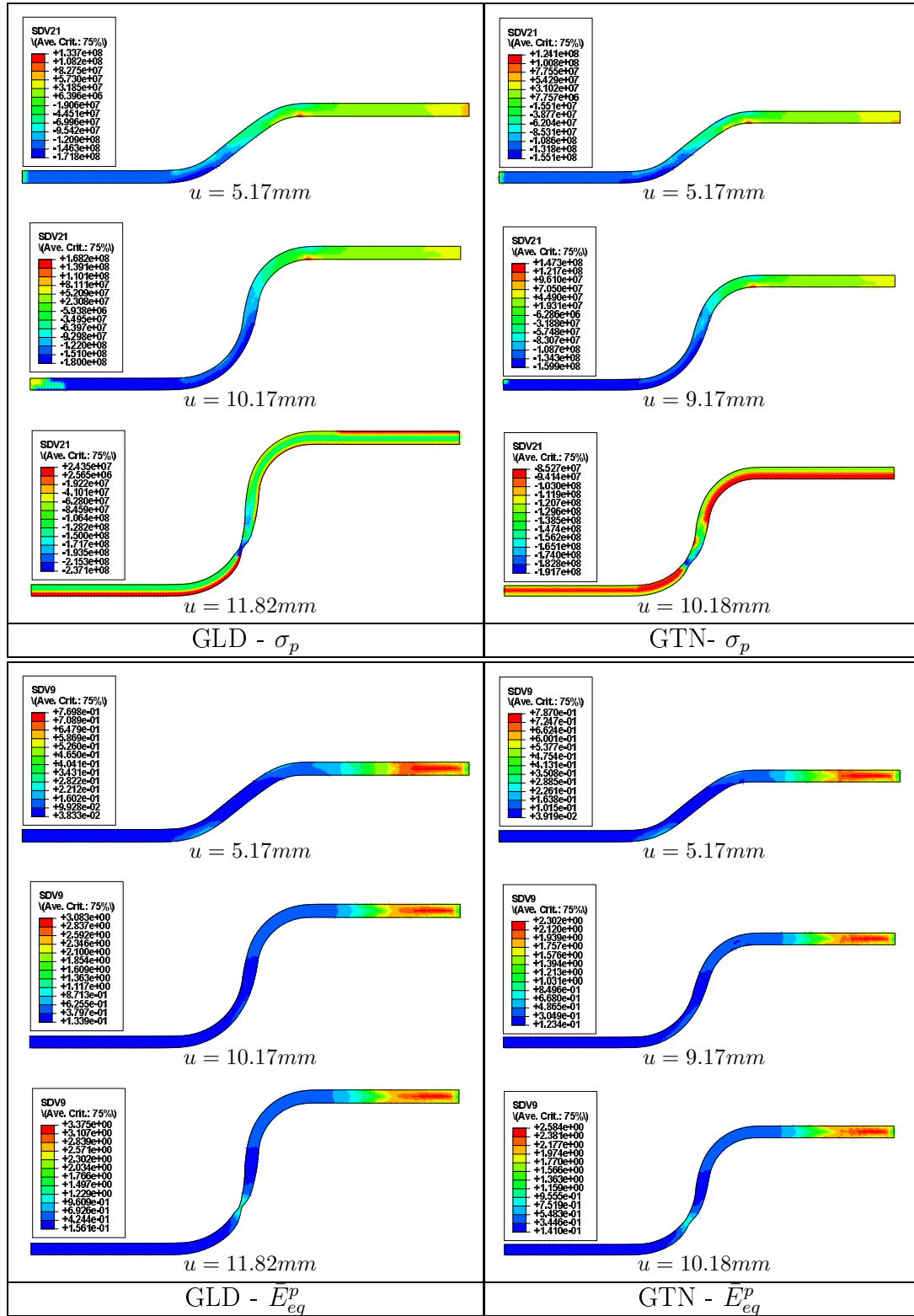


FIG. 4.16 – Isovaleurs de la pression hydrostatique σ_p et de la déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p$ dans l'embouti.

cette zone dans le cas des deux simulations. Alors que les cavités situées dans cette portion sont très aplaties, celles se trouvant au dessous du flan restent toujours allongées. Dans la situation d'une approximation avec le modèle GTN toutes les parties du flan sont sollicitées en traction.

Cependant, nous apercevons, dans le cas de l'utilisation du GLD que quelques fibres de la tôle sur la collerette du côté de la matrice, ainsi que les fibres en contact avec le serre-flan et la matrice sont soumises à un chargement de traction. La déformation plastique cumulée reste toujours concentrée dans la zone se trouvant entre la matrice et le serre-flan. Les autres portions de la tôle sont uniformément plastifiées, exception faite de celles se trouvant dans la zone de rupture où la déformation plastique est plus élevée.

4.4 Étude du procédé de laminage

Le laminage est une technique de forgeage qui consiste à entraîner une barre entre deux cylindres, appelés rouleaux, tournant en sens contraire. Ces derniers peuvent être cannelés ou à table lisse, leurs volumes varie proportionnellement à la section du produit fini à obtenir. Ce procédé a fait l'objet de plusieurs études expérimentales et numériques [NZR06, AMEM06, YGZZ06, FNSM06, ZMWC06]. Nous présentons dans ce qui suit une étude numérique du laminage d'une barre de section carrée entre deux cylindres lisses effectuée en utilisant le modèle GLD non couplé à la température que nous notons dans cette section "GLD-Isotherme", avec ceux obtenus avec le GLD couplé à la température dans des conditions adiabatiques noté "GLD-Adiabatique" et le modèle GLD couplé à la température dans les conditions d'un échauffement non adiabatiques : "GLD-Non adiab.".

4.4.1 Description des conditions de la simulation

La barre a une longueur initiale $l = 92\text{ mm}$ et une section carrée de largeur initiale $b = 20\text{ mm}$. Le rayon et la largeur des deux cylindres sont respectivement $R = 170\text{ mm}$ et $L = 40\text{ mm}$. L'exemple est traité en 3D, la barre déformable est discrétisée en deux-mille-neuf-cents-quarante-quatre (2944) éléments de type C3D8RT au cours de la simulation dans des conditions d'échauffement non adiabatique et C3D8R dans les deux autres cas. Les cylindres modélisés comme solide rigide indéformable sont affectés d'une vitesse de rotation constante $\omega_c = 6.28\text{ rad/s}$. Ils sont disposés de telle manière à obtenir un écrasement (réduction de la hauteur de la barre) égal à $\Delta h = 50\%$. Les maillages initial et déformé de la barre sont indiqués sur la figure 4.17.

Le matériau constitutif de la barre est un acier ayant les caractéristiques suivantes :

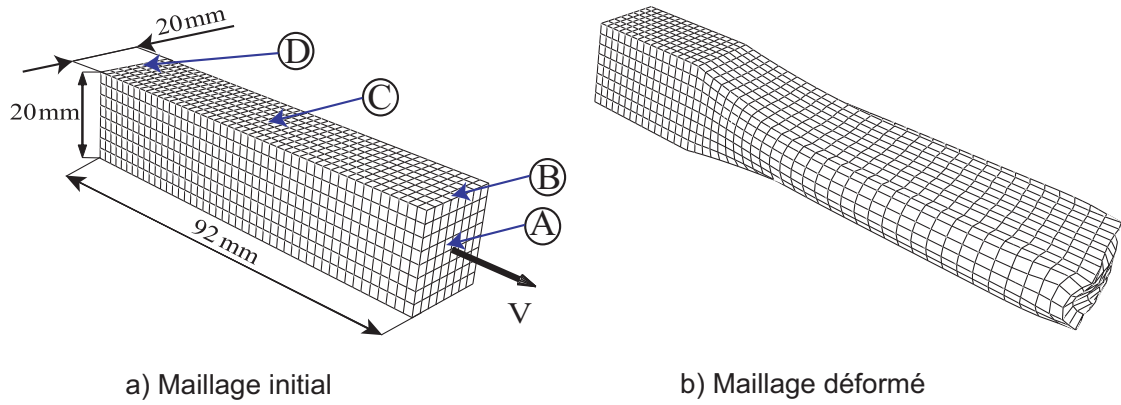


FIG. 4.17 – Maillages initial et final de la barre laminée.

- ◆ module de YOUNG $E = 170 \text{ GPa}$,
- ◆ coefficient de POISSON $\nu = 0.33$,
- ◆ densité $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$,
- ◆ et limite d'élasticité $\sigma_o = 324 \text{ MPa}$.

L'écrouissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi puissance avec un coefficient d'écrouissage $n = 0,12$. Le coefficient de frottement entre la barre et les rouleaux est égal à $\mu_f = 0,3$. Les caractéristiques thermiques et microstructurales utilisées pendant les simulations sont données dans le tableau 4.7.

f_0 (%)	S_0	λ	C_v (J/kgK)	$\mathcal{K}$ (W/mK)	α (K ⁻¹)	ξ
0,25	1,95	1	600	46	$1,1 \cdot 10^{-5}$	0,85

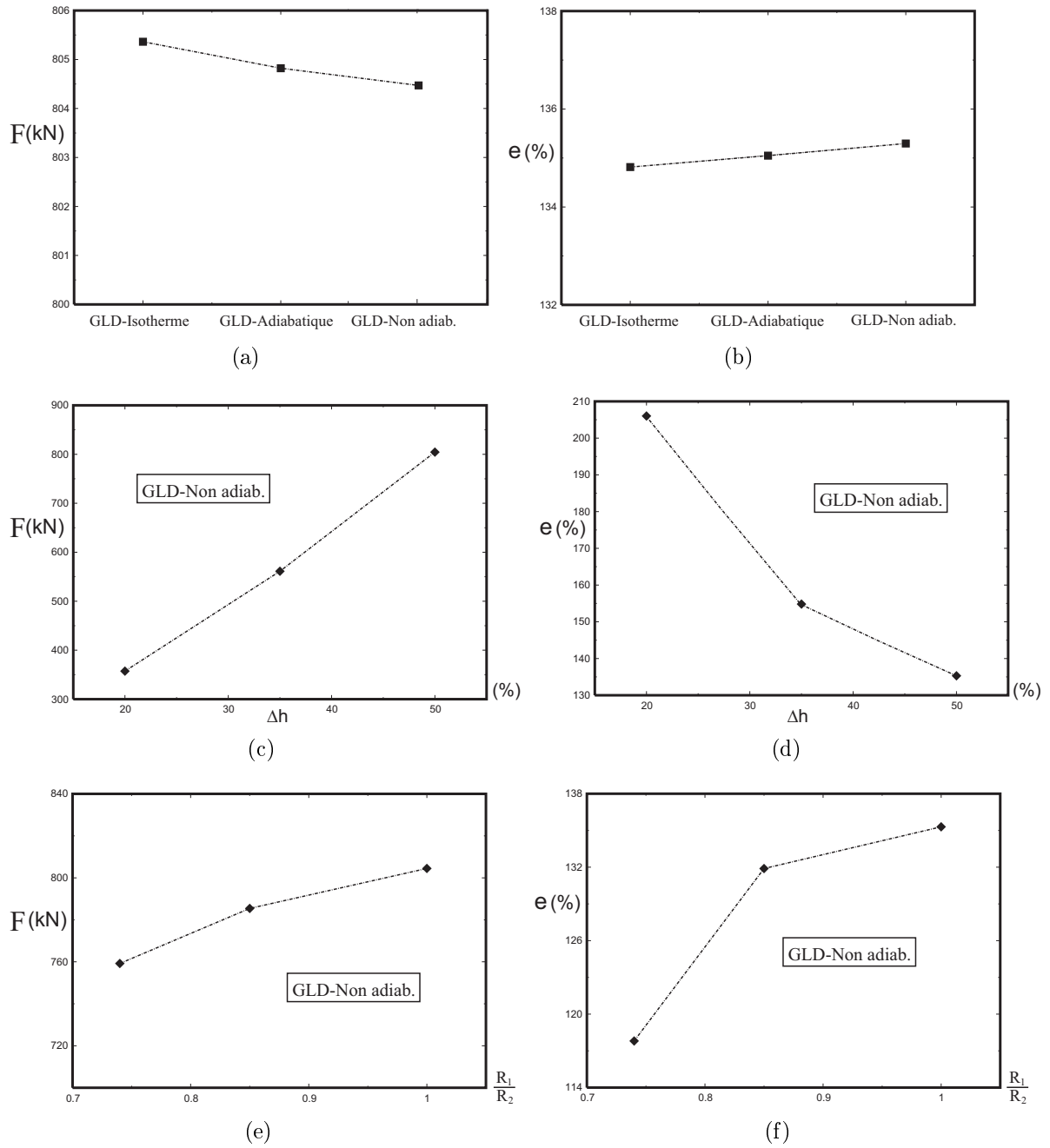
TAB. 4.7 – Valeurs des principaux paramètres utilisés lors de l'étude du procédé de laminage d'une barre de section carrée.

4.4.2 Discussion des résultats

L'étude du procédé de laminage est effectuée en suivant l'évolution de la force maximale de laminage F et de l'élargissement e de la barre. Cette dernière quantité est définie en pourcentage d'écrasement Δh du barreau par la relation

$$e = \frac{(b_2 - b_1)}{\Delta h} \cdot 100 \quad (4.1)$$

où b_1 et b_2 sont respectivement la largeur initiale et finale de la barre. Nous présentons sur les figures 4.18-a et 4.18-b une comparaison des forces maximales de laminage F et de l'élargissement e obtenue avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.". Ce dernier prédit une force de laminage plus petite que les deux autres. Il est à noter que le plus grand effort est

FIG. 4.18 – Évolution de la force de laminage F et de l'élargissement de la barre.

obtenu en utilisant le modèle "GLD-Isotherme" pour lequel l'adoucissement thermique n'est pas pris en compte. Le plus grand élargissement de la barre est prédit dans le cas d'un calcul dans des conditions d'un échauffement adiabatique ("GLD-Adiabatique"), alors que le plus petit est obtenu dans des conditions de simulation isothermes ("GLD-Isotherme"). Les valeurs particulières de ces tracés sont résumées dans le tableau 4.8.

	$F_{max} (kN)$	$e(\%)$
"GLD-Isotherme"	805,362	134,815
"GLD-Adiabatique"	804,822	135,048
"GLD-Non adiab."	804,471	135,296

TAB. 4.8 – Points représentatifs des tracés décrivant les variations de la force de laminage et de l'élargissement.

Nous concluons de ce qui précède que l'introduction d'un échauffement thermique au cours de la modélisation du laminage de la barre génère un adoucissement du matériau qui a pour effet de diminuer la force maximale nécessaire à son laminage et une augmentation de l'élargissement ; qui sont tous les deux accentués dans le cas où l'échauffement se produit dans des conditions non adiabatiques.

Les graphes 4.18-c et 4.18-d donnent les variations de la force maximale de laminage F et de l'élargissement e obtenues en utilisant le modèle "GLD-Non adiab." pour trois écrasements $\Delta h = 20\%$, $\Delta h = 35\%$ et $\Delta h = 50\%$. La force de laminage varie proportionnellement au pourcentage d'écrasement alors que l'élargissement y évolue inversement. Ce résultats est en accord avec ceux obtenus numériquement par FARHAT-NIA et al. [FNSM06] et AKBARI MOUSAVI et al. [AMEM06] en utilisant un matériau élastoplastique non endommageable.

L'influence de l'utilisation de rouleaux de rayons différents est montrée sur les figures 4.18-e et 4.18-f. Nous notons dans ce qui suit toutes les caractéristiques qui font référence au rouleau supérieur par l'indice 1 (exemple le rayon du cylindre supérieur est noté R_1) et celles liées au rouleau inférieur par l'indice 2. Trois rapports de rayons ont été utilisés $R_1/R_2 = 0,74$, $R_1/R_2 = 0,85$ et $R_1/R_2 = 1$. La force de laminage F et l'élargissement e évoluent proportionnellement au rapport R_1/R_2 .

La figure 4.19 donne la contrainte équivalente normalisée de VON MISES Σ_{eq}/σ_0 , la porosité f , le paramètre de forme S et la température T en fonction de la déformation équivalente E_{eq} en quatre éléments (A), (B), (C), et (D) de la barre. Leurs positions initiales sont indiquées sur la figure 4.17. Ces courbes représentent

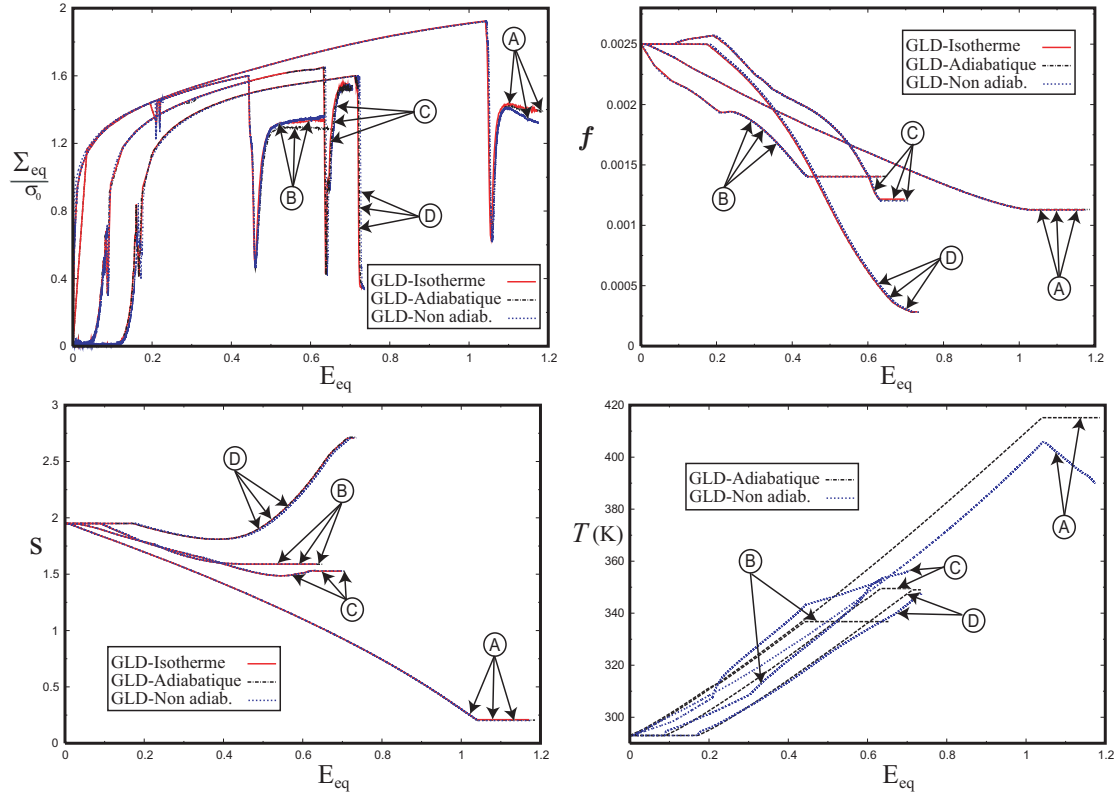


FIG. 4.19 – Évolution de la contrainte équivalente normalisée de von Mises Σ_{eq}/σ_0 , de la microstructure (f et S) et de la température T de quatre éléments de la barre.

une comparaison des résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.". Elles présentent des allures pratiquement pareilles. Cependant, une analyse des valeurs des contraintes montre que celles obtenues en utilisant le modèle "GLD-Isotherme" sont plus élevées que celles calculées avec le "GLD-Non adiab.", qui prédit à son tour des niveaux de contraintes plus grands que ceux de la simulation avec le modèle "GLD-Adiabatique". Nous observons que la zone de la barre en contact avec le rouleau (B), (C), et (D) est la région qui se déforme le moins en comparaison avec le centre (A). Les formes des cavités de la barre ont tendance à se refermer au cours du procédé. Exception faite de celles se trouvant dans la portion (D) qui s'allongent juste après passage de la section de matériau qui les contient entre les rouleaux. Les porosités des éléments (B), (C), et (D) cessent de diminuer juste après leurs passage entre les rouleaux. Alors que les volumes des vides situés au centre de la barre (A) continuent à baisser jusqu'à un certain allongement de la barre. L'élévation de la température prédite par le modèle "GLD-Non adiab." dans la région en contact avec l'outil est plus grande que celle obtenue dans des conditions d'un échauffement adiabatique. Ceci peut s'expliquer par les échanges thermiques qui s'effectuent entre les rouleaux et la pièce. Alors qu'au centre de l'éprouvette se produit l'inverse, c'est-à-dire que le "GLD-Adiabatique" prédit de plus grandes températures.

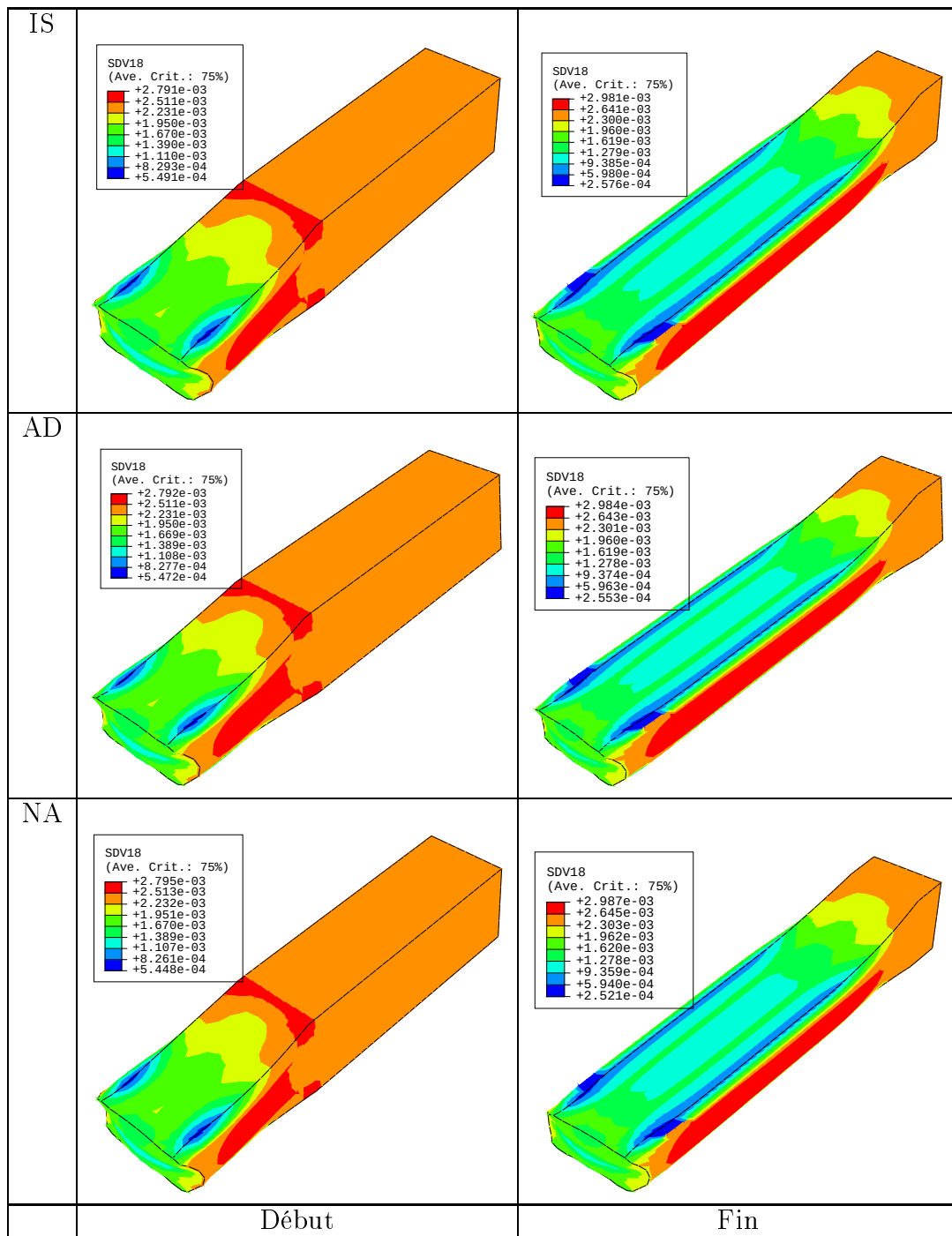


FIG. 4.20 – Isovaleurs de la porosité f à deux instants différents du procédé de laminage. IS, AD et NA correspondent, respectivement, aux résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.".

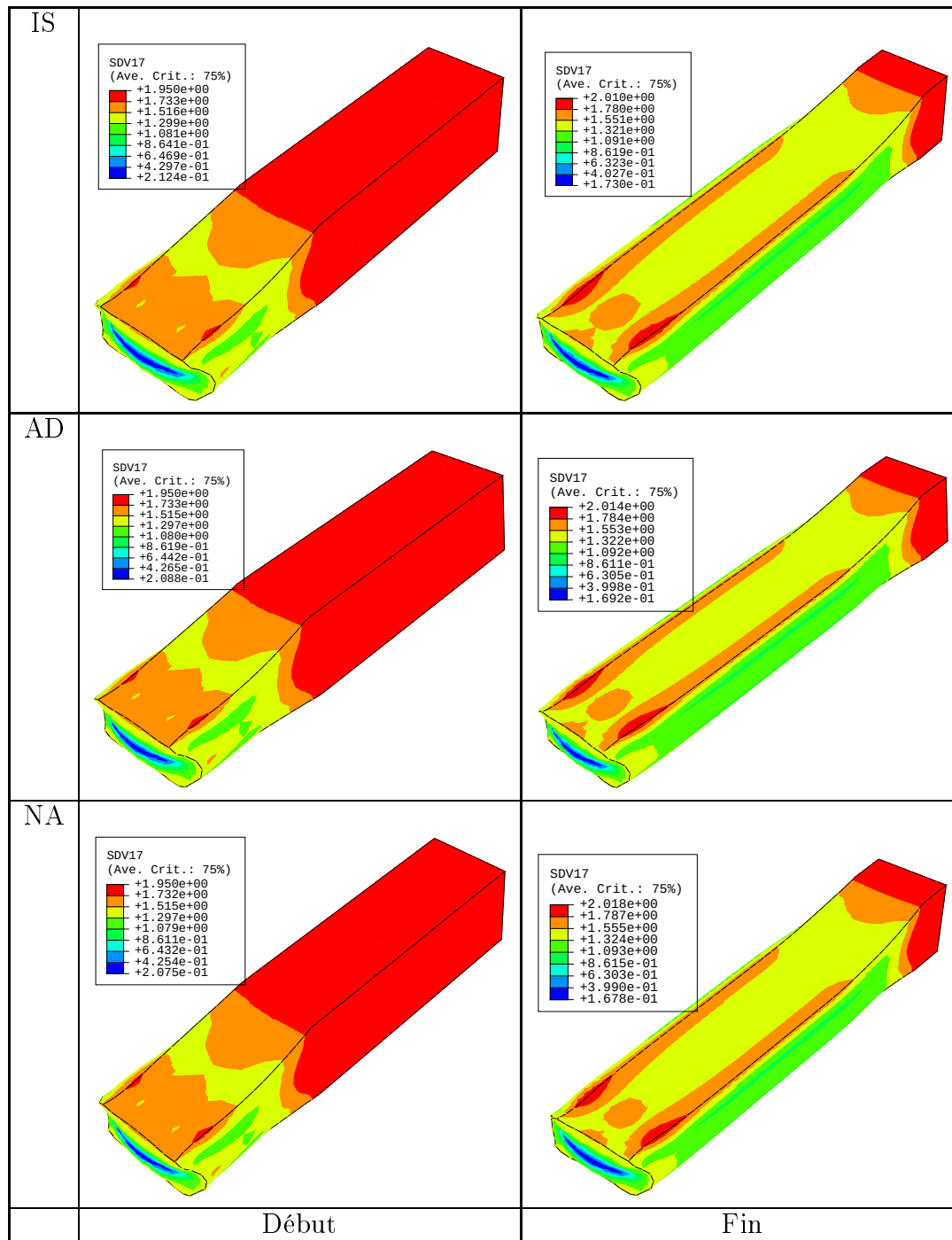


FIG. 4.21 – Isovaleurs du paramètre de forme S à deux instants différents du procédé de laminage. IS, AD et NA correspondent, respectivement, aux résultats obtenus avec les modèles "GLD-Isotherme", "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.".

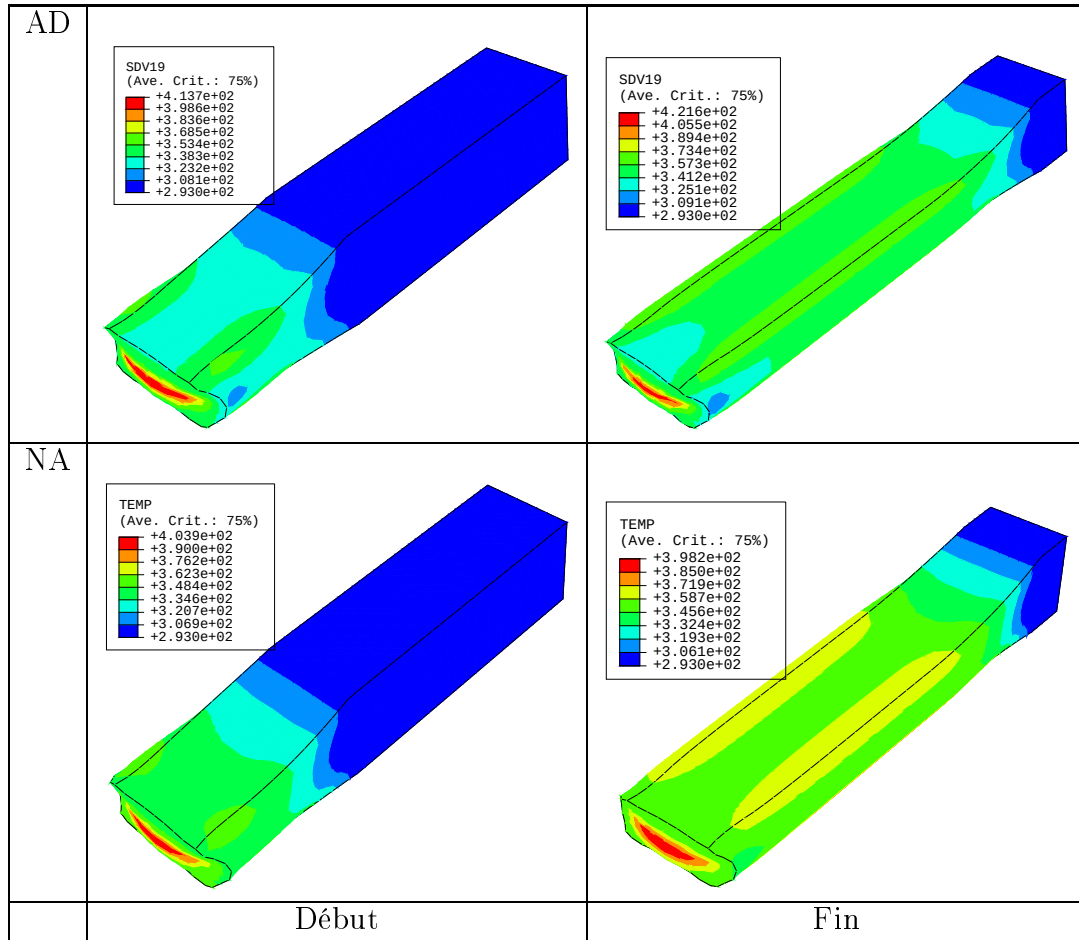


FIG. 4.22 – Isovaleurs de la température T à deux instants différents du procédé de laminage. AD et NA correspondent, respectivement, aux résultats obtenus avec les modèles "GLD-Adiabatique" et "GLD-Non adiab.".

Nous représentons sur les figures 4.20-4.22 les distributions de la porosité f , du paramètre de forme S et de la température T à deux instants différents de l'opération de laminage. Le premier est pris au début du procédé et est noté "Début". Il correspond au moment où la barre est engagée entre les rouleaux. Le deuxième est désigné par "Fin". Il est choisi au moment où la partie arrière de la barre commence à être entraînée entre les cylindres. Les isovaleurs de la porosité f et du paramètre de forme S prédites par les trois modèles sont pratiquement pareilles.

À l'instant "Début" la porosité se concentre sur les parties latérales de la barre en raison de l'état de contrainte de traction qui règne dans ces portions, ainsi que dans la zone qui commence à s'engager entre les rouleaux. Les régions situées au voisinage des arrêtes de la pièce sont les moins poreuses. À ce moment, toutes les cavités s'aplatissent. Comme dans le cas du forgeage de lopins, celles situées au centre de la barre subissent le plus grand aplatissement. Au deuxième instant, les porosités maximales et minimales se trouvent toujours localisées dans les régions latérales laminées et les portions proches des arêtes du barreau. Les cavités

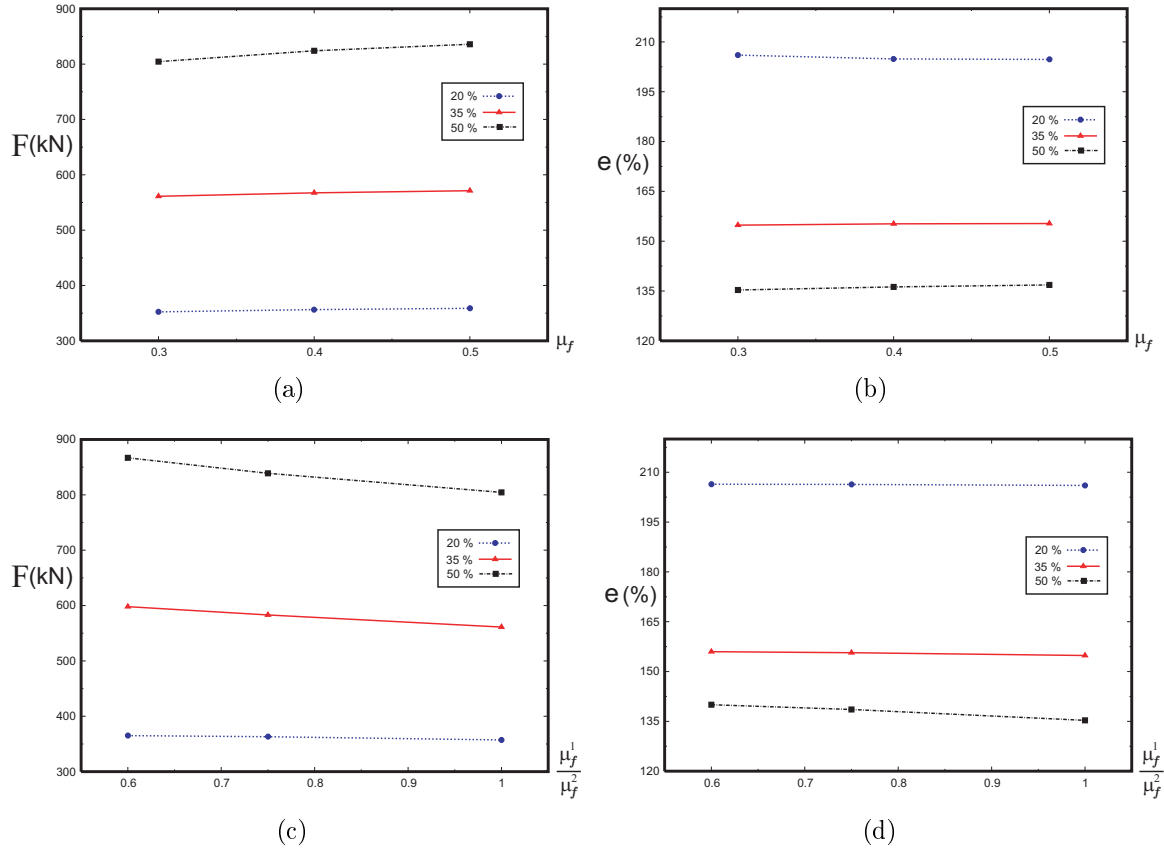


FIG. 4.23 – Influence du frottement sur la force de la minage F et l'élargissement e .

localisées sur cette dernière sont les plus allongées en comparaison au reste de la pièce.

Les niveaux de températures diffèrent selon que le calcul se déroule dans des conditions adiabatiques ou non. Le modèle "GLD-Adiabatique" prédit des températures plus élevées que celles obtenues en utilisant le "GLD-Non adiab.". Les parties de concentration des fortes températures sont situées au centre de la pièce. À l'instant "Fin", une élévation supplémentaire de température est observée dans les régions qui se trouvent sur les arêtes de la barre.

Nous présentons dans ce qui suit une étude paramétrique de l'influence de différents paramètres sur le procédé de laminage. Les simulations ont été effectuées en utilisant le modèle "GLD-Non adiab." pour des écrasements $\Delta h = 20\%$, $\Delta h = 35\%$ et $\Delta h = 50\%$.

Le coefficient de frottement μ_f . Les résultats des figures 4.23-a et 4.23-b peuvent correspondre à l'utilisation de rouleaux de matériaux différents où de lubrifiants distincts entre la pièce et les deux cylindres. Ces deux circonstances sont décrites dans la présente étude en variant le coefficient :

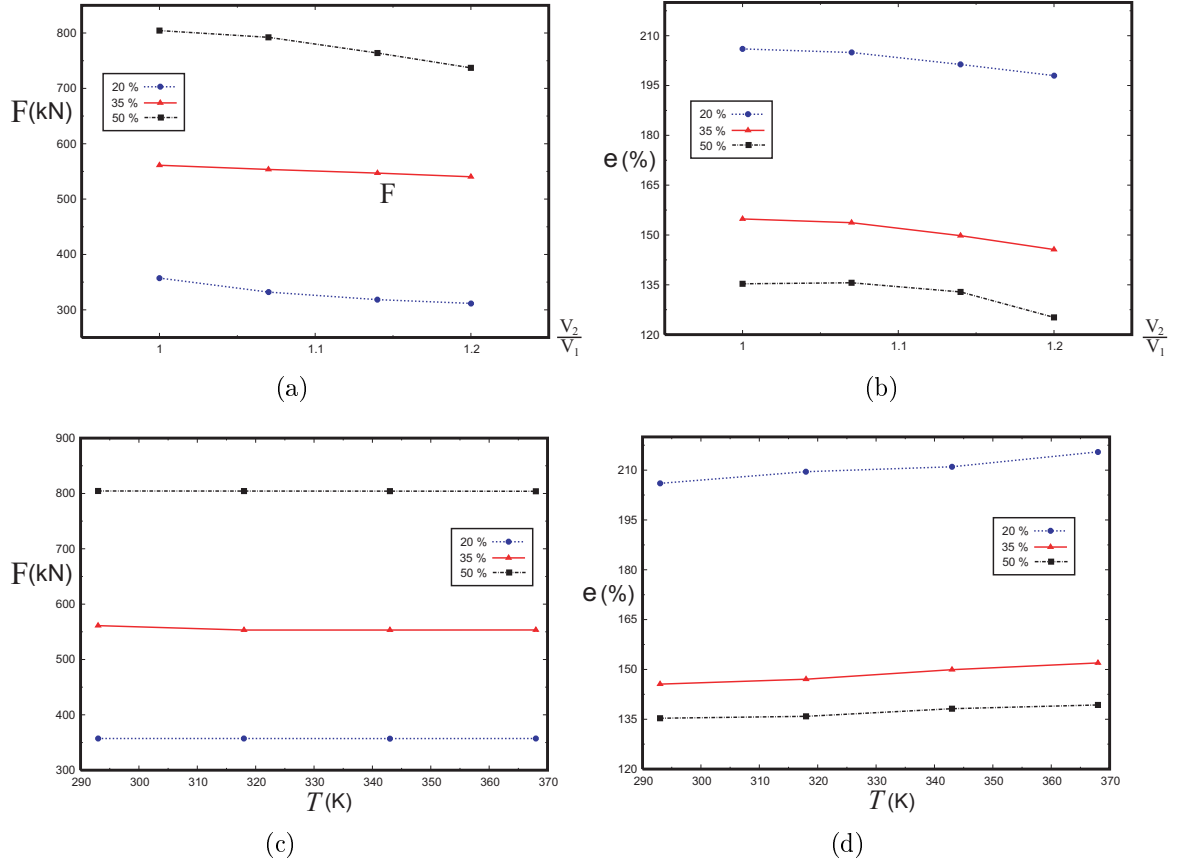


FIG. 4.24 – Influence de la vitesse des rouleaux et de la température initiale de la barre sur la force de laminage F et l'élargissement e .

$\mu_f = 0,3$, $\mu_f = 0,4$ et $\mu_f = 0,5$. Nous reproduisons l'évolution de la force de laminage F et de l'élargissement de la barre e en fonction de ce paramètre. L'effort F augmente proportionnellement à l'augmentation du coefficient de frottement. Ce résultat est en accord avec ceux obtenus par ZHAO et al. [ZMWC06]. L'augmentation de la force en fonction du coefficient de frottement est plus prononcée dans le cas d'un écrasement $\Delta h = 50\%$. Cependant, l'élargissement e présente peu de sensibilité à l'augmentation du coefficient de frottement.

Le rapport des coefficients de frottement μ_f^1/μ_f^2 . Les résultats des figures 4.23-c et 4.23-d correspondent à deux situations. La première est l'utilisation de cylindres de matériaux différents au cours du procédé. La deuxième serait celle où des lubrifications distinctes entre la pièce et les deux cylindres sont employées. Cette état est caractérisé dans notre cas par le rapport des coefficients de frottement μ_f^1/μ_f^2 . Trois valeurs sont utilisées $\mu_f^1/\mu_f^2 = 0,6$, $\mu_f^1/\mu_f^2 = 0,75$ et $\mu_f^1/\mu_f^2 = 1$. La force de laminage F diminue avec l'augmentation du rapport μ_f^1/μ_f^2 , avec une pente plus grande dans la circonstance d'un écrasement $\Delta h = 50\%$. Dans le cas où celui-ci est égal à $\Delta h = 20\%$, l'effort maximal de laminage diminue modérément. L'élargissement diminue

aussi au fur et à mesure de l'évolution du rapport μ_f^1/μ_f^2 . Dans la situation d'un écrasement $\Delta h = 35\%$, l'élargissement présente peu de sensibilité au rapport des coefficient de frottement.

Le rapport des vitesses V_2/V_1 . Les figures 4.24-a et 4.24-b donnent l'influence de la vitesse de rotation des rouleaux sur la force F et sur l'élargissement de la pièce e . Quatre rapports de vitesses sont employés $V_2/V_1 = 1$, $V_2/V_1 = 1,07$, $V_2/V_1 = 1,14$ et $V_2/V_1 = 1,2$. Nous observons que la force de laminage F est inversement proportionnelle au rapport V_2/V_1 . Cette dépendance a déjà été établie par MOUSAVI et al. [AMEM06] et FARHAT NIA et al. [FNSM06]. La chute de la courbe $F = F(V_2/V_1)$ est plus prononcée dans les cas $\Delta h = 20\%$ et $\Delta h = 50\%$. Il convient aussi de noter que l'élargissement de la barre e varie proportionnellement au rapport des vitesses.

La température initiale T_0 . Quatre températures initiales sont utilisées pour effectuer ces simulations : $T_0 = 293 K$, $T_0 = 318 K$, $T_0 = 343 K$ et $T_0 = 368 K$. La force de laminage présente peu de sensibilité à la température initiale T_0 de la pièce (figure 4.24-c). Cependant, l'élargissement de la barre augmente avec l'élévation de la température T_0 (figure 4.24-d). Cette sensibilité dépend en plus de l'écrasement Δh du barreau.

4.5 Conclusion

La comparaison des prédictions des modèles GTN et GLD a été effectuée dans le cas de la simulation de l'écrasement de trois lopins de formes différentes et de l'emboutissage d'une tôle mince. Dans cette dernière circonstance, les résultats expérimentaux et ceux obtenus avec le modèle GTN présentent un grand écart. Par contre, la force maximale d'emboutissage et le déplacement du poinçon lui correspondant calculés en utilisant le modèle GLD sont très satisfaisants. L'étude du laminage d'une barre carrée en 3D a permis de mettre en évidence le rôle de l'échauffement thermique d'origine mécanique au cours de la mise en forme. Elle a aussi servi à étudier les différents paramètres qui influencent ce procédé y compris l'effet de la température initiale de barre avant l'opération de mise en forme.

Appendice au chapitre 4

A.1. Calcul des contraintes axiale et orthoradiale agissant sur la surface extérieure du lopin

Les contraintes orthoradiale $\Sigma_{\theta\theta}$ et axiale Σ_{zz} agissant sur la surface extérieure du lopin ont été estimées à partir des mesures des déformations au même endroit [GRM96]. Nous présentons les grandes lignes de ces calculs.

En supposant que le comportement du matériau obéit à la loi de LEVY-MISES, l'incrément de déformation plastique s'écrit

$$dE_{ij} = d\lambda'_{ij} \quad (2)$$

où Σ'_{ij} sont les composantes du déviateur des contraintes. Puisqu'au niveau de la surface extérieure, la contrainte radiale est nulle $\Sigma_{rr} = 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} dE_{rr} &= 0 \\ dE_{\theta\theta} &= d\lambda\Sigma'_{\theta\theta} \\ dE_{zz} &= d\lambda\Sigma'_{zz} \end{aligned} \quad (3)$$

Du système d'équations 3, nous avons

$$\frac{\Sigma_{\theta\theta}}{\Sigma_{zz}} = \frac{2\beta^{\theta z} + 1}{\beta^{\theta z} + 2} \quad (4)$$

où $\beta^{\theta z} = dE_{\theta\theta}/dE_{zz}$ est la pente de la courbe $E_{\theta\theta} = E_{\theta\theta}(E_{zz})$. La contrainte équivalente de VON MISES dans ce cas est donnée par la relation

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\Sigma_{\theta\theta}^2 + \Sigma_{zz}^2 - \Sigma_{\theta\theta}\Sigma_{zz}} \quad (5)$$

En introduisant le coefficient $\beta^{\theta z}$ dans l'équation 5, nous aboutissons à

$$\Sigma_{zz} = \pm \frac{(\beta^{\theta z} + 2)}{\sqrt{3(\beta^{\theta z})^2 + 3\beta^{\theta z} + 3}} \Sigma_{eq} \quad (6)$$

La déformation plastique cumulée $\bar{E}_{eq}^p = \int_0^t \dot{\bar{E}}_{eq}^p = \int_0^t \sqrt{2(\dot{\mathbf{E}}^p : \dot{\mathbf{E}}^p)} / 3$ est obtenue en utilisant l'expression du travail plastique volumique Π sur la surface extérieure du lopin

$$d\Pi = \Sigma_{\theta\theta} dE_{\theta\theta} + \Sigma_{zz} dE_{zz} \quad (7)$$

En utilisant les relations 6 et 7, nous obtenons

$$\bar{E}_{eq}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \int_0^{E_{zz}} \sqrt{(E^{\theta z})^2 + E^{\theta z} + 1} \right| dE_{zz}$$

A.2. Critère de HILL et coefficients d'anisotropie

HILL (1948) a proposé un critère de plasticité pour matériaux orthotrope, c'est-à-dire qui respectent les trois plans de symétrie matérielle. Les intersections de ces plans de symétrie sont les axes d'orthotropie qui ont été pris comme repère pour l'écriture du critère. Ce dernier s'écrit

$$\Phi = \frac{1}{2} [F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2(L\sigma_{yz}^2 + M\sigma_{zx}^2 + N\sigma_{xy}^2)] \quad (8)$$

F , G , H , L , M et N sont les constantes d'anisotropie. Elles sont déterminées par une série d'essais de traction suivant les trois directions orientées suivant 0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage. Un matériau anisotrope peut être caractérisé par un coefficient d'anisotropie, appelé coefficient de LANKFORD qui est défini comme le rapport de la déformation plastique ε_2^p suivant la direction de la largeur (90°) et la déformation plastique ε_3^p suivant la direction de l'épaisseur (45°)

$$r = \frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_3^p} \quad (9)$$

La déformation plastique suivant l'épaisseur étant petite, elle est remplacée par la déformation plastique suivant la direction de la longueur (0°), en utilisant l'hypothèse de d'incompressibilité plastique

$$r = -\frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p} \quad (10)$$

Le coefficient de LANKFORD s'exprime donc en fonction de la direction de laminage ψ par

$$r_{\psi} = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \psi \cos^2 \psi}{F \sin^2 \psi + G \cos^2 \psi} \quad (11)$$

Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail de thèse a consisté à valider un modèle micro-mécanique pour la simulation numérique en mise en forme de matériaux. Le but recherché étant de mettre à la disposition des industriels un outil capable de prédire les zones d'amorçage de l'endommagement ainsi que son évolution en cours de chargement. Pour cela, il a fallu mettre en œuvre une modélisation des trois mécanismes physiques qui gouvernent la rupture ductile des métaux. Une attention particulière a été accordée aux échauffements générés durant le processus de déformation. Le couplage réalisé entre la température, la plasticité et l'endommagement permet de décrire l'échauffement de la matière lié à la dissipation mécanique aussi bien dans des conditions adiabatiques que dans la situation où des échanges thermiques peuvent s'opérer.

Les aspects théoriques et numériques entrant dans notre démarche ont été abordés. La phase de nucléation est supposée contrôlée par la déformation plastique cumulée, comme proposé par NEEDLEMAN et RICE [NR78]. Le stage de la croissance est décrit avec le modèle GLD que nous avons étendu au cas d'une matrice ayant un comportement thermomécanique. Deux critères de coalescence ont été utilisés selon le type de calcul. Le premier permet de prédire le début de la coalescence lorsque la porosité atteint une valeur critique f_c introduite par l'utilisateur, le deuxième est le critère de coalescence par striction interne du ligament établi par THOMASON [Tho85, Tho90]. Cette modélisation de la ruine ductile semble plus appropriée en raison d'une part de la capacité du modèle GLD à reproduire le changement de forme des cavités sous l'effet de l'écoulement plastique de la matrice, et d'autre part de l'échauffement thermique qui se produit dans les métaux pendant leur mise en forme.

La mise en œuvre informatique de la loi de comportement thermo-micromécanique a été faite en adoptant la formulation variationnelle à deux champs (le déplacement et la température), disponible avec le schéma explicite d'Abaqus. La résolution de ce problème s'effectue d'une manière séquentielle en intégrant le problème mécanique puis thermique, après avoir calculé la dissipation plastique. Le modèle GLD ainsi formulé a été implémenté en suivant le schéma élaboré par ARAVAS [Ara87]. Les aspects numériques liés à son extension aux grandes déformations ont été traités. Sa validation a été effectuée aussi bien sur des essais simples (calcul de cellules, essais de tractions) que sur des exemples industriels de mise en forme. Les résultats

obtenus ont confirmé le rôle de la prise en compte du changement de forme des cavités au cours du chargement et celui de l'effet du couplage thermomécanique sur la réponse du matériau.

Cependant, d'autres développements sont nécessaires afin d'affiner les prédictions des simulations et généraliser son utilisation pour l'étude d'autres procédés de fabrication. L'optimisation des opérations de mise en forme des matériaux doit aussi tenir compte de facteurs autres que la pièce à former. En effet, la modélisation de la déformabilité et de l'endommagement des outils, ainsi que de l'interface pièce-outil est un facteur déterminant pour l'obtention de la forme finale désirée. Une meilleure description de ces interactions peut être envisagée en introduisant le couplage frottement-température, en y incluant les effets de la température et éventuellement de l'endommagement.

Nous n'énonçons ici que les perspectives qui ont trait à l'amélioration de la modélisation numérique de la rupture ductile des métaux, qui intéressent actuellement l'équipe "Mécanique & Numérique" du laboratoire G.M.M.S²⁵, sans aborder les aspects expérimentaux qui ne sauraient être écartés dans toute démarche d'analyse basée sur des modèles micromécaniques.

Effet des inclusions. SIRUGUET et al. [SL04a, SL04b] ont proposé de prendre en compte la sous-estimation de la croissance des cavités par le modèle GLD dans le cas de faibles triaxialités. Ce défaut s'explique par le fait que la croissance de la porosité dans le cas de ce critère est contrôlée par la contrainte hydrostatique qui apparaît dans le terme cosinus hyperbolique. Il s'ensuit que l'évolution de l'endommagement n'est pas correctement décrite dans le cas d'une triaxialité petite (se rapprochant de zéro) .

En exploitant les conclusions d'études expérimentales, effectuées à l'IRSID, mettant en évidence le rôle des inclusions dans de telles occurrences, ces auteurs proposent de remédier à cet état en introduisant des conditions de "blocage". Ces dernières représentent la circonstance où la refermeture des vides est empêchée par les inclusions. L'analyse effectuée par SIRUGUET et al. a consisté à utiliser la même expression du critère GLD, puis à déterminer les nouvelles formulations des coefficients C , η , κ et α_2 qui satisfont la représentation utilisée. Les deux premiers paramètres ont été obtenus aux points d'intersection des deux critères, alors que les deux autres ont été ajustés sur des calculs numériques. Le modèle est complété par une loi d'évolution du paramètre de forme S dont l'expression dépend du type de blocage (axial ou radial).

Récemment, MONCHIET et al. [MCD07] ont proposé une nouvelle formulation du critère de plasticité. Le terme qui gouverne les variations des fractions volumiques des vides dans ce dernier fait apparaître un couplage entre la contrainte cisaillement et l'endommagement du matériau. Son

²⁵Laboratoire Groupe Mécanique, Matériaux et Structures de l'université de Reims Champagne-Ardenne.

expression dans le cas d'une cavité sphérique est donnée par

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{9}{4}\Sigma_h^2 + \frac{2}{3}\Sigma_{eq}^2}\right) - 1 - f^2 = 0$$

Cette modélisation semble être une voie intéressante à exploiter pour corriger la sous-estimation de la porosité à faibles triaxialités.

Matrice orthotrope Plusieurs modèles ont été élaborés pour prendre en compte le comportement anisotrope de la matrice [BBP04b, CLOC03b, BMWL05]. Ces auteurs ont, à quelques différences près, proposé de réécrire le critère GLD en remplaçant la contrainte déviatorique $\|\Sigma' + \eta\Sigma\mathbf{X}\|$ qui apparaît dans l'expression du critère GLD par :

$$3(\Sigma' : \mathbb{H} : \Sigma')/2$$

Récemment, MONCHIET et al. [MGCD06] ont repris l'analyse limite de GOLOGANU et al. [GLD93, GLD94] et l'ont appliquée à un V.E.R. de même forme mais dont le comportement de la matrice est rigide-parfaitement plastique et orthotrope. Le critère obtenu s'écrit :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}^*}{\sigma_0}\right)^2 + 2(1+g)(f+g) \cosh\left(\frac{3\Sigma_h^*}{p\sigma_0}\right) - (1+g)^2 - (f+g)^2 = 0$$

$$\Sigma_{eq}^{*2} = \Sigma_{eq}^2 + k_1\Sigma_h^{*2} + k_2\Sigma : \mathbf{Q}^2 - 2k_3\Sigma_h^*\Sigma : \mathbf{Q}, \quad \Sigma_h^* = \frac{1}{3}\Sigma : \mathbf{X}$$

où k_1 , k_2 , k_3 et p sont des coefficients qui dépendent de la géométrie de la cavité, de la porosité f et des coefficients d'anisotropie de la matrice.

Matrice viscoplastique FLANDI et al. [FL05a, FL05b, ?] ont proposé une extension du modèle GLD au cas d'une matrice viscoplastique obéissant à la loi de NORTON de coefficient m . Le critère viscoplastique a été obtenu en imposant au modèle de respecter certains modèles de référence, notamment le modèle GLD dans la situation où $m \rightarrow \infty$. Le potentiel obtenu s'écrit en reprenant les notations de ces auteurs :

$$\begin{aligned} \Phi &= C_m(Q + \eta_m H)^2 + (1+g)(f+g) \left[F(\kappa_m H) + \frac{m-1}{m+1} \frac{1}{F(\kappa_m H)} \right] \\ &- (1+g)^2 - \frac{m-1}{m+1} (f+g)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$F(\kappa_m H) = \left[1 + \frac{1}{m} (\kappa_m | H |) \frac{m+1}{m} \right]^m$$

où Q et H sont des coefficients qui dépendent de l'état de contrainte et de la forme des cavités. Les expressions des coefficients C_m , κ_m et η_m dépendent

de la géométrie de la cavité, de la porosité et du coefficient m . Le modèle est complété par une loi d'évolution du paramètre de forme S qui prend en compte le comportement de la matrice à travers le coefficient m .

Approche non-locale. La formulation d'un modèle non-local peut être effectuée en délocalisant la variable de dommage [LPD94, TN97, BMWL05]. LEBLOND et al.[LPD94] ont proposé une forme non-local du modèle de GURSON en faisant une moyenne de la porosité, en chaque point, sur une région voisine définie. La mise en œuvre de cette forme a été effectuée en introduisant une échelle de longueur matérielle qui n'est supposée dépendre que de la porosité. Par conséquent, l'évolution de la porosité en un point matériel est influencée par sa distribution sur toute la région considérée. Le traitement non-local de la porosité indépendamment de la déformation plastique donne des résultats qui ne sont pas toujours satisfaisants [BMWL05]. Pour remédier à cela, il est nécessaire d'incorporer aussi une loi non-local de la déformation plastique [BMWL05]

$$\begin{aligned} df(x) &= \frac{1}{\int_V dw(s) dV(s)} \int_V df_{loc}(x+s) w(s) dV(s) \\ d\bar{\varepsilon}^p(x) &= \frac{1}{\int_V dw(s) dV(s)} \int_V d\bar{\varepsilon}_{loc}^p(x+s) w(s) dV(s) \end{aligned}$$

où $dw(s)$ est une fonction poids.

Écrouissage cinématique L'effet de l'écrouissage cinématique de la matrice peut être pris en compte en remplaçant le terme déviatorique $\|\Sigma' + \eta\Sigma X\|$ qui apparaît dans le critère GLD par un terme de la forme $\{\Sigma' - \alpha\}^T : \mathbb{Z} : \{\Sigma' - \alpha\}$. Où $\mathbb{Z}$ est le tenseur des modules élastiques qui peut être isotrope ou anisotrope selon le comportement du matériau et α la variable tensorielle caractérisant l'écrouissage cinématique. Des ajustements de certains coefficients du critère ainsi modifié en comparant ces prédictions aux calculs de cellules peuvent s'avérer nécessaires afin de vérifier la pertinence de l'extension.

Annexe A

Méthode de longueur d'arc

A.1 Introduction

Nous présentons dans ce qui suit la méthode de longueur d'arc [Rik72, Rik79, Cri86, Cri91, Cri97, Ram81a, Ram81b]. Cette dernière se distingue par l'introduction d'une nouvelle variable ϑ appelée longueur d'arc qui définit un domaine géométrique centré sur le dernier point convergé. Elle est essentiellement employée dans deux situations que sont les problèmes de flambement de structures et ceux décrivant la dégradation des matériaux en cours de déformations. En effet, dans le cas où le comportement du matériau est radoucissant, c'est-à-dire présentant un "pic", les algorithmes classiques de résolution, tel que le schéma statique implicite, ne décrivent pas correctement la réponse du matériau, d'où la nécessité de recourir à ce type de schémas.

A.2 Formulation du problème

Le traitement d'un problème mécanique par la méthode des éléments finis de type déplacement conduit d'une façon générale à la résolution d'un système d'équations algébriques donnée par la relation (2.31). Dans le cas d'une résolution avec une méthode de type RIKS [Rik72, Rik79, Cri86, Cri91, Cri97, Ram81a, Ram81b], l'équation d'équilibre s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \vartheta(t)) = \mathbf{F}_{int} - \vartheta(t) \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

où $\vartheta(t)$ désigne un paramètre scalaire qui est introduit pour contrôler le chargement exercé à l'instant t . La solution du système d'équations (A.1) est en fait un couple $(\mathbf{u}, \vartheta)$ associant la réponse en déplacement de la structure à la sollicitation

donnée. La méthode de pilotage en longueur d'arc permet de suivre la branche d'équilibre même dans le cas de brusques changements de pente. La longueur de la branche $\mathfrak{S}$ est définie par

$$\mathfrak{S} = \int d\mathfrak{S} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$d\mathfrak{S} = \sqrt{\mathbf{du}^T \mathbf{du} + (d\vartheta)^2 \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext}} \quad (\text{A.3})$$

où Θ est le facteur de graduation scalaire. Il est égal à 1 lorsque le schéma de résolution adopté est la méthode de longueur d'arc sphérique et 0 quand c'est la méthode de longueur d'arc cylindrique qui est employée. L'équation (A.3) s'écrit sous la forme incrémentale comme suit :

$$\mathbf{a} = \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + (\Delta \vartheta)^2 \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} - (d\mathfrak{S})^2 \quad (\text{A.4})$$

L'équation d'équilibre (A.1) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{R}(\mathfrak{S}) = \mathbf{F}_{int}[\mathbf{u}(\mathfrak{S})] - \vartheta(\mathfrak{S}) \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

La relation (A.4) est une équation elliptique qui lie les incréments de déplacements et le facteur de charge. Le vecteur $\Delta \mathbf{u}$ et le scalaire $\Delta \vartheta$ sont incrémentés au fur et à mesure jusqu'à ce que l'équilibre soit vérifié. Le système d'équations (A.4)-(A.5) est impossible à résoudre directement. Par conséquent, il est nécessaire de passer par un processus itératif de résolution. Le processus le plus couramment utilisé est fondé sur une méthode de linéarisation des équations non-linéaires d'équilibre utilisant le développement en série de TAYLOR d'ordre 1. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \vartheta} \delta \vartheta = \mathbf{R}_n + \mathbb{K} \delta \mathbf{u} - \mathbf{F}_{ext} \delta \vartheta = \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + 2 \Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u} + 2 \Delta \vartheta \delta \vartheta \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Plusieurs techniques ont été proposées pour résoudre ce système d'équations. Nous présentons dans ce qui suit, la méthode de longueur d'arc sphérique²⁶ proposée par CRISFIELD [Cri86, Cri91, Cri97] et celle dite de longueur d'arc linéarisée, appelée aussi méthode de RIKS-RAMM [Rik72, Rik79, Ram81b, Ram81a].

²⁶Le terme sphérique vient du fait qu'il existe une variante à cette méthode, appelée méthode de longueur d'arc cylindrique, pour laquelle le facteur de graduation Θ est égal à 0. Cette particularité induit beaucoup de simplifications au cours du processus de résolution.

A.3 Méthodes de résolution

A.3.1 La méthode de CRISFIELD de longueur d'arc sphérique

Elle se distingue par la signification donnée à la longueur d'arc $\mathfrak{S}$. Dans le cas présent, cette dernière est définie comme le rayon d'une sphère centrée sur le dernier point convergé. Il s'ensuit que la résolution du problème consiste à trouver la solution de l'équation d'équilibre (A.1) qui se trouve à une longueur d'arc $\mathfrak{S}$ du dernier point convergé.

La résolution directe du système (A.6) en supposant l'équilibre et la condition supplémentaire (A.6-b) tout deux vérifiés, nous conduit au système suivant²⁷ :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \vartheta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbb{K} & -\mathbf{F}_{ext} \\ 2\Delta \mathbf{u}^T & 2\Delta \vartheta \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Le jacobien ainsi formé est et reste régulier même dans le cas où la matrice $\mathbb{K}$ est singulière [RR87]. La résolution directe de ce système est très pénalisant en raison du grossissement de la matrice et de sa perte de symétrie. Pour palier cette situation une technique qui traite séparément la première itération et les itérations suivantes est généralement adoptée.

1^{ère} itération. Partant du dernier point convergé $(\mathbf{u}_{n+1}^0, \vartheta_{n+1}^0, \mathbf{F}_{ext})$ correspondant à l'incrément (n), nous cherchons la solution à l'itéré 1, $(\mathbf{u}_{n+1}^1, \vartheta_{n+1}^1, \mathbf{F}_{ext})$. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^1)^T \Delta \mathbf{u}_{n+1}^1 + (\Delta \vartheta_{n+1}^1)^2 \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} - (d\mathfrak{S})^2 \quad (\text{A.8})$$

Par ailleurs, en utilisant la matrice tangente $\mathbb{K}$ calculée au dernier point convergé, nous avons :

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^1 = \Delta \vartheta_{n+1}^1 \mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{A.9})$$

En injectant l'équation (A.9) dans (A.8), nous obtenons :

$$(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^1)^2 \left[\Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} + (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext})^2 \right] = d\mathfrak{S}^2 \quad (\text{A.10})$$

²⁷Bien que la méthode de longueur d'arc sphérique de CRISFIELD préconise une valeur $\Theta = 1$, nous gardons l'expression de la variable Θ dans les expressions qui vont suivre, en raison notamment des formulations proposées par d'autres auteurs. Par exemple, PADOVAN propose d'employer des valeurs de Θ proches de 1 dans les étapes initiales de la résolution et des valeurs plus petites quand on s'approche du pic [PA82].

Il s'ensuit :

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^1 = \pm \frac{d\mathfrak{S}}{\sqrt{\Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} + (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext})^2}} \quad (\text{A.11})$$

Le signe positif est choisi dans le cas du premier itéré. La factorisation de la matrice $\mathbb{K}$ au cours du processus de résolution est souvent effectuée en utilisant la méthode de CHOLESKI :

$$\mathbb{K} = \mathbf{L}^T \mathbb{D} \mathbf{L} \quad (\text{A.12})$$

où les matrices $\mathbb{D}$ et $\mathbb{L}$ sont respectivement diagonale et triangulaire supérieure.

Itérations suivantes. L'incrément de déplacement $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1}$ à l'itération $(iter + 1)$ est relié à l'incrément de charge $\delta \vartheta_{n+1}^{iter+1} = \vartheta_{n+1}^{iter+1} - \vartheta_{n+1}^{iter}$ pendant la même itération par la relation :

$$\delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} = -\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{iter}, \vartheta_{n+1}^{iter+1}) \quad (\text{A.13})$$

$$= -\mathbb{K}^{-1} [\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^{iter}) - \vartheta_{n+1}^{iter+1} \mathbf{F}_{ext}] \quad (\text{A.14})$$

$$= -\mathbb{K}^{-1} [\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^{iter}) - \vartheta_{n+1}^{iter} \mathbf{F}_{ext} - \vartheta_{n+1}^{iter+1} \mathbf{F}_{ext}] \quad (\text{A.15})$$

$$\Rightarrow \delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} = -\mathbb{K}^{-1} [\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{iter}, \vartheta_{n+1}^{iter}) - \vartheta_{n+1}^{iter+1} \mathbf{F}_{ext}] \quad (\text{A.16})$$

En développant l'équation (A.16), nous obtenons l'expression :

$$\delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} = -\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}^{iter} + \vartheta_{n+1}^{iter+1} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{A.17})$$

D'autre part, le système d'équations composé des relations (A.8) et (A.17) exprimé à l'itéré $(iter + 1)$ en utilisant la formule $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} = \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1}$ nous amène à l'écriture :

$$\begin{cases} \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} \right)^T \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} + (\vartheta_{n+1}^{iter} + \vartheta_{n+1}^{iter+1})^2 \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} = (d\mathfrak{S})^2 \\ \delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} = -\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}^{iter} + \vartheta_{n+1}^{iter+1} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

où $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter}$, ϑ_{n+1}^{iter} et $\mathbf{R}^{iter}$ sont connus. En injectant la relation (A.18-b) dans (A.18-a), nous obtenons une équation du second degré en ϑ_{n+1}^{iter+1} :

$$z_1 (\vartheta_{n+1}^{iter+1})^2 + z_2 (\vartheta_{n+1}^{iter+1}) + z_3 = 0 \quad (\text{A.19})$$

avec :

$$\begin{cases} z_1 = (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext})^2 + \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} \\ z_2 = 2 (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter})^T (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext}) + 2 (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}^{iter}) (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext}) + 2 \vartheta_{n+1}^{iter} \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} \\ z_3 = (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter})^T (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter}) + (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}^{iter})^2 + 2 (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter})^T (\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext}) - (d\mathfrak{S})^2 \end{cases}$$

L'équation (A.19) possède deux solutions. En pratique, nous choisissons la racine ϑ_{n+1}^{iter+1} qui minimise l'angle α_R donné par la formule :

$$\cos \alpha_R = \frac{(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter})^T (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1}) + \Theta^2 \vartheta_{n+1}^{iter} \vartheta_{n+1}^{iter+1} \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext}}{(d\mathfrak{S})^2} \quad (\text{A.20})$$

Cette procédure permet une incrémentation automatique du chargement.

A.3.2 La méthode de RIKS-RAMM de longueur d'arc linéarisée

Cette méthode suit le même principe que la précédente. Elle peut, cependant, donner lieu à des problèmes de convergence lorsque la réponse de la structure étudiée présente de brusques changements de pente. La stratégie de résolution telle que proposée par RIKS [Rik72, Rik79] consiste à appliquer directement la méthode de Newton Raphson aux équations (A.1) et (A.4).

Nous déduisons de l'équation (A.6-b) la relation :

$$(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter})^T \delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} + \delta \vartheta_{n+1}^{iter+1} (\Delta \vartheta_{n+1}^{iter} \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext}) = -\frac{\mathfrak{a}_{n+1}^{iter}}{2} \quad (\text{A.21})$$

ou encore :

$$\delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1} = \frac{-(\mathfrak{a}_{n+1}^{iter}/2) - \delta \vartheta_{n+1}^{iter+1} (\Delta \vartheta_{n+1}^{iter} \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext})}{\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter}} \quad (\text{A.22})$$

Dans le cas où la longueur d'arc $\mathfrak{a}_{n+1}^{iter}$ est nulle, nous retrouvons l'approche proposée par RAMM [Ram81b, Ram81a] : à chaque itération, la droite $(\delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter+1}, \delta \vartheta_{n+1}^{iter+1} \Theta \mathbf{F}_{ext})$ définissant la relation linéaire entre charge et déplacement est orthogonale à la rigidité sécante correspondante $(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter}, \Delta \vartheta_{n+1}^{iter} \Theta \mathbf{F}_{ext})$. Par ailleurs, l'incrément du paramètre de chargement est déduit de la formule :

$$\delta \vartheta (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{iter}, \Delta \vartheta_{n+1}^{iter}) = \frac{\vartheta_{n+1}^{iter+1} + \mathbb{K}^{-1} [\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{iter}, \vartheta_{n+1}^{iter})]}{-\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext}} \quad (\text{A.23})$$

En insérant la relation (A.22) dans (A.23), nous obtenons :

$$\delta\vartheta \left(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \right) = \frac{-\left(\mathbf{a}_{n+1}^{iter}/2 \right) - \delta\vartheta_{n+1}^{iter+1} \left(\Delta\vartheta_{n+1}^{iter} \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} \right) + \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{iter} \left(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^{iter} \right)}{\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{iter}} \quad (\text{A.24})$$

L'utilisation de la relation :

$$\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{iter} = \Delta\vartheta_{n+1}^{iter} \mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^{iter} \quad (\text{A.25})$$

satisfaite à l'itéré précédent (n), nous amène à :

$$\delta\vartheta \left(\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{iter}, \Delta\vartheta_{n+1}^{iter} \right) = \frac{-\left(\mathbf{a}_{n+1}^{iter}/2 \right) - \delta\vartheta_{n+1}^{iter} \left(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \right) \left(-\mathbb{K}^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^{iter} \right)}{\delta\vartheta_{n+1}^{iter} \left[\left(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \right)^T \left(\mathbb{K}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \right) + \Theta^2 \mathbf{F}_{ext}^T \mathbf{F}_{ext} \right]} \quad (\text{A.26})$$

Cette technique est voisine de la procédure originale de RIKS [Rik72, Rik79]. Elle en diffère cependant par le fait qu'elle suppose que la droite $\left(\delta\mathbf{u}_{n+1}^{iter+1}, \delta\vartheta_{n+1}^{iter+1} \Theta \mathbf{F}_{ext} \right)$ définissant la relation linéaire entre charge et déplacement est orthogonale, au dernier point convergé, à la matrice tangente considéré. Ce qui permet une approximation plus fine du trajet de chargement.

Annexe B

Gestion numérique du contact frottement

On est souvent amené, lors de la simulation des procédés de mise en forme, à mettre en contact différentes pièces (tôle, matrice, poinçon...) de différentes nature (déformable, rigide...) introduisant ainsi des effort de contact. L'évolution de ces forces au cours du temps étant une inconnue du problème, cette situation provoque de nouvelle non-linéarité lors de la résolution de l'équation (2.5). Dès qu'il y a contact entre solides, il y a nécessairement transmission d'efforts entre les surfaces qui se touchent générant ainsi :

- ◆ des contraintes normales, lorsque le contact est sans frottement,
- ◆ lorsque le contact se fait avec frottement, alors il y a possibilité de transmission de contraintes de cisaillement.

Le contact peut avoir lieu soit entre :

- ◆ un solide déformable et un solide non déformable,
- ◆ deux solides déformables
- ◆ auto-contact, lorsqu'une partie du solide touche une autre partie du même solide.

Nous présentons dans un premier temps quelques aspects théoriques du contact-frottement entre un solide rigide et un autre déformable, puis nous aborderons quelques notions sur la gestion numérique du contact lors de la simulation avec le code de calcul Abaqus.

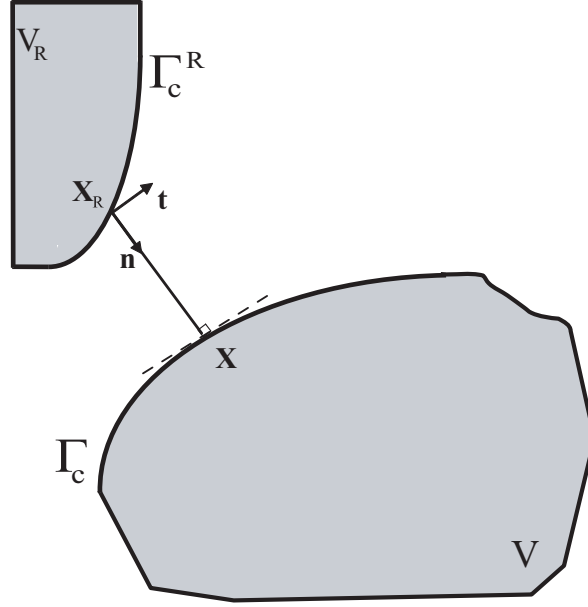


FIG. B.1 – Deux solides en contact

B.1 analyse du contact

L'étude du contact est basée sur les conditions d'impénétrabilité entre deux frontières Γ_c^R d'un solide rigide V_R , et Γ_c d'un autre solide déformable V , qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \forall t, \forall p_1 \in \Gamma_c^1 & p_1 \notin \Gamma_c^2 \\ \forall t, \forall p_2 \in \Gamma_c^2 & p_2 \notin \Gamma_c^1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

A partir de ces conditions, plusieurs formulations ont été proposées pour la prise en compte du contact. Nous allons présenter deux de ces formulations : le contact unilatéral de SIGNORINI et le contact bilatéral.

B.1.1 Contact unilatéral

Soit un solide déformable, noté V et un autre solide rigide, noté V_R qui peuvent se mettre en contact en un point de position $\mathbf{X}$ sur le solide déformable comme le montre la figure B.1. La distance entre le point repéré par $\mathbf{X}$ et sa projection sur la surface du corps rigide $\mathbf{X}_R$ est donnée par la relation :

$$d_n = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_R) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.2})$$

La réaction normale au point $\mathbf{X}$ s'écrit alors :

$$R_n = \mathbf{R}\mathbf{n} \quad (\text{B.3})$$

Il s'ensuit que les conditions de SIGNORINI s'expriment comme suit :

$$d_n \geq 0; \quad R_n \geq 0; \quad d_n R_n = 0 \quad (\text{B.4})$$

Ces conditions traduisent la situation que deux solides initialement en contact peuvent se décoller. Ces conditions peuvent s'expliciter comme suit :

- ◆ La première condition : $d_n > 0$, appelée condition de contact cinématique, exprime la condition de non pénétration du solide rigide au travers la surface du solide déformable.
- ◆ La deuxième condition : $R_n \geq 0$ traduit l'existence d'une force de réaction positive ou nulle lors du contact
- ◆ La dernière condition $d_n R_n = 0$, appelée aussi relation complémentaire, décrit deux situations possibles :
 - Une situation de contact dans le cas où $d_n = 0$ et $R_n > 0$.
 - Une situation de décollement dans le cas où $d_n > 0$ et $R_n = 0$.

B.1.2 Contact bilatéral

Le contact bilatéral signifie que le contact normal est maintenu, alors que le déplacement relatif tangentiel est laissé libre. Le vecteur contrainte tangentielle est donné par la relation :

$$R_t \mathbf{t} = \mathbf{R} - R_n \mathbf{n}, \quad (\text{B.5})$$

et la scission de contact s'écrit comme suit :

$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (\text{B.6})$$

B.2 Gestion incrémentale du contact

Au cours de la simulation, les nœuds se trouvant au voisinage de l'outillage sont analysés afin de détecter d'éventuelles entrées ou sorties de contact. La distance entre ces nœuds et la surface de l'outil est par convention positive, il s'ensuit que la conditions de non pénétration doit être vérifiée à la fin de chaque incrément :

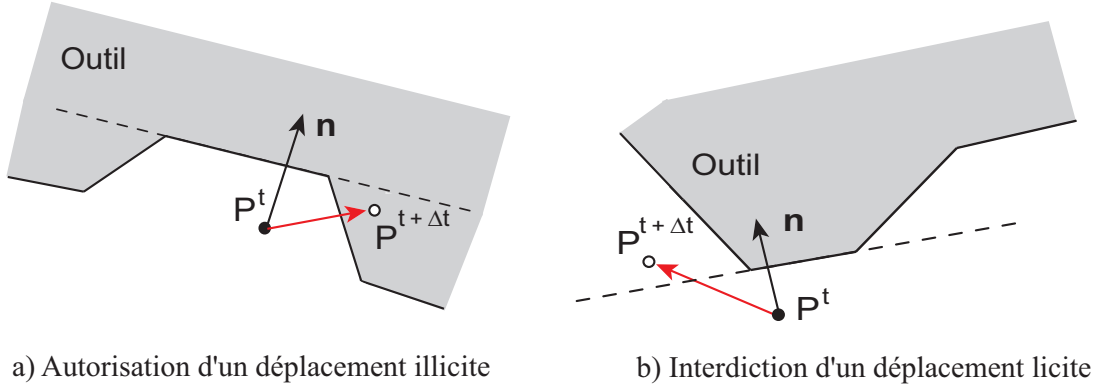


FIG. B.2 – Erreur due à l'approximation de la surface de l'outil par un plan.

$$d_n(t + \Delta t) \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

Après développement, cette expression peut être linéarisée au premier ordre :

$$d_n(t + \Delta t) = d_n(t) + (\mathbf{v}_{out} - \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (\text{B.8})$$

où $\mathbf{v}_{out}$ et $\mathbf{v}(t)$ sont respectivement les vitesses de l'outil et du nœud considéré. la condition de non pénétration peut être réécrite sous la forme :

$$[\mathfrak{h}(\mathbf{v}(t))]^+ = \begin{cases} \mathfrak{h}[\mathbf{v}(t)] & \text{si } \mathfrak{h}[\mathbf{v}(t)] \geq 0 \\ 0 & \text{si } \mathfrak{h}[\mathbf{v}(t)] < 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

où la fonction $\mathfrak{h}$ est donnée par

$$\mathfrak{h}[\mathbf{v}(t)] = (\mathbf{v}_{out} - \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) - \frac{d_n(t)}{\Delta t} \quad (\text{B.10})$$

Cette expression est à la fois implicite puisque la condition de non pénétration est définie à l'instant $(t + \Delta t)$ et explicite dans la mesure où $\mathbf{n}(t)$ et $d_n(t)$ sont estimés à l'instant (t) . Par ailleurs, le fait de supposer la normale constante au cours de l'incrément revient à approcher la surface de l'outil par un plan de normale $\mathbf{n}(t)$. Ceci peut entraîner l'autorisation d'un déplacement illicite (B.2-a) ou l'interdiction d'un déplacement licite (B.2-b). Pour remédier à cette situation, une méthode incrémentale implicite reposant sur une actualisation de la normale au cours des itérations successives et utilisant la méthode de NEWTON-RAPHSON est généralement employée. Cependant, cette méthode nécessite des temps de calcul plus grands. Cette procédure fait usage d'une méthode de pénalisation, c'est-à-dire que la contrainte de non pénétration est imposée à travers un coefficient de

pénalisation ς . La formulation faible en prenant en compte le contact s'exprime alors par

$$-\int_V \boldsymbol{\Sigma} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV + \int_V \mathbf{F}_v \delta \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\Gamma_s} \mathbf{F}_s \delta \dot{\mathbf{u}} d\Gamma + \varsigma \sum_{x_k \in \Gamma_c} [\mathfrak{h}(\mathbf{v}(t))]^+ \mathbf{n}(t) \delta \dot{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_c} \mathbf{F}_c \delta \dot{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.11})$$

B.3 Modèles de frottement usuels

On appelle modèle de frottement, toute relation permettant de calculer le vecteur contrainte tangentielle en fonction de certains paramètres, dont on peut citer :

- ◆ la contrainte normale σ_n , la vitesse de glissement V_g , la température T ...,
- ◆ les propriétés physiques du comportement des surfaces en contact,
- ◆ la lubrification

Il est difficile de modéliser l'effet de tous ces paramètres. Les modèles disponibles se basent, en général, sur quelques uns de ces paramètres. Avant de présenter deux des modèles de frottement disponibles dans Abaqus, nous allons définir la notion de seuil de glissement.

Notion de seuil de glissement

La notion de seuil de glissement en un point, entre deux solides se base sur l'hypothèse de l'existence d'une contrainte tangentielle critique τ_{crit} au dessus de laquelle apparaît un glissement significatif. Nous aurons donc deux situations :

- ◆ $\tau < \tau_{crit} \Rightarrow V_g = 0$; le contact est dit collant.
- ◆ $\tau \geq \tau_{crit} \Rightarrow \exists \lambda_c \geq 0$; $V_g = -\lambda_c \tau$; le contact est dit glissant.

B.3.1 Modèle de COULOMB

Il est le plus utilisé des modèles de frottement. Il se base sur la notion de seuil de glissement ainsi que sur l'introduction de l'effet de la composante normale de la réaction $\mathbf{R}$ au travers la pression de contact P_c comme le montre la figure B.3. La loi de frottement de COULOMB s'écrit :

$$\tau \leq \mu_f P_c$$

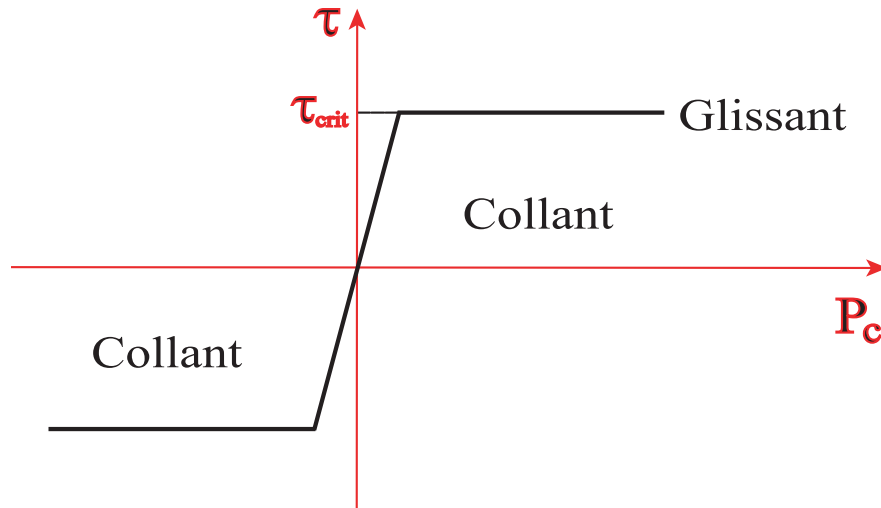


FIG. B.3 – Représentation du modèle de COULOMB

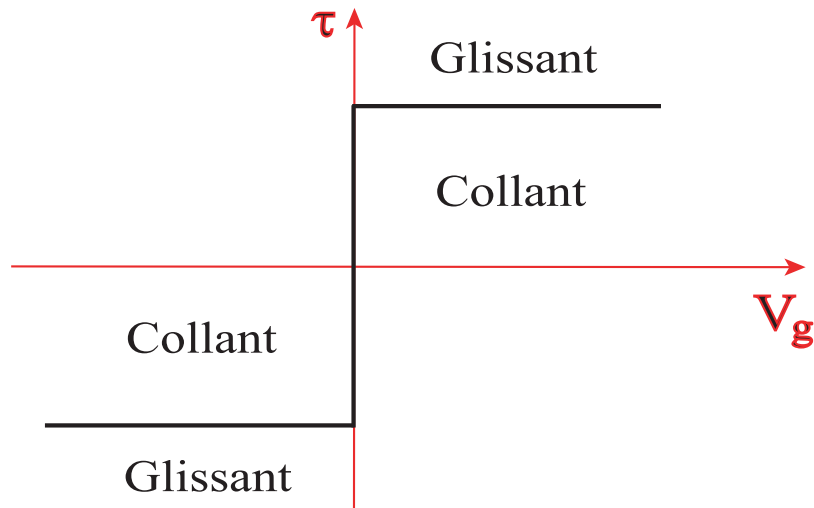


FIG. B.4 – Représentation du modèle de TRESCA

- ◆ Si $\tau < \mu_f P_c$, on aura adhérence entre les deux solides en contact.
- ◆ Si $\tau = \mu_f P_c$, on aura glissement entre les deux solides à une vitesse de glissement $V = -\lambda_c \tau$.

μ_f est le coefficient de frottement de COULOMB, il est compris entre $\mu_f = 0.01$ dans le cas de surfaces en contact lubrifiées et $\mu_f = 0.5$ dans le cas de surfaces sèches.

B.3.2 Modèle de TRESCA

Le modèle de TRESCA se base sur l'hypothèse que la contrainte de frottement τ est proportionnelle à la contrainte d'écoulement $\bar{\sigma}$. La loi de frottement de TRESCA

s'écrit alors :

$$\tau \leq m_T \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}$$

Ce modèle présente aussi deux situations :

- ◆ Si $\tau < m_T \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}$, on aura adhérence entre les deux solides en contact $V_g = 0$.
- ◆ Si $\tau = -m_T \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \frac{V_g}{|V_g|}$, on aura glissement entre les deux solides à une vitesse de glissement $V = -\lambda_c \tau$.

Le modèle de TRESCA présente deux particularité : le seuil de frottement reste constant et la scission est indépendante de la pression de contact.

B.4 Approche du contact dans Abaqus

Abaqus propose de gérer et de modéliser le contact entre deux surfaces réunies au sein d'une paire de contact (Contact pair), ou nous distinguons une surface "maître" et une surface "esclave". Le traitement du contact effectué par Abaqus vise à empêcher que les noeuds de la surface "esclave" traversent la surface "maître". De cette restriction apparaissent des difficultés liées à la définition des surfaces candidates au contact afin d'exprimer les contraintes à chaque pas de calcul en respectant les relations de frottement. Nous allons présenter quelques précautions à prendre lors de la simulation, les détails de ses aspects peuvent être retrouvées dans Abaqus Theory Manual [ABA05].

Abaqus /Standard Lors de l'utilisation du solveur implicite d'Abaqus, la notion de surfaces "maître" et "esclave" est utilisée de telle façon que la direction de contact soit toujours perpendiculaire à la surface "maître". Dans ce cas les efforts de contact sont transmis suivant cette normale, alors que les forces tangentielles, s'il y a glissement avec frottement, sont transmises parallèlement à la surface "maître". Cette dernière doit être continue.

Le choix des limites de chacune des surfaces "maître" et "esclave" doit se faire d'une manière judicieuse. Prévoir la possibilité de raffiner le maillage des surfaces candidates au contact appartenant à la pièce si des problèmes liés au contact apparaissent, notamment lorsque la condition de pénétration n'est pas satisfaite.

Abaqus /Explicit La résolution des problèmes de contact dans Abaqus/explicit se fait aussi en utilisant la notion de surfaces "maître" et "esclave", avec toutefois

une possibilité d'inverser le rôle de chacune des surfaces. Donc la surface maître n'est pas nécessairement une surface régulière.

Lorsque nous utilisons un maillage avec des éléments coque ou membrane, Abaqus/Explicit tient compte de l'épaisseur courante de ces éléments.

Bibliographie

- [ABA05] ABAQUS. *Version 6.5.1*. HKS, Inc., Providence, RI, 2005.
- [AMEM06] S.A.A. AKBARI MOUSAVI, S.M. EBRAHIMI, ET R. MADOLIAT. Three dimensional numerical analyses of asymmetric rolling. *Journal of Materials Processing Technology*, xxx :xxx–xxx, 2006.
- [APC04] N. ARAVAS ET P. PONTE CASTAÑEDA. Numerical methods for porous metals with deformation-induced anisotropy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :3767–3805, 2004.
- [APCdSCSNJ03] F.M. ANDRADE PIRES, J.M.A. CÉSAR DE SÀ, L. COSTA SOUSA, ET R.M. NATAL JORGE. Numerical modelling o ductile plastic damage in bulk metal forming. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45 :273–294, 2003.
- [Ara87] N. ARAVAS. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 :1395–1416, 1987.
- [Arg75] IM J. AND SAFOGLU R. ARGON, A.S. AND. Cavity formation from inclusions in ductile fracture. *METALLURGICAL TRANSACTIONS A*, 6A :825–837, 1975.
- [Arg76] A.S. ARGON. Formation of cavities from non deformable second-phase particules inlow temperature ductile fracture. *Transactions of the ASME*, pages 60–68, 1976.
- [Arg95] A.S. ARGON. *Topics in Fracture and Fatigue*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [BBBP02] A.A. BENZERGA, J. BESSON, R. BATISSE, ET A. PINEAU. Synergistic effects of plastic anisotropy and void coalescence on fracture mode in plane strain. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 10 :73–102, 2002.
- [BBP99] A.A. BENZERGA, J. BESSON, ET A. PINEAU. Coalescence-controlled anisotropic ductile fracture. *J. Eng. Mat. Eng*, 121 :221–229, 1999.

- [BBP04a] A.A. BENZERGA, J. BESSON, ET A. PINEAU. Anisotropic ductile fracture, part i : experiments. *Acta Materialia*, 52, 2004.
- [BBP04b] A.A. BENZERGA, J. BESSON, ET A. PINEAU. Anisotropic ductile fracture, part ii : theory. *Acta Materialia*, 52, 2004.
- [BBS99] G. BERNAUER, W. BROCKS, ET W. SCHMITT. Modifications of the beremin model for cleavage fracture in the transition region of a ferritic steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 64(3) :305–325, 1999.
- [BCCF01] J. BESSON, G. CAILLETAUD, J.-L. CHABOCHE, ET S. FOREST. *Mécanique non linéaire des matériaux*. 2001.
- [BD01] J. BESSON ET R. DESMORAT. *Local approach to fracture*, chapter X, pages 270–310. Les presses de l'École des Mines, 2001.
- [Ben00] A.A. BENZERGA. *Rupture ductile des tôles anisotropes : simulation de la propagation longitudinale dans un tube pressurisé*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de paris, 2000.
- [Ben02] A.A. BENZERGA. Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *Journal of the mechanics and physics of Solids*, 50(6) :1331–1362, 2002.
- [Ber81] BEREMIN. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of a508 steel. *Metallurgical Transactions A*, 12A :723–731, 1981.
- [Ber01] C. BERDIN. *Local approach to fracture*, chapter V, pages 147–173. Les presses de l'École des Mines, 2001.
- [BHS82] B. BUDIANSKY, J.W. HUTCHINSON, ET S. SLUTSKY. *Void growth and collapse in viscous solids*, chapter 6, pages 1–65. Pergamon Press, London, 1982.
- [BMW05] M. BRUNET, F. MORESTIN, ET H. WALTER-LEBERRE. Failure analysis of anisotropic sheet-metals using a non-local plastic damage model. *Journal of Materials Processing Technology*, 170 :457–470, 2005.
- [BSH95] W. BROCKS, D.Z. SUN, ET A. HÖNIG. Verification of the transferability of micromechanical parameters by cell model calculations with visco-plastic materials. *Int. J. Plasticity*, 11 :971–989, 1995.
- [BSH96] WOLFGANG BROCKS, DONG-ZHI SUN, ET ANDREAS HÖNIG. Verification of micromechanical models for ductile fracture by cell model calculations. *Computational Materials Science*, 7 :235–241, 1996.
- [BSRA89] R. BECKER, R.E. SMELSER, O. RICHMOND, ET E.J. APPEBY. The effect of void shape on void growth and ductility in axisymmetric tension tests. *METALLURGICAL TRANSACTIONS A*, 20A :853–861, 1989.

-
- [CLOC03a] P. CROIX, F. LAURO, J. OUDIN, ET J. CHRISTLEIN. Improvement of damage prediction by anisotropy of microvoids. *Journal of Materials Processing Technology*, 143 - 144 :202–208, 2003.
- [CLOC03b] P. CROIX, F. LAURO, J. OUDIN, ET J. CHRISTLEIN. Improvement of damage prediction by anisotropy of microvoids. *Journal of Materials Processing Technology*, 143-144 :202–208, 2003.
- [CN80] C.C. CHU ET A. NEEDLEMAN. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J. Engng. Mater. Technol.*, 102 :249–256, 1980.
- [Cri86] M.A. CRISFIELD. *Finite Element and Solution Procedures for Structural Analysis, Vol. 1 : Linear analysis*. Pengeridge Press, Swansea, UK, 1986.
- [Cri91] M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1 : ESSENTIALS*. John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- [Cri97] M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2 : ADVANCED TOPICS*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [CS79] J.-L. CORDEBOIS ET F. SIDOROFF. Anisotropie élastique induite par endommagement. In *In J.-P. Boehler, Ed, Colloque EuroMech115, Grenoble*, volume 333, pages 542–549, 1979.
- [Dog89] A. DOGUI. *Plasticité anisotrope en grandes déformations*. PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon, 1989.
- [DP05] F. DUNNE ET N. PETRINIC. *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford University Press INC. New York, 2005.
- [DT84] G. DHATT ET G. TOUZOT. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine SA Paris, Paris, 1984.
- [DT05] G. DHATT ET G. TOUZOT. *Methode des éléments finis - Une présentation*. Hermès, Paris, 2005.
- [FG81a] J.R. FISHER ET J. GURLAND. Void nucleation in spheroidized carbon steels. part1 :experimental. *Metal Science*, pages 185–192, 1981.
- [FG81b] J.R. FISHER ET J. GURLAND. Void nucleation in spheroidized carbon steels. part2 :model. *Metal Science*, pages 193–202, 1981.
- [FL05a] LAÏLA FLANDI ET JEAN-BAPTISTE LEBLOND. A new model for porous nonlinear viscous solids incorporating void shape effects - i : Theory. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24 :537–551, 2005.
- [FL05b] LAÏLA FLANDI ET JEAN-BAPTISTE LEBLOND. A new model for porous nonlinear viscous solids incorporating void shape effects - ii : Numerical validation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 24 :552–571, 2005.

- [FMT87] A. FONTAINE, E. MAAS, ET J. TULOU. Prevision of the cleavage fracture properties using a local approach : Application to the welded joint of a structural c-mn steel. *Nuclear Engineering and Design*, 105(1) :77–81, 1987.
- [FNSM06] F. FARHAT-NIA, M. SALIMI, ET M.R. MOVAHHEDY. Elasto-plastic finite element simulation of asymmetrical plate rolling using ale approach. *Journal of Materials Processing Technology*, 177 :525–529, 2006.
- [GA95] R.M. GOVINDARAJAN ET N. ARAVAS. Pressure-dependent plasticity models : Loading-unloading criteria and the consistent linearization of an integration algorithm. *COMMUNICATIONS IN NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 11 :339–345, 1995.
- [Ger73] P. GERMAIN. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1973.
- [Ger86] P. GERMAIN. *Mécanique*. Ellipse, Paris, 1986.
- [GLD93] M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND, , ET J. DEVAUX. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :1723–1754, 1993.
- [GLD94] M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND, , ET J. DEVAUX. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *ASME J. Engng. Mater. Technol.*, 116 :290–297, 1994.
- [GLD97] M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND, ET J. DEVAUX. *Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals*, pages 61–130. CISM Lectures Series, Springer, New-York, New York, 1997.
- [GLPD01] M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND, G. PERRIN, ET J. DEVAUX. Theoretical models for void coalescence in porous ductile solid. i. coalescence in "layers". *International Journal of Solids and Structures*, 38 :5581–5594, 2001.
- [GM87] JR W.M. GARRISON ET N.R. MOODY. Ductile fracture. *J. Phys. Chem. Solids*, 48(11) :1035–1074, 1987.
- [Gol97] MIHAI GOLOGANU. *Etude de quelques problèmes de rupture ductile des métaux*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1997.
- [GP63] J. GURLAND ET J. PLATEAU. Mechanism of ductile rupture of metals rupture of metals containing inclusions. *Journal of the ASM*, 56 :442–455, 1963.
- [Gri20] A.A. GRIFFITH. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 221 :163–197, 1920.

-
- [GRM96] B.P.P.A. GOUVEIA, J.M.C. RODRIGUES, ET P.A.F. MARTINS. Fracture predicting in bulk metal forming. *International Journal of Mech. Sci.*, 4 :361–372, 1996.
- [GRM00] B.P.P.A. GOUVEIA, J.M.C. RODRIGUES, ET P.A.F. MARTINS. Ductile fracture in metalworking : experimental and theoretical research. *Journal of materials Processing Technology*, 101 :52–63, 2000.
- [Gur77] A.L. GURSON. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part i- yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME J. Engineering Materials Technology*, 99 :2–15, 1977.
- [HB97] S. HAO ET W. BROCKS. The gurson-tvergaard-needleman model for rate and temperature-dependent materials with isotropic and kinematic hardening. *Computational Mechanics*, 20 :34–40, 1997.
- [HBP05] G. HUBER, Y. BRECHET, ET T. PARDOEN. Predictive model for void nucleation and void growth controlled ductility in quasi-eutectic cast aluminium alloys. *Acta Materialia*, 53 :2739–2749, 2005.
- [Hua91] Y. HUANG. Accurate dilatation rates for spherical voids in triaxial stress fields. *Journal of Applied Mechanics*, 58 :1084–1086, 1991.
- [Hug87] T.J.R. HUGHES. *The Finite Element Method—Linear Static and Dynamic Element Analysis*. Prentice-hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [Kac58] L.M. KACHANOV. Time of the rupture process under creep conditions. *Isv. Akad. Nauk. Srr. Otd Tekh. Nauk.*, 8 :26–31, 1958.
- [KAP00] M. KAILASAM, N. ARAVAS, ET P. PONTE CASTAÑEDA. Constitutive models for porous metals with developing anisotropy and applications to deformation processing. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 1 :105–118, 2000.
- [KG05] J. KIM ET X. GAO. A generalized approach to formulate the consistant tangent stiffness in plasticity with application to the gld porous material model. *Int. J. Solids Structures*, 42 :103–122, 2005.
- [Khe04] M. KHELIFA. *Simulation numérique de l'endommagement en formage de structures minces*. PhD thesis, Université de Technologie de Troyes, 2004.
- [KN88] J. KOPLIK ET A. NEEDLEMAN. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *Int. J. Solids Structures*, 24 :835–853, 1988.

-
- [KOK07] M. KHELIFA, M. OUDJENE, ET A. KHENNANE. Fracture in sheet metal forming : effect of ductile damage evolution. *Computers and Structures*, 85 :205–212, 2007.
- [LC85] J. LEMAITRE ET J.L. CHABOCHE. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [Leb98] JEAN-BAPTISTE LEBLOND. Rupture fragile et rupture ductile. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. 326, série II :243–250, 1998.
- [Leb03] J.-B. LEBLOND. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermès, Paris, 2003.
- [LM92] B. LEE ET M. MEAR. Axisymmetric deformation of power-law solids containing a dilute concentration of aligned spheroidal voids. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :1805–1836, 1992.
- [LPC⁺03] J. LANDRE, A. PERTENCE, P.R. CETLIN, J.M.C. RODRIGUES, ET P.A.F. MARTINS. On the utilisation of ductile fracture criteria in cold forging. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39 :175–186, 2003.
- [LPD94] J.-B. LEBLOND, G. PERRIN, ET J. DEVAUX. Bifurcation effects in ductile materials with damage localization. *J. Appl. Mech.*, 61 :362–242, 1994.
- [LPD95] J.-B. LEBLOND, G. PERRIN, ET J. DEVAUX. An improved gurson-type model for hardenable ductile metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 14 :499–527, 1995.
- [LSP06] D. LASSANCE, F. SCHEYVAERTS, ET T. PARDOEN. Growth and coalescence of penny-shaped voids in metallic alloys. *Engineering Fracture Mechanics*, 73 :1009–1034, 2006.
- [McC68] F.A. MCCLINTOCK. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :363–, 1968.
- [MCD07] VINCENT MONCHIET, ERIC CHARKALUK, ET KONDO DJIMEDO. An improvement of gurson-type models of porous materials by using eshelby-like trial velocity fields. *C. R. Mecanique*, 335 :32–41, 2007.
- [MDM⁺06] D.R. METZGER, X. DUAN, JAIN M., WILKINSON D.S., MISHRA R., KIM S., ET SACHDEV A.K. The influence of particule distribution and volume fraction on the post-necking behaviour of aluminium alloys. *Mechanics of Materials*, 38 :1026–1038, 2006.
- [MGCD06] VINCENT MONCHIET, COSMIN GRUESCU, ERIC CHARKALUK, ET KONDO DJIMEDO. Approximate yield criteria for anisotropic metals with prolate or oblate voids. *C. R. Mecanique*, 334 :431–439, 2006.

-
- [MM86] F. MONTHEILLET ET F. MOUSSY. Physique et mécanique de l'endommagement. In *American Society for Metals*, volume 30, pages 461–490. les éditions de physique, 1986.
- [MW03] U. MÜHLICH ET BROCKS W. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models including kinematic hardening. *Computational Mechanics*, 31 :479–488, 2003.
- [NR78] A. NEEDLEMAN ET J.R. RICE. Limit to ductility set by plastic flow localization. In KOISTINIE D.P. ET WANG N.M., editors, *Mechanics of sheet metal forming*, pages 237–267. Plenum Press, New York, 1978.
- [NT84] A. NEEDLEMAN ET V. TVERGAARD. An analysis of ductile rupture in notched bars. *J. Mech. Phys. Solids*, 30 :461–490, 1984.
- [NT85] A. NEEDLEMAN ET V. TVERGAARD. Material strain-rate sensitivity in round tensile bar. In *Considère Memorial Symposium*, (ed. by J. Salençon), *Presses de l'école Nationale des Ponts et Chaussées*, volume 30, pages 251–262, 1985.
- [NZR06] FRANK JR. NOWICKE, ANTONIOS ZAVALIANGOS, ET HARRY C. ROGERS. The effect of roll and clad sheet geometry on the necking instability during rolling of clad sheet metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 84 :868–877, 2006.
- [OOS06] M. OULD OUALI ET L. SIAD. Numerical study of softening due to second population of cavities in metals. In BESSON J. ET AL., editor, *9th European Mechanics of Material Conference, Local approach to fracture*, pages 453–458, Moret sur Loing, France, 2006. Presses de l'École des Mines de Paris.
- [PA82] J.P. PODOVAN ET T. ARECHAGA. Formal convergence characteristics of elliptically constrained incremental newton-raphson algorithms. *Int.J.Engng.Sci.*, 20(7) :1077–1097, 1982.
- [PCZ94] P. PONTE CASTAÑEDA ET M. ZIADMAN. Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. *J. Mech. Phys. Solids*, 42 :1459–1497, 1994.
- [Per92] G. PERRIN. *Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux*. PhD thesis, École polytechnique, Palaiseau, 1992.
- [PH00] T. PARDOEN ET J.W. HUTCHINSON. An extended model for void growth and coalescence. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :2467–2512, 2000.
- [PH03] T. PARDOEN ET J.W. HUTCHINSON. Micromechanical-based model for trends in toughness of ductile metals. *Acta Materialia*, 51 :133–148, 2003.

- [PL90] G. PERRIN ET J.B. LEBLOND. Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension - application to some problems in ductile fracture. *Int. J. Plasticity*, 6, 1990.
- [PL93] G. PERRIN ET J.B. LEBLOND. Rudniki and rice's analysis of strain localization revisited. *Journal of Applied Mechanics*, 60(4) :842–846, 1993.
- [Ram81a] E. RAMM. *Strategies for tracing the non-linear response near limit-points*, pages 63–89. Springer-verlag, Berlin, 1981.
- [Ram81b] E. RAMM. Improvement of damage prediction by anisotropy of microvoids. In *Non-linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton et al., volume 143-144, pages 202–208, pp.63-86 (1981).
- [Ric68] J.R. RICE. A path-independdnt integral and the approximation analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, 35 :379–386, 1968.
- [Rik72] E. RIKS. The application of newton's methods to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.*, 39(7) :1060–1066, 1972.
- [Rik79] E. RIKS. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids Structures*, 15(7) :529–551, 1979.
- [Rou87] G. ROUSSELIER. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design*, 105 :97–111, 1987.
- [RR75] J. W. RUDNIKI ET J. R. RICE. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :371–394, 1975.
- [RR87] E. RIKS ET C.C. RANKIN. Bordered equations in continuation methods : An improved solution technique. Technical Report 7, Nat. Aero Lab. Report NLR MP 82057 UPROJET FATIA DE TIARET, 1987.
- [RT69] J.R. RICE ET D.M. TRACEY. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 17 :201–217, 1969.
- [SFB94] K. SAANOUNI, K. FORSTER, ET F. BENHATIRA. On the anelastic flow with damage. *Int. J. of Damage Mechanics*, 3 :141–169, 1994.
- [SH96] D.Z. SUN ET A. HÖNIG. Micromechanics of coalescence in ductile fracture. *Int. J. Plasticity*, 99 :2–15, 1996.
- [SH98] J.C. SIMO ET T.J.R. HUGHES. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.

-
- [SL04a] K. SIRUGUET ET J-B. LEBLOND. Effect of void locking by inclusions upon the plastic behavior of porous ductile solids - part i : theoretical modeling and numerical study of void growth. *International Journal of Plasticity*, 20 :225–254, 2004.
- [SL04b] K. SIRUGUET ET J-B. LEBLOND. Effect of void locking by inclusions upon the plastic behavior of porous ductile solids - part ii : theoretical modeling and numerical study of void coalescence. *International Journal of Plasticity*, 20-2 :255–268, 2004.
- [SOO06] L. SIAD ET M. OULD OUALI. Dynamic explicit cell model simulations in porous ductile materials. In GDOUTOS E., editor, *16th European Conference on Fracture, July 2-7*, Alexandroupoulos, Greece, 2006.
- [SOOB07] LARBI SIAD, MOHAND OULD OUALI, ET ANOUAR BENNABES. Comparison of explicit and implicit finite element simulations of void growth and coalescence in porous ductile materials. *Materials and Design.*, doi : 10.1016/j.matdes.2007.02.003 :15 p., 2007.
- [Tho85] P.F. THOMASON. A three-dimensionel model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. *Acta Metallurgica*, 33(6) :1087–1095, 1985.
- [Tho90] P.F. THOMASON. *Ductile fracture of Metals*. Pergamon Press, Oxford, 1990.
- [TN84] V. TVERGAARD ET A. NEEDLEMAN. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 32 :157–169, 1984.
- [TN97] V. TVERGAARD ET A. NEEDLEMAN. Nonlocal effects on localization in void-sheet. *Int. J. Solids Structures*, 34 :2221–2238, 1997.
- [Tve81] V. TVERGAARD. Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fracture*, 17 :389–407, 1981.
- [VSCL⁺85] R.H. VAN STONE, T.B. COX, J.R. LOW, JR. PSIODA, ET J.A. PSIODA. Microstructural aspects of fracture by dimpled rupture. *international Metals Reviews*, 30(4) :157–179, 1985.
- [Yam78] H. YAMAMOTO. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *International Journal of Fracture*, 14(4) :347–365, 1978.
- [YGZZ06] HE YANG, LIANGGANG GUO, MEI ZHAN, ET SUN ZHICHAO. Research on the influence of material properties on cold ring rolling processes by 3d-fe numerical simulation. *International Journal of Processing Technology*, 177 :634–638, 2006.

-
- [Zav92] A. ZAVALIANGOS. *ELASTO-VISCO PLASTICITY OF ISOTROPIC POROUS METALS*. PhD thesis, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 1992.
- [Zha95] Z.L. ZHANG. On the accuracies of numerical integration algorithms for gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 121 :15–28, 1995.
- [Zie77] O.C. ZIENKIEWICZ. *La méthode des éléments finis. 3e éd.* McGraw Hill, Oxford, fifth edition, 1977.
- [ZMWC06] P. ZHAOA, HADFIELD M., Y. WANGA, ET VIEILLARD C. Sub-surface propagation of partial ring cracks under rolling contact part ii. fracture mechanics analysis. *Wear*, 261 :390–397, 2006.
- [ZN95] Z.L. ZHANG ET E. NIEMI. A class of generalized mid-point algorithms for the gurson-tervergaard material model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38 :2033–2053, 1995.
- [ZT00] O.C. ZIENKIEWICZ ET R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method, Vol. 1 : The BASIS, Vol. 2 : SOLID MECHANICS, Vol. 3 : FLUID DYNAMICS*. Butterworth-Heinemann, Oxford, fifth edition, 2000.

Résumé

Le but de cette thèse est de valider un outil numérique capable de prédire l'endommagement des métaux en cours de mise en forme. La modélisation micromécanique retenue pour effectuer ce travail prend en compte le changement de forme des cavités dans le matériau qui se déforme. L'influence de l'échauffement thermique d'origine mécanique est incorporée dans le modèle. Ces couplages, introduits dans des conditions adiabatiques et non adiabatiques, sont censés mieux rendre compte de l'évolution de la microstructure. Notamment, en raison de l'adoucissement thermique qui y est généré.

Ces lois de comportement sont implémentées dans le code ABAQUS en utilisant l'algorithme proposé par Aravas. Dans le cas d'une modélisation thermomécanique non adiabatique, le schéma explicite séquentiel est utilisé. Celui-ci permet une résolution en deux temps : calcul de la solution mécanique et de la dissipation plastique correspondante, puis estimation de l'échauffement thermique généré par cette dissipation.

Une technique de calculs explicite de cellules développée afin de maintenir une triaxialité constante tout au long du chargement est exploitée pour valider l'implémentation de la loi de comportement. Deux simulations de traction d'une barre cylindrique lisse et d'une éprouvette axisymétrique entaillée sont ensuite effectuées. La première permet de mettre en évidence le rôle du changement de forme des vides et la deuxième l'influence du couplage thermo-micromécanique. Finalement, le modèle est confronté aux résultats numériques et expérimentaux obtenus au cours de trois procédés de mise en forme que sont : l'écrasement de lopins, l'emboutissage d'une tôle et le laminage d'une barre.

Mots clés. Calcul de cellules. Forme des cavités. Mise en forme. Modélisation thermo-micromécanique. Porosité. Schéma explicite. Simulation numérique.

Abstract

The purpose of this thesis is to validate a numerical tool able to predict damage during metals forming processes. Micromechanical modeling chosen to carry out this work takes into account the cavities form change during material deformation. Thermal heating influence due to mechanical dissipation is incorporated in the model. These couplings, introduced under adiabatic and non-adiabatic conditions, are supposed to better account for the evolution of the microstructure. In particular, because of the thermal softening generated there.

Implementations of those constitutive laws in Abaqus software are possible using Aravas's algorithm. In the case of a nonadiabatic thermomechanical behaviour the sequential explicit scheme is used. This one allows a resolution in two steps : computation of the mechanical solution and the corresponding plastic dissipation, then estimation of the thermal heating generated by this dissipation.

An explicit technique of elementary cells calculations developed with an aim of maintaining a constant triaxiality throughout loading is exploited to validate the implementation of the constitutive law. Two simulations of traction of smooth cylindrical and notched axisymmetric bars are then carried out. The first highlights the role of the voids form change and the second the influence of the thermo-micromechanics coupling. Finally, the model is confronted with numerical and experimental results obtained during three working processes, namely : pieces upsetting, sheet stamping and bar rolling.

Keys words. Cells computation. Cavities Shape. Metal forming. Thermo-micromechanical Modeling. Porosity. Explicit schemes. Numerical simulation.

