



UNIVERSITÉ
DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles

Optimisation des codes LDPC pour les communications multi-porteuses

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 29 juin 2004

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'université de Reims Champagne-Ardenne

Spécialité Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal

par

Valérien MANNONI

Composition du jury

<i>Président :</i>	M. Philippe LOUBATON
<i>Rapporteurs :</i>	M. Maurice BELLANGER M. Emmanuel BOUTILLON
<i>Examineurs :</i>	M. Loïc BRUNEL M. Didier LE RUYET M. David DECLERCQ M. Guillaume GELLE
<i>Directeurs de thèse :</i>	Mme Inbar FIJALKOW M. Georges DELAUNAY

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens ici à exprimer toute ma reconnaissance aux personnes qui m'ont aidé, encouragé et soutenu pendant ces années de préparation au Doctorat.

Je veux tout d'abord remercier Monsieur le Professeur Philippe LOUBATON pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Que Messieurs les Professeurs Maurice BELLANGER et Emmanuel BOUTILLON ainsi que Monsieur Didier LE RUYET, sachent combien je suis honoré qu'ils aient accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce manuscrit ainsi que pour leurs remarques constructives et encourageantes.

Merci aussi à Monsieur Loïc BRUNEL d'avoir examiner ce travail et de m'avoir fait part de son sentiment sur celui-ci.

Cette thèse a été réalisée en collaboration au sein du laboratoire DéCom-CReSTIC sous la direction du Professeur Georges DELAUNAY ainsi qu'au laboratoire ETIS sous la direction du Professeur Inbar FIJALKOW. Je voudrais les remercier de m'avoir accueilli dans leur équipe, ainsi que pour la confiance qu'ils m'ont témoignée durant cette thèse.

Mes plus vifs remerciements seront évidemment adressés au tandem David DECLERCQ/Guillaume GELLE pour m'avoir constamment suivi durant ce travail. Votre disponibilité, votre complémentarité, vos qualités scientifiques dont j'ai essayé au maximum de m'imprégner, font que sans votre précieuse aide ce travail n'aurait sans doute pu voir le jour. En y associant en plus vos qualités humaines, sachez quel plaisir ce fut de travailler à vos côtés.

De même je remercie chaleureusement Maxime COLAS pour son apport à travers nos larges discussions principalement orientées sur la théorie de l'information, pour avoir supporté mes nombreux soucis informatiques et surtout pour sa grande sympathie. Je dois également toute ma reconnaissance à Mohammed EL RHABI pour m'avoir converti au "gradient tangentiel" ainsi que pour ces nombreux encouragements.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui ont agrémenté ces années passées au labo de moments inoubliables, à savoir : mes deux compères de " galère " Damien et Jérôme, la jeune génération de thésards composée de Cyril, Doc, Jeff et Pop, encore merci de m'avoir organisé une fête d'anniversaire surprise un soir où j'étais noyé dans la rédaction. Merci à tous les membres de l'équipe DéCom pour leur amitié et leur accueil chaleureux et tout particulièrement à Hassan, Sébastien, ... ainsi qu'aux membres du LAM et du département EEA à savoir Frédéric, Pascal, Sylvie, David, Stéphane, Fabien, Régis, ...

Enfin, je remercie mes parents, mon frère, l'ensemble de ma famille ainsi que mes amis pour m'avoir supporté et soutenu durant ces années.

Table des matières

Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Glossaire	xi
Introduction générale	1

Partie I Codes LDPC et transmissions multi-porteuses	5
--	---

Chapitre 1

Codes LDPC

1.1 Définition et paramétrisation des codes LDPC	8
1.1.1 Codes LDPC systématiques	10
1.1.2 Profil d'irrégularité des codes LDPC	11
1.2 Algorithmes de décodage des codes LDPC	12
1.3 Analyse et optimisation des codes LDPC	16
1.3.1 Évolution de Densité	16
1.3.2 Optimisation des codes LDPC pour les canaux instantanés	19
1.3.3 Evolution de densité avec approximation Gaussienne	20
1.3.3.1 Analyse asymptotique sur canal BABG	21
1.3.3.2 Optimisation des codes LDPC pour le canal BABG	25
1.3.4 Codes optimisés pour le canal BABG	26
1.3.5 Optimisation des codes LDPC pour d'autres types de canaux	28
1.4 Canaux à mémoire	29
1.4.1 Modélisation d'un canal à mémoire partielle	29
1.4.2 Égalisation et décodage conjoints	30
1.4.2.1 Évolution de densité sur un canal à mémoire	31
1.4.3 Optimisation des codes LDPC sur le canal à mémoire partielle	32

1.5	Conclusion	35
-----	----------------------	----

Chapitre 2

Transmissions multi-porteuses

2.1	Motivations et historique de l'utilisation des transmissions multi-porteuses . .	37
2.2	Chaîne de communication multi-porteuses	38
2.2.1	Modélisation des systèmes multi-porteuses	38
2.2.2	Systèmes COFDM	41
2.3	Systèmes multi-porteuses avec allocation de bits	44
2.3.1	Limite théorique : calcul de la capacité	44
2.3.2	Systèmes COFDM avec allocation de bits	48
2.4	Conclusion	51

Partie II Optimisation des codes LDPC pour les transmissions OFDM 53

Chapitre 3

Analyse asymptotique des codes LDPC pour les transmissions multi-porteuses

3.1	Modélisation des messages alimentant le décodeur	55
3.1.1	Modèle des messages pour une MAQ-4	56
3.1.1.1	Condition de Symétrie	56
3.1.1.2	Distribution des vraisemblances	56
3.1.2	Modèle des messages pour une MAQ-16	57
3.1.2.1	Etude de la symétrie de message provenant d'une MAQ-16 .	58
3.1.3	Généralisation à une MAQ-M	63
3.2	Analyse asymptotique des codes LDPC pour des transmissions OFDM	64
3.2.1	Approximation par fonction étagée d'un canal OFDM	64
3.2.2	Evolution de densité sur des canaux OFDM	67
3.2.2.1	Utilisation d'une unique constellation	68
3.2.2.2	Constellation variable avec allocation de bits	71
3.2.3	Approximation Gaussienne sur des canaux OFDM	75
3.2.3.1	Transmission OFDM avec une MAQ-4	75
3.2.3.2	Transmission OFDM avec allocation de bits	77
3.3	Conclusion	79

Chapitre 4

Optimisation des codes LDPC pour les transmissions multi-porteuses

4.1	Critères d'optimisation des codes LDPC	81
4.1.1	Minimisation du seuil de convergence	81
4.1.2	Minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information . . .	83
4.1.2.0.1	justification	83
4.1.2.0.2	écriture de la fonction de coût	84
4.2	Algorithmes d'optimisation	85
4.2.1	Optimisation par évolution différentielle	86
4.2.1.1	Minimisation de la probabilité d'erreur	86
4.2.1.2	Minimisation du seuil	88
4.2.2	Optimisation par programmation linéaire	89
4.3	Résultats pour une constellation MAQ-4	94
4.3.1	Minimisation de la probabilité d'erreur pour une MAQ-4	94
4.3.2	Minimisation du seuil pour une MAQ-4	96
4.4	Résultats pour un système avec allocation de bits	102
4.4.1	Hypothèses	102
4.4.2	Minimisation du seuil pour une MAQ-16	103
4.4.3	Optimisation des codes LDPC avec allocation de bits	104
4.5	Etude de robustesse vis à vis d'une mauvaise estimation du canal	108
4.6	Conclusion	112

Conclusion générale

115

Annexe A

Gradient tangentiel de la capacité d'un canal sélectif en fréquence avec entrée MAQ-M

Annexe B

Estimation du canal de propagation pour les systèmes OFDM

Bibliographie

121

Table des figures

1.1	graphe factoriel d'un code LDPC régulier ($N = 9, t_c = 2, t_r = 3$) de rendement $R = 1/3$	9
1.2	Encodage des codes LDPC.	11
1.3	Grphe factoriel d'un code LDPC irrégulier de rendement $R=1/2$. Nous avons tracé le profil d'irrégularité correspondant en fonction des proportions des noeuds de données.	12
1.4	Illustration du data pass	14
1.5	Illustration du check pass	14
1.6	Transformation du graphe factoriel d'un noeud de contrôle par transformée de Fourier.	14
1.7	Représentation du "Wave effect". (a) : Taux de connexion de chaque bit. (b) : Probabilités <i>a posteriori</i> après 1 itération. (c) : Probabilités <i>a posteriori</i> après 5 itérations. (d) : Probabilités <i>a posteriori</i> après 10 itérations. (e) : Probabilités <i>a posteriori</i> après 15 itérations.	16
1.8	Performances de codes LDPC de rendement $1/2$ optimisés pour le canal BABG. .	27
1.9	Grphe factoriel d'un code LDPC concaténé à un canal à mémoire.	30
1.10	Passage des messages à travers le treillis : Algorithme du BCJR fenêtré.	31
2.1	Chaîne de transmission OFDM.	39
2.2	Illustration de l'effet du préfixe cyclique.	40
2.3	Modèle fréquentiel d'un système OFDM.	41
2.4	Module du spectre d'un canal sélectif en fréquence.	42
2.5	Chaîne de transmission COFDM.	43
2.6	Illustration du <i>water filling</i>	45
2.7	Évolution de la capacité (en nombre moyen de bits par sous-porteuse) d'un canal sélectif en fréquence pour une entrée Gaussienne, MAQ-64, MAQ-16 et MAQ-4. .	46
2.8	Évolution de la capacité d'un canal BABG pour une entrée Gaussienne, MAQ-64, MAQ-16 et MAQ-4.	47
2.9	Amplitude du spectre du canal (courbe du haut). Distribution optimale de la puissance pour l'émission en moyenne de 2 bits d'information par sous-porteuse pour une entrée Gaussienne et une MAQ-16 (figure du milieu). Capacité résultante de chaque sous-porteuse (figure du bas).	49
2.10	Répartition des bits alloués (figure du bas) pour le canal ADSL (figure du haut). .	51
3.1	Illustration du canal équivalent à entrée binaire.	58
3.2	Constellation MAQ-16 étiquetée par un code de Gray.	59

3.3	Sur la figure de gauche nous avons représenté la d.d.p. du message u_{04k+1} pour $Im\{X_k\} = 1$ soit $C_{04k+1} = 0$ ainsi que pour $Im\{X_k\} = -1$ soit $C_{04k+1} = 1$. Sur la figure de droite est représentée la d.d.p. du message u_{04k+1} pour $Im\{X_k\} = 3$ soit $C_{04k+1} = 0$ ainsi que pour $Im\{X_k\} = -3$ soit $C_{04k+1} = 1$	60
3.4	Sur la figure de gauche nous avons représenté les d.d.p. du message u_{04k} pour $C_{04k} = 0$ ainsi que pour $C_{04k} = 1$. Sur la figure de droite est représenté les d.d.p. du message u_{04k+2} pour $C_{04k+2} = 0$ ainsi que pour $C_{04k+2} = 1$	61
3.5	Chaîne de transmission COFDM complétée de l'adaptateur de canal i.i.d..	62
3.6	D.d.p. des log-rapports de vraisemblance associés aux quatres bits considérés pour l'émission de 0 (partie gauche) et pour l'émission de 1 (partie droite).	63
3.7	Approximation par une fonction étagée de la fonction de transfert d'un canal sélectif en fréquence.	65
3.8	Evolution de la distance de Kullback $D_K(f_{N_{pmax}}, f_n)$ en fonction du nombre n de paliers utilisé pour effectuer l'approximation (figure de gauche). Représentation des densités $f_{N_{pmax}}$ et f_n pour $n = 2$ (figure de droite).	67
3.9	Représentation des densités $f_{N_{pmax}}$ et f_n pour $n = 10$ (figure de gauche) et pour $n = 100$ (figure de droite).	67
3.10	Approximation par une fonction étagée de la réponse en fréquence du canal.	69
3.11	Spectre d'amplitude du canal ADSL et Proakis B.	72
3.12	Approximation par une fonction étagée de la réponse en fréquence du canal et représentation de la connection entre les symboles et les noeuds de données.	73
3.13	D.d.p. des messages provenant du canal lorsqu'une constellation MAQ-16 est utilisée ainsi que son approximation par un mélange de quatre densités Gausiennes.	78
4.1	Modélisation du problème d'optimisation de N_p "sous-codes" LDPC pour N_p canaux en parallèle.	90
4.2	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation de la probabilité d'erreur pour le canal ADSL dont le spectre d'amplitude multiplié par 5 est également représenté.	95
4.3	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation de la probabilité d'erreur pour le canal $\underline{h}_{nm}$ dont le spectre d'amplitude multiplié par 7 est également représenté.	96
4.4	Comparaison des performances sur le canal ADSL des codes LDPC optimisé par $minP_e$, optimisé pour le canal BABG et régulier. La taille du mot de code est $N = 1024$	97
4.5	Comparaison des performances sur le canal $\underline{h}_{nm}$ des codes LDPC optimisé par $minP_e$, optimisé pour le canal BABG et régulier. La taille du mot de code est $N = 1024$	98
4.6	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal ADSL dont le spectre d'amplitude multiplié par 23 est également représenté.	98
4.7	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal Proakis B dont le spectre d'amplitude multiplié par 12 est également représenté.	99
4.8	Performances du code LDPC optimisé pour le canal ADSL et du code optimisé pour le canal BABG utilisés lors d'une transmission OFDM sur le canal ADSL. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$	101
4.9	Performances du code LDPC optimisé pour le canal Proakis B et du code optimisé pour la canal BABG utilisés lors d'une transmission OFDM sur le canal Proakis B. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$	101

4.10	Comparaison des performances entre le code optimisé par $\min P_e$ et celui optimisé par $\min S$ pour le canal ADSL. La taille du mot de code est $N = 1024$	102
4.11	Comparaison des performances entre le code optimisé par $\min P_e$ et celui optimisé par $\min S$ pour le canal ADSL. La taille du mot de code est $N = 16384$	103
4.12	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal ADSL dont le spectre d'amplitude multiplié par 30 est également représenté. La constellation utilisée est une MAQ-16.	104
4.13	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal Proakis B dont le spectre d'amplitude multiplié par 12 est également représenté. La constellation utilisée est une MAQ-16.	105
4.14	Performances des codes optimisés par la minimisation du seuil pour le canal ADSL dans le cas où une unique constellation MAQ-16 est utilisée et dans celui où un ensemble de constellations de différentes tailles issues d'une allocation de bits sont utilisées. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$	106
4.15	Performances des codes optimisés par la minimisation du seuil pour le canal Proakis B dans le cas où une unique constellation MAQ-16 est utilisée et dans celui où un ensemble de constellations de différentes tailles issues d'une allocation de bits sont utilisées. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$	107
4.16	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil dans le cadre d'une transmission OFDM avec allocation sur le canal ADSL (où l'axe des abscisses représente les proportions des noeuds de données).	108
4.17	Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil dans le cadre d'une transmission OFDM avec allocation sur le canal Proakis B (où l'axe des abscisses représente les proportions des noeuds de données).	109
4.18	Evolution des performances du code optimisé par la minimisation de la probabilité d'erreur binaire pour le canal ADSL pour plusieurs valeurs du ratio r_p	110
4.19	Evolution des seuils de convergence pour le canal ADSL du code optimisé ainsi que du code BABG en fonction du ratio r_p	111
4.20	Evolution des seuils de convergence pour le canal Proakis B du code optimisé ainsi que du code BABG en fonction du ratio r_p	112

Liste des tableaux

1.1	Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 1/2$ optimisés par programmation linéaire sous évolution de densité, approximation Gaussienne paramétrée par la moyenne et sous approximation Gaussienne paramétrée par l'information mutuelle.	26
1.2	Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC optimisés sous approximation Gaussienne paramétrée par l'information mutuelle pour t_{cmax} à 10, 30 et 200.	27
3.1	Seuils de convergence obtenus par évolution de densité de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-4 est utilisée.	71
3.2	Seuils de convergence obtenus par évolution de densité de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-16 est utilisée.	74
3.3	Seuils de convergence obtenus par évolution de densité de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B. Les constellations utilisées résultent d'une allocation de bits de manière à obtenir en moyenne 4 bits par sous-porteuse (à savoir que le nombre de bits maximum pouvant être alloué a été fixé à 6).	74
3.4	Seuils de convergence obtenus par approximation Gaussienne de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-4 est utilisée.	77
3.5	Seuils de convergence obtenus par approximation Gaussienne de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-16 est utilisée.	79
3.6	Seuils de convergence obtenus par approximation Gaussienne de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B. Les constellations utilisées résultent d'une allocation de bits de manière à obtenir en moyenne 4 bits par sous-porteuse (le nombre de bits maximum pouvant être alloué a été fixé à 6).	79
4.1	Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 0.5$ optimisés pour le canal ADSL, le canal Proakis B et le canal BABG. La capacité des canaux alimentés par une MAQ-4 est indiquée entre parenthèses.	100

4.2	Seuils de convergence obtenus par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 0.5$ optimisés pour le canal ADSL, le canal Proakis B et le canal BABG lorsque la constellation utilisée est une MAQ-16. La capacité des canaux à entrée MAQ-16 est indiquée entre parenthèses.	104
4.3	Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 0.5$ optimisés pour le canal ADSL, le canal Proakis B et le canal BABG. Les constellations utilisées résultent d'une allocation de bits de manière à obtenir en moyenne 4 bits par sous-porteuse (à savoir que le nombre de bits maximum pouvant être alloué a été fixé à 6). La capacité des canaux est indiquée entre parenthèses.	107

Glossaire

BABG	Bruit Additif Blanc Gaussien
BCJR	Algorithme développé par Bahl, Cooke, Jelinek, et Raviv [5]
BICM	Bit-Interleaved Coded Modulation
BPSK	Binary Phase Shift Keying
COFDM	Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing
DAB	Digital Audio Broadcasting
DVB-T	Digital Video Broadcasting Terrestrial
DMT	Discrete Multi-Tone
d.d.p.	densité de probabilité
EPR4	Extended Partial Response 4
EXIT	Extrinsic Information Transfer
FPGA	Field Programmable Gate Array
HIPERLAN	HIgh PERformances Local Area Network
IES	Interférences Entre Symboles
i.i.d.	indépendants et identiquement distribués
i.u.d.	indépendants et uniformément distribués
LDPC	Low-Density Parity-Check
MAP	Maximum A Posteriori
MAQ	Modulation d'Amplitude en Quadrature
MIMO	Multiple Input Multiple Output
<i>minPe</i>	critère d'optimisation par la minimisation de la probabilité d'erreur binaire
<i>minS</i>	critère d'optimisation par la minimisation du seuil
MLC	Multilevel Coding
MMSE	Minimization Mean Square Error
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
OS-Select	Order Statistics Select
RCDMA	Random Code Division Multiple Access
RSB	Rapport Signal à Bruit
TCM	Trellis Coded Modulation
TFD	Transformée de Fourier Discrète
UMP BP-based algorithm	Uniformly Most Powerful Belief Propagation based algorithm
xDSL	Digital Subscriber Lines
ZF	Zero Forcing

Introduction générale

Contexte

L'essor des communications numériques constitue une des principales révolutions technologiques des dernières décennies que ce soit au niveau de la téléphonie mobile, de l'internet et bientôt de la télévision numérique terrestre. Cette révolution n'aurait pu avoir lieu sans le développement et la conception de circuits complexes et miniaturisés permettant d'implanter efficacement des algorithmes de décodage de plus en plus performants.

Ce boom technologique a généré de nouveaux besoins en termes de débit d'information utile et de fiabilité augmentant par là même, la complexité des systèmes de transmissions mais également le niveau requis de performances. Une des technologies permettant de répondre à ces besoins est la modulation OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Supportant des débits d'information très importants lors de transmission sur canal sélectif en fréquence tout en combattant les interférences entre symboles, cette dernière est devenue l'une des technologies privilégiées de la recherche actuelle. Le principe de base de la modulation OFDM est de découper la largeur de bande du canal en un ensemble de sous-bandes parallèles, instantanées et indépendantes sur lesquelles l'information est transmise. L'utilisation d'un préfixe cyclique permet alors d'assurer l'orthogonalité des informations véhiculées par chacune des sous-porteuses permettant ainsi d'obtenir une efficacité spectrale importante tout en étant implanté efficacement par FFT. De plus, l'étape d'égalisation est alors amplement simplifiée puisqu'elle consiste à multiplier chacune des sous porteuses par un simple coefficient. Fortes de tous ces avantages, les modulations OFDM ont été choisies pour divers standards tels que la radiodiffusion numérique (DAB), la diffusion terrestre de la télévision numérique (DVB-T), les réseaux locaux sans fil à haut débit (HIPERLAN-2), ou les technologies xDSL, etc ...

Cependant dans de nombreuses applications, les canaux de propagation présentent des sous-bandes à très faible rapport signal à bruit. Pour ces canaux, les performances des systèmes OFDM (en termes de taux d'erreur binaire) seront très affectées par les bits émis à travers ces sous-bandes fortement atténuées imposant alors l'utilisation d'un code correcteur d'erreur performant (Coded OFDM). C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse c'est-à-dire celui du développement d'une structure "ad hoc" de codage canal pour les transmissions OFDM.

Depuis que Shannon fixa en 1948 les performances limites d'une transmission sur canal bruité, le challenge des chercheurs est de trouver des codes ainsi que des algorithmes de décodage associés qui permettent d'atteindre cette limite. Ainsi, deux familles de codes correcteurs d'erreurs pseudo-aléatoires se sont distinguées par leurs performances atteignant la capacité de Shannon,

à savoir les turbo-codes introduit par Berrou, Glavieux et Thitimajshima [7] en 1993 et les codes LDPC (Low-Density Parity-Check) introduits par Gallager en 1962 [41] et redécouverts ensuite par Mackay *et al.* [56] en 1995 et Spielman *et al.* [76] en 1996.

Les codes LDPC sont des codes correcteurs d'erreurs pseudo-aléatoires basés sur des matrices à vérification de parité de faible densité. Une des contributions les plus significatives depuis 1995 est celle de Luby *et al.* [55] qui ont introduit et paramétré les codes LDPC *irréguliers*. Ces derniers ont pour principale caractéristique de présenter de meilleures performances que les codes réguliers à condition que l'irrégularité soit judicieusement choisie. Afin de bien choisir cette irrégularité, Richardson, Urbanke *et al.* [70, 71] ont montré qu'il était possible de prédire le comportement des codes LDPC de taille infinie lors de l'étape de décodage et que celui-ci était fonction des paramètres définissant le code LDPC. Cet algorithme, nommé *évolution de densité*, permet alors de déterminer la distance qui sépare les performances de codes LDPC (fonction de ces paramètres d'irrégularité) de la limite de Shannon. À l'aide de cet outil d'analyse, les auteurs ont ensuite proposé d'optimiser la structure des codes LDPC de manière à minimiser cet écart à la limite de Shannon, ce qui a permis d'obtenir des codes LDPC atteignant cette limite pour le canal binaire à effacement [74] et le canal à bruit additif blanc Gaussien [19].

Organisation du document

L'objet de cette thèse est d'optimiser la structure des codes LDPC pour les transmissions multi-porteuses à travers un canal sélectif en fréquence. Ce mémoire est composé de deux parties :

- la première partie (chapitres 1 et 2) présente un état de l'art introduisant les notations et concepts des codes LDPC et des transmissions OFDM. Sont également insérés dans cette première partie certains résultats originaux nécessaires à la suite du document.
- la seconde partie de ce mémoire (chapitres 3 et 4) constitue le corps de notre recherche.

L'ensemble des approches d'optimisation des codes LDPC pour des transmissions OFDM qui ont été développées y est présenté.

Le détail de chacun des chapitres est décrit ci-dessous.

Le premier chapitre de ce manuscrit est consacré à une large présentation des codes LDPC incluant les notations et les outils algorithmiques indispensables à une bonne compréhension du document. Après avoir introduit les codes LDPC et leur représentation par graphe factoriel, nous motiverons le choix de l'utilisation des codes LDPC systématiques pour l'ensemble de cette thèse. Une nouvelle paramétrisation des codes LDPC sera ensuite développée, introduisant la notion de *profil d'irrégularité*. Cette paramétrisation est nécessaire pour les transmissions sur un canal non-stationnaire ou à mémoire. Le décodage par l'algorithme de propagation de croyance sera également présenté et l'analyse de la convergence des codes, lors de cette phase de décodage, étudiée. Il ressortira de cette analyse, nommée *évolution de densité*, que les densités de probabilités des messages se propageant à l'intérieur du graphe factoriel au cours des itérations de décodages sont fonctions des paramètres définissant le code LDPC. Enfin, nous présenterons les différentes méthodes permettant d'optimiser la structure des codes LDPC sur des canaux instantanés. La fin de ce chapitre présente une synthèse sur l'optimisation des codes LDPC pour les canaux à mémoires partielles.

Le second chapitre a pour objectif de présenter la chaîne de transmission COFDM, ainsi que les principales caractéristiques des canaux OFDM sélectifs en fréquence. Dans le cadre de

canaux quasi-statiques dans le temps, nous calculerons les limites théoriques (soit la capacité de Shannon) d'un tel système pour des entrées MAQ. Pour ces canaux et pour des applications où il existe une voie de retour, il a été montré à plusieurs reprises qu'il était possible d'améliorer les performances en exploitant la connaissance de la réponse fréquentielle du canal pour allouer le nombre optimal de bits à émettre dans chaque sous-bande. Ce procédé dénommé *allocation de bits* sera également présenté en conclusion de ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous proposons d'étudier le comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC lors de transmissions OFDM à travers un canal sélectif en fréquence. Pour cela, les conditions de symétrie pour les messages provenant du canal seront vérifiées, conditions nécessaires à la validité des algorithmes d'optimisation. Nous introduirons ensuite une approximation du canal par fonction étagée et présenterons la méthodologie permettant d'effectuer l'étude du comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC pour des transmissions OFDM. Cette étude sera basée sur l'utilisation du profil d'irrégularité comme outil de paramétrisation des codes (introduit dans le chapitre 1). L'analyse des codes LDPC sera réalisée pour le cas d'une unique constellation d'entrée, puis pour l'utilisation d'un ensemble de constellations de différentes tailles provenant d'une allocation de bits.

Le chapitre 4, quant à lui, est essentiellement consacré à l'optimisation des codes LDPC pour les transmissions OFDM et à la présentation des principaux résultats. Nous introduirons dans ce chapitre deux critères d'optimisation des codes LDPC, l'un permettant d'obtenir le code présentant les meilleures performances asymptotiques (minimisation du seuil de convergence), et un nouveau critère original, mieux adapté à l'utilisation de petits mots de codes, basé sur la minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information. Nous discuterons également des problèmes d'implantation de ces critères liés à leur non-linéarité et présenterons une alternative au critère de minimisation du seuil de convergence permettant une optimisation mathématique par programmation linéaire. Ce dernier algorithme sera également étendu aux transmissions avec allocation de bits. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la présentation des performances des différents codes LDPC obtenus et discutera également de la robustesse de notre approche, vis à vis d'une méconnaissance du canal à l'émission.

Finalement, la conclusion générale de ce travail synthétisera les différentes idées présentées dans ce document et introduira également les perspectives de travaux futurs.

Première partie

Codes LDPC et transmissions
multi-porteuses

Chapitre 1

Codes LDPC

Les codes LDPC (Low-Density Parity-Check), introduits par Gallager en 1962 [41] [42] sont des codes correcteurs d'erreurs pseudo-aléatoires basés sur des matrices à vérification de parité de faible densité. Ces codes sont également appelés codes de Gallager. Hormis quelques exceptions comme les travaux de Zyablov *et al.* [88] en 1975 et de Tanner [79] en 1981, ces codes n'ont eu qu'un faible impact dans la communauté de la théorie du codage et ce, à cause de leur complexité d'encodage et des moyens matériels nécessaires pour les décoder. Cette parenthèse durera jusqu'à l'introduction des turbo codes par Berrou, Glavieux et Thitimajshima [7]. Du fait de la dynamique engendrée par ces travaux, Mackay *et al.* [56] en 1995 et Spielman *et al.* [76] en 1996 ont redécouvert les codes LDPC qui ont fait l'objet par la suite de nombreux travaux de recherches. Avant cela, Tanner dans [79] a étendu les codes de Gallager en remplaçant les vérifications de parité par des contraintes plus générales ce qui a permis d'obtenir une classe de codes couramment appelés codes de Tanner. Il proposa, alors, une extension de l'algorithme de décodage itératif introduit par Gallager en utilisant des décodeurs indépendants pour chaque contrainte. Wiberg [85], s'appuyant sur les travaux de Tanner, développa des algorithmes de décodage générique pour les codes de Tanner : "min-sum" et "sum-product". Il montra, en particulier, que l'algorithme de Viterbi et l'algorithme de Tanner 'B' sont des cas particuliers de l'algorithme "min-sum". De même, il montra que l'algorithme Forward-backward et l'algorithme de Gallager ne sont que des cas particuliers de l'algorithme "sum-product".

Mackay dans [56] et [57] a tout d'abord montré que l'algorithme de décodage développé par Gallager s'apparentait à l'algorithme de propagation de croyance de Pearl [65]. Davey et Mackay ont ensuite introduit une version non binaire des codes de Gallager avec lesquels ils obtiennent de meilleures performances qu'avec les codes binaires [20]. Luby *et al.* [55] ont quant à eux introduit les matrices de vérification de parité avec une distribution du nombre de "1" sur les lignes et/ou sur les colonnes de la matrice de parité non-uniforme. Ces codes, appelés codes LDPC irréguliers, se sont montrés sous certaines conditions que nous développerons dans ce chapitre plus performants que les codes réguliers. Davey *et al.* [20] ont, alors, présenté des codes de Gallager irréguliers et non binaires avec lesquels ils ont obtenu de meilleures performances que les meilleurs turbo codes connus.

Sous certaines conditions que nous discuterons également dans ce chapitre, les codes LDPC exhibent un phénomène de seuil. Ce seuil, obtenu pour une taille de bloc infinie, représente le plus faible rapport signal à bruit E_b/N_0 au-dessus duquel la probabilité d'erreur bloc est strictement nulle. Par conséquent, le seuil d'un code LDPC pourra représenter une mesure pertinente de qualité en considérant son écart par rapport à la capacité de Shannon. Ce phénomène a tout d'abord été observé par Gallager dans [42] pour un canal binaire symétrique lorsqu'il introduisit

les codes réguliers et a ensuite été constaté par Luby *et al.* dans [55] pour des codes irréguliers. Cette observation a ensuite été généralisée pour un grand nombre de canaux à entrée binaire, incluant le canal binaire à effacement, le canal binaire symétrique, le canal de Laplace, le canal à bruit additif blanc gaussien (BABG) [70].

La contribution théorique la plus significative depuis que Mackay prouva que les codes LDPC peuvent approcher la capacité de Shannon avec un décodage optimal, vient de Richardson, Urbanke *et al.* [70, 71]. En effet, les auteurs ont démontré que le comportement asymptotique moyen du décodage des codes de LDPC était fonction des paramètres définissant le code. En utilisant cette méthode, appelée Évolution de Densité (*Density Evolution*), il est possible d'évaluer le seuil d'un code LDPC, et ainsi d'optimiser les valeurs des paramètres de manière à minimiser ce seuil. Notons que cette approche a permis d'obtenir sur le canal BABG, des codes présentant des performances très proches de la limite de Shannon (pour un rendement $R=1/2$, le meilleur code LDPC exhibe un seuil à 0.0045 dB de cette limite). Cette capacité de Shannon a d'ailleurs été atteinte pour le canal binaire à effacement [74].

Ce chapitre sera présenté sous la forme suivante. Nous introduirons, tout d'abord, les codes LDPC, nous spécifierons alors les différentes notations paramétrant ce type de code (Cf. section 1.1). Les méthodes d'encodage de ces codes seront ensuite présentées en section 1.1.1. Après la présentation de l'algorithme de décodage (Propagation de Croyance) en section 1.2, le comportement asymptotique des codes LDPC sera étudié pour les canaux instantanés (Cf. section 1.3.1). Cette étude, appelée évolution de densité, est basée sur l'analyse des densités de probabilité des différents messages se propageant lors du décodage. Ce procédé permettra de déterminer rapidement le seuil d'un code LDPC, et ainsi d'optimiser leur structure. Nous présenterons, ensuite, l'application et l'adaptation de ces méthodes aux canaux à mémoire.

Ce chapitre, principalement bibliographique, a pour intérêt d'introduire tous les outils nécessaires à la bonne compréhension de l'optimisation des codes LDPC pour les transmissions OFDM sur canal sélectif en fréquence. Nous avons également présenté une synthèse des différents travaux concernant l'optimisation des codes LDPC pour les transmissions simple porteuse sur un canal à mémoire (soit sélectif dans le domaine spectral) dont nous présenterons une alternative dans cette thèse.

1.1 Définition et paramétrisation des codes LDPC

Un code LDPC de paramètres (N, t_c, t_r) est un code bloc linéaire binaire de longueur N défini par une matrice de vérification de parité $\mathbf{H}$, creuse, de dimension $(M \times N)$ avec $M = \frac{t_c}{t_r}N$. Les mots de code $\underline{m}$ consistent en une séquence de N bits satisfaisant un ensemble de M équations de contrôles de parité. Ceci se traduit par la relation suivante appelée équation de contrôle de parité :

$$\mathbf{H}\underline{m} = \underline{0} \quad (1.1)$$

Le nombre de bits d'information est $K = N - M$ et le rendement R du code est $R \geq 1 - \frac{t_c}{t_r}$. L'inégalité venant du fait que le rang de la matrice $\mathbf{H}$ n'est pas nécessairement plein. La matrice $\mathbf{H}$ est composée de t_c "1" par colonne, t_r "1" par ligne et de zéros pour tous les autres éléments. Par conséquent, chaque élément du mot de code participe à t_c équations de contrôle de parité et chacune de ses équations est composée de t_r bits. Ce type de code est appelé code LDPC *régulier*. Un code LDPC est alors une réalisation appartenant à l'ensemble des codes LDPC définis par les paramètres (N, t_c, t_r) . Afin d'obtenir une matrice creuse, les paramètres t_c et t_r doivent être petits devant la longueur du mot de code N autrement dit, le nombre de "1" dans la matrice $\mathbf{H}$ devra être de l'ordre de N plutôt que de l'ordre de N^2 .

Ci-dessous, nous avons représenté la matrice de contrôle de parité d'un code LDPC ($N = 9, t_c = 2, t_r = 3$). Son rendement est $R = 1/3$ et son nombre de bits d'information est $K = 3$.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Un code LDPC peut être également représenté graphiquement, cette représentation est appelée soit graphe de Tanner [79] ou soit, plus récemment, graphe factoriel [49]. Un graphe factoriel est un graphe bipartite contenant deux types de noeuds : les noeuds de données et les noeuds fonctionnels. Ces deux types de noeuds sont reliés entre eux par des branches. Dans le cas d'un code LDPC, les noeuds de données représentent le mot de code et les noeuds fonctionnels, quant à eux, représentent les vérifications de parité. Dans la suite, les noeuds fonctionnels seront alors nommés noeuds de contrôles ou noeuds de parités. Le $i^{\text{ème}}$ noeud de donnée et le $j^{\text{ème}}$ noeud de contrôle sont connectés par une branche si et seulement si $\mathbf{H}_{j,i}$ est non nul. La figure 1.1 représente le graphe factoriel du code LDPC régulier défini par la matrice $\mathbf{H}$ définie en (1.2).

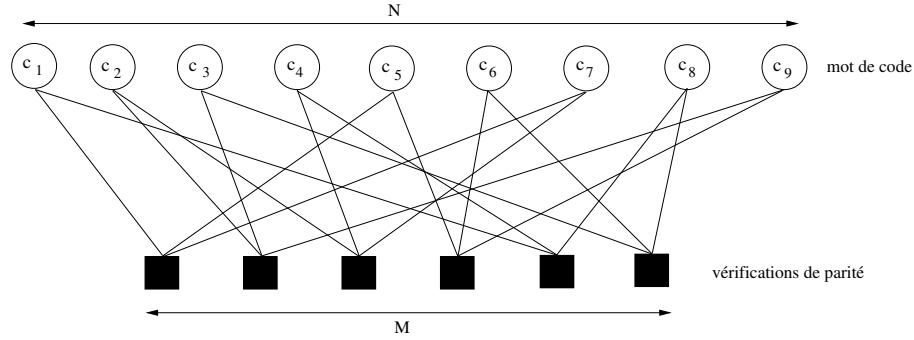


FIG. 1.1 – graphe factoriel d'un code LDPC régulier ($N = 9, t_c = 2, t_r = 3$) de rendement $R = 1/3$.

Le graphe factoriel d'un code LDPC est donc une représentation graphique très didactique de la structure de ces codes. Il est également important de noter que les représentations graphiques ont permis le développement et la mise en oeuvre d'algorithmes de décodage [49]. Nous détaillerons ce point dans la prochaine section.

Une classe plus générale des codes LDPC a ensuite été introduite par Luby *et al.* [55], il s'agit des codes LDPC *irréguliers*. Cette irrégularité se traduit par une distribution non uniforme du nombre de "1" sur les lignes et/ou sur les colonnes de la matrice de contrôle de parité $\mathbf{H}$. Ceci revient à distribuer irrégulièrement le nombre de branches connectées aux différents types de noeuds sur le graphe factoriel. Si la distribution de l'irrégularité est bien choisie, alors les codes LDPC irréguliers présentent de meilleures performances que les réguliers, et ce, pour une complexité de décodage équivalente.

Habituellement l'irrégularité d'un code LDPC est spécifiée par deux polynômes : $\lambda(x) = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i x^{i-1}$ et $\rho(x) = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j x^{j-1}$ où λ_i (resp. ρ_j) est la proportion des branches connectées aux noeuds de données (resp. noeuds de contrôles) de degré i c'est-à-dire connectés avec i branches (resp. degré j). t_{cmax} (resp. t_{rmax}) représente le taux de connexion maximal des noeuds de

données (resp. contrôles). Ces deux polynômes sont liés par le rendement R du code, et la relation les liant s'écrit : $(1 - R) \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i/i = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j/j$. Il est également usuel d'utiliser une représentation duale de l'irrégularité qui consiste en l'utilisation de deux autres polynômes : $\tilde{\lambda}(x) = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_i x^{i-1}$ et $\tilde{\rho}(x) = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \tilde{\rho}_j x^{j-1}$ où, cette fois $\tilde{\lambda}_i$ (resp. $\tilde{\rho}_j$) représente la proportion des noeuds de données (resp. contrôles) de degré i (resp. j). Ces deux représentations (λ_i, ρ_j) et $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{\rho}_j)$ sont liées par les relations suivantes :

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i/i}{\sum_{k=2}^{t_{cmax}} \lambda_k/k} \quad \tilde{\rho}_j = \frac{\rho_j/j}{\sum_{k=2}^{t_{rmax}} \rho_k/k}$$

Les codes LDPC sont ainsi paramétrés par $(N, \lambda(x), \rho(x))$ (ou $(N, \tilde{\lambda}(x), \tilde{\rho}(x))$) représentant, respectivement, la longueur du mot de code, les distributions des taux de connexion sur les noeuds de données et sur les noeuds de contrôles (le code régulier étant juste un cas particulier).

1.1.1 Codes LDPC systématiques

L'introduction des codes LDPC systématiques par Mackay [58] a été principalement motivé par la réduction de la complexité d'encodage. Nous verrons dans cette section qu'en plus de rendre concrète l'implantation des codes LDPC, cette structure permet d'encoder en conservant de bout en bout la structure du code LDPC définie par la matrice de parité $\mathbf{H}$.

Le problème de l'encodage des codes LDPC est de déterminer le mot de code $\underline{m}$ à partir du vecteur $\underline{b}$ contenant les bits d'information et de la matrice de vérification de parité $\mathbf{H}$ sous la contrainte définie par l'équation (1.1). Si $\mathbf{G}$ est la matrice génératrice du code LDPC à encoder, nous avons :

$$\underline{m} = \mathbf{G}\underline{b}, \quad (1.3)$$

Notons que si l'on introduit cette équation dans (1.1), nous obtenons la relation suivante :

$$\mathbf{H}\underline{m} = \underline{0}, \quad (1.4)$$

La méthode qui semble être la plus simple pour encoder est de construire une matrice d'encodage $\mathbf{H}'$ triangulaire supérieure par application du pivot de Gauss sur la matrice $\mathbf{H}$. Comme représenté sur la figure 1.2, le mot de code $\underline{m}$ est alors découpé en une partie systématique contenant les bits d'information b_n , $n = 1, \dots, K$, et en une partie contenant les bits de redondances r_m , $m = 1, \dots, M$, à déterminer. Ensuite par identification de bas en haut, il devient aisé de calculer les bits de redondance. Cependant, l'utilisation du pivot de Gauss sur la matrice creuse $\mathbf{H}$ permet seulement d'obtenir une matrice d'encodage semi-triangulaire supérieure $\mathbf{H}'$ avec une importante densité de "1" rendant ainsi le nombre d'opérations à effectuer lors de l'encodage de l'ordre de N^2 alors que leurs concurrents directs c'est-à-dire les turbo-codes ont une complexité linéaire $\mathcal{O}(N)$. Cette étape d'encodage représente alors l'inconvénient principal à l'implantation pratique des codes LDPC.

Pour réduire cette complexité deux approches ont été développées. La première consiste à contraindre la matrice de vérification de parité de manière à réduire cette complexité alors que la seconde est basée sur la construction d'une matrice d'encodage semi-triangulaire la plus creuse possible.

En ce qui concerne la première approche, nous pouvons tout d'abord noter les travaux de Spielman *et al.* [77, 53] qui consistent à concaténer des codes LDPC de faibles longueurs (sous-codes). Le code résultant est alors encodable avec une complexité linéaire. Cependant, étant

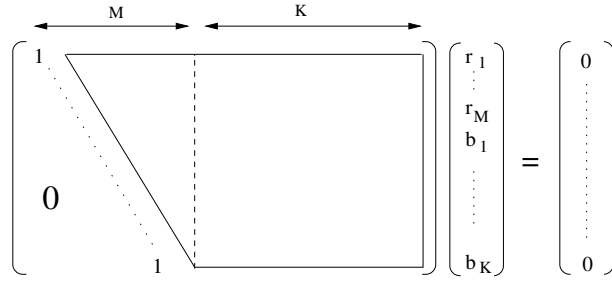


FIG. 1.2 – Encodage des codes LDPC.

donné que la taille du bloc de chaque sous-code est très petite devant la taille du bloc résultant, les performances de ce type de code sont moins bonnes que celles obtenues avec un code LDPC standard de même longueur. Une autre approche, introduite par Mackay *et al.* [58], consiste à forcer la matrice de vérification de parité à être systématique (soit directement encodable) c'est-à-dire que l'ensemble des codes est restreint par le fait que la matrice $\mathbf{H}$ soit de forme semi-triangulaire tel que décrit par la figure 1.2. Étant donné que la matrice de parité est creuse, cette restriction garantit une complexité d'encodage linéaire. Néanmoins, elle engendre, en général, quelques pertes minimales au niveau des performances.

Des méthodes de réduction de la complexité d'encodage sans aucune contrainte sur la forme de la matrice de contrôle de parité ont été également développées. Dans [72], Richardson et Urbanke utilisent des matrices semi-triangulaires pour encoder. Ces matrices sont obtenues uniquement par de simples permutations des lignes et des colonnes, ce qui permet de conserver la propriété de matrice creuse. La complexité d'encodage dépend alors d'un paramètre g traduisant l'écart entre la matrice semi-triangulaire résultante et une matrice triangulaire (pour laquelle la complexité est linéaire). La seconde approche, introduite dans [23], consiste à construire une matrice d'encodage triangulaire qui soit la plus creuse possible. Ceci est effectué en appliquant, lors du pivot de Gauss, le critère de Markovitz qui consiste à pivoter autour du "1" qui contient sur l'ensemble de sa ligne et de sa colonne le moins de "1". La complexité résultante est alors en $\mathcal{O}(Nt_{r_{moyen}}^2)$ où $t_{r_{moyen}}$ représente le nombre moyen de "1" par ligne. Cependant, du fait de la permutation des colonnes lors de l'étape de construction de la matrice $\mathbf{H}'$, ces deux méthodes présentent l'inconvénient de permuter les bits à l'intérieur du mot de code.

Par conséquent, nous avons choisi d'utiliser la méthode de Mackay qui consiste à construire une matrice de parité $\mathbf{H}$ systématique (semi-triangulaire supérieure, Cf. figure 1.2). Dans la section suivante, nous introduirons une généralisation de la paramétrisation des codes LDPC qui utilise pleinement la structure des codes LDPC systématiques.

1.1.2 Profil d'irrégularité des codes LDPC

La description des codes LDPC telle qu'elle a été présentée ci-dessus est suffisante dès lors que le canal est instantané et/ou stationnaire et donc quand tous les bits du mot de code présentent les mêmes propriétés statistiques. Cependant, lorsque le canal est à mémoire et/ou non stationnaire, la position des différents taux de connexion à l'intérieur du mot de code s'avère être un paramètre très influent. En effet, si chaque bit du mot de code ne voit pas les mêmes propriétés statistiques du canal il semble intéressant de lui associer un taux de connexion différent. Le type de canaux pour lesquels nous présentons une optimisation des codes LDPC

dans les chapitres 3 et 4, à savoir les canaux OFDM sélectifs en fréquence, sont, vu du décodeur, non-stationnaires. Pour tenir compte de cette non-stationarité du canal, nous avons été amenés à introduire une paramétrisation plus générale des codes LDPC appelée *profil d'irrégularité* [24, 60]. Cette paramétrisation inclut les positions p_i à l'intérieur du graphe factoriel de l'ensemble des noeuds de données de degré i . La figure 1.3 présente le graphe factoriel d'un code LDPC irrégulier, ainsi que son "profil d'irrégularité" pour les paramètres suivants : $N=6$, $\tilde{\lambda}(x) = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_i^{(p_i)} x^{i-1} = \frac{1}{6}^{(1)} x^6 + \frac{1}{3}^{(2)} x^3 + \frac{1}{2}^{(3)} x$ et $\tilde{\rho}(x) = x^6$. Dans ces conditions les codes LDPC seront paramétrisés par $(N, \tilde{\lambda}(x)^{p(x)}, \tilde{\rho}(x))$ ou $(N, \tilde{\lambda}, \underline{p}, \tilde{\rho})$, les vecteurs $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\rho}$ contenant respectivement les coefficients des polynômes $\tilde{\lambda}(x)$ et $\tilde{\rho}(x)$ et le vecteur $\underline{p}$ indiquant les positions des différents groupes de noeuds de données. Notons ici que les branches reliant les noeuds de données aux noeuds de contrôles étant entrelacées, la position des noeuds de contrôles n'influe pas sur les performances des codes LDPC et il ne sera donc pas nécessaire de tenir compte de leur position. Notons également, que cette paramétrisation implique que les noeuds de même degré occupent le même voisinage dans le mot de code et par conséquent le même voisinage du canal. Malgré cette restriction, nous pensons que cette description de l'irrégularité constitue une base solide pour l'optimisation de la structure des codes LDPC appliqués à une grande classe de canaux et plus spécifiquement les canaux non-stationnaires.

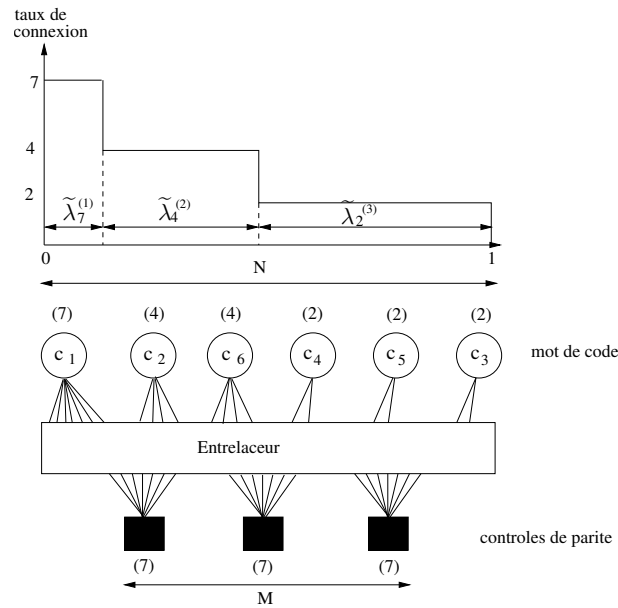


FIG. 1.3 – Graphe factoriel d'un code LDPC irrégulier de rendement $R=1/2$. Nous avons tracé le profil d'irrégularité correspondant en fonction des proportions des noeuds de données.

1.2 Algorithmes de décodage des codes LDPC

Dans cette section, nous allons présenter un des algorithmes permettant le décodage des codes LDPC. Dès que la taille du mot de code devient importante, ce qui est une hypothèse nécessaire afin d'obtenir des performances convenables, le décodage au sens du maximum de vraisemblance présente une complexité trop importante pour permettre une réalisation pratique. Pour pallier à ce type de problème, Gallager présenta dans [42] un algorithme de décodage itératif sous-optimal avec un nombre constant d'opérations par bit. Cet algorithme a ensuite été revu par MacKay

[56] et Kschischang *et al.* [49] dans le cadre de la théorie des graphes. L'algorithme résultant est alors connu sous plusieurs noms tel que *propagation de croyance* (belief propagation) (provenant de la communauté de l'intelligence artificielle [65]) ou bien encore *algorithme somme-produit* (sum-product). Cet algorithme peut être vu comme un algorithme de propagation de messages sur le graphe factoriel associé. Les messages transitant par les branches du graphe peuvent être soit des probabilités, soit les logarithmiques des rapports de vraisemblance. Le principe de la propagation de croyance est l'application de la règle de Bayes localement (soit sur chaque bit) et itérativement afin d'estimer les probabilités *a posteriori* de chaque bit. Dans le cadre d'un décodage sur un graphe sans cycle (le graphe est alors un arbre) c'est-à-dire dans le cas où tous les messages sont indépendants, la factorisation locale des règles de Bayes conduit au calcul exact des probabilités *a posteriori* des noeuds de données [49].

Dans certains cas incluant celui des codes LDPC, le graphe factoriel présente des cycles. Dans ces conditions, du fait de la dépendance cyclique des différents messages, le calcul exact des probabilités *a posteriori* n'est plus assuré. Cependant, plus un graphe est creux plus la dépendance entre les différents messages sera faible. De plus, pour minimiser cette dépendance il est nécessaire de calculer plusieurs fois les messages sur les branches ce qui mène à une utilisation itérative de l'algorithme de propagation de croyance.

Propagation de croyance

Chaque itération de l'algorithme de propagation de croyance est composée de deux étapes :

- Une étape de mise à jour des messages lorsqu'ils passent par un noeud de donnée appelée *data pass*.
- Une étape de mise à jour des messages lorsqu'ils passent par un noeud de contrôle appelée *check pass*.

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, les messages utilisés seront des log-rapports de vraisemblance. Notons $v = \log \frac{p(y|c=0)}{p(y|c=1)} = \log \frac{v[0]}{v[1]}$ le message de sortie d'un noeud de donnée et $u = \log \frac{p(y'|c'=0)}{p(y'|c'=1)} = \log \frac{u[0]}{u[1]}$ le message de sortie d'un noeud de contrôle.

Mise à jour des messages sur un noeud de donnée : Data pass

Lors de la mise à jour sur le noeud de donnée k de degré i à l'itération l , le message v envoyé sur la q^{ieme} branche est donné par la relation suivante (Cf. fig. 1.4) :

$$v_q^{(l)} = u_0 + \sum_{n=1; n \neq q}^i u_n^{(l-1)} \quad \forall q = 1, \dots, i \quad (1.5)$$

où u_n , $n = 1, \dots, i$, représentent les messages venant des noeuds de contrôles voisins et $u_0 = \log \frac{p(y_k|c_k=0)}{p(y_k|c_k=1)}$ représente le log-rapport de vraisemblance observé en sortie du canal. A la première itération, tous les messages $u_n^{(0)}$ venant des noeuds de contrôles sont considérés comme nuls.

Mise à jour des messages sur un noeud de contrôle : Check pass

Ensuite, lors de la mise à jour sur un noeud de contrôle de degré j , le message de sortie u sur la p^{ieme} branche est donné par l'expression (Cf. fig. 1.5) :

$$\tanh \frac{u_p^{(l)}}{2} = \prod_{m=1; m \neq p}^j \tanh \frac{v_m^{(l)}}{2} \quad \forall p = 1, \dots, j \quad (1.6)$$

où v_m , $m = 1, \dots, j$ sont les messages venant des noeuds de données voisins.

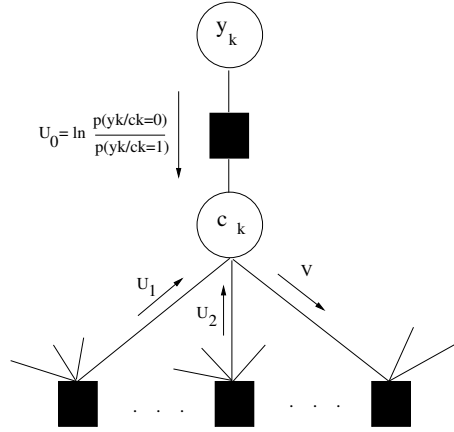


FIG. 1.4 – Illustration du data pass

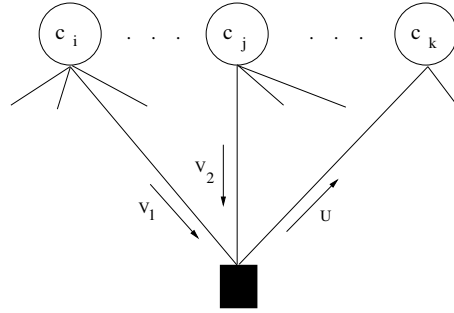


FIG. 1.5 – Illustration du check pass

Remarque 1 Il a été montré dans [18] que l'étape de mise à jour des messages par un noeud de contrôle pouvait être effectuée dans le domaine fréquentiel en utilisant des Transformées de Fourier Discrètes (TFD) d'ordre 2 comme représentée sur la figure 1.6. En effet, si on note $fftv$ le message en sortie de la TFD alors il est facile de voir que nous avons la relation suivante :

$$fftv = \log \frac{fftv[0]}{fftv[1]} = -\log \tanh(v/2), \quad (1.7)$$

où $[fftv[0], fftv[1]] = TFD_2([v[0], v[1]])$.

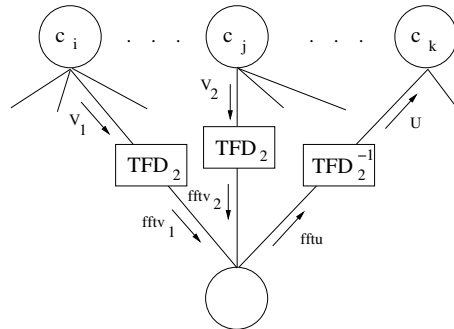


FIG. 1.6 – Transformation du graphe factoriel d'un noeud de contrôle par transformée de Fourier.

Une itération de l'algorithme de propagation de croyance est effectuée lorsque tous les messages dans le graphe ont été calculés une fois à l'aide des équations (1.5) et (1.6). Après avoir réalisé un nombre maximum L d'itérations de propagation de croyance, nous pouvons calculer le rapport *a posteriori* w pour chacun des noeuds de donnée. Ce rapport *a posteriori* est égal à la somme de tous les messages alimentant le noeud de donnée considéré :

$$w_k = u_0 + \sum_{n=1}^i u_n^{(L)} \quad k = 1, \dots, N \quad (1.8)$$

Finalement, en utilisant les valeurs des rapports *a posteriori* w nous pouvons prendre une décision sur la valeur binaire de chaque noeud de donnée :

$$\hat{m}_k = \frac{1 - \text{sign}(w_k)}{2} \quad k = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

Remarque 2 Si la distribution de l'irrégularité est bien choisie, les codes LDPC irréguliers présentent de meilleures performances que les codes réguliers. En effet, lors du décodage de codes irréguliers, les noeuds de données avec un grand taux de connexion convergeront rapidement vers leurs vraies valeurs et transmettront de la bonne information aux noeuds de contrôles. Cette bonne information arrivera, par la suite, aux noeuds de données présentant un plus faible taux de connexion. Ce phénomène appelé "Wave effect" [54] est représenté sur la figure 1.7 à travers l'évolution des probabilités *a posteriori* au cours des itérations de décodage ((b) : 1 itération, (c) : 5 itérations, (d) : 10 itérations et (e) : 15 itérations). Le taux de connexion de chacun des bits est également présenté sur cette figure, (a). Nous pouvons observer que les probabilités *a posteriori* des bits présentant le plus fort taux de connexion convergent parfaitement vers 1 en seulement 10 itérations de propagation de croyance. Nous verrons dans les prochains paragraphes comment établir de "bonnes" distributions d'irrégularité.

Un des aspects intéressant de la propagation de croyance est sa faible complexité. En effet, comme l'algorithme envoie des messages à travers les branches du graphe et que, par définition, le graphe est *creux*, alors le nombre de calculs de messages est faible. Pour un nombre L d'itérations de Propagation de Croyance, chaque branche est donc traversée $2L$ fois par un message (*data pass* et *check pass*), par conséquent le nombre d'opérations effectuées par l'algorithme est une fonction linéaire par rapport au nombre N_b de branches et de L . Ainsi, l'algorithme de propagation de croyance présente un excellent compromis entre sa complexité et ses performances.

Nous pouvons noter que dans le cadre de l'implantation des codes LDPC, des études ont été réalisées afin de développer des algorithmes de décodage itératifs avec une complexité réduite et qui, en termes de performances, sont relativement proches de l'algorithme de propagation de croyance [38, 35, 16]. Certains de ces algorithmes, basés sur la propagation de croyance, réalisent de très bons compromis entre leurs complexités et leurs performances. Nous pouvons citer l'*UMP (Uniformly Most Powerful) BP-based algorithm* de Fossorier *et al.* qui présente, pour les codes réguliers (3, 6) de longueur $N=504$ et $N=1008$, une dégradation des performances allant de 0.25 dB à 0.35 dB. Des travaux sur l'implantation de l'algorithme de propagation de croyance sur plateforme FPGA ont également été développés [25, 8, 86].

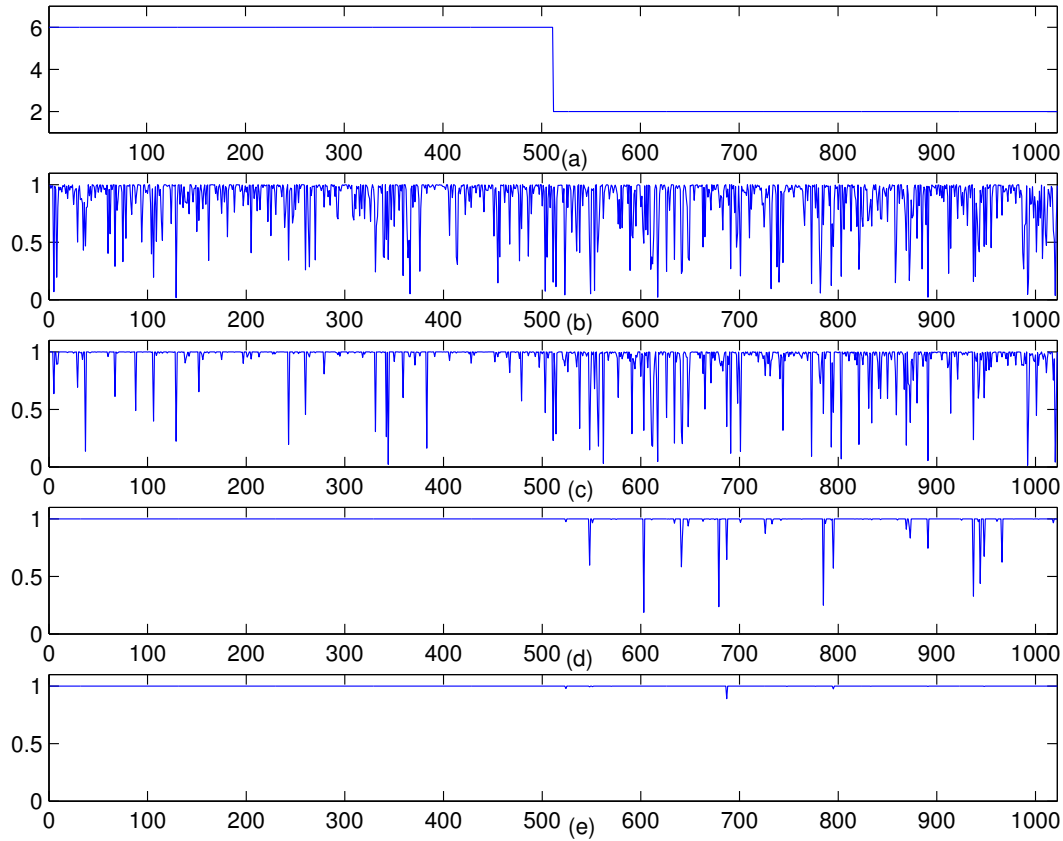


FIG. 1.7 – Représentation du "Wave effect". (a) : Taux de connexion de chaque bit. (b) : Probabilités *a posteriori* après 1 itération. (c) : Probabilités *a posteriori* après 5 itérations. (d) : Probabilités *a posteriori* après 10 itérations. (e) : Probabilités *a posteriori* après 15 itérations.

1.3 Analyse et optimisation des codes LDPC

1.3.1 Évolution de Densité

Après avoir décrit le décodage des codes LDPC par l'algorithme de propagation de croyance, nous proposons dans cette section de présenter la méthode permettant de prédire les performances de correction d'erreurs des codes LDPC. Richardson *et al.* ont démontré dans [70] un théorème général de concentration stipulant que les performances du décodeur sur un graphe aléatoire convergent vers sa performance moyenne lorsque la taille du mot de code est suffisamment élevée généralisant ainsi les résultats de Luby *et al.* [55]. En d'autres termes, il n'est possible d'évaluer le comportement des codes LDPC avec pertinence que dans le cas limite d'un mot de code de taille infinie. Dans ce cas, on peut considérer que le graphe de taille infinie se comporte localement comme s'il était un arbre (graphe sans cycle). La méthode permettant de prédire la convergence du décodage par la propagation de croyance en fonction des paramètres des codes LDPC développée par Richardson *et al.* est nommée évolution de densité (density evolution), et elle est basée sur le suivi des densités de probabilité des différents messages se propageant dans le graphe lors de la propagation de croyance sous l'hypothèse que ces messages soient indépendants (le graphe factoriel est localement un arbre) et identiquement distribués [71, 70]. Ce procédé permet alors d'évaluer le seuil d'un code LDPC, et ainsi d'en optimiser la structure.

Posons $f_v^{(l)}$ et $f_u^{(l)}$, respectivement, la densité de probabilité (d.d.p.) des messages v (Cf. (1.5)) et u (Cf. (1.6)) à l'itération l et f_{u_0} la densité des messages initiaux u_0 venant du canal (soit des log-rapports de vraisemblance observés). Pour construire la densité f_{u_0} nous supposons que le mot de code "tout 0" est émis. Cette supposition peut être réalisée sans perte de généralité à condition que le canal respecte la condition de *symétrie* [70] :

Définition 1 *Symétrie*

Un canal à entrée binaire x est à sortie symétrique y si et seulement si

$$p(y|x=0) = p(-y|x=1). \quad (1.10)$$

Si cette condition est respectée, il a été montré que la probabilité d'erreur devient indépendante du mot de code transmis (Lemme 1 de [70]).

Remarque 3 *L'algorithme de l'évolution de densité que nous allons présenter peut être directement appliqué à tous les canaux instantanés, symétriques, et à entrée binaire tels que : le canal à effacement, le canal binaire symétrique, le canal BABG, le canal de Laplace [71] et le canal de Rayleigh [43]. Il suffit juste de déterminer la densité f_{u_0} des messages alimentant le code LDPC en fonction du canal utilisé pour le mot de code "tout 0". Par exemple, pour le canal BABG nous avons : $f_{u_0}(y) = \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{8\pi}} e^{-\frac{(y-2/\sigma_b^2)^2 \sigma_b^2}{8}}$, où σ_b^2 est la variance du bruit additif.*

Lors de la mise à jour des messages par un noeud de donnée de degré i (1.5), la d.d.p. du message sortant est la densité d'une somme de i variables aléatoires supposées i.i.d.. Cette dernière est calculée par le produit de convolution entre chacune des d.d.p. des messages alimentant le noeud de donnée (sauf celle du message venant du noeud de contrôle où se dirige le message résultant). La loi de mise à jour des densités des messages sur un noeud de donnée de degré i est alors :

$$f_{v_i}^{(l)} = f_{u_0} \otimes (f_u^{(l)})^{\otimes(i-1)} \quad (1.11)$$

où $\otimes$ représente le produit de convolution.

Une branche choisie aléatoirement dans le graphe est connectée à un noeud de donnée de degré i avec une probabilité λ_i . Par conséquent, la convolution dans (1.11) a une probabilité λ_i d'avoir i termes. Nous pouvons alors déterminer la d.d.p. globale des messages v mis à jour lors du *data pass*. Il s'agit d'une densité de mélange donnée par :

$$f_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i f_{v_i}^{(l)} = f_{u_0} \otimes \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i (f_u^{(l)})^{\otimes(i-1)} \quad (1.12)$$

Pour évaluer les densités des messages lors de leur passage par un noeud de contrôle, les auteurs de [71] ont introduit une représentation alternative du *check pass* (1.6) faisant apparaître une somme à la place du produit. Sachant que la densité d'une somme de variables aléatoires est le produit de convolution des densités de chacune de ces variables, cette formulation sera donc plus appropriée. Pour convertir le produit en une somme, l'opération associée au *check pass* doit être réalisée dans le domaine logarithmique. La quantité $\tanh(x)$ pouvant être négative, il est nécessaire de prendre la valeur absolue de cette quantité et de suivre séparément l'évolution de son signe. Soit $\gamma(\cdot)$ la transformation définie par :

$$\gamma(\cdot) : [-\infty, +\infty] \rightarrow GF(2) \times [0, +\infty]$$

tel que $\forall x \in [-\infty, +\infty]$,

$$\gamma(x) := (\gamma_1(x), \gamma_2(x)) := \left(\text{sgn}(x), -\ln \tanh \left| \frac{x}{2} \right| \right) \quad (1.13)$$

où la fonction $\text{sgn}(x)$ est :

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étant donné que la fonction γ est bijective alors sa fonction réciproque γ^{-1} existe. En utilisant ces deux fonctions, on peut montrer que la loi de mise à jour des messages durant le *check pass* sur un noeud de contrôle de degré j (Cf. (1.6)) peut être réécrite comme :

$$u_p = \gamma^{-1} \left(\sum_{m=1; m \neq p}^j \gamma(v_m) \right) \quad (1.14)$$

Notons $\Gamma(\cdot)$ la transformation de densité correspondant au changement de variable $\gamma(\cdot)$ [71]. Par hypothèse, les messages v_m étant i.i.d, l'évolution des densités lors du passage des messages par un noeud de contrôle de degré j sera caractérisée de la manière suivante :

$$f_{u_j}^{(l)} = \Gamma^{-1} \left(\Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right). \quad (1.15)$$

Étant donné qu'une branche a une probabilité ρ_j d'être connectée à un noeud de contrôle de degré j , la densité des messages u à l'itération l est donnée par :

$$f_u^{(l)} = \Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \quad (1.16)$$

Pour une distribution donnée de l'irrégularité $(\underline{\lambda}, \underline{\rho})$ et sous la condition d'indépendance des messages, l'évolution de densité des messages allant des noeuds de données aux noeuds de contrôles au cours des itérations l est décrite par la relation récurrente suivante :

$$f_v^{(l)} = f_{u_0} \otimes \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i \left(\Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \right)^{\otimes(i-1)} \quad (1.17)$$

Dans [71], Richardson *et al.* ont montré que si le canal est à sortie symétrique, la densité de probabilité f_{u_0} des messages initiaux est consistante (définie ci-dessous).

Définition 2 *Consistance*

Une densité $f(x)$ est dite consistante si et seulement si

$$f(x) = e^x f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

A partir de cette propriété de consistance, qui est conservée au cours des différentes étapes de la propagation de croyance, Richardson *et al.* ont montré les deux points suivants :

- La probabilité d'erreur à l'itération l $P_e^{(l)}$ est une fonction décroissante au sens large de l .
- La probabilité d'erreur bloc tend vers zéro si et seulement si la densité des messages v ou u tend vers Δ_∞ (où Δ_∞ représente la densité de probabilité "masse de Dirac à l'infini").

Par conséquent, on peut introduire la définition de "seuil de convergence" d'un code LDPC comme étant le plus faible RSB $(E_b/N_0)^*$ pour lequel la densité f_v des messages v tend vers Δ_∞ quand $l \rightarrow \infty$, soit :

$$\begin{aligned} \delta^* = (E_b/N_0)^* &= \min \left\{ (E_b/N_0) \mid \lim_{l \rightarrow \infty} f_v^{(l)} = \Delta_\infty \right\} \\ &= \min \left\{ (E_b/N_0) \mid \lim_{l \rightarrow \infty} P_e^{(l)} = 0 \right\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ce seuil est donc un bon moyen pour comparer la limite théorique des codes LDPC décodés par propagation de croyance avec la limite de Shannon.

Richardson *et al.* ont également mis en avant une condition appelée *condition de stabilité* qui contrôle le comportement de l'évolution de densité lorsque la probabilité d'erreur s'approche de zéro [71]. Notons $S(E_b/N_0)$ la *fonction de stabilité* du canal :

$$S(E_b/N_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x/2} f_{u_0} \left(x, \frac{E_b}{N_0} \right) dx. \quad (1.20)$$

Ainsi, si $\lambda'(0)\rho'(1) < S(E_b/N_0)^{-1}$ la probabilité d'erreur convergera vers zéro si, initialement, cette probabilité est suffisamment petite, ou bien si $\lambda'(0)\rho'(1) > S(E_b/N_0)^{-1}$ la probabilité d'erreur sera bornée au-dessus de zéro. Pour qu'un code soit stable il suffit de contraindre λ_2 , soit :

$$\lambda_2 < \lambda_2^* = \frac{1}{\sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j} \int_{\mathbb{R}} e^{-x/2} f_{u_0} \left(x, \frac{E_b}{N_0} \right) dx. \quad (1.21)$$

1.3.2 Optimisation des codes LDPC pour les canaux instantanés

On entend par optimisation des codes LDPC, l'optimisation des paramètres définissant l'irrégularité, soit $\lambda(x)$ et $\rho(x)$. Le critère d'optimisation le plus couramment utilisé consiste en la maximisation du rendement de codage R à un E_b/N_0 donné [71, 19, 18]. Le rendement étant linéaire en les paramètres à optimiser, il a été montré par Richardson *et al.* que cette optimisation pouvait être réalisée de façon itérative par programmation linéaire (linear programming) [71]. Chung a par la suite repris ce principe d'optimisation en le modifiant légèrement afin d'améliorer les résultats (spécialement lorsque t_{cmax} est élevé) et ainsi, il a obtenu des codes LDPC présentant un seuil à 0.0045 dB de la limite de Shannon du canal BABG pour un rendement $R = 1/2$. Son approche consiste, pour $\rho(x)$ ainsi que E_b/N_0 fixés, à trouver itérativement $\underline{\lambda}$ ($\underline{\rho}$ étant fixé) maximisant le rendement R d'un code ayant une probabilité d'erreur nulle après $\bar{L}$ itérations de propagation de croyance (Si l'on souhaite minimiser le seuil à rendement fixé, il suffira d'effectuer une dichotomie sur E_b/N_0). Concernant le choix de $\rho(x)$, il a été montré que l'utilisation d'une distribution à degrés concentrés, c'est-à-dire $\rho(x) = \rho x^{k-1} + (1-\rho)x^k$, était à la base de la réalisation de très bons codes [18]. A chaque itération du processus d'optimisation, la maximisation du rendement est effectuée sous différentes contraintes que nous énumérerons ci-dessous.

Posons $\underline{\lambda}^{(k)}$ la distribution de l'irrégularité sur les noeuds de données à l'itération courante k (de l'algorithme d'optimisation). La probabilité d'erreur $e_l^{(k)}$ des messages à l'entrée des noeuds de contrôles à l'itération l de la propagation de croyance peut s'écrire :

$$e_l^{(k)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(k)} e_{l,i}^{(k)},$$

où $e_{l,i}^{(k)} = \int_{-\infty}^0 f_{v_i}^{(l)}(x)dx$ (avec $f_{v_i}^{(l)}$ définie par (1.11)) représente la probabilité d'erreur des messages sortant d'un noeud de donnée de degré i à l'itération l lorsque $\underline{\lambda}^{(k)}$ est utilisée.

Notons $e_l'^{(k+1)}$ la probabilité d'erreur à l'itération l lorsque $\underline{\lambda}^{(k)}$ est utilisé jusqu'à l'itération $l-1$ et $\underline{\lambda}^{(k+1)}$ (la mise à jour de $\underline{\lambda}^{(k)}$) à l'itération l , soit :

$$e_l'^{(k+1)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(k+1)} e_{l,i}^{(k)}.$$

L'algorithme itératif d'optimisation peut alors s'écrire :

1. Fixer $\underline{\rho}$ et choisir $\underline{\lambda}^{(1)}$ de manière à ce que le code résultant présente un faible rendement.
2. Pour k allant de 1 à K_{opti} : Maximiser le rendement $R = 1 - \frac{\sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j/j}{\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i/i}$ soit,

$$\underline{\lambda}^{(k+1)} = \arg \max_{\underline{\lambda}} \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i/i, \quad (1.22)$$

sous les contraintes :

- C1. $e_l'^{(k+1)} \leq e_l^{(k)}$, $1 \leq l \leq L$,
- C2. $|e_l'^{(k+1)} - e_l^{(k)}| \leq \delta(e_{l-1}^{(k)} - e_l^{(k)})$, $1 \leq l \leq L$, avec $\delta \ll 1$,
- C3. de normalisation : $\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(k+1)} = 1$,
- C4. de proportion : $0 \leq \lambda_i^{(k+1)} \leq 1$ ($2 \leq i \leq t_{cmax}$).

Afin de garantir que la probabilité d'erreur tende vers zéro, il est nécessaire d'imposer la contrainte C1. De plus, pour garantir la validité au cours des itérations de la formulation de ce problème d'optimisation par programmation linéaire, $\underline{\lambda}^{(k+1)}$ devra être très peu différent de $\underline{\lambda}^{(k)}$, ce qui en terme de probabilité d'erreur se traduit par la contrainte C2, les deux autres contraintes étant intrinsèques à la paramétrisation des codes LDPC. Notons que toutes les contraintes ainsi que la fonction coût (le rendement) sont linéaires par rapport aux paramètres $\lambda_i^{(k+1)}$ ($i = 2, \dots, t_{cmax}$).

Après avoir fixé $\rho(x)$ ainsi que la distribution $\lambda(x)$ initiale, il suffit d'appliquer itérativement l'algorithme d'optimisation tel qu'il est décrit ci-dessus jusqu'à la convergence définie par un rendement maximisé associé à une probabilité d'erreur nulle des messages v après L itérations de propagation de croyance. Si le rendement obtenu après ce processus n'est pas celui désiré, alors $\rho(x)$ doit être modifié et les différentes étapes ci-dessus répétées. L'avantage principal de ce processus d'optimisation est d'avoir été mis sous la forme d'un problème de programmation linéaire permettant ainsi, l'utilisation d'algorithmes d'optimisations efficaces. Cependant, comme il s'agit d'une optimisation locale, afin d'obtenir les meilleurs résultats, il est fortement conseillé d'essayer à l'initialisation plusieurs distributions de $\lambda(x)$ différentes.

1.3.3 Evolution de densité avec approximation Gaussienne

L'algorithme de l'Évolution de Densité étant un outil assez complexe, il a été introduit dans le cadre de communications sur canal BABG, une version simplifiée de cet algorithme [18]. Cette simplification est basée sur la modélisation des densités des différents messages par une simple densité Gaussienne pour un code LDPC régulier ou bien par un mélange de Gaussienne s'il s'agit d'un code irrégulier. Nous verrons par la suite que cette approximation réduit à un seul

paramètre dynamique l'étude du comportement asymptotique du décodage par la Propagation de Croyance au cours des itérations.

Ce type d'approximation unidimensionnelle des densités à tout d'abord été introduite pour les turbo-codes, plus spécialement par Ten Brink dans le cadre des turbo-codes parallèles [9] et par El Gamal pour les turbo-codes séries [31, 32]. Ten Brink, en se basant sur l'approximation des d.d.p. des messages par des Gaussiennes a construit un turbo-code série de rendement 1/2 se situant à 0.1 dB de la limite de Shannon. Comme il n'a pas été établi de relation simple pour la mise à jour des densités des messages lors du turbo décodage, l'étude du comportement des messages Gaussiens a été réalisée par des simulations de Monte Carlo. Cette approximation s'est alors révélée relativement bonne pour étudier la trajectoire des turbo-codes et permet donc de situer la région exhibant l'effet d'avalanche. Dans le cadre des codes LDPC, l'étude de l'approximation Gaussienne des messages a été réalisée par Chung [18].

1.3.3.1 Analyse asymptotique sur canal BABG

L'analyse asymptotique des codes LDPC sur canal BABG par approximation Gaussienne des densités des messages que nous présenterons dans cette section a été réalisée de deux façons différentes. La première approche consiste à suivre au cours des itérations l'évolution de la moyenne des messages et la seconde est basé sur l'étude de l'évolution de l'information mutuelle.

Evolution de la moyenne des Gaussiennes

Si la constellation utilisée est une BPSK ($0 \rightarrow x = +1, 1 \rightarrow x = -1$), et si le bruit additif du canal n_b est de moyenne nulle et de variance σ_b^2 , alors le message initial u_0 s'écrit :

$$u_0 = \log \frac{p(y|x=1)}{p(y|x=-1)} = \frac{2}{\sigma_b^2}(x + n_b). \quad (1.23)$$

Étant donné que le canal est symétrique nous pouvons utiliser le mot de code $\underline{0}$ soit $x = 1$. Ainsi, le message initial u_0 est Gaussien de moyenne $2/\sigma_b^2$ et de variance $4/\sigma_b^2$. Dans le cadre de transmissions sur un canal BABG avec un code LDPC régulier, Wiberg à travers des simulations [85] et Chung par l'Évolution de Densité ont tous deux observé que la densité des messages v et u s'approchait d'une densité Gaussienne. Ainsi, dans le cadre de l'utilisation des codes réguliers, Chung a choisi d'effectuer l'approximation des densités des messages v et u par des Gaussiennes. Notons tout de même qu'il a été observé lors de simulations que cette approximation est moins bien adaptée à la densité des messages u provenant des noeuds de contrôles.

Étant donné qu'une densité Gaussienne est définie par sa moyenne et sa variance, il suffit alors d'évaluer ces deux paramètres au cours des itérations pour en déduire le comportement du décodeur. Or, comme le canal BABG associé à une constellation BPSK est *symétrique* (Cf. (1.10)) et comme il a été montré que cette propriété était conservée au cours des différentes étapes de la propagation de croyance, alors les densités des différents messages seront Gaussiennes et *consistantes*. Pour une densité Gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 , cette condition de *consistance* se traduit par $\sigma^2 = 2m$. En effet, si

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2-2mx+m^2}{2\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

alors nous avons,

$$\begin{aligned} f(-x)\exp(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(-x-m)^2}{2\sigma^2}\right)\exp(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2+2mx+m^2-2\sigma^2x}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Par conséquent, $f(x) = f(-x)\exp(x)$ si et seulement si $\sigma^2 = 2m$. Ainsi, suivre l'évolution des densités des différents messages Gaussiens revient à suivre l'évolution d'un seul paramètre, qui a été choisi comme étant la moyenne. Les messages v (resp. u) sortant des noeuds de données (resp. de contrôles) seront donc Gaussiens de moyenne m_u (resp. m_v) et de variance $2m_u$ (resp. $2m_v$). L'utilisation de la moyenne comme paramètre définissant les densités est principalement motivée par la possibilité d'obtenir facilement des expressions analytiques des lois de mise à jour lors des différentes étapes de décodage.

Les messages alimentant les noeuds de données étant i.i.d., la moyenne $m_{v,i}^{(l)}$ du message de sortie d'un noeud de donnée de degré i à l'itération l lors du *data pass* est d'après (1.5) donnée par :

$$m_{v,i}^{(l)} = m_{u0} + (i-1)m_u^{(l-1)} \quad (1.26)$$

où $m_u^{(l-1)}$ représente la moyenne des messages u provenant des noeuds de contrôles et $m_{u0} = 2/\sigma_b^2$ celle des messages venant du canal. Pour la mise à jour de la moyenne à la première itération $m_v^{(1)}$, nous avons $m_u^{(0)} = 0$. A l'itération l un message v alimentant un noeud de contrôle aura comme densité $f_v^{(l)}$ le mélange de Gaussiennes suivant :

$$f_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i \mathcal{N}\left(m_{v,i}^{(l)}, 2m_{v,i}^{(l)}\right) \quad (1.27)$$

Pour la mise à jour de la densité des messages de sortie des noeuds de contrôles de degrés j lors du *check pass*, nous devons prendre la moyenne statistique de chaque coté de (1.6) et comme les messages alimentant les noeuds de contrôles sont également supposés i.i.d., nous avons :

$$E\left[\tanh\frac{u^{(l)}}{2}\right] = E\left[\tanh\frac{v^{(l)}}{2}\right]^{j-1} \quad (1.28)$$

Étant donné que les densités des messages sont *consistantes*, $E\left[\tanh\frac{u}{2}\right]$ dépend seulement de m_u et peut être exprimée par :

$$E\left[\tanh\frac{u}{2}\right] := \frac{1}{\sqrt{4\pi m_u}} \int_{\mathbb{R}} \tanh\frac{u}{2} e^{-\frac{(u-m_u)^2}{4m_u}} du := 1 - \phi(m_v). \quad (1.29)$$

Une approximation de la fonction $\phi(x)$ donnée dans [18] peut être utilisée sans perte majeure de précision.

Ainsi, étant donné que $\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i = 1$, nous obtenons :

$$E\left[\tanh\frac{v^{(l)}}{2}\right] = 1 - \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i \phi(m_{v,i}^{(l)}) \quad (1.30)$$

Pour obtenir la moyenne des messages sortant d'un noeud de contrôle, il suffit d'utiliser la relation (1.28). Ainsi, la moyenne $m_{u,j}^{(l)}$ des messages sortant d'un noeud de contrôle de degré j à l'itération l est donnée par la relation suivante :

$$m_{u,j}^{(l)} = \phi^{-1}\left\{1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i \phi(m_{v,i}^{(l)})\right]^{j-1}\right\} \quad (1.31)$$

Un message u à une probabilité ρ_j de sortir d'un noeud de contrôle de degré j . Par conséquent, la densité des messages u sera, également, un mélange de densités Gaussiennes. Étant donné que les densités sont caractérisées par leurs moyennes, alors ce mélange de densités Gaussiennes est une combinaison linéaire des différentes moyennes $m_{u,j}^{(l)}$ pondérées par leur poids ρ_j pour $j = 2, \dots, t_{rmax}$, telle que :

$$m_u^{(l)} = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j \phi^{-1} \left\{ 1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i \phi(m_{u_0} + (i-1)m_u^{(l-1)}) \right]^{j-1} \right\} \quad (1.32)$$

Cette équation représente la projection sur un seul paramètre (la moyenne d'une densité Gaussienne) de l'évolution de densité définie par l'équation (1.12) dans le cas où les densités des messages u et v sont considérées comme étant des Gaussiennes. L'avantage de cette approximation est clairement sa mise en oeuvre, puisqu'il s'agit de suivre uniquement un seul paramètre scalaire au lieu d'une densité dans le cas de l'évolution de densité.

Le seuil d'un code LDPC est défini, dans le cas de l'Approximation Gaussienne, par le E_b/N_0 minimum au-dessus duquel la probabilité d'erreur bloc est nulle ou, autrement dit, lorsque $m_u^{(l)}$ tend vers l'infini quand le nombre d'itération l tend vers l'infini. Ce seuil peut alors être calculé en utilisant la relation (1.32).

De la même manière, nous pouvons introduire une expression alternative à (1.32) explicitant la mise à jour de la moyenne des messages v , soit :

$$\begin{aligned} \phi(m_v^{(l)}) &= F_m(m_{u_0}, \phi(m_v^{(l-1)})) = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i F_{m,i}(m_{u_0}, \phi(m_v^{(l-1)})) \\ &= \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i \phi \left\{ \frac{2}{\sigma_b^2} + (i-1) \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j \phi^{-1} \left[1 - \left(1 - \phi(m_v^{(l-1)}) \right)^{j-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Étant donné la définition de $\phi(\cdot)$, il est facile de voir que $m_u^{(l)} \rightarrow \infty$ si et seulement si $\phi(m_v^{(l)}) \rightarrow 0$, alors le seuil peut être également défini par le niveau de bruit maximum en-dessous duquel $\phi(m_v^{(l)}) \rightarrow 0$ quand le nombre d'itération l tend vers l'infini.

Remarque 4 La condition de stabilité développée dans la section 1.3.1 est toujours valable dans le cas où les densités des messages ont fait l'objet d'une approximation par des Gaussiennes.

Evolution de l'information mutuelle

Ci-dessus, nous avons présenté l'évolution de densité par la méthode d'approximation des densités par des Gaussiennes en évaluant à chaque itération de la propagation de croyance la moyenne des messages. Une approche alternative à l'évolution de la moyenne des messages consiste à suivre l'évolution de l'information mutuelle I_v d'un canal virtuel BABG à entrée binaire dont la sortie serait le message v . Ce message de sortie étant de densité Gaussienne consistante de moyenne

m_v et de variance $2m_v$ soit $p(v) = \mathcal{N}(m_v, 2m_v)$, nous pouvons exprimer I_v par :

$$\begin{aligned} I_v &= - \int_{\mathbb{R}} p(v) \log_2(p(v)) dv + \int_{\mathbb{R}} \sum_{x=\pm 1} p(v, x) \log_2(p(v|x)) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{x=\pm 1} p(v|x) \log_2 \left(\frac{p(v|x)}{\frac{1}{2}(p(v|x=1) + p(v|x=-1))} \right) dv \end{aligned}$$

En appliquant la relation liée à la symétrie du canal soit $p(v|x = -1) = p(-v|x = 1)$, on obtient

$$I_v = \int_{\mathbb{R}} p(v|x = 1) \log_2 \left(\frac{p(v|x=1)}{\frac{1}{2}(p(v|x=1) + p(v|x=-1))} \right) dv$$

Or d'après la propriété de consistance de la densité $p(v)$ définie par l'équation (1.18), nous avons :

$$\begin{aligned} I_v &= \int_{\mathbb{R}} p(v|x = 1) \log_2 \left(\frac{p(v|x=1)}{\frac{1}{2}p(v|x=1)(1+e^{-v})} \right) dv \\ &= 1 - \int_{\mathbb{R}} p(v|x = 1) \log_2 (1 + e^{-v}) dv \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi m_v}} \int_{\mathbb{R}} \log_2 (1 + e^{-v}) \exp \left(-\frac{(v-m_v)^2}{4m_v} \right) dv = J(m_v) \end{aligned}$$

où la fonction $J(\cdot)$ représente la fonction de passage de la moyenne d'une densité Gaussienne consistante à l'information mutuelle d'un canal Gaussien consistant. Étant donné que cette fonction est strictement monotone, la réciproque $J^{-1}(\cdot)$ existe et représente le passage de l'information mutuelle à la moyenne.

Notons que l'information mutuelle I_v est linéaire en la densité $p(v|x = 1)$, par conséquent si $p(v|x = 1)$ est modélisée par un mélange de densités alors I_v sera égale à la somme pondérée des informations mutuelles de chaque densité du mélange. Ainsi, lors du passage des messages par les noeuds de données définie par l'équation (1.5), l'évolution de l'information mutuelle $I_v^{(l)}$ à l'itération l est donnée par :

$$I_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{tcmax} \lambda_i J \left(\frac{2}{\sigma_b^2} + (i-1) J^{-1} \left(I_u^{(l-1)} \right) \right) \quad (1.34)$$

où I_u représente l'information mutuelle d'un canal BABG à entrée binaire dont la sortie est le message u .

Pour établir l'expression de la mise à jour de l'information mutuelle lors du passage des messages par un noeud de contrôle, il est nécessaire de s'appuyer sur la représentation fréquentielle équivalente de cette étape illustrée sur la figure 1.6. Étant donné que nous avons les deux relations $I_{fft v} = 1 - I_v$ et $I_{fft u} = 1 - I_u$ [26], et que les messages v venant des noeuds de données sont i.i.d., la mise à jour sur les noeuds de contrôles de l'information mutuelle $I_u^{(l)}$ à l'itération l est donnée par :

$$I_u^{(l)} = 1 - \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j J \left((j-1) J^{-1} \left(1 - I_v^{(l)} \right) \right). \quad (1.35)$$

En combinant les équations (1.34) et (1.35), nous obtenons le comportement asymptotique d'un code LDPC sous approximation Gaussienne des densités où le paramètre d'évolution est l'information mutuelle, soit :

$$\begin{aligned} I_v^{(l)} &= \sum_{i=2}^{tcmax} \lambda_i F_{im,i}(2/\sigma_b^2, I_v^{(l-1)}) \\ &= \sum_{i=2}^{tcmax} \lambda_i J \left(\frac{2}{\sigma_b^2} + (i-1) J^{-1} \left(1 - \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j J \left((j-1) J^{-1} \left(1 - I_v^{(l)} \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Le seuil est alors défini par le plus petit E_b/N_0 au-dessus duquel la probabilité d'erreur est nulle ou, en terme d'information mutuelle, lorsque $I_v^{(l)} \rightarrow 1$ quand le nombre d'itération tend vers l'infini.

1.3.3.2 Optimisation des codes LDPC pour le canal BABG

Dans le cadre de l'optimisation des codes LDPC sur canal BABG lorsque l'approximation Gaussienne est utilisée, il a été introduit par Chung une méthode d'optimisation simple et non itérative basée sur un problème de programmation linéaire [18]. Si on considère que la distribution $\rho(x)$ et la variance du bruit σ_b^2 sont connues, on peut optimiser la distribution $\lambda(x)$ de manière à maximiser le rendement. Pour ce faire nous pouvons tout d'abord utiliser l'expression de l'évolution de densité par approximation Gaussienne paramétrée par la moyenne (1.33) :

$$\phi(m_v^{(l)}) = \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i F_{m,i}(m_{u_0}, \phi(m_v^{(l-1)}))$$

Nous avons vu que le seuil était défini par le plus faible RSB au-dessus duquel $\phi(m_v^{(l)}) \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow \infty$. Comme la fonction $\phi^{-1}(x)$ est strictement croissante sur $0 \leq x \leq 1$, alors le second membre de la relation (1.33) est strictement décroissante en fonction de $\phi(m_v^{(l-1)})$. Il y a convergence de $\phi(m_v^{(l)})$ vers 0 si et seulement si la condition suivante est respectée :

$$\phi(m_v) > \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i F_{m,i}(m_{u_0}, \phi(m_v)) \quad \forall \phi(m_v) \in [0, \phi(m_{u_0})] \quad (1.37)$$

Alors le problème de l'optimisation de $\lambda(x)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\underline{\lambda}_{opt} = \arg \max_{\underline{\lambda}} \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i / i \quad (1.38)$$

sous la contrainte,

$$\phi(m_v) > \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i F_{m,i}(m_{u_0}, \phi(m_v)), \quad \forall \phi(m_v) \in [0, \phi(m_{u_0})]. \quad (1.39)$$

ainsi que les contraintes de normalisation et de proportion telles qu'elles ont été définies dans la section 1.3.1. Notons que obtenir des codes LDPC stables dans le sens où ils peuvent atteindre une probabilité d'erreur nulle, il sera également nécessaire d'ajouter la condition de stabilité (Cf. équation (1.21)) lors de l'optimisation.

Étant donné que la fonction coût ainsi que toutes les contraintes sont linéaires en les paramètres à optimiser, l'optimisation peut être réalisée par programmation linéaire.

De la même manière, l'optimisation de la structure des codes LDPC sous approximation Gaussienne peut être également effectuée lorsque le paramètre d'évolution est l'information mutuelle. Pour ce faire, il suffit juste de réécrire la contrainte de convergence garantissant la convergence de l'information mutuelle x_v vers 1 quand le nombre d'itérations tend vers l'infini, soit d'après l'équation (1.36) :

$$x_v < \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i F_{im,i}(2/\sigma_b^2, x_v), \quad \forall x_v \in [0, 1]. \quad (1.40)$$

Notons que cette contrainte est également linéaire en les paramètres à optimiser.

1.3.4 Codes optimisés pour le canal BABG

Nous avons vu dans les sections précédentes que l'optimisation des codes LDPC par programmation linéaire était réalisable de trois façons différentes à savoir : en utilisant l'évolution de densité, l'approximation Gaussienne paramétrée par la moyenne ou bien encore l'approximation Gaussienne paramétrée par l'information mutuelle. La confrontation des résultats obtenus par ces trois méthodes semble donc intéressante. Nous avons alors effectué une optimisation de codes LDPC de rendement $R = 1/2$ avec les différents processus énumérés ci-dessus pour $t_{cmax} = 20$. La distribution $\rho(x)$ de l'irrégularité sur les noeuds de contrôles est mise sous sa forme concentrée, soit $\rho(x) = \rho_j x^{j-1} + (1 - \rho_j)x^j$. Sous cette forme $\rho(x)$ est alors défini par un seul paramètre à savoir le ρ moyen noté $\bar{\rho} = (j-1)\rho_j + j(1 - \rho_j) = j - \rho_j$. Le choix de $\bar{\rho}$ est réalisée *a posteriori* dans le sens où lors du processus d'optimisation $\bar{\rho}$ est fixé par dichotomie de manière à minimiser le seuil obtenu. Les seuils de convergence des codes optimisés pour $t_{cmax} = 20$ sont alors présentés dans le tableau 1.1.

R=1/2 (0.18 dB)	évolution de densité	A. G. moyenne	A. G. Info mutuelle
δ^* (dB)	0.315	0.411	0.321

TAB. 1.1 – Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 1/2$ optimisés par programmation linéaire sous évolution de densité, approximation Gaussienne paramétrée par la moyenne et sous approximation Gaussienne paramétrée par l'information mutuelle.

Nous pouvons alors constater que l'optimisation des codes LDPC par évolution de densité permet d'obtenir des codes présentant un seuil inférieur aux deux autres méthodes. Ceci s'explique par le fait que cette méthode n'effectue aucune approximation sur les densités. Cependant, l'évolution de densité reste un outil d'analyse avec une complexité importante alors dans la suite toute nos optimisations seront réalisées sous approximation Gaussienne et dans ce cas c'est lorsqu'elle est paramétrée par l'information mutuelle qu'elle produit les meilleurs codes. Notons que le seuil obtenu n'est alors supérieur que de 0.006 dB.

Nous avons ensuite optimisé les codes LDPC pour trois valeurs de t_{cmax} , à savoir 10, 30 et 200 dont nous avons reportés les seuils obtenus par évolution de densité dans le tableau 1.2. Les polynômes définissant les codes LDPC résultant à cette optimisation sont :

– $t_{cmax} = 10$:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= 0.2724x + 0.2358x^2 + 0.0853x^3 + 0.4065x^9 \\ \rho(x) &= 0.75x^6 + 0.25x^7\end{aligned}$$

– $t_{cmax} = 30$:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= 0.2101x + 0.1942x^2 + 0.043x^4 + 0.1419x^6 + 0.1069x^7 + 0.3038x^{29} \\ \rho(x) &= x^8\end{aligned}$$

– $t_{cmax} = 200$:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= 0.1508x + 0.1426x^2 + 0.1144x^5 + 0.0768x^6 + 0.1554x^{16} + 0.0073x^{17} + 0.0035x^{47} \\ &\quad + 0.1511x^{48} + 0.198x^{199} \\ \rho(x) &= x^{11}\end{aligned}$$

La première remarque que nous pouvons établir est que plus on autorise t_{cmax} à être élevé, plus le $\bar{\rho}$ optimal doit être important. Ainsi, la valeur des seuils de convergence diminue lorsque t_{cmax} augmente. Nous avons ensuite étudié les performances de ces codes pour deux tailles de mot de code $N = 60000$ et $N = 1000$ (Cf. 1.8). Pour $N = 60000$, les codes LDPC exhibent bien un effet de seuil se déclenchant à environ 0.6 dB de plus que les seuils théoriques obtenus pour $N \rightarrow \infty$. Dans le cas où $N = 1000$, nous pouvons observer que la hiérarchie établie dans la cas asymptotique est inversée c'est-à-dire que c'est le code avec t_{cmax} le plus faible qui présente les meilleures performances. En effet, si la densité du graphe d'un code LDPC de taille finie augmente (c'est-à-dire si $\bar{\rho}$ augmente), le nombre de cycle à l'intérieur de celui-ci va également croître engendrant ainsi une dégradation des performances. Ce phénomène est d'autant plus accentué que la taille du mot de code est faible. Par conséquent, il est nécessaire de garder une certaine prudence quant à l'interprétation des résultats obtenus par évolution de densité.

$R=1/2$ (0.18 dB)	$t_{cmax} = 10$	$t_{cmax} = 30$	$t_{cmax} = 200$
δ^* (dB)	0.405	0.301	0.278

TAB. 1.2 – Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC optimisés sous approximation Gaussienne paramétrée par l'information mutuelle pour t_{cmax} à 10, 30 et 200.

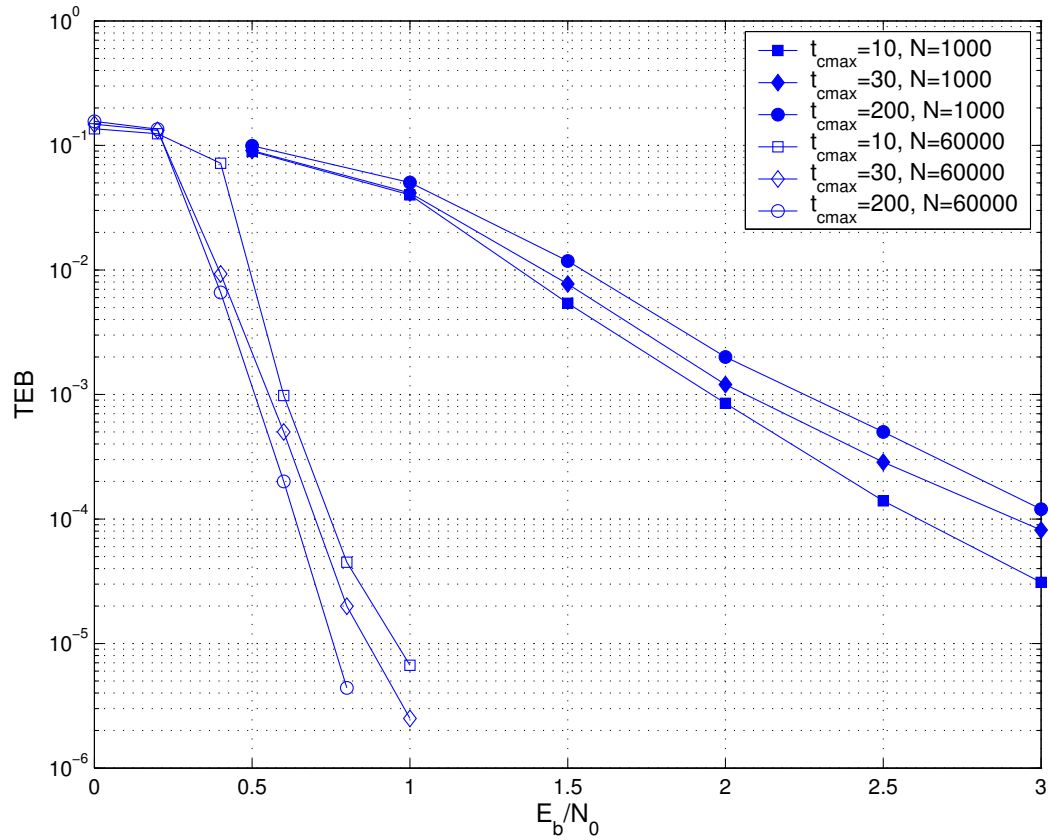


FIG. 1.8 – Performances de codes LDPC de rendement 1/2 optimisés pour le canal BABG.

1.3.5 Optimisation des codes LDPC pour d'autres types de canaux

Dans les précédentes sections, nous avons présenté les différentes méthodes d'études et d'optimisations des codes LDPC pour les canaux instantanés et stationnaires. Récemment, l'optimisation des codes LDPC s'est étendue à des canaux que l'on peut qualifier de moins standards et/ou présentant plus d'intérêts pratiques. Le processus d'optimisation pour ces canaux particuliers n'étant généralement pas une simple extension des méthodes connues, nous tâcherons d'en expliquer, succinctement, les points clefs et ce pour des systèmes de transmission :

- utilisant des modulations codées,
- MIMO (Multiple-Input Multiple-Output),
- multi-utilisateurs,
- ainsi que pour des canaux à mémoire partielle.

• Les techniques de codage multiniveaux (multilevel coding : MLC) et de modulation codée par bits entrelacés (bit-interleaved coded modulation : BICM) ont été proposées afin de réaliser des transmissions à forte efficacité spectrale. Il a été ensuite prouvé qu'avec ces méthodes de modulations codées il était possible d'approcher la capacité du canal avec un code binaire [83, 12]. Fort de ce constat, Hou *et al.* ont réalisé des modulations codées (MLC et BICM) basées sur les codes LDPC s'approchant de la capacité de Shannon [44].

L'analyse et l'optimisation de la structure des codes LDPC pour ce genre de modulation ne sont pas triviales puisque les canaux équivalents à entrée binaire ne sont pas nécessairement symétriques. Pour palier à ce problème, les auteurs ont proposé deux approches relativement similaires, la première consiste à forcer la symétrie en utilisant un adaptateur de canal i.i.d. et la seconde s'appuie sur l'utilisation d'un code coset (somme modulo 2 du mot de code du code LDPC avec un code coset). Les auteurs ont ensuite montré que cette seconde approche peut quasiment s'apparenter à l'utilisation de l'adaptateur de canal i.i.d. et que, par conséquent, elle présente les mêmes performances. Les codes LDPC optimisés avec ce genre de structure exhibent des seuils à 0.07 dB de la capacité.

• Ten Brink *et al.* dans [11] ont proposé de construire de bons codes LDPC pour les transmissions sur canaux évanouissants multi-entrées multi-sorties (MIMO) dans le cas où le canal n'est connu que de l'émetteur. La structure du récepteur combine un détecteur MIMO ainsi qu'un décodeur LDPC et les auteurs ont montré que ce schéma permettait d'atteindre la capacité à condition de construire un code optimisé pour ce type de transmission. L'optimisation des codes LDPC a été effectuée en adaptant la fonction de transfert de l'information mutuelle entre le détecteur MIMO et le décodeur LDPC. Les codes résultant à cette optimisation présentent des performances à moins de 1 dB de la capacité du canal.

• Les codes LDPC ont, également, été utilisés dans le cadre de communications à accès multiples. Dans [23, 2] les auteurs ont montré qu'il était possible d'effectuer conjointement la séparation des utilisateurs et le décodage des codes au moyen de codes LDPC. Il suffit pour ce faire, d'assigner à chaque utilisateur un code LDPC différent, et d'effectuer en réception le décodage simultané de tous les codes LDPC. Cette méthode est appelée RCDMA pour Random Code Division Multiple Access. L'optimisation des codes LDPC pour le RCDMA étant assez difficile, Roumy *et al.* se sont pour l'instant limités à deux utilisateurs synchrones et de même puissance [73]. Dans ces conditions, l'optimisation n'est possible que sous différentes hypothèses. La première contraint les deux utilisateurs à avoir la même famille de codes $(N, \lambda(x), \rho(x))$ et la seconde suppose que les noeuds de données d'un utilisateur sont reliés aux noeuds de données

de même degré de l'autre utilisateur via un noeud dorsal reliant les deux utilisateurs. Les codes LDPC ainsi obtenus exhibent un seuil à 0.12 dB de la capacité du canal BABG multi-utilisateurs.

Un canal fréquemment rencontré lors de transmissions radio ou dans les systèmes d'enregistrement magnétique est le canal à mémoire. L'optimisation des codes LDPC a été réalisée sur deux types de canaux à mémoire : le canal à sortie binaire de Gilbert-Elliott [30] et les canaux à sortie continue à mémoire très courte. Étant donné que cette thèse traite de l'optimisation des codes LDPC lors de transmissions sur un canal à mémoire, nous présenterons en détail, dans la prochaine section, l'analyse et les méthodes d'optimisation des codes LDPC pour les canaux à mémoire à sortie continue.

1.4 Canaux à mémoire

Les méthodes d'optimisation des codes LDPC précédemment développées se sont montrées très efficaces pour les canaux sans mémoire et stationnaires. Suite au développement des systèmes d'enregistrement magnétique [75], l'étude [52] et la réalisation de bons codes LDPC ont également été effectuées pour des canaux présentant des interférences entre symboles c'est-à-dire pour des canaux sélectifs en fréquence [82, 62]. L'effet mémoire de ce type de canal a différentes origines physiques suivant le domaine d'application. Dans le cadre de transmissions radios, le canal de propagation est principalement caractérisé par l'effet multi-trajet du signal, exhibant généralement une dispersion importante de la réponse impulsionnelle. A contrario, dans les systèmes d'enregistrement magnétique ou optique l'effet mémoire est plus court et le canal résultant à une dispersion de tout au plus deux ou quatre temps symbole. La modélisation de ces canaux est référencée dans la littérature par canal dicode et canal EPR4. Dans cette section, nous présenterons l'étude asymptotique des codes LDPC ainsi que le processus d'optimisation pour ces types de canaux.

Une approche alternative de l'optimisation des codes LDPC pour les canaux à mémoire sélectif en fréquence est présentée dans cette thèse (Cf. Chapitre 3 et 4). Notre approche, originale, consiste à se placer dans le contexte prometteur des transmissions multi-porteuses et ainsi, de considérer le canal sélectif en fréquence comme un ensemble de sous-canaux instantanés dont la variance du bruit additif est proportionnelle au gain du canal dans la sous-bande considérée.

1.4.1 Modélisation d'un canal à mémoire partielle

Considérons un système de communication dans lequel les symboles x_k provenant d'un encodeur LDPC alimentent un canal à mémoire de longueur fini I défini par $h(D) = \sum_{i=0}^{I-1} h_i D^i$, où $h_i \in \mathbb{R}$. Les symboles étant issus d'une constellation BPSK ils pourront également être considérés comme étant des bits. Le signal de sortie y_k de ce canal s'écrit :

$$y_k = \sum_{i=0}^{I-1} h_i x_{k-i} + n_k, \quad (1.41)$$

où n_k est un bruit additif blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ_n^2 . Il a été montré qu'un canal à mémoire tel qu'il est modélisé par (1.41) peut être également représenté par un graphe factoriel [37] dans lequel un *noeud de treillis* T_k est associé à chaque symbole x_k . Notons l'état du système à l'instant k comme étant le vecteur de longueur I contenant l'ensemble des variables d'entrée x_{k-I+1} à x_k , soit $\underline{q}_k = [x_{k-I+1}, \dots, x_k]^T$. Le graphe factoriel décrivant la propagation de croyance d'un système composé d'un code LDPC concaténé avec un canal à mémoire est

représenté sur la figure 1.9. Ce graphe factoriel est composé de deux sous-graphes où le sous-graphe de la partie supérieure représente une chaîne de Markov décrivant la mémoire du canal et celui de la partie inférieure représente le graphe factoriel d'un code LDPC.

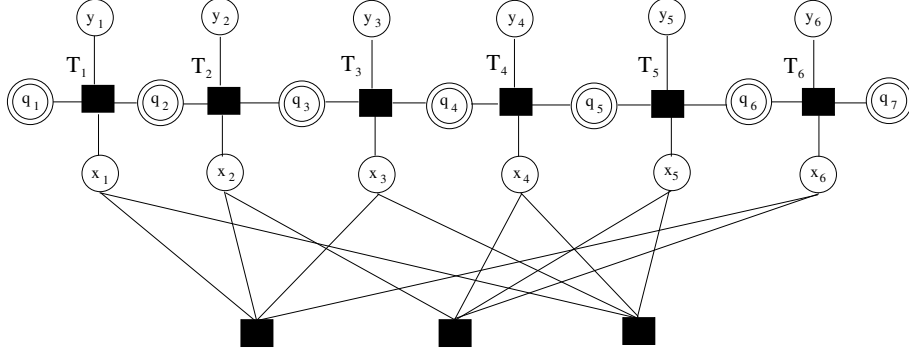


FIG. 1.9 – Graphe factoriel d'un code LDPC concaténé à un canal à mémoire.

Dans la section suivante, nous présenterons l'ordonnancement de la propagation de croyance d'un tel système.

1.4.2 Égalisation et décodage conjoints

L'algorithme utilisé pour égaliser et décoder est l'algorithme de propagation de croyance, et dans ce contexte de communication sur un canal présentant des interférences entre symboles (IES), il peut être vu comme un algorithme de turbo-égalisation [29]. Afin d'estimer les probabilités *a posteriori* par la propagation de croyance d'un tel système, il sera nécessaire d'insérer en plus des étapes de mise à jour des messages par les noeuds de données et les noeuds de contrôles, deux étapes supplémentaires. La première aura pour objet la mise à jour des messages sur un noeud de treillis et la seconde explicitera la mise à jour des messages se propageant des noeuds de données aux noeuds de treillis. Nous présenterons, également, l'ordonnancement de ces différentes étapes.

Mise à jour des messages par le treillis vers le code LDPC

Considérons y_1^n comme étant le signal reçu. Nous appellerons d_k^l le message de sortie du treillis à l'itération l , étant disponible à cette itération les messages provenant du code LDPC calculé à l'itération précédente $e_k^{(l-1)}$ (Cf. Fig. 1.10). Ces messages $e_k^{(l-1)}$ seront alors considérés comme de l'information extrinsèque. Les messages de sortie du treillis sont calculés par l'algorithme du BCJR [5]. Pour ce calcul du message d_k^l , les étapes du BCJR ont été limitées aux W noeuds de treillis précédent et suivant le noeud de treillis considéré soit le k^{ieme} . La figure 1.10 schématise le calcul du message d_k^l .

Mise à jour des messages par les noeuds de données et les noeuds de contrôles

L'étape de mise à jour des messages $v_q^{(l)}$ lors du passage par les noeuds de données est identique à celle décrite par (1.5), il suffit juste de remplacer u_0 par le message d_k^l provenant du treillis. Le passage des messages u_p^l par les noeuds de contrôles est rigoureusement identique à l'équation (1.6).

Mise à jour des messages par les noeuds de données vers le treillis

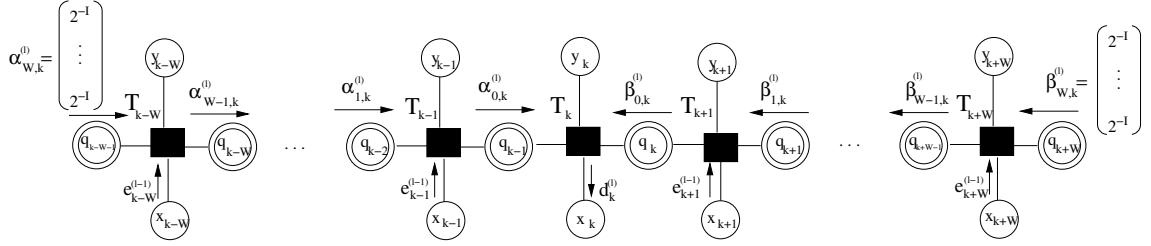


FIG. 1.10 – Passage des messages à travers le treillis : Algorithme du BCJR fenêtré.

La dernière étape nécessaire pour compléter une itération est de calculer les messages $e_k^{(l)}$ issus des noeuds de données et se dirigeant vers les noeuds de treillis. Cette mise à jour, sur un noeud de donnée de degré i , est donnée par la relation suivante :

$$e_k^{(l)} = \sum_{n=1}^i u_n^{(l)} \quad (1.42)$$

L'ordonnancement de l'algorithme de propagation de croyance sur le graphe factoriel représenté sur la figure 1.9 est le suivant :

1. Initialisation : Mise à zero des messages $e_k^{(0)}$ ($\forall 1 \leq k \leq N$) provenant du code LDPC et des messages $u_p^{(0)}$ provenant des noeuds de contrôle.
2. Calcul des messages $d_k^{(l)}$ ($\forall 1 \leq k \leq N$) provenant du treillis vers le code LDPC.
3. Data pass : Calcul des messages $v_q^{(l)}$ sur les noeuds de données vers les noeuds de contrôles.
4. Check pass : Calcul des messages $u_p^{(l)}$ sur les noeuds de contrôles vers les noeuds de données.
5. Calcul, sur tous les noeuds de données du mot de code, des messages $e_k^{(l)}$ ($\forall 1 \leq k \leq N$) allant vers le treillis.
6. Incrémenter l . Si $l < L$ (L étant le nombre maximum d'itérations), retourner à l'étape 2.
7. Pour chacun des noeuds de données, calculer les probabilités *a posteriori* et, ensuite décoder.

1.4.2.1 Évolution de densité sur un canal à mémoire

Après avoir décrit les différentes étapes de décodage par la propagation de croyance, nous allons présenter la méthode de l'évolution de densité sur le canal à mémoire afin de déterminer les performances des codes LDPC en fonction de leurs paramètres sur ce type de canal. Cette extension de l'évolution de densité a été réalisée par Kavcic *et al.* dans [48]. Étant donné que l'évolution de densité a déjà été présentée dans le cadre d'un canal instantané dans la section 1.3.1, dans cette section, nous insisterons uniquement sur l'évolution de densité des messages transistants du trellis au code LDPC et inversement.

Notons, respectivement, par $f_d^{(l)}$ et $f_e^{(l)}$ les densités de probabilité des messages d et des messages e à l'itération l . Ainsi, d'après l'équation (1.12) la loi de mise à jour de la densité $f_v^{(l)}$ des messages se dirigeant vers les noeuds de contrôles sera :

$$f_v^{(l)} = f_d^{(l)} \otimes \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i (f_u^{(l)})^{\otimes (i-1)} \quad (1.43)$$

Le calcul de la densité des messages sortant d'un noeud de contrôle s'écrit toujours de la manière suivante :

$$f_u^{(l)} = \Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \quad (1.44)$$

D'après l'équation (1.42), la densité des messages provenant des noeuds de données et se dirigeant vers les noeuds de treillis $f_e^{(l)}$ est :

$$f_e^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_i (f_u^{(l)})^{\otimes(i)} \quad (1.45)$$

où $\tilde{\lambda}_i$ représente la proportion des noeuds de données de degré i (dont l'expression est donnée dans la section 1.1).

La dernière étape nécessaire afin de terminer l'évolution de densité pour un canal à mémoire est le calcul de la densité des messages sortant des noeuds de treillis et se dirigeant vers les noeuds de données $f_d^{(l)}$ en fonction de la densité $f_e^{(l)}$ des messages provenant des noeuds de données et de la densité du bruit f_n . Notons cette évolution de densité à travers le treillis par,

$$f_d^{(l)} = \mathcal{E}_t(f_e^{(l)}, f_n) \quad (1.46)$$

où l'opérateur $\mathcal{E}_t$ représente l'évolution de densité par le treillis. Étant donné qu'il n'existe pas de forme analytique de (1.46), les auteurs ont construit numériquement la densité $f_d^{(l)}$ par des simulations de Monte Carlo [48].

En combinant ces quatre équations, il devient possible d'évaluer le comportement asymptotique d'un code LDPC en fonction de ces paramètres sur un canal à mémoire et, ainsi d'optimiser les paramètres $\underline{\lambda}$ et $\underline{\rho}$.

1.4.3 Optimisation des codes LDPC sur le canal à mémoire partielle

L'optimisation de la structure des codes LDPC a ensuite été réalisée pour les canaux à mémoire partielle c'est-à-dire pour des canaux présentant une mémoire très courte que l'on peut, par exemple, rencontrer dans les systèmes magnétiques [82]. Les auteurs se sont intéressés à deux canaux à réponse partielle : Le canal Dicode défini par $h_1(D) = 1 - D$, et le canal EPR4 défini par $h_2(D) = (1 - D)(1 + D)^2$. Le processus d'optimisation basé sur l'évolution de densité est exactement celui de Richardson *et al.* [71] que nous avons exposé dans la section 1.3.1. Le code, de rendement $R = 0.7$, résultant de l'optimisation sur le canal Dicode présente un seuil à 0.15 dB de la capacité i.u.d. (3.49 dB pour le canal Dicode) et celui, de même rendement, résultant à l'optimisation sur le canal EPR4 présente, quant à lui, un seuil à 0.14 dB de la capacité i.u.d. (3.91 dB pour le canal EPR4).

Optimisation par adaptation de la fonction de transfert de l'information mutuelle

Étant donné que la procédure d'optimisation ci-dessus présente une complexité relativement importante, Narayanan *et al.* ont introduit une approche alternative basée sur l'adaptation des fonctions de transfert de l'information mutuelle (EXIT charts) entre le décodeur canal et l'égaliseur [62]. En effet, il a été montré qu'un moyen efficace d'analyser les propriétés de convergence d'un turbo égaliseur était d'étudier les EXIT charts [9]. Notons $\mathcal{F}_{eq}(I, E_s/N_0)$ la fonction transfert définissant l'information mutuelle moyenne entre l'information extrinsèque générée par l'égaliseur

et les bits codés lorsque l'information *a priori* à l'entrée de l'égaliseur est Gaussienne et correspond à l'information mutuelle moyenne de I . De la même manière, on définit $\mathcal{F}_c(I)$ comme étant la fonction de transfert de l'information mutuelle provenant du code LDPC lorsqu'il est alimenté par l'information mutuelle I . Un EXIT chart contient deux courbes $\mathcal{F}_{eq}(I)$ et $\mathcal{F}_c^{-1}(I)$. Comme la sortie de l'égaliseur correspond à l'entrée du décodeur canal et inversement, suivre l'évolution de l'information mutuelle au cours des itérations revient à effectuer une suite de projections sur ces deux courbes. Pour optimiser la structure des codes LDPC, les auteurs se sont appuyés sur les deux propriétés suivantes [9, 3] :

Propriété d'aire

Si le canal est à effacement alors quelque soit le code correcteur d'erreur C , la surface sous la courbe EXIT suit la propriété suivante : $\int_0^1 \mathcal{F}_c^{-1}(I) dI = R$, où R est le rendement du code C .

Comme cette propriété s'est montrée quasi vérifiée pour d'autres canaux que celui à effacement, les auteurs ont alors supposé qu'elle était valable pour la turbo égalisation.

Propriété de convergence

Un algorithme de turbo égalisation converge si et seulement si : $\mathcal{F}_c^{-1}(I) \leq \mathcal{F}_{eq}(I)$, $\forall 0 \leq I < 1$.

Combinant ces deux propriétés, Narayanan *et al.* ont établis les deux fondements suivant pour l'optimisation des codes LDPC :

1. Pour un canal à réponse partielle, un E_s/N_0 et un égaliseur fixé, un code LDPC sera optimal si la fonction de transfert EXIT du code LDPC fonction de $(\underline{\lambda}, \underline{\rho})$ satisfait $\mathcal{F}_c^{-1}(I) = \mathcal{F}_{eq}(I)$.
2. Le rendement R réalisable est alors défini par la surface représentée sous la courbe $\mathcal{F}_{eq}(I)$.

Afin d'obtenir le comportement asymptotique des codes LDPC en fonction de leurs paramètres $(\underline{\lambda}, \underline{\rho})$, les auteurs ont choisis d'utiliser l'Approximation Gaussienne de (1.43) et (1.44). Ce choix étant principalement dû à la linéarité du problème d'optimisation et au gain de complexité. Définissons par $J(x)$ l'information mutuelle moyenne entre les bits codés et l'information extrinsèque quand ce dernier est de densité Gaussienne de moyenne x et de variance $2x$. Alors, $J^{-1}(I)$ dénote la moyenne des messages pour lesquels l'information mutuelle équivalente est I . De même, posons $g(\underline{\lambda}, x) = \sum_{i=2}^{t_{max}} \tilde{\lambda}_i J(ix)$ l'information mutuelle provenant du décodeur LDPC lorsque les messages allant des noeuds de contrôles aux noeuds de données sont Gaussiens de moyenne x et de variance $2x$.

Afin de réaliser des codes LDPC avec la fonction de transfert EXIT désirée soit $\mathcal{F}_c^{-1}(I) = \mathcal{F}_{eq}(I)$, les auteurs ont tout d'abord échantillonné la fonction $\mathcal{F}_{eq}(I)$, ils ont alors représenté, respectivement, les valeurs d'entrée et de sortie par les vecteurs $\underline{a} = [a_1 a_2 \dots a_G]$ et $\underline{b} = [b_1 b_2 \dots b_G]$. Par conséquent, si les messages provenant d'un canal BABG et alimentant le décodeur LDPC ont une moyenne $J^{-1}(a_k)$ en sortie de ce décodeur l'information mutuelle extrinsèque sera b_k . Ceci revient à dire que la moyenne des messages provenant des noeuds de contrôles vers les noeuds de données doit être égale à $g^{-1}(\underline{\lambda}, b_k)$. Le problème d'optimisation est toujours un problème de maximisation du rendement R sous contraintes et s'écrit de la manière suivante ($\underline{\rho}$ étant fixé) :

$$\underline{\lambda}_{opt} = \arg \max_{\underline{\lambda}} \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i / i \quad (1.47)$$

sous la contrainte,

$$\phi(m_v) > \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i F_{m,i}(m_{d_k}, \phi(m_v)) \quad \forall \phi(m_v) \in [\phi(g^{-1}(\tilde{\lambda}, b_k)), \phi(J^{-1}(a_k))] \quad (1.48)$$

, et $\forall k = 1, 2, \dots, G$,

ainsi que les contraintes de normalisation et de proportion telles qu'elles ont été définies dans la section 1.3.1. La contrainte (1.48) requiert l'absence de point fixe dans la récurrence $\phi(m_v^{(l)})$, cette récurrence est initialisée à $\phi(J^{-1}(a_k))$ et évolue jusqu'à ce qu'elle atteigne $\phi(g^{-1}(\tilde{\lambda}, b_k))$ (au lieu de zéro comme c'est le cas pour le canal BABG). Lorsque $\phi(m_v)$ atteint la quantité $\phi(g^{-1}(\tilde{\lambda}, b_k))$, une étape de turbo égalisation est alors effectuée et la moyenne m_{d_k} des messages provenant du treillis est mis à jour et devient $m_{d_{k+1}}$

Étant donné que $\tilde{\lambda}$ intervient dans le calcul des intervalles de la contrainte (1.48), il n'est pas possible d'optimiser la structure des codes LDPC en l'état. Narayanan *et al.* ont alors proposé de réaliser une approximation pour le calcul de $\phi(g^{-1}(\tilde{\lambda}, b_k))$. Cette approximation, constituée de deux étapes, est tout d'abord basée sur l'introduction de la condition de stabilité permettant de déterminer λ_2^* . Comme λ_2^* est la borne supérieure de λ_2 , les auteurs se sont placés dans le cas le plus défavorable défini par la distribution de l'irrégularité $\lambda(x) = \lambda_2^* x + (1 - \lambda_2^*) x^2$ soit $\tilde{\lambda}(x) = \frac{3\lambda_2^*}{\lambda_2^*+2} x + \frac{2(1-\lambda_2^*)}{\lambda_2^*+2} x^2$. Dans un deuxième temps, les auteurs ont considéré que la densité des messages en sortie du décodeur canal était Gaussienne de moyenne $\sum_{i=2}^{t_{cmax}} i \tilde{\lambda}_i \phi(m_v)$, d'où $g(\tilde{\lambda}, \phi(m_v)) \approx J(\phi(m_v) \sum_{i=2}^{t_{cmax}} i \tilde{\lambda}_i)$. En combinant ces deux étapes, l'approximation peut s'écrire comme :

$$g(\tilde{\lambda}, \phi(m_v)) \approx J\left(\frac{6\phi(m_v)}{\lambda_2^* + 2}\right) \quad (1.49)$$

En intégrant la fonction réciproque de cette approximation dans (1.48), le processus d'optimisation résultant prend la forme d'un problème de programmation linéaire tel qu'il a été présenté dans la section 1.3.3.2.

Ce processus d'optimisation des codes LDPC a également été utilisée pour les canaux Dicode et EPR4. Le code de rendement $R = 0.45$ optimisé pour le canal Dicode présente un seuil à 0.2 dB de la capacité i.i.d. et celui optimisé pour le canal EPR4 se trouve à 0.5 dB de sa capacité i.i.d..

Ces méthodes de turbo-égalisation se sont montrées performante sur les canaux Dicode et EPR4 c'est-à-dire pour des canaux à mémoire très limitée. Dès que le nombre de trajet devient important ce type de processus présente une complexité bien trop importante, d'autant plus qu'il est nécessaire de déterminer numériquement par des simulations de Monte Carlo la densité des messages en sortie du BCJR. Par conséquent, ceci restreint considérablement les domaines d'applications d'une telle approche.

Concatenation de codes treillis adaptés au spectre du canal

Une dernière approche, plus récente, introduite par Doan *et al.* [28] consiste à concaténer le code LDPC avec un code bloc de mise en forme spectrale de manière à ce que le signal transmis ait une allure spectrale qui tende le plus possible vers le contenu spectral résultant du water-filling. Cette méthode permet d'inverser la réponse impulsionnelle du canal à l'aide de codes treillis. Les auteurs ont alors montré, dans le cas simple du canal Dicode, que la courbe représentant la fonction de transfert de l'information mutuelle entre le code de mise en forme spectral et le canal décrivait celle d'un canal BABG. Par conséquent, l'optimisation des codes LDPC pour ce type de structure revient au problème classique de l'optimisation sur le canal BABG.

Notons tout de même, que l'adaptation spectrale réalisée n'est valable que pour des codes de faible rendement et n'a été, pour l'instant, effectuée que pour des canaux très simples tels que le canal Dicode. Cette approche a permis d'obtenir des codes LDPC de rendement $R = 0.25$ présentant un seuil à 0.3 dB de la capacité pour le canal $h(D) = 0.8 + 0.6D$.

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre correspondant principalement à un état de l'art avait pour objectif d'introduire les codes LDPC à travers ces notations et les outils algorithmiques associés indispensables à une bonne compréhension des chapitres suivants.

Après avoir défini les codes LDPC, nous avons présenté une paramétrisation originale de ceux-ci nommée profil d'irrégularité permettant de les utiliser efficacement sur un canal non-stationnaire. Nous verrons dans la suite l'importance d'une telle paramétrisation.

Le second point clef développé dans ce chapitre est la possibilité d'analyser le comportement asymptotique des codes LDPC en fonction de ces paramètres au cours des itérations de décodage. Cette analyse basée sur l'étude de l'évolution des densités des différents messages se propageant à travers le graphe factoriel fait l'objet d'une approximation par des densités Gaussiennes permettant ainsi une réduction de la complexité. Fort de ces outils d'analyse, les méthodes d'optimisation de la structure des codes LDPC ont ensuite été présentées.

La dernière partie de ce chapitre avait pour objet d'étudier l'optimisation des codes LDPC pour le canal à mémoire. Les méthodes d'optimisation étudiées se sont montrées efficaces à condition que la mémoire du canal soit très limitée. Dans cette thèse, nous développerons une approche alternative en opérant dans le domaine spectral, ce qui est le cas des transmissions multi-porteuses.

Chapitre 2

Transmissions multi-porteuses

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notations, ainsi que les différentes notions concernant les transmissions multi-porteuses utiles à la problématique de cette thèse et ce, de façon synthétique. Pour une présentation détaillée des systèmes multi-porteuses nous pouvons conseiller, par exemple, la lecture de [4, 81].

2.1 Motivations et historique de l'utilisation des transmissions multi-porteuses

Un canal de propagation est caractérisé par plusieurs phénomènes physiques tels que la réflexion du signal sur un obstacle, la réfraction lorsque celui-ci traverse un milieu d'indice différent de celui d'où il provient, ou bien encore la diffraction due à un obstacle. Ainsi, tous ces phénomènes physiques entraînent des échos (propagation par trajets multiples due à la présence d'obstacles) pouvant engendrer des interférences. Par conséquent, la probabilité de recevoir uniquement une onde directe provenant d'un émetteur est très faible. Le signal reçu sera alors composé du signal émis ainsi que d'une multitude de signaux atténués et retardés constituant de ces différents échos. Si on suppose que le milieu de propagation est linéaire, ce signal reçu y_n peut être modélisé par la relation suivante :

$$y_n = \sum_{j=0}^{L-1} h_j x_{n-j} \quad (2.1)$$

où $\underline{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]$ représentent les coefficients de la réponse impulsionnelle du canal et x_n le $n^{ième}$ échantillon du signal émis. En fréquence, le canal peut également être caractérisé par sa fonction transfert $\underline{H}$, TFD de sa réponse impulsionnelle $\underline{h}$. La fonction de transfert d'un canal résultant d'une propagation à trajets multiples présente une réponse fréquentielle qui n'est pas "plate", et qui peut même comporter des zones où l'amplitude du spectre est fortement atténuée. Le canal est dit alors sélectif en fréquence. Pour remédier aux méfaits de cette sélectivité, il est alors nécessaire d'égaliser le signal reçu. Un moyen permettant de simplifier le processus d'égalisation est d'utiliser plusieurs fréquences porteuses afin d'émettre le flot d'informations à travers un canal de transmission large bande sur plusieurs sous-canaux à bande étroite (également appelés sous-bandes) pour lesquels la réponse fréquentielle du canal peut être considérée comme constante. Ainsi, l'étape d'égalisation dans chacun des sous-canaux revient à une simple multiplication par un coefficient. Ce principe de transmission est généralement nommé transmission multi-porteuses. Un cas particulier des modulations multi-porteuses est la modulation

multi-porteuses à multiplexage orthogonal connue sous le nom de modulation OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Dans cette section, nous nous intéresserons uniquement à ce mode de transmission.

Si les premières études sur les transmissions multi-porteuses datent de la fin des années 1950 (liaisons militaires hautes fréquences), la modulation OFDM a fait son apparition une dizaine d'années plus tard grâce notamment aux travaux de Chang [15]. La contribution majeure au développement des transmissions OFDM est celle de Weinstein et Ebert qui, en 1971, ont proposé d'utiliser la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform : FFT) dans les processus de modulation et de démodulation [84]. L'intérêt principal de cette approche est l'élimination des bancs d'oscillateurs par un algorithme simple et performant permettant de réduire la complexité des systèmes OFDM. Pour éliminer les interférences entre les blocs de symboles OFDM, présentes lors de transmissions sur un canal dispersif, Weinstein *et al.* ont eu l'idée d'insérer entre deux blocs de symboles OFDM un intervalle de garde de durée supérieure à la réponse impulsionnelle du canal. Néanmoins ce processus n'a pas permis de résoudre le problème de la perte d'orthogonalité entre les sous-porteuses engendrée par la convolution linéaire du bloc de symboles OFDM avec la réponse impulsionnelle du canal et faisant apparaître des interférences entre les symboles d'un même bloc fréquentiel. Ce problème fut résolu un peu plus tard par Peled et Ruiz en 1980 [66], en remplissant l'intervalle de garde par un préfixe cyclique (également appelé extension cyclique) dont nous discuterons des bonnes propriétés dans ce chapitre.

En 1987, il a été proposé d'associer à la modulation OFDM un processus de codage combinant un code convolutif et un entrelaceur [1]. Ainsi, les symboles erronés véhiculés principalement à travers les sous-bandes les plus atténuées pourront être corrigés grâce aux symboles émis dans les sous-bandes présentant un meilleur RSB. Le système résultant est alors appelé COFDM, le "C" faisant référence au codage [87]. Ce principe à tout d'abord été implanté pour la radiodiffusion numérique DAB (Digital Audio Broadcasting) [68].

Parallèlement, une méthode très proche de l'OFDM a été développée pour des applications présentant un canal variant très peu dans le temps (comme, par exemple, la paire torsadée du réseau téléphonique), ainsi qu'un canal de retour. Ce type de modulation, nommée DMT (Discrete Multi-Tone), diffère de l'OFDM par une distribution irrégulière du nombre de bits émis dans chaque sous-porteuse. Du fait de la prise en compte de la sélectivité du canal lors de l'allocation du nombre de bits à émettre dans chaque sous-porteuse, la modulation DMT permet d'obtenir des performances plus proches de la capacité du canal sélectif que celles obtenues avec la modulation OFDM. Ce type de modulation a été choisi dans les standards xDSL.

Nous aborderons ce chapitre par la présentation complète de la chaîne de communication OFDM et COFDM. Ensuite, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où la canal de propagation est considéré comme étant statique dans le temps et parfaitement connu de l'émetteur. En pratique, cette invariance du canal est exploitée en adaptant le débit binaire dans chacune des sous-porteuses. Nous finirons alors ce chapitre par la présentation d'algorithmes d'allocation de bits.

2.2 Chaîne de communication multi-porteuses

2.2.1 Modélisation des systèmes multi-porteuses

Rappelons que l'objectif principal des transmissions OFDM est d'émettre l'information en parallèle sur les différentes sous-porteuses de manière à transformer l'effet convolutif du canal en un effet multiplicatif et ainsi, de faciliter l'égalisation. Dans cette section nous présenterons la structure de l'émetteur et du récepteur OFDM de manière à comprendre comment cet objectif est

atteint. La chaîne de communication OFDM est représentée sur la figure 2.1 (dans ce mémoire nous nous intéresserons uniquement à la modélisation numérique du système de transmission OFDM en bande de base).

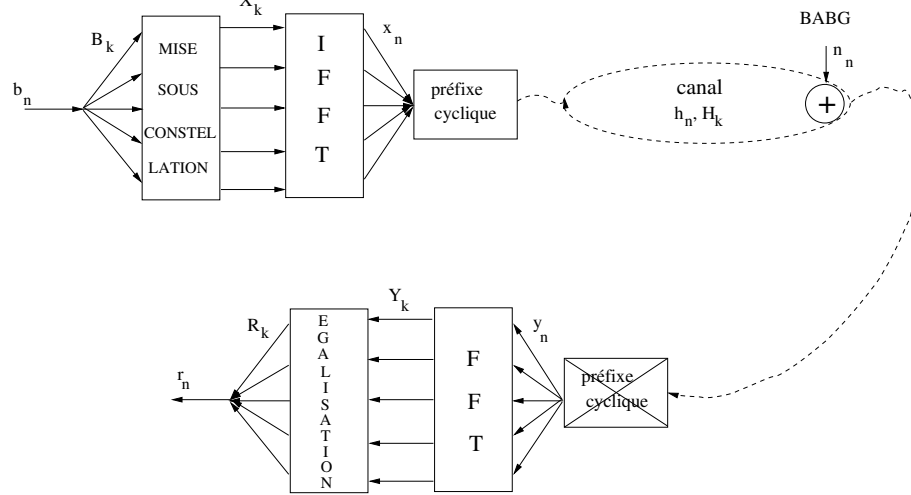


FIG. 2.1 – Chaîne de transmission OFDM.

Le flot de bits b_n est converti en N_{sp} flots parallèles B_k dans le domaine fréquentiel (et ce, par paquet de N_b où N_b représente le nombre de bits émis par un symbole). Les bits B_k sont alors émis en parallèle sur les N_{sp} sous-porteuses. Ces bits sont ensuite transformés en N_{sp} symboles $\underline{X} = [X_1, \dots, X_k, \dots, X_{N_{sp}}]^T$ dont on effectue la transformée de Fourier inverse afin d'émettre ce bloc dans le domaine temporel $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n, \dots, x_{N_{sp}}]^T$:

$$\underline{x} = \mathbf{F}_{N_{sp}}^{-1} \underline{X} \quad (2.2)$$

où la matrice $\mathbf{F}_{N_{sp}}^{-1}$ représente la matrice inverse de Fourier, soit $\mathbf{F}_{N_{sp}}^{-1}(n, l) = \exp\left(j2\pi \frac{(l-1)(n-1)}{N_{sp}}\right)$.

Remarque 5 Notons que dans le cadre de transmissions filaires (xDSL), le canal étant en bande de base, il ne peut transmettre que des données à valeurs réelles. Pour ce faire, il est nécessaire de construire un bloc de symboles $\underline{X}$ à symétrie hermitienne de manière à obtenir après la IFFT un bloc de symboles OFDM $\underline{x}$ à valeurs réelles, soit :

$$\underline{X} = [0, X_1, X_2, \dots, X_{N_{sp}-1}, 0, X_{N_{sp}-1}^*, \dots, X_2^*, X_1^*],$$

où $*$ représente la conjugaison. Il ne s'agit pas ici de "perdre" la moitié de la bande utile car si le signal à émettre était à valeurs complexes, il serait nécessaire d'émettre dans un premier temps sa partie réelle et ensuite sa partie imaginaire.

Avant d'émettre le bloc de symboles OFDM $\underline{x}$, un préfixe cyclique de longueur supérieure ou égale à la longueur de la réponse impulsionnelle du canal est ajouté afin de conserver l'orthogonalité entre les N_{sp} sous-porteuses. Le signal OFDM et le canal étant linéairement convolués, l'intérêt d'insérer ce préfixe cyclique est de transformer cette convolution linéaire en une convolution circulaire afin d'obtenir un effet purement multiplicatif dans le domaine fréquentiel [6]. Cependant, le préfixe cyclique aura pour inconvénient de réduire l'efficacité spectrale du système. L'illustration du préfixe cyclique est présentée sur la figure 2.2.

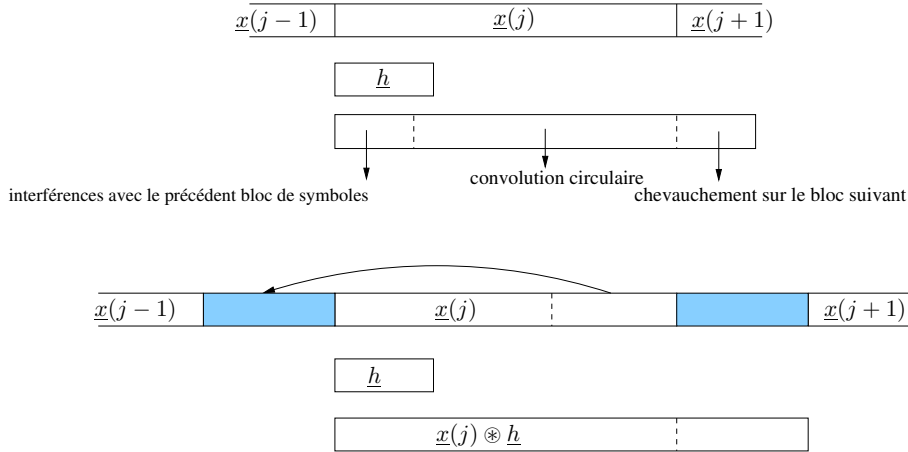


FIG. 2.2 – Illustration de l'effet du préfixe cyclique.

Par conséquent, au récepteur, après avoir supprimé le préfixe cyclique, le signal reçu $\underline{y} = [y_1, \dots, y_n, \dots, y_{N_{sp}}]^T$ peut s'exprimer par :

$$\underline{y} = \underline{h} \otimes \underline{x} + \underline{n} \quad (2.3)$$

où $\underline{n} = [n_1, \dots, n_n, \dots, n_{N_{sp}}]^T$ est le vecteur contenant les échantillons du bruit complexe additif blanc Gaussien de moyenne nulle et de variance σ_b^2 et $\underline{h} = [h_1, \dots, h_L]^T$ le vecteur contenant les coefficients de la réponse impulsionnelle du canal. L'opérateur $\otimes$ définit le produit de convolution circulaire.

Au récepteur, après avoir supprimé le préfixe cyclique, la transformée de Fourier rapide transforme le signal temporel reçu $\underline{y}$ dans le domaine fréquentiel $\underline{Y}$, soit :

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \mathbf{F}_{N_{sp}} \underline{y} \\ &= \underline{H} \cdot \underline{X} + \underline{N} \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $\underline{H}$ et $\underline{N}$ représentent, respectivement, la transformée de Fourier de $\underline{h}$ et de $\underline{n}$ et l'opérateur $\cdot$ définit la multiplication terme à terme de deux vecteurs. Au regard de l'équation (2.4), nous pouvons constater que les symboles $\underline{X}$ sont émis en parallèle à travers N_{sp} sous-canaux indépendants, Gaussiens, sans IES (Interférences Entre Symboles) et de gain complexe défini par $\underline{H}$. Ce modèle facilite grandement l'étape d'égalisation qui peut être réalisée dans le domaine fréquentiel. Ceci représente une des clefs du succès des transmissions OFDM. En effet, dans le domaine fréquentiel le canal peut être compensé en multipliant le signal $\underline{Y}$ par un simple coefficient $\underline{K}$ dont l'expression est obtenue en optimisant un critère qui généralement est celui du forçage à zéro (zero-forcing : ZF) ou celui de l'erreur quadratique moyenne minimale (Minimization Mean Square Error : MMSE). Le signal égalisé $\underline{R}$ est alors donné par :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \underline{K} \cdot \underline{Y} \\ &= \underline{K} \cdot \underline{H} \cdot \underline{X} + \underline{K} \cdot \underline{N} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dans le cadre d'une égalisation par le critère ZF, l'égaliseur inverse simplement le spectre du canal, soit sur la k^{ieme} sous-porteuse le coefficient K_k est défini par :

$$K_k = \frac{1}{H_k} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (2.6)$$

Notons pour que l'égaliseur soit stable, le canal ne doit pas posséder de sous-bande avec un gain nul. Nous pouvons également remarquer que l'égaliseur ZF aura tendance à fortement amplifier le bruit dans les sous-bandes qui présenteront un faible gain. Un bon compromis entre la reconstruction du signal et l'amplification du bruit peut être obtenu par l'utilisation de l'égaliseur MMSE dont les coefficients sont définis par :

$$K_k = \frac{H_k^*}{|H_k|^2 + \frac{\sigma_b^2}{P_k |H_k|^2}} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}, \quad (2.7)$$

où P_k représente la puissance du symbole émis dans la $k^{ième}$ sous-bande. Après l'étape d'égalisation, le signal R_k subit une conversion parallèle/série afin d'obtenir un flot d'information en série.

Le bruit additif $\underline{N}$ étant considéré comme blanc, un système OFDM idéal peut alors être représenté par son modèle fréquentiel équivalent lequel est illustré sur la figure 2.3 ci-dessous :

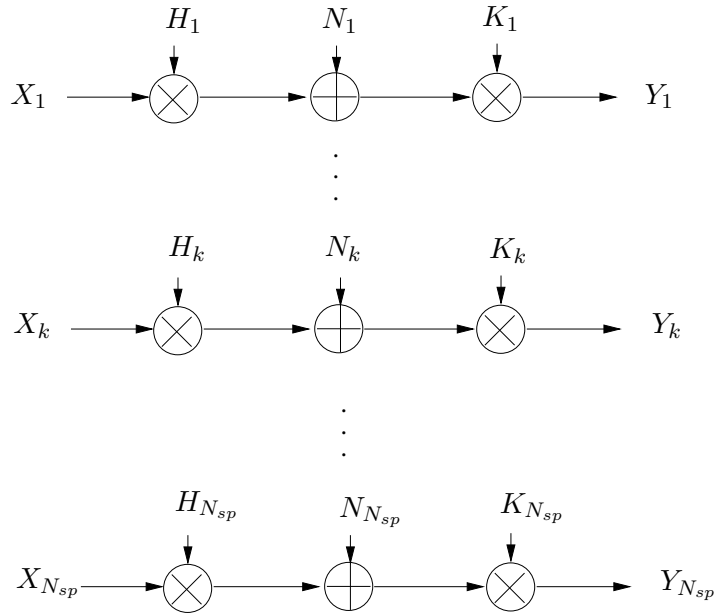


FIG. 2.3 – Modèle fréquentiel d'un système OFDM.

Le module des gains dans les différentes sous-bandes $|H_k|$ $k = 1, \dots, N_{sp}$ est représenté sur la figure 2.4 ci-dessous pour un canal ADSL typique :

2.2.2 Systèmes COFDM

Dans la plupart des applications où les modulations multi-porteuses sont utilisées, des performances convenables ne pourront être atteintes qu'à condition d'utiliser un processus de codage. Le système COFDM résultant consiste en l'ajout d'un code correcteur d'erreurs en amont du modulateur OFDM comme présenté sur la figure 2.5.

Si on considère un canal présentant une sélectivité fréquentielle stationnaire dans le temps, en fonction de son emplacement chaque symbole sera donc plus ou moins atténué à l'entrée du récepteur. Le code correcteur d'erreurs liant entre eux les symboles transmis en différents points a pour objectif de "récupérer" la plupart de l'information affectée par de fortes atténuations grâce

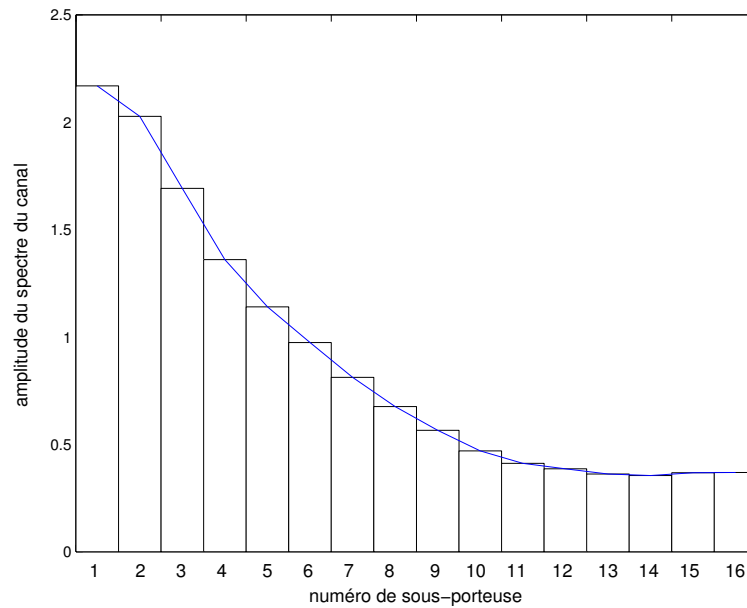


FIG. 2.4 – Module du spectre d'un canal sélectif en fréquence.

à celle émise dans les meilleures sous-bandes. Notons également que les processus de codage peuvent être combinés avec l'étape de mise sous constellation. Habituellement en COFDM, les méthodes de codages utilisées sont :

- soit un code convolutif avec un entrelaceur fréquentiel, autrement dit, dans le cadre de l'utilisation d'une constellation non binaire il s'agit de la structure d'une modulation codée par bits entrelacés (Bit Interleaved Coded Modulation : BICM) [51],
- soit la concaténation d'un code bloc de Reed-Solomon avec un code convolutif,
- soit une modulation codée en treillis (Trellis Coded Modulation : TCM) [51],
- soit un turbo-code [47].

Ces différentes approches sont détaillées dans la suite de cette section.

BICM

Ce processus de codage est constitué d'un code convolutif dont la séquence de sortie est entrelacée afin d'émettre les bits successifs à travers des sous-bandes non corrélées. Dans le cadre d'une modulation codée du type BICM, cette étape de codage est alors suivie par une mise sous constellation. Un des avantages de l'utilisation d'une telle structure est sa capacité à adapter le débit d'information par un simple poinçonnage en sortie du code convolutif.

Code convolutif concaténé avec un code Reed-Solomon

La concaténation d'un code convolutif avec un code bloc de Reed-Solomon est une méthode particulièrement intéressante puisqu'elle combine les avantages de chacun des deux codes [45]. Le code "intérieur", soit le code convolutif, réduit efficacement la probabilité d'erreur. Cependant, ce type de code laisse transparaître des paquets d'erreurs motivant ainsi l'utilisation en code "extérieur" d'un code de Reed-Solomon qui, intrinsèquement, est performant pour corriger ces paquets d'erreurs.

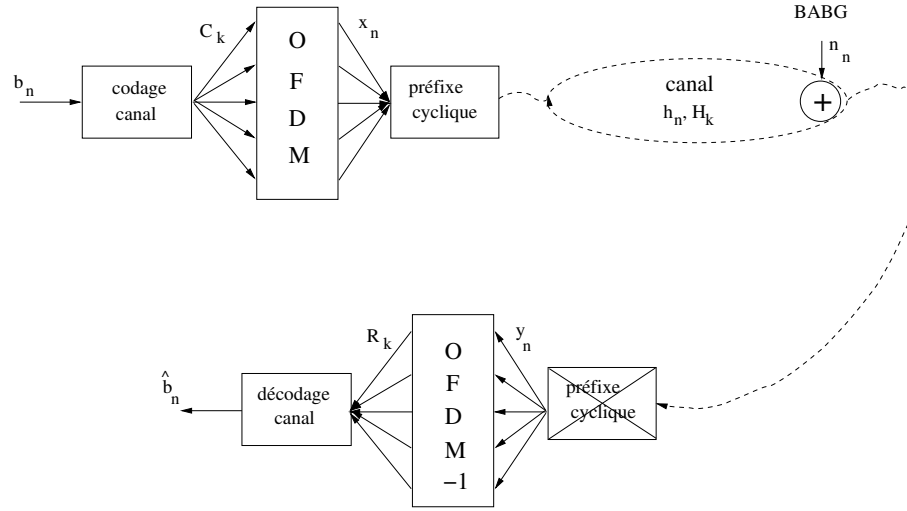


FIG. 2.5 – Chaîne de transmission COFDM.

Modulation codée en treillis

Plutôt que d'insérer des bits de redondances et ainsi, d'avoir plus de symboles à émettre, le principe de la modulation TCM est d'introduire la redondance en utilisant des constellations de taille plus importante que celles requises dans le cas non codé. Ainsi, la largeur de bande du signal reste inchangée. L'implantation de la modulation codée en treillis est quasi équivalente à celle de la modulation BICM sauf que l'entrelaceur est un entrelaceur symbole et qu'il se situe juste après la mise sous constellation.

Il a été montré que la modulation codée en treillis était performante lors de transmissions sur le canal BABG [80]. Cependant, sur le canal évanouissant de Rayleigh les performances d'une modulation codée dépendent de la distance minimale du code c'est-à-dire de sa diversité. Si l'entrelaceur est un entrelaceur symbole, ce qui est le cas de la modulation codée TCM, l'ordre de diversité correspond au plus petit nombre de symboles distincts parmi chaque événement d'erreur. Dans le cas de la modulation codée BICM, étant donné qu'elle est constituée d'un entrelaceur bit, l'ordre de diversité peut alors être égal à la distance libre du code convolutif. Par conséquent, pour réaliser le même ordre de diversité qu'une modulation BICM, la modulation TCM doit disposer d'un treillis avec une complexité de décodage plus importante. Ceci explique le choix des BICM pour l'HIPERLAN-2.

Turbo-code

La structure d'un turbo-code est composée d'au moins deux codeurs pouvant être de type convolutifs systématiques récurrents ou codes en bloc. Cette concaténation des différents codeurs est une concaténation soit parallèle soit série. Les codeurs sont liés entre eux par des entrelaceurs rendant ainsi les données se propageant d'un code à l'autre statistiquement indépendantes. L'utilisation de tels codes pour les transmissions OFDM est principalement motivée par leurs performances approchant la capacité de Shannon sur le canal BABG [7] ainsi, que par leur souplesse à ajuster le rendement désiré par poinçonnage en sortie des codeurs.

Dans cette thèse, nous proposons d'utiliser pour l'OFDM un processus de codage basé sur les codes LDPC. Comme les turbo-codes, les codes LDPC exhibent des performances très proches de la limite de Shannon sur le canal BABG. L'utilisation des codes LDPC pour les transmissions OFDM a été introduite quasi simultanément en 2001 par Futaki *et al.* [40] pour les codes réguliers et par nous mêmes avec des codes irréguliers non optimisés mais choisis en fonction de $\underline{H}$ [24]. Nous proposons d'optimiser la structure irrégulière du code LDPC en fonction d'une connaissance totale ou partielle du canal de propagation ce qui constitue une originalité de notre travail par rapport à [40, 24].

2.3 Systèmes multi-porteuses avec allocation de bits

Dans le cadre de communications filaires, les canaux de propagation présentent généralement des propriétés de transmissions ainsi que des statistiques sur le bruit variant très lentement dans le temps. Ce type de canal peut alors être traité sur une période relativement longue comme étant invariant. Dans ces conditions, il est possible d'optimiser les performances du système OFDM à travers le choix des symboles à émettre dans chaque sous-porteuses et ainsi d'atteindre la capacité d'un canal OFDM. Ce processus revient à adapter le débit (soit le nombre de bits par symbole à émettre) dans chacune des sous-porteuses en fonction de leur RSB. Cette opération est couramment nommée allocation de bits (bit loading).

Dans cette section, nous évaluerons tout d'abord les limites théoriques d'un tel système données par la capacité de Shannon du canal sélectif en fréquence. Après avoir montré que ce calcul de capacité était équivalent au problème d'allocation de bits dans le cas idéal où le nombre de bits alloué peut être fractionnaire, nous insérerons la restriction "pratique" d'avoir uniquement un nombre de bits entier dans chaque sous-porteuses et nous présenterons l'algorithme d'allocation de bits résultant.

2.3.1 Limite théorique : calcul de la capacité

Dans la section 2.2, nous avons montré que le canal OFDM pouvait être modélisé par un ensemble de N_{sp} canaux instantanés, parallèle, pour lesquels le bruit additif est de moyenne nulle et de variance $\sigma_k^2 = \sigma_b^2 / |H_k|^2 \forall k = 1, \dots, N_{sp}$. Nous considérerons, tout d'abord, les symboles X_k comme étant issus de sources Gaussiennes pour ensuite établir le calcul de la capacité pour des symboles issus d'une constellation MAQ.

Entrée Gaussienne

On souhaite utiliser chaque canal de telle sorte que la capacité globale de la transmission sous la contrainte d'une puissance d'émission fixée soit maximisée. Cette contrainte de puissance s'écrit de la manière suivante :

$$\sum_{k=1}^{N_{sp}} P_k = P_{tot} \quad (2.8)$$

où P_k représente la puissance du symbole dans la $k^{ième}$ sous-bande et P_{tot} la puissance totale d'émission. Les sous-canaux étant supposés indépendants, l'information mutuelle entre les symboles d'entrée $\underline{X}$ et la sortie du canal $\underline{Y}$ est alors donnée par :

$$I(\underline{X}; \underline{Y}) = \sum_{k=1}^{N_{sp}} I(X_k; Y_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{sp}} \log_2 \left(1 + \frac{P_k}{\sigma_k^2} \right) \quad (2.9)$$

Pour déterminer la capacité, il suffit d'optimiser la puissance délivrée dans chaque canal de manière à maximiser l'information mutuelle sous la contrainte de puissance totale, soit :

$$C_{OFDM,gauss} = \arg \max_{P_1, \dots, P_k, \dots, P_{N_{sp}}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{sp}} \log_2 \left(1 + \frac{P_k}{\sigma_k^2} \right) \quad (2.10)$$

sous la contrainte $\sum_{k=1}^{N_{sp}} P_k = P_{tot}$.

La solution à ce problème d'optimisation peut être facilement obtenue par dérivation du Lagrangien, et la distribution de la puissance résultante est alors définie par :

$$\begin{aligned} P_k + \sigma_k^2 &= B, & \text{si } B \geq \sigma_k^2, \\ P_k &= 0, & \text{sinon,} \end{aligned} \quad (2.11)$$

où la constante B est ajustée de manière à respecter la contrainte de puissance. La somme de la puissance allouée avec la variance du bruit σ_k^2 doit alors être constante dans chacune des sous-bandes utilisées. La mise en oeuvre de ce résultat est habituellement appelée *water filling* en raison de l'analogie qui peut être faite avec le remplissage d'un réservoir présentant un fond non régulier. Ce principe est illustré sur la figure 2.6.

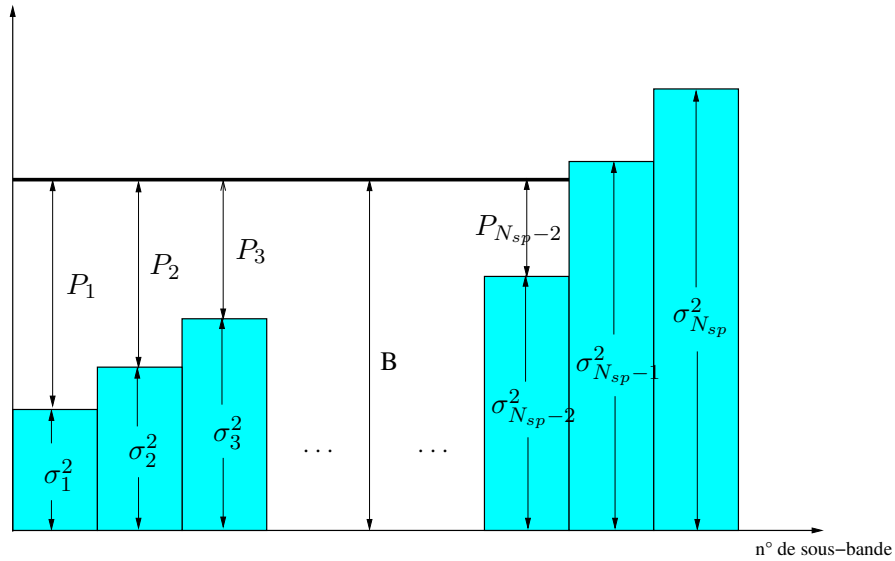


FIG. 2.6 – Illustration du *water filling*.

L'évolution de la capacité du canal ADSL (représenté sur la figure 2.4) exprimée en bits par sous-porteuses pour une entrée Gaussienne en fonction du RSB E_S/N_0 est illustrée sur la figure 2.7 ($\underline{h}=[0.06, 0.72, 0.54, 0.36, 0.18, 0.114, 0.078, 0.054, 0.033, 0.018, 0.012]$).

Entrée MAQ-M

En pratique et plus particulièrement dans le cadre de transmissions OFDM, les symboles sont en général issus d'une modulation du type MAQ-M (M représentant l'ordre de la constellation). Le calcul de la capacité d'un canal sélectif en fréquence alimenté par des symboles MAQ n'étant

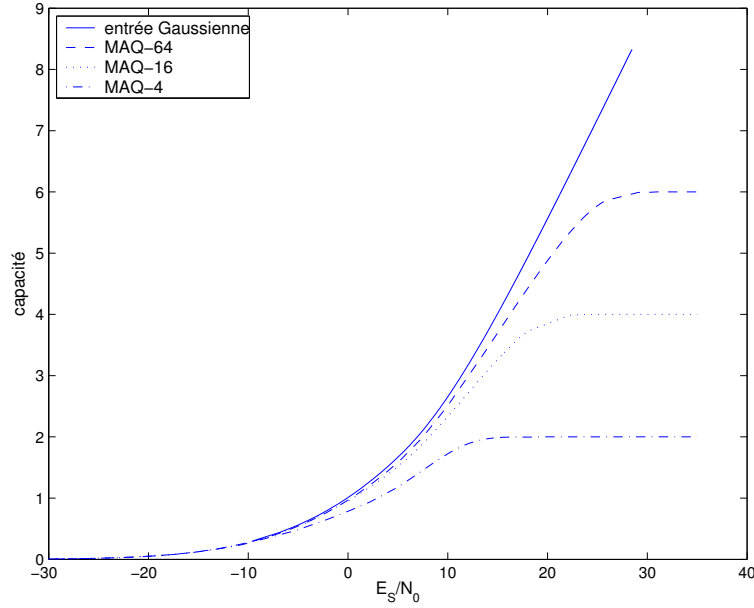


FIG. 2.7 – Évolution de la capacité (en nombre moyen de bits par sous-porteuse) d'un canal sélectif en fréquence pour une entrée Gaussienne, MAQ-64, MAQ-16 et MAQ-4.

pas trivial, nous avons proposé une approche originale afin d'évaluer cette limite.

Ungerboeck a montré que la capacité d'un canal BABG alimenté par des symboles MAQ- M ($M = 2^{2k}$ où k est entier positif) pouvait s'exprimer par [80] :

$$C_{MAQ-M} = \log_2(M^2) - \frac{2}{\sqrt{M}\pi} \sum_{m=1}^{\sqrt{M}} \int e^{-t^2} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{\sqrt{M}} e^{(-2td_{mi} - d_{mi}^2)} \right) dt \quad (2.12)$$

où $d_{mi} = \frac{Re(X_m) - Re(X_i)}{\sigma_b}$, $Re(X_m)$ et $Re(X_i)$ étant les parties réelles des symboles appartenant respectivement à la m^{ieme} et à la i^{ieme} colonne de la constellation. Nous avons représenté sur la figure 2.8 l'évolution de la capacité d'un canal BABG alimenté par des constellations MAQ (4, 16 et 64) et pour une source Gaussienne.

La capacité d'un canal sélectif en fréquence alimenté par des symboles MAQ s'obtient de la même manière que celle obtenue avec une entrée de densité Gaussienne c'est-à-dire en optimisant la répartition de la puissance disponible dans les différentes sous-bandes. La puissance P d'une constellation MAQ- M est fonction de la distance $2A$ entre deux symboles voisins, soit : $P = \frac{2(M^2-1)}{3} A^2$. La capacité dans la k^{ieme} sous-bande de variance $\sigma_k^2 = \sigma_b^2 / |H_k|^2$ peut alors s'écrire :

$$C_{k,MAQ-M}(A_k, |H_K|) = \log_2(M^2) - \frac{2}{\sqrt{M}\pi} \sum_{m=1}^{\sqrt{M}} \int e^{-t^2} \log_2 \left(\sum_{i=1}^{\sqrt{M}} e^{(-2td_{mi}A_k|H_k| - (d_{mi}A_k|H_k|)^2)} \right) dt \quad (2.13)$$

avec $A_k = \sqrt{\frac{3P_k}{2(M^2-1)}}$. Ainsi, le calcul de la capacité d'un canal sélectif en fréquence revient au

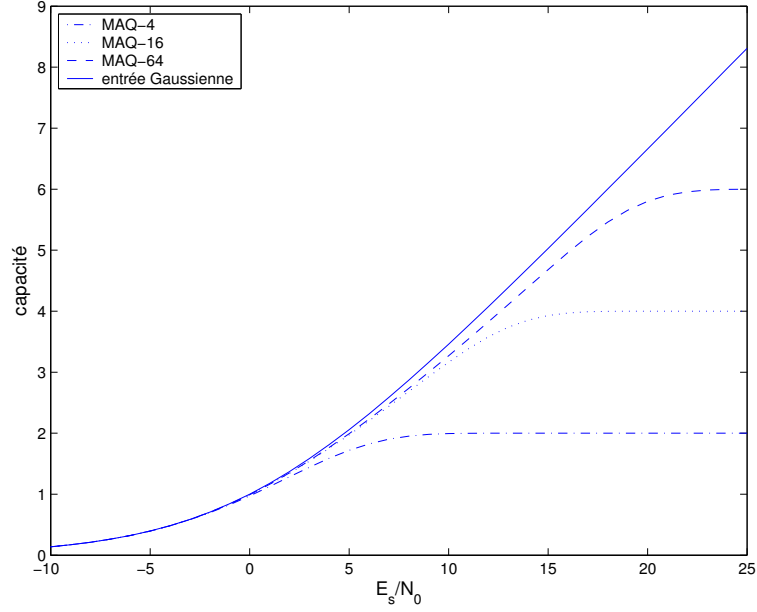


FIG. 2.8 – Évolution de la capacité d'un canal BABG pour une entrée Gaussienne, MAQ-64, MAQ-16 et MAQ-4.

problème d'optimisation suivant :

$$C_{OFDM,MAQ-M} = \arg \max_{A_1, \dots, A_k, \dots, A_{N_{sp}}} \sum_{k=1}^{N_{sp}} C_{k,MAQ-M}(A_k, |H_K|) \quad (2.14)$$

sous la contrainte $\sum_{k=1}^{N_{sp}} A_k^2 = \frac{3P_{tot}}{2(M^2 - 1)}.$

Contrairement au cas où les symboles étaient de densité Gaussienne le problème d'optimisation ci-dessus est non trivial. Nous avons choisi d'utiliser une méthode numérique basée sur l'annulation du gradient tangentiel qui a pour intérêt de rechercher le vecteur $\underline{A} = [A_1, \dots, A_{N_{sp}}]^T$ maximisant la fonctionnelle $f(\underline{A}) = \sum_{k=1}^{N_{sp}} C_{k,MAQ-M}(A_k, |H_K|)$ directement dans l'espace des solutions défini par la sphère S de rayon $R = \|\underline{A}\| = \sqrt{\frac{3P_{tot}}{2(M^2 - 1)}}$ dans $\mathbb{R}^{N_{sp}}$ ($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne) [14]. Dans l'annexe A, nous avons montré que ce problème d'optimisation de $f(\underline{A})$ sur la sphère S revenait à la recherche des zéros du gradient tangentiel de $f(\underline{A})$ soit : $(\frac{\partial}{\partial \underline{A}} f^T \underline{\tau}) \underline{\tau}$, où $\underline{\tau}$ est le vecteur tangent à la sphère S . Ainsi, nous proposons l'algorithme de type gradient suivant :

1. Initialisation : On choisit un vecteur $\underline{A}_0$ sur la sphère S .
2. Tant que la condition d'arrêt n'est pas vérifiée : $\underline{A}_{l+1} = \sqrt{\frac{3P_{tot}}{2(M^2 - 1)}} \frac{\underline{A}_l + \alpha \underline{de}_l}{\|\underline{A}_l + \alpha \underline{de}_l\|},$
avec $\underline{de}_l = -(\frac{\partial}{\partial \underline{A}_l} f^T \underline{\tau}) \underline{\tau} = -\frac{\partial}{\partial \underline{A}_l} f + (\frac{\partial}{\partial \underline{A}_l} f^T \underline{n}) \underline{n},$
où α représente le pas du gradient et $\underline{n}$ le vecteur normal à la sphère S défini par : $\underline{\tau} \wedge \underline{n} = \underline{0}.$

Le problème habituel de ce genre d'algorithme est qu'il est sensible au choix du pas. Afin de trouver le "bon" pas il est alors nécessaire d'effectuer plusieurs essais. Pour le calcul de la

capacité nous avons utilisé un pas constant $\alpha = 0.1$ et notre algorithme converge en une centaine d'itérations.

Nous avons représenté l'évolution de la capacité d'un canal sélectif en fréquence pour des symboles d'entrée issus d'une constellation MAQ-4, MAQ-16 et MAQ-64 sur la figure 2.7. Notons que l'on retrouve un résultat classique qui est pour un RSB donné, que la capacité augmente avec le nombre d'états de la constellation utilisée.

Sur la figure 2.9 est illustrée la répartition optimale de la puissance, ainsi que la capacité résultante dans les différentes sous-porteuses pour une capacité globale $C = 2$ bits/sous-porteuse avec une entrée Gaussienne et une MAQ-16. Cette capacité est obtenue pour un RSB=6.95 dB lorsque l'entrée est Gaussienne, alors que pour une entrée MAQ-16 le RSB doit être de 8.16 dB. Le premier constat que nous pouvons faire est que la capacité de chaque sous-canal est plus importante pour les sous-canaux présentant un meilleur RSB et ce, quelque soit les propriétés du signal d'entrée du canal. Cependant, lorsqu'on observe la répartition optimale de la puissance pour l'entrée Gaussienne et MAQ-16 on peut s'apercevoir qu'elles n'ont pas la même allure. En effet, dans le cas où l'entrée est Gaussienne la puissance allouée est plus importante dans les sous-bandes présentant un meilleur RSB alors qu'avec une entrée MAQ-16 la puissance allouée ne croît pas avec le RSB. Dans le cadre de l'entrée MAQ-16, la puissance allouée dans les meilleures sous-bandes est plus faible que celle allouée dans les sous-bandes avec un RSB intermédiaire. Ceci peut s'expliquer en observant l'évolution en fonction du RSB de la capacité du canal BABG alimenté par des symboles MAQ-16 (Cf. figure 2.8). A fort RSB, un effet de saturation apparaît et par conséquent pour gagner en capacité il faudrait fortement augmenter le RSB. Ainsi, dans le cadre d'un ensemble de N_{sp} canaux en parallèle, la puissance allouée est gérée de manière à ne pas trop opérer dans la zone de saturation c'est-à-dire que lorsque une sous-bande présente un fort RSB, il n'est pas intéressant de lui allouer une puissance importante peu prolifique en termes de capacité mais plutôt "d'économiser" cette puissance pour l'allouer dans les sous-bandes présentant un plus faible RSB ce qui sera nettement plus bénéfique en gain de capacité.

2.3.2 Systèmes COFDM avec allocation de bits

Dans cette section, nous considérerons le problème d'allocation de bits pour un système OFDM. Pour réaliser une telle allocation, deux stratégies sont possibles. La première, nommée *maximisation du débit binaire*, consiste à maximiser la quantité d'information à émettre sous contrainte de puissance totale disponible à l'émetteur. Cependant, en pratique, il est généralement plus intéressant d'émettre à un débit prédéterminé et de minimiser la puissance totale requise. Ce principe d'allocation est habituellement appelé *maximisation de la marge du système*. La solution à ce type de problème d'optimisation mène généralement à une allocation non entière des bits. Or, en pratique, le nombre de bits alloués est contraint à être entier. Nous présenterons alors dans cette section l'allocation de bits par la maximisation de la marge du système que nous restreindrons par la suite à être entière [13].

L'allocation de bits à émettre dans les sous-canaux par la maximisation de la marge du système doit répondre au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \sum_{k=1}^{N_{sp}} P_k(b_k) \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{k=1}^{N_{sp}} b_k = B_{tot} \\ & b_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N_{sp}, \end{array} \quad (2.15)$$

où b_k représente le nombre de bits alloué dans le k^{ieme} sous-canal et $P_k(b_k)$ la puissance nécessaire

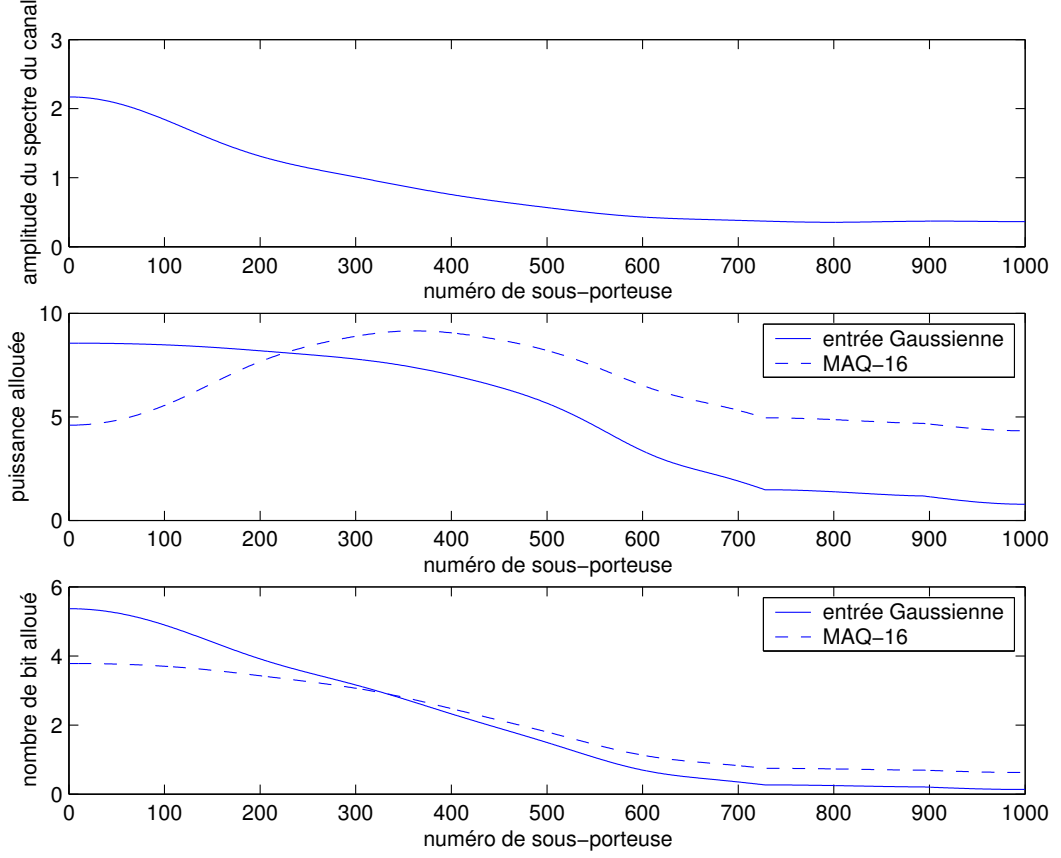


FIG. 2.9 – Amplitude du spectre du canal (courbe du haut). Distribution optimale de la puissance pour l'émission en moyenne de 2 bits d'information par sous-porteuse pour une entrée Gaussienne et une MAQ-16 (figure du milieu). Capacité résultante de chaque sous-porteuse (figure du bas).

pour émettre b_k bits avec une probabilité d'erreur P_e cible, étant connus le canal de transmission et le code correcteur d'erreurs.

Afin d'effectuer l'allocation optimale de bits, il est nécessaire de déterminer au préalable les performances du code correcteur d'erreurs utilisé. Lors d'analyses de performances de systèmes codés opérant sur le canal BABG, il a été observé qu'un grand nombre de codes pouvaient être caractérisés par un simple paramètre représentant l'écart par rapport à la capacité du canal [36]. Ce paramètre est appelé RSB normalisé $\Gamma(P_e, Co)$ d'un code correcteur d'erreurs Co opérant sur un canal BABG avec une probabilité d'erreur cible P_e et est défini par :

$$\Gamma = \frac{RSB(P_e, Co, \tilde{b})}{2^{\tilde{b}} - 1}, \quad (2.16)$$

où $RSB(P_e, Co, \tilde{b})$ est le rapport signal à bruit nécessaire pour transmettre $\tilde{b}$ bits par symbole et par dimension de la constellation utilisée avec une probabilité d'erreur P_e utilisant un code Co . Ce RSB normalisé représente la quantité d'énergie supplémentaire qu'il faudrait ajouter pour transmettre $\tilde{b}$ bits par dimension avec un code sous-optimal (n'atteignant pas la capacité), soit :

$$\tilde{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{RSB}{\Gamma} \right).$$

$\tilde{b}$ représente le nombre de bits par dimension soit en d'autres termes, pour des modulations unidimensionnelles comme par exemple la modulation à déplacement d'amplitude $\tilde{b} = b$ et pour des modulations à deux dimensions telles que la modulation MAQ, $\tilde{b} = b/2$. D'une manière générale, nous noterons :

$$\tilde{b} = \frac{b}{\beta},$$

avec β le nombre de dimensions de la modulation utilisée.

Remarque 6 *Le problème d'optimisation lié à l'allocation continue de bits par le critère de la maximisation du débit binaire est équivalent à celui du calcul de la capacité d'un canal sélectif en fréquence avec entrée Gaussienne et peut être résolu par water filling. Il suffit juste d'insérer dans l'équation (2.9) le RSB normalisé, soit dans la k^{ieme} sous-bande : $b_k = \frac{\beta}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_k}{\Gamma \sigma_k^2} \right)$.*

Le problème d'allocation continue de bits par la maximisation de la marge du système peut alors à nouveau s'écrire :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \sum_{k=1}^{N_{sp}} \Gamma \sigma_k^2 \left(2^{\frac{2b_k}{\beta}} - 1 \right) \\ & \text{sous les contraintes} && \sum_{k=1}^{N_{sp}} b_k = B_{tot} \\ & && b_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, N_{sp}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ce problème d'optimisation peut être également résolu par la méthode du Lagrangien. La distribution du nombre de bits par sous-porteuse est alors donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} b_k &= \beta \left(K + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\beta}{\Gamma \sigma_k^2} \right) \right), & \text{si } K + \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{\beta}{\Gamma \sigma_k^2} \right) \geq 0, \\ b_k &= 0, & \text{sinon,} \end{aligned} \tag{2.18}$$

où la constante K est ajustée de manière à respecter le nombre total de bits B_{tot} à émettre. La mise en oeuvre de cette solution du problème d'optimisation ci-dessus peut être réalisée par la méthode du water filling.

Campello de Souza [13] a montré que la solution optimale de l'allocation entière de bits s'obtenait tout d'abord par un arrondi de la solution continue présentée ci-dessus et par un ajustement que nous développerons. Notons $R(\underline{b})$ le vecteur contenant le nombre de bits à allouer $\underline{b}$ arrondi à l'entier le plus proche. Campello de Souza a montré que cet arrondi de la solution continue produisait une solution *efficace* soit :

$$P_k(R(b_k)) - P_k(R(b_k) - 1) \leq P_n(R(b_n) + 1) - P_n(R(b_n)) \quad \forall k, n = 1, 2, \dots, N_{sp}.$$

Cette condition implique que si une composante de $R(\underline{b})$ est décrétementée et qu'une autre est incrémentée, la puissance totale requise pour la transmission de cette nouvelle allocation sera plus importante. Ceci est une condition nécessaire à une allocation optimale. Après cette étape, il est nécessaire, le cas échéant, d'ajuster la somme des bits alloués de manière à obtenir le nombre de bits ciblé B_{tot} . Pour ce faire, il suffit d'évaluer la quantité $\Delta B = B_{tot} - \sum_{k=1}^{N_{sp}} R(b_k)$, si $\Delta B > 0$ alors les sous-bandes présentant la quantité $\delta \underline{b} = R(\underline{b}) - \underline{b}$ les plus importantes doivent être incrémentées et si $\Delta B < 0$ il suffit de décrétement le nombre de bits dans les sous-bandes exhibant le plus faible $\delta \underline{B}$. Cette procédure peut être efficacement implantée en utilisant une routine appelée OS-Select (Order Statistics Select).

L'algorithme d'allocation discrète de bits est alors ordonnancé comme suit :

1. Allocation continue de bits par le critère de la maximisation de la marge du système.
2. Arrondi à l'entier le plus proche de la solution de l'allocation continue.
3. Ajustement du nombre total de bits à émettre par OS-Select.

Sur la figure 2.10, nous avons représenté la répartition des bits alloués pour le canal ADSL représenté au-dessus. Le nombre total de bits à répartir dans les 1000 sous-porteuses est de 4000 et nous avons contraint le nombre de bits alloué dans chaque sous-bande à être pair et limité à 6. Nous pouvons constater que le nombre de bits alloué est plus important dans les sous-bandes présentant le meilleur RSB. Ainsi, cette répartition des bits aura tendance à atténuer la sélectivité du canal.

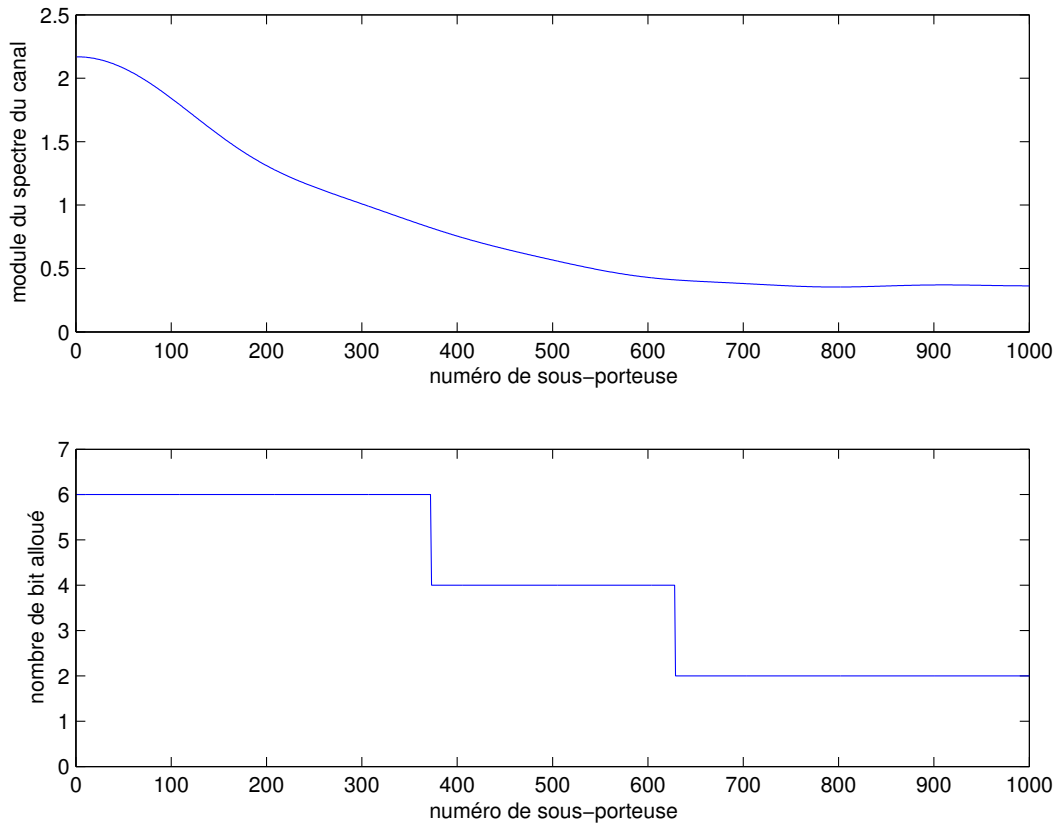


FIG. 2.10 – Répartition des bits alloués (figure du bas) pour le canal ADSL (figure du haut).

2.4 Conclusion

Ce second chapitre avait pour but de présenter la chaîne de communication COFDM, ainsi que les principales caractéristiques des canaux OFDM sélectifs en fréquence. Afin de pouvoir mesurer les performances des codes LDPC sur de tels canaux soit l'écart entre le seuil des codes LDPC et la limite de Shannon, nous avons établi le calcul de la capacité des canaux OFDM sélectifs en fréquence, alimentés par des symboles MAQ.

Le seconde partie de ce chapitre situe le cadre de transmissions OFDM sur un canal statique dans le temps. Étant donné qu'il est possible dans ces conditions d'améliorer les performances

en adaptant le débit binaire à l'intérieur de chaque sous-porteuse en fonction de son RSB, nous avons présenté les algorithmes d'allocation réalisant cette opération.

Deuxième partie

Optimisation des codes LDPC pour les transmissions OFDM

Chapitre 3

Analyse asymptotique des codes LDPC pour les transmissions multi-porteuses

Ce chapitre a pour objectif de développer un outil permettant de déterminer les performances des codes LDPC lorsqu'ils sont utilisés pour des transmissions multi-porteuses. Nous avons rappelé lors du premier chapitre qu'il était possible d'évaluer uniquement le comportement asymptotique des codes LDPC en fonction de leurs paramètres. Pour ce faire, nous avons vu qu'il suffisait de suivre l'évolution des densités des messages se propageant sur le graphe factoriel au cours des itérations de propagation de croyance. Cependant, l'utilisation d'une telle méthode requiert le respect de certaines conditions telle que la *condition de symétrie* des messages alimentant le décodeur ainsi que leur indépendance.

En début de ce chapitre nous étudierons les propriétés statistiques des log-rapports de vraisemblance des messages alimentant le décodeur LDPC pour des symboles MAQ provenant d'un canal OFDM sélectif en fréquence (Cf. section 3.1). Après avoir montré que ces log-rapports de vraisemblance ne remplissaient pas toutes les conditions requises afin de pouvoir réaliser directement l'analyse de convergence des codes LDPC par évolution de densité nous présenterons les différents procédés mis en place afin de la rendre possible. Pour finir, nous simplifierons cette analyse par évolution de densité sur le canal OFDM en effectuant une approximation des densités de probabilité par des densités Gaussiennes (Cf. section 3.2).

3.1 Modélisation des messages alimentant le décodeur

Avant de considérer l'analyse par évolution de densité du comportement des codes LDPC pour les transmissions OFDM, il est nécessaire d'effectuer au préalable une étude des messages alimentant le décodeur. Cette étude aura pour objet de vérifier les conditions nécessaires et suffisantes requises pour l'analyse par évolution de densité dans le cadre de transmission sur un canal OFDM sélectif en fréquence alimenté par des symboles MAQ-4 et MAQ-M ($M > 4$). Nous distinguerons l'étude de la constellation MAQ-4 de celles de tailles plus importantes car la constellation MAQ-4 est un cas particulier dont les propriétés diffèrent d'une MAQ-M ($M > 4$). Dans ce chapitre nous considérerons le cas idéal où le canal est parfaitement connu au récepteur.

3.1.1 Modèle des messages pour une MAQ-4

3.1.1.1 Condition de Symétrie

Comme il a été établi dans le chapitre 2 (Cf. équation 2.5), le signal alimentant le décodeur R_k s'exprime :

$$\begin{aligned} R_k &= K_k \cdot Y_k \\ &= K_k \cdot H_k \cdot X_k + K_k \cdot N_k \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous considérons tout d'abord le cas où tous les symboles sont issus d'une constellation MAQ-4 où nous notons C_{2k} et C_{2k+1} les bits participant à la construction du symbole X_k étiqueté par un code de Gray. D'après l'équation (3.1), il est aisé de constater que le signal égalisé vérifie la condition de *symétrie* définie par (1.10). Soit pour le premier bit C_{2k} dont l'information est contenue sur la partie réelle du symbole reçu :

$$\begin{aligned} p(Re\{R_k\} | C_{2k} = 0) &= p(Re\{R_k\} | Re\{X_k\} = -1) \\ &= p(-Re\{R_k\} | Re\{X_k\} = 1) \\ &= p(-Re\{R_k\} | C_{2k} = 1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

En terme de log-rapport de vraisemblance, cette symétrie se traduit par l'obtention d'une fonction impaire :

$$L(Re\{R_k\}) = \frac{p(Re\{R_k\} | C_{2k} = 0)}{p(Re\{R_k\} | C_{2k} = 1)} = \frac{p(-Re\{R_k\} | C_{2k} = 1)}{p(-Re\{R_k\} | C_{2k} = 0)} = -L(-Re\{R_k\}), \quad (3.3)$$

De la même façon pour le second bit C_{2k+1} nous avons :

$$p(Im\{R_k\} | C_{2k+1} = 0) = p(-Im\{R_k\} | C_{2k+1} = 1), \quad (3.4)$$

ainsi que,

$$L(Im\{R_k\}) = -L(-Im\{R_k\}). \quad (3.5)$$

Le respect de la condition de *symétrie* implique d'une part que la probabilité d'erreur est indépendante du mot de code utilisé permettant ainsi, d'employer sans perte de généralité uniquement le mot de code $\underline{0}$. D'autre part, cette condition de symétrie entraîne la *consistance* (définie par l'équation (1.18)) des d.d.p. des log-rapports de vraisemblance alimentant le décodeur [70] permettant ainsi d'obtenir une probabilité d'erreur décroissante (au sens large) au cours des itérations.

3.1.1.2 Distribution des vraisemblances

Les messages utilisés lors du décodage par l'algorithme de propagation de croyance sont les log-rapports de vraisemblance de chacun des bits C_{2k} et C_{2k+1} notés respectivement u_{02k} et u_{02k+1} , $\forall k = 1, \dots, N_{sp}$. Ces messages ont pour expression :

$$\begin{aligned} u_{02k} &= \log \frac{p(R_k | C_{2k} = 0)}{p(R_k | C_{2k} = 1)} = \log \frac{\sum_{X_k/C_{2k}=0} p(R_k | X_k)}{\sum_{X_k/C_{2k}=1} p(R_k | X_k)} \\ &= \frac{4Re\{R_k K_k^* H_k^*\}}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \\ &= \frac{4}{\sigma_b^2} Re\{Y_k H_k^*\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 u_{02k+1} &= \log \frac{p(R_k | C_{2k+1} = 0)}{p(R_k | C_{2k+1} = 1)} = \log \frac{\sum_{X_k/C_{2k+1}=0} p(R_k | X_k)}{\sum_{X_k/C_{2k+1}=1} p(R_k | X_k)} \\
 &= \frac{4 \operatorname{Im}\{R_k K_k^* H_k^*\}}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \\
 &= \frac{4}{\sigma_b^2} \operatorname{Im}\{Y_k H_k^*\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Remarque 7 Il est intéressant de noter que les vraisemblances décrites par les équations (3.6) et (3.7) sont indépendantes des coefficients de l'égaliseur et donc du choix de celui-ci (ZF, MMSE, MAP).

La symétrie, du bloc constitué du canal OFDM sélectif en fréquence et de la mise sur constellation MAQ-4, implique que la d.d.p. des log-rapports de vraisemblance conditionnés par l'émission d'un 0 est symétrique de celle des log-rapports de vraisemblance conditionnés par l'émission d'un 1, soit :

$$p(u_{02k} | C_{2k} = 0) = p(-u_{02k} | C_{2k} = 1) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}, \quad \text{et} \tag{3.8}$$

$$p(u_{02k+1} | C_{2k+1} = 0) = p(-u_{02k+1} | C_{2k+1} = 1) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \tag{3.9}$$

Grâce à cette symétrie des d.d.p. des messages initialisant le décodeur LDPC, pour effectuer l'analyse par évolution de densité, on peut utiliser le mot de code $\underline{0}$ afin de déterminer la distribution des messages u_{02k} et u_{02k+1} . Ceci correspond pour une constellation MAQ-4 à l'utilisation du symbole $X_k = 1 + j$. Dans ces conditions, les log-rapports de vraisemblance s'écrivent :

$$u_{02k} = \frac{4|H_k|^2}{\sigma_b^2} + \frac{4}{\sigma_b^2} \operatorname{Re}\{H_k^* N_k\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \tag{3.10}$$

$$u_{02k+1} = \frac{4|H_k|^2}{\sigma_b^2} + \frac{4}{\sigma_b^2} \operatorname{Im}\{H_k^* N_k\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \tag{3.11}$$

Ainsi, les messages u_{02k} et u_{02k+1} à l'entrée du décodeur sont distribués suivant une densité Gaussienne consistante, soit :

$$f_{u_{02k}} = f_{u_{02k+1}} = f_{u_{0k}} = \mathcal{N}\left(\frac{4|H_k|^2}{\sigma_b^2}, \frac{8|H_k|^2}{\sigma_b^2}\right) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \tag{3.12}$$

3.1.2 Modèle des messages pour une MAQ-16

Il est usuel dans les transmissions OFDM d'utiliser des constellations d'efficacité spectrale supérieure à celle de la MAQ-4 et ce, spécialement dans les systèmes avec allocation de bits. Dans cette section, nous analyserons le comportement asymptotique des codes LDPC pour les transmissions OFDM utilisant des symboles MAQ- 2^m ($m > 2$). Cependant, l'application de l'évolution de densité pour ce schéma de transmission n'est pas triviale puisqu'en général les canaux à entrée binaire équivalents (soit l'ensemble constitué du canal de propagation, du modulateur OFDM ainsi que de la mise sur constellation tel que représenté sur la figure 3.1) ne sont pas nécessairement symétriques. Ainsi, après avoir mis en évidence ce problème de symétrie nous présenterons une méthode permettant d'y remédier.

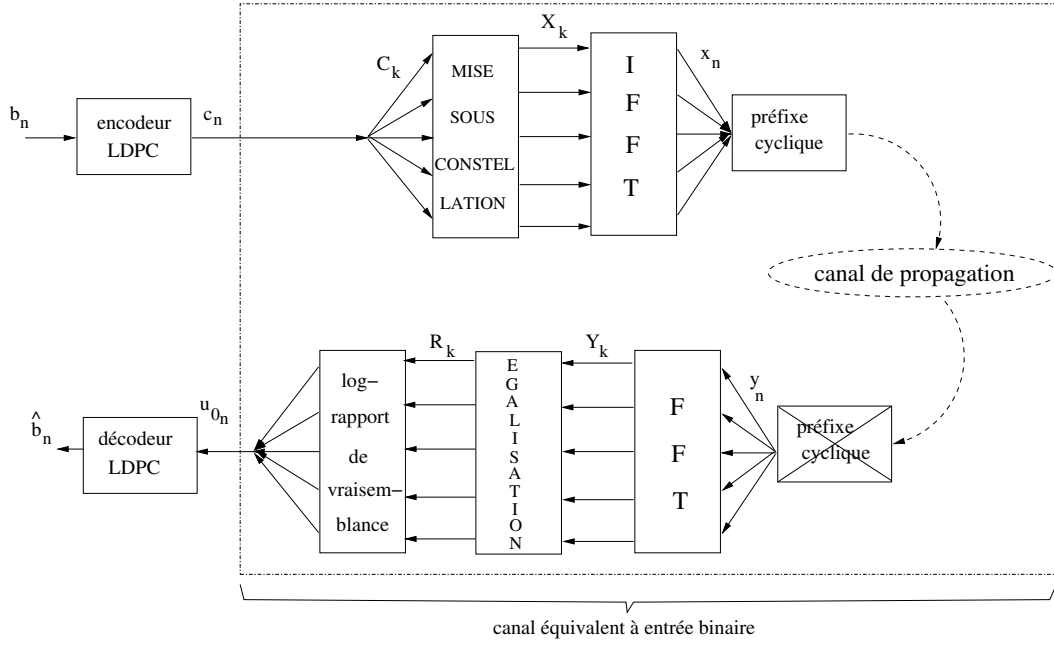


FIG. 3.1 – Illustration du canal équivalent à entrée binaire.

3.1.2.1 Etude de la symétrie de message provenant d'une MAQ-16

Pour illustrer nos propos, nous avons choisi d'utiliser l'exemple d'une constellation MAQ-16 représentée sur la figure 3.2 dont les symboles sont étiquetés par un code de Gray. Dans le cadre d'une égalisation parfaite par ZF ou MMSE, c'est-à-dire lorsque la quantité $H_k K_k$ est réelle, les log-rapports de vraisemblance des bits C_{4k} , C_{4k+1} , C_{4k+2} et C_{4k+3} constituant le symbole X_k sont donnés par les relations suivantes :

$$U_{04k} = \log \frac{p(R_k | C_{4k} = 0)}{p(R_k | C_{4k} = 1)} = \log \frac{\sum_{X_k/C_{4k}=0} p(R_k | X_k)}{\sum_{X_k/C_{4k}=1} p(R_k | X_k)} \quad (3.13)$$

$$= \log \left(\frac{\exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} - \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} + \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)}{\exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} - 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} + 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)} \right) \quad (3.14)$$

$$U_{04k+1} = \log \left(\frac{\exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} - \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} - 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)}{\exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} + \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} + 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)} \right), \quad (3.14)$$

$$U_{04k+2} = \log \left(\frac{\exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} + 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} - 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)}{\exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} + \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Im}\{R_k\} - \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)} \right), \quad (3.15)$$

$$U_{04k+3} = \log \left(\frac{\exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} + \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} + 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)}{\exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} - \text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right) + \exp \left(-\frac{(\text{Re}\{R_k\} - 3\text{Re}\{H_k K_k\})^2}{|K_k|^2 \sigma_b^2} \right)} \right). \quad (3.16)$$

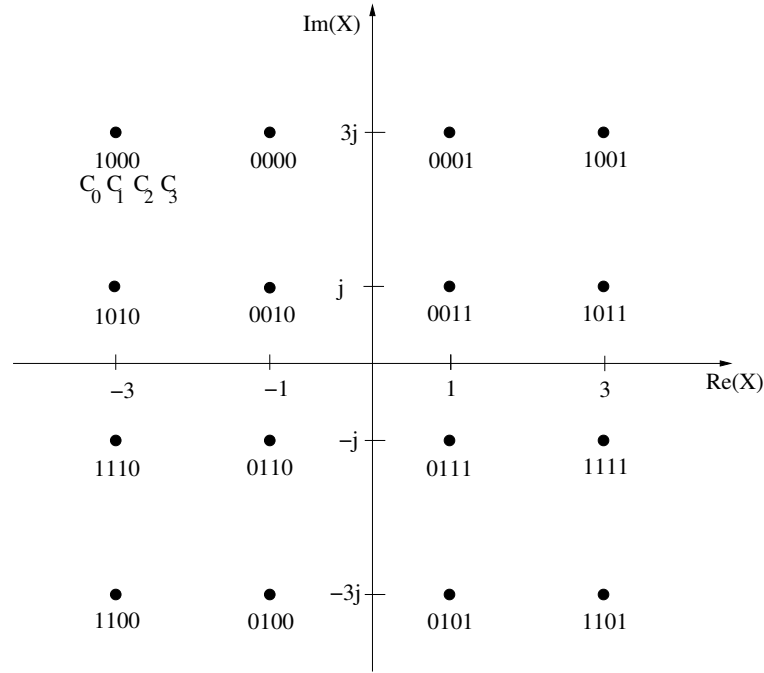


FIG. 3.2 – Constellation MAQ-16 étiquetée par un code de Gray.

Remarque 8 Les expressions des log-rapports de vraisemblances ci-dessus sont uniquement valable pour un étiquetage de Gray. $\square$

Nous avons montré (Cf. équations 3.3 et 3.5) que la symétrie d'un canal à entrée binaire se traduisait par une fonction représentant le log-rapport de vraisemblance impaire. Au regard des équations ci-dessus, il est facile de constater que pour une MAQ-16 étiquetée par un code de Gray seulement deux des quatres vraisemblances le sont :

$$\begin{aligned} U_{04k}(Re\{R_k\}) &= U_{04k}(-Re\{R_k\}), \\ U_{04k+1}(Im\{R_k\}) &= -U_{04k+1}(-Im\{R_k\}), \\ U_{04k+2}(Im\{R_k\}) &= U_{04k+2}(-Im\{R_k\}), \text{ et} \\ U_{04k+3}(Re\{R_k\}) &= -U_{04k+3}(-Re\{R_k\}). \end{aligned}$$

Par conséquent, il ne sera pas possible d'utiliser directement les d.d.p. de ces messages pour effectuer l'analyse par évolution de densité. En effet, l'utilisation du mot de code $\underline{0}$ ne peut être utilisé en toute généralité car pour les bits transmis sur les "canaux" non symétriques soient C_{4k} et C_{4k+2} la d.d.p. de leur log-rapport de vraisemblance conditionnée par l'émission d'un 0 n'est pas symétrique à celle conditionnée par l'envoi d'un 1.

Observons les d.d.p. des log-rapports de vraisemblance de chacun des quatres bits. Lorsque la symétrie est vérifiée, ce qui est le cas des canaux équivalents empruntés par les bits C_{4k+1} et C_{4k+3} , la d.d.p. du log-rapport de vraisemblance lorsque 0 est émis est symétrique à celle obtenue lorsque 1 est émis. Les bits C_{4k+1} et C_{4k+3} présentant exactement les mêmes densités de log-rapport de vraisemblance, nous avons illustré sur la figure 3.3 ce phénomène de symétrie pour le bit C_{4k+1} . Nous avons alors représenté la d.d.p. $p(u_{04k+1}|C_{4k+1} = 0)$ de u_{04k+1} lorsqu'un 0 est transmit soit au niveau du symbole $Im\{X_k\} = 1$ (partie droite de la figure) et $Im\{X_k\} = 3$

(partie gauche), et lorsque un 1 est émis soit $Im\{X_k\} = -1$ (partie droite) et $Im\{X_k\} = -3$ (partie gauche). Nous pouvons observer que nous avons bien la relation de symétrie suivante :

$$p(u_{04k+1}|C_{4k+1} = 0) = p(-u_{04k+1}|C_{4k+1} = 1) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (3.17)$$

Cette relation est également valable pour le bit C_{4k+3} .

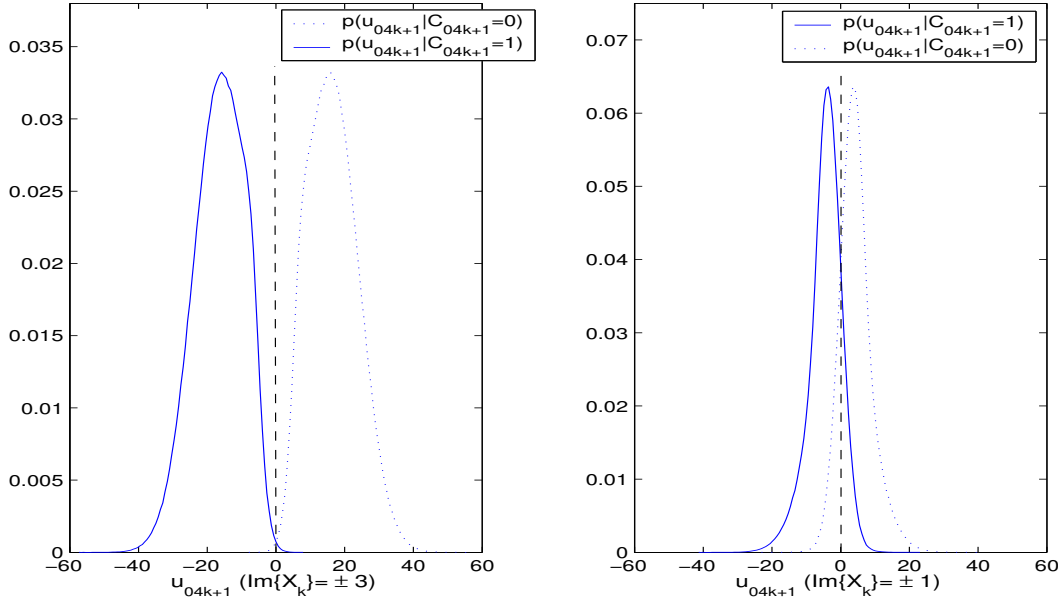


FIG. 3.3 – Sur la figure de gauche nous avons représenté la d.d.p. du message u_{04k+1} pour $Im\{X_k\} = 1$ soit $C_{04k+1} = 0$ ainsi que pour $Im\{X_k\} = -1$ soit $C_{04k+1} = 1$. Sur la figure de droite est représentée la d.d.p. du message u_{04k+1} pour $Im\{X_k\} = 3$ soit $C_{04k+1} = 0$ ainsi que pour $Im\{X_k\} = -3$ soit $C_{04k+1} = 1$.

Les d.d.p. des log-rapports de vraisemblance associées aux bits C_{4k} et C_{4k+2} émis sur les "canaux" non symétriques sont représentées sur la figure 3.4. Comme attendu, nous observons que les densités $p(u_{04k}|C_{4k})$ et $p(u_{04k+2}|C_{4k+2})$ ne sont pas symétriques impliquant ainsi, l'impossibilité d'utiliser le mot de code tout 0 lors de l'analyse par évolution de densité :

$$p(u_{04k}|C_{4k} = 0) \neq p(-u_{04k}|C_{4k} = 1) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (3.18)$$

Ceci est également valable pour le bit C_{4k+2} .

La résolution du problème de symétrie rencontré lors de l'utilisation de constellations non binaires a très récemment été traitée en insérant un outil analytique nommé adaptateur de canal i.i.d. [44]. L'intérêt d'utiliser un tel outil est de forcer la symétrie et ainsi de pouvoir utiliser sans perte de généralité le mot de code $\underline{0}$ lors de l'analyse par évolution de densité. L'adaptateur de canal i.i.d. se compose de trois modules. Le premier est une source générant une séquence binaire pseudo aléatoire i.i.d. z_p , $p = 1, \dots, N_{sp} \cdot N_b$ (N_b étant le nombre de bits constituant un symbole). Le second est un additionneur modulo 2 réalisant l'opération : $d_p = c_p \oplus z_p$ où $\underline{c}$ représente le mot de code. Le dernier module consiste à ajuster le signe des log-rapports de vraisemblance alimentant le décodeur LDPC tel que $u_{0s,p} = u_{0,p}(1 - 2z_p)$ soit en d'autres termes $u_{0s,p} = u_{0,p}$ si $z_p = 0$ et $u_{0s,p} = -u_{0,p}$ si $z_p = 1$. L'insertion de ces trois modules dans la chaîne OFDM est

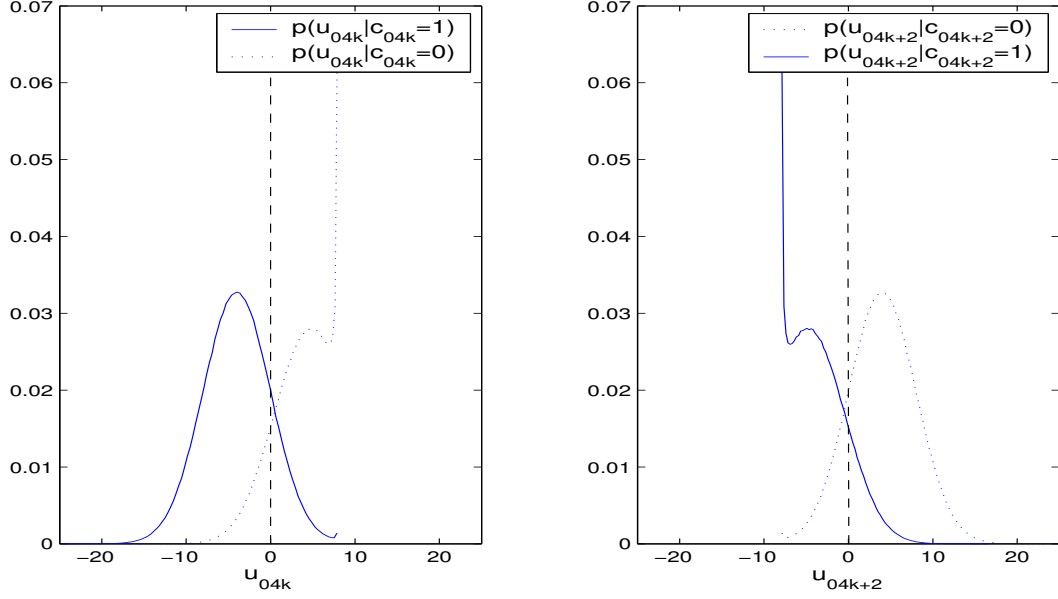


FIG. 3.4 – Sur la figure de gauche nous avons représenté les d.d.p. du message u_{04k} pour $C_{04k} = 0$ ainsi que pour $C_{04k} = 1$. Sur la figure de droite est représenté les d.d.p. du message u_{04k+2} pour $C_{04k+2} = 0$ ainsi que pour $C_{04k+2} = 1$.

représentée sur la figure 3.5. Avec cet adaptateur de canal i.i.d., Hou *et al.* ont prouvé que la condition de symétrie est respectée, soit :

$$p(u_{0s,p} | C_p = 0) = p(-u_{0s,p} | C_p = 1) \quad \forall p = 1, \dots, N_{sp} \cdot N_b. \quad (3.19)$$

Discutons des phénomènes engendrés par cet adaptateur pour le mot de code $\underline{c} = \underline{0}$. Le mot de code étant nul, la séquence de bits permettant de construire les symboles à émettre n'est alors rien d'autre que celle provenant de la source binaire i.i.d. z_p , $p = 1, \dots, N_{sp} \cdot N_b$. Ainsi, malgré l'utilisation du mot de code tout zéro, chaque symbole de la constellation sera sollicité. Au niveau du récepteur, le calcul des log-rapports de vraisemblance $u_{0,p}$, $p = 1, \dots, N_{sp} \cdot N_b$ est classiquement effectué. Afin de se ramener à des log-rapports de vraisemblance $u_{0s,p}$ correspondant au mot de code $\underline{0}$ le signe de ces vraisemblances $u_{0,p}$ est alors inversé si le bit d_p permettant la construction du symbole est égale à 1 (ou plutôt si $z_p = 1$).

Par conséquent, si on utilise un code LDPC sur le canal symétrique résultant de l'utilisation de cet adaptateur de canal i.i.d., la probabilité d'erreur devient indépendante du mot de code utilisé simplifiant alors grandement l'analyse du comportement asymptotique des codes LDPC par évolution de densité (car permettant l'utilisation du mot de code $\underline{0}$). L'expression de la densité du log-rapport de vraisemblance u_{04k+p} du bit C_{04k+p} devient alors :

$$f_{u_{04k+p}} = \frac{1}{16} \left(\sum_{X_{4k+p}/D_{4k+p}=0} p(u_{04k+p} | X_{4k+p}) + \sum_{X_{4k+p}/D_{4k+p}=1} p(-u_{04k+p} | X_{4k+p}) \right) \quad \forall p = 0, \dots, 3. \quad (3.20)$$

Ainsi, la densité de mélange des messages alimentant le décodeur LDPC s'exprime par :

$$f_{u_{0k}} = \frac{1}{4} \sum_{p=0}^3 f_{u_{04k+p}}. \quad (3.21)$$

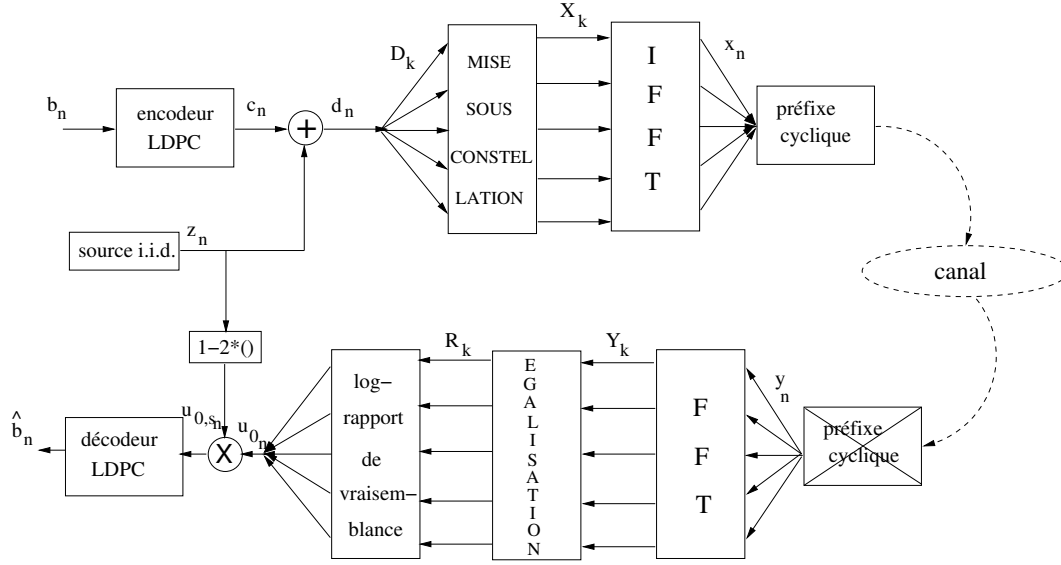


FIG. 3.5 – Chaîne de transmission COFDM complétée de l'adaptateur de canal i.i.d..

Étant donné que chacune de ses 64 densités doit être estimée par simulations de Monte-Carlo, cette étape de l'évolution de densité peut alors s'avérer être d'une complexité importante. Cependant, en exploitant les propriétés géométriques de la MAQ-16 étiquetée par un code de Gray et en se basant sur l'étude des densités initiales de la MAQ-16 réalisée ci-dessus, on peut facilement se rendre compte que ce nombre de densités caractéristiques des messages initiaux de cette constellation peut être réduit à quatre. En effet, si on note par $f_{u_{0p}}^{(b_p:s)}(u_{0p}) = p(u_{0p}|C_p = b_p(s))$ la d.d.p. du log-rapport de vraisemblance u_{0p} lorsque le symbole émis défini par s est associé à l'émission d'un bit de valeur b_p ($= 0$ ou 1) et d'après les équations (3.13-3.16) ces densités représentatives sont alors pour le mot de code $\underline{0}$:

$$\begin{aligned} f_{u_{04k+1}}^{(0:Im\{X_k\}=1)}(u_{04k+1}) &= f_{u_{04k+3}}^{(0:Re\{X_k\}=-1)}(u_{04k+3}), \\ f_{u_{04k+1}}^{(0:Im\{X_k\}=3)}(u_{04k+1}) &= f_{u_{04k+3}}^{(0:Re\{X_k\}=-3)}(u_{04k+3}), \\ f_{u_{04k}}^{(0:Re\{X_k\}=1)}(u_{04k}) &= f_{u_{04k}}^{(0:Re\{X_k\}=-1)}(u_{04k}), \\ f_{u_{04k+2}}^{(0:Im\{X_k\}=3)}(u_{04k+2}) &= f_{u_{04k+2}}^{(0:Im\{X_k\}=-3)}(u_{04k+2}), \end{aligned}$$

Notons que toutes ces densités initiales sont bien symétriques par rapport à l'émission d'un 1 (Cf. figure 3.6). Ainsi, les messages initiaux provenant d'une MAQ-16 auront pour d.d.p. le mélange de densités défini par :

$$f_{u_{0k}}^{(0)} = \frac{1}{4} f_{u_{04k}}^{(0:Re\{X_k\}=\pm 1)} + \frac{1}{4} f_{u_{04k+1}}^{(0:Im\{X_k\}=1)} + \frac{1}{4} f_{u_{04k+3}}^{(0:Re\{X_k\}=-3)} + \frac{1}{4} f_{u_{04k+2}}^{(0:Im\{X_k\}=\pm 3)}, \quad (3.22)$$

et sera noté,

$$f_{u_{0k}}^{(0)} = \frac{1}{N_d(MAQ-16)} \sum_{p=1}^{N_d(MAQ-16)} f_{u_{0k,p}}^{MAQ-16}(u_{0k}), \quad (3.23)$$

où $N_d(MAQ-16)$ représente le nombre de densités requises pour la construction de la densité représentative d'une MAQ-16 (soit 4). La figure 3.6 illustre les d.d.p. des log-rapports de vraisemblances représentatives lors de l'utilisation du symbole MAQ-16 dans le cas d'un bit émis 0

(figure de gauche) et dans le cas d'un bit émis 1 (figure de droite). Ces d.d.p. ont été obtenues par simulation de Monte-Carlo.

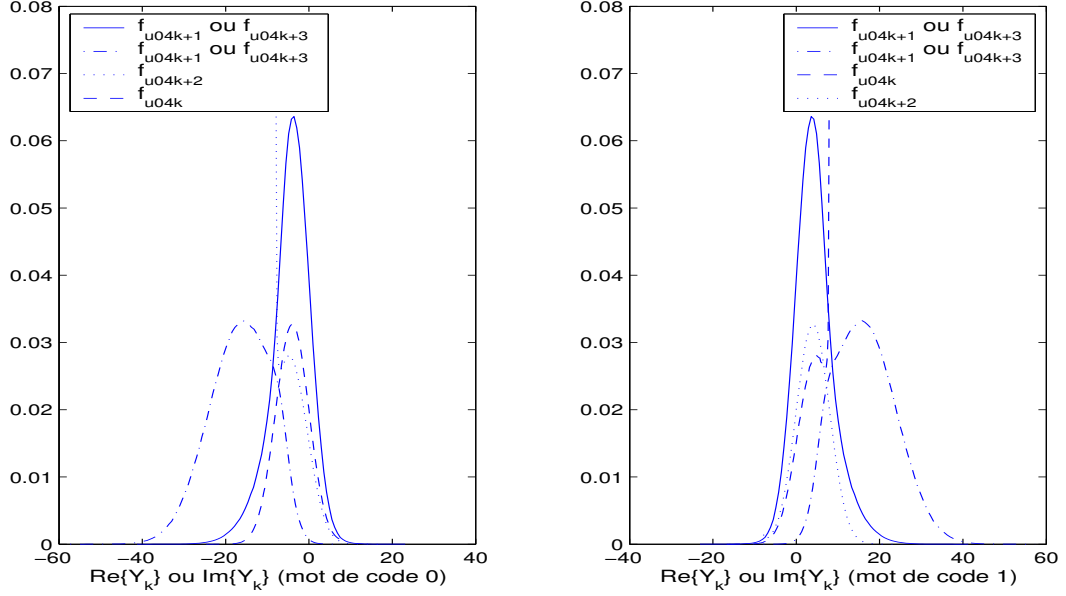


FIG. 3.6 – D.d.p. des log-rapports de vraisemblance associés aux quatre bits considérés pour l'émission de 0 (partie gauche) et pour l'émission de 1 (partie droite).

3.1.3 Généralisation à une MAQ-M

Ce type d'étude peut facilement être reprise pour établir les densités des log-rapports de vraisemblance de constellations de tailles supérieures étiquetées avec n'importe quel code. Ainsi, la densité de mélange des messages alimentant le décodeur LDPC provenant d'une constellation MAQ- 2^G s'exprimera par :

$$f_{u_{0k}} = \frac{1}{G} \sum_{g=0}^{G-1} f_{u_{0Gk+g}}, \quad (3.24)$$

où $f_{u_{0Gk+g}}$ représente la densité initiale du $g - 1^{i\text{ème}}$ bit avec pour expression :

$$f_{u_{0Gk+g}} = \frac{1}{2^G} \left(\sum_{X_{Gk+g}/D_{Gk+g}=0} p(u_{0Gk+g}|X_{Gk+g}) + \sum_{X_{Gk+g}/D_{Gk+g}=1} p(-u_{0Gk+g}|X_{Gk+g}) \right) \quad \forall g = 0, \dots, G-1. \quad (3.25)$$

Cette écriture de la densité initiale nécessite alors l'estimation de $G2^G$ densités par simulations de Monte-Carlo. Cependant, dans le cadre d'un étiquetage par un code de Gray, nous avons montré dans la section précédente que ce nombre de densités pouvait être largement réduit. Ainsi, dans la suite, nous noterons la d.d.p. des messages initiaux en sortie du canal à entrée binaire équivalent par :

$$f_{u_{0k}}^{(0)} = \frac{1}{N_d(Const)} \sum_{p=1}^{N_d(Const)} f_{u_{0k},p}^{Const}(u_{0k}), \quad (3.26)$$

où $Const$ représente la constellation utilisée et $N_d(Const)$ le nombre de d.d.p. requis pour construire la d.d.p. représentative des messages initiaux, soit : $N_d(MAQ - 2^G) = G2^{(G-4)/2}$.

3.2 Analyse asymptotique des codes LDPC pour des transmissions OFDM

Après avoir montré dans la section précédente que sous certaines conditions le canal OFDM sélectif en fréquence associé à la mise sur constellation de type MAQ pouvait s'apparenter à un ensemble de canaux à entrée binaire symétriques, nous allons dans cette section étendre l'analyse du comportement asymptotique des codes LDPC décrit dans le chapitre 1 aux systèmes OFDM.

3.2.1 Approximation par fonction étagée d'un canal OFDM

Dans le premier chapitre, nous avons vu que l'analyse du comportement des codes LDPC par évolution de densité n'était réalisable qu'à condition de supposer que tous les messages se propageant dans le graphe lors de la propagation de croyance soient indépendants. Cette supposition est valable uniquement dans le cas où le graphe factoriel représentant le code LDPC est un arbre c'est-à-dire à la condition que la taille du mot de code soit infinie. Cette condition nécessite donc d'utiliser un nombre infini de sous-porteuses et ainsi, par opposition au canal plat BABG (pour lequel tous les messages alimentant le décodeur présentent les mêmes propriétés statistiques), de définir un nombre infini de messages provenant du canal. Ceci n'étant bien sûr pas réalisable, nous avons dû utiliser une approximation de la réponse fréquentielle du canal dispersif par une fonction étagée.

Définition 3 Fonction étagée

On appelle fonction étagée toute fonction définie par une combinaison linéaire de fonctions indicatrices. Ainsi, f est étagée si il existe des ensembles mesurables $\mathcal{A}_k$ et des scalaires $\tilde{H}_k$ tel que

$$S_{N_p}(\nu) = \sum_{k=1}^{N_p} \tilde{H}_k \mathbb{1}_{\mathcal{A}_k}(\nu).$$

Ce type de fonction est bien adapté à notre problème d'approximation de la fonction de transfert d'un canal sélectif en fréquence car elle permet de réduire considérablement le nombre de paramètres définissant la fonction de transfert avec précision. De plus, contrairement à une fonction en escalier, une fonction étagée définit chaque palier par le couple $(\tilde{H}_k, \mathcal{A}_k)$ de manière à effectuer une sous-division régulière de l'espace image de la fonction approximée; permettant ainsi une approximation de très bonne qualité.

Dans le cadre de l'approximation par une fonction étagée $S_{N_p}(\nu)$ du module de la fonction de transfert $|H(\nu)|$ d'un canal sélectif en fréquence dont le minimum est noté m_H et le maximum M_H , nous définissons le couple canonique $((\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \dots, \tilde{H}_{N_p}), (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{N_p}))$ par :

$$\tilde{H}_k = m_H + \delta_k(M_H - m_H), \quad \delta_k \in [0, 1[, \quad \forall k = 1, \dots, N_p,$$

$$\mathcal{A}_k = \left\{ \nu / S_{N_p}(\nu) \in [m_H + \delta_k(M_H - m_H), m_H + \delta_{k+1}(M_H - m_H) \right\} \quad \forall k = 1, \dots, N_p,$$

où la quantité $(\delta_{k+1} - \delta_k)(M_H - m_H)$ représente la hauteur d'un des paliers de la fonction étagée. En ce qui concerne le choix de δ_k , trois options sont possibles :

- $\delta_k = \frac{k-1}{N_p}$ et dans ce cas il est aisé de montrer en utilisant le théorème des "gendarmes" que la suite converge simplement vers $|H(\nu)|$ par valeurs inférieures.
- $\delta_k = \frac{k}{N_p}$ et dans ce cas on dit que la suite converge simplement vers $|H(\nu)|$ par valeurs supérieures.
- $\delta_k = \xi \frac{k-1}{N_p} + (1 - \xi) \frac{k}{N_p}$, pour laquelle nous avons également une convergence simple vers $|H(\nu)|$ par valeurs "intermédiaires".

Étant donné qu'avec le paramètre de "réglage" ξ la troisième option généralise les deux premières, nous avons utilisé cette option en choisissant ξ de manière à conserver l'énergie entre la fonction étagée $S_{N_p}(\nu)$ et la fonction de transfert dont on effectue l'approximation. Nous avons représenté sur la figure 3.7 la fonction de transfert d'un canal sélectif en fréquence ainsi, que son approximation par une fonction étagée comportant 20 paliers. Le choix du nombre de paliers que nous discuterons par la suite fait bien évidemment l'objet d'un compromis entre la précision de l'approximation et la complexité de calcul.

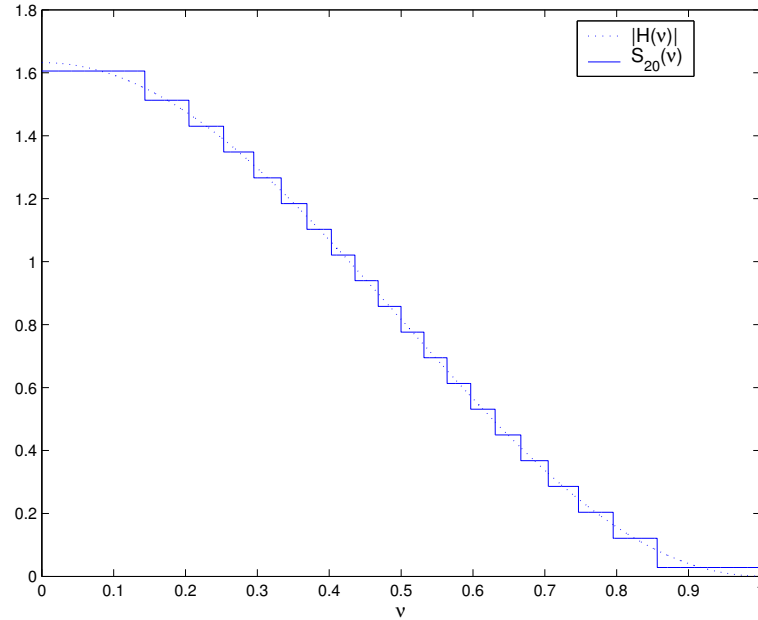


FIG. 3.7 – Approximation par une fonction étagée de la fonction de transfert d'un canal sélectif en fréquence.

Cette approximation par une fonction étagée réduit à un nombre fini le nombre de densité des messages venant du canal sélectif. Dans le cadre d'une transmission OFDM utilisant des symboles MAQ-4, la densité des messages alimentant les noeuds de données situés dans la bande du $k^{\text{ième}}$ palier d'amplitude $\tilde{H}_k$ s'écrit d'après l'équation (3.12) :

$$f_{u_{0k}}^{MAQ-4}(|\tilde{H}_k|^2) = \mathcal{N} \left(\frac{4|\tilde{H}_k|^2}{\sigma_b^2}, \frac{8|\tilde{H}_k|^2}{\sigma_b^2} \right) \quad \forall k = 1, \dots, N_p. \quad (3.27)$$

La largeur de cette $k^{\text{ième}}$ "sous-bande" est définie par $\mathcal{A}_k$ et a pour expression (où l'on suppose que la fonction dont on effectue l'approximation est monotone et que par conséquent A_k est convexe) :

$$\alpha_k = \sup_{\nu \in A_k} |\nu| - \inf_{\nu \in A_k} |\nu|. \quad (3.28)$$

De la même façon, on peut facilement étendre l'expression des d.d.p. des messages lorsque la constellation utilisée est une MAQ-16 ou une MAQ-64.

Remarque 9 *Il est bien évident que cette approximation par fonction étagée du spectre du canal conserve les propriétés de symétrie et donc de consistance que nous avons établies dans la précédente section pour chacune des densités des différents messages.*

Discutons de la précision de l'approximation par fonction étagée. Rappelons que l'objectif de cette approximation est d'obtenir un nombre fini de densités de messages alimentant le décodeur à partir d'un système OFDM présentant une infinité de sous-porteuses. Il est clair que pour obtenir une approximation des densités initiales de bonne qualité, il est nécessaire de choisir un nombre N_p de paliers important, cependant, un tel choix engendre une forte complexité de calcul.

Afin de déterminer le nombre de paliers nécessaire et suffisant nous avons été amenés à développer une routine basée sur l'évaluation de la distance de Kullback-Leibler [46]. L'utilisation de la distance de Kullback-Leibler est due au fait que l'on ne s'intéresse ici qu'à l'obtention d'une approximation des densités des log-rapports de vraisemblance et non pas à l'approximation de la fonction de transfert du canal. Notons par N_{pmax} le nombre de paliers maximum au-dessus duquel nous considérons que le gain en terme de précision de l'approximation devient négligeable. Ainsi pour déterminer le nombre de paliers suffisant n , nous évaluerons la distance de Kullback $D_K(f_{N_{pmax}}, f_n)$ [46] entre la densité $f_{N_{pmax}}$ des messages initiaux (tels que ceux définis par l'équation (3.27)) lorsque l'approximation est effectuée avec le nombre maximum N_{pmax} de paliers comparée avec celle obtenue avec n paliers f_n , où :

$$D_K(f_{N_{pmax}}, f_n) = \frac{1}{2} (D_1(f_{N_{pmax}}, f_n) + D_2(f_n, f_{N_{pmax}})),$$

avec :

$$D_1(f_{N_{pmax}}, f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{N_{pmax}}(x) \log \frac{f_{N_{pmax}}(x)}{f_n(x)} dx, \text{ et}$$

$$D_2(f_n, f_{N_{pmax}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \log \frac{f_n(x)}{f_{N_{pmax}}(x)} dx.$$

L'algorithme permettant de déterminer le nombre de paliers peut alors être implanté de la manière suivante :

- 1. Le nombre de paliers est initialisé à $n = 1$,
- 2. tant que la distance de Kullback $D_K(f_{N_{pmax}}, f_n) > \epsilon$: incrémenter n ,
- 3. le nombre de paliers nécessaire et suffisant pour obtenir une approximation des densités initiales est alors $N_p = n$,

où ϵ représente la valeur d'un seuil au-dessus duquel nous jugerons l'approximation non suffisante.

Sur la figure 3.8, nous avons représenté l'évolution de la distance de Kullback $D_K(f_{N_{pmax}}, f_n)$ en fonction du nombre de paliers n utilisés pour construire la densité f_n . Ces densités ont été construites à partir d'une constellation MAQ-4 et le nombre maximum de paliers est fixé à $N_{pmax} = 1000$. Les figures 3.8 et 3.9 représentent les densités $f_{N_{pmax}}$ et f_n pour différentes valeurs de n à savoir : 2 (Cf. 3.8), 10 et 100 (Cf. 3.9). Ainsi, nous pouvons observer que pour $N_p = 100$ soit $D_K(f_{N_{pmax}}, f_n)$ de l'ordre de 10^{-3} l'approximation est largement satisfaisante.

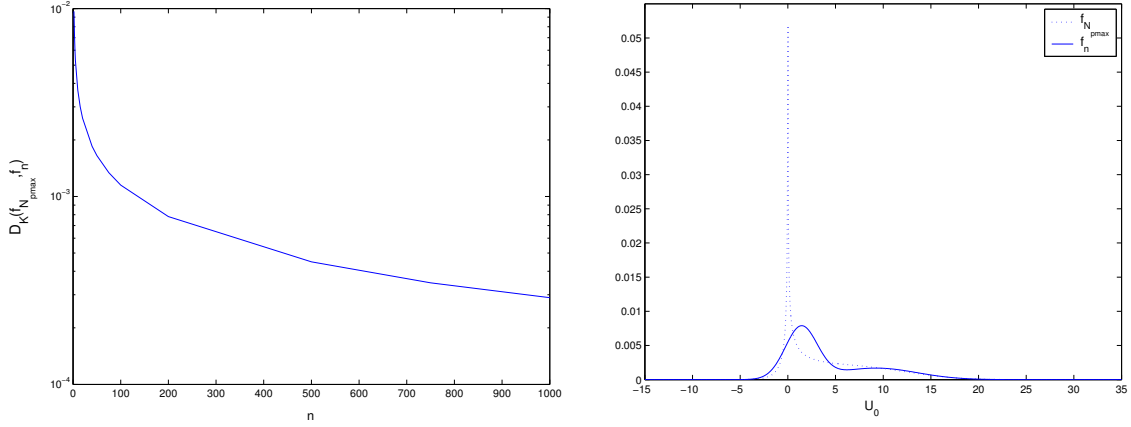


FIG. 3.8 – Evolution de la distance de Kullback $D_K(f_{N_{pmax}}, f_n)$ en fonction du nombre n de paliers utilisé pour effectuer l'approximation (figure de gauche). Représentation des densités $f_{N_{pmax}}$ et f_n pour $n = 2$ (figure de droite).

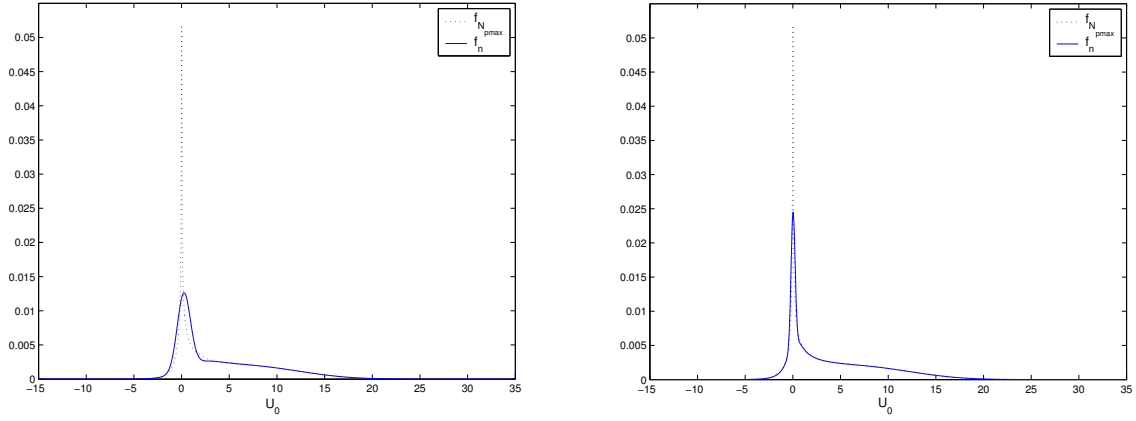


FIG. 3.9 – Représentation des densités $f_{N_{pmax}}$ et f_n pour $n = 10$ (figure de gauche) et pour $n = 100$ (figure de droite).

Remarque 10 L'approximation du spectre du canal par une fonction étagée indique le fait que la connaissance complète du canal n'est pas nécessaire pour évaluer les d.d.p. des messages alimentant le décodeur LDPC et ainsi pour effectuer l'optimisation de la structure des codes LDPC. Ce point est intéressant puisqu'en pratique la connaissance du canal est obtenue par l'émission d'une séquence d'apprentissage qui doit être la plus courte possible impliquant a fortiori une connaissance partielle de la réponse en fréquence du canal.

Fort de cette représentation de la fonction de transfert du canal, nous allons dans la prochaine section étudier le comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC lorsqu'ils sont utilisés pour des transmissions OFDM sur canal sélectif en fréquence.

3.2.2 Evolution de densité sur des canaux OFDM

L'objet de cette section est essentiellement de présenter une méthodologie permettant d'étudier le comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC à travers un canal OFDM sélectif en fréquence. Afin de pouvoir effectuer une telle analyse, nous avons montré dans

les sections précédentes que les messages provenant d'un canal OFDM alimenté par des symboles issus de constellations MAQ-M ($M = 2^{2k}$ avec $k = 1, 2, 3$.) étaient symétriques et qu'ainsi les densités résultantes étaient consistantes. L'évolution de densité étant valable uniquement pour un mot de code de taille infini, impliquant la nécessité d'utiliser une infinité de messages initiaux, nous avons alors ensuite établi un processus permettant de réduire par approximation le nombre de densité de ces messages avec précision. Le canal OFDM sélectif en fréquence étant, vu du décodeur, non stationnaire, nous utiliserons alors la paramétrisation des codes LDPC par le profil d'irrégularité présenté dans la section 1.1.2 du chapitre 1, soit $(\tilde{\lambda}, \underline{p}, \tilde{\rho})$, où nous rappelons que :

- $\tilde{\lambda} = [\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \dots, \tilde{\lambda}_i, \dots, \tilde{\lambda}_{t_{max}}]$ avec $\tilde{\lambda}_i$ la proportion des noeuds de données de degré i et t_{max} le taux de connexion maximum des noeuds de données,
- $\tilde{\rho} = [\tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3, \dots, \tilde{\rho}_j, \dots, \tilde{\rho}_{t_{rmax}}]$ avec $\tilde{\rho}_j$ la proportion des noeuds de contrôles de degré j et t_{rmax} le taux de connexion maximum des noeuds de contrôles,
- $\underline{p} = [p_2, p_3, \dots, p_i, \dots, p_{t_{max}}]$ avec p_i la position à l'intérieur du graphe factoriel de l'ensemble des noeuds de données de degré i .

Lors de l'utilisation de constellations non binaires, notre schéma de codage présente alors une structure intrinsèque de BICM-LDPC. Cependant, en raison principalement du fait que cette étude avec ce type de constellation correspond à un travail d'aboutissement de la thèse, l'étape correspondant au calcul des log-rapports de vraisemblance initiaux n'a été traitée que de façon bloc c'est-à-dire sans retour d'information *a priori* venant du code LDPC. Notons tout de même que dans les normes de communication actuelles basées sur une structure BICM, le passage symbole-bit n'est pas non plus réalisé de façon itérative. Conscients de ce manquement, l'étude de l'optimisation des codes LDPC pour une structure purement BICM fera l'objet de perspectives (à savoir que ce type d'étude n'a pas encore été réalisée pour le canal BABG).

3.2.2.1 Utilisation d'une unique constellation

Dans un premier temps, nous divisons le spectre du canal en $t_{max} - 1$ tranches en fonction du profil d'irrégularité comme il est décrit sur la figure 3.10. Chaque tranche correspond alors à la bande spectrale pour laquelle les bits de même taux de connexion sont émis. La bande B_i support des bits de degré i se trouvant à la position p_i du graphe factoriel et de largeur $\tilde{\lambda}_i^{(p_i)}$ est alors définie par :

$$B_i = [b_{p_i-1}; b_{p_i}] = \left[\sum_{j=k_1}^{k_i-1} \tilde{\lambda}_j^{(p_j)} ; \sum_{j=k_1}^{k_i} \tilde{\lambda}_j^{(p_j)} \right] \quad \forall i = 2, \dots, t_{max},$$

où k_i est fixé de manière à avoir $p_{k_i} = i$, $\forall i = 1, \dots, t_{max} - 1$. Ensuite, à l'intérieur de chaque bande B_i le spectre du canal subit une approximation par une fonction étagée telle que nous l'avons présentée dans la section précédente :

$$S_{i, N_p(i)}(\nu) = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \tilde{H}_{i,k} \cdot \mathbb{1}_{A_{i,k}}(\nu) \quad \forall \nu \in B_i, \quad (3.29)$$

avec $N_p(i)$ le nombre de paliers de la fonction étagée nécessaire pour obtenir une bonne approximation du spectre du canal dans la bande B_i .

Notons $\alpha_{i,k}$ la largeur normalisée de la sous-bande k située à l'intérieur de la bande B_i , soit :

$$\alpha_{i,k} = \frac{\sup_{\nu \in A_{i,k}} |\nu| - \inf_{\nu \in A_{i,k}} |\nu|}{\tilde{\lambda}_i^{(p_i)}}. \quad (3.30)$$

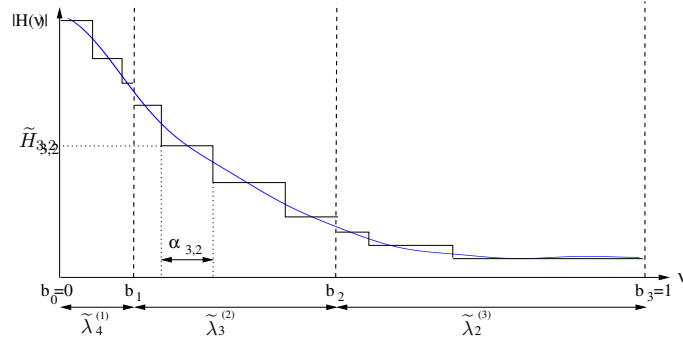


FIG. 3.10 – Approximation par une fonction étagée de la réponse en fréquence du canal.

Par conséquent, la densité du message observé correspondant à un bit de degré i est un mélange de densités pondérées par $\alpha_{i,k}$:

$$f_{u_0,i}^{Const} = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} f_{u_0}^{Const}(\tilde{H}_{i,k}), \quad (3.31)$$

où $f_{u_0}^{Const}(\tilde{H}_{i,k})$ représente la densité des vraisemblances pour une constellation quelconque que l'on a nommée *Const*. A ce point, il est bon de souligner que les densités composant le mélange sont fonctions des positions p_i des degrés dans le profil d'irrégularité. C'est cette dépendance qui transcrit la non-stationnarité du canal OFDM sélectif en fréquence (autrement, le canal OFDM vu du décodeur LDPC serait juste un canal stationnaire représenté par un mélange de l'ensemble des densités des messages observés).

Ainsi d'après l'équation (1.11), la mise à jour de la densité $f_{v_i}^{(l)}$ des messages se propageant par un noeud de donnée de degré i à l'itération l s'écrit :

$$\begin{aligned} f_{v_i}^{(l)} &= f_{u_0,i}^{Const} \otimes \left(f_u^{(l)}\right)^{\otimes(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} f_{u_0}^{Const}(\tilde{H}_{i,k}) \otimes \left(f_u^{(l)}\right)^{\otimes(i-1)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Remarque 11 L'implantation numérique d'une telle étape nécessite une quantification des messages se propageant dans le graphe. Notons respectivement $\bar{u} = Q_\Delta(u)$, $\bar{u}_0 = Q_\Delta(u_0)$ et $\bar{v} = Q_\Delta(v)$ les messages u , u_0 et v quantifiés par l'opérateur $Q_\Delta(\cdot)$ où Δ représente le pas de quantification (fonction du nombre de bits de quantification utilisé et de l'intervalle de définition des messages choisi). Ainsi, par exemple, $f_{\bar{u}_0}[k] = \Pr(\bar{u}_0 = k\Delta)$. L'étape de mise à jour de la densité $f_{\bar{v}_i}^{(l)}$ sera alors notée par :

$$f_{\bar{v}_i}^{(l)} = f_{\bar{u}_0,i}^{Const} \otimes \left(f_{\bar{u}}^{(l)}\right)^{\otimes(i-1)}. \quad (3.33)$$

Étant donné qu'une branche choisie aléatoirement dans le graphe est connectée à un noeud de donnée de degré i avec une probabilité λ_i , la d.d.p. globale des messages v mis à jour lors du *data pass* peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} f_v^{(l)} &= \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(p_i)} f_{v_i}^{(l)} \\ &= \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} f_{u_0}^{Const}(\tilde{H}_{i,k}) \otimes \left(f_u^{(l)}\right)^{\otimes(i-1)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La mise à jour de la densité $f_u^{(l)}$ lors du passage des messages par les noeuds de contrôles à l'itération l ne change pas par rapport au cas du canal BABG présenté dans le chapitre 1 et s'écrit toujours :

$$f_u^{(l)} = \Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{max}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \quad (3.35)$$

Remarque 12 *L'implantation numérique de cette étape n'étant pas triviale, nous allons en expliquer les points principaux et nous renvoyons pour de plus amples détails à la lecture des travaux de Chung et al. [19]. Dans un premier temps, nous devons introduire un opérateur $\mathcal{R}$ définissant la mise à jour des messages quantifiés par un noeud de contrôle de degré 2, soit d'après l'équation (1.6) :*

$$\mathcal{R}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = Q_{\Delta} \left(2 \tanh^{-1} \left(\tanh \frac{\bar{v}_1}{2} \tanh \frac{\bar{v}_2}{2} \right) \right). \quad (3.36)$$

Ainsi, en utilisant cet opérateur la mise à jour des messages à travers un noeud de contrôle de degré j peut être effectuée par vérifications successives de la parité entre deux messages, soit :

$$\bar{u}_p = \mathcal{R}(\bar{v}_1, \mathcal{R}(\bar{v}_2, \dots, \mathcal{R}(\bar{v}_{p-1}, \mathcal{R}(\bar{v}_{p+1}, \dots, \mathcal{R}(v_{j-1}, v_j) \dots)) \dots)). \quad (3.37)$$

Posons $c = \mathcal{R}(a, b)$, alors la d.d.p. f_c de c est relatée par :

$$f_c[k] = \sum_{(i,j): k\Delta = \mathcal{R}(i\Delta, j\Delta)} f_a[i] f_b[j]. \quad (3.38)$$

Par abus de notation, nous noterons cette relation par $f_c = \mathcal{R}(f_a, f_b)$. Les messages alimentant les noeuds de contrôles étant i.i.d., la densité $f_{u_j}^{(l)}$ des messages de sortie des noeuds de contrôles de degré j peut alors s'écrire :

$$f_{u_j}^{(l)} = \underbrace{\mathcal{R}(f_{\bar{v}}^{(l)}, \mathcal{R}(f_{\bar{v}}^{(l)}, \dots, \mathcal{R}(f_{\bar{v}}^{(l)}, f_{\bar{v}}^{(l)}) \dots))}_{j-1 \text{ termes}} = \mathcal{R}^{j-1}(f_{\bar{v}}^{(l)}). \quad (3.39)$$

L'intérêt principal de cette méthode d'implantation de l'évolution de densité réside dans le fait que l'opération définissant $\mathcal{R}$ (Cf. équation (3.36)) peut être effectuée en utilisant une table pré-calculée réduisant ainsi la complexité de calcul.

Pour une distribution donnée de l'irrégularité $(\underline{\lambda}, \rho, p)$, ainsi que pour un canal OFDM sélectif en fréquence défini par sa fonction de transfert $|\bar{H}(\nu)|$ et sous la condition d'indépendance des messages, l'évolution de densité des messages allant des noeuds de données aux noeuds de contrôles au cours des itérations l est décrite par la relation récurrente suivante :

$$f_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} f_{u_0}^{Const}(\tilde{H}_{i,k}) \otimes \left(\Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{max}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \right)^{\otimes(i-1)} \quad (3.40)$$

Ainsi, avec cette équation nous pouvons suivre à chaque itération de propagation de croyance le comportement exact des codes LDPC pour une taille de mot de code infinie sur un canal OFDM sélectif en fréquence. Le seuil de convergence est toujours défini par le plus faible RSB pour lequel la densité f_v des messages v allant des noeuds de données aux noeuds de contrôles tend vers Δ_{∞} quand $l \rightarrow \infty$ (Cf. section 1.3.1 du chapitre 1).

Notre étude s'est ensuite portée sur deux cas distincts. Le premier correspond à l'analyse du comportement asymptotique des codes LDPC sur un canal OFDM en utilisant une unique constellation complexe de base soit la MAQ-4 et le second à l'utilisation d'un ensemble de constellations MAQ-M ($M \leq 64$) provenant d'une allocation de bits telle qu'elle a été définie dans le chapitre 2.

Constellation unique MAQ-4

Si l'unique constellation utilisée est une MAQ-4, la densité des log-rapports de vraisemblance dans la bande B_i où sont émis les bits de degré i est un mélange de densités Gaussiennes défini par :

$$f_{u_{0,i}}^{MAQ-4} = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \mathcal{N} \left(\frac{4\tilde{H}_{i,k}^2}{\sigma_b^2}, \frac{8\tilde{H}_{i,k}^2}{\sigma_b^2} \right) \quad \forall i = 2, \dots, t_{cmax}. \quad (3.41)$$

Ainsi, le comportement asymptotique des codes LDPC sera caractérisé par l'équation suivante :

$$f_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} f_{u_{0,i}}^{MAQ-4}(\tilde{H}_{i,k}) \otimes \left(\Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \right)^{\otimes(i-1)} \quad (3.42)$$

Sur le tableau 3.1 nous avons indiqué les seuils de convergence de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 1/2$ modulés par une MAQ-4 et ce, pour deux canaux sélectifs en fréquence à savoir un canal ADSL typique et le canal Proakis B [67] dont les spectres d'amplitude sont représentés sur la figure 3.11. Notons que dans ces conditions la limite de Shannon du canal ADSL est $C_{ADSL,MAQ-4}(0.5) = 3.01$ dB et que celle du canal Proakis B est $C_{B,MAQ-4}(0.5) = 1.18$ dB. Nous pouvons tout d'abord constater que, comme dans le cas du canal BABG, les performances des codes se dégradent lorsque leur densité (définie par t_r) augmente. Cependant, l'évolution de cette dégradation dépend du canal considéré. En effet, nous pouvons observer que pour le code $(\infty, 3, 6)$ le seuil obtenu pour le canal Proakis B est comme attendu (au vue des limites de Shannon) inférieur à celui obtenu sur le canal ADSL alors que pour le code $(\infty, 4, 8)$ les valeurs des seuils sont inversées.

MAQ-4, R=1/2	canal ADSL (3.01 dB)		canal Proakis B (1.18 dB)	
code	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$
δ^* (dB)	4.93	5.77	4.48	5.94

TAB. 3.1 – Seuils de convergence obtenus par évolution de densité de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-4 est utilisée.

3.2.2.2 Constellation variable avec allocation de bits

Dans le chapitre 2, nous avons vu que pour certaines applications, le canal pouvait être considéré comme quasi statique dans le temps et connu de l'émetteur par voie de retour. Il devient alors possible d'améliorer les performances d'un tel système en exploitant la connaissance du RSB dans chaque sous-bande lors de la détermination du nombre de bits à émettre dans celles-ci. Une telle méthode nécessite donc d'utiliser différentes tailles de constellation. Ainsi, les symboles émis seront irrégulièrement connectés au graphe factoriel et cette irrégularité sera fonction du nombre de bits émis par ces différents symboles.

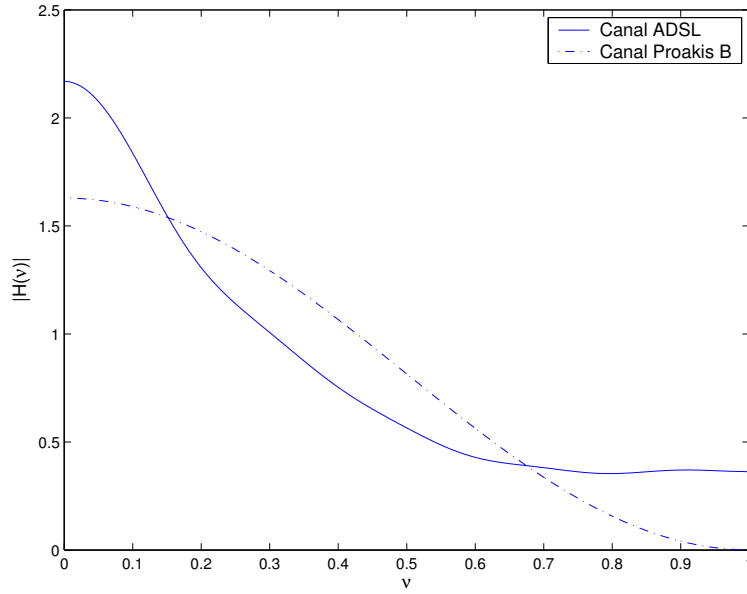


FIG. 3.11 – Spectre d'amplitude du canal ADSL et Proakis B.

Pour établir l'étude du comportement asymptotique des codes LDPC dans ce cas, nous divisons toujours le spectre du canal en $t_{cmax} - 1$ tranches mais ici non plus en fonction du profil d'irrégularité mais en fonction de la connexion des noeuds de données connectés aux symboles. Chaque tranche correspond à la bande B_i à l'intérieur de laquelle sont émis les symboles supports des bits connectés à i branches (Cf. figure 3.12). Dans ce mémoire nous nous limiterons à l'utilisation au maximum de 3 constellations C_m support de N_{b_m} bits avec les conventions suivantes : C_1 =MAQ-4 ($N_{b_1} = 2$), C_2 =MAQ-16 ($N_{b_2} = 4$), C_3 =MAQ-64 ($N_{b_3} = 6$). Étant donné que la proportion des noeuds de données connectés à un seul symbole dépend de la taille de celui-ci, la largeur L_{S_i} de la bande B_i sera alors fonction des proportions $\alpha_{C_m,i}$ des noeuds de données de degré i initialisés par un message issu d'une constellation C_m support de N_{b_m} bits, soit :

$$L_{S_i} = \frac{\sum_{m=1}^3 \alpha_{C_m,i} / N_{b_m}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} \sum_{n=1}^3 \alpha_{C_n,j} / N_{b_n}}, \quad (3.43)$$

avec $\sum_{m=1}^3 \alpha_{C_m,i} = \tilde{\lambda}_i^{(p_i)}$. Dans le cas où tous les symboles sont issus d'une même constellation alors la proportion du canal L_{S_i} sur laquelle les symboles supports des bits de degré i sont émis est égale à la proportion des bits de degré i , soit : $L_{S_i} = \tilde{\lambda}_i^{(p_i)}$.

La bande B_i , sur laquelle sont émis les symboles supports des bits de degré i se trouvant à la position p_i du graphe factoriel est alors définie par :

$$B_i = [b_{p_i-1} ; b_{p_i}] = \left[\sum_{j=k_1}^{k_{i-1}} L_{S_j} ; \sum_{j=k_1}^{k_i} L_{S_j} \right] \quad \forall i = 2, \dots, t_{cmax},$$

où k_l est fixé de manière à avoir $p_{k_l} = l$, $\forall l = 1, \dots, t_{cmax} - 1$. Ensuite, à l'intérieur de chaque bande B_i le spectre du canal subit une approximation par une fonction étagée :

$$S_{i,N_p(i)}(\nu) = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \tilde{H}_{i,k} \cdot \mathbb{1}_{A_{i,k}}(\nu) \quad \forall \nu \in B_i, \quad (3.44)$$

avec $N_p(i)$ le nombre de paliers de la fonction étagée nécessaire pour obtenir une bonne approximation des messages initiaux dans B_i . Nous supposons ces sous-bandes définies par le couple $(\tilde{H}_{i,k}, A_{i,k})$ suffisamment étroites de manière à considérer que les symboles émis à travers celles-ci soient tous issus d'une même constellation.

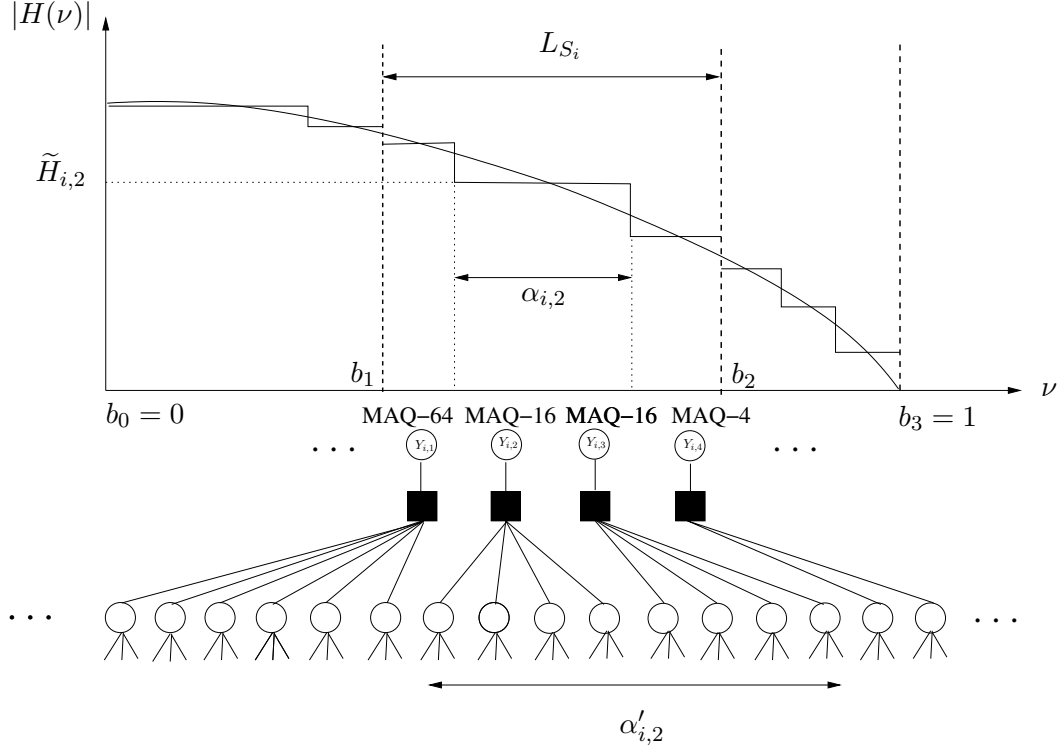


FIG. 3.12 – Approximation par une fonction étagée de la réponse en fréquence du canal et représentation de la connection entre les symboles et les noeuds de données.

$\alpha_{i,k}$ est toujours la largeur normalisée de la sous-bande k située à l'intérieur de la bande B_i :

$$\alpha_{i,k} = \frac{\sup_{\nu \in A_{i,k}} |\nu| - \inf_{\nu \in A_{i,k}} |\nu|}{L_{S_i}}. \quad (3.45)$$

Ainsi, si cette sous-bande est le support de la constellation C_m alors la proportion normalisée $\alpha'_{i,k}$ des noeuds de données de degré i connectés à ce symbole sera défini par 3.12 :

$$\alpha'_{i,k} = \frac{\alpha_{i,k} N_{b_m}}{\sum_{l=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,l} N_{b_m}}. \quad (3.46)$$

Par conséquent, la densité des messages des bits de degré i $f_{u_0,i}^{MAQ}$ émis à travers les symboles de la sous-bande B_i dépend non seulement des différents RSB mais également des constellations utilisées dans ces sous-bandes, soit :

$$f_{u_0,i}^{MAQ} = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} f_{u_0,p}^{C_{i,k}}(\tilde{H}_{i,k}) \quad \forall i = 2, \dots, t_{cmax}. \quad (3.47)$$

où $C_{i,k}$ représente la constellation utilisée dans la $k^{ième}$ sous-bande de B_i et $N_d(C_{i,k})$ le nombre de densités représentatives de cette constellation. Notons que, contrairement au cas où une unique

constellation MAQ-4 est utilisée, les densités initiales $f_{u_0}^{C_{i,k}}$ ont été obtenues en normalisant la puissance des constellations utilisées. Dans ces conditions, l'évolution de densité sur un canal OFDM sélectif en fréquence utilisant différentes constellations est spécifiée par l'équation récurrente suivante :

$$f_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{max}} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} f_{u_0,p}^{C_{i,k}}(\tilde{H}_{i,k}) \otimes \left(\Gamma^{-1} \left(\sum_{j=2}^{t_{max}} \rho_j \Gamma(f_v^{(l-1)})^{\otimes(j-1)} \right) \right)^{\otimes(i-1)}. \quad (3.48)$$

Nous avons représenté sur le tableau 3.2 les seuils de convergence des codes LDPC réguliers $(\infty, 3, 6)$ et $(\infty, 4, 8)$ pour les canaux ADSL et Proakis B dans le cadre de l'utilisation d'une constellation MAQ-16. La limite de Shannon de tels canaux sont $C_{ADSL,MAQ-16}(0.5) = 5.14$ dB pour le canal ADSL et $C_{B,MAQ-16}(0.5) = 3.95$ dB pour le canal Proakis B. De la même façon que pour le cas avec la constellation MAQ-4, les seuils obtenus avec le code régulier le moins dense soit le $(\infty, 3, 6)$ sont inférieurs à ceux obtenus avec le $(\infty, 4, 8)$. Notons également que malgré une limite de Shannon supérieure, les codes LDPC réguliers utilisés sur le canal ADSL exhibent des seuils inférieurs à ceux obtenus sur le canal Proakis B. Ceci peut s'expliquer par la sélectivité plus importante du canal Proakis B (le temps d'étalement du canal Proakis B étant supérieur à celui du canal ADSL).

Ensuite, nous avons calculé les seuils de convergence des deux mêmes codes LDPC réguliers utilisés sur les mêmes canaux mais pour un système de transmission avec allocation de bits (Cf. tableau 3.3). Cette allocation a été réalisée de manière à émettre autant de bits que pour une MAQ-16 soit en moyenne 4 bits par sous-porteuse et en fixant le nombre maximum de bits par sous-porteuse à 6. Dans ces conditions, la limite de Shannon du canal ADSL est $C_{ADSL,4bits}(0.5) = 4.5$ dB et celle du canal Proakis B est $C_{B,4bits}(0.5) = 3.37$ dB. Notons que les seuils obtenus sont, sans surprise, inférieurs à ceux obtenus lorsque seule une MAQ-16 est utilisée. Cependant, il est intéressant de noter que les gains obtenus avec cette allocation sont très variables suivant le canal et le code utilisé.

MAQ-16, R=1/2	canal ADSL (5.14 dB)		canal Proakis B (3.95 dB)	
code	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$
δ^* (dB)	7.1	7.95	7.14	8.55

TAB. 3.2 – Seuils de convergence obtenus par évolution de densité de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-16 est utilisée.

4 bits/sous-porteuse, R=1/2	canal ADSL (4.5 dB)		canal Proakis B (3.37 dB)	
code	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$
δ^* (dB)	6.59	7.18	6.97	7.68

TAB. 3.3 – Seuils de convergence obtenus par évolution de densité de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B. Les constellations utilisées résultent d'une allocation de bits de manière à obtenir en moyenne 4 bits par sous-porteuse (à savoir que le nombre de bits maximum pouvant être alloué a été fixé à 6).

Notons encore que les seuils des codes LDPC réguliers sont assez éloignés de la limite de

Shannon. Dans le prochain chapitre, nous optimiserons l'irrégularité des codes LDPC afin de minimiser cet écart.

3.2.3 Approximation Gaussienne sur des canaux OFDM

L'évolution de densité est un très bon outil d'analyse du comportement asymptotique des codes LDPC dont nous venons d'explicitier l'extension à un canal OFDM sélectif en fréquence. Cependant, cet outil présente une complexité de calcul importante et comme nous souhaitons optimiser le profil d'irrégularité des codes LDPC pour ce type de canal, nous avons alors développé une analyse par approximation Gaussienne des densités des messages nécessitant un coût de calcul nettement plus faible. En effet, ce type d'approximation permet de réduire l'étude par évolution de densité au suivi d'un seul paramètre représentatif de la densité des messages. Par conséquent, cette outil d'analyse se prête mieux aux processus d'optimisation souvent complexes (d'autant plus que le canal que nous traitons n'est pas stationnaire). L'analyse du comportement asymptotique des codes LDPC par approximation Gaussienne des densités pour un canal OFDM est dérivée de celle effectuée par évolution de densité exacte que nous avons développée dans la précédente section. De la même façon, pour cette analyse nous avons distingué deux situations à savoir l'utilisation d'une unique modulation MAQ-4 laquelle présente des densités initiales Gaussiennes et l'utilisation d'un ensemble de constellations MAQ-M pour lesquelles les densités initiales ne sont pas nécessairement Gaussiennes. Les équations de mise à jour des densités des messages u et v seront développées avec la moyenne comme paramètre d'évolution et son équivalent avec l'information mutuelle.

3.2.3.1 Transmission OFDM avec une MAQ-4

Rappelons qu'en utilisant l'approximation par fonction étagée de la fonction de transfert du canal telle qu'elle est présentée dans la section précédente, la densité de vraisemblance à l'entrée du décodeur pour une constellation MAQ-4 dans la bande B_i s'écrit :

$$f_{u_0,i}^{MAQ-4} = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \mathcal{N} \left(\frac{4\tilde{H}_{i,k}^2}{\sigma_b^2}, \frac{8\tilde{H}_{i,k}^2}{\sigma_b^2} \right) \quad \forall i = 2, \dots, t_{cmax}. \quad (3.49)$$

Notons que du fait de la symétrie de l'ensemble constitué du canal OFDM associé à la mise sur constellation MAQ-4, nous avons bien une densité de log-rapport de vraisemblance consistante puisque la variance des messages provenant du canal est égale à deux fois la moyenne, soit si on pose $m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) = \frac{4\tilde{H}_{i,k}^2}{\sigma_b^2}$:

$$f_{u_0,i}^{MAQ-4} = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \mathcal{N} \left(m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}), 2m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) \right) \quad \forall i = 2, \dots, t_{cmax}. \quad (3.50)$$

Ainsi, la moyenne $m_{v_{i,k}}^{(l)}$ des messages de sortie des noeuds de données de degrés i situés dans la $k^{ième}$ sous-bande de B_i à l'itération l est donnée par (Cf. equation (1.26)) :

$$m_{v_{i,k}}^{(l)} = m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + (i-1)m_u^{(l-1)}, \quad (3.51)$$

où $m_u^{(l-1)}$ représente la moyenne des messages u provenant des noeuds de contrôles. Par conséquent, à l'itération l de propagation de croyance, un message v se dirigeant vers un noeud de

contrôle aura pour densité le mélange de Gaussiennes suivant :

$$f_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \mathcal{N}(m_{v_{i,k}}^{(l)}, 2m_{v_{i,k}}^{(l)}), \quad (3.52)$$

ce qui mène, lors du passage par les noeuds de contrôles à la mise à jour suivante (Cf. equation (1.32)) :

$$\begin{aligned} m_u^{(l)} &= \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j \phi^{-1} \left\{ 1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \left(\sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \phi(m_{v_{i,k}}^{(l)}) \right) \right]^{j-1} \right\} \\ &= \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j \phi^{-1} \left\{ 1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \left(\sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \phi(m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + (i-1)m_u^{(l-1)}) \right) \right]^{j-1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dans ce cas, le seuil de convergence est défini par le E_b/N_0 minimum au-dessus duquel $m_u^{(l)}$ tend vers l'infini quand le nombre d'itérations l tend vers l'infini. De la même manière, nous pouvons introduire une expression alternative à (3.53) explicitant la mise à jour de la moyenne des messages v , soit :

$$\begin{aligned} \phi(m_v^{(l)}) &= \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} F_{m,i,k}(m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}), \phi(m_v^{(l-1)})) \\ &= \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} \phi \left\{ m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + (i-1) \sum_{j=1}^{trmax} \rho_j \phi^{-1} \left[1 - \left(1 - \phi(m_v^{(l-1)}) \right)^{j-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ainsi, le seuil est défini par le E_b/N_0 minimum au-dessus duquel $\phi(m_v^{(l)})$ tend vers zéro quand le nombre d'itérations l tend vers l'infini.

Si on considère l'approche par évolution de l'information mutuelle telle qu'elle est présentée dans le premier chapitre, l'équation récurrente permettant de déterminer l'évolution de l'information mutuelle I_u des messages u peut alors s'écrire :

$$I_u^{(l)} = 1 - \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j J \left((j-1)J^{-1} \left(1 - \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} J \left(\frac{4\tilde{H}_{i,k}^2}{\sigma_b^2} + (i-1)J^{-1}(I_u^{(l-1)}) \right) \right) \right). \quad (3.55)$$

D'où son expression duale en fonction de $I_v^{(l)}$:

$$\begin{aligned} I_v^{(l)} &= \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} F_{im,i,k}(m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}), I_v^{(l-1)}) \\ &= \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \alpha_{i,k} J \left(m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + (i-1)J^{-1} \left(1 - \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j J \left((j-1)J^{-1} (1 - I_v^{(l)}) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Le seuil est alors défini par le plus petit E_b/N_0 au-dessus duquel $I_v^{(l)} \rightarrow 1$ quand le nombre d'itérations tend vers l'infini.

Les seuils de convergence des codes réguliers (traités dans la précédente section) obtenus par approximation Gaussienne des densités apparaissent dans le tableau 3.4 pour les deux paramètres d'évolution, à savoir la moyenne δ_{moy}^* et l'information mutuelle δ_{im}^* . Notons que l'on retrouve des résultats de même nature que dans le cas du canal BABG c'est-à-dire que le seuil obtenu par évolution de densité exacte est encadré par les seuils obtenus par approximation Gaussienne définie par la moyenne et par l'information mutuelle.

MAQ-4, R=1/2	canal ADSL		canal Proakis B	
code	($\infty, 3, 6$)	($\infty, 4, 8$)	($\infty, 3, 6$)	($\infty, 4, 8$)
δ_{moy}^* (dB)	5.08	5.86	4.81	6.15
δ_{im}^* (dB)	4.7	5.48	4.05	5.16

TAB. 3.4 – Seuils de convergence obtenus par approximation Gaussienne de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-4 est utilisée.

3.2.3.2 Transmission OFDM avec allocation de bits

Les systèmes de transmission avec allocation de bits faisant *a fortiori* intervenir des constellations MAQ de taille supérieure à 4, les messages initialisant le décodeur LDPC ne seront donc plus Gaussiens. Il est alors nécessaire d'établir une approximation des densités par un mélange de densités Gaussiennes. Étant donné que les canaux à entrée binaire équivalents sont symétriques et que, par conséquent, les densités initialisant le décodeur sont consistantes, l'approximation de ces messages initiaux sera effectuée par des densités Gaussiennes consistantes. En effet, il est facile de montrer qu'un mélange de densités consistantes est une densité consistante. Nous avons à plusieurs reprises vu qu'une densité Gaussienne consistante était défini par un seul paramètre que nous avons choisi être la moyenne. Ainsi, l'approximation des densités initiales revient juste à l'évaluation de la moyenne de densités Gaussiennes consistantes. Ces moyennes seront obtenues par estimation de Monte-Carlo. Nous noterons alors les densités initialisant le décodeur pour les bits connectés à i branches par :

$$f_{u_0, ag}^{MAQ} = \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} \mathcal{N}\left(m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}(\tilde{H}_{i,k}), 2m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}(\tilde{H}_{i,k})\right) \quad \forall i = 2, \dots, t_{cmax} \quad (3.57)$$

où $m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}(\tilde{H}_{i,k})$ correspond à la moyenne de la densité Gaussienne consistante coïncidant avec l'approximation de la $p^{ième}$ densité du log-rapport de vraisemblance de la constellation utilisée dans la $k^{ième}$ sous-bande de B_i , soit $C_{i,k}$ (l'indice ag indiquant seulement que l'on se trouve dans la cadre de l'approximation Gaussienne). Sur la figure 3.13 est représenté la densité de mélange $f_{u_0}^{MAQ-16}$ représentative des différentes densités initiales d'une MAQ-16 ainsi, que son approximation par le mélange de densités Gaussiennes consistantes défini ci-dessus. Nous pouvons noter que ce type d'approximation semble bien adapté.

Ainsi, pour une transmission OFDM avec allocation de bits, l'évolution de la moyenne des messages u sortant d'un noeud de contrôle peut être généralisée par :

$$m_u^{(l)} = \sum_{j=2}^{trmax} \rho_j \phi^{-1} \left\{ 1 - \left[1 - \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(p_i)} \left(\sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_b(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} \phi(m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}(\tilde{H}_{i,k}) + (i-1)m_u^{(l-1)}) \right) \right]^{j-1} \right\}, \quad (3.58)$$

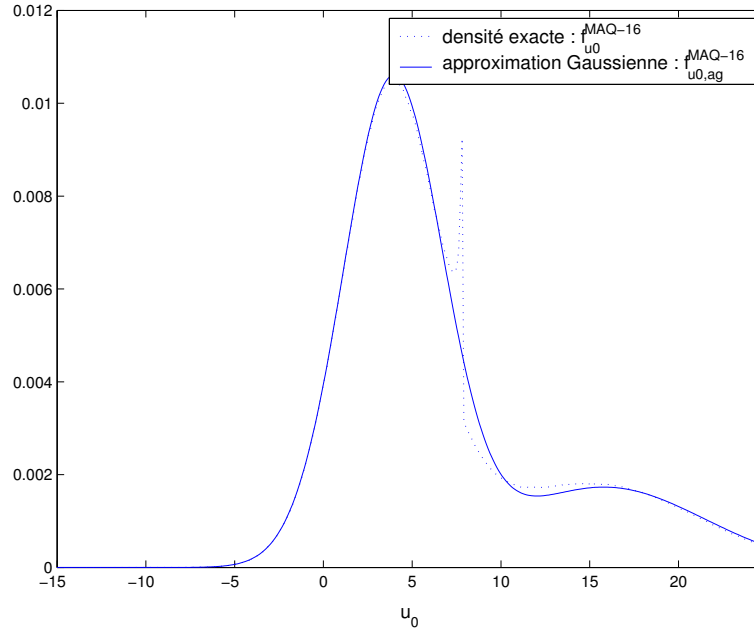


FIG. 3.13 – D.d.p. des messages provenant du canal lorsqu'une constellation MAQ-16 est utilisée ainsi que son approximation par un mélange de quatre densités Gaussiennes.

et son expression alternative fonction de la moyenne des messages v s'écrit :

$$\phi(m_v^{(l)}) = \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} F_{m,i,k}(m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}, \phi(m_v^{(l-1)})), \quad (3.59)$$

la fonction $F_{m,i,k}$ étant donnée par l'équation (3.54).

Si le paramètre d'évolution choisi lors de cette analyse par approximation Gaussienne est l'information mutuelle, le comportement asymptotique des codes LDPC utilisés pour une transmission OFDM avec allocation est alors défini par :

$$I_u^{(l)} = 1 - \sum_{j=2}^{tmax} \rho_j J \left((j-1)J^{-1} \left(1 - \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} J \left(m_{u_0,p}^{(C_{i,k})} (\tilde{H}_{i,k}) + (i-1)J^{-1} (I_u^{(l-1)}) \right) \right) \right), \quad (3.60)$$

où par son expression duale, soit :

$$I_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{tmax} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} F_{im,i,k} \left(m_{u_0,p}^{(C_{i,k})} (\tilde{H}_{i,k}), I_v^{(l-1)} \right) \quad (3.61)$$

Les seuils de convergence des codes réguliers utilisés sur les deux canaux sélectifs en fréquence ADSL et Proakis B sont présentés sur les tableaux 3.5 et 3.6 dans le cadre d'une transmission OFDM utilisant la constellation MAQ-16 ainsi que pour un système avec allocation de bits. Ces seuils ont été obtenus par approximation Gaussienne des densités. Nous pouvons à nouveau constater que les seuils obtenus par approximation Gaussienne encadrent le seuil calculé par évolution de densité exacte pour les deux canaux sélectifs en fréquence.

MAQ-16, R=1/2	canal ADSL		canal Proakis B	
code	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$
δ_{moy}^* (dB)	7.36	8.21	7.51	8.83
δ_{im}^* (dB)	6.95	7.76	6.78	7.87

TAB. 3.5 – Seuils de convergence obtenus par approximation Gaussienne de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B lorsque la constellation MAQ-16 est utilisée.

4 bits/sous-porteuse, R=1/2	canal ADSL		canal Proakis B	
code	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$	$(\infty, 3, 6)$	$(\infty, 4, 8)$
δ_{moy}^* (dB)	6.74	7.29	7.51	7.88
δ_{im}^* (dB)	6.56	7.12	6.96	7.62

TAB. 3.6 – Seuils de convergence obtenus par approximation Gaussienne de deux codes LDPC réguliers de rendement $R = 0.5$ utilisés sur le canal ADSL puis sur le canal Proakis B. Les constellations utilisées résultent d'une allocation de bits de manière à obtenir en moyenne 4 bits par sous-porteuse (le nombre de bits maximum pouvant être alloué a été fixé à 6).

3.3 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons développé une méthodologie pour analyser le comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC pour les transmissions OFDM. Ce type d'analyse par évolution de densité n'étant valable que sous certaines conditions telles que la symétrie et l'indépendance des messages, nous avons été amenés dans un premier temps à étudier la gestion de ces conditions dans le cadre de transmission OFDM avec en entrée des symboles issus de constellations MAQ.

Ainsi, nous avons montré que la condition de symétrie n'était respectée que dans le cadre de l'utilisation de la constellation MAQ-4. Cependant, il a été prouvé qu'en insérant un adaptateur de canal i.i.d. et donc en forçant la symétrie, il est tout de même possible d'effectuer l'analyse par évolution de densité pour les constellations d'efficacité spectrale plus importante. La seconde condition nécessaire à la validité de l'étude par évolution de densité, est la condition d'indépendance. Cette condition implique l'utilisation d'un mot de code de taille infini, nécessitant alors un nombre infini de sous-porteuses et la définition d'un nombre infini de densité initialisant le décodeur LDPC. Pour réduire le nombre de messages initiaux à un nombre fini, nous avons alors proposés d'effectuer une approximation du canal par une fonction étagée où les paramètres de cette fonction ont été déterminés de manière à obtenir la meilleur approximation des densités initiales.

Après avoir levé les deux principales difficultés à une étude de la convergence des codes LDPC par évolution de densité, nous avons proposés une méthode permettant d'implanter ce type d'analyse dans le contexte des transmissions OFDM et ce, en utilisant le profil d'irrégularité comme paramétrisation des codes LDPC. Cette analyse a aussi bien été réalisée dans le contexte de l'utilisation d'une seule constellation, que dans celui d'un système avec allocation de bits nécessitant l'utilisation de constellations de différentes tailles. Les seuils des codes LDPC réguliers ont ensuite été calculé et au vu de leur écart relativement important avec la limite de Shannon, il semble intéressant d'optimiser le profil d'irrégularité afin de s'approcher de cette limite. Ainsi,

afin de rendre possible l'optimisation de la structure des codes LDPC, nous avons établi l'analyse du comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC pour les transmissions OFDM sous approximation Gaussienne laquelle présente une complexité de calcul nettement plus faible.

Chapitre 4

Optimisation des codes LDPC pour les transmissions multi-porteuses

Au cours du chapitre précédent, nous avons présenté l'étude du comportement asymptotique des codes LDPC sur un canal OFDM sélectif en fréquence en fonction du profil d'irrégularité et ce, par évolution de densité exacte et par approximation Gaussienne. Nous avons alors montré que les seuils de convergence des codes LDPC réguliers étaient assez éloignés de la capacité. Ainsi, nous proposons dans ce chapitre d'optimiser le profil d'irrégularité pour ce type de canal afin d'amoindrir cet écart avec la capacité. Habituellement, l'optimisation de la structure des codes LDPC est effectuée par la minimisation du seuil de convergence. Dans ce chapitre nous présenterons, en plus du critère d'optimisation habituel, un critère d'optimisation fondé sur la minimisation de la probabilité d'erreur, à un rapport signal sur bruit E_b/N_0 convenablement choisi (Cf. section 4.1). Nous montrerons en particulier que la minimisation de la probabilité d'erreur conduit à des codes LDPC ayant un meilleur comportement pour de petites tailles de mots de code. Ensuite, nous présenterons les problèmes d'implantation de ces critères liés à leur non-linéarité en section 4.2.1 et nous développerons une alternative au critère de minimisation du seuil de convergence permettant une optimisation par programmation linéaire dans la section 4.2.2. Ce dernier algorithme sera également étendu aux transmissions avec allocation de bits. Nous illustrerons alors l'intérêt de notre approche à travers la présentation des résultats de simulations dans les sections 4.3 et 4.4. Une étude de robustesse des codes optimisés par rapport à une mauvaise estimation du canal conclura ce chapitre (Cf. section 4.5).

4.1 Critères d'optimisation des codes LDPC

4.1.1 Minimisation du seuil de convergence

La fonction de coût couramment utilisée dans la littérature consiste à maximiser le rendement d'un code LDPC exhibant un seuil de convergence égal au rapport signal à bruit $(E_b/N_0)^*$. Lorsque l'on désire obtenir un code optimisé pour un rendement de codage fixé R^* , la stratégie d'optimisation consiste à effectuer une dichotomie sur la valeur de $(E_b/N_0)^*$ afin d'obtenir un code ayant le rendement voulu. L'algorithme d'optimisation est décrit comme suit :

1. pour une valeur courante de $(E_b/N_0)^*$, effectuer l'optimisation suivante

$$(\underline{\lambda}_{opt}, \underline{p}_{opt}) = \arg \min_{\underline{\lambda}, \underline{p}} R(\underline{\lambda}), \quad (4.1)$$

sous les contraintes de proportion, de stabilité et de convergence introduites dans la section 1.3.1.

2. soit R_{opt} , le rendement obtenu par l'étape 1.
Si $R_{opt} > R^*$, diminuer la valeur de $(E_b/N_0)^*$ d'une quantité K_{dych} , et revenir en 1. Si $R_{opt} < R^*$, fixer le rapport signal sur bruit à $(E_b/N_0)^* + K_{dych}/2$, diviser la valeur de K_{dych} par 2 et revenir en 1.
3. l'algorithme d'optimisation s'arrête lorsque K_{dych} est inférieur à une précision voulue.

Le résultat de cette stratégie dichotomique d'optimisation est donc le code de rendement donné R^* ayant le seuil de convergence $(E_b/N_0)^*$ le plus faible possible. Pour des raisons de clarté de la présentation, nous appellerons dans toute la suite du chapitre cet algorithme '*optimisation par minimisation du seuil*' et le noterons :

$$(\underline{\lambda}_{opt}, \underline{p}_{opt}) = \arg \min_{\underline{\lambda}, \underline{p}} (E_b/N_0)^*, \quad (4.2)$$

Le choix de $\underline{p}$ est effectué de la même manière que dans le cas du canal BABG présenté dans le chapitre 1.

L'implantation des processus d'optimisation pouvant s'avérer être d'une complexité importante, il est donc nécessaire d'utiliser la méthode d'évolution de densité par approximation Gaussienne. Dans le chapitre 3, nous avons montré dans le cadre de transmissions OFDM que le comportement asymptotique sous approximation Gaussienne des codes LDPC en fonction du profil d'irrégularité était défini par l'équation récurrente suivante :

$$I_v^{(l)} = \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i^{(p_i)} \sum_{k=1}^{N_p(i)} \frac{\alpha'_{i,k}}{N_d(C_{i,k})} \sum_{p=1}^{N_d(C_{i,k})} F_{im,i,k} \left(m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}(\tilde{H}_{i,k}), I_v^{(l-1)} \right) \quad (4.3)$$

Ainsi, le problème d'optimisation du profil d'irrégularité par la minimisation du seuil de convergence revient au problème d'optimisation suivant :

$$(\underline{\lambda}_{opt}, \underline{p}_{opt}) = \arg \min_{\underline{\lambda}, \underline{p}} (E_b/N_0)^* \quad \text{tel que} \quad I_v^{(l)}((E_b/N_0)^*) \rightarrow 1 \text{ quand } l \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

L'ensemble des paramètres $(\underline{\lambda}, \underline{p})$ définissant le profil d'irrégularité à optimiser intervient à plusieurs niveaux dans l'expression $I_v^{(l)}$, à savoir dans $\alpha'_{i,k}$, $m_{u_0,p}^{(C_{i,k})}(\tilde{H}_{i,k})$ et ce, de façon non linéaire. Notons que cette non linéarité découle uniquement de l'exploitation de la non-stationnarité du canal OFDM sélectif en fréquence.

Discutons à présent des avantages et inconvénients de l'optimisation par minimisation du seuil :

avantage

- L'utilisation de l'algorithme (4.4) a pour principal intérêt de construire des codes LDPC qui exhiberont une probabilité d'erreur nulle au-dessus d'un certain E_b/N_0 à condition qu'ils aient une taille suffisamment importante. Ainsi, ce critère permet d'obtenir les performances limites des codes LDPC.

inconvenients

- Une probabilité d'erreur du mot de code strictement nulle ne pouvant être atteinte que dans le cas limite où la taille du mot de code tend vers l'infini, ce critère d'optimisation n'est donc adapté qu'à l'utilisation de mots de code suffisamment longs. Cependant, l'emploi de codes LDPC de cette nature engendre des difficultés d'implantation pratique telles que le stockage de la matrice de parité, la nécessité d'utiliser un grand nombre d'itérations lors du décodage, etc ...
- La fonction de coût étant non linéaire en les paramètres à optimiser, le processus d'optimisation sera plus difficile que celui présenté dans le cas du canal BABG où la fonction coût était linéaire.

4.1.2 Minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information

Dans cette section, nous introduisons une nouvelle fonction de coût, concurrente de celle présentée dans la section précédente. La stratégie d'optimisation est la suivante :

1. On se fixe le rendement de codage R , un rapport signal sur bruit convenablement choisi $(E_b/N_0)^*$, ainsi qu'un nombre maximum d'itérations de décodage L .
2. Le critère d'optimisation permettant d'obtenir le profil d'irrégularité sera la minimisation de la probabilité d'erreur binaire sur les bits d'information $P_{e_{L,info}}$ du mot de code, après L itérations de décodage.

Cette fonction de coût a été utilisée efficacement dans [60] pour obtenir des codes LDPC irréguliers optimisés pour des canaux OFDM sélectifs en fréquence. Minimiser *uniquement* la probabilité d'erreur des bits d'information avec un nombre *fini* d'itérations de décodage en utilisant des propriétés asymptotiques est bien entendu discutable. Nous avons proposé cette stratégie d'optimisation en nous basant sur des heuristiques provenant d'autres travaux sur les codes LDPC [24], ainsi que sur nos propres observations. Le but de l'utilisation du critère '*minimisation de la probabilité d'erreur*' est d'obtenir des codes LDPC ayant une probabilité d'erreur plus faible (nécessairement non-nulle) que ceux obtenus par la '*minimisation du seuil*', pour des petites tailles de mot de code (typiquement $N < 5000$). L'argumentaire est développé en détails ci-après :

4.1.2.0.1 justification

Les codes LDPC irréguliers présentent intrinsèquement un phénomène de protection inégale des bits à l'intérieur du mot de code. En effet, les bits avec un taux de connexion important reçoivent beaucoup d'information provenant des autres bits et convergent ainsi plus rapidement vers leurs vraies valeurs que les bits moins bien connectés. Il est bien évident qu'en présence d'un seuil ce phénomène de protection inégale ne peut exister puisque la probabilité d'erreur de chaque bit du mot de code devient nulle ce qui implique alors une protection égale des bits. Cependant, un code LDPC n'exhibe un seuil qu'à condition que sa taille de mot de code soit suffisamment importante nécessitant que l'on dispose d'un grand nombre d'itérations de propagation de croyance de manière à ce que les messages puissent se propager sur l'ensemble du graphe factoriel. Étant donné qu'un décodeur pratique est souvent limité en nombre d'itérations, nous nous en fixons un nombre maximum L . Dans ces conditions, les bits fortement connectés auront reçus un plus grand nombre de messages et seront donc mieux protégés.

Le phénomène de protection inégale peut également être rencontré lors de l'utilisation de codes LDPC de petites tailles. En effet, du fait de la présence de nombreux cycles à l'intérieur

du graphe factoriel la probabilité d'erreur ne peut plus devenir nulle et même pour un grand nombre d'itérations. Dans cette configuration, les erreurs auront alors une plus forte probabilité d'apparaître sur les bits faiblement connectés. Par conséquent, dans notre schéma de construction de bons codes LDPC de petite taille, nous avons souhaité protéger au mieux les bits d'information en appliquant les deux principes suivants :

- Les bits d'information seront émis à travers les sous-bandes présentant les meilleurs RSB dont l'ensemble de largeur normalisée, égale à R , sera noté B_{info} .
- Le critère d'optimisation permettant d'obtenir le profil d'irrégularité sera la minimisation de la probabilité d'erreur binaire sur les bits d'information *uniquement*, pour un nombre maximum d'itérations ainsi qu'un E_b/N_0 fixés.

4.1.2.0.2 écriture de la fonction de coût

La probabilité d'erreur s'exprime à partir du log-rapport *a posteriori* w défini par l'équation (1.8). Étant donné que nous utilisons l'évolution de densité sous approximation Gaussienne, il est nécessaire pour calculer cette probabilité d'erreur d'appliquer l'espérance mathématique de chaque côté de l'équation (1.8). Ainsi, la moyenne du log-rapport *a posteriori* dans la $k^{ième}$ sous-bande de B_i après L itérations est définie par :

$$m_{w_{i,k}} = m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + i \cdot m_u^{(L)}. \quad (4.5)$$

La densité de ce log-rapport *a posteriori* dans la $k^{ième}$ sous-bande de B_i est alors une densité Gaussienne de moyenne $m_{w_{i,k}}$ et de variance $2m_{w_{i,k}}$, soit :

$$f_{w_{i,k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi m_{w_{i,k}}}} \exp\left(-\frac{(x - m_{w_{i,k}})^2}{4m_{w_{i,k}}}\right), \quad (4.6)$$

ainsi, la probabilité d'erreur dans cette sous-bande s'exprime par (rappelons que le mot de code $\underline{0}$ est utilisé) :

$$P_{e_{i,k}} = \int_{-\infty}^0 f_{w_{i,k}}(x) dx. \quad (4.7)$$

Une expression analytique de cette probabilité d'erreur peut facilement être obtenue à l'aide d'une fonction en queue de Gaussienne $Q(\cdot)$, soit :

$$P_{e_{L,i,k}} = Q\left(\sqrt{\frac{m_{w_{i,k}}}{2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + i m_u^{(L)}}{2}}\right). \quad (4.8)$$

Par conséquent, la probabilité d'erreur binaire sur les bits d'information après L itérations s'écrit :

$$P_{e_{L,info}} = \frac{1}{R} \sum_{i=2}^{tmax} \sum_{k=1}^{N_s(i)} \alpha'_{info,i,k} Q\left(\sqrt{\frac{m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k}) + i m_u^{(L)}}{2}}\right), \quad (4.9)$$

où $\alpha'_{info,i,k}$ correspond à la proportion $\alpha'_{i,k}$ de l'équation (3.46) réduite aux seuls bits d'information. Cette expression de la probabilité d'erreur dépend des paramètres du profil d'irrégularité $(\underline{\lambda}, \underline{p})$ que l'on cherche à optimiser au travers du coefficient $\alpha_{info,i,k}$, de la moyenne des messages initiaux $m_{u_0}(\tilde{H}_{i,k})$ ainsi que de la moyenne $m_u^{(L)}$ des messages provenant des noeuds de contrôles et ce, de façon non linéaire. Le problème d'optimisation du profil d'irrégularité des codes LDPC par la minimisation de la probabilité d'erreur binaire s'écrit :

$$(\underline{\lambda}_{opt}, \underline{p}_{opt}) = \arg \min_{\underline{\lambda}, \underline{p}} P_{e_{L,info}}((E_b/N_0)^*), \quad (4.10)$$

où L est le nombre d'itérations de propagation de croyance effectué, choisi en fonction de la longueur du mot de code du code LDPC dont on souhaite optimiser la structure. Cette minimisation de la probabilité d'erreur est réalisée à un rapport signal à bruit $(E_b/N_0)^*$ donné, et qui doit être inférieur à la valeur du seuil qui serait obtenu avec une optimisation par la minimisation du seuil (avec les mêmes paramètres). Ceci est nécessaire afin de ne pas optimiser le profil d'irrégularité dans une zone où l'on pourrait obtenir une probabilité d'erreur nulle (ce qui reviendrait à minimiser le seuil). Ainsi, le RSB $(E_b/N_0)^*$ pour lequel nous minimisons la probabilité d'erreur est choisi de manière à avoir une probabilité d'erreur de l'ordre de 10^{-3} .

Discutons des avantages et des inconvénients de cette optimisation par la minimisation de la probabilité d'erreur :

avantages

- Le critère de la minimisation de la probabilité d'erreur binaire distingue les bits d'information des bits de redondance. Cette distinction traduit l'importance sur les performances de la position des bits d'information à l'intérieur du mot de code lors de transmissions sur un canal non-stationnaire avec un code LDPC de longueur fini. Ce phénomène sera particulièrement bien illustré par les résultats de l'optimisation.
- Étant donné que nous minimisons la probabilité d'erreur sur les bits d'information après un nombre L d'itérations de propagation de croyance, nous obtenons la structure du code LDPC pour laquelle les bits d'information convergent le plus rapidement. Ainsi, après L itérations, les bits d'information seront les mieux protégés. Cette fonction coût présente alors l'aptitude à construire des codes LDPC de petite taille avec de bonnes performances.

inconvénients

- La probabilité d'erreur étant une fonction non linéaire par rapport aux paramètres du profil d'irrégularité que l'on souhaite optimiser, comme pour la minimisation du seuil, le processus d'optimisation sera plus compliqué que celui réalisé pour le canal BABG.
- Le choix des paramètres d'optimisation L et $(E_b/N_0)^*$, sera déterminé de façon heuristique et peut parfois s'avérer délicat.

Après avoir présenté les différents critères d'optimisation des codes LDPC, nous allons dans la prochaine section montrer comment implanter les algorithmes d'optimisation permettant d'obtenir les profils des codes LDPC optimisés pour le canal OFDM.

4.2 Algorithmes d'optimisation

Dans la précédente section, nous avons vu qu'indépendamment du choix de la fonction coût, le problème d'optimisation des codes LDPC pour un canal OFDM sélectif en fréquence était non-linéaire. Ainsi, il n'est plus possible d'utiliser directement les méthodes habituelles d'optimisation basées sur la programmation linéaire, comme dans le cas des canaux BABG (cf. chapitre 1). De plus, l'espace des paramètres à optimiser est fortement contraint (contraintes de proportions, de stabilité, etc), ce qui rend difficile une exploration efficace de celui-ci. Pour ces différentes raisons, nous avons choisi d'optimiser les codes LDPC par l'algorithme d'évolution différentielle introduit par Storn et Price en 1997 dans [78].

L'idée d'utiliser cet algorithme d'évolution différentielle pour optimiser les codes LDPC a été introduite par Shokrollahi et Storn pour l'optimisation de codes LDPC sur le canal à effacement

[74], ce qui fut ensuite repris pour construire de bons codes sur différents types de canaux tels que le binaire symétrique, Laplace, BABG [71], le canal de Rayleigh [43] et les canaux sélectifs en fréquence [59]. Dans cette section, nous utiliserons cet algorithme pour minimiser la probabilité d'erreur sur les bits d'information puis le seuil de convergence.

Ensuite, nous proposerons une méthode de paramétrisation des codes LDPC permettant de linéariser les contraintes de l'optimisation par minimisation du seuil, permettant ainsi d'optimiser la structure des codes LDPC par programmation linéaire.

4.2.1 Optimisation par évolution différentielle

4.2.1.1 Minimisation de la probabilité d'erreur

L'optimisation des codes LDPC par la minimisation de la probabilité d'erreur des bits d'information se décompose en deux étapes. La première consiste à déterminer la distribution $\underline{\rho}$, le nombre maximum L d'itérations de propagation de croyance ainsi que le RSB E_b/N_0 auquel nous minimiserons cette probabilité d'erreur telle que nous l'avons présenté dans la section précédente. La seconde étape est l'optimisation proprement dite soit la résolution par l'algorithme d'évolution différentielle du problème suivant :

$$(\underline{\lambda}_{opt}, \underline{p}_{opt}) = \arg \min_{\underline{\lambda}, \underline{p}} P_{e_{L,info}}(E_b/N_0), \quad (4.11)$$

Nous allons alors présenter notre méthode d'implantation de cet algorithme de manière à minimiser la probabilité d'erreur bit mais auparavant nous nous attarderons sur les contraintes et les dépendances entre les différents paramètres à optimiser $(\underline{\lambda}, \underline{\rho}, \underline{p})$.

Par définition, les deux vecteurs $\underline{\lambda}$ et $\underline{\rho}$ spécifiant l'irrégularité sont liés entre eux par le rendement :

$$(1 - R) \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \lambda_i / i = \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j / j. \quad (4.12)$$

Le vecteur spécifiant l'irrégularité sur les noeuds de données étant normalisé :

$$\lambda_2 = 1 - \sum_{i=3}^{t_{cmax}} \lambda_i, \quad (4.13)$$

en combinant les équations (4.12) et (4.13) nous déduisons l'expression de $\lambda_{t_{cmax}}$ en fonction de $\lambda_3, \dots, \lambda_{t_{cmax}-1}$:

$$\lambda_{t_{cmax}} = \frac{\frac{R-1}{2} + \sum_{j=2}^{t_{rmax}} \rho_j / j - (1 - R) \sum_{i=3}^{t_{cmax}-1} \lambda_i (\frac{1}{i} - \frac{1}{2})}{(1 - R) (\frac{1}{t_{cmax}} - \frac{1}{2})}. \quad (4.14)$$

De la même façon les éléments p_i du vecteur $\underline{p}$, contenant les positions des différents taux de connexion à l'intérieur du graphe factoriel, sont contraints à tous être différents, entiers, positifs et inférieurs ou égaux à $t_{cmax} - 1$. Par conséquent, nous avons la relation :

$$\sum_{i=2}^{t_{cmax}} p_i = \frac{(t_{cmax} - 1)t_{cmax}}{2}, \quad (4.15)$$

d'où,

$$p_{t_{cmax}} = \frac{(t_{cmax} - 1)t_{cmax}}{2} - \sum_{i=2}^{t_{cmax}-1} p_i. \quad (4.16)$$

Toutes ces dépendances entre les paramètres définissant le profil d'irrégularité permettent de réduire le nombre de coefficients à optimiser et si on pose D comme étant le nombre de degrés de liberté, alors d'après ces dépendances $D = t_{cmax} - 3 + t_{cmax} - 2 = 2t_{cmax} - 5$. Ainsi le vecteur de dimension D contenant les paramètres à optimiser sera : $\underline{p}_a = [\lambda_3, \dots, \lambda_{t_{cmax}-1}, p_2, \dots, p_{t_{cmax}-1}]$; les valeurs de λ_2 , $\lambda_{t_{cmax}}$ et $p_{t_{cmax}}$ sont déduites des équations (4.13)-(4.16). Il suffit maintenant de trouver les éléments de ce vecteur $\underline{p}$ minimisant la probabilité d'erreur à un E_b/N_0 préalablement déterminé.

L'évolution différentielle est un algorithme d'optimisation basé sur une recherche en parallèle c'est-à-dire qu'à partir d'un ensemble initial de vecteurs, l'algorithme met à jour itérativement et simultanément cet ensemble jusqu'à ce qu'il converge vers une solution présentant la meilleure valeur de la fonction coût, soit dans notre cas la probabilité d'erreur bit la plus faible. Ce processus d'optimisation mettant à jour l'ensemble des vecteurs en parallèle, il permet d'échapper aux minima locaux et prévient d'éventuelles non convergences. Cet algorithme peut être résumé de la façon suivante :

- 1. Initialisation : pour créer l'ensemble des vecteurs candidats initial lors de la première génération $G = 0$, il suffit de tirer aléatoirement et uniformément NP vecteurs $\underline{p}_{a,t,G}$, $t = 0, 1, \dots, NP - 1$, de dimension D où $NP = 10D$. Ensuite pour chacun de ces vecteurs nous calculons la probabilité d'erreur binaire notée $Pe_{t,G}$. Cette probabilité d'erreur est obtenue par l'analyse du comportement asymptotique du code LDPC sous approximation Gaussienne après L itérations, définie par l'équation (4.3), en fonction des paramètres contenus dans les vecteurs. Le vecteur présentant la probabilité d'erreur la plus faible est labélisé comme étant le meilleur vecteur, $\underline{p}_{a_{best},G}$.
- 2. Mutation : pour la génération suivante $G + 1$, un nouvel ensemble de NP vecteurs est créé suivant le principe de la mutation que nous allons détailler. Tout d'abord, pour chaque $t = 0, 1, \dots, NP - 1$ quatre entiers différents r_1, r_2, r_3 et r_4 sont tirés aléatoirement dans l'ensemble $[0, NP - 1]$. Ensuite, nous construisons l'ensemble des vecteurs issus de la mutation en appliquant la relation suivante :

$$\underline{p}_{v_{t,G+1}} = \underline{p}_{a_{best},G} + F(\underline{p}_{a_{r_1},G} - \underline{p}_{a_{r_2},G} + \underline{p}_{a_{r_3},G} - \underline{p}_{a_{r_4},G}), \quad (4.17)$$

où F est une constante réelle contrôlant l'amplification de la variation différentielle généralement comprise dans l'intervalle $[0, 1]$. L'utilisation de deux vecteurs différences augmente la variation et permet alors à l'algorithme d'échapper aux minima locaux.

- 3. Crossover : afin d'augmenter la diversité des vecteurs résultants, nous allons leur appliquer le principe du *crossover*, soit :

$$\underline{p}_{w_{mt,G+1}} = \begin{cases} \underline{p}_{v_{mt,G+1}} & \text{pour } m = (n)_{NP} + 1, (n+1)_{NP} + 1, \dots, (n+T-1)_{NP} + 1 \\ \underline{p}_{a_{mt,G}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.18)$$

où $(.)_{NP}$ représente la fonction modulo- NP , n un entier généré aléatoirement distribué suivant une loi uniforme dans l'ensemble $[0, NP - 1]$ et T est également un entier tiré aléatoirement dans $[0, NP - 1]$ mais suivant une loi exponentielle telle que $Pr(T = v) = -\ln(CR) \cdot (CR)^{v+1}$, où $CR \in [0, 1]$ représente la probabilité de crossover. La probabilité d'erreur est ensuite calculée pour chaque vecteur résultant $\underline{p}_{w_{t,G+1}}$ et est notée $Pe_{w_{t,G+1}}$.

- 4. Sélection : Cette étape consiste simplement à comparer l'ensemble des vecteurs $\underline{p}_{a,t,G}$ avec ceux issus des étapes de reproduction que sont la mutation et le crossover $\underline{p}_{w_t,G+1}$ et ce, afin de conserver les vecteurs présentant la probabilité d'erreur la plus faible, soit :

$$\underline{p}_{a,t,G+1} = \begin{cases} \underline{p}_{a,t,G} & \text{si } Pe_{t,G} < Pe_{w_t,G+1}, \\ \underline{p}_{w_t,G+1} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.19)$$

- 5. Critère d'arrêt : L'algorithme est stoppé dès lors que la probabilité d'erreur n'évolue plus durant un certain nombre de générations. Ainsi, le vecteur contenant les paramètres minimisant la probabilité d'erreur à E_b/N_0 sera $\underline{p}_{a_{best},G}$.

4.2.1.2 Minimisation du seuil

Dans cette section, nous présenterons le processus d'optimisation des codes LDPC par le critère de la minimisation du seuil. Étant donné que l'optimisation avec l'algorithme de l'évolution différentielle des codes LDPC par la minimisation du seuil n'est que légèrement différente de celle établie ci-dessus pour la minimisation de la probabilité d'erreur, nous nous attarderons dans cette section uniquement sur les différences entre les deux processus d'optimisation. Pour optimiser les codes LDPC par le critère de la minimisation du seuil, il est au préalable nécessaire de se fixer une distribution de l'irrégularité des noeuds de contrôles $\underline{p}$, ainsi que le rendement cible R^* du code que l'on cherche à optimiser. Ensuite, il suffit de trouver les paramètres $(\underline{\lambda}, \underline{p})$ définissant le profil d'irrégularité répondant au problème d'optimisation suivant :

$$(\underline{\lambda}_{opt}, \underline{p}_{opt}) = \arg \min_{\underline{\lambda}, \underline{p}} (E_b/N_0)^* \quad \text{tel que} \quad I_v^{(l)}((E_b/N_0)^*) \rightarrow 1 \text{ quand } l \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

où $I_v^{(l)}((E_b/N_0)^*)$ est défini par l'équation récurrente (4.3).

De la même façon que dans la section précédente, le vecteur contenant les paramètres à optimiser sera réduit à : $\underline{p}_a = [\lambda_3, \dots, \lambda_{t_{cmax}-1}, p_2, \dots, p_{t_{cmax}-1}]$. Présentons maintenant les étapes de l'algorithme d'évolution différentielle permettant d'obtenir la structure du code minimisant le seuil.

- 1. Initialisation : nous fixons tout d'abord un E_b/N_0 à partir duquel nous débutons l'algorithme. Ensuite cette étape d'initialisation, équivalente à celle présentée dans la précédente section, permet de construire l'ensemble des NP vecteurs initiaux $\underline{p}_{a,t,G}$, $t = 0, 1, \dots, NP-1$. Ainsi, la probabilité d'erreur du mot de code $Pe_{t,G}$ associé à chaque vecteur $\underline{p}_{a,t,G}$ est calculée et le vecteur présentant la probabilité d'erreur la plus faible est noté $\underline{p}_{a_{best},G}$.
- 2. et 3. : les étapes de mutation et de crossover sont équivalentes à celles présentées dans la section 4.2.1.1.
- 4. Sélection : cette étape consiste à sélectionner les vecteurs présentant les probabilités d'erreur (sur le mot de code) les plus faibles entre l'ensemble des vecteurs $\underline{p}_{a,t,G}$ et $\underline{p}_{w_t,G+1}$ issus des étapes de mutation et de crossover. Le vecteur de paramètres produisant la plus faible des probabilités d'erreur sera noté $\underline{p}_{a_{best},G+1}$.

- 5. Critère d'arrêt : si l'erreur résiduelle $Pe_{best,G+1}$ du vecteur $\underline{p}_{a_{best,G+1}}$ n'est pas nulle (numériquement, si elle n'est pas inférieure à 10^{-8}), il faut retourner à l'étape $n^\circ 2$. Si l'erreur est nulle, une diminution du E_b/N_0 est effectuée et on revient à l'étape initiale $n^\circ 1$. Si le nouveau E_b/N_0 ne permet pas d'obtenir un vecteur convergeant vers une probabilité d'erreur nulle et ce, durant un grand nombre de générations alors le processus d'optimisation est stoppé. Ainsi, le vecteur présentant la probabilité d'erreur nulle pour le plus faible E_b/N_0 est considéré comme étant le meilleur et définit le seuil du code $(E_b/N_0)^*$.

Durant le processus d'optimisation, les probabilités d'erreur sont calculées sur l'ensemble du mot de code en utilisant l'évolution de densité par approximation Gaussienne et ce, après 1500 itérations.

L'inconvénient majeur de cette méthode d'optimisation réside dans l'étape d'initialisation. Dès lors que t_{cmax} est légèrement important, la construction aléatoire des vecteurs initiaux $\underline{p}_{a,t,G}$, $t = 0, 1, \dots, NP - 1$ présente un coût calculatoire très important induit par les très fortes contraintes des paramètres définissant le profil d'irrégularité. Afin de ne pas se contenter de codes LDPC avec un t_{cmax} trop faible, on effectue la stratégie suivante :

En général, une bonne optimisation de l'irrégularité consiste en l'obtention d'un vecteur $\underline{\lambda}$ à l'intérieur duquel seulement quelques degrés de connections sont utilisés. Ainsi, nous avons choisi de restreindre considérablement l'espace de recherche en n'activant que certains degrés de connections. Les performances étant très sensibles au choix de ceux ci, ce choix ne devra pas être complètement aléatoire. Par conséquent, les degrés 2, 3 et t_{cmax} seront toujours activés, quant aux autres, il devra être effectué un choix parmi certaines paires de degrés successifs.

Ce problème d'initialisation des degrés actifs pour l'algorithme d'évolution différentielle a été également soulevé dans [43]. Cependant, le choix de bons degrés actifs reste très délicat d'autant plus que les performances y sont sensibles. De plus, les bons degrés sont différents pour des canaux de propagation différents.

Afin d'éviter ce problème, nous avons mis au point une méthode alternative d'optimisation des codes LDPC pour les transmissions OFDM utilisant le critère de la minimisation du seuil, optimisable par programmation linéaire. Nous présentons cette méthode dans la section suivante.

4.2.2 Optimisation par programmation linéaire

Lors du chapitre 3, nous avons établi que le canal OFDM sélectif en fréquence pouvait s'apparenter à un ensemble de N_p sous-bandes mises en parallèle et défini par une fonction étagée $S_{N_p}(\nu)$:

$$S_{N_p}(\nu) = \sum_{k=1}^{N_p} \tilde{H}_k \mathbb{1}_{\mathcal{A}_k}(\nu),$$

où la largeur de la $k^{ième}$ sous-bande est notée α_k (Cf. équation 3.28). Nous visons donc dans cette section à optimiser conjointement N_p "parties de code" LDPC correspondant aux N_p sous-bandes, lesquelles composent alors le code LDPC global. Chacune de ces N_p parties du code LDPC sera initialisée par une bande de fréquence du canal sélectif différente. La non-stationarité du canal de propagation sera donc gérée par une initialisation non-constante de l'algorithme de décodage.

Pour ce faire, il est tout d'abord nécessaire de redéfinir la paramétrisation du profil d'irrégularité (Cf. figure 4.1). Notons $\underline{\lambda}_k = [\lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, \dots, \lambda_{t_{cmax},k}]$ le vecteur définissant l'irrégularité en terme

de proportion de branches des noeuds de données du code LDPC situé dans la $k^{\text{ième}}$ sous-bande. Son équivalent en terme de proportion de noeuds de données sera donc spécifié par $\tilde{\lambda}_k$.

Nous allons à présent décrire la paramétrisation du profil d'irrégularité en fonction des proportions suivantes :

$\{\alpha_k\}_{k=1\dots N_p}$: proportions de sous-porteuses dans la $k^{\text{ième}}$ sous-bande,

$\{\alpha'_k\}_{k=1\dots N_p}$: proportions de bits (tous degrés confondus) dans la $k^{\text{ième}}$ sous-bande,

$\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1\dots N_p}$: proportions de bits par degré de connection dans la $k^{\text{ième}}$ sous-bande.

Nous allons indiquer les relations qui lient ces différentes proportions et comment elles interviennent dans l'optimisation de l'irrégularité des codes LDPC.

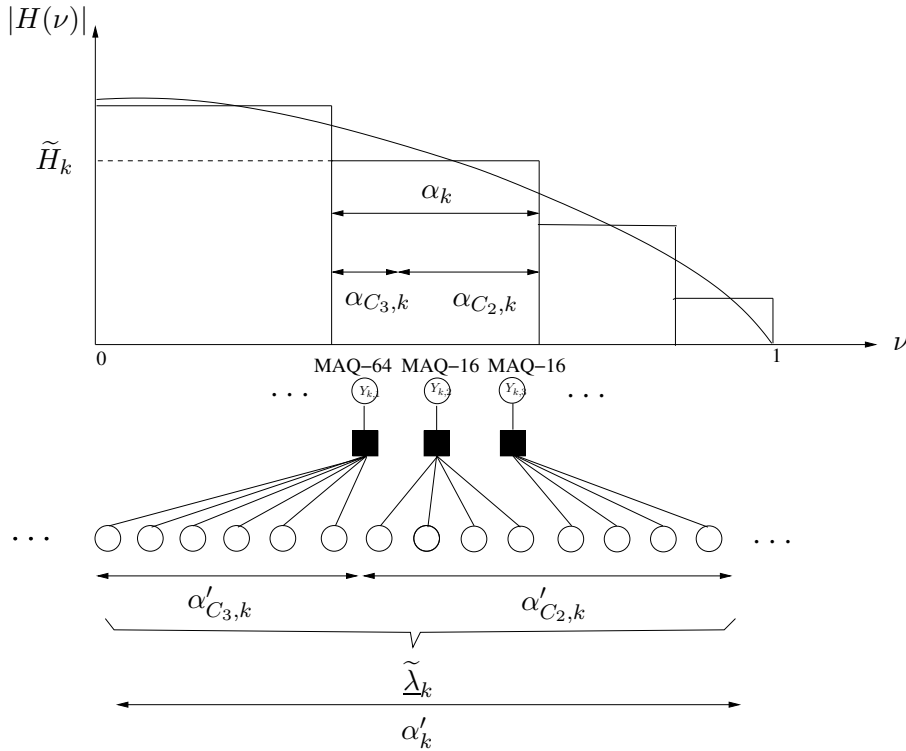


FIG. 4.1 – Modélisation du problème d'optimisation de N_p "sous-codes" LDPC pour N_p canaux en parallèle.

Plaçons nous dans le cas général où plusieurs tailles de constellation peuvent être utilisées. Notons par $\alpha_{C_m,k}$ la proportion de α_k (définissant la largeur de la sous-bande k) sur laquelle sont émis les symboles issus de la constellation C_m support de N_{b_m} bits tels que représentés sur la figure 4.1 (avec les conventions suivantes : C_1 =MAQ-4, C_2 =MAQ-16, C_3 =MAQ-64) :

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_{C_m,k} = \alpha_k,$$

Notons que dans la représentation graphique de la figure 4.1, les symboles de MAQ-64 sont connectés à $N_{b_3} = 6$ bits, et que les symboles de MAQ-16 sont connectés $N_{b_2} = 4$ bits.

La proportion α'_k de bits émis par les symboles de la $k^{\text{ième}}$ sous-bande sera fonction de la taille des constellations utilisées à l'intérieur de cette sous-bande (via N_{b_m} le nombre de bits émis pour

chaque constellation) ainsi que de leur proportion $\alpha_{C_m,k}$ dans la sous-bande considérée, soit :

$$\alpha'_k = \frac{\sum_{m=1}^3 \alpha_{C_m,k} N_{b_m}}{\sum_{l=1}^{N_p} \sum_{n=1}^3 \alpha_{C_n,l} N_{b_n}} \quad \forall k = 1, \dots, N_p. \quad (4.21)$$

Remarque 13 Si une unique constellation est utilisée, la proportion de bits émis dans la $k^{\text{ième}}$ sous-bande correspond alors à la largeur de celle-ci, soit : $\alpha'_k = \alpha_k$. $\square$

Étant donné que chaque $\tilde{\lambda}_k$ est normalisé, le profil d'irrégularité sera donc défini par la concaténation des $\tilde{\lambda}_k$ pondérés par α'_k , soit :

$$[\alpha'_1 \tilde{\lambda}_1 \ \alpha'_2 \tilde{\lambda}_2 \ \dots \ \alpha'_k \tilde{\lambda}_k \ \dots \ \alpha'_{N_p} \tilde{\lambda}_{N_p}].$$

Ainsi, l'irrégularité des connexions au niveau des noeuds de données du code LDPC global sera spécifiée par :

$$\tilde{\lambda} = \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k \tilde{\lambda}_k. \quad (4.22)$$

Notons que l'irrégularité des taux connexions sur les noeuds de contrôles est toujours représentée par le vecteur $\underline{\rho}$ (ou $\tilde{\underline{\rho}}$).

À partir de cette nouvelle paramétrisation des codes LDPC, nous allons reformuler l'analyse du comportement asymptotique des codes LDPC sur un canal OFDM par évolution de densité et ce, sous approximation Gaussienne des messages. Nous présenterons le cas général c'est-à-dire celui qui considère l'utilisation d'une combinaison quelconque de constellations MAQ (le cas correspondant à l'utilisation d'une unique constellation MAQ-4 n'étant qu'un cas particulier). Dans le chapitre 3 nous avons vu que la densité des messages initiaux dans la sous-bande k pouvait se mettre sous la forme :

$$f_{u_{0,k},ag} = \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha'_{C_m,k}}{N_d(C_m)} \sum_{p=1}^{N_d(C_m)} \mathcal{N}\left(m_{u_{0,p}}^{(C_m)}(\tilde{H}_k), 2m_{u_{0,p}}^{(C_m)}(\tilde{H}_k)\right) \quad \forall k = 1, \dots, N_p, \quad (4.23)$$

où $\alpha'_{C_m,k}$ représente la proportion des noeuds de données de $\tilde{\lambda}_k$ connectés aux symboles C_m et est défini par (Cf. figure 4.1) :

$$\alpha'_{C_m,k} = \frac{\alpha_{C_m,k} N_{b_m}}{\sum_{n=1}^3 \alpha_{C_n,k} N_{b_n}} \quad \forall k = 1, \dots, N_p, \quad (4.24)$$

et $m_{u_{0,g}}^{(C_m)}(\tilde{H}_k)$ représente la moyenne de la $p^{\text{ième}}$ densité Gaussienne représentative de la constellation C_m .

Ainsi, d'après l'équation (3.61), l'évolution de l'information mutuelle $I_v^{(l)}$ au cours des itérations de décodage s'écrit :

$$\begin{aligned} I_v^{(l)} &= \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} \sum_{n=1}^{N_p} \alpha'_n j \tilde{\lambda}_{j,n}} \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha'_{C_m,k}}{N_d(C_m)} \sum_{p=1}^{N_d(C_m)} J\left(m_{u_{0,p}}^{(C_m)}(\tilde{H}_k) + (i-1)J^{-1}\left(I_u^{(l-1)}\right)\right) \\ &= \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} \sum_{n=1}^{N_p} \alpha'_n j \tilde{\lambda}_{j,n}} F_{im,k}\left(\tilde{H}_k, \sigma_b^2, I_v^{(l-1)}\right) \\ &= F_{im}\left(\tilde{\underline{H}}, \sigma_b^2, I_v^{(l-1)}\right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

En utilisant l'équation ci-dessus, il suffit d'avoir $I_v > F_{im}(\underline{\tilde{H}}, \sigma_b^2, I_v)$ pour que l'information mutuelle converge vers 1 et donc pour que la probabilité d'erreur tende vers zéro. Ainsi, le problème d'optimisation du profil d'irrégularité par le critère de la minimisation du seuil s'écrit :

$$[\tilde{\Delta}_{1,opt} \dots \tilde{\Delta}_{N_p,opt}] = \arg \min_{[\tilde{\Delta}_1 \dots \tilde{\Delta}_{N_p}]} (E_b/N_0)^* \quad (4.26)$$

sous la contrainte,

$$I_v > F_{im}(\underline{\tilde{H}}, \sigma_b^2, I_v) \quad \forall I_v \in [0, 1]. \quad (4.27)$$

ainsi que les contraintes de normalisation, et de proportion définies respectivement par :

$$\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_{i,k} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, N_p, \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_{i,k} \in [0, 1]. \quad (4.28)$$

Sous cette forme, la contrainte (4.27) reste non-linéaire en les paramètres $\tilde{\lambda}_{i,k}$, et ce en raison de la forme du dénominateur de l'équation (4.25). On peut cependant changer l'expression de ce dénominateur à l'aide de la relation

$$\sum_{j=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k j \tilde{\lambda}_{j,k} = (1 - R) \sum_{j=2}^{t_{rmax}} j \tilde{\rho}_j.$$

On peut alors adapter l'algorithme d'optimisation par minimisation du seuil pour qu'il soit soluble par programmation linéaire, de la façon suivante :

1. initialisation : On se fixe un (E_b/N_0) initial suffisamment important, un rendement cible R^* et une valeur K_{dych} du pas de dichotomie,
2. pour une valeur courante de $(E_b/N_0)^*$ et un rendement cible R^* , effectuer l'optimisation suivante

$$[\tilde{\Delta}_{1,opt} \dots \tilde{\Delta}_{N_p,opt}] = \arg \min_{[\tilde{\Delta}_1 \dots \tilde{\Delta}_{N_p}]} \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k i \tilde{\lambda}_{i,k} \quad (4.29)$$

sous les contraintes,

$$\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \tilde{\lambda}_{i,k} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, N_p,$$

$$\tilde{\lambda}_{i,k} \in [0, 1] \quad \text{et}$$

$$I_v > \sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k \frac{i \tilde{\lambda}_{i,k}}{(1 - R^*) \sum_{j=2}^{t_{rmax}} j \tilde{\rho}_j} F_{im,k}(\underline{\tilde{H}}_k, \sigma_b^2, I_v) \quad \forall I_v \in [0, 1].$$

La fonction objectif ainsi que les contraintes étant linéaires en les paramètres à optimiser on peut utiliser l'algorithme de programmation linéaire.

3. soit $R_{opt} = 1 - \frac{\sum_{i=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k i \tilde{\lambda}_{i,k,opt}}{\sum_{j=2}^{t_{rmax}} j \tilde{\rho}_j}$, le rendement obtenu par l'étape 2.

Si $R_{opt} > R^*$, diminuer la valeur de $(E_b/N_0)^*$ d'une quantité K_{dich} , et revenir en 2. Si $R_{opt} < R^*$, fixer le rapport signal sur bruit à $(E_b/N_0)^* + K_{dich}/2$, diviser la valeur de K_{dich} par 2 et revenir en 2.

4. l'algorithme d'optimisation s'arrête dès qu'on obtient $0 < R^* - R_{opt} < 10^{-5}$.

La méthode présentée juste ci-dessus a pour avantage d'être mise sous la forme d'un problème de programmation linéaire, lequel est nettement plus efficace que l'évolution différentielle. De plus l'utilisation d'un tel algorithme permet d'activer tous les degrés de connexions, supprimant ainsi le choix délicat des degrés actifs. Cependant, lorsqu'on utilise une optimisation par programmation linéaire, la condition de convergence donnée par (4.27) doit s'accompagner d'une condition de stabilité, afin de s'assurer de la convergence vers une probabilité d'erreur nulle. Or dans le cas d'un canal non-stationnaire, cette condition de stabilité est très difficile à exprimer et nous avons préféré tenter de donner un encadrement de la condition de stabilité :

– *condition stricte*

La première condition de stabilité exploite le fait que notre problème consiste en l'optimisation conjointe de N_p "sous-codes". Ainsi, si les N_p "sous-codes" LDPC sont stables alors le code LDPC global sera stable. Il suffit alors d'imposer la condition de stabilité donnée par l'équation (1.21) sur les N_p sous-codes, soit par exemple pour une constellation MAQ-4 distribuée suivant une loi Gaussienne $f_{u_{0k}} = \mathcal{N}\left(\frac{4|H_k|^2}{\sigma_b^2}, \frac{8|H_k|^2}{\sigma_b^2}\right) \quad \forall k = 1, \dots, N_p$:

$$\lambda_{2,k} = \frac{2\tilde{\lambda}_{2,k}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} j\tilde{\lambda}_{j,k}} < \frac{1}{\sum_{j=2}^{t_{rmax}} (j-1)\rho_j} e^{\frac{|H_k|^2}{\sigma_b^2}} \quad \forall k = 1, \dots, N_p. \quad (4.30)$$

Cette condition de stabilité peut être qualifiée de restrictive puisqu'elle assure la stabilité du code LDPC global en contraignant localement chaque $\tilde{\lambda}_{2,k}$. Or si toutes ces contraintes locales ne sont pas respectées, il se peut tout de même, sous certaines conditions, que le code LDPC global soit stable. En effet, un "sous-code" étant connecté via les noeuds de contrôles aux autres "sous-codes", un "sous-code" défini instable (s'il ne respecte pas la contrainte (4.30)) pourra avec l'aide des autres sous-codes tout de même converger vers une probabilité d'erreur nulle à condition que ces autres sous-codes ne soient pas à leur limite de stabilité. Ceci nous amène donc naturellement à envisager une deuxième condition de stabilité.

– *condition lâche*

Cette deuxième condition de stabilité est définie au niveau global en se positionnant dans le cas le plus défavorable correspondant à :

$$\lambda_2 = \frac{2 \sum_{k=1}^{N_p} \alpha'_k \tilde{\lambda}_{2,k}}{\sum_{j=2}^{t_{cmax}} \sum_{k=1}^{N_p} j \alpha'_k \tilde{\lambda}_{j,k}} < \frac{1}{\sum_{j=2}^{t_{rmax}} (j-1)\rho_j} e^{\min(m_{u_0})/4}, \quad (4.31)$$

où $\min(m_{u_0})$ représente le minimum des messages $m_{u_{0,g}}^{(C_m)}(\tilde{H}_k) \quad \forall k, m, g$, alimentant le décodeur de l'équation (4.23).

Cette condition de stabilité étant défini au niveau du code LDPC global, elle permet alors d'autoriser certains "sous-codes" et spécialement ceux émis à travers les sous-bandes de moins bon RSB à être instables tant que globalement la stabilité est assurée. Cette souplesse se paye cependant par une contrainte globale la plus stricte.

Nous avons ainsi établi une condition de stabilité *trop stricte* et une condition de stabilité *trop lâche*, la vraie condition de stabilité étant située quelque part entre les deux.

Nous avons optimisé les profils d'irrégularité en insérant une de ces deux contraintes dans le processus d'optimisation et les seuils des codes obtenus avec la condition de stabilité *lâche* se sont avérés être inférieurs à ceux obtenus avec la condition de stabilité *stricte*. On peut donc penser que la première condition est vraiment trop stricte alors que la deuxième semble être

plus proche de la vraie condition de stabilité. Ainsi, dans la suite, toutes nos optimisations par programmation linéaire seront effectuées en insérant la condition de stabilité *lâche* définie par l'équation (4.31).

4.3 Résultats pour une constellation MAQ-4

Cette section a pour objectif d'illustrer les performances de nos différents processus d'optimisation du profil d'irrégularité pour divers canaux OFDM. On ne s'intéressera dans cette section qu'à l'utilisation d'une unique constellation complexe de base, soit la MAQ-4. Nous présenterons tout d'abord les profils d'irrégularité obtenus par la minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information (que l'on nommera méthode $\min P_e$) pour ensuite présenter ceux obtenus par la minimisation du seuil ($\min S$) et ce, pour les deux méthodes d'optimisation développées dans les précédentes sections. En parallèle, nous discuterons la pertinence de nos approches à travers des simulations utilisant des codes LDPC de tailles variables.

4.3.1 Minimisation de la probabilité d'erreur pour une MAQ-4

Dans cette partie nous présentons les résultats obtenus par la minimisation de la probabilité d'erreur pour deux canaux sélectifs en fréquence, à savoir :

- Un canal ADSL typique défini par sa réponse impulsionnelle $\underline{h}_{ADSL}$:

$$\underline{h}_{ADSL} = [0.06, 0.72, 0.54, 0.36, 0.18, 0.114, 0.078, 0.054, 0.033, 0.018, 0.012].$$

- Un canal dont le spectre d'amplitude est non-monotone (afin de montrer que notre méthode d'optimisation peut également s'appliquer à ce type de canal) spécifié par sa réponse impulsionnelle $\underline{h}_{nm}$:

$$\underline{h}_{nm} = [-0.21, -0.17, 0.31, 0.68, -0.27, -0.15, 0.19, 0.13].$$

Rappelons que l'objectif de notre développement du critère d'optimisation par la minimisation de la probabilité d'erreur est de construire des codes LDPC avec de bonnes performances lorsque la taille N de ceux-ci est faible. Dans l'étude des performances des codes LDPC sur le canal BABG réalisée dans le premier chapitre, nous avons observé pour une taille N finie que la présence de cycles à l'intérieur du graphe factoriel dégradaient les performances. Cette dégradation étant de plus accentuée par un choix de $\bar{\rho}$ important, nous optimiserons alors nos codes LDPC avec les paramètres suivants : $\rho(x) = x^7$, $t_{max} = 10$. Le rendement de codage étant fixé à $R = 0.5$.

L'optimisation du profil d'irrégularité des codes LDPC pour le canal $\underline{h}_{ADSL}$ ou le canal $\underline{h}_{nm}$, a été effectuée par la minimisation de la probabilité d'erreur définie par l'équation (4.9) pour une valeur de $(E_b/N_0)^*$ et de L choisies suivant la méthode présentée dans la section 4.2.1.1. La taille du mot de code visée étant de 1024, nous avons fixé le nombre maximum d'itérations à $L = 30$. La minimisation de la probabilité d'erreur a été effectuée à $(E_b/N_0)^* = 3.48$ dB pour le canal ADSL et à $(E_b/N_0)^* = 2.3$ dB pour le canal $\underline{h}_{nm}$ (notons que ces valeurs de E_b/N_0 sont bien inférieures aux seuils obtenus avec les mêmes paramètres lors de l'optimisation par le critère de la minimisation du seuil, à savoir que le seuil pour le canal ADSL est $(E_b/N_0)^* = 5.48$ dB et que celui pour le canal $\underline{h}_{nm}$ est $(E_b/N_0)^* = 3.51$ dB).

Nous avons tracé sur les figures 4.2 et 4.3 les profils d'irrégularité obtenus après optimisation par $\min P_e$ respectivement sur le canal ADSL $\underline{h}_{ADSL}$ et le canal non-monotone $\underline{h}_{nm}$ ainsi que leur spectre d'amplitude. Rappelons que les bits d'information sont placés dans les sous-bandes présentant le meilleur RSB. Il est alors intéressant de noter qu'avec ce critère d'optimisation

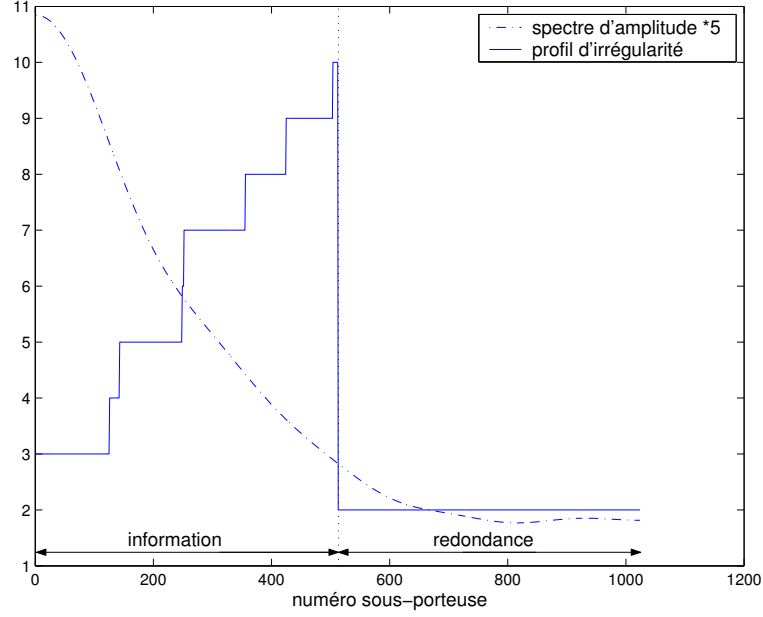


FIG. 4.2 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation de la probabilité d'erreur pour le canal ADSL dont le spectre d'amplitude multiplié par 5 est également représenté.

nous obtenons des profils d'irrégularité de codes LDPC allouant (par l'intermédiaire des positions p_i) aux bits de redondance les noeuds de données les plus faiblement connectés soit 2, alors que les bits d'information sont associés aux noeuds de données de plus forte connectivité; ainsi, $\lambda_2 = 1 - R$. Ceci signifie que notre critère d'optimisation a tendance à mieux protéger les bits d'information. Si on se concentre uniquement sur la largeur de bande support des bits d'information, nous constatons que plus le RSB dans les sous-canaux est faible plus la connectivité allouée aux bits d'information transmis dans ces sous-canaux est importante. Dans cette bande, le profil d'irrégularité semble donc "compenser les méfaits" du canal, effectuant ainsi une sorte d'égalisation. Les polynômes définissant les profils d'irrégularité représentés sur les figures 4.2 et 4.3 sont :

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{ADSL,opt}(x) = & 0.5x + 0.1221x^2 + 0.0165x^3 + 0.1035x^4 + 0.0029x^5 \\ & + 0.1016x^6 + 0.0675x^7 + 0.0772x^8 + 0.0087x^9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{nm,opt}(x) = & 0.5x + 0.0069x^2 + 0.111x^3 + 0.1202x^4 + 0.1455x^5 \\ & + 0.0263x^6 + 0.0102x^7 + 0.0058x^8 + 0.0745x^9. \end{aligned}$$

Nous avons ensuite simulé les codes LDPC obtenus avec notre processus d'optimisation par $\min P_e$ et effectué un ensemble de comparaison avec un code régulier, un code optimisé pour le canal BABG et ce, pour différentes tailles de mot de code. Dans nos simulations, le nombre de sous-porteuses est fixé à $N_{sp} = 512$, la longueur du préfixe cyclique à 12 et la longueur du mot de code à un multiple du nombre de sous-porteuses $N = kN_{sp}$.

Etant donné que les positions p_i des taux connexions font partie à part entière de notre algorithme d'optimisation du profil d'irrégularité et afin d'établir une comparaison qui soit la plus honnête, nous avons entrelacé les noeuds de données du code BABG rendant ainsi les positions

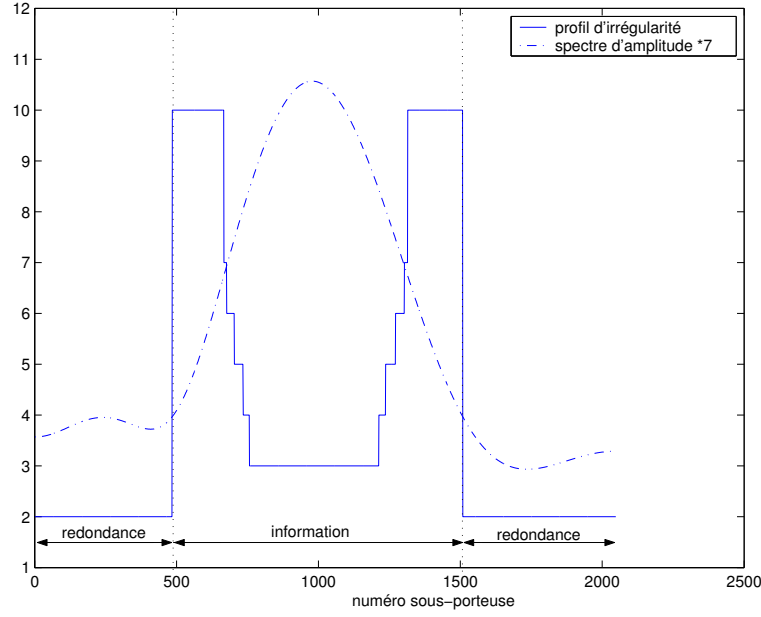


FIG. 4.3 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation de la probabilité d'erreur pour le canal $\underline{h}_{nm}$ dont le spectre d'amplitude multiplié par 7 est également représenté.

du code BABG indifférentes. Sur la figure 4.4, nous pouvons alors constater que l'optimisation du profil d'irrégularité telle que nous l'avons présentée permet de trouver un meilleur code avec, pour un taux d'erreur binaire de l'ordre de 10^{-5} , un gain de 1.2 dB par rapport au code BABG et de 1.4 dB par rapport au code régulier. Sur la figure 4.5, nous avons représenté le même type de performances pour le canal $\underline{h}_{nm}$ dont le spectre est non monotone. Notons que l'on retrouve des résultats de même nature que pour le canal ADSL, à savoir que le code optimisé par $\min P_e$ présente de meilleures performances que le code BABG et que le code régulier.

4.3.2 Minimisation du seuil pour une MAQ-4

Dans les sections précédentes, nous avons montré que l'optimisation des codes LDPC par le critère de la minimisation du seuil pouvait être effectuée en utilisant deux approches différentes, à savoir l'approche par évolution différentielle et l'approche par programmation linéaire. Étant donné que l'approche par programmation linéaire ne nécessite pas d'effectuer au préalable un choix délicat des degrés actifs, nous avons tout d'abord choisi d'optimiser les codes LDPC avec cette méthode. Puis en utilisant les degrés actifs résultants, nous validerons *a posteriori* l'approche développée avec l'algorithme d'évolution différentielle.

Nous avons optimisé le profil d'irrégularité des codes LDPC par la minimisation du seuil pour deux canaux OFDM sélectifs en fréquence : le canal ADSL présenté ci-dessus et le canal Proakis B plus sélectif que l'ADSL défini par sa réponse impulsionnelle $\underline{h}_B$ [67] :

$$\underline{h}_B = [0.407, 0.815, 0.407].$$

L'utilisation dans la section précédente d'un canal dont le spectre est non monotone n'avait que pour objectif d'illustrer la validité de notre approche pour des canaux dont l'allure spectrale était différente. Ceci étant validé, il nous a alors semblé plus intéressant dans le cadre de l'analyse

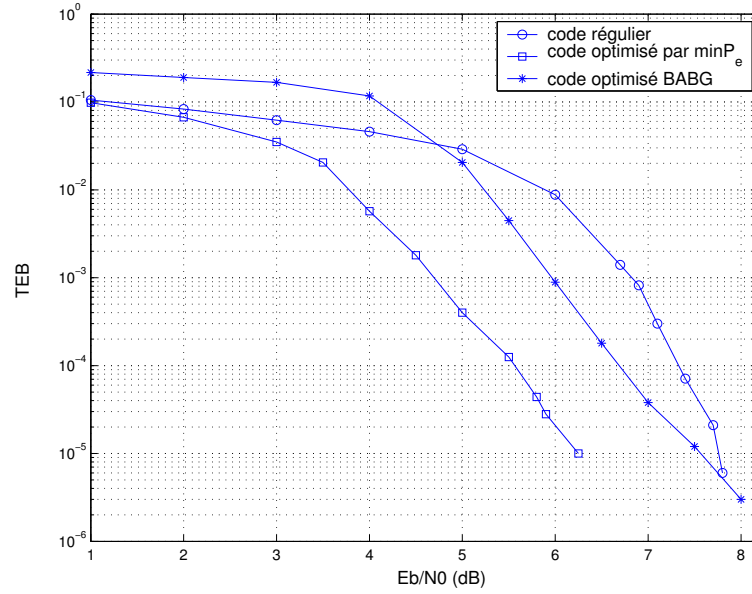


FIG. 4.4 – Comparaison des performances sur le canal ADSL des codes LDPC optimisés par $\min P_e$, optimisés pour le canal BABG et régulier. La taille du mot de code est $N = 1024$.

asymptotique des codes LDPC d'utiliser un canal plus sélectif.

L'optimisation du profil d'irrégularité est alors effectuée par la méthode décrite dans la section 4.2.2 c'est-à-dire que nous optimisons l'ensemble des paramètres définis par $[\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_{N_p}]$ de manière à minimiser le seuil et ce, pour ρ , R et t_{max} fixés. Les seuils de convergence $(E_b/N_0)^*$ sont calculés *a posteriori* à l'aide d'un algorithme d'évolution de densité exacte. Le choix de ρ est fait également *a posteriori* : nous présentons les codes optimisés dont la valeur de ρ a fourni le seuil de convergence le plus faible.

Profils d'irrégularité optimisés

Pour cette optimisation, nous fixons le rendement de codage à $R = 0.5$ et le taux maximum de connexion à $t_{max} = 200$. Les profils d'irrégularité des codes LDPC correspondant sont illustrés sur les figures 4.6 et 4.7. On peut faire deux remarques sur la forme de ces profils :

- tout d'abord, on peut constater que la répartition des degrés de connexion tend à *inverser* la forme du canal, c'est-à-dire à placer des taux de connexion importants aux endroits où le canal est de mauvaise qualité afin de compenser les évanouissements. Nous avons déjà observé ce phénomène avec le critère $\min P_e$, mais seulement sur la partie 'information' du mot de code. Dans le cas du critère $\min S$, comme la probabilité d'erreur *bloc* doit être nulle, c'est sur l'ensemble du mot de code que la répartition des degrés compense les évanouissements du canal,
- cependant, sur la première partie du mot de code, l'algorithme d'optimisation place des connexions à 3 au lieu de 2. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans cette partie du mot de code, le canal a un fort gain et fournit donc des messages de bonne qualité (niveau de bruit faible) au décodeur. Ces bons messages se propageront d'autant mieux dans le

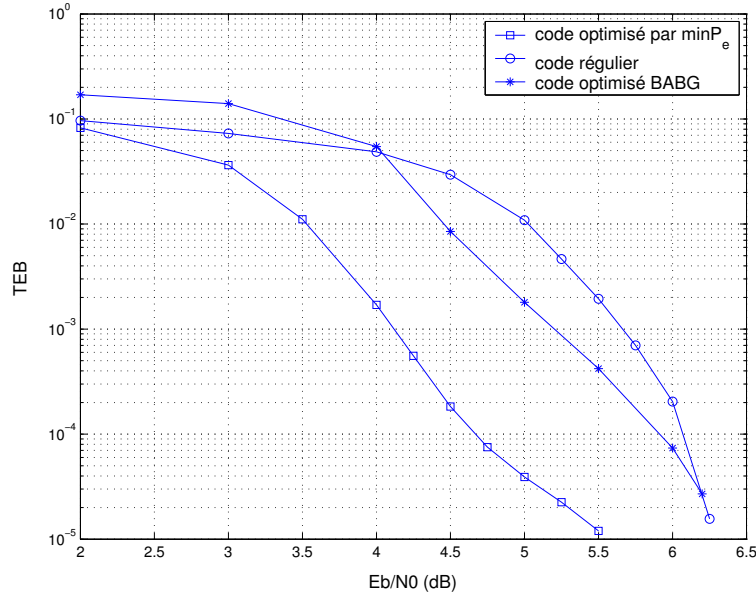


FIG. 4.5 – Comparaison des performances sur le canal h_{nm} des codes LDPC optimisé par $\min P_e$, optimisé pour le canal BABG et régulier. La taille du mot de code est $N = 1024$.

graphe, au cours des itérations, que les degrés des noeuds seront élevés.

La forme globale du profil d'irrégularité est donc caractéristique d'un compromis entre ces deux comportements.

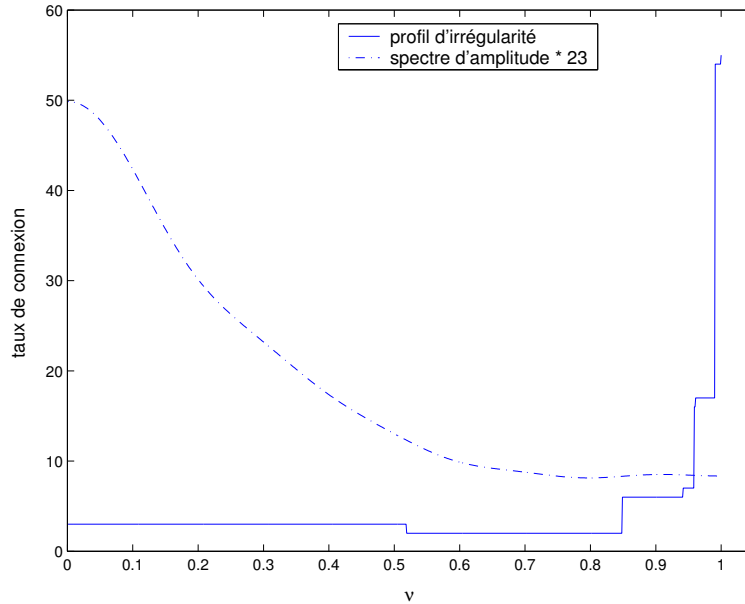


FIG. 4.6 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal ADSL dont le spectre d'amplitude multiplié par 23 est également représenté.

Les polynômes $\lambda_{ADSL,opt}(x)$ et $\lambda_{PB,opt}(x)$ correspondant aux codes globaux sont donnés par :

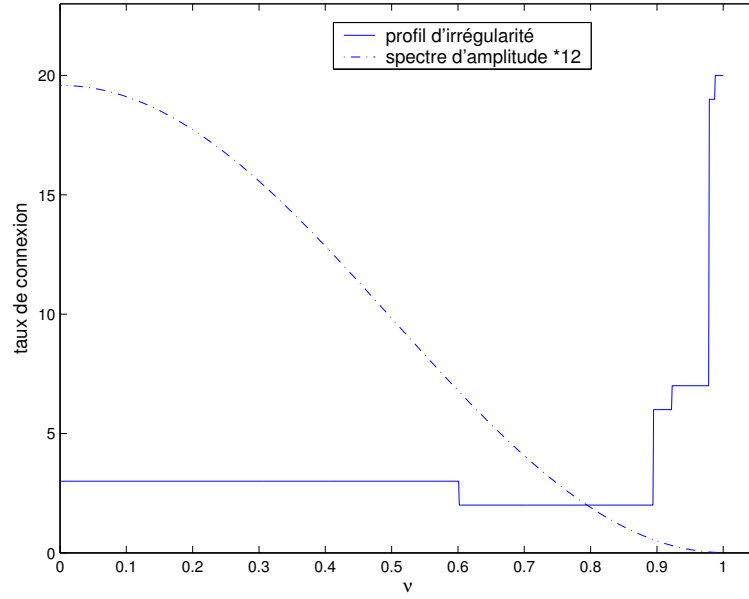


FIG. 4.7 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal Proakis B dont le spectre d'amplitude multiplié par 12 est également représenté.

– pour le canal ADSL :

$$\lambda_{ADSL,MAQ-4,opt}(x) = 0.1681x + 0.3967x^2 + 0.1414x^5 + 0.0305x^6 + 0.0078x^{15} + 0.1273x^{16} \\ + 0.1276x^{53} + 0.0003x^{54}$$

$$\rho_{ADSL,MAQ-4,opt}(x) = 0.13x^6 + 0.87x^7$$

– pour le canal Proakis B :

$$\lambda_{PB,MAQ-4,opt}(x) = 0.1747x + 0.5368x^2 + 0.0501x^5 + 0.1172x^6 + 0.0471x^{18} + 0.073968x^{19}$$

$$\rho_{PB,MAQ-4,opt}(x) = 0.25x^5 + 0.75x^6$$

Nous pouvons tout d'abord remarquer que la valeur de $\bar{\rho}$ optimisé pour nos canaux sélectifs en fréquence est largement inférieure à celle obtenue avec les mêmes paramètres (R et t_{cmax}) pour le canal BABG dans le chapitre 1 (à savoir $\bar{\rho} = 12$) rejoignant ainsi, un résultat qui commence à être connu et stipulant que plus le canal de propagation est "difficile" plus $\bar{\rho}$ est faible [26]. D'ailleurs, nous pouvons noter que $\bar{\rho}$ diminue lorsque la sélectivité fréquentielle du canal augmente. La seconde remarque que nous pouvons établir au vu de ces codes est que malgré le fait d'avoir autorisé un taux de connexion maximum à $t_{cmax} = 200$, le code optimisé pour le canal ADSL ne requiert qu'un taux de connexion maximum à $t_{cmax,ADSL} = 55$ et celui optimisé pour le canal Proakis B requiert un taux maximum à $t_{cmax,PB} = 20$. Ce phénomène est toujours à l'étude, une possibilité d'explication étant : l'utilisation de forts degrés de connexion diminue considérablement la proportion de bits présentant ces taux de connexion. Dans le cadre de transmissions sur un canal OFDM sélectif en fréquence lequel présente des sous-porteuses avec de très faibles RSB, il est peut être plus intéressant de diminuer le taux maximum de connexion pour avoir une proportion plus importante de bits avec ce taux maximum, pouvant ainsi combattre le fort bruit additif dans les sous-porteuses dégradées.

Performances des codes LDPC optimisés

Les seuils exacts des codes LDPC optimisés pour le canal ADSL et pour le canal Proakis B ainsi que la capacité de ces canaux sont donnés dans le tableau 4.1. Nous pouvons alors constater que pour le canal ADSL, l'écart entre le seuil obtenu et la capacité est de 0.65 dB et pour le canal Proakis B l'écart est de 1.85 dB. D'une manière générale, l'écart entre le seuil du code LDPC optimisé par *minS* avec la limite de Shannon augmente avec la sélectivité du canal de propagation.

MAQ-4, R=1/2	canal ADSL (3.01 dB)		canal Proakis B (1.18 dB)	
code optimisé	code ADSL	code BABG	code Proakis B	code BABG
$(E_b/N_0)^*$ (dB)	3.66	3.81	3.03	3.30

TAB. 4.1 – Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 0.5$ optimisés pour le canal ADSL, le canal Proakis B et le canal BABG. La capacité des canaux alimentés par une MAQ-4 est indiquée entre parenthèses.

Nous avons également effectué une comparaison avec un code optimisé pour le canal BABG avec les mêmes paramètres à savoir $R = 0.5$ et $t_{max} = 200$. De la même manière que pour la section précédente, pour effectuer une comparaison honnête avec le code BABG il est nécessaire d'entrelacer les noeuds de données. Par conséquent, les messages initialisant le décodeur LDPC seront distribués suivant une unique densité qui sera le mélange de chaque densité des log-rapports de vraisemblance, soit d'après (3.12) :

$$f_{u_0} = \sum_{k=1}^{N_{sp}} \alpha'_k \mathcal{N}\left(\frac{4\tilde{H}_k}{\sigma_b^2}, \frac{8\tilde{H}_k}{\sigma_b^2}\right). \quad (4.32)$$

Dans ces conditions, le canal OFDM sélectif en fréquence vu du décodeur LDPC est stationnaire. Le problème de l'optimisation des codes LDPC sur le canal OFDM sélectif en fréquence dans le cas stationnaire décrit ci-dessus (c'est-à-dire sans exploiter la non-stationarité du canal), est un problème d'optimisation qui devient linéaire et se traite de la même manière que l'optimisation sur le canal BABG. Comme l'optimisation se fait sous approximation Gaussienne, la forme de la densité initiale importe peu puisqu'elle est *projetée* sur un noyau Gaussien avant de se propager dans le graphe. Sans surprise, nous obtenons donc quasiment les mêmes codes que ceux obtenus par optimisation sur un canal non sélectif. Ceci vient renforcer la validité de notre approche et nous conforte dans l'idée d'exploiter la non-stationnarité du canal dans l'algorithme d'optimisation du code LDPC.

Ainsi, nous pouvons alors observer que plus le canal est sélectif dans le domaine fréquentiel plus l'écart entre le seuil de nos codes optimisés avec ceux des codes optimisés pour le canal BABG est important. Notons, que le fait de ne pas prendre en compte la non-stationarité du canal lors du processus d'optimisation se traduit par une perte de 0.15 dB pour le canal ADSL et de 0.3 dB pour le canal Proakis B.

Afin de contrôler la validité des seuils obtenus, valable uniquement pour $N \rightarrow \infty$, nous avons simulé les codes optimisés pour une très grande taille de mot de code $N = 65536$ décodés avec 500 itérations. La figure 4.8 représente les performances du code optimisé et du code BABG pour le canal ADSL alors que la figure 4.9 représente celles pour le canal Proakis B. Nous observons

bien l'effet de seuil des codes LDPC optimisés lesquels se déclenchent à environ 0.4 dB de plus que les seuils théoriques obtenus ci-dessus. Ainsi, ces courbes de performances corroborent les résultats du tableau 4.1.

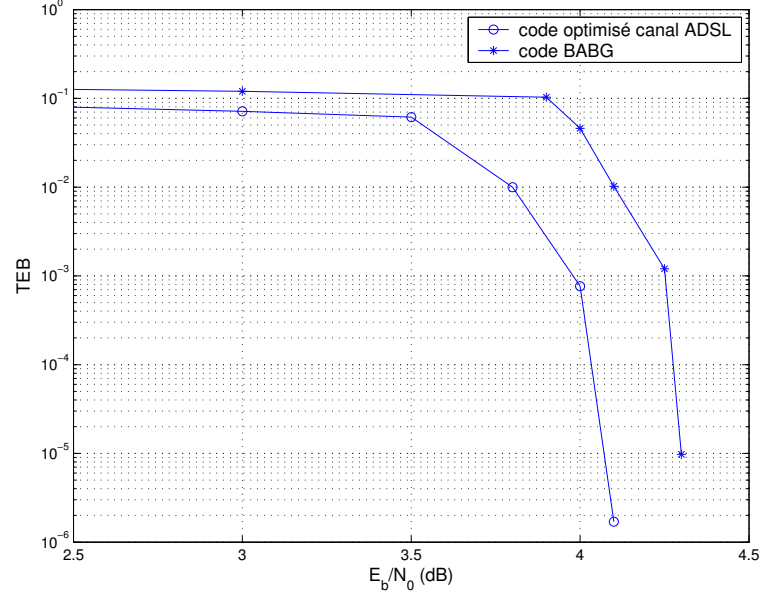


FIG. 4.8 – Performances du code LDPC optimisé pour le canal ADSL et du code optimisé pour le canal BABG utilisés lors d'une transmission OFDM sur le canal ADSL. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$.

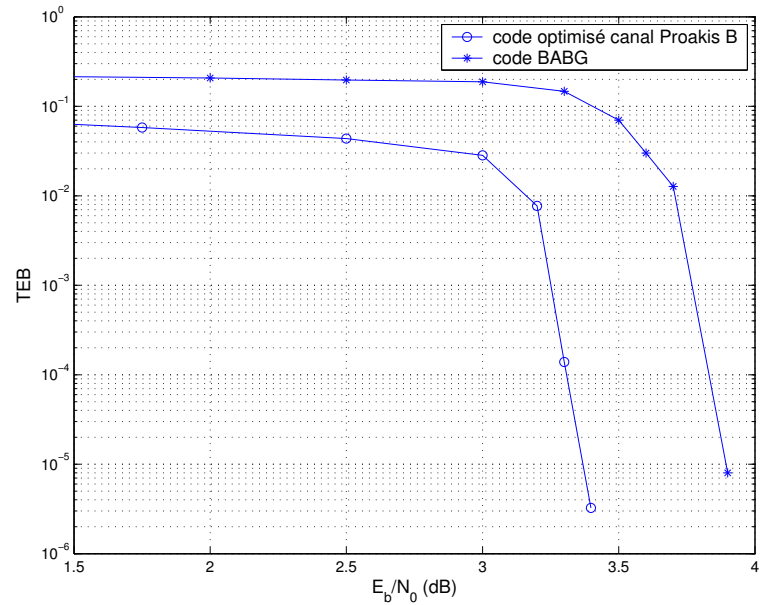


FIG. 4.9 – Performances du code LDPC optimisé pour le canal Proakis B et du code optimisé pour la canal BABG utilisés lors d'une transmission OFDM sur le canal Proakis B. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d'itérations est $L = 500$.

Confrontation des deux critères d'optimisation

En traçant sur les figures 4.10 et 4.11 les performances des codes LDPC obtenus par la méthode $\min P_e$ et par la méthode $\min S$ et ce, pour une taille de mot de code $N = 1024$ puis pour $N = 16384$ (décodé avec 200 itérations de propagation de croyance), nous souhaitons montrer les limites de l'approche par la minimisation de la probabilité d'erreur. En effet, nous pouvons observer que lorsque la longueur du mot de code est $N = 1024$, le code présentant les meilleurs performances est celui obtenu par la minimisation de la probabilité d'erreur alors que pour $N = 16384$ le code obtenu par la minimisation du seuil prend le dessus. Cette observation illustre alors bien l'importance du choix du critère d'optimisation lequel doit être fonction de la longueur N du mot de code ainsi que du nombre d'itérations disponible.

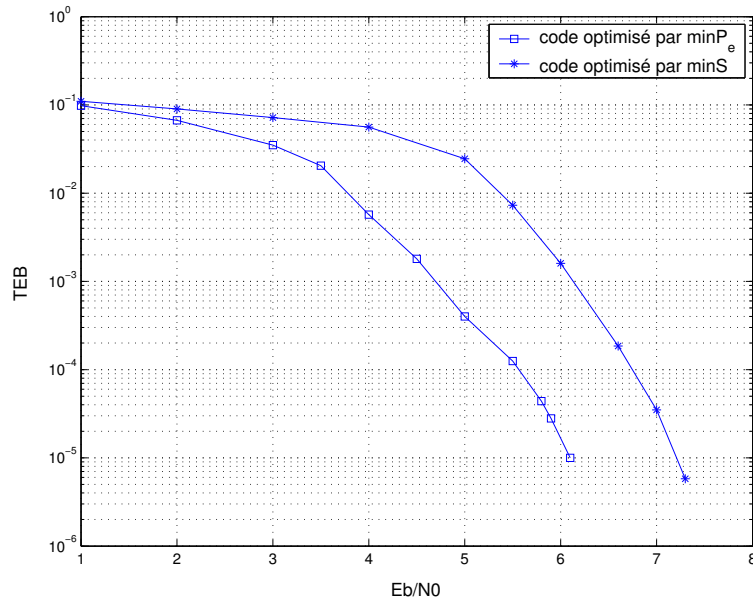


FIG. 4.10 – Comparaison des performances entre le code optimisé par $\min P_e$ et celui optimisé par $\min S$ pour le canal ADSL. La taille du mot de code est $N = 1024$.

4.4 Résultats pour un système avec allocation de bits

Nous avons vu dans les chapitres précédents que dans le cadre de transmissions OFDM sur un canal quasi-statique dans le temps, de meilleures performances étaient réalisables en utilisant un système de transmission avec allocation de bits. Nous présentons les résultats d'optimisation couplés avec un tel système dans cette section.

4.4.1 Hypothèses

Afin de se rapprocher des performances limites du système de transmission OFDM combiné avec un code LDPC sur les canaux sélectifs en fréquence supposés statiques dans le temps, nous ajoutons la possibilité d'effectuer une allocation de bits. Afin d'offrir un maximum de degrés de liberté au système d'allocation de bits, nous comparerons les performances d'une transmission

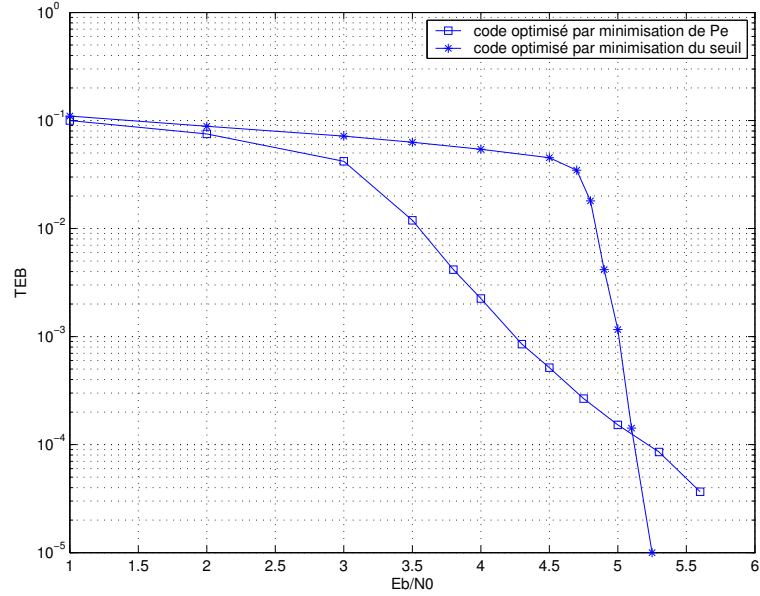


FIG. 4.11 – Comparaison des performances entre le code optimisé par $\min P_e$ et celui optimisé par $\min S$ pour le canal ADSL. La taille du mot de code est $N = 16384$.

OFDM modulée par une MAQ-16 avec son équivalente modulé par un ensemble de constellations issues d'une allocation de bits réalisée de manière à obtenir une efficacité spectrale équivalente à la MAQ-16 (Cf. chapitre 2). L'optimisation de l'irrégularité des codes s'effectuera par minimisation du seuil de convergence.

4.4.2 Minimisation du seuil pour une MAQ-16

De même qu'à la section 4.3.2, nous avons optimisé le profil d'irrégularité des codes LDPC pour une unique constellation MAQ-16 sur les canaux ADSL et Proakis B. Nous avons fixé le rendement de codage à $R = 0.5$ et $t_{cmax} = 200$. Les profils d'irrégularité résultants à cette optimisation sont représentés sur les figures 4.12 et 4.13. Les polynômes spécifiant l'irrégularité de ces codes sont donnés ci-dessous :

– pour le canal ADSL :

$$\lambda_{ADSL,MAQ-16,opt}(x) = 0.1507x + 0.4309x^2 + 0.0041x^6 + 0.1905x^7 + 0.0765x^{23} + 0.0425x^{24} + 0.0403x^{63} + 0.0643x^{64}$$

$$\rho_{ADSL,MAQ-16,opt}(x) = x^7$$

– pour le canal Proakis B :

$$\lambda_{PB,MAQ-16,opt}(x) = 0.1739x + 0.5436x^2 + 0.1647x^6 + 0.1177x^{19}$$

$$\rho_{PB,MAQ-16,opt}(x) = 0.25x^5 + 0.75x^6$$

Les seuils de ces codes LDPC ainsi que ceux obtenus avec le code optimisé pour le canal BABG sont indiqués sur le tableau 4.2. Notons que les écarts entre les seuils des codes optimisés avec la capacité des canaux sont du même ordre que pour le cas de la constellation MAQ-4. Cette remarque tient toujours lorsqu'on compare les seuils des codes optimisés avec ceux obtenus avec le code optimisé pour le canal BABG.

MAQ-16, R=1/2	canal ADSL (5.14 dB)		canal Proakis B (3.95 dB)	
code optimisé	code ADSL	code BABG	code Proakis B	code BABG
$(E_b/N_0)^*$ (dB)	5.77	5.92	5.65	5.92

TAB. 4.2 – Seuils de convergence obtenus par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 0.5$ optimisés pour le canal ADSL, le canal Proakis B et le canal BABG lorsque la constellation utilisée est une MAQ-16. La capacité des canaux à entrée MAQ-16 est indiquée entre parenthèses.

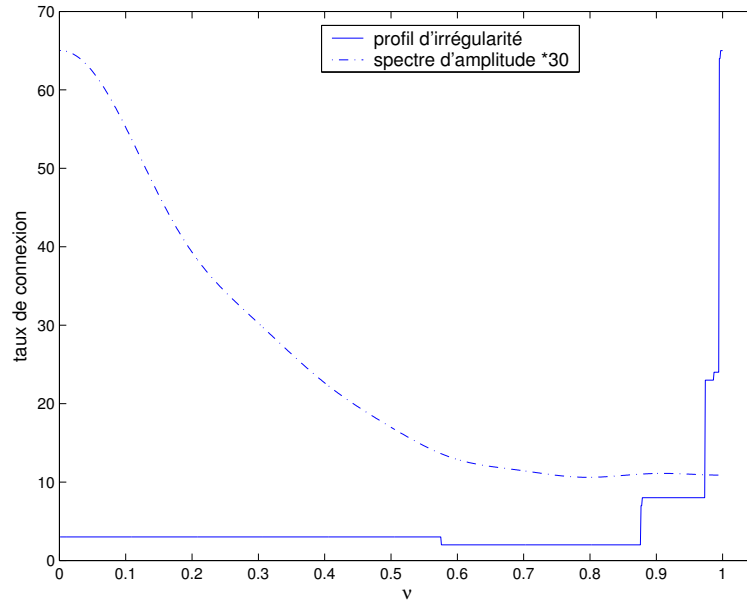


FIG. 4.12 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal ADSL dont le spectre d'amplitude multiplié par 30 est également représenté. La constellation utilisée est une MAQ-16.

Afin de corroborer ces résultats d'optimisation, nous avons simulé ces codes optimisés avec une très grande taille $N = 65534$ et tracé leurs courbes de performances sur les figures 4.14 et 4.15. Notons que ces codes simulés exhibent un effet de seuil à 0.6 dB des seuils théoriques présentés dans la table 4.2.

4.4.3 Optimisation des codes LDPC avec allocation de bits

Nous avons ensuite optimisé les profils d'irrégularité des codes LDPC pour un système de transmission OFDM sur lequel a été effectué une allocation de bits. Le nombre de bits alloués dans chaque sous-porteuses a été contraint à être pair et limité à 6. Les profils d'irrégularité résultants ont été tracés sur les figures 4.16 et 4.17.

Remarque 14 Les profils d'irrégularité représentés sur les figures 4.16 et 4.17 ont été tracés en fonction des proportions des noeuds de données et la nature des constellations indiquées sont celles qui alimentent ces noeuds de données. Étant donné que le nombre de noeuds de données connectés à un symbole dépend de la taille de celui-ci, il est important de ne pas faire d'amalgame entre les proportions des noeuds de données alimentés par ces symboles avec la proportion des

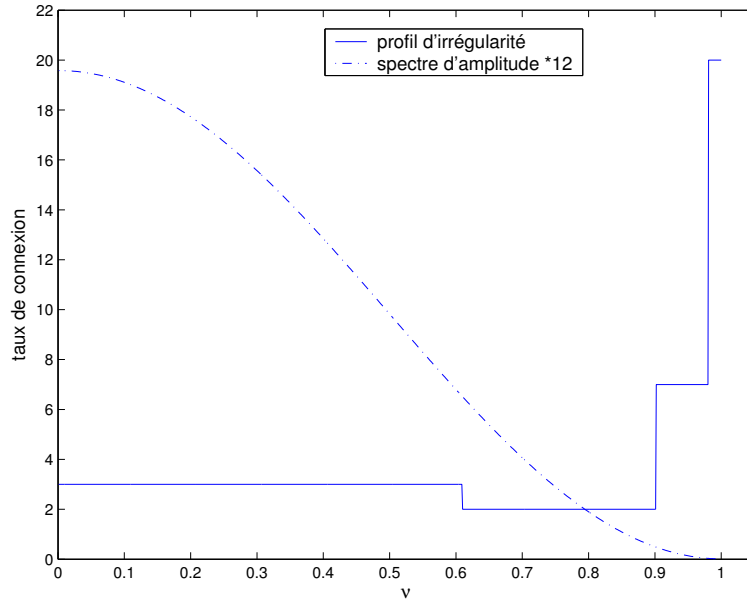


FIG. 4.13 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil pour le canal Proakis B dont le spectre d'amplitude multiplié par 12 est également représenté. La constellation utilisée est une MAQ-16.

symboles réellement émis à travers le canal. De plus, lors d'une allocation de bits il se peut que la bande utile du canal ne soit pas complètement exploitée ce qui nécessite alors d'utiliser un nombre plus important de constellations de grandes tailles. Ceci est d'ailleurs le cas lorsqu'on effectue l'allocation de bits sur le canal Proakis B et c'est donc pour cela que la proportion des noeuds de données connectés à une MAQ-64 est nettement plus importante que celle que l'on peut observer pour le canal ADSL.

Nous pouvons alors constater que la répartition des degrés de connection ne tend plus à inverser la forme du canal. Ceci s'explique en considérant que pour un système avec allocation, le nombre de bits émis dans chaque sous-bande n'est pas constant, ainsi la répartition des degrés n'est plus simplement fonction de l'allure spectrale du canal mais également de la répartition du nombre de bits émis (notée $Nb(\nu)$). L'interprétation de l'allure des profils d'irrégularité obtenus ne pourra alors se faire qu'en les comparant avec la distribution de l'énergie par bit émis en sortie du canal $E_{bs}(\nu) = |H(\nu)|^2 / Nb(\nu)$ et en tenant également compte du fait qu'à l'intérieur des grandes constellations telles que la MAQ-64, certains bits en fonction de leur position dans la constellation peuvent être très mal protégés. Ainsi, les taux de connection les plus importants sont alloués aux bits présentant les plus faibles énergies en sortie du canal $E_{bs}(\nu)$ de manière à mieux protéger ces bits rejoignant alors les résultats obtenus dans le cadre de l'utilisation d'une seule constellation.

Les polynômes définissant l'irrégularité des codes LDPC représentés sur les figures 4.16 et 4.17 sont :

– pour le canal ADSL :

$$\begin{aligned} \lambda_{ADSL,4bits,opt}(x) &= 0.1176x + 0.3699x^2 + 0.1421x^9 + 0.01083x^{10} + 0.0553x^{36} + 0.0211x^{37} \\ &\quad + 0.0713x^{38} + 0.0031x^{110} + 0.1111x^{111} \\ \rho_{ADSL,4bits,opt}(x) &= 0.5x^8 + 0.5x^9 \end{aligned}$$

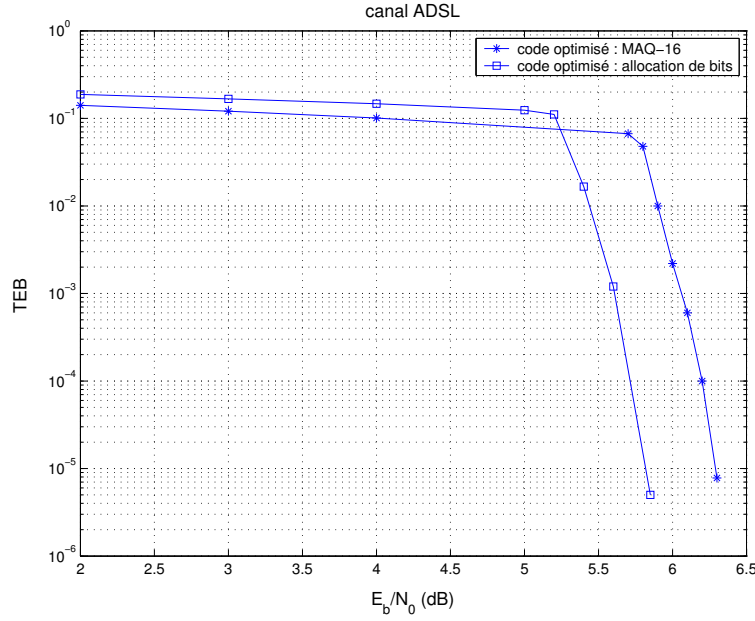


FIG. 4.14 – Performances des codes optimisés par la minimisation du seuil pour le canal ADSL dans le cas où une unique constellation MAQ-16 est utilisée et dans celui où un ensemble de constellations de différentes tailles issues d’une allocation de bits sont utilisées. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d’itérations est $L = 500$.

– pour le canal Proakis B :

$$\begin{aligned}\lambda_{PB,4bits,opt}(x) &= 0.1212x + 0.3751x^2 + 0.2536x^9 + 0.0067x^{10} + 0.0508x^{33} + 0.0711x^{34} \\ &\quad + 0.0138x^{35} + 0.0485x^{93} + 0.0591x^{94} \\ \rho_{PB,4bits,opt}(x) &= 0.75x^8 + 0.25x^9\end{aligned}$$

Pour les deux canaux, nous pouvons constater une augmentation de $\bar{\rho}$ par rapport à ceux obtenus dans le cas de la MAQ-16. Ceci est dû au fait que le processus d’allocation de bits atténue la sélectivité fréquentielle du canal, le rendant ainsi plus "facile". La conséquence de cette augmentation de $\bar{\rho}$ est l’utilisation de taux de connexion plus élevés à l’intérieur du profil d’irrégularité.

Les seuils de convergence des codes LDPC optimisés présentés ci-dessus obtenus par évolution de densité exacte sont indiqués dans le tableau 4.3. Le gain du code LDPC optimisé pour un système de transmission OFDM avec allocation par rapport à celui optimisé pour une transmission sans allocation (c’est-à-dire avec MAQ-16) est de 0.54 dB pour le canal ADSL et de 1.25 dB pour le canal Proakis B. Le canal Proakis B étant plus sélectif, il est donc logique que l’allocation de bits lui soit plus bénéfique. Dans ce tableau, est également reportée la capacité des deux canaux sélectifs en fréquence calculée pour obtenir une efficacité spectrale moyenne de 2 bits d’information par sous-porteuse. L’écart avec la capacité du code optimisé pour le canal ADSL est de 0.73 dB alors que pour le canal Proakis B cet écart est de 0.83 dB. Notons que pour ce dernier, cet écart par rapport à la capacité a fortement baissé comparé à celui rencontré dans le cas de l’utilisation d’une MAQ-16. Ceci pouvant s’expliquer par le fait que le canal Proakis B étant plus sélectif, l’allocation de bits lui est plus profitable.

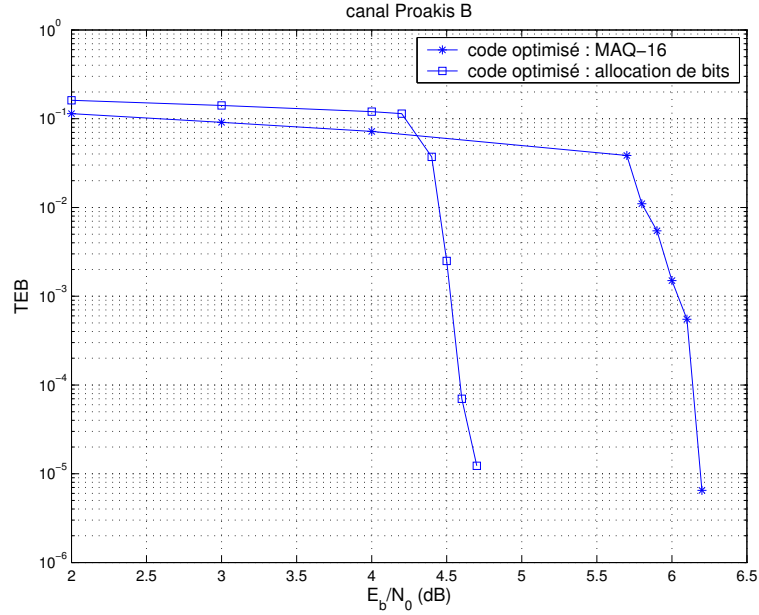


FIG. 4.15 – Performances des codes optimisés par la minimisation du seuil pour le canal Proakis B dans le cas où une unique constellation MAQ-16 est utilisée et dans celui où un ensemble de constellations de différentes tailles issues d’une allocation de bits sont utilisées. Le rendement de codage est $R = 1/2$, la taille du mot de code est $N = 65536$ et le nombre d’itérations est $L = 500$.

Nous avons également calculé les seuils du code optimisé pour le canal BABG pour une transmission avec allocation de bits sur les canaux ADSL et Proakis B. Le gain de notre code optimisé pour le canal ADSL par rapport au code BABG est symbolique et vaut 0.01 dB alors que pour le canal Proakis B (plus sélectif) ce gain de 0.11 dB. Cette diminution des écarts entre les seuils de nos codes optimisés avec ceux du code BABG lors du passage d’un système de transmission utilisant une MAQ-16 à un système de transmission avec allocation de bits est principalement due au fait que le processus d’allocation atténue la sélectivité fréquentielle du canal.

Sur les figures 4.14 et 4.15, nous présentons les résultats de simulations pour $N = 65534$ des codes optimisés dans le cadre d’une allocation de bits. Nous pouvons alors à nouveau constater que ces codes ont tendance à exhiber un effet de seuil se déclenchant à environ 0.6 dB de plus que les seuils théoriques du tableau 4.3 validant ainsi notre approche asymptotique.

4 bits/sous-porteuse, $R=1/2$	canal ADSL (4.5 dB)		canal Proakis B (3.37 dB)	
code optimisé	code ADSL	code BABG	code Proakis B	code BABG
$(E_b/N_0)^*$ (dB)	5.23	5.24	4.20	4.31

TAB. 4.3 – Seuils de convergence obtenues par évolution de densité des codes LDPC de rendement $R = 0.5$ optimisés pour le canal ADSL, le canal Proakis B et le canal BABG. Les constellations utilisées résultent d’une allocation de bits de manière à obtenir en moyenne 4 bits par sous-porteuse (à savoir que le nombre de bits maximum pouvant être alloué a été fixé à 6). La capacité des canaux est indiquée entre parenthèses.

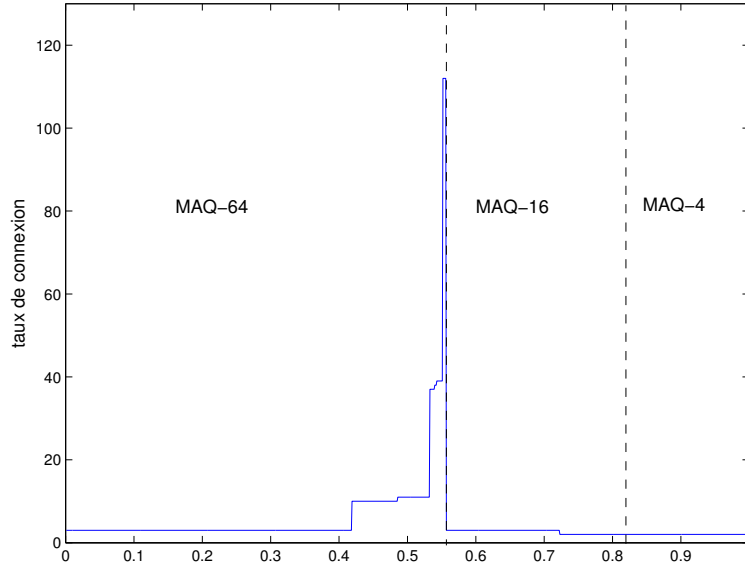


FIG. 4.16 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil dans le cadre d'une transmission OFDM avec allocation sur le canal ADSL (où l'axe des abscisses représente les proportions des noeuds de données).

4.5 Etude de robustesse vis à vis d'une mauvaise estimation du canal

Nos méthodes d'optimisations des codes LDPC pour le canal OFDM ont toutes été développées dans le cas idéal où le canal était statique et parfaitement connu à l'émetteur. Cependant, dans le cadre par exemple de transmissions ADSL, la seule information disponible à l'émetteur n'est qu'une estimation partielle du canal transmis du récepteur par voie de retour. Cette estimation étant obtenue au moyen d'une séquence d'apprentissage la plus courte possible, il devient alors intéressant d'étudier l'impact de la taille de cette séquence lors de l'estimation sur les performances des codes optimisés pour le canal parfaitement connu. Dans cette section, toutes nos simulations seront réalisées dans le cadre de l'utilisation d'une seule constellation MAQ-4.

Dans l'annexe B, nous présentons une méthode d'estimation au sens du maximum de vraisemblance du canal de propagation OFDM dans le cas où le canal est sélectif en fréquence et invariant dans le temps [61]. Pour effectuer cette estimation, il suffit d'insérer dans le bloc de symboles à émettre N_{pi} symboles connus appelés symboles pilotes soit $\underline{X}_p = [X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_{N_{pi}-1}}]^T$ où i_m ($m = 0, \dots, N_{pi} - 1$) représente la localisation du $m + 1^{ieme}$ pilote dans le bloc de symboles. Le nombre de pilotes utilisés lors de l'estimation du canal est habituellement évalué par le rapport entre celui-ci avec le nombre N_{sp} de sous-porteuse, soit :

$$r_p = \frac{N_{pi}}{N_{sp}}. \quad (4.33)$$

Nous souhaitons alors évaluer l'impact d'une telle estimation en fonction du ratio r_p sur les performances présentées dans la section 4.3 pour les cas suivants :

- Utilisation d'un code LDPC de petite taille optimisé par le critère de la minimisation de la probabilité d'erreur, nous présenterons alors les courbes de performances en fonction de r_p .

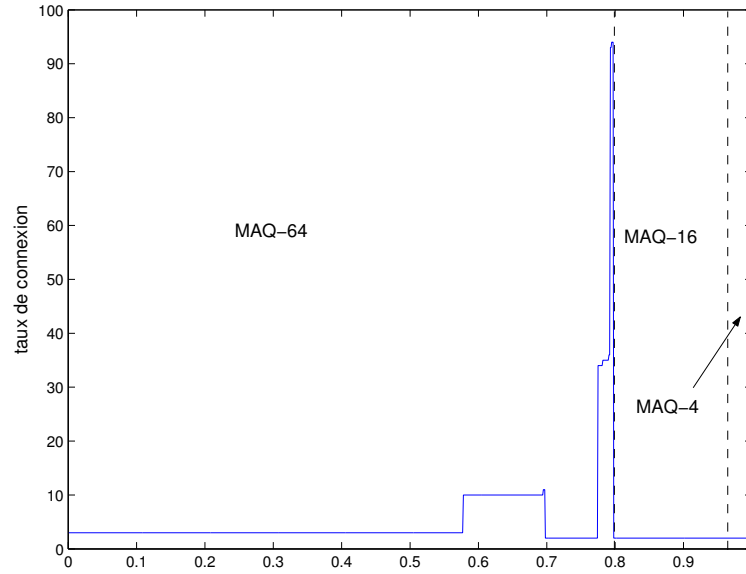


FIG. 4.17 – Profil d'irrégularité obtenu par minimisation du seuil dans le cadre d'une transmission OFDM avec allocation sur le canal Proakis B (où l'axe des abscisses représente les proportions des noeuds de données).

- Etude du comportement asymptotique du code LDPC optimisé par la minimisation du seuil de convergence, nous suivrons alors l'évolution des seuils en fonction de r_p .

Pour ce faire, nous avons tout d'abord réalisé plusieurs estimations (100) des canaux ADSL et Proakis B pour différents ratios r_p , à savoir $r_p = 1/4$, $r_p = 1/8$, $r_p = 1/16$ et $r_p = 1/32$. À partir de ces estimations, nous avons ensuite entrepris les simulations de manière à obtenir les performances moyennes en fonction de chaque r_p .

Etude de robustesse pour N petit

Sur la figure 4.18 sont représentées les performances moyennes en fonction du ratio r_p du code LDPC obtenu par la minimisation de la probabilité d'erreur binaire sur le canal ADSL et défini par le profil d'irrégularité de la figure 4.2. Les conditions de simulations sont les suivantes :

- Le nombre de sous-porteuses est fixé à $N_{sp} = 512$,
- la longueur du préfixe cyclique à 12,
- la longueur du mot de code à $N = 1024$ (décodé avec 30 itérations de propagation de croyance),
- et les estimations du canal ADSL ont toutes été effectuées à un RSB de 6 dB.

Les résultats obtenues sont tout à fait conformes à ce que l'on pouvait s'attendre à savoir que les performances se dégradent avec la diminution du nombre de symboles pilotes. Notons tout de même que la perte n'est que de 1 dB dans le cas où le ratio $r_p = 1/32$.

Etude de la robustesse pour $N \rightarrow \infty$

Dans ce paragraphe, nous souhaitons étudier le comportement asymptotique des codes LDPC pour une transmission OFDM utilisant une constellation MAQ-4 dans le cas où la connaissance du canal au récepteur provient d'une estimation de celui-ci. Pour ce faire, il est au préalable nécessaire d'établir l'expression des densités initiales d'un tel système de transmission. Comme

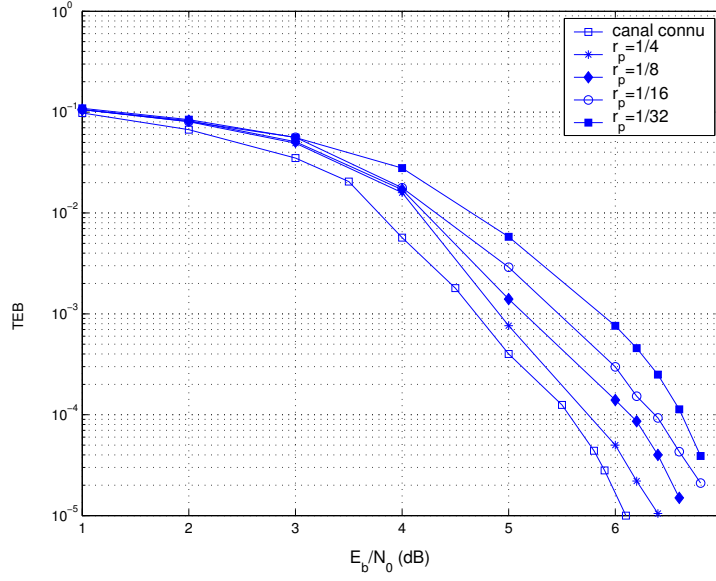


FIG. 4.18 – Evolution des performances du code optimisé par la minimisation de la probabilité d'erreur binaire pour le canal ADSL pour plusieurs valeurs du ratio r_p .

il a été établi dans le chapitre 2, le signal alimentant le décodeur R_k s'écrit :

$$R_k = K_k \cdot H_k \cdot X_k + K_k \cdot N_k \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp} \quad (4.34)$$

Si $\hat{H}$ dénote la transformée de Fourier de l'estimation du canal de propagation $\underline{H}$, les log-rapports de vraisemblance s'expriment alors par :

$$\begin{aligned} u_{02k} &= \log \frac{p(R_k | C_{2k} = 0)}{p(R_k | C_{2k} = 1)} = \log \frac{\sum_{X_k/C_{2k}=0} p(R_k | X_k)}{\sum_{X_k/C_{2k}=1} p(R_k | X_k)} \\ &= \frac{4}{\sigma_b^2} \text{Re}\{Y_k \hat{H}_k^*\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} u_{02k+1} &= \log \frac{p(R_k | C_{2k+1} = 0)}{p(R_k | C_{2k+1} = 1)} = \log \frac{\sum_{X_k/C_{2k+1}=0} p(R_k | X_k)}{\sum_{X_k/C_{2k+1}=1} p(R_k | X_k)} \\ &= \frac{4}{\sigma_b^2} \text{Im}\{Y_k \hat{H}_k^*\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Après avoir vérifié la condition de symétrie, on peut à nouveau se contenter d'utiliser le mot de code $\underline{0}$ pour déterminer la distribution des messages u_{02k} et u_{02k+1} . Ceci correspond pour une constellation MAQ-4 à l'émission du symbole $X_k = 1 + j$, $\forall k = 1, \dots, N_{sp}$. Ainsi, les log-rapports de vraisemblance deviennent :

$$u_{02k} = \frac{4}{\sigma_b^2} \left(\text{Re}\{H_k \hat{H}_k^*\} - \text{Im}\{H_k \hat{H}_k^*\} \right) + \frac{4}{\sigma_b^2} \text{Re}\{\hat{H}_k^* N_k\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (4.37)$$

$$u_{02k+1} = \frac{4}{\sigma_b^2} \left(\text{Re}\{H_k \hat{H}_k^*\} + \text{Im}\{H_k \hat{H}_k^*\} \right) + \frac{4}{\sigma_b^2} \text{Im}\{\hat{H}_k^* N_k\} \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (4.38)$$

Les messages u_{02k} et u_{02k+1} à l'entrée du décodeur sont alors distribués suivant une densité Gaussienne, soit :

$$f_{u_{02k}} = \mathcal{N} \left(\frac{4}{\sigma_b^2} \left(\text{Re}\{H_k \hat{H}_k^*\} - \text{Im}\{H_k \hat{H}_k^*\} \right), \frac{8|\hat{H}_k|^2}{\sigma_b^2} \right) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (4.39)$$

$$f_{u_{02k+1}} = \mathcal{N} \left(\frac{4}{\sigma_b^2} \left(\text{Re}\{H_k \hat{H}_k^*\} + \text{Im}\{H_k \hat{H}_k^*\} \right), \frac{8|\hat{H}_k|^2}{\sigma_b^2} \right) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (4.40)$$

Les log-rapports de vraisemblance associés aux bits C_{2k} et C_{2k+1} n'étant pas distribués sous la même loi, nous supposons alors la densité des messages alimentant le décodeur LDPC comme étant un mélange des deux densités $f_{u_{02k}}$ et $f_{u_{02k+1}}$, soit :

$$f_{u_{0k}} = \frac{1}{2} \mathcal{N} \left(\frac{4}{\sigma_b^2} \left(\text{Re}\{H_k \hat{H}_k^*\} + \text{Im}\{H_k \hat{H}_k^*\} \right), \frac{8|\hat{H}_k|^2}{\sigma_b^2} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{N} \left(\frac{4}{\sigma_b^2} \left(\text{Re}\{H_k \hat{H}_k^*\} - \text{Im}\{H_k \hat{H}_k^*\} \right), \frac{8|\hat{H}_k|^2}{\sigma_b^2} \right) \quad \forall k = 1, \dots, N_{sp}. \quad (4.41)$$

À partir de cette densité initiale, nous effectuons l'évolution de densité telle qu'elle a été présentée dans la section 3.2.2 du chapitre 3 et ainsi, nous pouvons déterminer le seuil de convergence des codes LDPC pour les transmissions OFDM avec estimation du canal au récepteur.

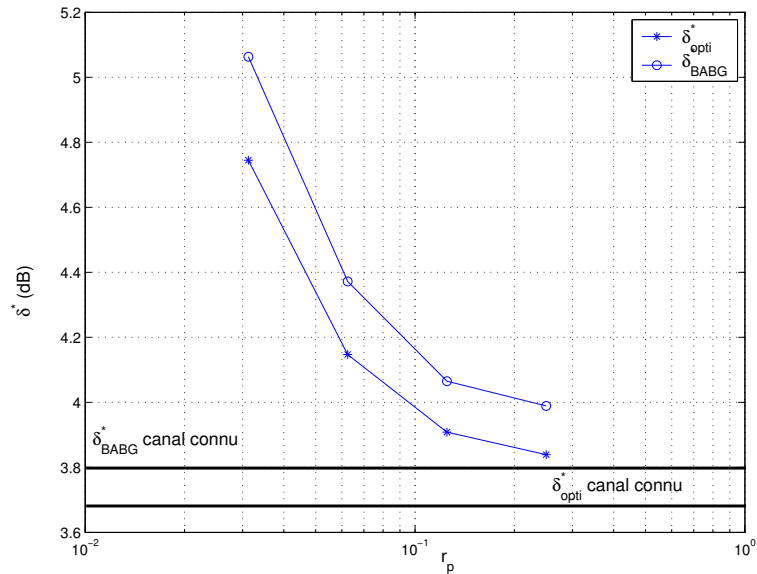


FIG. 4.19 – Evolution des seuils de convergence pour le canal ADSL du code optimisé ainsi que du code BABG en fonction du ratio r_p .

Les figures 4.19 et 4.20 représentent l'évolution de la valeur moyenne du seuil de convergence des codes optimisés pour les canaux ADSL et Proakis B en fonction du ratio r_p . Les estimations des canaux ADSL et Proakis B ont toutes été réalisées pour un RSB correspondant à la valeur du seuil exhibé par le code optimisé du canal considéré. Ainsi, nous observons que la valeur du seuil des codes LDPC optimisés croît lorsque le nombre de symboles pilotes diminue à savoir que

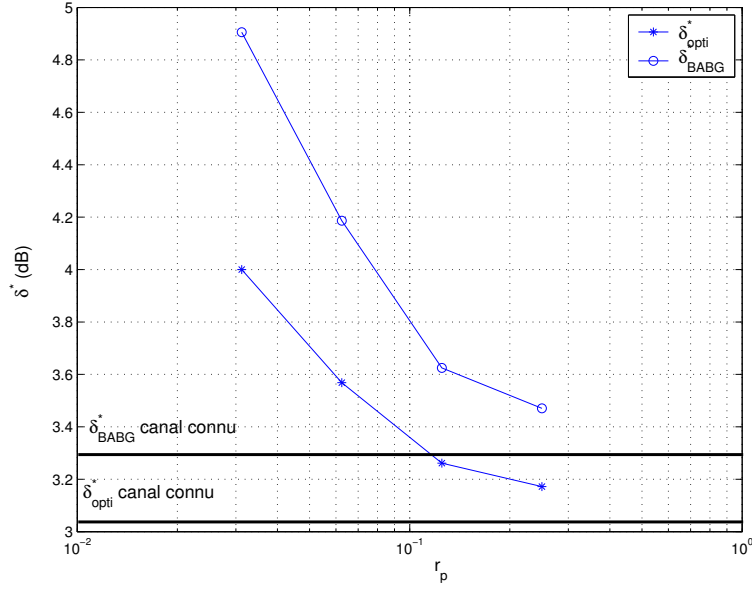


FIG. 4.20 – Evolution des seuils de convergence pour le canal Proakis B du code optimisé ainsi que du code BABG en fonction du ratio r_p .

cette augmentation, pour un ratio $r_p = 1/32$, est d'environ 1 dB pour le canal ADSL et de 0.9 dB pour le Proakis B. Mais ce qu'il y a de plus frappant, c'est lorsque nous comparons l'évolution de l'écart entre le seuil de nos codes optimisés pour les canaux sélectifs en fréquence avec celui du code optimisé pour le canal BABG. En effet, cet écart s'accroît lorsque le ratio r_p diminue soit, pour le canal ADSL cet écart passe de 0.15 dB où le canal est parfaitement connu du récepteur à 0.3 dB lorsque $r_p = 1/32$ et pour le canal Proakis B, cet écart passe de 0.27 dB à 0.9 dB. Ainsi, dans le contexte pratique des transmissions OFDM avec estimation du canal au récepteur, les codes LDPC optimisés pour les canaux sélectifs en fréquence exhibent des performances encore plus intéressantes que dans le cas idéal où le canal est parfaitement connu du récepteur dans le sens où les gains obtenus par rapport au code BABG s'amplifient dès lors que l'on s'écarte de plus en plus d'une estimation parfaite du canal. Ces observations nous confortent donc dans l'idée d'optimiser la structure des codes LDPC en exploitant la réponse fréquentielle du canal.

4.6 Conclusion

Ce dernier chapitre est principalement consacré à l'optimisation des codes LDPC ainsi qu'à la présentation des résultats. En plus d'avoir utilisé comme critère d'optimisation la minimisation du seuil de convergence $\min S$, nous avons introduit un critère original basé sur la minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information à un rapport signal sur bruit E_b/N_0 et après L itérations. Nous avons alors observé à travers les simulations que ce critère était à la base de la construction de bons codes LDPC de petites tailles (de mots de code).

Après avoir mis en avant les difficultés d'optimisation des codes LDPC par ces critères, lesquelles sont essentiellement liées à la non-linéarité des fonctions coûts, nous avons redéfini la paramétrisation du profil d'irrégularité permettant ainsi une mise en oeuvre originale de l'optimisation par programmation linéaire pour le critère $\min S$. Forts de cette approche, nous avons ensuite illustré l'intérêt d'exploiter la sélectivité fréquentielle lors de l'optimisation des codes

LDPC à travers la présentation des profils d'irrégularité optimisés ainsi que les valeurs des seuils de convergence résultants et ce, que ce soit dans le cadre de l'utilisation d'une seule constellation ou dans celui d'une allocation de bits.

Ce chapitre s'achève par une étude de la robustesse vis à vis d'une mauvaise estimation du canal au niveau du récepteur. Les résultats de cette étude, nous ont à nouveau conforté dans notre stratégie d'optimisation des codes LDPC.

Conclusion générale

Cette thèse est consacrée à l'optimisation du codage canal pour les transmissions multi-porteuses OFDM. De part leurs bonnes performances et la facilité d'optimisation de leurs paramètres, nous nous sommes tournés naturellement vers l'emploi de codes LDPC irréguliers. Ce travail constitue donc une première approche originale d'optimisation de codes LDPC pour les transmissions OFDM à travers un canal sélectif en fréquence.

Hormis l'introduction de la notion de profil d'irrégularité dans le chapitre 1 et le calcul des capacités des différents canaux présentés dans le chapitre 2 qui sont réellement des contributions originales de notre travail, la première partie de cette thèse est plus généralement consacrée à la présentation des codes LDPC et de l'état de l'art concernant leur optimisation, ainsi que des notions de bases sur les transmissions OFDM nécessaires à une bonne compréhension de ce travail.

Le chapitre 3 constitue une étape importante de cette thèse, puisqu'il introduit l'étude du comportement asymptotiques des codes LDPC lorsqu'ils sont utilisés pour des transmissions OFDM à travers un canal sélectif en fréquence. Réalisée par évolution de densité en utilisant la notion de profil d'irrégularité, cette étude originale permet maintenant de disposer d'un outil permettant de prédire les performances des codes LDPC sur un canal OFDM à entrée MAQ, phase préalable à toute tentative d'optimisation. Notons que cette étude a été réalisée aussi bien pour l'utilisation d'une unique constellation MAQ que pour un système avec allocation de bits. Ce chapitre introduit également l'évolution de densité sous approximation Gaussienne pour les transmissions OFDM réduisant ainsi nettement la complexité calculatoire.

Les apports majeurs de notre travail sont présentés dans le chapitre 4 et dérivent bien évidemment des résultats du chapitre 3. Une contribution importante concerne l'introduction d'un nouveau critère d'optimisation des codes LDPC pour un canal OFDM sélectif en fréquence, soit la minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information ($\min Pe$), pour lequel nous avons observé qu'il est bien adapté aux mots de codes de petites tailles. Après avoir également discuté des difficultés d'implantation des critères d'optimisation $\min Pe$ et $\min S$ (minimisation du seuil) dues principalement à leur non linéarité, l'introduction d'une nouvelle paramétrisation des codes LDPC a débouché sur le développement d'une méthode d'optimisation originale du critère $\min S$ par programmation linéaire, impliquant ainsi de disposer facilement de codes LDPC optimisés pour les canaux OFDM. Cette étape a également permis l'optimisation de codes LDPC pour les canaux OFDM avec allocation de bits. Les résultats présentés dans ce chapitre illustrent nettement l'intérêt d'exploiter la sélectivité fréquentielle du canal lors de l'optimisation de la structure des codes LDPC par rapport à l'utilisation d'une approche équivalente utilisant un code optimisé sur canal BABG. Enfin une telle approche ne pouvant être mise en oeuvre qu'à partir d'une connaissance du canal de propagation, nous avons montré que la connaissance partielle et approximative de celui-ci n'affectait pas notre processus d'optimisation pour les canaux

non-stationnaires.

Perspectives

Le travail accompli durant cette thèse constitue un point de départ à toute une série de travaux possibles. Plusieurs perspectives semblent alors se dessiner.

L'optimisation des codes LDPC par programmation linéaire telle qu'elle est présentée dans le chapitre 4 nécessite d'établir la condition de stabilité des codes LDPC. Cependant, dans le cadre d'une transmission sur un canal OFDM sélectif en fréquence, l'écriture de son expression n'est vraiment pas triviale, nous obligeant alors à utiliser une condition de stabilité *lâche*. Ainsi, il semble important de pouvoir exprimer cette condition de stabilité afin de pouvoir obtenir des codes LDPC moins contraints et donc plus performants.

L'association des codes LDPC avec l'utilisation de constellations non-binaires est intrinsèquement une structure de BICM-LDPC. Cependant, l'étape de calcul des log-rapports de vraisemblance initialisant le décodeur LDPC n'a été considérée que de façon bloc c'est-à-dire sans retour d'information *a priori* provenant du décodeur. Il paraît donc essentiel dans une première étape, d'utiliser un démapping itératif lors de l'étude de performances de nos codes LDPC optimisés et ensuite, dans une seconde étape, de pouvoir construire un processus d'optimisation tenant compte de ce démapping itératif.

Lors de l'étude de robustesse des codes LDPC par rapport à l'estimation du canal au récepteur, nous avons utilisé une méthode d'estimation du canal des plus classiques. Or, l'algorithme de décodage étant itératif, on peut envisager d'améliorer l'estimation du canal lorsque très peu de symboles pilotes sont employés, et ce, grâce à un récepteur itératif incluant une estimation de canal (turbo-estimation du canal).

Annexe A

Gradient tangentiel de la capacité d'un canal sélectif en fréquence avec entrée MAQ-M

On se propose dans cette annexe de calculer le gradient de la fonctionnelle $f(\underline{A}) = \sum_{k=1}^{N_{sp}} C_{k,MAQ-M}(A_k, |H_K|)$ définie dans le chapitre 2.

Soit α suffisamment petit et $\underline{A} \in S$, posons $\underline{B} = R \frac{\underline{A} + \alpha \underline{d}}{\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|}$ un vecteur se situant au voisinage de $\underline{A}$ et appartenant à S où $\underline{d}$ est un déplacement à "choisir" sur la sphère. Si la fonctionnelle f est dérivable en $\underline{A}$, alors d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, nous pouvons écrire :

$$f(\underline{B}) - f(\underline{A}) = \nabla_{\underline{A}} f^T (\underline{B} - \underline{A}) + o(\|\underline{B} - \underline{A}\|), \quad (\text{A.1})$$

où $\nabla_{\underline{A}} f = (\frac{\partial f}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial A_{N_{sp}}})^T$ représente le gradient de la fonction f . Ce développement de Taylor peut à nouveau s'écrire :

$$\begin{aligned} f(\underline{B}) - f(\underline{A}) &= f\left(R \frac{\underline{A} + \alpha \underline{d}}{\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|}\right) - f(\underline{A}) \\ &= \nabla_{\underline{A}} f^T \left(R \frac{\underline{A} + \alpha \underline{d}}{\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|} - \underline{A}\right) + o(\alpha) \\ &= \nabla_{\underline{A}} f^T \left(\frac{R(\underline{A} + \alpha \underline{d}) - \underline{A}\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|}{\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|}\right) + o(\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nous allons, tout d'abord, considérer la norme $\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|$,

$$\begin{aligned} \|\underline{A} + \alpha \underline{d}\| &= \sqrt{(\underline{A} + \alpha \underline{d})^T (\underline{A} + \alpha \underline{d})} \\ &= \sqrt{\|\underline{A}\|^2 + 2\alpha \underline{A}^T \underline{d} + \alpha^2 \|\underline{d}\|^2} \\ &= R \sqrt{1 + \frac{2\alpha \underline{A}^T \underline{d}}{R^2} + \frac{\alpha^2 \|\underline{d}\|^2}{R^2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Développons cette norme à l'ordre 1 en α , soit :

$$\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\| = R \left(1 + \frac{\alpha \underline{A}^T \underline{d}}{R^2}\right) + o(\alpha). \quad (\text{A.4})$$

En injectant ce résultat dans l'équation (A.2) nous obtenons :

$$f(\underline{B}) - f(\underline{A}) = \alpha R \nabla_{\underline{A}} f^T \frac{\left(\underline{d} - \frac{\underline{A}^T \underline{d}}{R^2} \underline{A}\right)}{\|\underline{A} + \alpha \underline{d}\|} + o(\alpha). \quad (\text{A.5})$$

Pour obtenir un développement limité à l'ordre 1 de l'équation (A.5), il suffit de considérer un développement limité à l'ordre 0 du dénominateur (le terme d'ordre 1 engendrant des termes d'ordre 2 de (A.5)). Par conséquent, nous avons :

$$f(\underline{B}) - f(\underline{A}) = \alpha \nabla_{\underline{A}} f^T \left(\underline{d} - \frac{\underline{A}^T \underline{d}}{R^2} \underline{A} \right) + o(\alpha). \quad (\text{A.6})$$

Soit $\underline{n}$ le vecteur normal à la sphère S et $\underline{\tau}$ le vecteur tangent à celle ci défini par : $\underline{\tau} \wedge \underline{n} = \underline{0}$, où $\wedge$ représente le produit vectoriel. Le vecteur déplacement $\underline{d}$ peut alors se décomposer dans cette base de la manière suivante : $\underline{d} = d_t \underline{\tau} + d_n \underline{n}$.

Remarque 15 Par définition, le vecteur $\underline{A}$ est normal à la sphère, soit $\underline{A} = R \underline{n}$.

Ainsi, nous pouvons réécrire l'équation (A.6) sous la forme suivante :

$$f(\underline{B}) - f(\underline{A}) = \alpha d_t \nabla_{\underline{A}} f^T \underline{\tau} + o(\alpha), \quad (\text{A.7})$$

où $\nabla_{\underline{A}} f^T \underline{\tau}$ représente le gradient tangentiel de f en $\underline{A}$. Le problème de l'optimisation de f sur la sphère S revient à la recherche des zeros du gradient tangentiel.

Annexe B

Estimation du canal de propagation pour les systèmes OFDM

Dans cet annexe, nous présentons une méthode classique d'estimation au sens du maximum de vraisemblance du canal de propagation OFDM dans le cas où le canal est sélectif en fréquence et invariant dans le temps [61]. Pour effectuer cette estimation, il suffit d'insérer dans le bloc de symboles à émettre $\underline{X}$ N_{pi} symboles connus appelés symboles pilotes soit $\underline{X}_p = [X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_{N_{pi}-1}}]^T$ où i_m ($m = 0, \dots, N_{pi} - 1$) représente la localisation du $m + 1^{ieme}$ pilote dans le bloc de symboles. La localisation optimale de ses symboles pilotes à l'intérieur du bloc à émettre est donné par la relation suivante [63] :

$$i_{m+1} - i_m = N_{sp}/N_{pi}, \quad 0 \leq m \leq N_{pi} - 1. \quad (B.1)$$

Soit, en d'autres termes, les symboles pilotes doivent être uniformément espacés de N_{sp}/N_{pi} . Posons $\underline{Y}_p$ le signal contenant les symboles pilotes reçu après DFT,

$$\underline{Y}_p = \underline{X}_p \cdot \mathbf{F}_p \underline{h} + \underline{B}_p, \quad (B.2)$$

où $\mathbf{F}_p$ est la matrice $N_{pi} \times L$ de Fourier définie uniquement aux fréquences déterminées par la localisation des symboles pilotes soit,

$$\mathbf{F}_{p,m,l} = e^{-j2\pi l i_m / N_{sp}}, \quad 0 \leq m \leq N_{pi} - 1, \quad 0 \leq l \leq L - 1,$$

et $\underline{B}_p$ est la transformée de Fourier du bruit additif. Multiplions terme à terme par $\underline{X}_p^*$ sur chacun des deux côtés de l'équation (B.2) (où $\cdot^*$ représente le conjugué) :

$$\underline{Z} = \underline{X}_p^* \cdot \underline{Y}_p = E_s \mathbf{F}_p \underline{h} + \sqrt{E_s} \underline{B}_p', \quad (B.3)$$

où E_s est l'énergie des symboles pilotes et $\underline{B}_p' = \frac{1}{\sqrt{E_s}} \underline{X}_p^* \cdot \underline{B}_p$ est statistiquement équivalent à $\underline{B}_p$. L'objectif étant maintenant d'estimer la réponse fréquentielle du canal à partir de l'observation $\underline{Z}$. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser un estimateur au sens du maximum de vraisemblance nécessitant seulement que $\underline{h}$ soit déterministe. Comparé à l'estimateur basé sur le critère de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne, cet estimateur s'est montré aussi efficace pour des RSB importants et intermédiaires. Cependant, lorsque le RSB est faible, une légère dégradation des performances apparaît. Ceci étant dû au fait que l'estimateur MMSE exploite des informations *a priori* du canal telles que les statistiques du canal, ainsi que le RSB.

L'estimation de $\underline{h}$ est alors donnée par :

$$\hat{\underline{h}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_p^H \underline{Z}, \quad (B.4)$$

où $\mathbf{D}$ est la matrice carré définie par : $\mathbf{D} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}}$, et $\cdot^H$ représente la transposition Hermitienne. Pour obtenir l'estimation du canal dans le domaine fréquentiel, il suffit d'appliquer la transformée de Fourier à $\hat{h}$, soit :

$$\underline{\hat{H}} = \mathbf{F} \hat{h} \quad (\text{B.5})$$

Bibliographie

- [1] M. Alard, and R. Lassalle, "Principles of Modulation and Channel Coding for Digital Broadcasting for Mobile Receivers," *EBU Technical Review*, no. 224, pp. 168–198, Aug. 1987.
- [2] A. Amraoui, S. Dusad, and R. Urbanke, "Achieving General Points in the 2-User Gaussian MAC Without Time-Sharing or Rate-Splitting by Means of Iterative Coding," in *Proc. of the ISIT'02 Symposium*, Lausanne, Switzerland, July 2002.
- [3] A. Ashikmin, G. Kramer, and S. ten Brink, "Extrinsic Information Transfer Functions : A Model and Two Properties," In *Proc. Conf. on Info. Sciences and Systems*, Princeton, March 2002.
- [4] A. R. S. Bahai, and B. R. Saltzberg, "Multi-Carrier Digital Communications : Theory and Applications of OFDM," *Kluwer Academic/Plenum Publishers*, New-York, 1999.
- [5] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 20, pp. 284–287, Sept. 1974.
- [6] M. Bellanger, "Digital Processing of Signals : Theory and Practice (3rd Edition)," *John Wiley and Sons*, UK, Feb. 2000.
- [7] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding : Turbo codes," In *Proc. 1993 IEEE Int. Conf. on Communications*, Geneva, Switzerland, pp. 1064–1070, 1993.
- [8] E. Boutillon, J. Castura, and F. Kschischang, "Decoder-First Code Design," In *Proc. of Turbo Codes*, Brest, France, pp. 459–462, Sept. 2000.
- [9] S. Ten Brink, "Iterative Decoding Trajectories of Parallel Concatenated Codes," In *3rd IEEE ITG Conf. Source and Channel Coding*, Munich, Germany, Jan. 2000.
- [10] A. G. Burr, and P. A. Brown, "Application of OFDM to Powerline telecommunications," In *Proc. 3rd IEEE Int. Symp. Power-Line Communications*, Lancaster, April 1999.
- [11] S. Ten Brink, G. Kramer, and A. Ashikhmin, "Design of Low-Density Parity-Check Codes for Modulations and Detection," *IEEE Trans. Communications*, à paraître en 2004.
- [12] G. Caire, G. Taricco, and E. Beglieri, "Bit-Interleaved Coded Modulation," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 44, pp. 927–946, May 1998.
- [13] J. Campello de Souza, "Discrete Bit Loading for multicarrier Modulation Systems," *PhD thesis*, Stanford University, 1999.
- [14] H. Cartan, and A. J. Sillberger, "Differential Calculus," *Kershaw Pub. Co.*, Dec. 1971.
- [15] R. W. Chang, "Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission," *The Bell System Tech. Journ.*, pp. 1775–1796, Dec. 1966.

- [16] J. Chen, and M. P. C. Fossorier, "Near Optimum Universal Belief Propagation Based Decoding of Low-Density Parity-Check Codes," *IEEE Trans. Communications*, vol. 50, no. 3, pp. 406–414, March 2002.
- [17] P. S. Chow, J. C. Tu, and J. M. Cioffi, "A Discrete Multitone Transceiver System for HDSL Applications," *IEEE J. Selec. Areas in Comm.*, vol. 9, pp. 895–908, Aug. 1991.
- [18] S. Y. Chung, R. Urbanke, and T. J. Richardson, "Analysis of Sum-Product Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Using a Gaussian Approximation," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 657–670, Feb. 2001.
- [19] S. Y. Chung, G. D. Forney, T. J. Richardson, and R. Urbanke, "On the Design of Low-Density Parity-Check Codes within 0.0045 dB of the Shannon Limit," *IEEE Commun. Letter*, vol. 5, no. 2, pp. 58–60, Feb. 2001.
- [20] M. C. Davey, and D. Mackay, "Low-Density Parity-Check Codes over $GF(q)$," *IEEE Communications Letters*, vol. 2, no. 6, pp. 165–167, June 1998.
- [21] G. B. Dantzig, "Programming of Interdependent Activities. II. Mathematical Model," *Econometrica*, no. 17, pp. 200–211, 1949.
- [22] G. B. Dantzig, "Linear Programming and Extensions," *Princeton, NJ : Princeton University Press*, 1963.
- [23] A. Debaynast, and D. Declercq, "Gallager Codes for Multiple Access," in *Proc. of the ISIT'02 Symposium*, Lausanne, Switzerland, July 2002.
- [24] D. Declercq, G. Gelle, and V. Mannoni, "Irregular Channel Coding for OFDM Transmission," in *Proc. of the ISCTA'01 Symposium*, Ambleside (England), 2001.
- [25] D. Declercq, and F. Verdier, "A General Framework for Parallel Implementation of LDPC Codes," *soumis à IEEE Trans. Information Theory*, mai 2003.
- [26] D. Declercq, "Optimisation et Performances des Codes LDPC pour les Canaux non-Standards," *Habilitation à diriger des recherches de l'université de Cergy-Pontoise*, Dec. 2003.
- [27] C. Di, D. Proietti, E. Telatar, T. Richardson, and R. Urbanke, "Finite length analysis of low-density parity-check codes," *Submitted IEEE Trans. on Information Theory*.
- [28] D. N. Doan, and K. R. Narayanan, "Design of Good Low Rate Codes for ISI Channels Based on Spectral Shaping," In *Proc. on Turbo Codes'03*, Brest, France, Sept. 2003.
- [29] C. Douillard, M. Jezequel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier, A. Glavieux, "Iterative Correction of Intersymbol Interference : Turbo Equalization," *Europ. Trans. on Telecomm.*, vol. 6, pp. 507–511, 1995.
- [30] A. W. Eckford, F.R. Kschischang and, S. Pasupathy, "Designing Very Good LDPC Codes for the Gilbert-Elliott Channel," In *Proc. 2003 Canadian Workshop on Inform. Theory*, Waterloo, Canada, 2003.
- [31] H. El Gamal, and A. R. Hammons Jr., "Analyzing the Turbo Decoder Using the Gaussian Approximation," In *Proc. 2000 IEEE Int. Symp. on Information Theory*, Sorrento, Italy, pp. 319, June 2000.
- [32] H. El Gamal, and A. R. Hammons Jr., "Analyzing the Turbo Decoder Using the Gaussian Approximation," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 671–686, Feb. 2001.
- [33] ETSI, "Radio Broadcasting Systems ; Digital Audio Broadcasting (DAB) to Mobile, Portable and Fixed Receivers," *ETSI EN 300 401*, May 2001.

-
- [34] ETSI, "Broadband Radio Access Networks (BRAN) ; HIPERLAN Type 2; System Overview," *ETSI EN 101 683*, Feb. 2000.
 - [35] A. J. Felstrom, and K. S. Zignagirov, "Time-varying Periodic Convolutional codes with Low-Density Parity-Check Matrix," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 45, no. 6, pp. 2181–2191, Sept. 1999.
 - [36] G. D. Forney Jr., and G. Ungerboeck, "Modulation and Coding for linear Gaussian Channels," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2384–2415, Oct. 1998.
 - [37] G. D. Forney Jr., S. Geman, and K. Kochanek, "Codes on Graphs : Normal Realizations Dynamic Programming and the Graphical Representation of Error-Correcting," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 520–548, Feb. 2001.
 - [38] M. P. C. Fossorier, M. Mihaljevic, and H. Imai, "Reduced Complexity Iterative Decoding of Low-Density Parity-Check Codes Based on Belief Propagation," *IEEE Trans. Communications*, vol. 47, no. 5, pp. 673–680, May 1999.
 - [39] B. J. Frey, and D. J. C. MacKay, "A revolution : Belief propagation in graphs with cycles," *In Advances in Neural Information Processing Systems 10. MIT Press : Cambridge, MA. Presented at the Neural Information Processing Systems Conference, Denver, Colorado, Dec. 1997.*
 - [40] H. Futaki, and T. Ohtsuki, "Low-Density Parity-Check (LDPC) Coded OFDM Systems," *In Proc. 2001 IEEE VTC fall*, vol. 1, pp. 82–86, Oct. 2001.
 - [41] R. G. Gallager, "Low-Density Parity-Check Codes," *IRE Trans. Information Theory*, no. 8, pp. 21–28, Jan. 1962.
 - [42] R. G. Gallager, "Low-Density Parity-Check Codes," *Number 21 in Research monograph series. MIT Press, Cambridge, Mass., 1963.*
 - [43] J. Hou, P. H. Siegel, and L. B. Milstein, "Performances Analysis and Code Optimization of Low-Density Parity-Check Codes on Rayleigh fading," *IEEE J. Selec. Areas in Comm., Issue on The Turbo Principle : From Theory to Practice 1*, vol. 19, no. 5, pp. 924–934, May 2001.
 - [44] J. Hou, P. H. Siegel, L. B. Milstein, and H. D. Pfister, "Capacity-Approaching Bandwidth-Efficient Coded Modulation Schemes Based on Low-Density Parity-Check Codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 49, no. 9, pp. 2141–2155, Sept. 2003.
 - [45] T. Kaitz, "FEC Performances for IEEE 802.16.3 OFDM," *IEEE 802.16abc-01/08rl*, July 2001.
 - [46] M. G. Kendall, and A. Stuart, "The Advanced Theory of Statistics," *Second Edition, Edition C. Griffin and Company LTD*, 1963.
 - [47] M. Lattuada, R. Posega, M. Mattavelli, and D. Mlynek, "Improving DVB-T Forward Error Correction by Concatenated Turbo Code Scheme," *In Proc. Packet Video'03*, Nantes, France, 2003.
 - [48] A. Kavcic, X. Ma, and M. Mitzenmacher, "Binary Intersymbol Interference Channels : Gallager Codes, Density Evolution and Code Performance Bounds," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 49, no. 7, pp. 1636–1652, July 2003.
 - [49] F.R. Kschischang, B.J. Frey, and H.-A. Loeliger, "Factor Graphs and the Sum-Product Algorithm," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 498–519, Feb. 2001.
 - [50] G. Lechner, "Convergence of Sum-Product Algorithm for Finite Length Low-Density Parity-Check Codes," *2003 Winter School on Coding and Information Theory*, Ascona Switzerland, Feb. 2003.

- [51] C. S. Lee, S. X. Ng, L. Piazzo, and L. Hanzo, "TCM, TTCM, BICM, and Iterative BICM Assisted OFDM-Based Digital Video Broadcasting to Mobile Receivers," *In Proc. 2001 IEEE VTC fall*, pp. 732–736, May 2001.
- [52] J. Li, K. R. Narayanan, E. Kurtas, and C. N. Georghiades, "On the Performance of High-Rate TPC/SPC Codes and LDPC Codes Over Partial Response Channels," *IEEE Trans. Communications*, vol. 50, no. 5, pp. 723–734, May 2002.
- [53] M. Luby, M. Mitzenmacher, A. Shokrollahi, D. Spielman, and V. Stemann, "Practical Loss-Resilient Codes," *In Proc. 30th Annu. ACM Symp. Theory of Computing*, pp. 150–159, 1997.
- [54] M. Luby, M. Mitzenmacher, A. Shokrollahi, and D. Spielman, "Analysis of Low Density Codes and Improved Designs Using Irregular Graphs and Belief Propagation," *In Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, pp. 117, 1998.
- [55] M.G. Luby, M. Mitzenmacher, A. Shokrollahi, and D. Spielman, "Analysis of Low Density Codes and Improved Designs Using Irregular Graphs," in *Proc of the 30th ACM STOC*, 1998.
- [56] D. MacKay, and R. M. Neal, "Near Shannon Limit Performance of Low-Density Parity-Check Codes," *Electron. Lett.*, vol. 32, pp. 1645–1646, Aug. 1996.
- [57] D. MacKay, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," *IEEE Trans. Information Theory*, Jan. 1999.
- [58] D. MacKay, S. T. Wilson, and M. C. Davey, "Comparison of Constructions of Irregular Codes," *IEEE Trans. Communications*, vol. 47, no. 10, pp. 1449–1454, Oct. 1999.
- [59] V. Mannoni, D. Declercq, and G. Gelle, "Optimized Irregular Gallager Codes for OFDM Transmission," *In Proc. 2002 IEEE Int. Symp. on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications*, Lisboa, Portugal, pp. 222–226, 2002.
- [60] V. Mannoni, D. Declercq, and G. Gelle, "Optimized Irregular LDPC Codes for Multi-carrier Modulations over Frequency Selective Channels," *In EURASIP-JASP, special issue on 'Multi-carrier Communications and Signal Processing'*, accepted, 2004.
- [61] M. Morelli, and U. Mengali, "A Comparison of Pilot-Aided Channel Estimation Methods for OFDM Systems," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 12, pp. 3065–3073, Dec. 2001.
- [62] K. R. Narayanan, D. N. Doan, and R. V. Tamma, "Design and Analysis of LDPC Codes for Turbo Equalization with Optimal and Suboptimal Soft Output Equalizers," *In Proc. of the 40th Annual Allerton Conference on Communications, Control, and Computing*, IL, USA, Oct. 2002.
- [63] R. Negi, and J. Cioffi, "Pilot Tone Selection for Channel Estimation in a Mobile OFDM System," *IEEE Trans. Cons. Electron.*, vol. 44, pp. 1122–1128, Aug. 1998.
- [64] S. O'Leary, and D. Priestly, "Mobile Broadcasting of DVB-T Signals," *IEEE Trans. Broadcasting*, vol. 44, no. 12, pp. 346–352, Sept. 2001.
- [65] J. Pearl, "Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference," *Morgan Kaufmann, Inc.*, 1998.
- [66] A. Peled, and A. Ruiz, "Frequency Domain Data Transmission Using Reduced Computational Complexity Algorithms," *In Proc. 1980 IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, Denver, USA, pp. 964–967, 1980.
- [67] J. G. Proakis, "Digital Communications (3rd edition)," *McGraw-Hill*, 1995.

-
- [68] J. C. Rault, D. Castelain, and B. Le Floch, "The Coded Orthogonal Frequency Division Multiplexing (COFDM) Technique, and its Applications to Digital Radio Broadcasting Towards Mobile Receivers," *In Proc. 1989 IEEE Globecom*, Dec. 1989.
 - [69] T. J. Richardson, and R. Urbanke, "Thresholds for Turbo Codes," *In Proc. 2000 IEEE Int. Symp. on Information Theory*, Sorrento, Italy, vol. 10, pp. 317, June 2000.
 - [70] T. J. Richardson, and R. Urbanke, "The Capacity of Low-Density Parity-Check Codes under Message-Passing Decoding," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 599–618, Feb. 2001.
 - [71] T. J. Richardson, M. A. Shokrollahi, and R. Urbanke, "Design of Capacity-Approaching Irregular Low-Density Parity-Check Codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 619–637, Feb. 2001.
 - [72] T. J. Richardson, and R. Urbanke, "Efficient Encoding of Low-Density Parity-Check Codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 638–656, Feb. 2001.
 - [73] A. Roumy, and D. Declercq, "Simple Near Optimal LDPC Code Design for the 2-users MAC Channel," *IEEE Int. Symp. on Information Theory*, Chicago, 2004.
 - [74] A. Shokrollahi, and R. Storn, "Design of Efficient Erasure Codes with Differential Evolution," *In Proc. 2000 IEEE Int. Symp. on Information Theory*, Sorrento, Italy, pp. 5, June 2000.
 - [75] H. Song, R. M. Todd, and J. R. Cruz, "Low-Density Parity-Check Codes for Magnetic Recording Channels," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 36, no. 5, pp. 2183–2186, Sept. 2000.
 - [76] M. Sipser, and D. A. Spielman, "Expander Codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 1710–1722, Nov. 1996.
 - [77] D. Spielman, "Linear-Time Encodable and Decodable Error-Correcting Codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 1723–1731, Nov. 1996.
 - [78] R. Storn, and K. Price, "Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic Adaptative Scheme for Global Optimization Over Continous Space," *Journal of Global Optimization*, vol. 11, pp. 341–359, 1997.
 - [79] R. M. Tanner, "A Recursive Approach to Low Complexity Codes," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 27, pp. 533–547, Sept. 1981.
 - [80] G. Ungerboeck, "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 28, no. 1, pp. 55–67, Jan. 1982.
 - [81] R. Van Nee and R. Prasad, "OFDM for Wireless Multimedia Communications," *Artech House*, London, 2000.
 - [82] N. Varnica and A. Kavcic, "Optimized Low-Density Parity-Check Codes for Partial Response Channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 7, no. 4, pp. 168–170, April 2003.
 - [83] U. Wachsmann, R. F. H. Fischer, and J. B. Huber, "Multilevel Codes :Theoretical Concepts and Practical Design Rules," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 45, pp. 1361–1391, July 1999.
 - [84] S. B. Weinstein, and P. M. Ebert, "Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. on Comm. Tech.*, vol. 19, no. 5, pp. 628–634, Oct. 1971.
 - [85] N. Wiberg, "Codes and Decoding on General graphs," PhD Thesis, Dept of Electricel Engineering, Linköping, Sweden, 1996. Linköping studies in Science and Technoly. Dissertation n° 440.

- [86] T. Zhang, and K. Parhi, “An FPGA Implementation of (3,6)-Regular Low-Density Parity-Check Code Decoder,” *submitted to EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2003.
- [87] W.Y. Zou and Y. Wu, “COFDM : An Overview,” *IEEE Trans. on Broadcasting*, vol. 41, no. 1, pp. 1–8, March 1995.
- [88] V. Zyablov, and M. Pinsker, “Estimation of the Error-Correction Complexity of Gallager Low-Density Codes,” *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 11, pp. 23–26, 1975.

Optimisation des codes LDPC pour les communications multi-porteuses

Résumé :

Un des inconvénients des transmissions OFDM est lié à l'émission de symboles à travers des sous-bandes fortement atténuées. En effet, ces symboles sont intrinsèquement affectés par un taux d'erreur binaire important nécessitant l'utilisation d'un codage canal performant (COFDM). Les codes correcteurs d'erreur que nous avons utilisés sont les codes LDPC. Nous en effectuons une large présentation incluant les notations et les outils algorithmiques indispensables. Afin de tenir compte de la non-stationnarité du canal OFDM sélectif en fréquence, nous avons alors généralisé la paramétrisation de ceux-ci en introduisant la notion de profil d'irrégularité. La chaîne de transmission COFDM (avec et sans allocation de bits) a été ensuite présentée, ainsi que les principales caractéristiques des canaux OFDM sélectifs en fréquence. La capacité de Shannon d'un tel système pour des entrées MAQ a été dérivée. Nous avons ensuite étudié le comportement asymptotique par évolution de densité des codes LDPC lors de transmissions OFDM à travers un canal sélectif en fréquence. Pour ce faire, nous montrons qu'il est possible de vérifier les hypothèses nécessaires à ce type d'analyse (symétrie du canal, indépendance des messages). Afin de pouvoir optimiser la structure des codes LDPC pour l'OFDM, une approximation Gaussienne de l'évolution de densité a alors été dérivée. Deux critères d'optimisation ont ensuite été introduits, l'un permettant d'obtenir le code présentant les meilleures performances asymptotiques (minimisation du seuil), et un critère original, mieux adapté aux hypothèses pratiques, basé sur la minimisation de la probabilité d'erreur sur les bits d'information.

Mots-clés : Codes LDPC, Modulation OFDM, Propagation de Croyance, Evolution de densité, Approximation Gaussienne, Optimisation, Allocation de bits.

Optimization of LDPC codes for the multi-carrier communications

Abstract :

The major drawback of OFDM transmissions is that some symbols might be subject to strong attenuations. Hence, these symbols are potentially affected by an important bit error rate which involves the use of channel coding. The channel codes used are LDPC codes for which we have presented the main notations and a decoding algorithm. Considering the nonstationarity of the OFDM frequency selective channel, we introduced a more general description of LDPC codes that we call irregularity profile. The COFDM communication system is then presented (without and with bit allocation) as well as the main characteristics of OFDM frequency selective channels. The channel capacity of this OFDM system with discrete QAM input has been derived. We have then studied the asymptotic behaviour of LDPC codes with density evolution for OFDM transmissions through a frequency selective channel. In order to make possible this analysis, we have shown that the necessary conditions (messages independence and channel symmetry) are checked for the OFDM channel. A Gaussian approximation of the density evolution has then been presented and used for the optimization of LDPC codes. Two optimization criteria have been introduced, one based on the minimization of the LDPC decoding threshold and another one based on the minimization of the bit error probability at a given SNR. The later criterion has shown better performances for practical applications.

Keywords : LDPC codes, OFDM modulation, Belief propagation, Density evolution, Gaussian Approximation, Optimization, Bit allocation.