



Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité : Mécanique

*Présentée et Soutenue Publiquement
par*

Tewfik GHOMARI

Le 31 / 01 / 2007

Sujet :

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION 3D VOLUMIQUE DE
LA MISE EN FORME DES CORPS PLASTIQUES CREUX**

JURY

Y.Q. Guo	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Président
M. Benzeggagh	Professeur, Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
K. Saanouni	Professeur, Université de Technologie de Troyes	Rapporteur
R. Ayad	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Directeur de thèse
D.E. Kerdal	Professeur, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran	Co-directeur
M. Ziane	Ingénieur Développement – ESI Group	Examineur
N. Talbi	Enseignant-Chercheur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Examineur

Remerciements

Le présent mémoire est la synthèse de cinq années d'étude doctorale effectuées entre l'Université de Reims Champagne-Ardenne et l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran (Algérie). Je tiens à remercier tout d'abord toutes celles et tous ceux qui, au cours de ces années, ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, le Professeur Rezak AYAD (URCA) pour m'avoir permis d'entreprendre ce travail de recherche, pour la confiance qu'il m'a accordé en m'accueillant dans son équipe, et le Professeur Djamel-Eddine KERAL (USTO) pour les encouragements qu'il m'a donnés le long de ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à :

Monsieur Malk BENZEGGAGH, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne et Monsieur Khemais SAANOUNI, Professeur à l'Université de Technologie de Troyes, pour avoir accepté de juger mon travail

Monsieur Ying Qiao. GUO, Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, pour avoir présider le jury.

Messieurs Mustapha ZIANE et Nabil TALBI pour l'intérêt qu'ils ont apporté à ce travail en acceptant de participer au jury

Mes remerciements vont aussi à :

- Mes amis Mahi et Karim pour les multiples discussions fructueuses que j'ai eu à développer avec eux tout le long de cette thèse.

- Mon épouse et mes enfants pour leur patience.

Enfin, je ne manquerai pas de remercier le ministère algérien de l'enseignement supérieur et de la recherche, pour m'avoir octroyé une bourse de douze mois dans le but de finaliser ma thèse.

Table de Matière.

1	Chapitre 1	10
1.1.	Contexte et objectifs	10
1.2.	Mise en forme des corps plastiques creux. Procédés et simulation numérique	11
1.2.1.	Quelques procédés connus de formage des corps plastiques creux (CPC)	13
1.2.1.1.	Extrusion-soufflage	13
1.2.1.2.	Injection soufflage	14
1.2.1.3.	Thermoformage	15
1.2.1.4.	Bi-étirage	17
1.2.2.	Modélisation de la mise en forme de CPC. Synthèse bibliographique	18
1.3.	Plan de la thèse	20
2	Chapitre 2	23
2.1.	Théorie des grandes Transformations	23
2.1.1.	Introduction	23
2.1.2.	Cinématique des grandes déformations	23
2.1.3.	Gradient de déformations	24
2.1.4.	Description des déformations	25
2.1.5.	Taux de contrainte	28
2.1.6.	Application aux structures axisymétriques	29
2.1.7.	Solide axisymétrique	29
2.2.	Lois de comportement hyper-élastique	30
2.2.1.	Introduction	30
2.2.2.	Définition de l'hyperélasticité	31
2.2.3.	Principaux modèles mathématiques pour les matériaux incompressibles	35
2.2.3.1.	Modèles basés sur les invariants du tenseur de dilatations	36
2.2.4.	Modèles basés sur les élongations principales	39
2.2.4.1.	Identification des constantes hyperélastiques	41
2.2.5.	Définition mathématique de la densité d'énergie pour les matériaux quasi-incompressibles	43
2.3.	Formulation variationnelle du problème d'équilibre et résolution numérique par éléments finis	46
2.3.1.	Equations d'équilibre	46
2.3.2.	Principe des travaux virtuels	47
2.3.3.	Formulation Lagrangienne Totale	48
2.3.4.	Méthodes de résolution	48
2.3.4.1.	Schéma de Newton Raphson	49
2.3.4.1.1.	Stratégie de résolution utilisées	50
2.3.4.2.	Schéma dynamique explicite	50
2.3.5.	Calcul de matrice tangente	52

3	Chapitre 3	54
3.1.	Modélisation du problème de contact	54
3.1.1.	Introduction	54
3.2.	Rappel de la définition d'un problème de contact	54
3.2.1.	Approche numérique du contact	55
3.2.2.	Lois de contact	58
3.2.3.	Lois de frottement (Modèle de coulomb)	59
3.3.	Méthodes numériques de gestion de contact	61
3.3.1.	Méthode de programmation mathématique	61
3.3.2.	Méthodes directes	61
3.3.3.	Méthodes des rigidités	62
3.3.3.1.	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	62
3.3.3.2.	Méthode de pénalité	63
3.3.3.2.1.	Schéma de type quasi-statique implicite	65
3.3.3.2.2.	Schéma du type dynamique explicite	66
3.3.3.3.	Méthode du Lagrangien perturbé	67
3.4.	Algorithme de recherche	68
3.4.1.	Introduction	68
3.4.2.	Recherche globale	71
3.4.2.1.	Algorithme de recherche de contact basé sur la hiérarchie de contact	73
3.4.2.1.1.	Territoire hiérarchique de contact	74
3.4.2.1.2.	Territoire de contact	75
3.4.2.1.3.	Procédure de recherche de contact	75
3.4.2.1.4.	Fréquence de recherche des nœuds de contact	78
3.4.3.	Algorithme de recherche de contact proposé	79
3.4.4.	Le tri binaire	82
3.4.5.	Recherche du contact local	82
3.5.	Conclusion	84
4	Chapitre 4	85
4.1.	Élément SFRQ-Axi solide axisymétrique (F.L.T)	85
4.1.1.	Approximation de la géométrie	85
4.1.2.	Formulation du modèle déplacement	85
4.1.3.	Déformations de Green Lagrange droit	88
4.1.4.	Principe du minimum de l'énergie potentielle totale	88
4.1.4.1.	Vecteur résidu	89
4.2.	Validation de l'élément hyperélastique SFRQ-Axi	92
4.2.1.	Plaque circulaire en gonflement libre	95
4.2.2.	Plaque circulaire enroulant un tore rigide	98
4.3.	Conclusion	104

5	<i>Chapitre 5</i>	105
5.1.	Applications	105
5.1.1.	Thermoformage d'un godet	105
5.1.2.	Poinçonnage d'une plaque circulaire	109
5.1.3.	Soufflage d'un biberon	113
5.1.3.1.	Bi étirage d'un biberon avec préforme courte	116
5.1.4.	Soufflage d'une bouteille.....	121
5.1.5.	Emmanchement d'un cylindre bloc	122
6	<i>Chapitre 6</i>	127
6.1.	Elément SFRH8 solide tridimensionnelle (FLT)	127
6.1.1.	Approximation géométrique	127
6.1.2.	Formulation du modèle déplacement.....	127
6.1.3.	Déformations de Green Lagrange.....	131
6.1.4.	Principe du minimum d'énergie potentielle totale	132
6.1.4.1.	Vecteur résidu	132
6.1.5.	Passage du repère local au repère global	137
6.1.5.1.	Repère covariant.....	138
6.1.5.2.	Repère orthonormée	138
6.2.	Validation de l'élément	139
6.2.1.	Plaque circulaire en gonflement libre	139
6.2.2.	Mise en forme d'un godet. Validation du contact 3D.....	141
6.3.	Conclusion	142
7	<i>Conclusion générale et perspectives</i>	143
7.1.	Conclusion	143
7.2.	Perspectives	143
8	<i>Références bibliographiques</i>	145

Liste des figures

Figure 1-1 Optimisation d'un calcul de mise en forme.....	11
Figure 1-2 Procédé de l'extrusion soufflage.....	14
Figure 1-3 Procédé de l'injection soufflage.....	15
Figure 1-4 Procédé de thermoformage d'un corps plastique creux	16
Figure 1-5 Procédé de thermoformage d'une pièce complexe	16
Figure 1-6 Descriptif des étapes de thermoformage d'une pièce complexe.....	17
Figure 1-7 thermoformage d'un tableau de bord de voiture.....	17
Figure 1-8 thermoformage d'une pièce longue -Toboggan.....	17
Figure 1-9 Procédé du bi-étirage.....	18
Figure 2-1 Définition des points matériels dans les configurations C^0 et C^t	24
Figure 2-2 Décomposition polaire.....	27
Figure 2-3 Domaine 2D analysé avec l'hypothèse d'axisymétrie.....	30
Figure 2-4 Mouvement d'un solide axisymétrique entre C^0 et C^t	30
Figure 2-5 Allure d'une courbe de traction du caoutchouc	36
Figure 2-6 Allure des courbes contraintes-déformations pour des matériaux hyperélastiques	36
Figure 2-7 Représentation du modèle de Mooney-Rivlin (Test uniaxial)	37
Figure 2-8 Représentation du modèle de Néo-Hookéen (Test uniaxial).....	38
Figure 2-9 Représentation du modèle d'Ogden (Test Uniaxial).....	40
Figure 2-10 Représentation du modèle de Yeoh (Test uniaxial)	41
Figure 2-11 Méthode de Newton-Raphson standard.....	50
Figure 2-12 Schéma de différences finies	51
Figure 3-1 Cinématique au voisinage d'un point candidat au contact.....	55
Figure 3-2 Référentiel du repère local 2D.....	56
Figure 3-3 Référentiel du repère local 3D.....	56
Figure 3-4 Etat Local 2D.....	57
Figure 3-5 Etat Local 3D.....	58
Figure 3-6 Graphes de contact et de frottement	59
Figure 3-7 Modèle de frottement : Tresca, Coulomb.....	60
Figure 3-8 Réactions normales de contact	64
Figure 3-9 Réactions tangentielle de contact	64
Figure 3-10 Subdivision de la recherche de contact	69
Figure 3-11 Technique de Pinball	72

Figure 3-12 Maillage virtuel d'un domaine plan.....	73
Figure 3-13 Maillage virtuel d'un domaine 3D.....	73
Figure 3-14 Territoire hiérarchique de contact.....	74
Figure 3-15 Territoire de contact 2D.....	75
Figure 3-16 Territoire de contact 3D.....	75
Figure 3-17 Zone commune de contact.....	76
Figure 3-18 Définition du territoire élargi hiérarchique d'un élément maître.....	77
Figure 3-19 Extension de la vérification aux éléments voisins.....	77
Figure 3-20 cas ambigus de trajectoires rencontrés en 2D.....	78
Figure 3-21 Territoire élargi de contact et fréquence de recherche.....	79
Figure 3-22 « Position code » de la boîte en fonction des Si xyz contenant le nœud.....	81
Figure 3-23 Cas de problème de contact difficile.....	82
Figure 3-24 Détection du passage du nœud par rapport à la droite.....	83
Figure 3-25 Détection du passage du nœud par rapport au plan.....	83
Figure 3-26 Zone d'angle Mort 2D.....	84
Figure 3-27 Zone d'angle Mort 3D.....	84
Figure 4-1 Cinématique de la fibre rotative.....	86
Figure 4-2 Élément SFRQ Axisymétrique.....	87
Figure 4-3 Interface de GID Pré traitement.....	93
Figure 4-4 Interface GID pré -traitement (Loi, Condition aux limite,..).....	94
Figure 4-5 GID Post-traitement (exemple un biberon).....	94
Figure 4-6 Plaque circulaire en gonflement.....	95
Figure 4-7 Pression en fonction de la flèche du point milieu.....	96
Figure 4-8 Répartition des épaisseurs.....	96
Figure 4-9 Vue de plaque gonflée en 3D.....	97
Figure 4-10 Temps CPU.....	98
Figure 4-11 Géométrie de plaque.....	100
Figure 4-12 Distribution de la répartition des épaisseurs (position initiale et finale).....	100
Figure 4-13 Vue en 3D de la plaque déformée.....	101
Figure 4-14 Courbe de charge pression déplacement.....	101
Figure 4-15 Temps CPU d'une plaque en flexion.....	102
Figure 4-16 Répartition des épaisseurs avec un maillage distordu.....	103
Figure 4-17 Répartition des épaisseurs avec un maillage non structuré.....	103
Figure 5-1 Thermoformage d'un godet.....	106

Figure 5-2 Distribution de l'épaisseur de la Plaque au pas 5	106
Figure 5-3 Distribution de l'épaisseur de la Plaque au pas 219	107
Figure 5-4 Distribution de l'épaisseur de la Plaque au pas final.....	107
Figure 5-5 Distribution de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne	108
Figure 5-6 Répartition de la normale le long du godet	108
Figure 5-7 Membrane circulaire hyper élastique déformée par un poinçon	109
Figure 5-8 Allure de la membrane après déformation	110
Figure 5-9 Variation de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne	110
Figure 5-10 Distribution de l'épaisseur.....	111
Figure 5-11 SFRQ-Axi avec un maillage 2x10.....	111
Figure 5-12 Q4-Axi avec un maillage 2x10.....	111
Figure 5-13 Poinçonnage de la plaque circulaire	112
Figure 5-14 Géométrie de la Préforme A du biberon.....	114
Figure 5-15 Géométrie de la Préforme B du biberon.....	114
Figure 5-16 Répartition de l'épaisseurs à partir une préforme (A) longue	115
Figure 5-17 Distribution de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne préforme A	115
Figure 5-18 Distribution de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne préforme B....	116
Figure 5-19 Soufflage d'un biberon sans étirage.....	117
Figure 5-20 Soufflage d'un biberon étiré à 80%	117
Figure 5-21 Soufflage d'un biberon étiré à 100%	117
Figure 5-22 Répartition des normales sur un biberon soufflé sans étirage	118
Figure 5-23 Répartition des normales sur un biberon soufflé avec un étirage à 80%.....	118
Figure 5-24 Répartition des normales sur un biberon soufflé avec un étirage à 100%.....	118
Figure 5-25 Géométrie de la paraison et du moule	121
Figure 5-26 Répartition des épaisseurs sur la bouteille soufflée.....	122
Figure 5-27 Montage du cylindre Bloc	123
Figure 5-28 Déplacement axial le long du rayon intérieur (Maillage non structuré).....	123
Figure 5-29 Déplacement axial le long du rayon intérieur (Maillage structuré).....	124
Figure 5-30 Maillage 8x5 éléments Q4-Axi	124
Figure 5-31 Simulation du montage forcé du cylindre bloc.....	126
Figure 6-1 Cinématique de la fibre rotative	128
Figure 6-2 Élément tridimensionnel SFRH8.....	130
Figure 6-3 Espace réel et référence de l'Elément SFRH8	130
Figure 6-4 Repères locaux dans une base covariante.....	137

Figure 6-5 repères locaux dans une base orthonormée	138
Figure 6-6 Pression en fonction de la flèche du point milieu.....	140
Figure 6-7 Répartition des épaisseurs	140
Figure 6-8 Mise en forme du godet. Validation du contact 3D.....	142

Liste des tableaux

Tableau 1-1 Plages de formabilité des principaux polymères utilisés en thermoformages (A : Amorphe, SC : Semi Cristallin) d'après [Jam98].	12
Tableau 5-1 Temps CPU des différents éléments hyper élastiques	109
Tableau 5-2 Simulation d'un bi étirage d'un biberon	119
Tableau 5-3 Simulation d'un soufflage d'un biberon sans étirage.....	120
Tableau 5-4 Temps CPU en fonction des différents types éléments finis	125
Tableau 6-1 Fonction de forme et leurs drivées pour un élément H8.....	129

1 Chapitre 1

1.1. Contexte et objectifs

La thèse s'inscrit dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre l'Université de Reims Champagne-Ardenne (URCA) et l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran (USTO). Le développement de celle-ci a été effectué parallèlement à mes activités d'enseignement. Les travaux ont démarré au début mars 2001 et avaient pour objectifs d'étudier la faisabilité d'un outil métier d'aide à la conception des corps plastiques creux en simulant leurs processus de mise en forme. Les critères requis sont la simplicité d'utilisation de l'outil, son aspect métier (thermoformage et/soufflage), une bonne précision des résultats associée à un temps de calcul optimal. D'autre part, son implémentation numérique devraient se faire sur un ordinateur standard de type PC. L'enjeu est de taille puisqu'il s'agit de trouver un compromis entre « simplicité d'utilisation » et « efficacité des résultats », loin des lourdeurs des codes commerciaux complexes, nécessitant souvent des compétences d'ingénieur très avisés.

Les étapes de développement suivantes permettent d'atteindre l'objectif annoncé précédemment :

- Etablir une stratégie globale permettant une optimisation de premier niveau du temps CPU. L'optimisation de 2nd niveau (développement pour le calcul parallèle) fera l'objet d'un développement futur.
- Formulation de nouveaux éléments finis performants à trois dimensions (axisymétriques et Tridimensionnels volumiques)
- Implémentation de lois hyper élastiques en premier lieu ;
- Développer et implémenter un bloc de contact généraliste efficace pour la gestion et la recherche des nœuds candidats au contact. Celui-ci doit être valable pour les cas 2D et 3D. De plus, il doit s'adapter à des problèmes complexes de type « self contact » qui feront l'objet de développements futurs.

La Figure 1-1 représente un organigramme décrivant la stratégie globale adoptée. Il conviendrait de souligner l'intérêt de disposer au sein de l'outil d'éléments finis spéciaux adaptés aux problèmes avec contact, en particulier pour une application de mise en forme des corps plastique creux. Un élément fini 3D axisymétrique basé sur la rotation cinématique d'une fibre spatiale a été proposé pour cela. Il a la particularité d'avoir deux nœuds par coté

lui permettant d'être mieux géré par un algorithme de recherche de contact. Une formulation détaillée est présentée dans le chapitre 4.

Optimisation d'un calcul de mise en forme : Stratégie globale

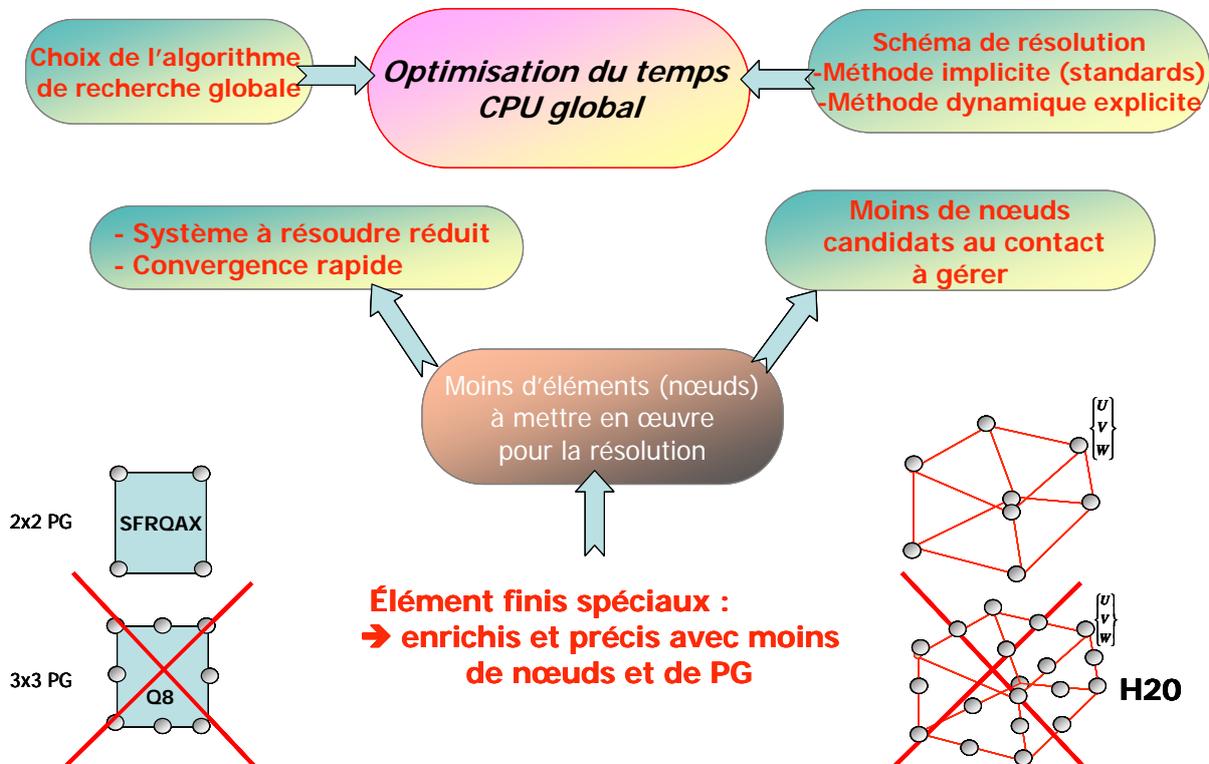


Figure 1-1 Optimisation d'un calcul de mise en forme.

1.2. Mise en forme des corps plastiques creux. Procédés et simulation numérique.

La première bouteille soufflée en PEBD (Polyéthylène basse densité) a été fabriquée par la société PLAX en 1947, dont l'emploi était destiné à contenir des liquides ménagés. Les premières bouteilles à usage alimentaire ont été fabriquées en PVC (Polyvinyl Chloride) durant les années 60, mais le premier engouement à employer ce genre de produit s'est manifesté avec la découverte du PET (Polyéthylène Terephthalate) en 1976. Celui-ci présentait de bonnes caractéristiques mécaniques et physiques, les premières bouteilles à y être fabriquées se comptaient par quelques milliers. 10 années plus tard, leur nombre a dépassé les cinq milliards grâce aux progrès technologiques liés à une meilleure maîtrise des procédés de transformation.

Le nombre de matériaux polymères dépasse actuellement les cinquante milles références. Chaque polymère est caractérisé par son propre comportement, du fait de son

monomère d'origine, du procédé de mise en œuvre et de l'application vers laquelle il est dessiné. Le potentiel de développement dans ce domaine est en conséquence loin d'être épuisé. Le tableau 1 regroupe les caractéristiques de « thermoformabilité » des principales classes de polymères utilisés en thermoformage, leur plage de mise en forme (plage de formage) et leurs températures caractéristiques (température de transition vitreuse, T_g , ou de fusion, T_f).

Polymère	Abréviation	Type	T_g (°C)	T_f (°C)	Plage de formage (°C)
Polystyrène	PS	A	90	-	130-182
Polychlorure de vinyle	PVC	A	90	-	100-155
Polyacryl butadiène styrène	ABS	A	90-120	-	130-180
Polyméthylméthacrylate	PMMA	A	100	-	150-190
Polycarbonate	PC	A	150	-	170-200
Polypropylène	PP	SC	5	165	150-165
Polyéthylène téréphthalate	PET	SC	70	255	120-180
Polyéthylène haute densité	PEHD	SC	-110	134	130-185

Tableau 1-1 Plages de formabilité des principaux polymères utilisés en thermoformages (A : Amorphe, SC : Semi Cristallin) d'après [Jam98].

Le thermoformage s'avère la technique la plus simple et la plus économique pour produire des corps plastique creux. Une seule pièce plastique soufflée ou thermoformée peut remplacer à elle seule un ensemble de pièces assemblées, ce qui réduit considérablement les coûts de fabrication. Le coût de fabrication des moules en aluminium est aussi réduit, rendant ce type de procédés très attractifs.

Les plastiques se sont imposés à notre société de consommation car les domaines d'applications ont très vastes. On y trouve des applications dans les industries automobiles, aéronautiques, pharmaceutiques, et en particulier dans le secteur de l'emballage des produits alimentaires et cosmétiques. Cet enthousiasme se justifie par la facilité de la mise en forme et par un choix diversifié de propriétés physico-chimiques permettant à certains polymères d'être préférés par rapport à d'autres....

1.2.1. Quelques procédés connus de formage des corps plastiques creux (CPC)

Le principe de base de la mise en forme des corps creux consiste à mettre une paraison pré-chauffée (feuille plate, cylindrique ou en forme de tubes à essai) dans un moule creux qui représente la géométrie finale du produit. Une dépression (vide) vient plaquer cette paraison contre les parois du moule. Le contact de la paraison chauffée avec le moule froid la rigidifie lui permettant de prendre une forme imprégnée par le moule.

Les principaux procédés de mise en forme de CPC sont :

- L'extrusion soufflage,
- L'injection soufflage,
- Le thermoformage,
- Le bi-étirage.

1.2.1.1. Extrusion-soufflage

L'extrusion soufflage est le procédé le plus répandu. Les matériaux utilisés en extrusion soufflage sont surtout le PEHD, PEBD, PVC et le PP. L'opération d'extrusion consiste à chauffer les granulats de plastique jusqu'à la température de fusion, les faire passer dans une vis à extrusion (vis d'Archimède) pour mélanger et homogénéiser le plastique. La tête de l'extrudeuse permet de donner une paraison de forme cylindrique. Cette dernière est ensuite introduite dans le moule de soufflage et une pression d'air vient plaquer les parois de celle-ci contre le moule froid. Le produit ainsi obtenu est ensuite éjecté du moule.

Les avantages de l'extrusion soufflage sont : une cadence élevée de la production, un coût assez bas des outillages et un grand choix de machines. Les principaux inconvénients sont le pourcentage élevé du rebut, le contrôle limité de l'épaisseur de la paroi et les opérations de garnissage qui sont ultérieures au soufflage.

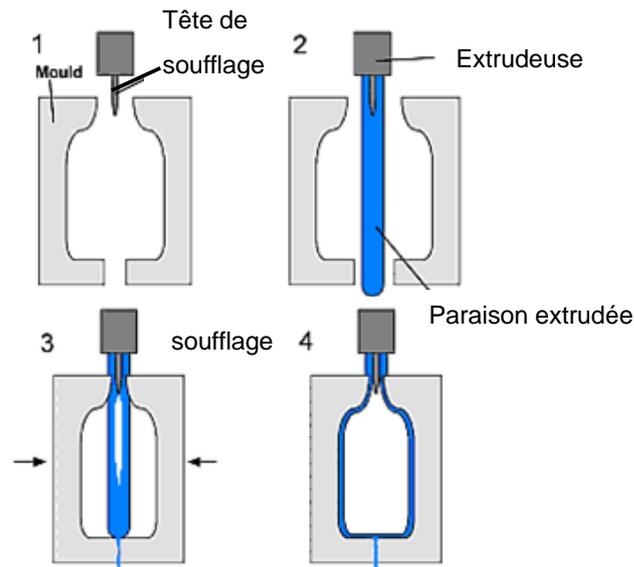


Figure 1-2 Procédé de l'extrusion soufflage

1.2.1.2. Injection soufflage

Les matériaux polymères utilisés en injection sont surtout le polystyrène, le PET et le PC. Le procédé d'injection soufflage comporte trois étapes. La première consiste à produire une préforme à partir d'une machine à injection (Figure 1-3). La préforme obtenue, souvent en forme d'un tube à essai avec une tête filetée, subit un traitement thermique préalable à l'opération de soufflage. La deuxième étape consiste à souffler cette dernière jusqu'à prendre la forme de l'empreinte du moule. L'ouverture du moule et l'éjection du produit final constitueraient la troisième et dernière étape.

Les principaux avantages de l'injection soufflage sont l'inexistence de déchets, une meilleure finition du produit et un meilleur contrôle de l'épaisseur. Cependant, son coût est plus élevé que celui de l'extrusion soufflage.

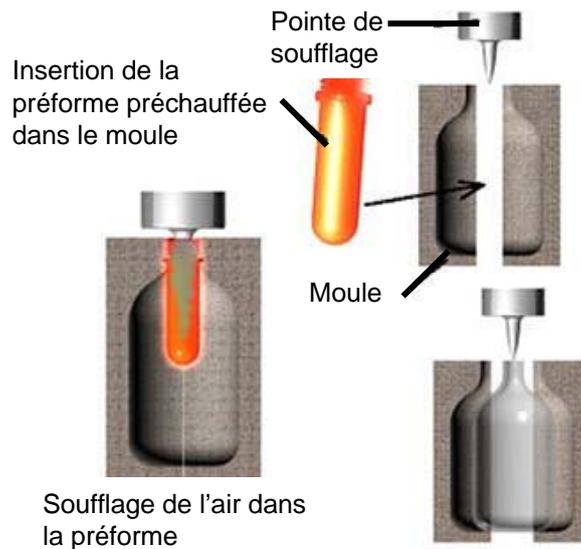


Figure 1-3 Procédé de l'injection soufflage

1.2.1.3. Thermoformage

Les principaux matériaux utilisés en thermoformage sont le PET, le PVC et le Polystyrène. Dans le procédé de thermoformage une feuille thermoplastique appelée aussi paraison, préalablement extrudée, est conditionnée thermiquement, puis placée et fixée au dessus d'une cavité qui représente le moule. Une pression en général négative (faire le vide dans la cavité du moule) vient plaquer la feuille contre le moule froid (voir Figure 1-4). Le thermoplastique change de phase et devient rigide ; le produit obtenu est éjecté par la suite.

Le thermoformage de certaines pièces complexes, tel que les tableaux de bords de voitures ou le châssis intérieur de réfrigérateurs peuvent nécessiter plusieurs phases. Le procédé commence par un traitement de la feuille plastique thermiquement (voir Figure 1-5a), s'en suit un gonflage (pression positive) de la paraison (voir Figure 1-5 b) suivi d'un déplacement du moule (Figure 1-5 c). L'opération se termine par l'application d'une pression négative dans la cavité du moule.

Les avantages du thermoformage sont :

- Equipement moins coûteux que celui employé dans les techniques d'injection soufflage et autres procédés équivalents
- Possibilité de réalisation de pièces à parois plus fines et de pièces de grande taille
- Ajustement moins coûteux des outillages.

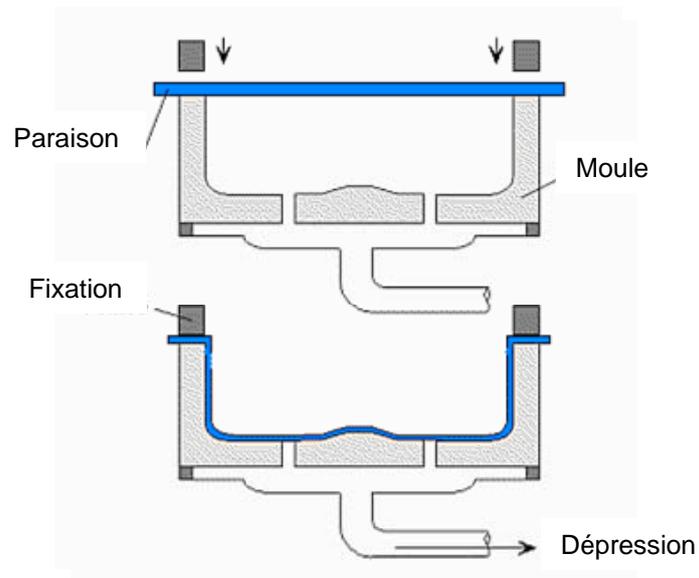


Figure 1-4 Procédé de thermoformage d'un corps plastique creux

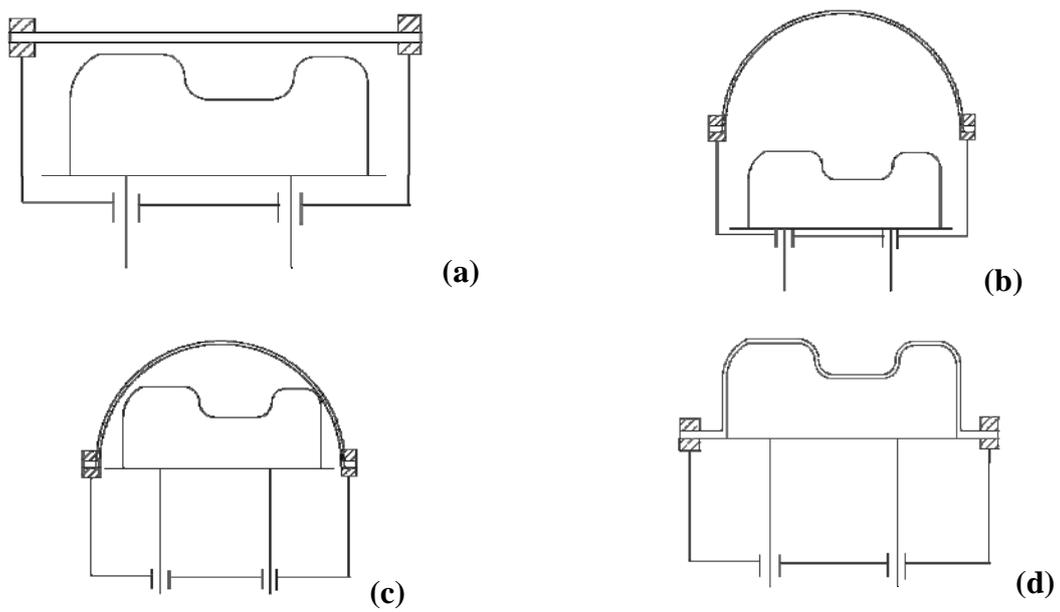


Figure 1-5 Procédé de thermoformage d'une pièce complexe

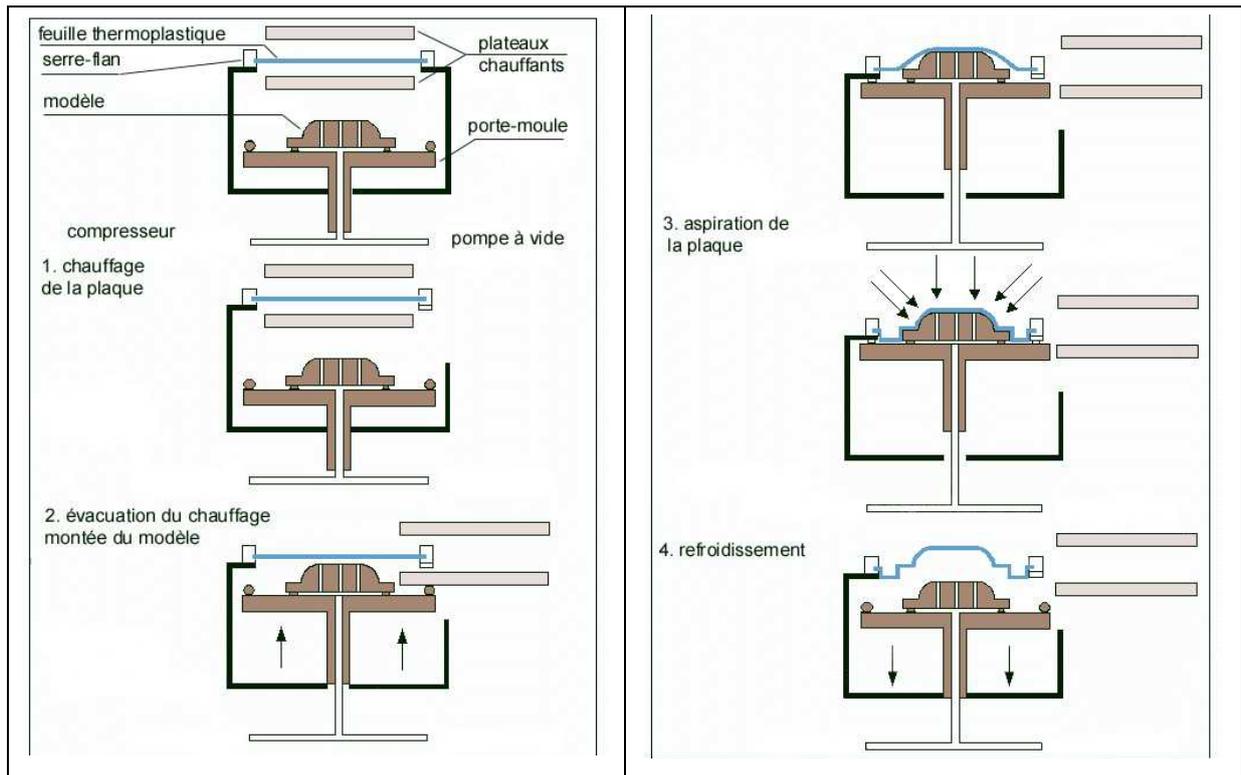


Figure 1-6 Descriptif des étapes de thermoformage d'une pièce complexe



Figure 1-7 thermoformage d'un tableau de bord de voiture.



Figure 1-8 thermoformage d'une pièce longue - Toboggan.

1.2.1.4. Bi-étirage

Cette technique devenue célèbre avec l'apparition des bouteilles de 2L en PET, consiste à étirer dans le sens longitudinal la paraison, à l'aide d'une action mécanique (poinçon, vérin) avant son soufflage. Le bi-étirage est utilisé en thermoformage, mais surtout en injection soufflage. Les produits obtenus sont dits bi-étirés, car ils sont étirés dans le sens longitudinal par l'action mécanique et dans le sens radial par la pression de soufflage (Figure 1-9). Ce procédé permet une meilleure transition de phases et une meilleure texturation cristalline.

L'organisation microstructurale résultante permet souvent d'améliorer les propriétés mécaniques en termes de ductilité et de résistance au déchirement, ainsi que les propriétés de perméabilité aux gaz dont la maîtrise est cruciale pour les applications « emballage ».

L'alignement des molécules suivant les deux plans (axial et radial) améliore aussi la transparence du produit final, réduit le flambement et augmente surtout la rigidité. L'accroissement de cette dernière confère au produit un meilleur comportement face aux chocs. La technique de bi-étirage peut fournir des produits avec des épaisseurs de parois très faibles, ce qui réduit le poids du produit final de 20 à 30%.

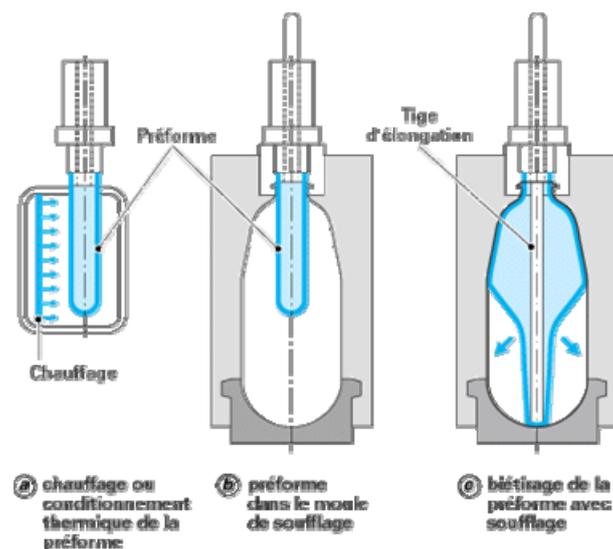


Figure 1-9 Procédé du bi-étirage

1.2.2. Modélisation de la mise en forme de CPC. Synthèse bibliographique

Dès le début des années 70, Williams [Wil70] fût l'un des premiers à s'intéresser à la simulation du thermoformage. Il a utilisé un modèle, Néo Hookéen, pour simuler le thermoformage d'un godet conique simple en PMMA. Il a considéré un contact collant et a fini par obtenir une pression de gonflement et une répartition d'épaisseurs comparable aux valeurs expérimentales. Les premiers résultats obtenus ont ainsi ouvert de réelles perspectives. En 1980, Petrie et Ito [Pet80] ont utilisé une approche semblable pour souffler un cylindre de forme générale. Ils ont prouvé que ce calcul avec l'hypothèse du contact collant était efficace dans la majorité des cas. En 1982, Ryan et Dutta [Rya82] se sont intéressés de près au procédé d'extrusion soufflage. Ils ont montré que la membrane (après gonflement) adoptait une forme plutôt ellipsoïde que cylindrique lors du soufflage. De plus, les polymères peuvent être modélisés comme des liquides viscoélastiques.

La plus part des travaux antérieurs à 1987 traitaient des problèmes axisymétriques simples. Dès 1987, DeLorenzi et Nied (General Electric Company) arrivaient à simuler à la fois les problèmes de soufflage à deux dimensions et à trois dimensions, ainsi que le thermoformage [Del87] [Nie90][DelHT]. Leurs travaux constituent une référence dans le domaine du thermo-soufflage. Après plusieurs travaux d'expérimentation, l'hypothèse de membrane est validée globalement sur tout le domaine de la pièce, à l'exception des points de fixation et des zones de faible courbure où l'effet de flexion est dominant. Les modèles hyper-élastiques sont assez satisfaisants pour mieux simuler la répartition des épaisseurs. De plus, ils prennent en compte la température de thermo-soufflage avec l'hypothèse du contact collant entre la paraison chaude et le moule froid. Durant la même période, Charrier et al. [Cha87] ont développé un code de calcul pour le soufflage de membranes. Leurs premiers travaux ont porté sur les problèmes hyper-élastiques axisymétriques [Cha87] et tridimensionnelles [Cha89]. Ils se sont intéressés par la suite à la viscoélasticité de ses matériaux. Le modèle Christensen fût ainsi implémenté dans leur code [Shi93]. Leurs travaux se sont étendus également aux conditions de contact (contact avec ou sans glissement) avec une comparaison de leurs résultats numériques à ceux donnés analytiquement et expérimentalement. Au début des années 90, Song et al [SoMV] ont utilisé les éléments finis en prenant en compte la flexion dans le but d'étudier et de localiser les zones de rupture.

En France, un des organismes de recherche les plus en avance dans la mise en forme de CPC est sans doute le Centre de Mise en Forme des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris (CEMEF). Celui-ci a pendant longtemps développé des travaux sur les procédés d'étirement soufflage [Sch96], d'extrusion soufflage et de thermoformage de multicouches. Les modélisations effectuées utilisent des lois de comportement viscoélastiques ou viscoplastiques. Soucieux de développer une solution complète de conception de CPC, le CEMEF s'est également intéressé aux opérations annexes telles que les remaillages automatiques et/ou adaptatifs [Rod97], le calcul parallèle, et l'optimisation des méthodes de résolution.

Nous ne manquons pas de souligner l'intérêt de la formulation dite « dynamique explicite » par rapport la formulation classique implicite qui fût longtemps utilisée. Celle-ci permet de palier aux difficultés de convergences rencontrées par la dernière et qui sont dues aux fortes non-linéarités au cours du processus de calcul de mise en forme. Rachik [Rac93] s'est inspiré de la modélisation des procédés d'emboutissage des métaux pour l'appliquer à la mise en forme des corps plastiques creux. Durant la même période, BenChaabane [Ben93] a

une méthode dite « approche inverse » permettant, à partir de la pièce finale, de remonter à la forme initiale de la paraison, avec une répartition homogène des épaisseurs. Cette approche s'adapte bien aux problèmes de mise en forme des métaux et des thermoplastiques.

Plus tard, Verron [Ver97] s'est intéressé à la l'évolution de la variation de pression durant le soufflage et à l'intégration de lois de comportement adéquates. Il préconise de faire varier au cours d'un calcul explicite le débit d'air plutôt que d'imposer une pression constante, difficilement contrôlable. Durant la même période, Rodriquez-Villa [Rod97] du CEMEF a développé un remailleur qui permet d'affiner les zones de faible courbure ou des cavités selon certains critères. L'avancement de la paraison devient ainsi plus rapide jusqu'au contact avec le moule.

Afin d'examiner l'influence de la flexion sur les résultats de la simulation, Ziane [Zia99] a développé avec des formalismes différents quelques versions d'éléments finis de coque tronconique et un élément volumique axisymétrique à 8 nœuds (Q8). Les éléments volumiques axisymétriques développés ont mis en évidence le problème de la pression hydrostatique qui reste inconnue dans la formulation. L'auteur a dû recourir aux techniques proposées et améliorées par Crisfield [CriV2] afin de pénaliser la densité d'énergie de déformation associée aux lois de comportement hyper-élastiques. En s'intéressant à l'effet de Mullins, Marchmann [Mar02],[Mar04] a développé une nouvelle technique d'évaluation des propriétés mécaniques de polymères sur des modèles hyper-élastiques. Yang et al [Yan00] et , quatre années plus tard, Pham et al[Pha04] ont développé une nouvelle loi tenant compte d'un comportement combiné d'hyper-élasticité et de viscoélasticité, dans le but de simuler le bi-étirage du PET. Ce modèle visco-hyperélastique donne une meilleure approximation des contraintes et des déformations que le modèle hyper-élastique d'Ogden. La prise en compte, au niveau de la paraison ou de la préforme, de la répartition de la température permet d'améliorer la répartition de l'épaisseur. Enfin, nous ne manquons pas de noter les travaux intéressants d'Erner [Ern05] basés sur une analyse expérimentale du poinçonnage du polystyrène (bi-étirage). L'auteur a étudié en particulier l'influence de la température, de la vitesse du poinçon et du frottement poinçon-moule sur la répartition de l'épaisseur du produit final.

1.3. Plan de la thèse

Le mémoire de thèse est organisé en cinq chapitres. Dans le chapitre 1, nous commençons par une description du contexte dans lequel la présente étude doctorale s'est effectuée et les objectifs de celle-ci. Une présentation sommaire des procédés de thermo-soufflage est effectuée dans un premier temps. Elle est suivie d'une synthèse bibliographique sur les modèles d'éléments finis, de comportement et de contact utilisés pour la modélisation de la mise en forme de produits thermoplastiques (section 1.2).

Le chapitre 2 est consacré aux formalismes théoriques associés à la cinématique des grandes transformations, aux modèles de comportement hyper-élastiques existants, à la formulation variationnelle du problème d'équilibre et aux schémas de résolution numérique couramment utilisés. Les principaux principes permettant le calcul de la déformation d'un milieu continu solide sous l'action des efforts extérieurs y sont rappelés dans un premier temps (§2.1). Une attention particulière est portée au calcul des différentes mesures des contraintes et des déformations. Les équations de mouvements et les propriétés générales que doivent satisfaire les relations contraintes-déformations d'un matériau sont brièvement commentées. Nous présentons par la suite les aspects théoriques liés aux solides axisymétriques. Nous décrivons les ingrédients nécessaires permettant de construire les gradients de déformation dans un Formalisme Lagrangien Total. Dans ce même chapitre, une section complète (§2.2) est dédiée à l'étude du comportement des polymères en grandes déformations. Nous exposons les hypothèses de l'hyper-élasticité stipulant qu'à des temps très court et avec des vitesses de déformation très élevées, les polymères se comportent comme des solides caoutchoutiques (hyper élastiques incompressibles ou quasi-incompressibles). Une revue bibliographique sur les principaux modèles existants dans la littérature est présentée.

Le chapitre 3 est consacré au problème du contact entre solides. Nous commençons par rappeler les définitions associées aux lois de contact, de frottement et à leurs approches numériques. Nous rappelons les techniques existantes de gestion de contact. Ainsi, une étude détaillée est faite sur les algorithmes existants de recherche locale et globale des nœuds candidats au contact, leurs domaines d'application et leurs avantages et inconvénients (3.1 à 3.3). Dans la section suivante (§3.4), nous exposons en détail dans un premier lieu l'algorithme développé pour la recherche globale 2D/3D avec les différentes stratégies appliquées (notion de territoires hiérarchiques, position-code, etc.). La présentation d'un algorithme simple de recherche locale est faite par la suite. Celui-ci permet de vérifier les nœuds « slave » (ou « esclave » en français) qui auront traversé les segments (cas 2D) ou surfaces (cas 3D) « master » (ou « maître » en français). Quelques difficultés et ambiguïtés

rencontrées dans des zones « master » présentant des angles morts dans le cas 2D/3D sont présentées dans cette même section.

Afin de disposer comme il a été mentionné en section 1.1 d'éléments finis spéciaux simples adaptés aux problèmes avec contact, nous avons proposé de développer un élément fini solide 3D-axisymétrique avec une cinématique spéciale (élément, et dans lequel nous y avons implémenté un modèle hyperélastique de Mooney-Rivlin avec un traitement numérique de l'incompressibilité. Le chapitre 4 lui est complètement consacré (§4.1). La section suivante (§4.2) traite de quelques tests de validation (avec et sans contact) de l'élément fini développé.

Le chapitre 5 est consacré complètement aux applications de l'élément axisymétrique SFRQ-Axi (développé dans le chapitre 4) à des problèmes à contact (mise en forme de corps plastiques creux, écrasement de solides déformables par des solides rigides, ...). Les performances du modèle sont évaluées sur des critères liés à la précision et au coût du calcul (temps CPU). Certains cas-tests proposent de confronter les résultats numériques à des résultats expérimentaux. Nous les qualifions de cas-tests semi-industriels.

Le chapitre 6 est développé pour répondre à une volonté de tester l'aptitude de notre algorithme de recherche de contact 3D, combiné à un élément fini purement 3D volumique, à détecter les nœuds candidats au contact. Nous avons considéré pour cela l'élément hexaédrique à 8 nœuds (H8) classique dans lequel nous avons implémenté le modèle hyperélastique de Mooney-Rivlin. Combiné à l'algorithme de contact 3D, l'élément fini développé peut-être utilisé dans des applications de mise en forme ou toute autre application faisant intervenir le contact. L'extension au cas volumique tridimensionnel du modèle 3D-axisymétrique SFRQ-Axi a fait l'objet d'une formulation détaillée dans la section 5.1. Le modèle ainsi obtenu « labellisé SFRH8 (*Space Fiber Rotation Hexaedral 8-nodes*) est validé sur des exemples sans contact. La prise en compte du contact 3D concerne uniquement le modèle classique H8. Il fera l'objet d'un développement ultérieur pour le cas du modèle SFRH8.

Enfin un dernier chapitre (chapitre 7) est consacré à la conclusion générale relative à cette étude doctorale et aux perspectives qui s'en suivront.

2 Chapitre 2

2.1. Théorie des grandes Transformations

2.1.1. Introduction

Ce chapitre présente les concepts théoriques nécessaires à la formulation des grandes transformations d'un milieu continu solide sous l'action de charges extérieures. Pour analyser les déformations subies par le solide, nous adapterons une loi de comportement caractérisant le matériau, afin de suivre l'état de contrainte supporté par le solide.

2.1.2. Cinématique des grandes déformations

La théorie des grandes déformations traitant des grands déplacements et des grandes rotations nécessite un repérage des configurations déformées et non déformées. D'un point de vue Lagrangien, la description cinématique impose le mouvement d'une particule matérielle repérée à partir d'une position de référence fixée dans la configuration initiale (correspondant en général à l'état non déformé). Autrement dit, toutes les variables cinématiques seront rapportées à cette configuration. Une bibliographie exhaustive traitant de ces aspects est donnée par [Ger86][BatV1].

Sous l'action de différentes sollicitations mécaniques (statiques ou dynamiques), un corps solide occupe différentes positions dans le temps et dans l'espace. La configuration $C(t)$ représente l'état du solide à l'instant t (Figure 2-1). Cette configuration peut être caractérisée par un ensemble de variables mécaniques telles que :

- Les vitesses et accélérations des points matériels $\vec{\dot{x}}(t)$ et $\vec{\ddot{x}}(t)$
- La masse volumique $\rho(\vec{x}, t)$
- Les contraintes internes $\sigma(\vec{x}, t)$ des points matériels.

La description lagrangienne définit ces variables en fonction des positions \vec{x}^0 des particules dans une configuration choisie dite « configuration de référence C^0 » (Figure 2-1). Cette configuration est supposée aussi avec des contraintes et déformations nulles. Mais il peut arriver que le solide soit soumis à des contraintes initiales non nulles (résultant d'une mise en forme amont par exemple).

Considérant le déplacement d'un solide dans le repère cartésien ; le point p^0 de ce solide dans la configuration C^0 (de coordonnées $x^a ; y^0 ; z^0$) devient le point p dans la configuration $C(t)$ (de coordonnées (x,y,z)) (Figure 2-1). L'expression du vecteur position du point q est définie par :

$$\vec{x} = \vec{x}^0 + \vec{u}(\vec{x}^0) \quad (2.1)$$

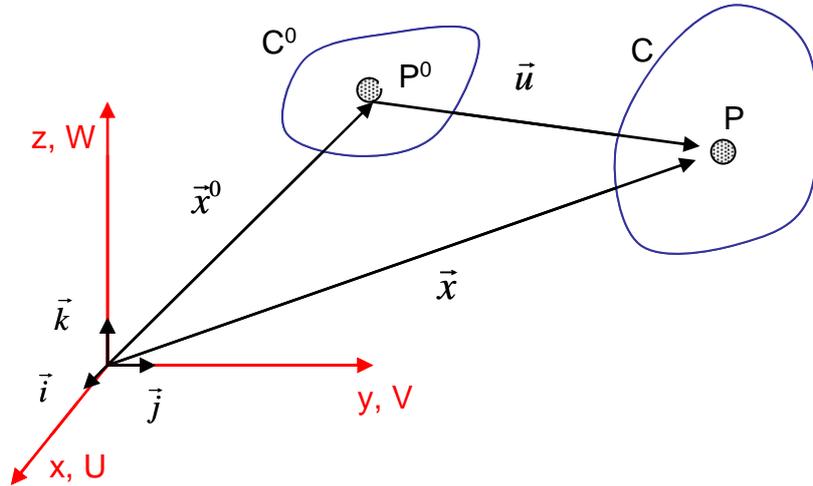


Figure 2-1 Définition des points matériels dans les configurations C^0 et C^t

2.1.3. Gradient de déformations

Un élément différentiel $d\vec{x}^0$ dans la configuration C^0 se transforme en $d\vec{x}$ dans la configuration $C(t)$. Ils sont reliés entre eux par la relation suivante :

$$d\vec{x} = F d\vec{x}^0 \quad (2.2)$$

Où F est le tenseur gradient de déplacement (ou de déformations).

Les composantes cartésiennes des vecteurs $d\vec{x}$, $d\vec{x}^0$ et du tenseur gradient de déformations s'écrivent :

$$\langle d\vec{x} \rangle = \langle dx, dy, dz \rangle \quad \langle d\vec{x}^0 \rangle = \langle dx^0, dy^0, dz^0 \rangle \quad (2.3)$$

$$[F] = [I] + \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}^0} \right] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x^0} & \frac{\partial u}{\partial y^0} & \frac{\partial u}{\partial z^0} \\ \frac{\partial v}{\partial x^0} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y^0} & \frac{\partial v}{\partial z^0} \\ \frac{\partial w}{\partial x^0} & \frac{\partial w}{\partial y^0} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z^0} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

L'élément de volume dv^0 défini sur la configuration C^0 se transforme au cours de la déformation et devient dv dans la configuration $C(t)$ avec :

$$dv = \det F dv^0 = J dv^0 \quad (2.5)$$

Si \vec{n}^0 est le vecteur normal à la surface ds^0 définie dans la configuration C^0 , nous obtenons dans la configuration $C(t)$ par la relation suivante :

$$\vec{n} ds = J \left[F^{-1} \right]^T \vec{n}^0 ds^0 \quad (2.6)$$

Le vecteur \vec{n} est le vecteur unitaire à la surface ds dans la configuration $C(t)$.

Le tenseur gradient de déformation, s'il est défini entre deux configurations C^i et C^j est noté F_i^j . Entre plusieurs configurations C^0, C^1, C^2 , celui-ci vérifie la propriété de composition suivante :

$$F_i^j = F_k^j F_i^k \quad (2.7)$$

2.1.4. Description des déformations

Pour décrire la déformation d'un solide, c'est-à-dire caractériser ses changements de forme, il faut caractériser les variations de longueurs et d'angles. Ce qui reviendrait à caractériser les variations des produits scalaires. Nous écrivons ainsi le produit scalaire $d\vec{x} \cdot \delta \vec{x}$ (configuration C^t) :

$$d\vec{x} \cdot \delta \vec{x} = d\vec{x}^0 F^T F \delta \vec{x}^0 = d\vec{x}^0 C \delta \vec{x}^0 \quad (C = F^T F) \quad (2.8)$$

Où C est le tenseur de dilatation ou tenseur de Cauchy-Green Droit.

Inversement, il est possible d'écrire la déformation dans le repère actuel comme suit :

$$d\vec{x}^0 \cdot \delta \vec{x}^0 = d\vec{x} \left[F^{-1} \right]^T F^{-1} \delta \vec{x} = d\vec{x} B^{-1} \delta \vec{x} \quad (B = F F^T) \quad (2.9)$$

Où B est le tenseur de Cauchy-Green Gauche.

Les tenseurs B et C sont symétriques et définis positifs. Ils deviennent unitaires pour les mouvements de corps rigides.

Nous définissons par la suite l'expression de deux tenseurs importants de déformation. Il s'agit du tenseur de Green-Lagrange (noté E) et de son cas particulier associé au tenseur d'Euler-Almansi (noté A) par :

$$d\bar{x} \cdot \delta\bar{x} - d\bar{x}^0 \cdot \delta\bar{x}^0 = 2d\bar{x} E \delta\bar{x} = 2d\bar{x} A \delta\bar{x} \quad (2.10)$$

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^T F - I) = F^T A F \quad (2.11)$$

$$A = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) = F^T E F^{-1} \quad (2.12)$$

I désigne le tenseur identité d'ordre 2. Les deux tenseurs s'annulent pour les mouvements de corps rigides.

Les composantes cartésiennes du tenseur de déformation de Green-Lagrange s'expriment ainsi en fonction des composantes du vecteur déplacement comme suit :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^0} \right) \quad (2.13)$$

D'après le théorème de la décomposition polaire, le tenseur F s'écrit sous la forme du produit d'une matrice de rotation R et d'une matrice d'élongation U (Figure 2-2).

$$F = RU = VR \quad (2.14)$$

Avec la propriété suivante :

$$R^T R = R R^T = I \quad (2.15)$$

R : Tenseur de rotation pure correspondant au mouvement de corps rigide.

U : Tenseur de déformation pur droit.

V : Tenseur de déformation pur gauche.

Les tenseurs C et U , respectivement B et V , décrivent les changements de forme entre la configuration de référence C^0 et la configuration $C(t)$. Ils sont liés par les relations suivantes :

$$C = F^T F = U R^T R U = U^2 \quad (2.16)$$

$$B = F F^T = V R R^T V = V^2 \quad (2.17)$$

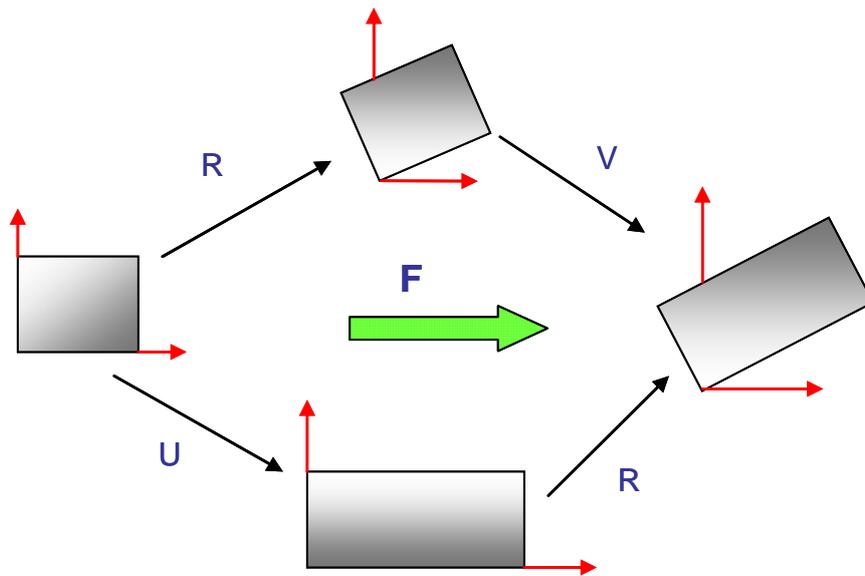


Figure 2-2 Décomposition polaire

On déduit également les relations utiles suivantes :

$$V = R U R^T \quad ; \quad B = R C R^T \quad (2.18)$$

Les directions principales de C et B coïncident avec les directions principales de U et V . Les vecteurs propres de C notés \vec{N}^0 et les valeurs propres correspondantes λ vérifient la relation :

$$C \vec{N}^0 = \lambda^2 \vec{N}^0 \quad (2.19)$$

Le tenseur C peut aussi se mettre sous la forme :

$$C = Q^0 \lambda^2 Q^{0T} \quad (2.20)$$

Où Q^0 contient les vecteurs propres de C dans la configuration C^0 .

Les directions principales (notées \vec{N}) de V et de B sont données par :

$$\vec{N} = R \vec{N}^0 \quad (2.21)$$

Ou encore

$$Q = R Q^0 \quad (2.22)$$

Q contient les vecteurs propres de B . On peut déduire de (2.16) et (2.17) que :

$$U = Q^0 \lambda Q^{0T} \quad (2.23)$$

$$V = Q \lambda Q^T \quad (2.24)$$

2.1.5. Taux de contrainte

Que l'on soit en petites ou grandes déformations, le vecteur des contraintes $\vec{\tau} = d\vec{f} / ds$ est défini dans la configuration actuelle. Il caractérise les efforts internes de cohésion exercés sur la frontière du solide à travers un élément de surface, de normale externe \vec{n} . Nous définissons ainsi un tenseur eulérien des contraintes qui est symétrique, communément connu sous le nom de tenseur des contraintes de Cauchy σ (contraintes vraies) :

$$d\vec{f} = \sigma \vec{n} ds \quad (2.25)$$

Il est possible de transporter ce tenseur pour définir d'autre tenseur de contraintes. C'est ainsi que si l'on choisit de définir $d\vec{f}$ en fonction de \vec{n}^0 et ds^0 (configuration C^0) transformés en \vec{n} et ds (configuration $C(t)$), nous obtiendrons :

$$d\vec{f} = \pi \vec{n}^0 ds^0 \quad (2.26)$$

Où π désigne le premier tenseur non symétrique de Piola-Kirchoff (PK1) qui est ni lagrangien ni eulérien.

Une autre possibilité consiste à définir un tenseur lagrangien symétrique, en transportant $d\vec{f}$ dans C^0 :

$$d\vec{f}^0 = F^{-1} d\vec{f} = S \vec{n}^0 ds^0 \quad (2.27)$$

S désigne le second tenseur de Piola-Kirchoff (PK2).

La relation entre ces trois tenseurs est donnée par :

$$J \sigma = \pi F^T = F S F^T \quad (2.28)$$

Notons enfin que le tenseur S n'a pas de signification physique directe (dans le cas de grandes déformations). Son intérêt réside dans le fait qu'il est la variable duale et conjuguée (au sens de l'énergie) du tenseur de déformation de Green-Lagrange E.

Quant aux tenseurs σ et π , ils caractérisent directement les efforts appliqués. Ils interviennent donc directement dans l'écriture des conditions aux limites. Par ailleurs, ces tenseurs sont tous confondus dans le cas de la théorie linéaire. Il est important de signaler que dans le cas de petites déformations, $J \approx 1$ et $\lambda = 1$, mais dans le cas des grands déplacements, les composantes de S s'identifient aux composantes du tenseur de Cauchy σ dans le repère défini par la rotation R.

$$S \approx \sigma_t = R^T \sigma R \quad (2.29)$$

2.1.6. Application aux structures axisymétriques

Lorsqu'une structure présente une symétrie de révolution et que la loi de comportement est indépendante du choix du plan contenant l'axe de symétrie de la structure, il y a donc axisymétrie. La structure peut être traitée simplement dans n'importe quel demi-plan contenant l'axe de révolution dit : plan méridien.

Ce type de modélisation présente deux avantages majeurs. Le premier est la simplification d'un problème tridimensionnel en le ramenant à un problème plan ; ce qui entraîne une diminution appréciable des données à traiter et du temps de calcul.

2.1.7. Solide axisymétrique

Dans le plan méridien l'élément de volume est un triangle ou un quadrangle (Figure 2-3). Nous adoptons le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axes unitaires $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{k})$.

Les vecteurs positions initiaux et après déformation s'écrivent dans un plan méridien (voir Figure 2-4) :

$$\vec{x}_p^0 = r^0 \vec{i}_r + z^0 \vec{k} \quad (2.30)$$

$$\vec{x}_p^0 = (r^0 + u) \vec{i}_r + (z^0 + w) \vec{k} \quad (2.31)$$

Le tenseur gradient de déformation au point p dans le repère (r, θ, z) est défini par :

$$[F] = \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial r^0} \right\} & \frac{1}{r^0} \left\{ \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \theta} \right\} & \left\{ \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial z^0} \right\} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Avec
$$d\vec{x}_p^0 = dr^0 \vec{i}_r + r^0 d\vec{i}_\theta + dz^0 \vec{k} \quad (2.33)$$

Ainsi
$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + U_{,r^0} & 0 & U_{,z^0} \\ 0 & 1 + \frac{U}{r^0} & 0 \\ W_{,r^0} & 0 & 1 + W_{,z^0} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

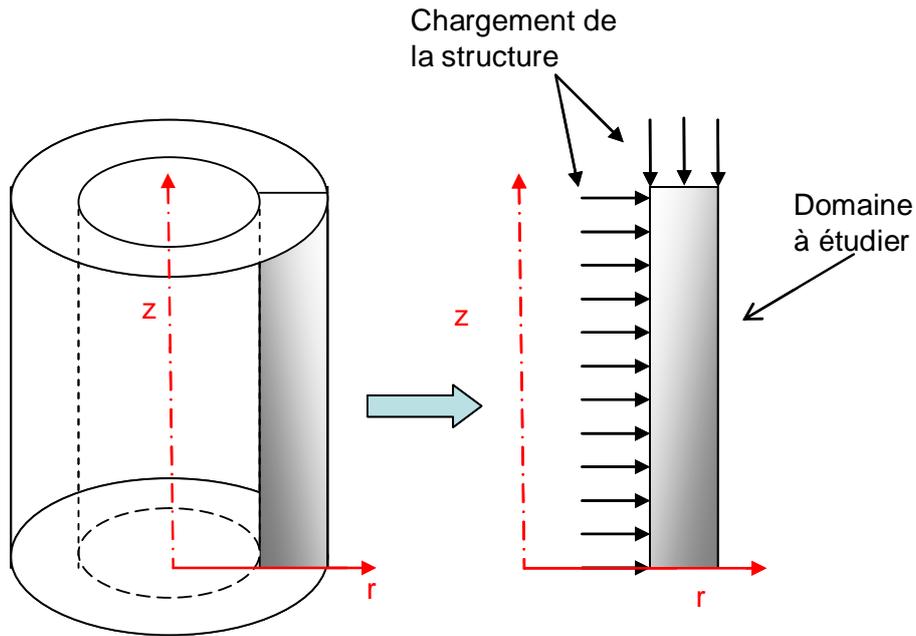


Figure 2-3 Domaine 2D analysé avec l'hypothèse d'axisymétrie

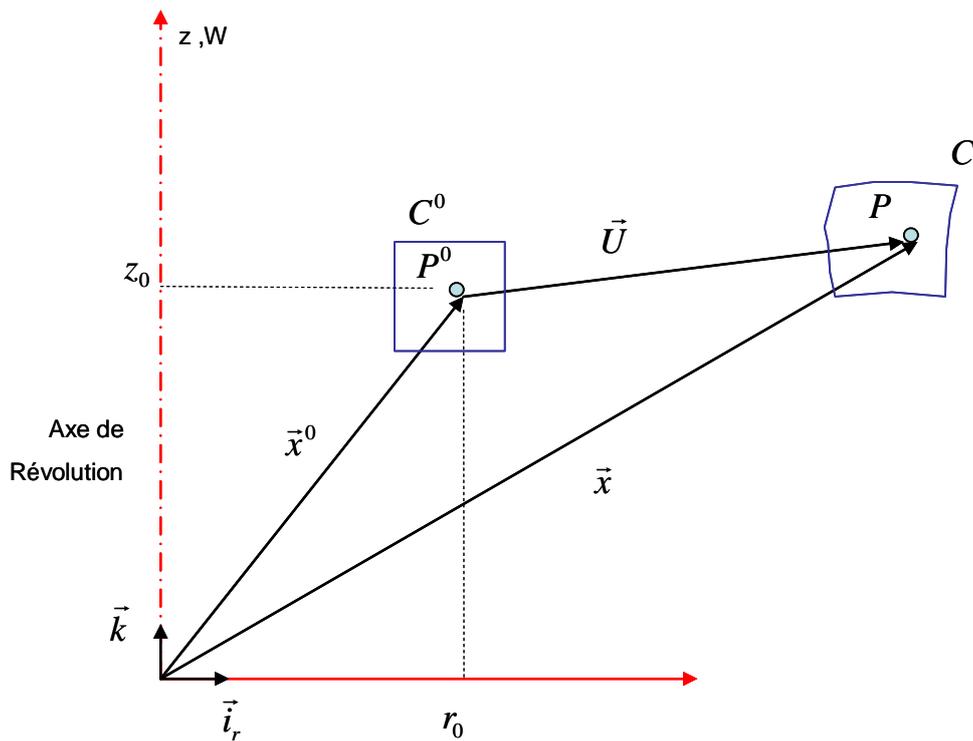


Figure 2-4 Mouvement d'un solide axisymétrique entre C^0 et C^t

2.2. Lois de comportement hyper-élastique

2.2.1. Introduction

L'étude du comportement des polymères en grandes déformations reste un sujet d'actualité. Ces matériaux ont des comportements complexes. La caractérisation de leurs propriétés mécaniques et rhéologiques, aussi bien à l'état solide que fondu, reste cependant très délicate. Les polymères ont un comportement mécanique variable, et peuvent être très sensibles à la température et à leur mode d'obtention. L'investigation dans la compréhension de ce comportement complexe (hyperélastique, viscoélastique) a donné lieu à de nombreux travaux expérimentaux et théoriques.

Dans la littérature, deux approches rhéologiques illustrent cette dualité solide/liquide. Dans la première approche, on suppose que les polymères ont un comportement parfaitement élastique incompressible ou encore hyper-élastique [Ben93] [Cos97] [Del88] [Rac93] [Sze04]. Ce choix trouve sa justification à partir d'expérience de recouvrance de la déformation. Dans la deuxième approche, on suppose que le polymère se comporte comme un liquide visqueux et peut-être donc être traité par une approche fluide.

Une autre difficulté s'ajoute aux précédentes approches : trouver le compromis entre la précision de la loi et le nombre de paramètres à identifier expérimentalement.

2.2.2. Définition de l'hyperélasticité

Un matériau est élastique lorsque son état de contrainte ne dépend que des déformations dans cette configuration, et non de déformations antérieures. Lorsque ce même matériau se déforme à température constante ou à entropie spécifique constante, il peut être considéré comme un matériau hyperélastique. Le comportement non linéaire d'un tel matériau est donc régi par des lois spécifiques reliant les contraintes aux déformations.

Ces contraintes peuvent s'obtenir par dérivation d'une densité d'énergie de déformation par unité de volume W , fonction des déformations mesurées par rapport à un état de référence sans contraintes.

La fonction W correspond donc respectivement à une densité d'énergie libre et à la densité d'énergie interne. Dans le cas des matériaux isotropes, la symétrie du tenseur permet d'écrire W en fonction des trois invariants I_1 , I_2 et I_3 du tenseur de déformation :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2.35)$$

Les trois invariants I_i s'écrivent en termes des composantes du tenseur de Cauchy-Green droit C :

$$\begin{cases} I1 = tr(C) \\ I2 = \frac{1}{2}[tr(C)^2 - tr(C^2)] \\ I3 = \det(C) \end{cases} \quad (2.36)$$

En adoptant le point de vue lagrangien, la densité d'énergie W par unité de volume initial, dont dérivent les contraintes de Piola-Kirchoff (PK2), dépend alors des déformations de Green-Lagrange par rapport à la configuration de référence C° [CriV2].

Nous écrivons donc :

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (2.37)$$

En utilisant la relation (2.36) et $E = \frac{1}{2}[C - I]$, S_{ij} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} \right] \quad (2.38)$$

Les termes dérivés des invariants peuvent être écrits :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \\ \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} = I_1 \delta_{ij} - C_{ij} \\ \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} = I_3 C_{ij}^{-1} \quad (C^{-1} \text{ tenseur inverse de } C) \end{cases} \quad (2.39)$$

En remplaçant (2.39) dans (2.38), on obtient la forme générale de l'équation constitutive d'un matériau hyper-élastique :

$$S_{ij} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \delta_{ij} - C_{ij}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 C_{ij}^{-1} \right] \quad (2.40)$$

Dans le cas d'un matériau incompressible, la relation contraintes-déformations n'est pas biunivoque et la contrainte de Cauchy est déterminée à une pression près

Soit pour les contraintes de Cauchy :

$$\sigma = \sigma^d - p I \quad (2.41)$$

Où σ^d représente la partie des contraintes de Cauchy déterminées par les déformations.

A partir de la relation (2.28) nous pouvons exprimer les contraintes de Piola-Kirchoff sur la configuration initiale :

$$S = S^d - p C^{-1} \quad (2.42)$$

$$\text{Avec} \quad S^d = J F^{-1} \sigma^d F^{-T} \quad (2.43)$$

Comme les déformations ne dépendent plus de l'invariant I_3 , l'énergie interne de déformation $W(I_1, I_2, I_3)$ devient $\hat{W}(I_1, I_2)$ et on obtient :

$$S^d = \frac{\partial \hat{W}(I_1, I_2)}{\partial E} \text{ et } J = 1 \quad (2.44)$$

Qui s'écrit en utilisant (2.40).

$$S^d = 2 \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} I + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} (I_1 I - C) \right] \quad (2.45)$$

On en déduit enfin

$$S = 2 \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} I + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} (I_1 I - C) \right] - p C^{-1} \quad (2.46)$$

L'équation (2.46) représente l'équation constitutive d'un matériau isotrope hyperélastique incompressible. p est une inconnue supplémentaire déterminée par les équations de conservation et les conditions aux limites.

Il est souvent commode de travailler dans la base propre du tenseur de déformation. Les relations établies précédemment peuvent être réécrites en faisant intervenir les élongations principales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases} \quad (2.47)$$

W (2.35) devient fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.48)$$

L'hypothèse d'incompressibilité implique :

$$I_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (2.49)$$

En utilisant le potentiel d'énergie défini dans (2.37) dans (2.48), les contraintes principales de Piola-Kirchoff s'expriment par :

$$S_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial E_i} - p \lambda^{-2} \quad i = 1,3 \quad (2.50)$$

Par contre, les contraintes de Cauchy principales sont données par la relation suivante :

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \quad i = 1,3 \quad (2.51)$$

Dans le cas des structures minces, on retient l'hypothèse des contraintes plane $\sigma_{33} = 0$. De plus, la relation (2.28) avec l'hypothèse d'incompressibilité $J=1$ montre que $S_{33} = C_{33}^{-2} \sigma_{33}$. Il en résulte que $S_{33} = 0$ soit d'après (2.46) :

$$p = 2 C_{33} \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} I + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} (I_1 I - C_{33}) \right] \quad (2.52)$$

Cette relation permet d'éliminer l'inconnue hypostatique dans l'équation (3.12).

A partir de l'équation (2.46) nous pouvons exprimer les composantes du tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff :

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2 \left[(1 - C_{22} C_{33}^2) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + [(C_{22} + C_{33}) - C_{22} C_{33}^2 (C_{11} + C_{22})] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \\ S_{22} &= 2 \left[(1 - C_{11} C_{33}^2) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + [(C_{11} + C_{33}) - C_{11} C_{33}^2 (C_{11} + C_{22})] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \\ S_{12} &= 2 [C_{21} C_{33}^2] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 [-C_{12} + C_{33}^2 C_{21} (C_{11} + C_{22})] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pour le cas d'une membrane étirée dans les deux directions (traction biaxiale), les équations (2.53) se réduisent aux expressions simples suivantes en fonction des elongations principales λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} S_{11} &= 2 \left[1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right] \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \\ S_{22} &= 2 \left[1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right] \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Les contraintes co-rotationnelles σ_i (contraintes de Cauchy observées réellement sur la structure déformée) sont :

$$\sigma_i = R^T \sigma R \quad (R : \text{tenseur Rotation} - \text{équation 2.15}) \quad (2.55)$$

En injectant dans (2.55) la relation (2.28), reliant les contraintes de Cauchy σ au tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, on obtient :

$$\sigma_i = \frac{1}{J} U S U^T \quad (2.56)$$

Où U est la matrice d'élongation pure. Le matériau étant incompressible $J=1$. Comme U est diagonale (repère propre) et $C=U^2$, la relation (2.55) devient :

$$\sigma_i = \lambda^2 S \quad (2.57)$$

Ainsi, on peut déterminer à partir de l'équation (2.54) le tenseur des contraintes de Cauchy dans le repère déformé :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda_1^2 S_{11} \\ \sigma_{22} &= \lambda_2^2 S_{22} \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.2.3. Principaux modèles mathématiques pour les matériaux incompressibles

Nous allons présenter dans ce qui suit quelques principaux modèles de densité d'énergie suivant les types d'expériences et le domaine d'utilisation. En posant les principales hypothèses simplificatrices qui considèrent que ces matériaux ont un comportement caoutchouteux parfaitement élastique même pour des cas de grandes déformations quasi-statiques [Ben93][Cos97][Mar04][Rac93]. D'un point de vue théorique, il est commode de considérer ces matériaux comme parfaitement élastique. Cette notion de matériau hyperélastique idéal implique des effets d'hystérésis négligeables, et par conséquent la conservation de l'énergie pendant un cycle de déformation dans des conditions isothermes.

Quand on étire des polymères à des vitesses de déformation assez élevées et à une température supérieure à leur température de transition vitreuse, la majorité d'entre eux montre un certain degré de comportement élastique réversible de type caoutchouc (voir Figure 2-5 et Figure 2-6). Schmidt et Carley [Sch75] ont effectué des expériences sur une feuille circulaire chauffée préalablement et soumise à une pression d'air uniforme. Celle-ci prenait la forme d'une calotte hémisphérique. Dès que la pression est relâchée, elle reprend à nouveau son état initial rapidement ; ce qui justifie l'hypothèse de l'hyperélasticité.

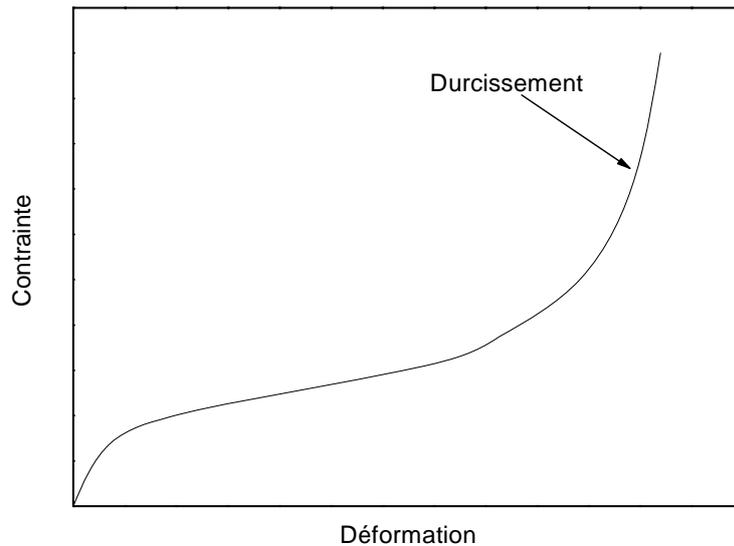


Figure 2-5 Allure d'une courbe de traction du caoutchouc

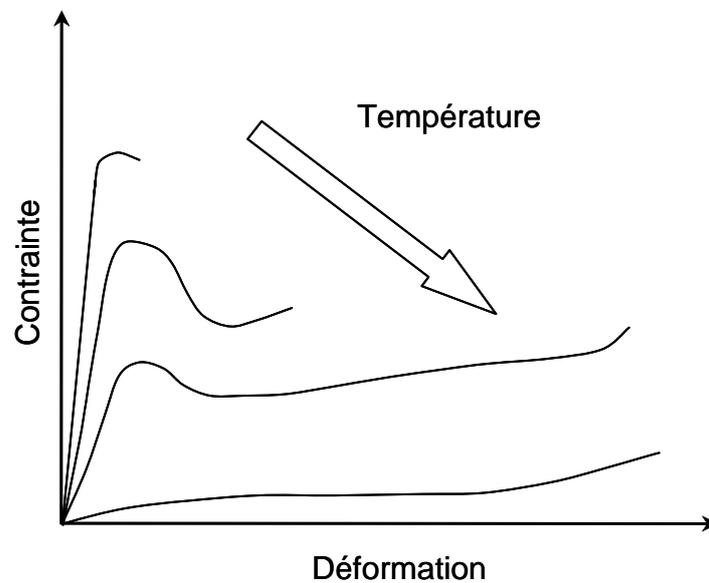


Figure 2-6 Allure des courbes contraintes-déformations pour des matériaux hyperélastiques

Les modèles phénoménologiques peuvent être classés en deux catégories. Dans la première, la densité de l'énergie de déformation est exprimée en fonction des invariants du tenseur de dilatations. Quant à la seconde catégorie, elle fait intervenir les élongations principales.

2.2.3.1. Modèles basés sur les invariants du tenseur de dilatations

Mooney [Moo40] a été l'un des premiers chercheurs à avoir donné les fondements de la théorie de l'hyperélasticité. Il a notamment émis les hypothèses suivantes sur la matériau qu'il suppose :

- homogène et sans effet d'hystérésis
- isotrope à l'état non déformé, et après déformation
- incompressible, toute déformation s'opérant, par conséquent sans variation significative de volume

Une première loi du potentiel de déformation a ainsi été formulée :

$$W = \frac{G}{4} \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 + \frac{H}{4} \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) \quad (2.59)$$

Où G est assimilé au module d'élasticité et H est une constante élastique introduite par Mooney. En introduisant des constantes C_1 et C_2 , Mooney propose de réécrire (2.59) sous une nouvelle forme. Le potentiel portant son nom est alors défini comme :

$$\hat{W} = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (2.60)$$

Cette expression modifiée fait intervenir le premier et le second invariant du tenseur de dilatation. Elle est bien adaptée à la gamme d'élongation inférieure à 250%. Au delà elle ne reproduit pas la zone d'inflexion convexe et le raidissement du matériau (voir Figure 2-7).

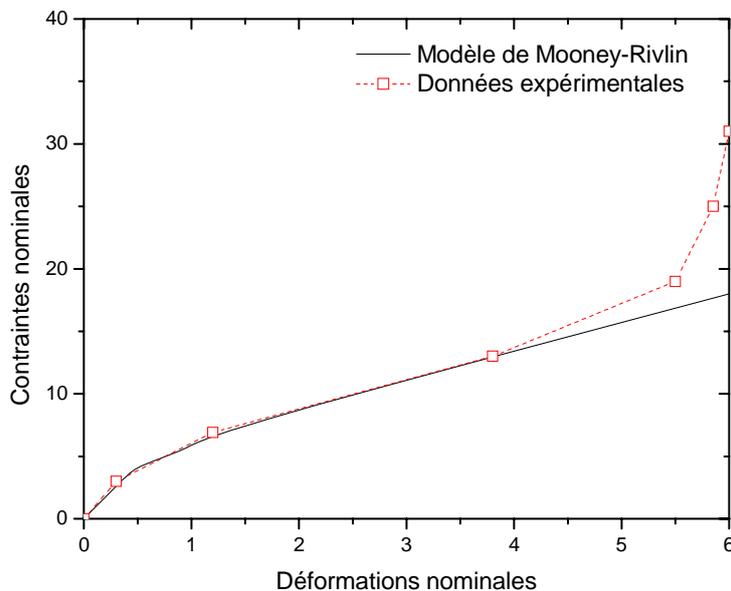


Figure 2-7 Représentation du modèle de Mooney-Rivlin (Test uniaxial)

Treloar [Tre76] propose une forme particulière du potentiel \hat{W} . Dédit de la théorie statistique de l'élasticité caoutchoutique, ce modèle décrit le comportement d'un matériau incompressible et néo-Hookéen. L'expression du potentiel est alors :

$$\hat{W} = \frac{1}{2} C_{10} (I_1 - 3) \quad (2.61)$$

Treloar [Tre44] a mené une des premières campagnes expérimentales sur des feuillets en élastomère réticulé et chargé. Des essais de traction simple, de cisaillement pur et de traction équi-biaxiale ont défini le domaine de validité néo-Hookéen jusqu'à 75% de déformation en traction simple (voir Figure 2-8).

Rivlin [Riv48] a établi vers 1948 les bases phénoménologiques de l'élasticité caoutchoutique. Le cas idéal adopté est celui d'un élastomère parfaitement élastique avec les restrictions suivantes :

- - La superposition d'une rotation rigide à la déformation n'altère pas la densité d'énergie
- - Les élastomères étant considérés isotropes à l'état non déformé, la fonction W doit posséder des propriétés de symétrie par rapport à F et de plus le matériau doit être incompressible.

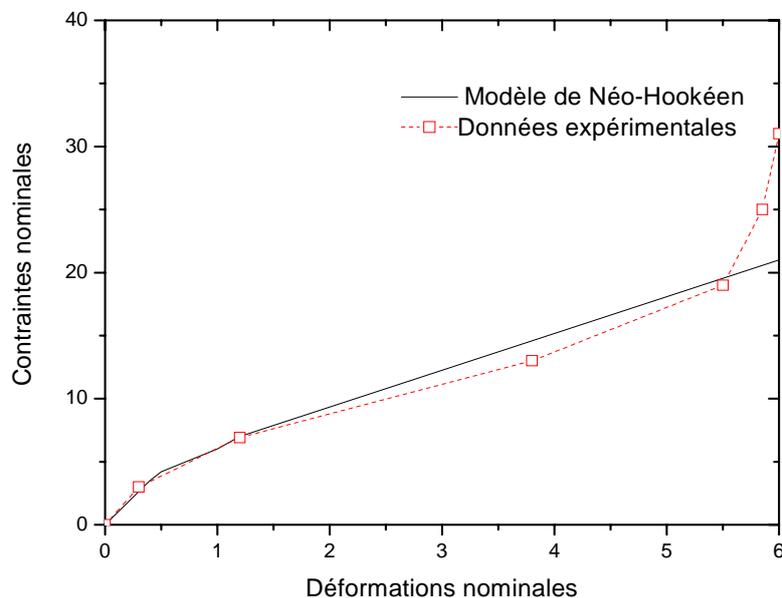


Figure 2-8 Représentation du modèle de Néo-Hookéen (Test uniaxial)

Rivlin propose d'écrire le potentiel de déformation sous la forme polynomiale suivante :

$$W = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 3)^k \quad (2.62)$$

Pour l'état non déformé :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow I_1 = I_2 = 3 \text{ et } C_{000} = 0 \quad (2.63)$$

Dans le cas de l'incompressibilité ($I_3 = 1$), les arguments de la fonction W se réduisent alors à :

$$W = \hat{W}(I_1, I_2) \quad (2.64)$$

$$\hat{W} = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.65)$$

Cette expression du potentiel permet de retrouver les cas particuliers de Treloar dit « Néo-Hookéen » :

$$\hat{W} = C_{10} (I_1 - 3) \quad (2.66)$$

et celui du potentiel de Mooney-Rivlin :

$$\hat{W} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (2.67)$$

Plusieurs auteurs tels que Tshoeg [Tsh70] en 1971, James [Jam75] et Haines [Hai79] ont essayé de donner des fonctions de densité d'énergie qui corrigent la loi de Mooney-Rivlin pour le cas des élastomères en grandes élongations. Ces lois fournissent une bonne approximation des courbes expérimentales. Par contre les coefficients C_{ij} sont difficiles à identifier. Un exemple de la loi de Haines est donné par l'équation suivante

$$\hat{W} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{02} (I_2 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (2.68)$$

2.2.4. Modèles basés sur les élongations principales

Ogden [Ogd72] est l'un des premiers à proposer d'écrire la densité d'énergie en faisant intervenir les élongations principales portées à des puissances réelles. Ceci a permis de dissocier la contribution de chacune des dilatations. Il propose pour cela une combinaison linéaire des invariants définis comme suit :

$$\begin{cases} W = \sum_r \mu_r \phi(\alpha_r) \\ \phi(\alpha_r) = \frac{1}{\alpha_r} (\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3) \end{cases} \quad (2.69)$$

α_r, μ_r Sont des paramètres

Ogden obtient une excellente corrélation avec les résultats expérimentaux en utilisant trois paires de α_r, μ_r (voir Figure 2-9). Le calcul des dérivées de la fonction W par rapport aux invariants reste cependant très coûteux en temps CPU lors de l'implémentation du modèle dans un code d'éléments finis.

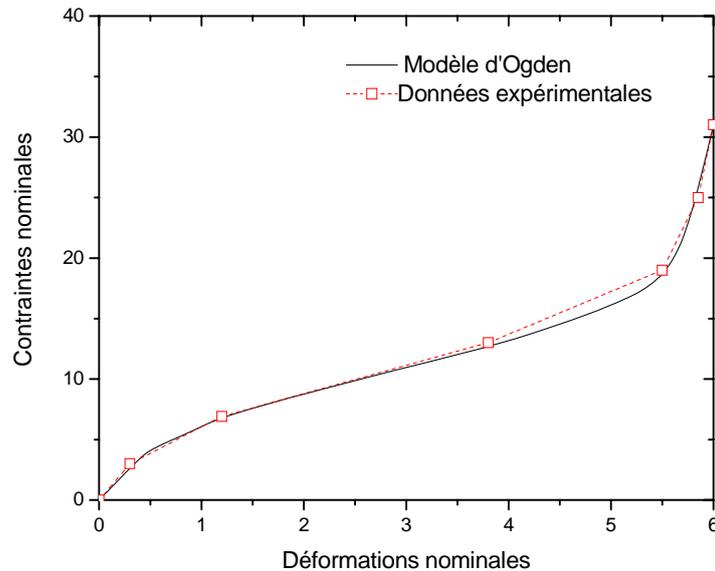


Figure 2-9 Représentation du modèle d'Ogden (Test Uniaxial)

Notons que la formulation ainsi proposée convient à un matériau isotrope et incompressible. Ogden la ultérieurement étendue pour un matériau quasi- compressible. D'autres formes de fonctions d'énergie ont été proposées pour prendre en compte plus de comportement physique et faciliter l'identification des paramètres d'essais expérimentaux simples. Kawabata et al. [Kaw95] ont proposé un modèle sous la forme d'un polynôme réduit ne tenant compte que du premier invariant I_1

$$\hat{W} = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i \quad (2.70)$$

Yeoh [Yeo93] propose une forme de polynôme réduit simple avec $N=3$.

$$\hat{W} = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (2.71)$$

C_{10} représente les modules de cisaillement pour de faible valeur de déformation. Ce modèle reproduit convenablement le comportement du matériau pour une large gamme de déformation (voir Figure 2-10).

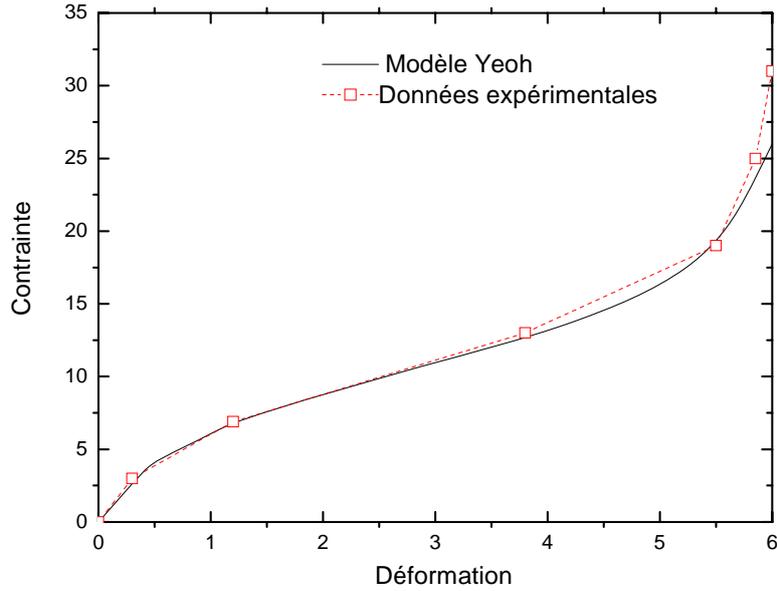


Figure 2-10 Représentation du modèle de Yeoh (Test uniaxial)

Arruda-Boyce [Arr93] proposent la forme de la fonction d'énergie suivante.

$$\hat{W} = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (2.72)$$

- μ représente le module de cisaillement pour de faible valeur de déformation
- λ_m représente la valeur de l'élongation où débute la zone d'inflexion de la courbe contrainte déformation qui traduit le durcissement du matériau.

$$C_1 = \frac{1}{2}; C_2 = \frac{1}{20}; C_3 = \frac{11}{1050}; C_4 = \frac{19}{7000}; C_5 = \frac{519}{673750}$$

2.2.4.1. Identification des constantes hyperélastiques

Les constantes des modèles hyperélastiques incompressibles sont identifiées à partir de tests expérimentaux simples (traction uniaxiale, traction equibiaxiale, cisaillement simple). Ces tests s'expriment par :

-Traction Uniaxiale (TU) :

$$\sigma_{22} = 0; \text{ et } \lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = \lambda^{-\frac{1}{2}}; \lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

L'équation (2.58) se réduit à une expression simple en fonction des rapports d'extensions principales λ_1 et λ_2 .

$$\sigma_{11} = 2 \left[\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right] \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \quad (2.74)$$

-Traction équiuniaxiale (TE):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda ; \lambda_3 = \lambda^{-2} \quad (2.75)$$

L'équation (2.58) devient pour le cas équiuniaxiale.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 2 \left[\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right] \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \quad (2.76)$$

-Cisaillement pur (CP) :

$$\lambda_1 = \lambda ; \lambda_2 = 1 ; \lambda_3 = \lambda^{-1} \quad (2.77)$$

L'équation correspondante est donnée par :

$$\sigma_{11} = 2 \left[1 - \frac{1}{\lambda^4} \right] \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \quad (2.78)$$

L'identification des coefficients des matériaux à partir de plusieurs tests expérimentaux revient à minimiser la fonction coût définie par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \min(f(c_1, c_2)) = \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} R_{TU}^2 + \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} R_{TE}^2 + \sum_{i=1}^{N_{\text{exp}}} R_{CP}^2 \\ R_{TU}^2 = (\sigma - \sigma_{\text{exp}})_{TU}^2 \\ R_{TE}^2 = (\sigma - \sigma_{\text{exp}})_{TE}^2 \\ R_{CP}^2 = (\sigma - \sigma_{\text{exp}})_{CP}^2 \end{cases} \quad (2.79)$$

L'identification des coefficients du modèle de Mooney-Rivlin revient à utiliser la méthode des moindres carrés, dans le but de minimiser la fonction erreur au carré E^2 entre les contraintes expérimentales mesurées et les valeurs prédites par les contraintes de Cauchy :

$$E^2 = \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \tilde{\sigma}_i(a_{ij})) \quad (2.80)$$

- E : erreur relative ;
- σ_i : valeur de la contrainte expérimentale
- $\tilde{\sigma}_i(a_{ij})$: valeur de la contrainte de Cauchy (fonction des constantes de Mooney-Rivlin)
- N : nombre de données expérimentales

Pour trouver le minimum de la fonction (2.79), il suffit d'annuler sa variation $\delta E^2 = 0$. Ce critère sert à établir et résoudre le système d'équations dont les inconnues sont les constantes de Mooney-Rivlin.

$$\begin{cases} \frac{\partial E^2}{\partial a_{10}} = 0 \\ \frac{\partial E^2}{\partial a_{01}} = 0 \\ \vdots \\ etc \end{cases} \quad (2.81)$$

A l'inverse des caoutchoucs, il est beaucoup plus difficile de faire des essais expérimentaux sur les polymères fondus. Les constantes déterminées à partir de ces tests doivent reproduire les modes de déformations observés pendant un procédé de mise en forme de CPC. Ce type d'essais n'est pas toujours facile à réaliser, surtout pour le cas des déformations biaxiales. On note aussi que ces matériaux présentent un état pâteux lors du procédé de mise en forme, pendant lequel il est difficile de contrôler la température au cours de l'essai.

2.2.5. Définition mathématique de la densité d'énergie pour les matériaux quasi-incompressibles

La plupart des modèles mécaniques pour le caoutchouc supposent le matériau incompressible, cela permet de simplifier considérablement la détermination expérimentale de ces lois. Dans la réalité ces matériaux ne sont jamais strictement incompressibles. Pour affiner ces modèles, on introduit la notion de quasi-incompressibilité.

La non variation du volume dans un matériau hyper-élastique est traitée de deux façons :

- Dans le cas incompressible, on suppose que le milieu ne peut pas changer de volume, cela se traduit par une liaison interne cinématique $I_3 = 1$.

- Dans le cas quasi-incompressible, on définit généralement un module de compression très élevée par rapport au module de cisaillement, ce qui n'autorise qu'une variation de volume infinitésimale. Alors que le potentiel de l'énergie est découpé en une énergie sphérique liée à la dilatation et une énergie de distorsion liée à la déformation isochore.

La technique introduite par Penn [Pen70] [CriV2] permet de décomposer le tenseur gradient de la transformation en une partie sphérique F^S et une partie distortionnelle \bar{F} .

$$F = F^S \bar{F} = \bar{F} F^S \quad (2.82)$$

$$\text{Avec} \quad F^S = J^{\frac{1}{3}} I \quad (2.83)$$

$$J = \det(F) = I_3^{1/2} \quad (2.84)$$

\bar{F} est un tenseur uni-modulaire (modifié), son déterminant est unitaire. En appliquant la décomposition cinématique (2.82), il est possible de séparer les tenseurs des déformations C et B en une partie sphérique et une partie distortionnelle.

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \bar{F}^T \bar{F} = J^{-\frac{2}{3}} C = I_3^{-\frac{1}{3}} C \\ \bar{B} &= \bar{F} \bar{F}^T = J^{-\frac{2}{3}} B = I_3^{-\frac{1}{3}} B \end{aligned} \quad (2.85)$$

Les invariants modifiés peuvent être définis.

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} = I_1 J_3^{-\frac{2}{3}} \\ \bar{I}_2 &= I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} = I_2 J_3^{-\frac{4}{3}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

La forme générale du potentiel s'exprime alors par :

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_d(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_s(J) \quad (2.87)$$

Dans le cas d'une pression uniforme pure :

$$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3), W_d = 0 \text{ et } W = W_s(J) \quad (2.88)$$

Plusieurs méthodes de résolution peuvent être envisagées pour prendre en compte la quasi-compressibilité du matériau.

- La méthode des multiplicateurs de Lagrange, où l'énergie totale est minimisée sur tout l'espace des fonctions discrétisées des déplacements moyennant la relaxation de la contrainte d'incompressibilité $I_3 = 1$, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange. Cette méthode simple à mettre en œuvre, conduit à un faible surcroît du coût de calcul car la largeur de la bande du système obtenu après discrétisation et linéarisation augmente peu.

- La méthode de pénalisation où la densité d'énergie de déformation du matériau incompressible est complétée par des termes de compressibilité de la forme :

$$\kappa G(I_3) \quad (2.89)$$

La littérature fait essentiellement référence à deux expressions possibles pour la fonction de pénalité G. La première est due à [Ode83]:

$$G(I_3) = \frac{1}{2}(I_3 - 1) \quad (2.90)$$

La seconde est proposée par [Hag83]:

$$G(I_3) = \frac{1}{2} \ln(I_3) \quad (2.91)$$

Quant au facteur de pénalité κ , il est assimilable au module de compressibilité du matériau. La valeur de κ est choisie égale à un nombre très grand, la fonction G ne s'annule que pour $I_3 = 1$. Dans l'application de la méthode, il arrive que la matrice de rigidité soit mal conditionnée. Pour y remédier, on sous intègre les termes de raideur correspondant à (2.87) ou (2.91).

- La méthode lagrangienne perturbée est une combinaison entre la méthode de pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Son utilisation peut être considérée comme une amélioration de la méthode de pénalité qui évite l'utilisation de coefficients de pénalité trop grands. Cette méthode à été utilisée par Simo et al [Sim85] pour l'étude de problèmes de contact sans frottement et généralisé par [Ju88] pour l'étude des problèmes de contact avec frottement. Les auteurs précédents distinguent le cas du frottement adhérent et le cas du frottement glissant.

Plusieurs formes d'énergie de déformation ont été proposées dans la littérature. Crisfield [CriV2] propose la forme de la fonction d'énergie suivante basée sur la méthode de pénalité.

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = Wd(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \frac{1}{2} \kappa (J - 1)^2 \quad (2.92)$$

La fonction $W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)$ a été adoptée dans notre code de calcul pour la formulation des éléments finis.

Chen et al [Che97a] proposent une forme de la fonction d'énergie basée sur la méthode lagrangienne perturbée. L'énergie interne s'exprime alors :

$$\Pi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, p) = \int_V W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J, p) dv = \int_V (Wd(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + p(J - 1) + \frac{1}{2\kappa} p^2) dV \quad (2.93)$$

Dans le cas d'un modèle de Mooney-Rivlin, l'énergie de distorsion $W(\bar{I}_\alpha); \alpha = 1, 2$ s'exprime en fonction des deux invariants modifiés (2.85) comme suit :

$$Wd(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = C_1 (\bar{I}_1 - 3) + C_2 (\bar{I}_2 - 3) \quad (2.94)$$

Dans le cas d'un modèle d'Ogden [Ogd72], on exprime l'énergie de distorsion en fonction des élongations modifiées par :

$$Wd(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3) = \sum_{r=1}^N \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\bar{\lambda}_1^{\alpha_r} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_r} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_r} - 3) \quad (2.95)$$

$$\text{Avec} \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda_1 I_3^{-\frac{1}{3}}; \bar{\lambda}_2 = \lambda_2 I_3^{-\frac{1}{3}}; \bar{\lambda}_3 = \lambda_3 I_3^{-\frac{1}{3}} \quad (2.2.96)$$

2.3. Formulation variationnelle du problème d'équilibre et résolution numérique par éléments finis

2.3.1. Equations d'équilibre

Soit un solide déformable dans une configuration C . Ce solide occupe un volume V de surface S . Il est soumis aux sollicitations suivantes :

- Une force surfacique f_s sur la portion S_f de la surface externe,
- Une force volumique f_v ;
- Les déplacements sont imposés sur une portion S_u de la surface externe du solide.

Dans un calcul statique ces sollicitations induisent un champ de contraintes internes. Le solide en équilibre est régi par les équations classiques suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) + \vec{f}_v &= \vec{0} & \text{sur } V \\ \sigma \vec{n} &= \vec{f}_s & \text{sur } S_f \end{aligned} \quad (2.97)$$

Avec les conditions aux limites en déplacement :

$$\vec{u} = \vec{\bar{u}} \quad \text{sur } S_u \quad (2.98)$$

Avec ;

σ : Tenseur des contraintes de Cauchy

$\vec{\bar{u}}$: Vecteur déplacements des particules

\vec{n} : Vecteur de la normale extérieure en un point du contour

Si les forces de volume sont négligeables, les équations d'équilibre prennent la forme suivante en composantes cartésiennes :

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 && \text{sur } V \\
\sigma_{ij} n_j &= f_s && \text{sur } S_f \\
u_i &= \bar{u}_i && \text{sur } S_u
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Si on exprime les mêmes équations sur la configuration de référence C_0 , on obtient une description lagrangienne des équations d'équilibre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\pi) + \vec{f}_v^0 = 0 \tag{2.100}$$

$$\pi \cdot \vec{n} = \vec{f}_s^0 \tag{2.101}$$

$$\text{Avec} \quad \vec{f}_v^0 = J \vec{f}_v \tag{2.102}$$

$$\text{Et} \quad dS^0 \vec{f}_s^0 = dS \vec{f}_s \tag{2.103}$$

\vec{n}^0 étant la normale sortante en un point du contour S^0 , π le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff de premier espèce (PK1) :

$$\pi = J \sigma F^T = F S \tag{2.104}$$

2.3.2. Principe des travaux virtuels

La forme variationnelle associée à l'équation d'équilibre (2.97) est obtenue à partir d'une formulation de type de Galerkin avec comme fonction de pondération un champ de déplacements virtuels \bar{u}^* . Elle s'exprime dans une configuration notée C (configuration de référence) comme suit :

$$W = W_{\text{int}} - W_{\text{ext}} = 0 \quad ; \quad \forall \{u^*\} \quad \text{avec} \quad \{u^*\} = \{\bar{u}\} \quad \text{sur } S_u = 0 \tag{2.105}$$

Avec

$$W_{\text{int}} = \int_V \text{tr}([D]^*[\sigma]) dV \tag{2.106a}$$

$$W_{\text{ext}} = \int_V \langle u^* \rangle \{f_v\} dV + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS \tag{2.107b}$$

Ou :

$\{f_v\}, \{f_s\}$ sont les vecteurs forces de volume et de surface,

S_u Surface où les déplacements sont imposés,

$[D^*]$ est le tenseur taux de déformations virtuelles correspondant à $\langle u^* \rangle$, de la même forme que le tenseur taux de déformations réelles ; à savoir :

$$[D^*] = \frac{1}{2} \left([L^*] + [L^*]^T \right) \quad (2.108)$$

Soit en composantes cartésiennes :

$$[D^*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^*}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial v^*}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \\ sym & & \frac{\partial w^*}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

2.3.3. Formulation Lagrangienne Totale

Dans la formulation totale, la configuration initiale C^0 sert de référence ($C = C^0$). Le principe des travaux virtuels s'écrit en (F.L.T) :

$$W = \int_{V^0} \langle E^* \rangle \{S\} dV^0 - \int_{S^0} \langle u^* \rangle \{f_s\} dS^0 = 0 \quad (2.110)$$

$[E^*]$ est le tenseur de déformations virtuelles de Green-Lagrange (2.11) défini par :

$$[E_0^*] = \frac{1}{2} \left([F^*]^T [F] + [F]^T [F^*] \right) \quad (2.111)$$

$$\langle E^* \rangle = \langle E_{11}^* \quad E_{22}^* \quad E_{33}^* \quad 2E_{12}^* \quad 2E_{13}^* \quad 2E_{23}^* \rangle \quad (2.112)$$

$[S]$ est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff de seconde espèce (PK2) (2.27) :

$$\langle S \rangle = \langle S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{23} \rangle \quad (2.113)$$

2.3.4. Méthodes de résolution

Pour modéliser la mise en forme des corps plastiques creux, plusieurs schémas de résolution peuvent être utilisés. Le plus répandu est le schéma de Newton Raphson. Celui-ci se base sur une technique incrémentale qui consiste à discrétiser le chargement total en plusieurs incréments et à chercher les configurations C^1, C^2, \dots, C^n correspondant aux différents pas de chargement. Une autre technique largement utilisée sur des problèmes tels

que l'impact et la mise en forme (emboutissage des tôles) est celle qui consiste à résoudre les équations à l'aide de schémas explicites (résolution en dynamique explicite).

2.3.4.1. Schéma de Newton Raphson

On peut résoudre les équations non linéaires de manière incrémentale. Cette méthode consiste à appliquer le niveau de sollicitation par incréments successifs, en recherchant à chaque étape la réponse de la structure, avec ou sans correction de l'équilibre. L'idée de base est en fait de linéariser les équations. Cela s'obtient par un développement en séries de Taylor des équations non linéaires, au voisinage d'une solution connue limitée aux termes linéaires.

La correction du champ de déplacements $\{\Delta U_n^i\}$ peut être évaluée selon plusieurs approches : Newton-Raphson (versions standard et modifiée) et quasi-Newton. Grâce à sa grande robustesse au niveau de la convergence, malgré un coût numérique élevé, la méthode de Newton-Raphson standard ou modifié demeure ainsi la plus utilisée dans les codes d'éléments finis.

Considérant qu'à une itération (i-1) l'approximation $\{U^{i-1}\}$ est connue et que le résidu soit non nul :

$$\{R(U^{i-1})\} = \{F_{ext}\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \neq 0 \quad (2.114)$$

On cherche une approximation $\{U^i\}$ telle que :

$$\{R(U^i)\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} = 0 \quad (2.115)$$

En effectuant un développement en série de Taylor de l'expression (2.114) au voisinage de $\{U^{i-1}\}$ et en ne conservant que les termes du premier ordre, on obtient :

$$\{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} \approx \{R(U^{i-1})\} + \frac{\partial \{R(U^{i-1})\}}{\partial U} \{\Delta U^i\} \approx 0 \quad (2.116)$$

$$\{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} \approx \{R(U^{i-1})\} + [K_t(U^{i-1})]\{\Delta U^i\} \approx 0 \quad (2.117)$$

Où

$$[K_t(U^{i-1})] = - \left[\frac{\partial \{R(U^{i-1})\}}{\partial \{U\}} \right] = [K_r(U^{i-1})] + \left[\frac{\partial [K_r(U^{i-1})]}{\partial \{U\}} \right] \{U^{i-1}\} \quad (2.118)$$

est la matrice de rigidité tangente. Comparativement à la méthode de Newton-Raphson standard qui évalue (2.116) à chaque itération, la méthode de Newton-Raphson modifiée n'évalue la matrice qu'une seule fois au début de chaque pas de chargement offrant ainsi une

économie considérable en temps de calcul. Cependant, cette dernière méthode nécessite généralement un nombre d'itérations supérieur pour un même critère de convergence.

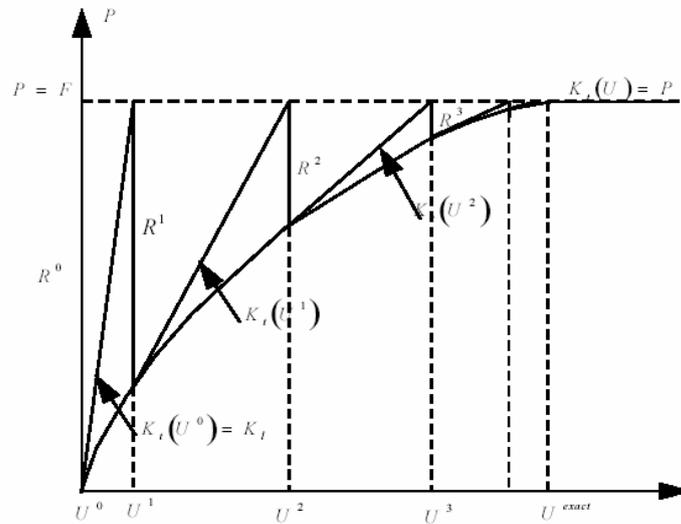


Figure 2-11 Méthode de Newton-Raphson standard

2.3.4.1.1. Stratégie de résolution utilisées

Dans cette partie, nous rappelons les différentes stratégies de résolution adoptées dans notre présente étude.

La convergence ou divergence de la méthode de Newton-Raphson est très liée à la solution initiale. Dans le but de palier à ce problème, l'application du paramètre de charge nous permet de subdiviser le chargement total appliqué sur le système en plusieurs pas de chargement de longueur égale ou variable [Tal96].

$$f(\{U_n\}, \lambda) = 0 \quad (2.119)$$

Les techniques permettant de passer d'un point solution à un autre et ainsi de déterminer les courbes charge-déplacement avec la précision souhaitée sont appelées techniques de pilotages. Les trois techniques importantes programmées dans le bloc non linéaire intégré à notre code d'élément finis sont les suivantes.

- La charge imposée (ou contrôle en charge)
- Une composante de déplacement imposée (ou contrôle en déplacement)
- La Longueur d'arc imposée

2.3.4.2. Schéma dynamique explicite

Ce schéma traditionnellement utilisé pour résoudre les problèmes d'impact a été adapté à la modélisation de l'emboutissage des tôles ([Sha95], [Rac93]). Il est représenté par l'équation suivante :

$$[M]\{\ddot{U}\}-\{R(\{U\})\}=0 \quad (2.120)$$

$[M]$ est la matrice masse, $\{\ddot{U}\}$ le vecteur des accélérations nodales.

Le cas des procédés de thermo-soufflage peut être traité en quasi-statique comme un cas de problème d'impact. Pour amortir le contact du solide déformable avec le moule et obtenir ainsi une bonne simulation des déplacements, un fort coefficient d'amortissement est nécessaire. L'équation (2.120) devient donc :

$$[M]\{\ddot{U}\}+[C]\{\dot{U}\}-\{R(\{U\})\}=0 \quad (2.121)$$

$\{U\}$ et $\{\dot{U}\}$ sont les déplacements et vitesses pour $t=t_0$ (conditions initiales), $[C]$ la matrice d'amortissement.

L'équation (2.121) peut se mettre sous la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{U}_n\}+[C]\{\dot{U}_n\}-\{R(\{U_n\})\}=0 \quad (2.122)$$

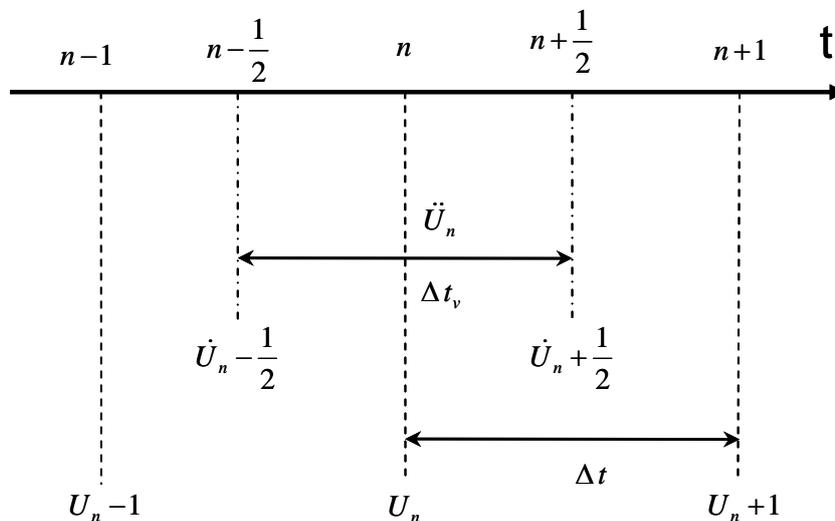


Figure 2-12 Schéma de différences finies

Dans les codes commerciaux de calcul explicite tels que DYNA3D, ABAQUS, PAM-CRASH, PRONTO3D, le terme de vitesse $\{\dot{U}_n\}$ de l'équation (2.122) est remplacé par $\left\{\dot{U}_{n-\frac{1}{2}}\right\}$ au milieu du pas de temps Δt_v . Ce changement est préféré pour les problèmes avec amortissement. Cette procédure est plus efficace que le schéma de différences finies

standards. La précision du schéma n'est pas affectée par ce changement puisque le pas de temps est généralement petit et le choix d'amortissement n'est pas unique. Pour la modélisation de notre problème, nous avons utilisé une matrice $[C]$ proportionnelle à la matrice masse $[M]$ ($[C]=\alpha[M]$). L'ajustement du coefficient α permet de reproduire la solution quasi-statique du problème à partir de l'équation (2.122) en atténuant les effets dynamiques.

Pour une matrice $[C]$ proportionnelle à $[M]$, le vecteur accélération $\{\ddot{U}_n\}$ est obtenu à partir de (2.122) :

$$\{\ddot{U}_n\}=[M]^{-1}\{R_n\}-\alpha\left\{\dot{U}_{n-\frac{1}{2}}\right\}; \quad ([M] \text{ étant prise diagonale}) \quad (2.123)$$

La matrice masse adoptée étant diagonale, sa détermination et son implémentation dans notre code sera par conséquent explicite.

Le schéma des différences finies centrées permet d'écrire le vecteur vitesse (Figure 2-12) :

$$\left\{\dot{U}_{n+\frac{1}{2}}\right\}=\left\{\dot{U}_{n-\frac{1}{2}}\right\}+\Delta t_v\left\{\ddot{U}_n\right\} \quad (2.124)$$

Ainsi, les déplacements au temps t_n ne dépendent que des variables au temps précédent :

$$\{U_{n+1}\}=\{U_n\}+\Delta t\left\{\dot{U}_{n+\frac{1}{2}}\right\} \quad (2.125)$$

Le schéma dynamique explicite à l'avantage majeur de remédier aux problèmes de divergence souvent constatés avec des résolutions implicites. Il présente cependant un certain nombre d'inconvénients :

- La condition de stabilité impose une limite sur la taille du pas de temps, ce qui conduit à des temps de calcul relativement lents
- La solution obtenue est souvent qualitative car elle ne vérifie pas à priori l'équilibre.

2.3.5. Calcul de matrice tangente

La matrice tangente élémentaire peut être calculée soit explicitement en exprimant la deuxième variation du travail virtuel élémentaire, soit par perturbation. Cette dernière

technique couramment utilisée est basée sur un schéma de différences finies. Dans notre travail, nous avons considéré une perturbation centrée. Au niveau d'un élément, la j^{eme} colonne de la matrice $[K_T]$ est obtenue de la manière suivante :

$$\{K_{T_j}\} = - \frac{\{R(\{U\} + \{\delta U_j\})\} - \{R(\{U\} - \{\delta U_j\})\}}{2\delta U_j} \quad (2.126)$$

Le nombre de composantes dans $\{\delta U_j\}$ est égal au nombre de degrés de liberté d'un élément. Seule la composante de perturbation δU_j est différente de zéro. La matrice tangente calculée par la perturbation conduit souvent à des résultats numériques aussi bons que ceux obtenus avec une matrice tangente définie explicitement si la perturbation δU_j est bien choisie. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle demande plus de temps de calcul, mais elle permet d'éviter de définir analytiquement la matrice tangente. Elle peut aussi, dans certain cas, éviter le problème de singularité numérique au démarrage.

3 Chapitre 3

3.1. Modélisation du problème de contact

3.1.1. Introduction

Les problèmes de contact sont très fréquemment rencontrés dans l'industrie. Vue leur complexité, des travaux scientifiques intenses continuent à être développés et ce depuis une vingtaine d'année. Les codes industriels existants tels que ABAQUS, LS-DYNA, MARC, PAM-CRACH etc., prennent en compte le problème de contact avec ou sans frottement. Cela a permis de solutionner un nombre assez vaste de problèmes industriels réputés difficiles.

Les difficultés principales du problème de contact proviennent du fait que les conditions aux limites liées au contact ne sont pas connues à l'avance et qu'elles dépendent de la solution (conditions aux limites évolutives). Ainsi, la surface réelle de contact et les réactions de contact font partie des inconnues du problème. En présence des grandes transformations, les nonlinéarités provenant du contact s'ajoutent aux nonlinéarités géométriques et matérielles, rendant ainsi la modélisation du problème très complexe.

Bien que Signorini ait posé dès 1933 le problème général de l'équilibre d'un solide élastique linéaire en contact sans frottement avec une fondation rigide, il a fallu attendre les années soixante pour que Duvaut et Lions [Duv76] proposent les inéquations variationnelles permettant d'établir l'existence et l'unicité de la solution. Ceci a bien évidemment permis durant les années 70 à de nombreuses méthodes numériques de voir le jour.

Le calcul variationnel et le développement des techniques numériques de résolution ont permis de résoudre les problèmes de contact les plus difficiles grâce à la méthode des éléments finis.

3.2. Rappel de la définition d'un problème de contact

La gestion du contact dans beaucoup de problèmes physiques est en général un défi sur le plan de la simulation numérique. Deux facteurs importants sont à prendre en compte simultanément : la mécanique des milieux continus des corps déformables et l'interaction entre les surfaces. Considérons deux solides A et B de contours S_A et S_B (voir Figure 3-1). A et B sont en contact si une zone de leur contour est commune.

$$\partial S_A \cap \partial S_B \neq \emptyset \quad (\emptyset \text{ Représente l'espace vide}) \quad (3.1)$$

Un point P de A candidat au contact se projette sur B en P', particule la plus proche de P. Nous définissons alors le repère direct $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$ tel que \vec{n} soit normal à la surface B en P', et \vec{t}_1 et \vec{t}_2 soient tangents à cette surface.

Si \vec{X} et \vec{X}' sont des vecteurs positions de P et P' dans le repère global (O, X, Y, Z), le vecteur position \vec{x} du point P, exprimé dans le repère local de contact est défini par :

$$\{x\} = [Q]\{X - X'\} \quad \text{où} \quad [Q] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad \{X'\} = \begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{Bmatrix} \quad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

La coordonnée x_n est la distance algébrique entre P et P'. Les réactions de contact sont ainsi définies à partir des réactions locales par :

$$\{R_g\} = [Q]^T \{r_c\} = [Q]^T \begin{Bmatrix} r_{t_1} \\ r_{t_2} \\ n \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

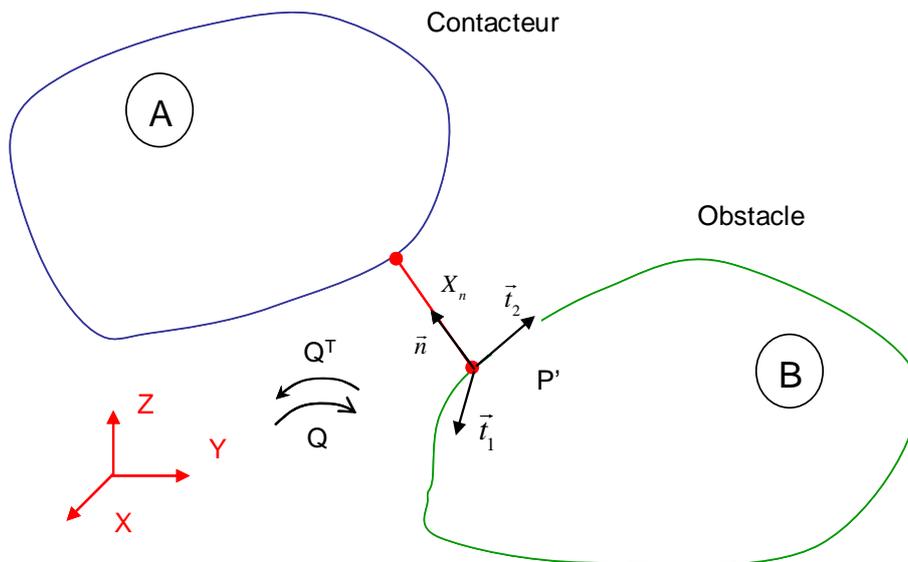


Figure 3-1 Cinématique au voisinage d'un point candidat au contact

3.2.1. Approche numérique du contact

La cinématique du contact peut être traduite par l'utilisation d'éléments finis simples à manipuler tels que des éléments linéaires à deux nœuds pour le cas 2D, ou des éléments triangulaires à 3 nœuds ou quadrilatères à 4 nœuds pour les cas 3D. Afin d'établir une formulation du problème de contact et de frottement, en présence de grandes déformations du solide et de grands déplacements relatifs, nous examinons les différentes grandeurs géométriques et cinématiques nécessaires (vecteur normal/tangentiel, distances de pénétration /glissement...).

Considérons le nœud s d'un contacteur déformable, en contact avec l'élément (1-2) d'un contacteur rigide, et \vec{X}^s son vecteur position (voir Figure 3-2, Figure 3-3). Nous commençons par définir un repère local tangent sur l'élément (1-2) de base (\vec{t}, \vec{n}) . Les composantes tangentielle et normale de cette dernière dans le repère 2D global sont données par :

$$\{t\} = \frac{1}{L} (\{X_2\} - \{X_1\}) = \begin{Bmatrix} c \\ s \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} -s \\ c \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad L = \|X_2 - X_1\| \quad (3.6)$$

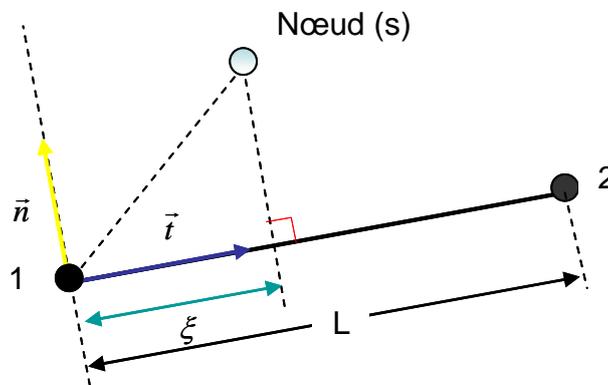


Figure 3-2 Référentiel du repère local 2D

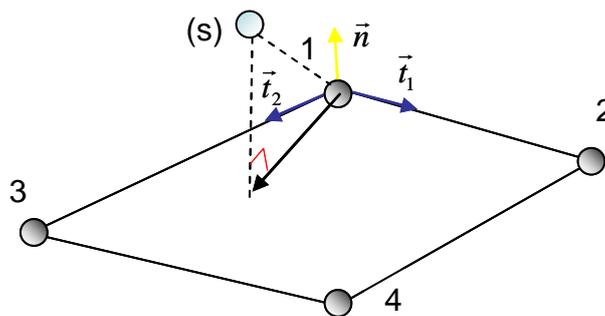


Figure 3-3 Référentiel du repère local 3D

Afin de permettre un retour à la frontière des nœuds « esclaves » se trouvant dans le zone élémentaire « maître » (2^{ème} corps solide), deux grandeurs cinématiques sont nécessaires et devront en conséquence être calculées. Il s'agit de :

- la distance de pénétration $\{x_n\}$ du nœud s (en anglais : normal gap) à travers l'élément (1-2) pour les cas 2D ou à travers une surface dans le cas des problèmes purement 3D. Celle-ci s'exprime dans le repère local comme suit :

$$\{x_n\} = \langle X_s - X_1 \rangle \{n\} \quad (3.7)$$

- la distance de glissement relatif $\{x_t\}$ des deux corps dont la démarche de calcul suit les étapes suivantes :

(1) les positions \vec{X}_{n-1} et \vec{X}_n du nœud s respectivement aux instants t_{n-1} et t_n (voir Figure 3-4 et Figure 3-5) sont calculées dans un premier temps

(2) le point d'intersection P^* du vecteur $\overrightarrow{X_{n-1}X_n}$ avec le segment (1-2) ou la surface (1, 2,3,4) est ensuite déterminé

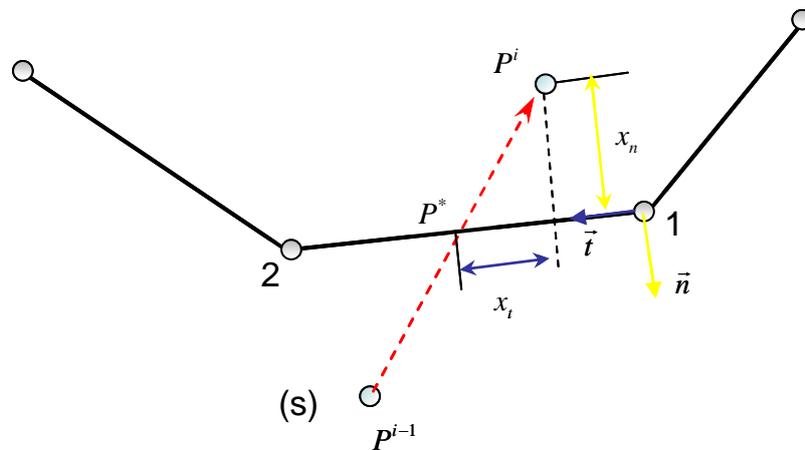


Figure 3-4 Etat Local 2D

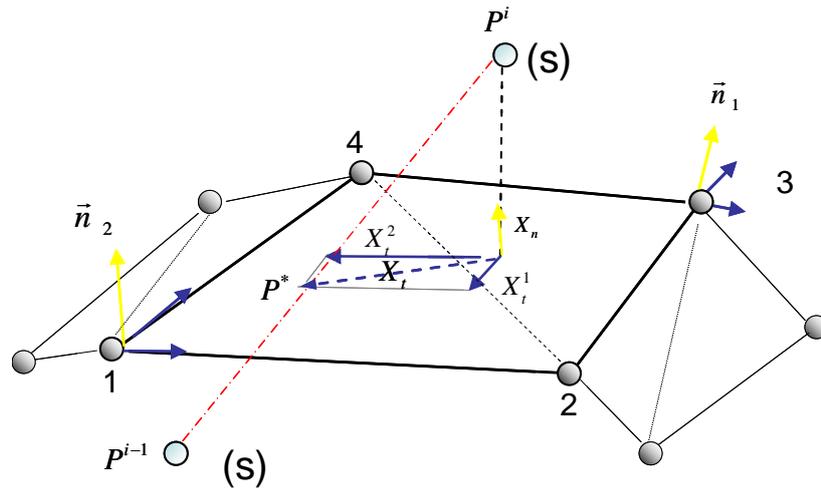


Figure 3-5 Etat Local 3D

La distance de glissement $\{x_t\}$ s'écrit ainsi :

$$\{x_t\} = \langle X^s - X^* \rangle \{t\} ; \quad (X^* : \text{Coordonnée du point } P^*) \quad (3.8)$$

La projection de la différence $X^s - X^*$ sur le segment ou la surface, représente le glissement du nœud (s) sur le segment ou la surface.

Enfin, une coordonnée curviligne normalisée du point p, notée ξ , devra également être définie pour permettre de tester si le nœud s a pénétré ou pas à travers le segment (1-2) :

$$\xi = \frac{1}{L} \langle X_s - X_1 \rangle \{t\} \quad \text{avec } 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.9)$$

3.2.2. Lois de contact

Le contact entre deux solides implique qu'à tout instant, le solide A est à l'extérieur du solide B et inversement. Cette condition d'impénétrabilité entre les solides implique l'existence d'efforts de contact agissant sur ces deux solides au niveau des surfaces en contact. D'après le principe d'action et de réaction, ces efforts sont égaux et de sens contraire. Les composantes normales de ses efforts ne doivent exercer que des efforts de compression pour satisfaire le principe de non adhésion des surfaces, et les composantes tangentielles doivent satisfaire la loi de frottement.

Le contact unilatéral s'exprime alors dans le repère local (\vec{t}, \vec{n}) par les conditions suivantes :

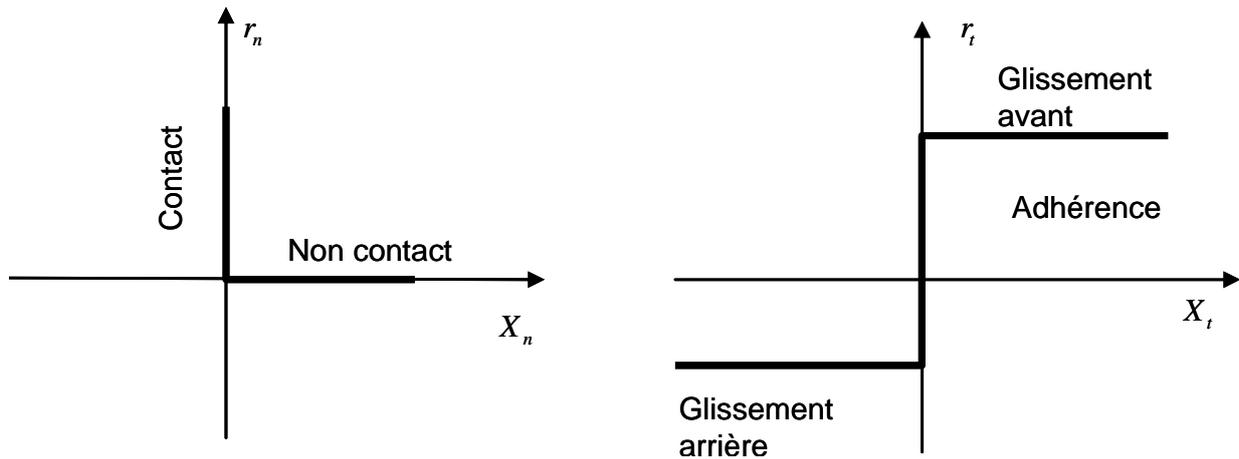


Figure 3-6 Graphes de contact et de frottement

* Impénétrabilité

Chaque particule du contacteur A reste à l'extérieur de l'obstacle B, ce qui donne dans le repère local la relation suivante :

$$x_n \geq 0 \quad (3.10)$$

* Etat de contact

Lorsqu'une particule est en contact avec la surface de l'obstacle, elle ne doit pas coller. Autrement dit, la réaction normale r_n exercée sur le contacteur par l'obstacle doit toujours être dirigée vers l'extérieur de l'obstacle :

$$x_n = 0 \Rightarrow r_n \geq 0 \quad (3.11)$$

* Etat de non contact

Lorsque la particule est à l'extérieur de l'obstacle, la réaction r_n est nulle :

$$x_n = 0 \Rightarrow r_n = 0 \quad (3.12)$$

Les lois énoncées précédemment peuvent être représentées par les conditions de Signiorini [Sig59], exprimées sous la forme suivante :

$$x_n \geq 0, \quad r_n \geq 0 \quad \text{et} \quad x_n r_n = 0 \quad (3.13)$$

3.2.3. Lois de frottement (Modèle de coulomb)

Dans la littérature, il existe plusieurs lois de frottement qui permettent la modélisation des problèmes de contact avec frottement. Le modèle le plus utilisé est celui de coulomb

[Cou85], où le cisaillement limite est proportionnel à la pression normale (Figure 3-6). Ce modèle est rencontré dans plusieurs problèmes physiques, notamment dans la mise en forme des métaux ou des corps de plastique creux. Il exprime un coefficient de frottement μ comme le rapport de l'effort tangentiel à l'effort normal exercé par un solide sur l'autre. Dans le repère local, la loi de frottement s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} |r_t| \leq \mu r_n \\ |r_t| = -\mu r_n \frac{x_t}{|x_t|} \end{cases} \quad (3.14)$$

Avec x_t la composante tangentielle du déplacement relatif de P sur B et (r_n, r_t) les composantes normale et tangentielles des réactions de contact.

D'autres lois basées sur un modèle non local, ou sur le modèle de Tresca (Figure 3-7) où le cisaillement limite est indépendant de la pression normale, sont utilisées aussi en mise en forme de métaux. Elles expriment une relation linéaire entre la réaction tangentielle r_t et la réaction normale limite d'écoulement r_0 , soit :

$$r_t = -m \frac{r_0}{\sqrt{3}} \frac{x_t}{|x_t|} \quad (3.15)$$

m est le coefficient de frottement de Tresca. La réaction tangentielle r_t est supposée indépendante de la réaction normale r_n .

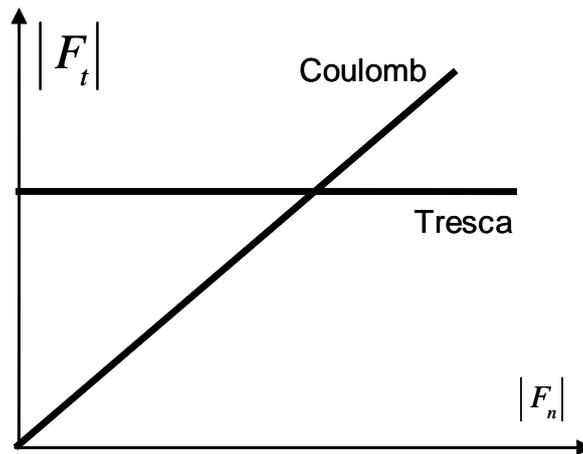


Figure 3-7 Modèle de frottement : Tresca, Coulomb

La mise en œuvre du modèle de Tresca reste aisée du fait de la simplicité de son écriture en comparaison à la loi de frottement de Coulomb qui est plus élaborée dans sa définition. En revanche cette dernière présente l'avantage de mieux représenter de nombreux

phénomènes de contact, notamment ceux rencontrés dans le contact entre métaux. La loi de coulomb est retenue pour notre travail pour la modélisation du frottement.

3.3. Méthodes numériques de gestion de contact

Les lois de contact et de frottement peuvent être décrites sous plusieurs formes. Elles se traduisent par des inéquations non linéaires. Les principales difficultés liées à la résolution du problème de contact proviennent des conditions aux limites évolutives qui dépendent de la solution du problème d'équilibre de la structure. Plusieurs méthodes numériques permettent de résoudre le couplage entre les inégalités de contact et les équations d'équilibre. Elles peuvent être classées en trois catégories suivant la procédure utilisée pour évaluer les réactions de contact.

3.3.1. Méthode de programmation mathématique

Dans cette méthode, les conditions de contact sont introduites comme des contraintes dans la minimisation de l'énergie potentielle du système. La solution est obtenue par la minimisation de la fonctionnelle à l'aide de techniques d'optimisation. L'efficacité de ces méthodes est encore controversée. Elles restent cependant peu utilisées dans les codes de calcul commerciaux.

3.3.2. Méthodes directes

Dans ces méthodes, les conditions de contact ne sont pas introduites explicitement dans la formulation variationnelle du problème [Wro94]. Le problème de contact et le problème global sont résolus séparément. Les réactions de contact sont calculées à priori, puis introduites dans les équations d'équilibre discrétisées, en tant que forces externes supplémentaires connues. Ces méthodes ont l'avantage d'être faciles à implémenter dans un code de calcul, de légères modifications sont apportées à l'algorithme de résolution par rapport au cas d'un problème sans contact. Ces méthodes permettent également de satisfaire exactement les conditions de contact. En revanche, elles sont plus coûteuses en temps de calcul. La méthode de flexibilité, initialement développée par [Fra75] pour le contact élastique sans frottement, est également une méthode directe que plusieurs auteurs ont adoptée et étendue aux problèmes de frottement avec contact. Nous citons en particulier [Sac81] et Jean [Jea88].

3.3.3. Méthodes des rigidités

Dans ces méthodes, les conditions de contact sont introduites explicitement dans la formulation variationnelle du problème. Parmi ces méthodes, nous distinguons la méthode basée sur les multiplicateurs de Lagrange [Bat88][Ber84] dont le principe consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange pour satisfaire les conditions de non interpénétration des nœuds décelés. Cette méthode peut conduire à une matrice tangente globale singulière. En revanche cette méthode a l'avantage de vérifier exactement les conditions de contact et de frottement.

Nous distinguons également la méthode de pénalité [Per92] [Hun93]. Cette méthode par sa simplicité et en absence d'inconnues supplémentaires reste la plus utilisée. Elle présente l'avantage de s'implémenter facilement dans les codes de calcul. Cependant le choix des coefficients de pénalisation peut être un facteur d'imprécision lors de la résolution et peut conduire aussi à un mauvais conditionnement de la matrice tangente globale. Cette méthode a été retenue pour la modélisation de notre problème. Son implémentation sur le plan numérique sera décrite dans la suite de ce chapitre.

Une autre méthode basée sur une combinaison des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode de pénalité est appelée « méthode du Lagrangien perturbé » [Sim85] [Ju88]. Celle-ci peut être considérée comme une amélioration de la méthode de pénalité, évitant ainsi l'utilisation de coefficients de pénalité trop grands.

3.3.3.1. Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode a été utilisée par Bathe et al.[Bat88] pour étudier les problèmes de contact avec frottement. L'introduction des multiplicateurs de Lagrange λ_n et λ_t dans l'écriture des équations d'équilibre du solide conduit à un système linéarisé de la forme :

$$\left([K_T] + [K_C] \right) \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda_n \\ \Delta \lambda_t \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{\text{int}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{\text{ext}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{\text{cnt}} \\ G_n \\ G_t \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i + \Delta x \\ \lambda_n^{i+1} = \lambda_n^i + \Delta \lambda_n \\ \lambda_t^{i+1} = \lambda_t^i + \Delta \lambda_t \end{cases}$$

G_n et G_t sont respectivement les vecteurs contenant l'ensemble des distances normales x_n et des distances de glissement tangentiel relatif x_t entre les solides en contact.

Dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, λ_n et λ_t représentent des réactions normales et tangentielles. Ces réactions sont calculées de façon à supprimer les interpénétrations x_n et les glissements relatifs x_t dans le cas du contact adhérent. Elles sont considérées comme inconnues à part entière comme les déplacements Δx . La forme de la matrice tangente de contact peut s'écrire [EIM89]:

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \sum (K_{cn} + K_{ct}) & \sum c_n^s & \sum c_t^s \\ \sum c_n^{sT} & 0 & 0 \\ \sum c_t^{sT} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Remarquons l'apparition des zéros sur la diagonale de la sous matrice tangente correspondant aux variables λ_n et λ_t . Ces zéros posent des problèmes de conditionnement de la matrice de rigidité tangente et peuvent faire apparaître des pivots nuls au cours de la résolution (étape de l'élimination de Gauss).

La méthode des multiplicateurs de Lagrange a l'avantage de vérifier exactement les conditions de contact et de frottement. Par contre elle présente l'inconvénient d'augmenter le nombre d'inconnues et exige l'utilisation des méthodes de résolution appropriées.

3.3.3.2. Méthode de pénalité

La méthode de pénalité consiste à introduire les réactions de contact dans la résolution du problème global comme des fonctions explicites des déplacements nodaux inconnus :

$$\{R(\{u\})\} = \{F_{ext}(\{u\})\} - \{F_{int}(\{u\})\} + \{F_{cnt}(\{u\})\} = 0 \quad (3.18)$$

$\{F_{cnt}\}$: réactions de contact dépendant des modèles de contact et de frottement.

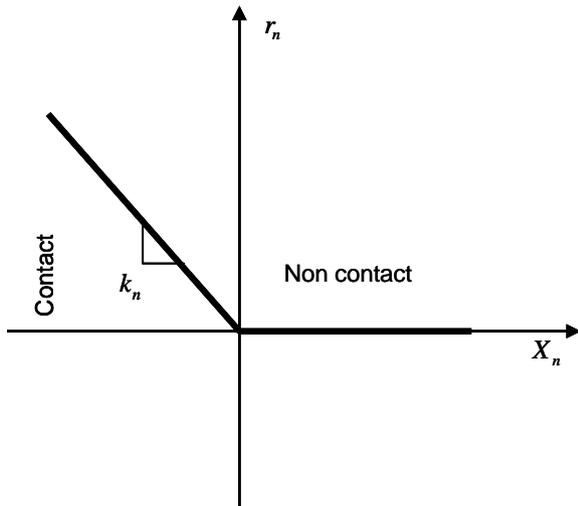


Figure 3-8 Réactions normales de contact

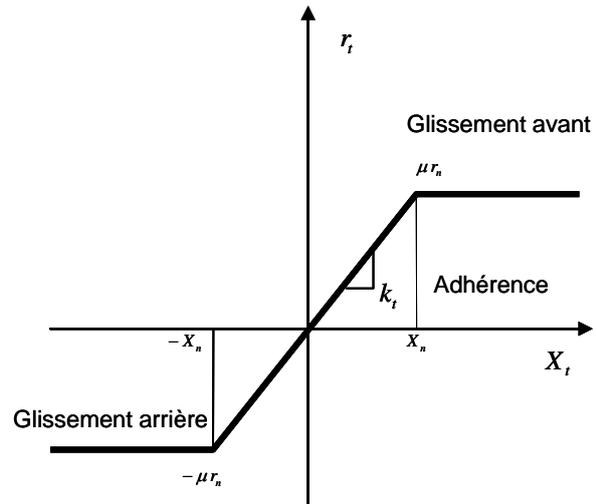


Figure 3-9 Réactions tangentielle de contact

La résolution de l'équation par un schéma itératif nécessite la différentiabilité des réactions de contact par rapport aux déplacements. Afin d'assurer cette différentiabilité (par morceaux).

Les coefficients k_n et k_t sont les coefficients de pénalisation. Ils représentent la rigidité de ressorts fictifs orientés dans la direction normale et tangentielle du repère local de contact. Les valeurs de ces coefficients résultent d'un compromis : elles doivent être à la fois suffisamment grandes pour assurer la non interpénétration, mais modérées pour éviter un mauvais conditionnement de la matrice tangente.

Une estimation optimale de k_n est donnée par Wrigger et Taylor en 1984 [WNO84]. Elle est calculée à partir de la précision de l'ordinateur ε (ε est le plus petit chiffre qui vérifie $(1+\varepsilon > 1)$), du nombre total d'inconnues n et de la plus petite rigidité k_1 des éléments voisins des particules en contact :

$$k_n = \frac{k_1}{\sqrt{n\varepsilon}} \quad (3.19)$$

La prise en compte de la loi de contact dans les équations d'équilibre globales s'effectue selon le schéma de résolution de ces équations. En général l'état de contact est vérifié pour tous les nœuds candidats au contact. Les réactions de contact et les termes de pénalité sont estimés uniquement pour les nœuds qui ont violé l'état de contact.

L'un des inconvénients de la méthode de pénalité est qu'elle ne satisfait les conditions de contact qu'approximativement, car elle tolère des interpénétrations de l'ordre de

$x_x = -r_n / k_n$ et des distances de glissement (cas du contact adhérent) de l'ordre de $x_t = -r_t / k_t$. De plus son utilisation est délicate sur le plan numérique.

En raison de sa simplicité de mise en œuvre, la méthode de pénalité a été adoptée dans la présente étude.

3.3.3.2.1. Schéma de type quasi-statique implicite

Lors de la résolution du problème d'équilibre par un schéma de Newton-Raphson, nous effectuons une analyse des positions des nœuds candidats au contact à chaque itération afin de déterminer le statut de chacun, et on évalue les quantités suivantes :

Réaction normale :

$$\text{Si } x_n \geq 0 \quad \text{non contact} \Rightarrow r_n = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{Si } x_n < 0 \quad \text{contact} \Rightarrow r_n = k_n x_n \quad (3.21)$$

Réaction tangentielle :

$$r_{t,cri} = \mu r_n \quad \text{Réaction Critique} \quad (3.22)$$

$$r_t = k_t x_t \quad \text{Réaction Tangentielle} \quad (3.23)$$

μ représente le coefficient de frottement

$$\text{Si } |r_t| < r_{t,cri} \quad \text{contact adhérent} \Rightarrow r_t = k_t x_t \quad (3.24)$$

$$\text{Si } |r_t| \geq r_{t,cri} \quad \text{contact glissant} \Rightarrow r_t = r_{t,cri} \frac{x_t}{|x_t|} \quad (3.25)$$

La contribution des réactions d'un nœud de contact dans le résidu d'équilibre global s'écrit :

$$\{F_{cnt}\}^n = [Q]^T \begin{Bmatrix} r_n \\ r_t \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Les matrices tangentes de contact sont évaluées de la manière suivante :

$$[K_{cnt}]^n = [Q]^T \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} [Q] \Rightarrow \text{contact adhérent} \quad (3.27)$$

$$[K_{cnt}]^n = [Q]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} [Q] \Rightarrow \text{contact glissant} \quad (3.28)$$

Avec [Q] la matrice de passage du repère local au repère global. Dans le cas 2D, elle s'écrit comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \langle \vec{n} \rangle \\ \langle \vec{t} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

c et s sont les cosinus directeurs du vecteur normale définis dans l'équation. Les quantités $\{F_{cnt}\}^n$ et $[K_{cnt}]^n$ sont relatives à un nœud. Elles doivent être assemblées dans le vecteur résidu global et la matrice tangente globale. La matrice [Q] pour le cas 3D prend la forme suivante :

$$[Q] = \begin{bmatrix} \langle \vec{t}_1 \rangle \\ \langle \vec{t}_2 \rangle \\ \langle \vec{n} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.3.3.2.2. Schéma du type dynamique explicite

Dans la résolution des problèmes par un schéma de type dynamique explicite, nous effectuons une analyse des positions des nœuds candidats au contact à chaque pas de temps afin de déterminer le statut de chaque nœud candidat au contact. Nous exposerons dans la suite les différentes étapes nécessaires au calcul de la correction des déplacements et des réactions à imposer en un nœud pour prendre en compte le contact.

Le calcul des réactions normales et tangentielles s'effectue de la même façon que le schéma implicite. Au niveau des déplacements normal et tangentiel, les corrections s'effectuent de la façon suivante :

$$u_n = -x_n \quad \text{déplacement normal} \quad (3.31)$$

$$\text{si le contact est adhérent } u_t = -x_t$$

$$\text{si le contact est glissant } u_t = r_{t_{cni}} \frac{x_t}{\|x_t\|} \quad (3.32)$$

Dans le repère global, nous obtenons :

$$\{U_{cnt}\}^n = [Q]^T \begin{Bmatrix} u_n \\ u_t \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

3.3.3.3. Méthode du Lagrangien perturbé

La méthode du lagrangien perturbé est une combinaison de la méthode de pénalité et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Son utilisation peut être considérée comme une amélioration de la méthode de pénalité car elle évite l'utilisation de coefficients de pénalité trop grands. Cette méthode a été utilisée par Simo et al (1985) [Sim85] pour étudier des problèmes de contact sans frottement et généralisée par Ju et Taylor [Ju88] pour étudier des problèmes de contact avec frottement. Ces deux auteurs distinguent le cas du frottement adhérent et le cas du contact glissant.

Le système d'équations d'équilibre linéarisé s'écrit :

Cas du frottement adhérent :

$$\left([K_T] + [K_C] \right) \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda_n \\ \Delta \lambda_t \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{int} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{cnt} \\ -\frac{1}{k_n} \lambda_n G_n \\ -\frac{1}{k_t} \lambda_t G_t \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i + \Delta x \\ \lambda_n^{i+1} = \lambda_n^i + \Delta \lambda_n \\ \lambda_t^{i+1} = \lambda_t^i + \Delta \lambda_t \end{cases}$$

Cas du frottement glissant :

$$\left([K_T] + [K_C] \right) \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{int} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{cnt} \\ -\frac{1}{k_n} \lambda_n G_n \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i + \Delta x \\ \lambda_n^{i+1} = \lambda_n^i + \Delta \lambda_n \end{cases}$$

Une analyse géométrique des positions de tous les nœuds 's' candidats au contact permet de calculer les distances de pénétration x_n et les distances x_t de ces nœuds.

Les réactions normales et tangentielles sont évaluées alors par :

$$r_n = k_n x_n \text{ et } r_t = k_t x_t \quad (3.36)$$

La matrice tangente de contact proposée par Ju et Taylor pour le du frottement adhérent s'écrit :

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \sum (K_{cn} + K_{ct}) & \sum c_n^s & \sum c_t^s \\ \sum c_n^{sT} & -\frac{1}{k_n} I_d & 0 \\ \sum c_t^{sT} & 0 & -\frac{1}{k_t} I_d \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

I_d est la matrice Identité et pour le cas du frottement glissant

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \sum (K_{cn} + K_{ct}) & \sum (c_n^s - \mu \text{sign}(x_t) c_t^s) \\ \sum c_n^{sT} & -\frac{1}{k_n} I_d \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.4. Algorithme de recherche :

3.4.1. Introduction

Les problèmes de contact ont suscité une attention croissante vu leur importance et leur complexité. L'analyse de ces problèmes en dynamique explicite ou en implicite est une question clé nécessitant un calcul de forces de réactions des nœuds entrant en contact entre le solide et le moule. Pour les problèmes simples, la localisation de ces nœuds est une tâche insignifiante. Cependant, pour certains problèmes de grande complexité de type Crash d'automobile, d'emboutissage des tôles, de forgeage ou de thermoformage des composites, ce calcul est d'une importance capitale. L'algorithme de recherche des nœuds potentiels rentrant en contact doit avoir le compromis entre efficacité et rapidité, afin d'éviter une recherche inutile des nœuds non candidats au contact. Une grande variété d'algorithmes de recherche existants se basent sur une recherche globale en premier lieu et ensuite sur une recherche locale plus fine (voir Figure 3-10).

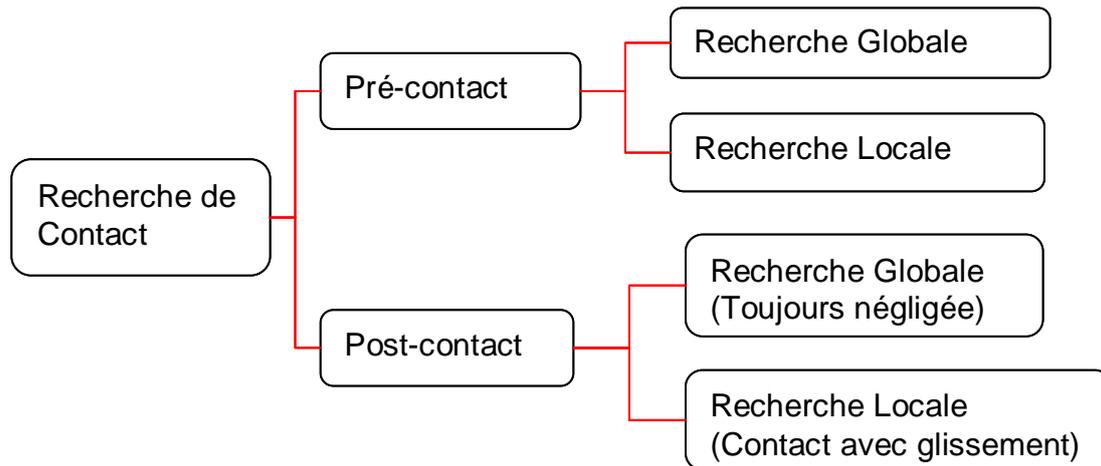


Figure 3-10 Subdivision de la recherche de contact

Le premier algorithme permettant de faire sortir les nœuds « maître » et « esclave », dans le cas des problèmes 2D et 3D, a été établi par Hallquist [Hal93]. Il est basé sur la notion de Bucket-sorting (triage de boîtes). En 1994, Oldenbourg et Nilsson [Old94] ont simplifié l'algorithme précédent en ramenant la recherche de trois dimensions à une seule dimension, grâce à une approche appelée « position code » permettant de codifier tous les nœuds en fonction des positions des nœuds et des numéros de boîtes circonscrites. Cette technique a permis de simplifier la recherche des zones de contact en examinant la « position code » (position codifiée des nœuds) de chaque nœud, après un tri binaire au préalable. En utilisant cet algorithme, le coût de la recherche globale se trouve ainsi réduit à $(N \log_2 N)$ opérations de permutations. Il n'en demeure pas moins que le processus de recherche globale est peu efficace. Pour l'améliorer, Zhong [Zho96] a proposé l'algorithme unifié en combinant la technique de « position code » avec une approche labellisée « HITA » (Hierarchy Territories and Contact Territories). En 1998, Munjiza et al. [Mun98] ont proposé l'algorithme de recherche NBS (No Binary Search) pour traiter les problèmes à grande échelle, avec un temps de recherche proportionnel à N opérations mais valable uniquement pour les objets de taille similaire. D'autres méthodes de recherche de contact, basées sur la théorie des graphes informatiques ont également vu le jour. Nous citons en particulier la méthode K-d [Fja98] ou la méthode des cellules [Wie03] qui fût implémentée avec succès.

Bien que ces méthodes et/ou algorithmes, proposés et développés pour la recherche globale, restent dans leur globalité assez efficaces, il n'en demeure pas moins que des algorithmes efficaces pour la recherche locale de contact restent assez peu développés [Wan97]. La recherche locale est employée pour déterminer avec précision si oui ou non un

nœud esclave est en contact. Les algorithmes de contact local disponibles dans la littérature sont basés sur l'algorithme dit « de nœud à segment » ou de « nœud à surface » [Hal85], à l'exception de l'algorithme de PinBall [Bel91].

La méthode de Newton Raphson est souvent employée pour déterminer les distances de pénétration du nœud « slave » à travers le segment « master ». Dans la plupart des problèmes avec contact, le nombre d'itérations peut augmenter fortement pour des valeurs de tolérance petites (inférieurs à 10^3 - test d'arrêt-), ou dans le cas où la géométrie du segment « master » présente des angles vifs. D'ailleurs elle est instable dans certain cas quand les nœuds candidats sont en face de plusieurs segments [Wan97]. Pour améliorer l'algorithme de « nœud esclave / segment master », Wang [Wan97] a proposé l'algorithme « Intérieur-Extérieur » (Inside-Outside). Celui-ci est basé sur l'orientation des vecteurs normaux portés par l'élément « master » et par la trajectoire du nœud « slave » entre l'itération i et $i+1$. Cette méthode est jugée rapide car aucune itération n'est ajoutée. Cependant, des problèmes peuvent surgir au bord entre deux segments ou entre deux ou plusieurs surfaces bilinéaires appelées « zones d'angle mort », car il n'y a plus de continuité de la normale entre deux segments.

Les zones d'angles morts sont les points faibles des algorithmes de recherche locaux. Pour surmonter ces difficultés Ju [Ju98], a proposé un algorithme de recherche locale qui élimine les angles vifs en faisant un lissage des points des segments à l'aide de splines cubiques. Ulaga [Ula99] a proposé, pour les mêmes raisons, une autre technique de lissage mais avec des splines d'Overhauser. Ces deux derniers algorithmes utilisent des splines spéciales et offrent une bonne continuité de la normale et de la tangente ; ils peuvent laisser glisser un nœud dans de bonnes conditions, mais ne peuvent être employés que pour le cas bidimensionnel.

Pour augmenter par exemple la représentation de la modélisation des tôles embouties en trois dimensions, Shimizu [Shi95] a utilisé les B-splines. Hallquist [Hal95] a utilisé une base de données CAO pour représenter et décrire la surface de l'outil (rigide), de sorte à obtenir la plus grande exactitude du dessin cad une amélioration meilleure de la recherche de contact. Mais ces deux méthodes donnent seulement une bonne représentation des surfaces de l'outil. Afin de surmonter les inconvénients des algorithmes recherche locaux de type « nœud-à-segment », Belytschko et Neal ont proposé un autre concept qui est l'algorithme de PinBall [Bel91]. Ce dernier présente quelques avantages intéressants car aucun calcul supplémentaire itératif n'est ajouté pour détecter la pénétration entre deux surfaces de corps distincts. Elle est obtenue par interpénétration de deux boules sphériques. L'algorithme de pinball pouvait être

très attrayant théoriquement, mais certaines incertitudes géométriques le handicapent lorsque on le test sur des géométries réelles présentant certaines formes complexes. En combinant les avantages des algorithmes « nœud-à-segment » et « Pinball », Papadoulos et Taylor [Pap93] ont proposé un algorithme modifié sur le même concept qu'ils ont nommé le triage sphérique «spherical sorting algorithm». Whirley a utilisé l'algorithme du pinball et l'approche par tubes pour simuler les contacts de « nœud-à-nœud » et de « nœud-à-segments » [Whi94]. Mais la possibilité de solutions multiples du contact d'un noeud par plusieurs segments affecte l'efficacité de la recherche de contact. Heinstein et al. [Hei99] ont pu développer un algorithme de recherche de contact global capable de traiter le contact impact (Crash de voiture). Il a été implémenté sur le Logiciel PRONTO 3D. Celui-ci fait partie des algorithmes de recherche de contact basés sur la technique « bucket sorting ». Une formule permet ainsi de calculer le code des boites sans limite, ce qui distingue l'algorithme de celui Zhong (position code). Un autre avantage, le triage particulier des boites permet de localiser la rangée de boites la plus petite sur les trois axes x,y,z et de traiter le contact local que sur cette liste, offrant ainsi un gain de temps non négligeable. L'algorithme de recherche de contact développé dans notre thèse repose sur cette technique avec un algorithme de recherche local nouveau qui se base sur le produit des positions géométriques du nœud « slave » avant et après avoir traversé un plan « master ».

Un des récents travaux sur la recherche de surfaces de contact est celui de Fujun-Wang et al.[WaF01]. Ils ont proposé un algorithme de recherche local se basant sur les surfaces à forme libre (FFS) «free-formed-surface». Celui-ci est destiné à traiter le contact tridimensionnel où les surfaces de contact sont approximées par des surfaces de formes libres faisant partie des surfaces Bi-Spline sans conditions de frontière. Les géométries surfaciques obtenues sont plus douces et plus précises ; ce qui permet d'améliorer localement la recherche de contact. L'équilibre entre l'efficacité et l'exactitude de la recherche de contact peut être obtenu facilement en augmentant les niveaux de subdivisions.

3.4.2. Recherche globale

Dans les sous-sections précédentes, nous avons décrit l'essentiel des ingrédients permettant le calcul des forces de contact. Cependant les algorithmes de recherche de contact sont ceux qui permettent de trouver des zones potentielles de contact (interférence de maillage) et s'il y a lieu d'introduire ou non les forces de contact s'exerçant entre les deux corps. Le problème du contact est surtout de nature géométrique et s'il nous paraît

extrêmement facile de déterminer si deux maillages interfèrent, la modélisation de cette interférence et surtout sa rapidité de traitement s'avère particulièrement complexe. Les algorithmes de recherche de contact sont d'une importance capitale dans le succès de la modélisation d'un problème de contact. La littérature est très pauvre à ce propos. L'expérience a montré que sur certaines simulations, ils peuvent représenter plus de la moitié du temps CPU total. Nous pouvons citer les travaux de Belytschko et Nied [Bel91] qui ont développé un algorithme de recherche globale sous le nom de 'PinBall algorithm' qui consiste à insérer des sphères dans des éléments qui sont connectés aux nœuds comme le montre la (Figure 3-11). Ces sphères sont centrées aux barycentres des mailles et ont le volume de ces dernières. La détection des pénétrations devient alors très simple : il suffit de comparer la somme des rayons à la distance entre les centres des deux sphères pour savoir si les deux éléments interfèrent. Les forces de contact sont alors calculées de façon approchée grâce à une technique de pénalisation. Il existe d'autres techniques de recherche des zones de contact, qui permettent d'éviter un balayage systématique de l'ensemble des nœuds à chaque pas de temps. Le principe repose sur un découpage de l'espace à l'aide d'un maillage virtuel. Des listes d'objets contenant des nœuds dans chaque zone sont mises à jour à chaque nouvelle introduction d'objet. La structure la plus simple est la grille régulière recouvrant le domaine. Chaque case de grille est indexée par un entier. Cette structure est décrite sur la Figure 3-12.

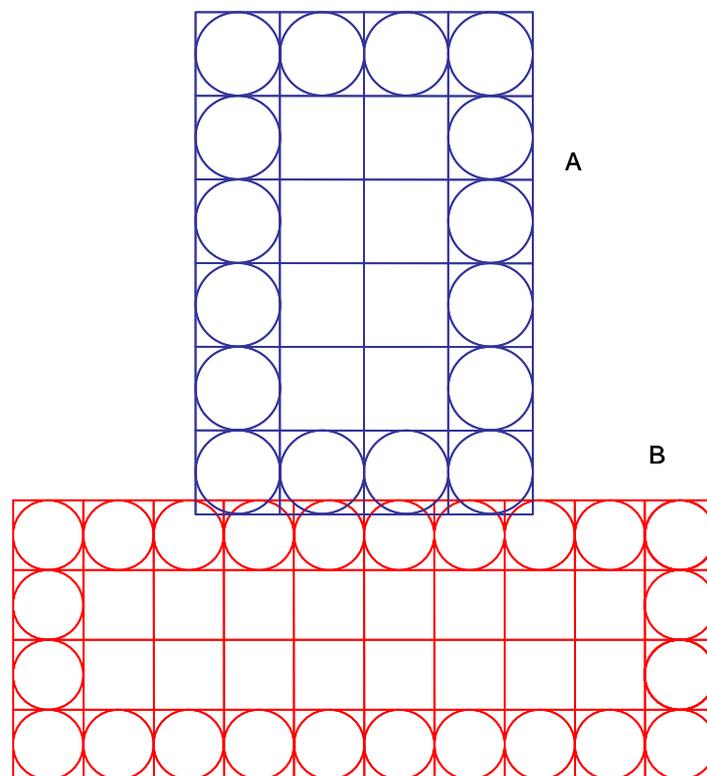


Figure 3-11 Technique de Pinball

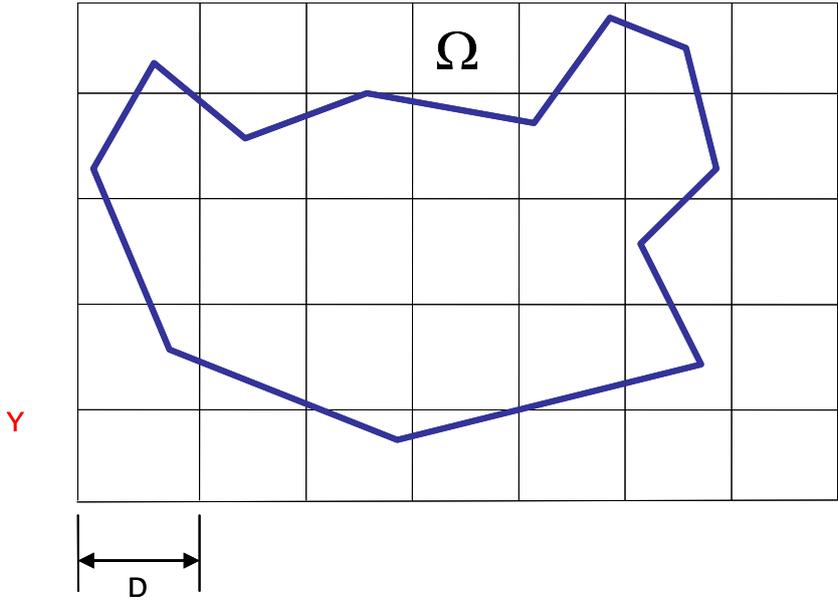


Figure 3-12 Maillage virtuel d'un domaine plan.

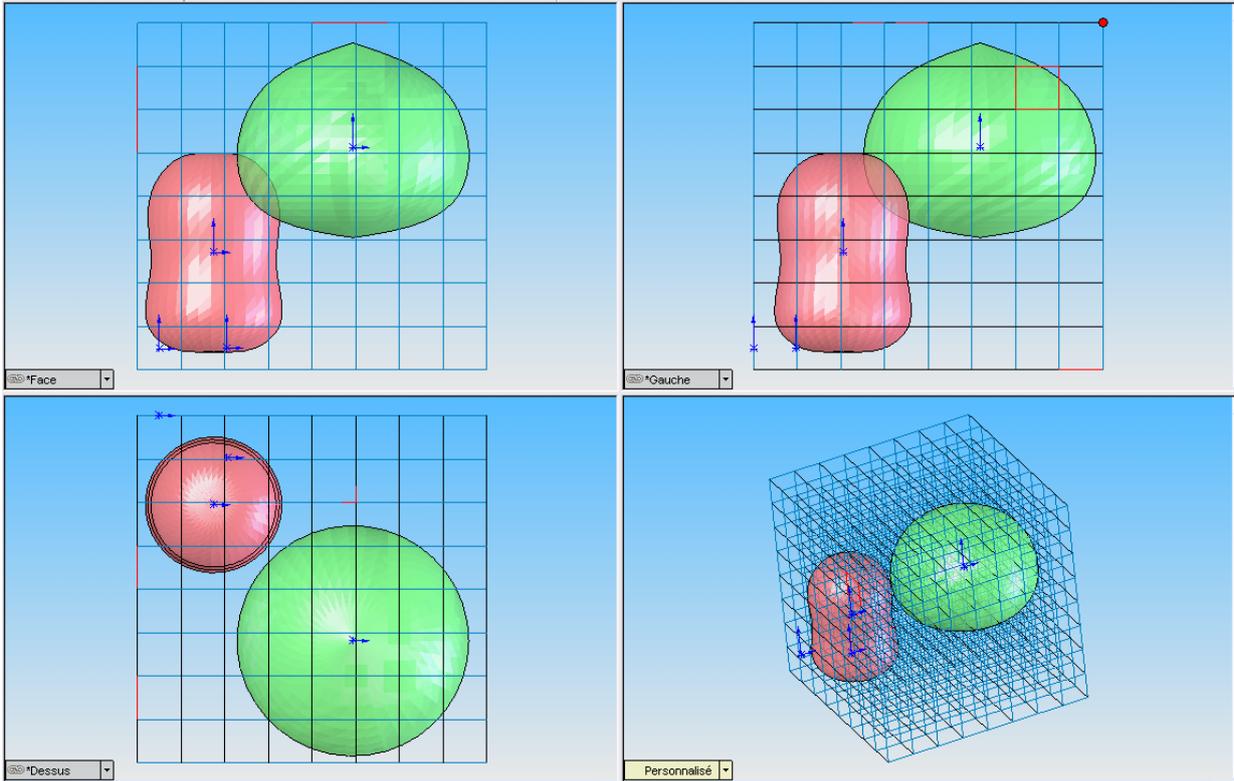


Figure 3-13 Maillage virtuel d'un domaine 3D

3.4.2.1. Algorithme de recherche de contact basé sur la hiérarchie de contact

Cet algorithme a été développé à l'université de Linköping en suède par Zhong en 1989 [Zho89] et unifié en 1996 [Zho96]. Il est basé sur la hiérarchie de contact et permet une recherche automatique des zones potentielles de contact.

3.4.2.1.1. Territoire hiérarchique de contact

Pour avoir une efficacité des zones de contact à rechercher, on introduit la notion du territoire hiérarchique du corps de contact [Zho89][Zho96]. Ce territoire est défini comme une boîte englobant un maillon de la hiérarchie du solide. Ainsi, nous associons un territoire pour chaque hiérarchie Figure 3-14. Dans le cas d'une surface de contact, le territoire hiérarchique de contact est déterminé par 4 points. Soit T le territoire hiérarchique pris comme exemple d'une surface de contact et $x_i = (i=1, N)$ le vecteur position d'un nœud de contact i dans une hiérarchie de contact. Le territoire hiérarchique est défini comme suit :

$$T = \{(x_1, x_2) \mid x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, i=1,2\} \quad (3.39)$$

Où x_1, x_2 sont les composantes cartésiennes du vecteur position x .

$$\begin{aligned} x_i^{\min} &= \min(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^N) \\ x_i^{\max} &= \max(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^N) \end{aligned} \quad (3.40)$$

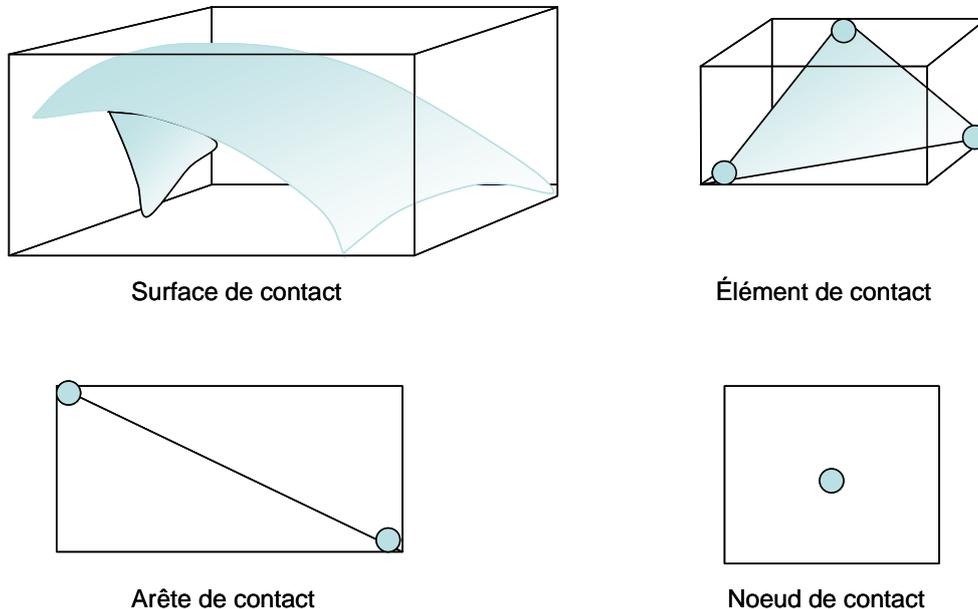


Figure 3-14 Territoire hiérarchique de contact

Pour une recherche efficace des nœuds de contact, nous introduisons la notion du territoire hiérarchique élargi dans l'équation (3.39) qui s'exprime par :

$$T = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_i^{\min} - E_{ep} \leq x_i \leq x_i^{\max} + E_{ep}, i=1,2 \right\} \quad (3.41)$$

E_{ep} est un paramètre définissant le territoire élargi.

3.4.2.1.2. Territoire de contact

Nous associons à chaque segment maître un territoire de contact fonction de deux tolérances C_p et C_d (leurs valeurs sont fixés par l'utilisateur) et qui s'exprime dans le cas bidimensionnel sous la forme suivante (voir Figure 3-15) et tridimensionnel (voir Figure 3-16).

$$T_c = \left\{ -C_p \leq x_n \leq C_c, 0 \leq \xi \leq 1 \right\} \quad (3.42)$$

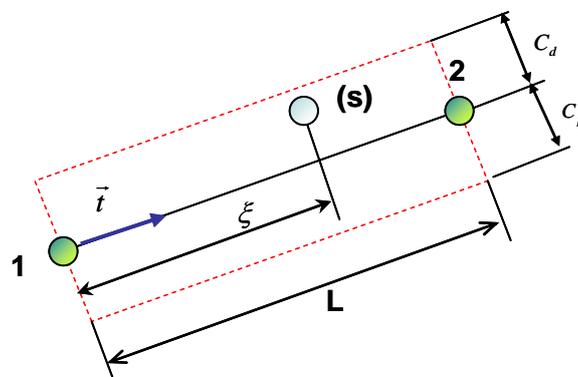


Figure 3-15 Territoire de contact 2D

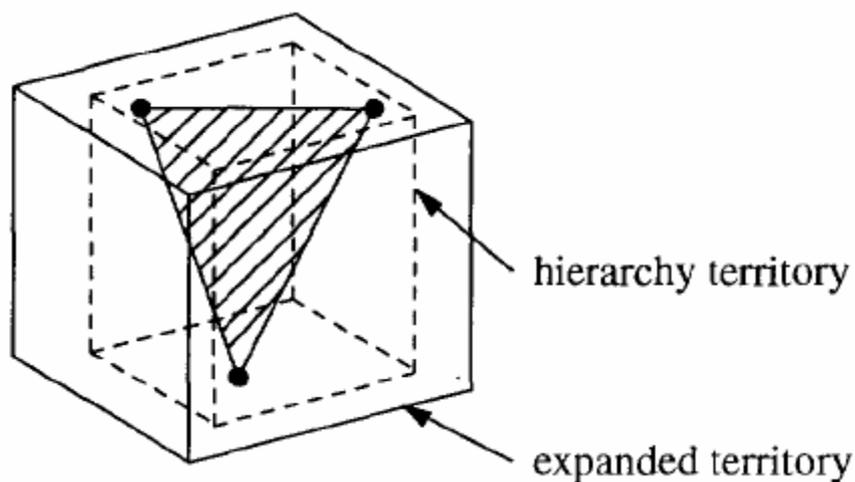


Figure 3-16 Territoire de contact 3D

3.4.2.1.3. Procédure de recherche de contact

La procédure de recherche de contact consiste à trouver une zone commune entre deux territoires hiérarchiques élargis T_1 et T_2 (voir Figure 3-17) qui se traduit par la relation mathématique suivante :

$$T = \{(x_1, x_2) \mid x_i^{*min} \leq x_i \leq x_i^{*max}, i = 1, 2\} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec} \quad x_i^{*min} &= \max(x_i^{1min}, x_i^{2min}) \\ x_i^{*max} &= \min(x_i^{1max}, x_i^{2max}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Une variable logique L est définie par :

$$L = L_1 \cup L_2 \quad (3.45)$$

$$\text{Avec} \quad L_1 = x_1^{*min} \leq x_1^{*max} ; L_2 = x_2^{*min} \leq x_2^{*max} \quad (3.46)$$

Si l'opérateur logique L est vrai, ceci implique l'existence d'une zone potentielle de contact. Ainsi nous retenons uniquement les nœuds esclaves et les nœuds maîtres appartenant à cette zone commune, dite zone potentielle de contact

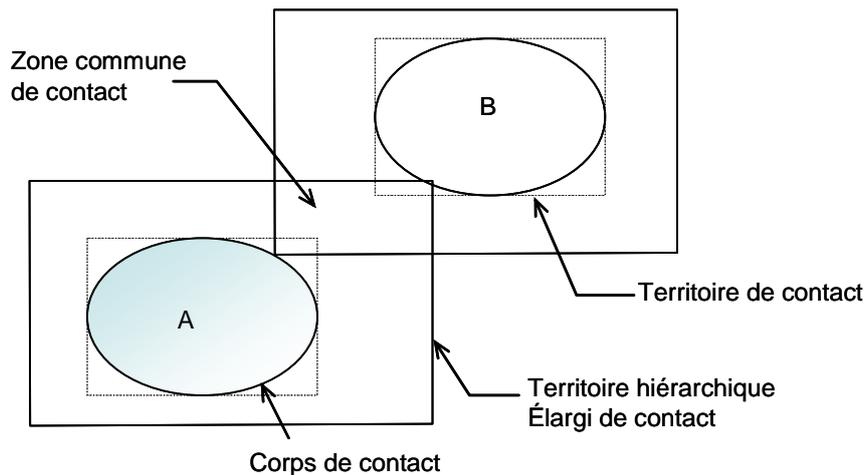


Figure 3-17 Zone commune de contact

Nous considérons maintenant des éléments du niveau inférieur de la hiérarchie. Pour chaque nœud esclave appartenant à la zone potentielle de contact, nous cherchons son plus proche voisin parmi les nœuds maîtres potentiels (Figure 3-18). Nous associons au nœud esclave considéré l'élément maître le plus proche en déterminant sa projection sur le segment ξ pour le cas 2D par le biais de la relation (3.9) ou la projection sur la surface pour le cas 3D. Ainsi deux cas se présentent :

-soit l'équation (3.9) est vérifiée, et dans ce cas là, trois configurations se posent :

- le nœud se trouve à l'intérieur du territoire de contact et il est déclaré en contact ;
- le nœud se trouve au delà de la tolérance C_d et il est considéré libre ;
- le nœud se situe en dessous de C_p et il est dit pénétré. Un algorithme de résolution de type pénalité est mis en œuvre.

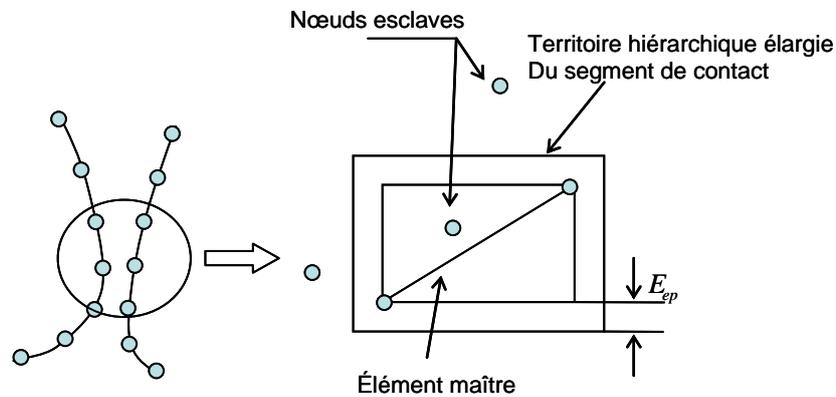


Figure 3-18 Définition du territoire élargi hiérarchique d'un élément maître

- soit la projection n'est pas concluante, nous élargissons la recherche aux éléments voisins.

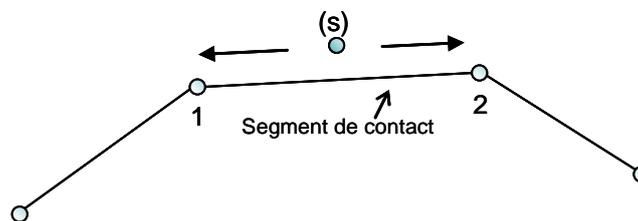


Figure 3-19 Extension de la vérification aux éléments voisins

Les conditions seront testées uniquement pour les nœuds esclaves qui, à l'étape considérée, se trouve à l'intérieur des territoires hiérarchiques élargis des éléments maîtres considérées, se trouvent à l'intérieur des territoires hiérarchiques élargis des éléments maîtres potentiels. Ces nœuds seront déclarés comme actifs. Cette procédure permet d'éliminer les nœuds potentiels de contact inactifs qui seront temporairement ignorés dans les calculs.

L'algorithme de recherche de contact doit être capable de gérer des situations ambiguës qui peuvent se produire lors de la procédure de recherche de contact :

- le nœud est libre ou en contact se trouve en face d'un angle mort, et ne possède aucune projection sur les éléments maîtres proches, dans ce cas-la deux situations se présentent :

- le nœud est libre ou en contact (Figure 3-20 a). Ainsi, nous lui associons le nœud maître le plus proche, et un des éléments maîtres connectés au nœud maître le plus proche;
- le nœud est en pénétration (Figure 3-20 c) et dans ce cas nous lui associons l'élément maître le plus proche dont la distance du point candidat et de sa projection sur celle la plus grande :

$$x_n = \max(x_{n1}, x_{n2}) \quad (3.47)$$

- Le nœud esclave actif libre, en contact ou pénétrant, est en face d'une vallée et possède donc plusieurs projetés sur des éléments maîtres (Figure 3-20 b,d) dans ce cas, nous lui associons un des éléments maîtres le plus proche dont la distance du point candidat et sa projection sur cet élément est la plus petite :

$$x_n = \min(x_{n1}, x_{n2}) \quad (3.48)$$

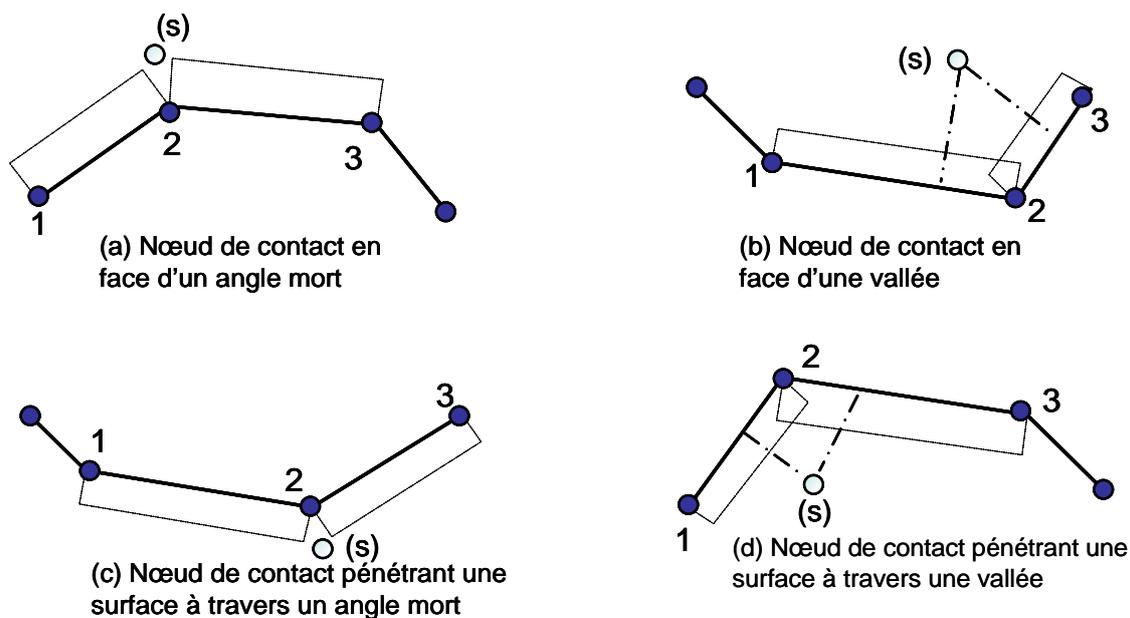


Figure 3-20 cas ambigus de trajectoires rencontrés en 2D

3.4.2.1.4. Fréquence de recherche des nœuds de contact

Sur la Figure 3-21, Zhong [Zho94] montre que sans l'élargissement du territoire hiérarchique de contact, la partie hachurée du territoire de contact déborde vers l'extérieur et par conséquent, le nœud esclave de contact dans la zone hachurée est temporairement inactif. Pour y remédier, nous élargissons suffisamment le territoire hiérarchique pour contenir la zone complète du territoire de contact comme indiqué sur la figure. Cette procédure

d'élargissement permet également d'associer un nœud de contact à un segment même si ce dernier se trouve à une certaine distance du territoire de contact.

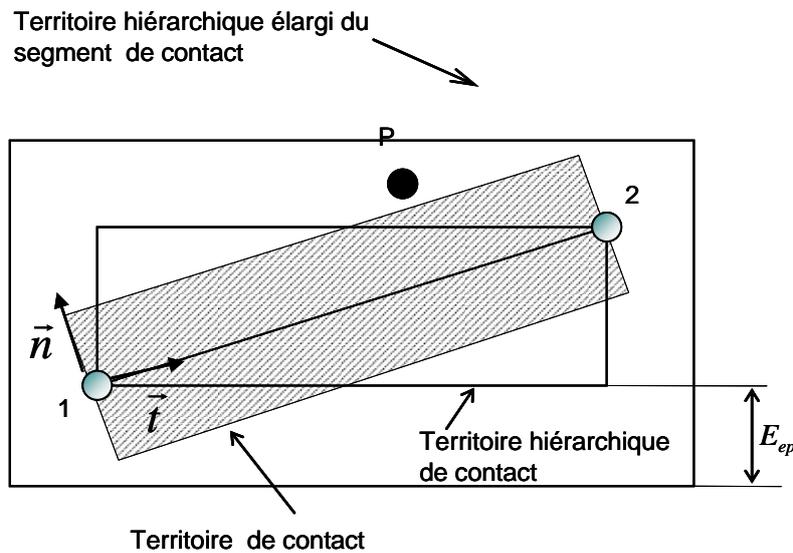


Figure 3-21 Territoire élargi de contact et fréquence de recherche

Lors de la mise en forme par soufflage ou thermoformage, les zones potentielles de contact changent considérablement de taille en cours de la simulation. Les grandes transformations entraînent de nouveaux nœuds candidats au contact et une augmentation des nœuds actifs. Cependant, ce changement n'a pas forcément lieu à chaque pas de temps, d'où la nécessité d'établir une fréquence de recherche des zones de contact. Cette dernière dépend du coefficient de l'élargissement du territoire hiérarchique E_{ep} et d'un incrément de déplacement maximum d'un nœud esclave de contact.

3.4.3. Algorithme de recherche de contact proposé

Dans cette section, nous allons présenter l'algorithme de recherche de contact à deux et trois dimensions implémentées dans notre code de calcul. L'algorithme de recherche globale est basé d'une part sur les travaux d'Heinstein et al [Hei00] et, d'autre part, sur un algorithme de recherche locale que nous avons développé dans cette étude doctorale ; il sera présenté en détail dans les sections suivantes.

Afin de remédier à la nécessité de localiser les nœuds candidats au contact d'une manière arbitraire, une stratégie globale est adoptée. Elle est définie à travers les étapes suivantes :

- Initialiser le vecteur (nbox) qui contient les numéros des nœuds dans chaque boîte.
- Trouver le code B_i pour chaque nœud
- Stocker les codes de tout les nœuds i dans un vecteur (lbox) : $lbox(i) = B_i$.
- Incrémenter le conteur pour les codes de telle sorte : $nbox(B_i) = nbox(B_i) + 1$
- Calculer le pointeur de chaque code j dans une liste de nœuds
- $npoint(1) = 1, npoint(j) = npoint(j-1) + nbox(j-1)$
- Initialiser nbox à zéro
- Trouver les nœuds esclaves en accord avec les numéros de code dans une liste (ndsort).
- $Ndsort(nbox(lbox(i)) + npoint(lbox(i))) = Inbox(lbox(i)) = nbox(lbox(i)) + 1$

Le code de chaque boîte est déterminé par l'expression (3.49)

Le code est :

$$B_i = (S_Z^i - 1)S_X S_Y + (S_Y^i - 1)S_X + S_X^i \quad (3.49)$$

Avec :

$$\begin{aligned} S_X &= \text{int}[(x_{\max} - x_{\min}) / b_S] + 1 \\ S_Y &= \text{int}[(y_{\max} - y_{\min}) / b_S] + 1 \\ S_Z &= \text{int}[(z_{\max} - z_{\min}) / b_S] + 1 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le découpage qui contient n'importe quel nœud est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} S_X^i &= \text{int}[(x_i - x_{\min}) / b_S] + 1 \\ S_Y^i &= \text{int}[(y_i - y_{\min}) / b_S] + 1 \\ S_Z^i &= \text{int}[(z_i - z_{\min}) / b_S] + 1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

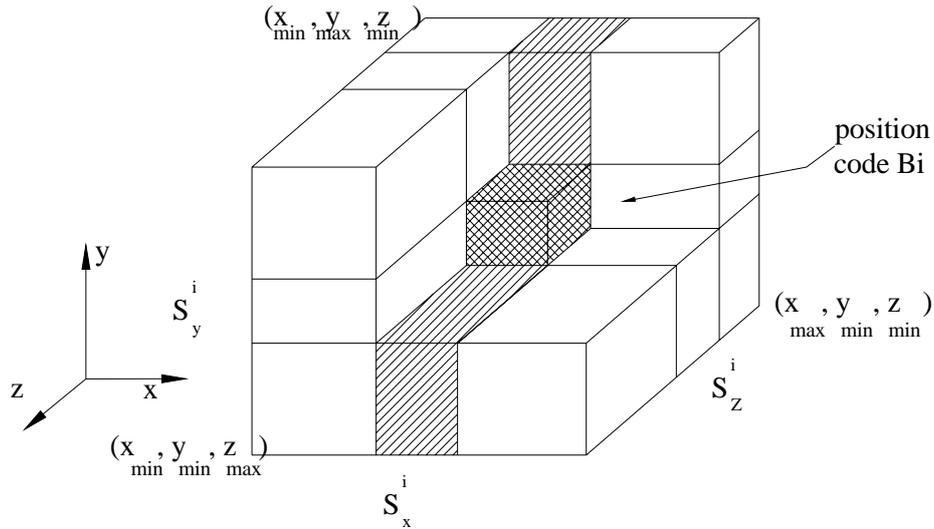


Figure 3-22 « Position code » de la boîte en fonction des S_i xyz contenant le nœud

La collecte des nœuds esclaves avec leur surface maîtresse potentielle est déterminée comme suit :

- Construction d'un territoire élargi pour chaque surface maîtresse (Figure 3-22).
- Détermination des codes des nœuds des surfaces maîtresses dans le territoire élargi.

$$\begin{aligned}
 ibox_{\min} &= \min(S_x, \text{int}((xc_{\min} - x_{\min})/b_s) + 1) \\
 jbox_{\min} &= \min(S_y, \text{int}((yc_{\min} - y_{\min})/b_s) + 1) \\
 kbox_{\min} &= \min(S_z, \text{int}((zc_{\min} - z_{\min})/b_s) + 1) \\
 ibox_{\max} &= \min(S_x, \text{int}((xc_{\max} - x_{\min})/b_s) + 1) \\
 jbox_{\max} &= \min(S_y, \text{int}((yc_{\max} - y_{\min})/b_s) + 1) \\
 kbox_{\max} &= \min(S_z, \text{int}((zc_{\max} - z_{\min})/b_s) + 1)
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

xc_{\min} et xc_{\max} sont les extrémités de la boîte élargi dans la direction des x , de même que yc_{\min} , yc_{\max} , zc_{\min} et zc_{\max} dans leur directions respectives.

- Identification des code de chaque boîte élargie en déterminant les rangés dans les 3 directions x , y et z .

$$\begin{aligned}
 & \text{Loop from } ibox = ibox_{\min} \text{ to } ibox_{\max} \\
 & \quad \text{Loop from } jbox = jbox_{\min} \text{ to } jbox_{\max} \\
 & \quad \quad \text{Loop from } kbox = kbox_{\min} \text{ to } kbox_{\max} \\
 & \quad \quad \quad B_i = (kbox - 1)S_x S_y + (jbox - 1)S_x + ibox \\
 & \quad \quad \quad \text{End Loop} \\
 & \quad \quad \text{End Loop} \\
 & \text{End Loop}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Tous les codes des nœuds calculés dans l'étape 3 sont potentiellement en mesure d'interagir avec la surface maîtresse.

3.4.4. Le tri binaire

Le tri binaire consiste à faire trier les coordonnées des nœuds suivant les trois directions (x,y,z) par des algorithmes de tri très performants de l'ordre $(N \log_2 N)$ opérations de permutations. Ceci permet d'établir d'une part une base de données de trois vecteurs qui contiennent les numéros des nœuds, et d'autre part trois autres vecteurs qui contiennent les pointeurs des nœuds en fonctions des tris effectués précédemment. Pour chaque surface maîtresse, on établit la liste des nœuds identifiés par l'algorithme de recherche à l'intérieur des boîtes du territoire élargi suivant (x,y,z). Une fois cette tâche effectuée, on détermine le vecteur qui stocke le moins de nœuds des trois vecteurs triés. Cette étape minimise la recherche exhaustive sur toutes les directions en même temps sur tous les nœuds de la structures, ce qui restreindrait la recherche globale aux boîtes contenant des nœuds candidats aux contacts.

Cette stratégie est adoptée dans notre étude afin de pouvoir localiser les cas de contact relativement difficiles (voir Figure 3-23). La difficulté du problème réside dans le fait que les nœuds 2 et 14 peuvent avoir le même code de boîte et deviennent ainsi candidats au contact. Ces deux nœuds peuvent traverser la surface maîtresse 8-9 sans que l'algorithme ne les détecte.

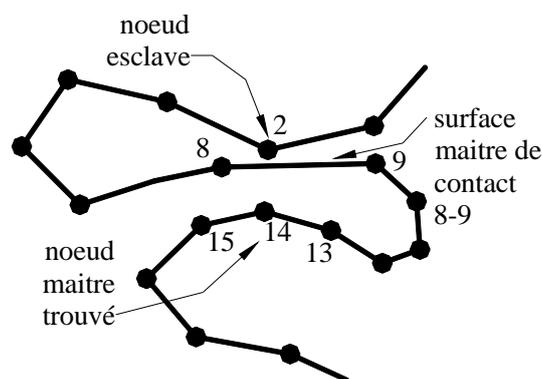


Figure 3-23 Cas de problème de contact difficile

3.4.5. Recherche du contact local

Au niveau de la recherche de contact local, nous avons élaboré, dans cette présente étude, un algorithme afin de détecter les nœuds esclaves pouvant traverser le serment maîtres :

- nous vérifions dans une première étape si la coordonnée curviligne normalisée ξ (Equation (3.9)) du point p est comprise entre zéro et un
- une seconde vérification est effectuée sur le produit des positions avant et après (à l'itération i et i+1) en fonction de l'équation de la droite :
- si le produit est négatif, le nœud a effectivement traversé
- si le produit est positif, deux cas de figure peuvent se présenter :
- le nœud n'a pas traversé le segment
- le nœud a traversé avant et après. Ce cas peut engendrer quelques soucis. Pour y remédier, une vérification supplémentaire est nécessaire ; elle consiste à faire le produit de la position du nœud dans sa position initiale par sa position finale.

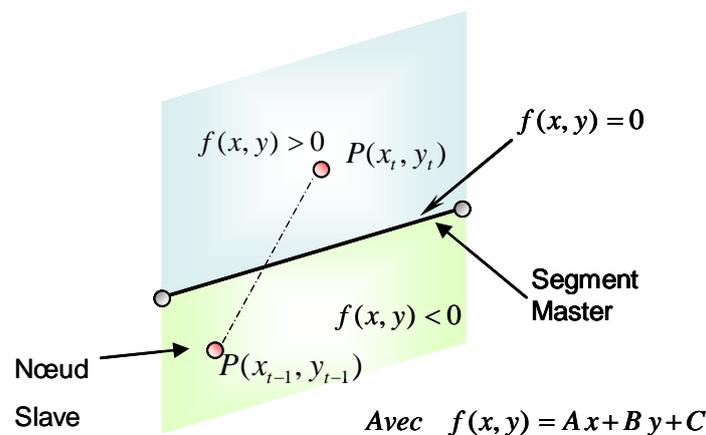


Figure 3-24 Détection du passage du nœud par rapport à la droite

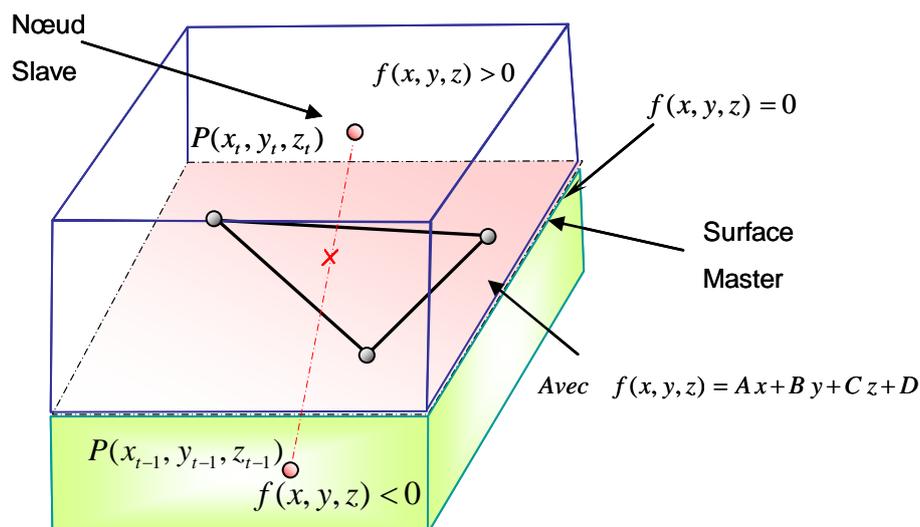


Figure 3-25 Détection du passage du nœud par rapport au plan

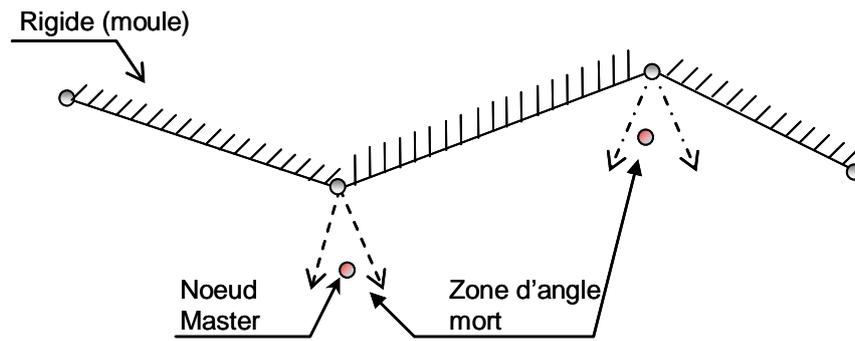


Figure 3-26 Zone d'angle Mort 2D

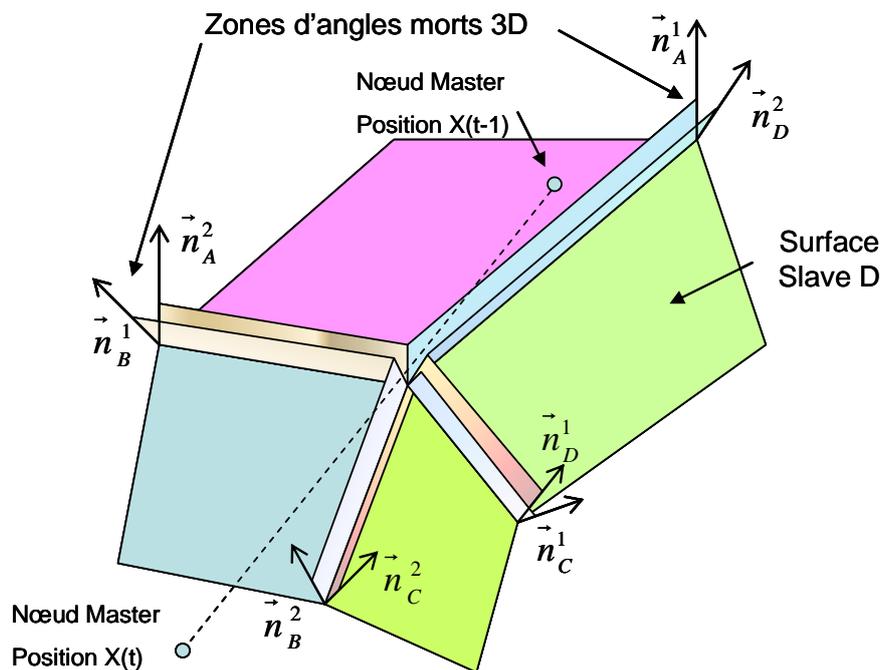


Figure 3-27 Zone d'angle Mort 3D

3.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évoqué le couplage entre les équations d'équilibres et les inéquations de contact et de frottement. Les difficultés principales au niveau de la recherche de l'équilibre du solide proviennent du caractère non différentiable des lois de contact et de frottement. Nous avons retenu la méthode de pénalité pour la résolution numérique du problème de contact dont les avantages principaux sont la facilité de son implémentation et sa rapidité puisque aucune équation supplémentaire n'est à résoudre. Cependant, elle pose le problème délicat du choix des paramètres de pénalisation. Nous avons proposé et adopté deux algorithmes de recherche automatique des zones de contact pour traiter le problème de contact et de frottement dans les procédés de soufflage et de thermoformage.

4 Chapitre 4

4.1. Elément SFRQ-Axi solide axisymétrique (F.L.T).

Dans la section (2.2), nous avons abordé les aspects liés à l'implémentation d'une loi hyperélastique dans le cas des structures minces. L'application de l'hypothèse des contraintes plane $\sigma_{33} = 0$ permet de traiter directement le problème d'incompressibilité ($I_3 = 1$) et de déterminer la pression hydrostatique p [CriV2][Ben93]. En formulation tridimensionnelle, la pression ne peut pas être déterminée par les conditions aux limites. Pour surmonter cette difficulté, nous adoptons une formulation quasi-incompressible proposée par Chrisfield [CriV2]. Celle-ci consiste à découpler l'énergie de déformation en énergie volumétrique liée à la dilatation et une énergie de distorsion liée à la déformation isochore.

Nous présentons dans ce chapitre les principales équations utilisées pour l'implémentation de la loi de comportement dans un nouvel élément fini solide axisymétrique. La formulation est du type Lagrangienne totale. L'élément fini formulé est un modèle déplacement enrichi basé sur un concept cinématique de rotation d'une fibre spatiale [Aya93], [Aya02]. L'élément présenté est labellisé « SFRQ-Axi » (Space Fiber Rotation Quadrilateral asymmetric). Il est de forme quadrilatéral et possède seulement 4 nœuds.

4.1.1. Approximation de la géométrie

Le vecteur position d'un point quelconque dans le plan méridien exprimé dans une base cylindrique est donné par :

$$\mathbf{x}_p = r \vec{\mathbf{i}}_r + z \vec{\mathbf{k}} \quad (4.1)$$

$$\text{Avec} \quad r = \sum_{i=1}^{\text{Noeuds}} N_i r_i ; \quad z = \sum_{i=1}^{\text{Noeuds}} N_i z_i \quad (4.2)$$

4.1.2. Formulation du modèle déplacement

Le champ de déplacement d'un point quelconque $p(r, z)$ du plan est défini par l'approximation suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{cases} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{cases} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{w}_i \end{cases} + \sum_{i=1}^4 N_i \vec{\theta}_{y_i} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (4.3)$$

$$\vec{\theta}_{x_i} = \theta_{x_i} \vec{j} \quad \text{et} \quad i=1\dots 4$$

\vec{j} est le vecteur unitaire suivant l'axe y perpendiculaire au plan (r, o, z), alors que $(\vec{r} - \vec{r}_i)$ est le vecteur position de la fibre reliant le point p au nœud i (voir Figure 4-1).

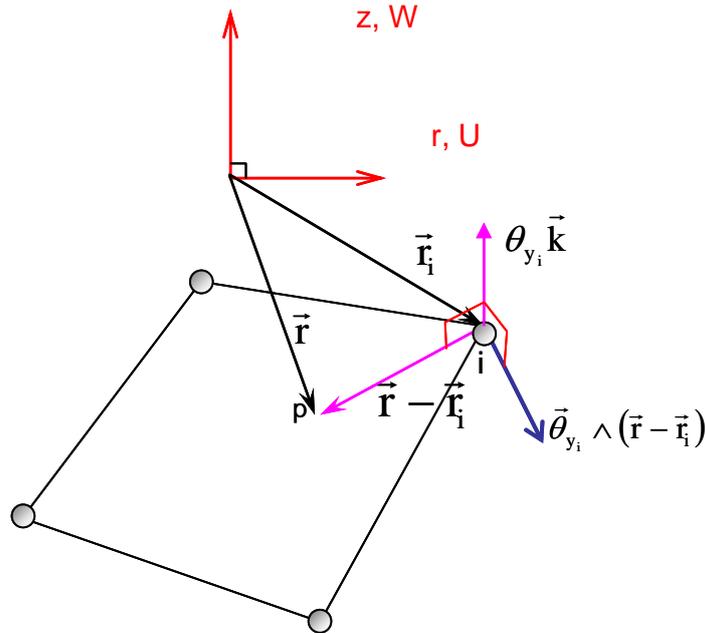


Figure 4-1 Cinématique de la fibre rotative

Le terme $\vec{\theta}_{y_i} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)$ (4.3) s'écrit sous forme matricielle :

$$\vec{\theta}_{y_i} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i) = \begin{Bmatrix} -\theta_{y_i} (z - z_i) \\ \theta_{y_i} (r - r_i) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Les composantes $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ (4.3) s'écrivent finalement ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{cases} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}^u \rangle \\ \langle \mathbf{N}^w \rangle \end{bmatrix} \{ \mathbf{u}_n \} \quad (4.5)$$

$$\text{Avec} \quad \begin{bmatrix} \langle \mathbf{N}^u \rangle \\ \langle \mathbf{N}^w \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & -N_i(z - z_i) \\ 0 & N_i & N_i(r - r_i) \end{bmatrix} \quad i=1\dots 4 \quad (4.6)$$

Et les fonctions de forme sont celle d'un élément Q4 :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad , \quad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\
 N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad , \quad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Les dérivés des termes $(N_i(z-z_i))$ par rapport à r et z sont :

$$\begin{aligned}
 (N_i(z-z_i))_{,r} &= N_{i,r}(z-z_i) \quad ; \quad (N_i(z-z_i))_{,z} = N_{i,z}(z-z_i) + N_i \\
 &\text{etc...}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Il est à noter que les rotations θ_y ne sont définies qu'aux nœuds aux sommets.

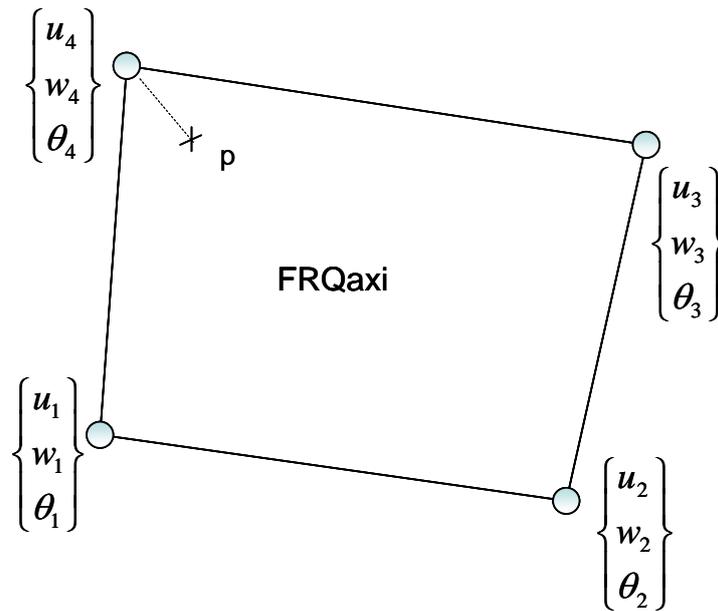


Figure 4-2 Elément SFRQ Axisymétrique

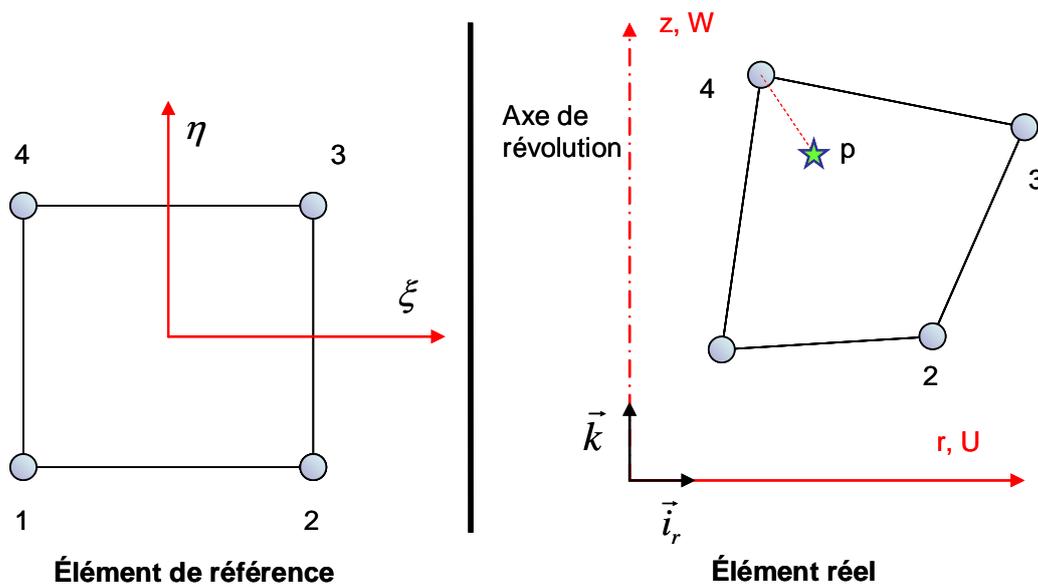


Figure 4.1 Elément quadrilatéral axisymétrique à quatre nœuds (SFRQ-Axi)

4.1.3. Déformations de Green Lagrange droit

Les tenseurs $[F]$ (2.4) des gradients de déformations et $[C]$ (2.8) de Cauchy Green Droit s'écrivent dans le système de coordonnées cylindriques :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 + U_{,r^0} & 0 & u_{,z^0} \\ 0 & 1 + \frac{U}{r^0} & 0 \\ W_{,r^0} & 0 & 1 + W_{,z^0} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$C = [F^T][F] \quad (4.10)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (1 + U_{,r})^2 + W_{,r}^2 & 0 & (1 + U_{,r})U_{,z} + W_{,r}(1 + W_{,z}) \\ 0 & \left(1 + \frac{U}{r}\right)^2 & 0 \\ (1 + U_{,r})U_{,z} + W_{,r}(1 + W_{,z}) & 0 & U_{,r}^2 + (1 + W_{,z})^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Les trois invariants de $[C]$ sont :

$$\begin{aligned} I_1 &= C_{11} + C_{22} + C_{33} \\ I_2 &= C_{11}C_{22} + C_{22}C_{33} + C_{33}C_{11} - C_{13}^2 \\ I_3 &= C_{11}C_{22}C_{33} - C_{22}C_{13}^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le tenseur de Green Lagrange est défini par :

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) \quad (4.14)$$

Avec comme composants :

$$\begin{Bmatrix} E_{rr} \\ E_{\theta\theta} \\ E_{zz} \\ 2E_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,r} \\ \frac{u}{r^0} \\ w_{,z} \\ u_{,z} + w_{,r} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_{,r}^2 + w_{,r}^2) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r^0}\right) \\ \frac{1}{2}(u_{,z}^2 + w_{,z}^2) \\ u_{,r} u_{,z} + w_{,r} w_{,z} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

4.1.4. Principe du minimum de l'énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale est définie par :

$$\Pi = \sum_k (\Pi_{int}^k - \Pi_{ext}^k) \quad (4.16)$$

Π_{int}^k est l'énergie potentielle élémentaire interne. Elle est définie par :

$$\Pi_{int}^k = \int_{v^0} W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) dv^0 \quad (4.17)$$

W représente l'énergie de déformation par unité de volume non déformé, accumulée dans la structure pendant la déformation :

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_d(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_s(J) \quad (4.18)$$

Pour une loi de Mooney-Rivlin [Riv48], W est donnée par Crisfield [CriV2] :

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = C1(\bar{I}_1 - 3) + C2(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{2} \kappa (J - 1)^2 \quad (4.19)$$

Où \bar{I}_1 et \bar{I}_2 représentent les invariants modifiés et sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} = I_1 J_3^{-\frac{1}{3}} \\ \bar{I}_2 &= I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} = I_2 J_3^{-\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Avec :

$$J = \bar{I}_3^{-\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4.22)$$

Plus le coefficient de poisson ν s'approche de la valeur limite 0.5 (cas des matériaux caoutchouteux, exemple $\nu = 0.499$), plus le coefficient κ a tendance à tendre vers l'infini ; ce qui rend les matrices tangentes numériquement mal conditionnées.

La variation de l'énergie potentielle externe Π_{ext}^k :

$$\delta \Pi_{ext}^k = \iint_{S^0} \langle \delta \mathbf{u} \rangle \{ \mathbf{p} \} dS^0 \quad (4.23)$$

$\langle \delta \mathbf{u} \rangle$: Déplacement dans la base locale $\langle \bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{n}} \rangle$, $\{ \mathbf{p} \}$: représente les forces de pression réparties le long du méridien

4.1.4.1. Vecteur résidu

La première variation de l'énergie potentielle totale s'écrit (stationnarité de Π)

$$\delta \Pi = \sum_k (\delta \Pi_{\text{int}}^k - \delta \Pi_{\text{ext}}^k) = 0 \quad (4.24)$$

Où $\delta \Pi_{\text{int}}^k$ représente la première variation de l'énergie élémentaire interne :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} \delta W(\bar{\mathbf{I}}_1, \bar{\mathbf{I}}_2, J) dV^0 \quad (4.25)$$

Nous obtenons ainsi le vecteur de force interne :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = 2\pi \langle \delta U_1 \quad \delta W_1 \quad \delta \theta_1 \quad \dots \quad \delta U_4 \quad \delta W_4 \quad \delta \theta_4 \rangle \int_{\xi} \int_{\eta} \{\bar{\mathbf{r}}\} r^0 \det J d\xi d\eta \quad (4.26)$$

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \langle \delta U \rangle \{ \mathbf{f}_{\text{int}}^k \} \quad (4.27)$$

Pour une loi de Mooney-Rivlin :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} (A_1 \delta \bar{\mathbf{I}}_1 + A_2 \delta \bar{\mathbf{I}}_2 + A_3 \delta \bar{\mathbf{I}}_3) dV^0 \quad (4.28)$$

Avec :

$$A_1 = C_1 \bar{\mathbf{I}}_3^{\frac{1}{3}}; \quad A_2 = C_2 \bar{\mathbf{I}}_3^{\frac{2}{3}}; \quad A_3 = -\frac{1}{3} C_1 \bar{\mathbf{I}}_3^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} C_2 \bar{\mathbf{I}}_3^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} \frac{\kappa(J-1)}{J} \quad (4.29)$$

$$\text{Et} \quad J = \sqrt{\bar{\mathbf{I}}_3} \quad (4.30)$$

$\delta \bar{\mathbf{I}}_1$, $\delta \bar{\mathbf{I}}_2$ et $\delta \bar{\mathbf{I}}_3$ Représentent les variations des invariants du tenseur droit (4.12)

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{I}}_1 &= \text{tr}(\delta [\mathbf{C}]) = \delta C_{11} + \delta C_{22} + \delta C_{33} \\ \delta \bar{\mathbf{I}}_2 &= (C_{22} + C_{33}) \delta C_{11} + (C_{11} + C_{33}) \delta C_{22} + (C_{11} + C_{22}) \delta C_{33} - 2 C_{13} \delta C_{13} \\ \delta \bar{\mathbf{I}}_3 &= C_{22} C_{33} \delta C_{11} + (C_{11} C_{33} - C_{13}^2) \delta C_{22} + C_{11} C_{22} \delta C_{33} - 2 C_{22} C_{13} \delta C_{13} \end{aligned} \quad (4.31)$$

En injectant l'équation (4.31) dans l'équation (4.28), l'expression du potentiel élémentaire interne de déformation devient :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} (B_1 \delta C_{11} + B_2 \delta C_{22} + B_3 \delta C_{33} + B_4 \delta C_{13}) dV^0 \quad (4.32)$$

Avec :

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + (C_{22} + C_{33}) A_2 + C_{22} C_{33} A_3 \\ B_2 &= A_1 + (C_{11} + C_{33}) A_2 + (C_{11} C_{33} - C_{13}^2) A_3 \\ B_3 &= A_1 + (C_{11} + C_{22}) A_2 + C_{11} C_{22} A_3 \\ B_4 &= -2 (C_{13} A_2 + C_{22} C_{13} A_3) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Et la variation du tenseur de Cauchy-Green droit δC donne :

$$\begin{aligned}
\delta C_{11} &= 2\left((1+U_{,r})\delta U_{,r} + W_{,r} \delta W_{,r}\right) \\
\delta C_{22} &= 2\left(1 + \frac{U}{r^0}\right) \frac{\delta U}{r^0} \\
\delta C_{33} &= 2\left((1+W_{,z})\delta W_{,z} + U_{,z} \delta U_{,z}\right) \\
\delta C_{13} &= U_{,z} \delta U_{,r} + (1+W_{,z})\delta W_{,z} + (1+U_{,r})\delta U_{,z} + W_{,r} \delta W_{,z}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

En injectant l'équation (4.34) dans l'équation, (4.32) l'expression du potentiel élémentaire interne de déformation devient :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} (D_1 \delta U_{,r} + D_2 \delta U_{,z} + D_3 \delta W_{,z} + D_4 \delta W_{,r} + D_5 \delta U) dV^0 \tag{4.35}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
U &= N_i U_i - N_i (z - z_i) \theta_{z_i} \\
\delta U &= N_i \delta U_i - N_i (z - z_i) \delta \theta_{z_i} \\
U_{,r} &= N_{i,r} U_i - N_{i,r} (z - z_i) \theta_{z_i} \\
\delta U_{,r} &= N_{i,r} \delta U_i - N_{i,r} (z - z_i) \delta \theta_{z_i} \\
U_{,z} &= N_{i,z} U_i - N_{i,z} (z - z_i) \theta_{z_i} - N_i \theta_{z_i} \\
\delta U_{,z} &= N_{i,z} \delta U_i - N_{i,z} (z - z_i) \delta \theta_{z_i} - N_i \delta \theta_{z_i} \\
W_{,r} &= N_{i,r} W_i + N_{i,r} (r - r_i) \theta_{z_i} + N_i \theta_{z_i} \\
\delta W_{,r} &= N_{i,r} \delta W_i + N_{i,r} (r - r_i) \delta \theta_{z_i} + N_i \delta \theta_{z_i} \\
W_{,z} &= N_{i,z} W_i + N_{i,z} (r - r_i) \theta_{z_i} \\
\delta W_{,z} &= N_{i,z} \delta W_i + N_{i,z} (r - r_i) \delta \theta_{z_i}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Et :

$$\begin{aligned}
D_1 &= 2B_1(1+U_{,r}) + B_4 U_{,z} \\
D_2 &= 2B_3 U_{,z} + B_4 (1+U_{,r}) \\
D_3 &= 2B_1 W_{,r} + B_4 (1+W_{,z}) \\
D_4 &= 2B_3 (1+W_{,z}) + B_4 W_{,r} \\
D_5 &= \frac{2B_2}{r^0} \left(1 + \frac{U}{r^0}\right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Ce qui donne :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} \sum_{i=1}^{\text{Noeuds}} \left[\begin{aligned} & (B_1 E_1 + B_2 E_2 + B_3 E_3 + B_4 E_4) \delta U_i + (B_1 E_5 + B_3 E_6 + B_4 E_7) \delta W_i + \\ & (B_1 E_8 + B_2 E_9 + B_3 E_{10} + B_4 E_{11}) \delta \theta_{z_i} \end{aligned} \right] dV^0 \tag{4.38}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2(1 + U_{,r}) N_{i,r} \\
E_2 &= \frac{2}{r} \left(1 + \frac{U}{r} \right) N_i \\
E_3 &= 2 U_{,z} N_{i,z} \\
E_4 &= (1 + U_{,r}) N_{i,z} + U_{,z} N_{i,r} \\
E_5 &= 2 W_{,r} N_{i,r} \\
E_6 &= 2(1 + W_{,z}) N_{i,z} \\
E_7 &= (1 + W_{,z}) N_{i,r} + W_{,r} N_{i,z}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
E_8 &= 2(1 + U_{,r}) N_{i,r} (-z + z_i) + 2W_{,r} (N_{i,r} (r - r_i) + N_i) \\
E_9 &= -\frac{2}{r} \left(1 + \frac{U}{r} \right) N_i (z - z_i) \\
E_{10} &= 2(1 + W_{,z}) N_{i,z} (r - r_i) + 2U_{,z} (N_{i,z} (-z + z_i) - N_i) \\
E_{11} &= (U_{,z} N_{i,r} (-z + z_i)) + (1 + W_{,z}) (N_{i,r} (r - r_i) + N_i) + \\
&\quad W_{,r} N_{i,z} (r - r_i) + (1 + U_{,r}) (N_{i,z} (-z + z_i) - N_i)
\end{aligned}$$

Et :

$$dV^0 = 2\pi r^0 \det J d\xi d\eta \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_{i,r} \rangle &= j_{11} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{12} \langle N_{i,\eta} \rangle \\
\langle N_{i,z} \rangle &= j_{21} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{22} \langle N_{i,\eta} \rangle
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Le vecteur force interne s'exprime ainsi :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = 2\pi \langle \delta U_n \rangle \int_{\xi} \int_{\eta} \left\{ \begin{array}{c} B_1 E_1 + B_2 E_2 + B_3 E_3 + B_4 E_4 \\ B_1 E_5 + B_3 E_6 + B_4 E_7 \\ B_1 E_8 + B_2 E_9 + B_3 E_{10} + B_4 E_{11} \\ \vdots \\ B_1 E_1 + B_2 E_2 + B_3 E_3 + B_4 E_4 \\ B_1 E_5 + B_3 E_6 + B_4 E_7 \\ B_1 E_8 + B_2 E_9 + B_3 E_{10} + B_4 E_{11} \end{array} \right\} r^0 \det J d\xi d\eta \tag{4.42}$$

$$\langle \delta U_n \rangle = \langle \delta U_1 \quad \delta W_1 \quad \delta \theta_{z_1} \quad \dots \quad \delta U_4 \quad \delta W_4 \quad \delta \theta_{z_4} \rangle$$

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \langle \delta U \rangle \{ f_{\text{int}}^k \} \tag{4.43}$$

L'intégrale est calculée par un schéma de Gauss avec 2x2 Points Gauss (PG).

4.2. Validation de l'élément hyperélastique SFRQ-Axi

Toutes les simulations ont été effectuées dans notre code « Model'Pack Forming ». Celui-ci est interfacé au logiciel de Pré et Post traitement GID. Pour assurer la bonne liaison avec ce dernier, il nous a fallu développer un programme simple (écrit en langage TCL) pour élaborer la boîte à outils personnalisée et écrire un fichier (.bas) qui génère le fichier « base de données éléments finis » et assure la liaison avec notre programme exécutable. Une fois les calculs faits, une base de données est créée à chaque pas de calcul, donnant la solution des déplacements, de l'épaisseur, etc... La base ainsi créée sera lue par le Post traitement sur GID dans un but d'analyser avec aisance la solution visualisée du problème à traiter. Nous représentons à travers les Figure 4-3, Figure 4-4, Figure 4-5 l'interface que nous avons développée pour le pré traitement. La Figure 4-5 représente un exemple de post traitement sur un biberon.

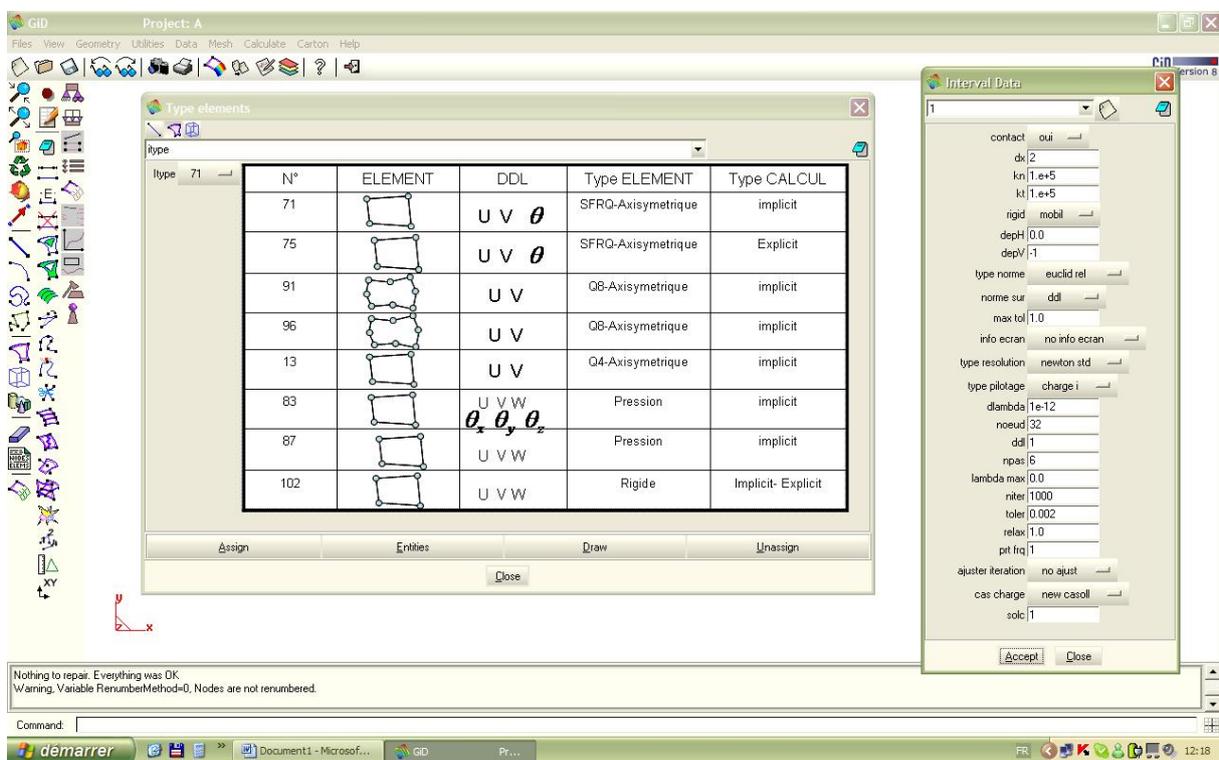


Figure 4-3 Interface de GID Pré traitement

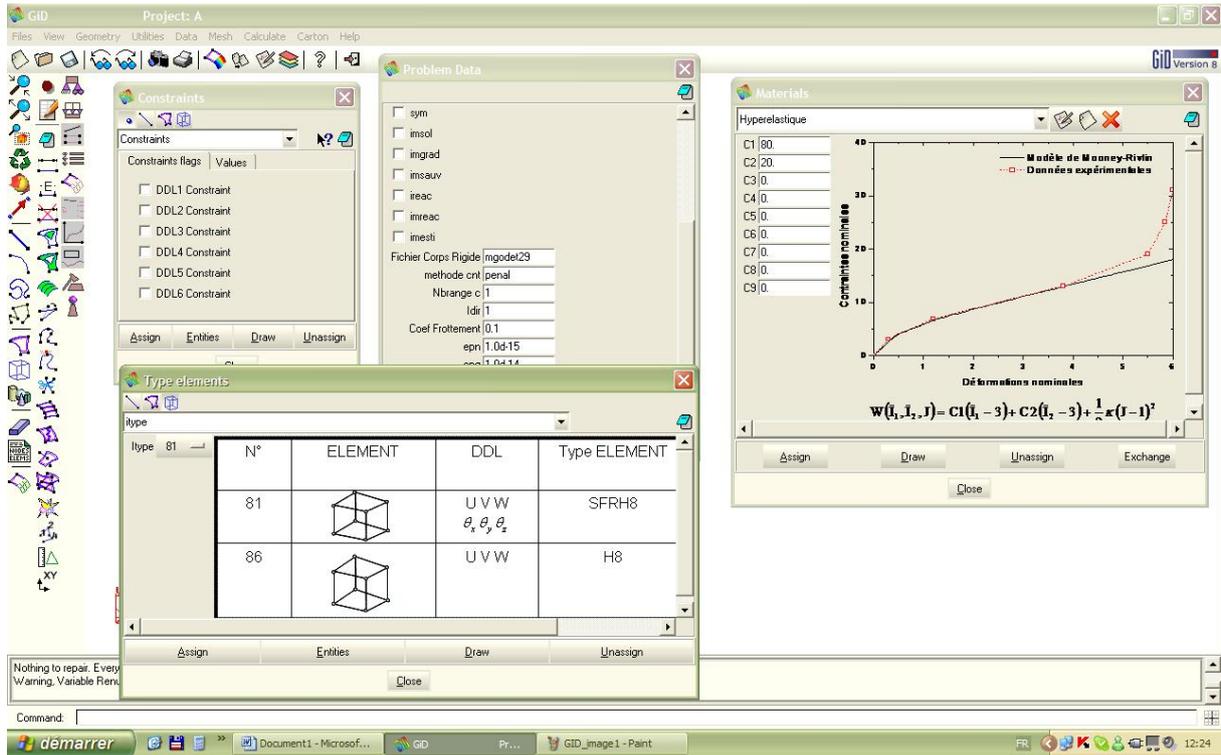


Figure 4-4 Interface GID pré -traitement (Loi, Condition aux limite,..)

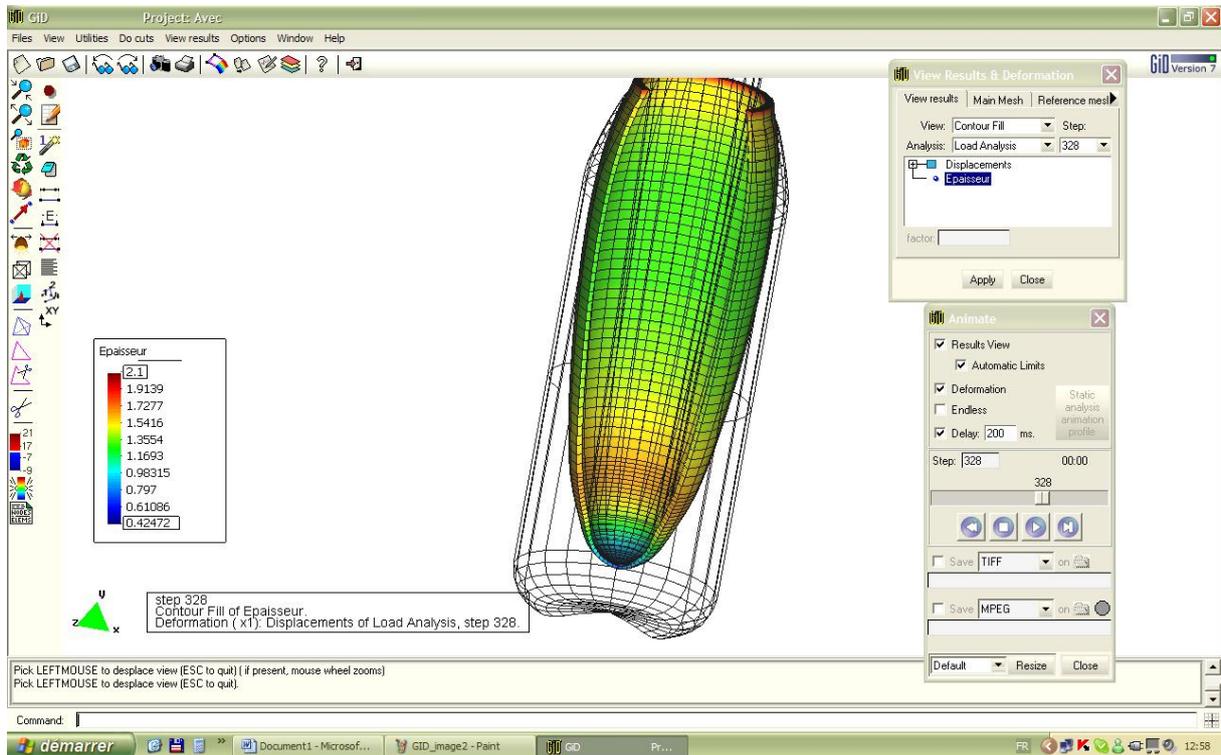


Figure 4-5 GID Post-traitement (exemple un biberon)

4.2.1. Plaque circulaire en gonflement libre

Nous considérons une plaque circulaire traitée par Hughes [Hug83] de rayon $r=7.5\text{in}$ et d'épaisseur $h=0.5\text{ in}$, fixée sur sa circonférence et soumise à une pression sur une de ses faces (Figure 4-6.). Nous adoptons un matériau hyper élastique quasi-incompressible obéissant à la loi de Mooney-Rivlin avec les constantes matérielles suivantes : $C_1 = 80\text{ psi}$, $C_2 = 20\text{ psi}$. Le module d'incompressibilité est pris égale à $\kappa = 10^4$. Un point m (milieu de la plaque) est piloté en déplacement pour obtenir la variation de la pression en fonction de déplacement.

La Figure 4-7 montre l'allure des courbes de variation de la pression en fonction de la flèche pour un maillage donné (2x8). Celle-ci est presque identique à celle donné par Hughes [Hug83] solution obtenue par des éléments finis de coque axisymétrique. La Figure 4-8 donne la distribution de la répartition des épaisseurs et l'allure de la déformée. La courbe de chargement est obtenue en pilotant le point m de la plaque.

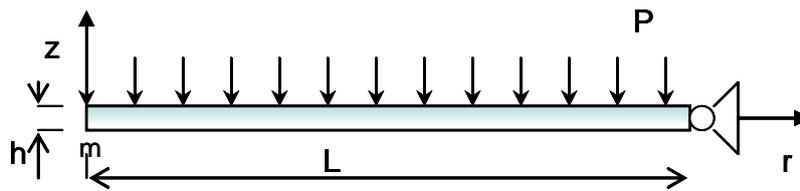


Figure 4-6 Plaque circulaire en gonflement

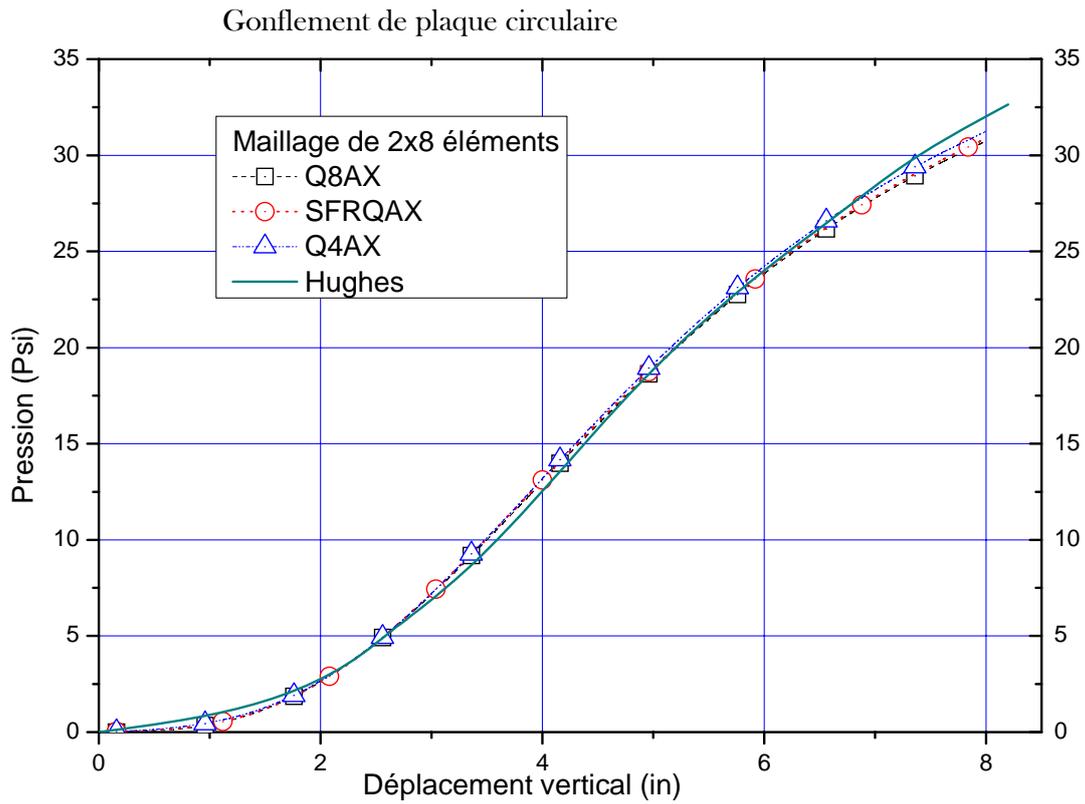


Figure 4-7 Pression en fonction de la flèche du point milieu

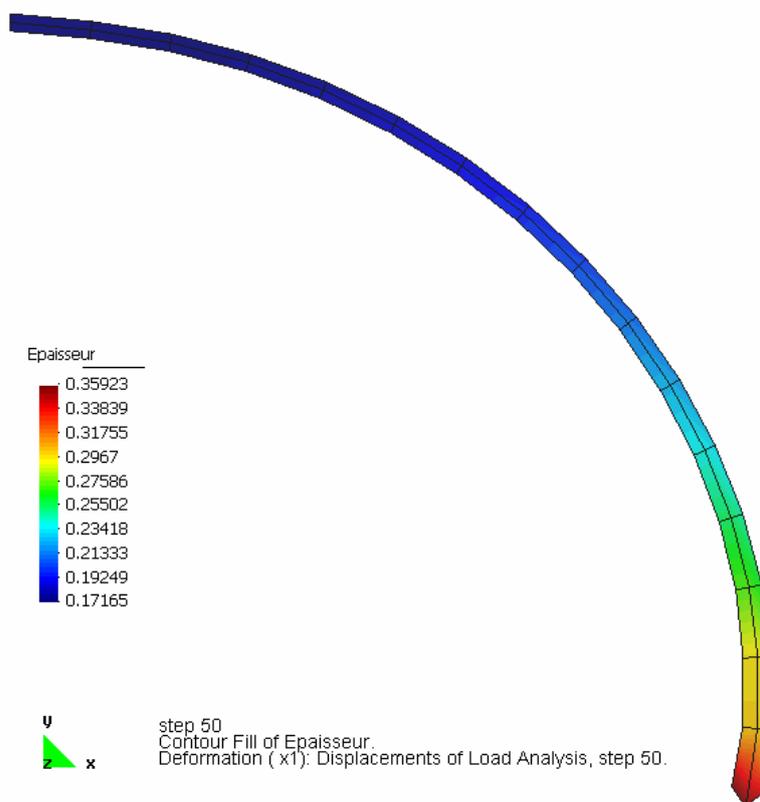


Figure 4-8 Répartition des épaisseurs

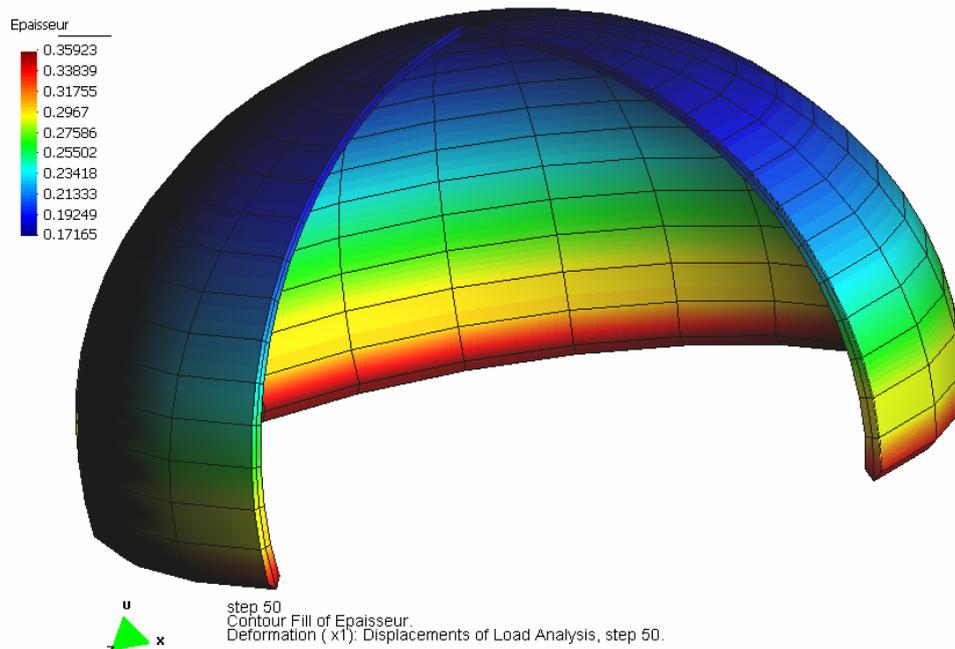


Figure 4-9 Vue de plaque gonflée en 3D

Afin d'étudier la performance en terme de temps CPU de l'élément SFRQ-Axi, comparativement à aux éléments Q4-Axi (bilinéaire) et Q8-Axi (quadratique), nous avons effectué dans un premier temps un calcul avec trois maillages différents (maillages 2x4, 2x8 et 2x16) sans se poser la question du nombre de ddl total (voir Figure 4-10). Soulignons les bonnes performances de calcul de notre élément SFRQ-Axi, avec celles de l'élément classique Q4-Axi, comparativement à l'élément quadratique Q8-Axi intégré exactement. Ce dernier met environ 2,5 fois plus de temps à résoudre le problème par rapport aux deux autres éléments.

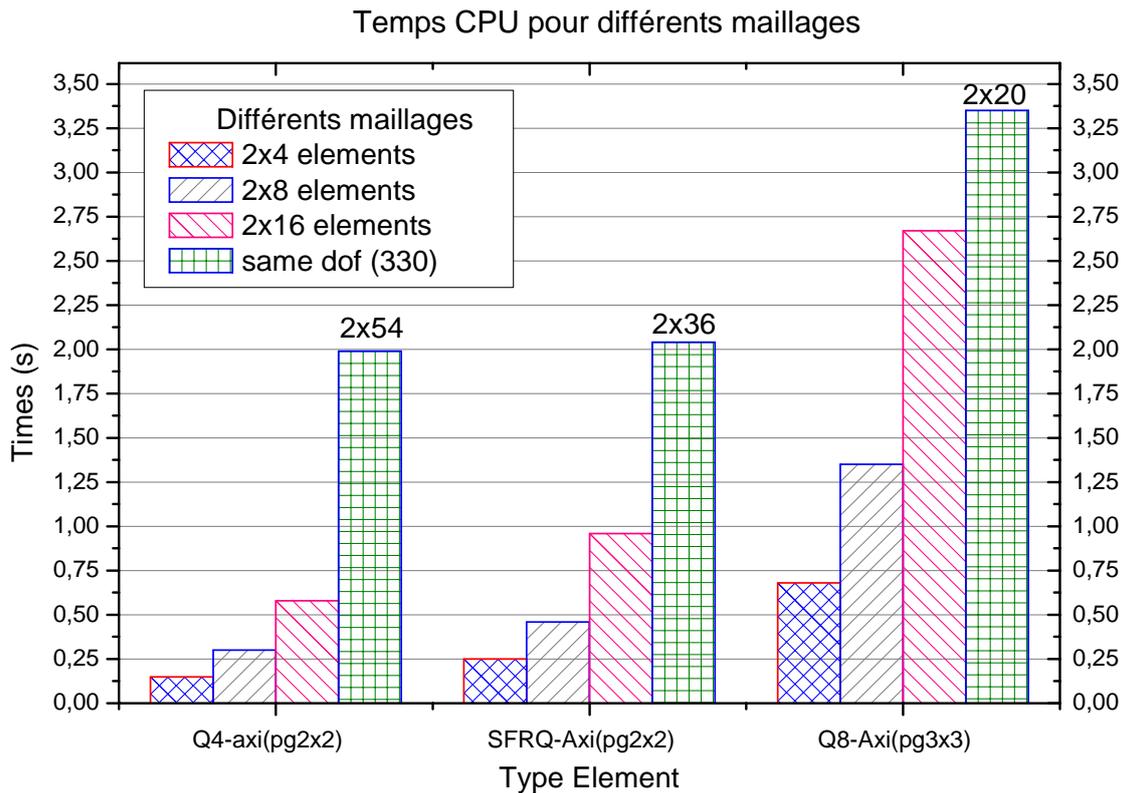


Figure 4-10 Temps CPU

La meilleure comparaison des performances de calcul est sans doute celle qui consiste à effectuer un seul et même calcul, pour un même nombre total de ddl (ou d'équations à résoudre). Celui-ci est pris égal à 330 ddl (Figure 4-10); il est associé aux maillages 2x54, 2x36, 2x20 correspondant respectivement aux éléments Q4-Axi, SFRQ-Axi, Q8-Axi (intégré exactement). Le même temps de calcul est observé pour les éléments Q4-Axi et SFRQ-Axi (environ 2s), avec une performance, de loin, meilleure que celle de l'élément Q8-xi (Q8-Axi met environ 68.5% de temps de calcul en plus pour donner la même solution que les deux autres éléments).

4.2.2. Plaque circulaire enroulant un tore rigide

Un second exemple est celui d'une plaque circulaire s'enroulant sur un tore rigide sous l'action d'une pression appliquée sur une de ces faces. Ce test a pour but de vérifier l'aptitude de l'élément SFRQ-Axi à reproduire un comportement dominant en flexion. Plusieurs calculs sont effectués pour comparer les déplacements du nœud « extrémité droite » de la plaque. Notre modèle SFRQ-Axi est confronté, pour différents types de maillage, aux éléments classiques Q4-Axi et Q8-Axi. Il s'agit de comparer les performances de précision et en temps de calcul à travers l'allure de la courbe « chargement en pression – déplacement » du nœud

piloté (Figure 4-14) Les résultats de l'élément quadratique Q8-Axi sont considérés comme valeurs de comparaison.

Le matériau employé est hyper élastique avec une loi hyperélastique de Mooney-Rivlin à deux constantes ($C_1 = 80 \text{ Psi}$ et $C_2 = 20 \text{ Psi}$) et un module d'incompressibilité $k = 10^4 \text{ Psi}$. La géométrie de la plaque est donnée sur la Figure 4-11. Une partie du tore rigide est enlevée par soucis d'économie (éléments rigides – contact plaque-tore- ne participant pas au calcul). La Figure 4-12 donne la distribution des épaisseurs le long de la plaque avant et après déformation. Une représentation dans l'espace de la même plaque déformée est représentée dans Figure 4-13.

Les performances de notre modèle solide axisymétrique SFRQ-Axi sont nettement meilleures que le modèle bilinéaire Q4-Axi. SFRQ-Axi donne des résultats très proches de ceux de l'élément quadratique (assez coûteux) Q8-Axi. Ce test a permis notamment de montrer les limites du modèle bilinéaire classique Q4-Axi dans la reproduction fidèle d'un comportement dominant en flexion. SFRQ-Axi reste performant pour ce type de cas-tests.

Les performances de l'élément SFRQ-Axi en terme de temps de calcul (Temps CPU) sont représentées dans le diagramme de la Figure 4-15 Pour un maillage 40x2, notre modèle met 12 fois moins de temps que l'élément Q8-Axi à reproduire une solution approchée presque identique. Le taux de convergence reste bon même pour les autres maillages. Les temps de calcul relatifs à SFRQ-Axi reste aussi réduits que ceux de l'élément Q4Axi, en dépit du nombre élevé de ddl/nœud pour le premier par rapport au second (3 pour SFRQ-Axi et 2 pour Q4-Axi).

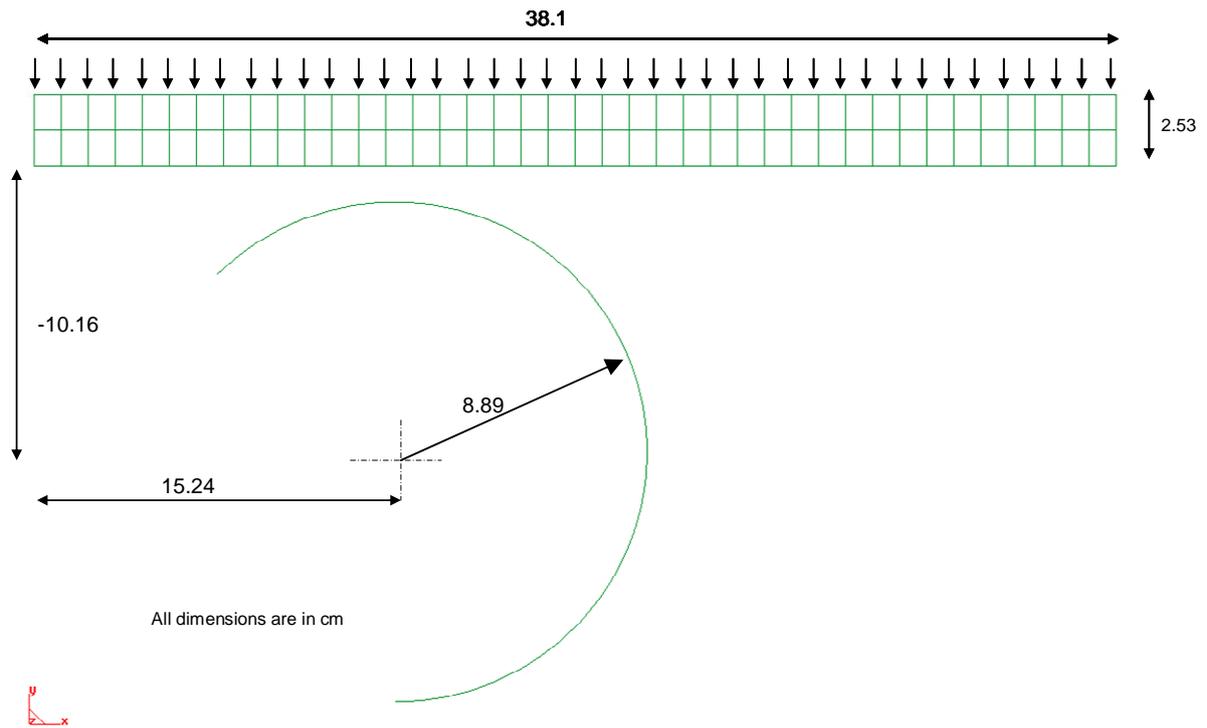


Figure 4-11 Géométrie de plaque

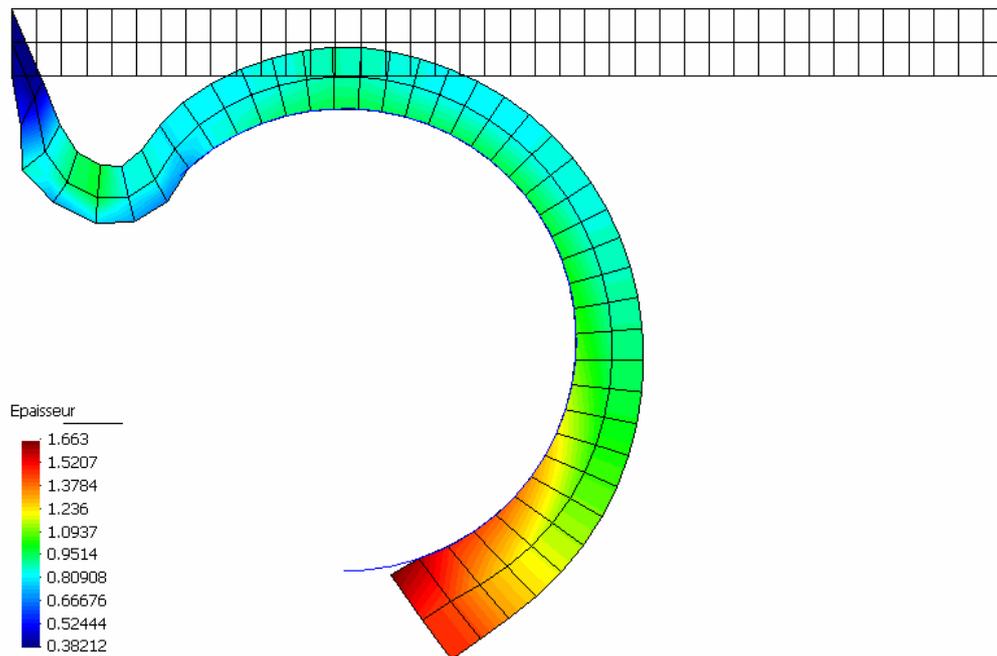


Figure 4-12 Distribution de la répartition des épaisseurs (position initiale et finale)

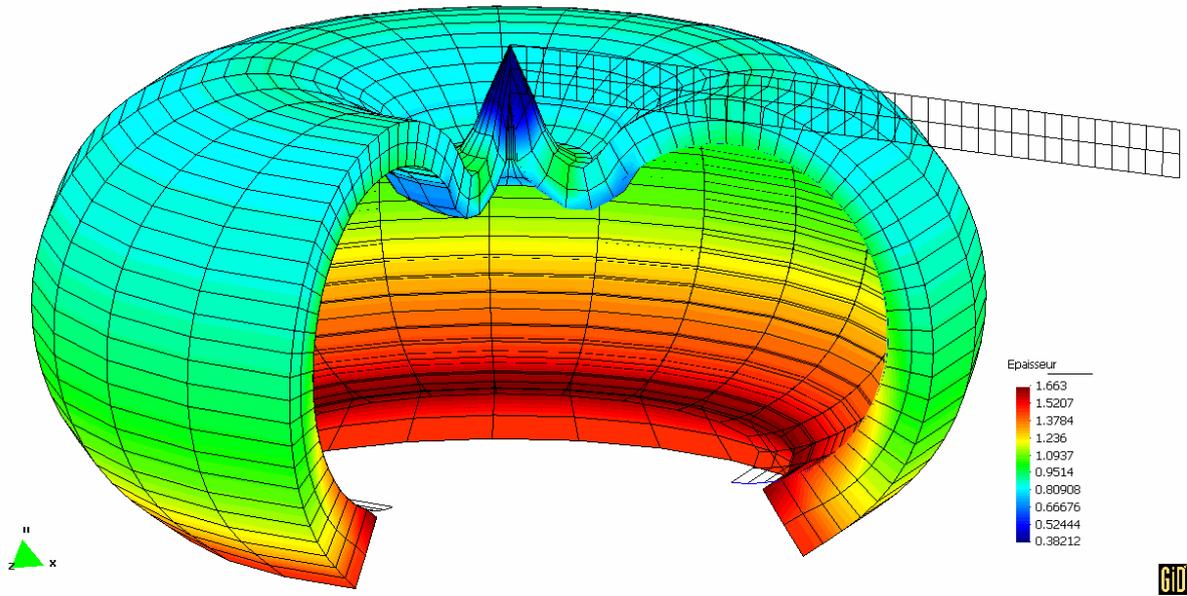


Figure 4-13 Vue en 3D de la plaque déformée

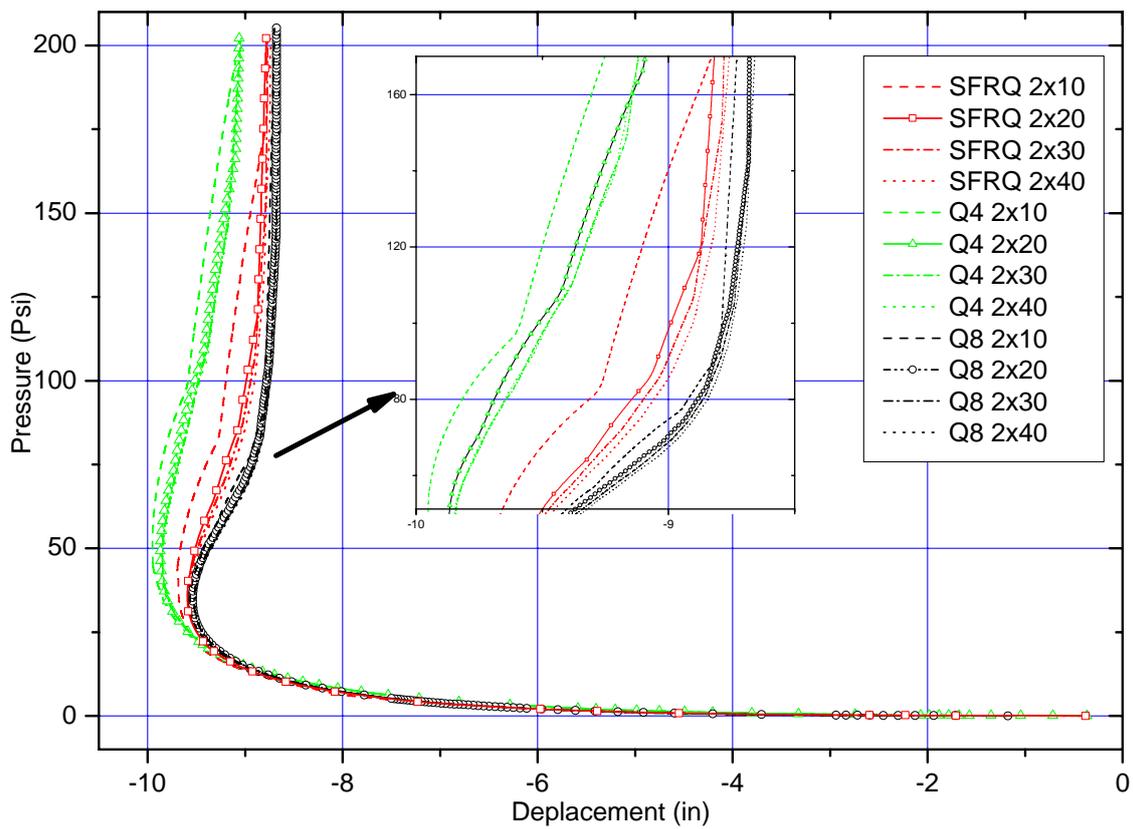


Figure 4-14 Courbe de charge pression déplacement

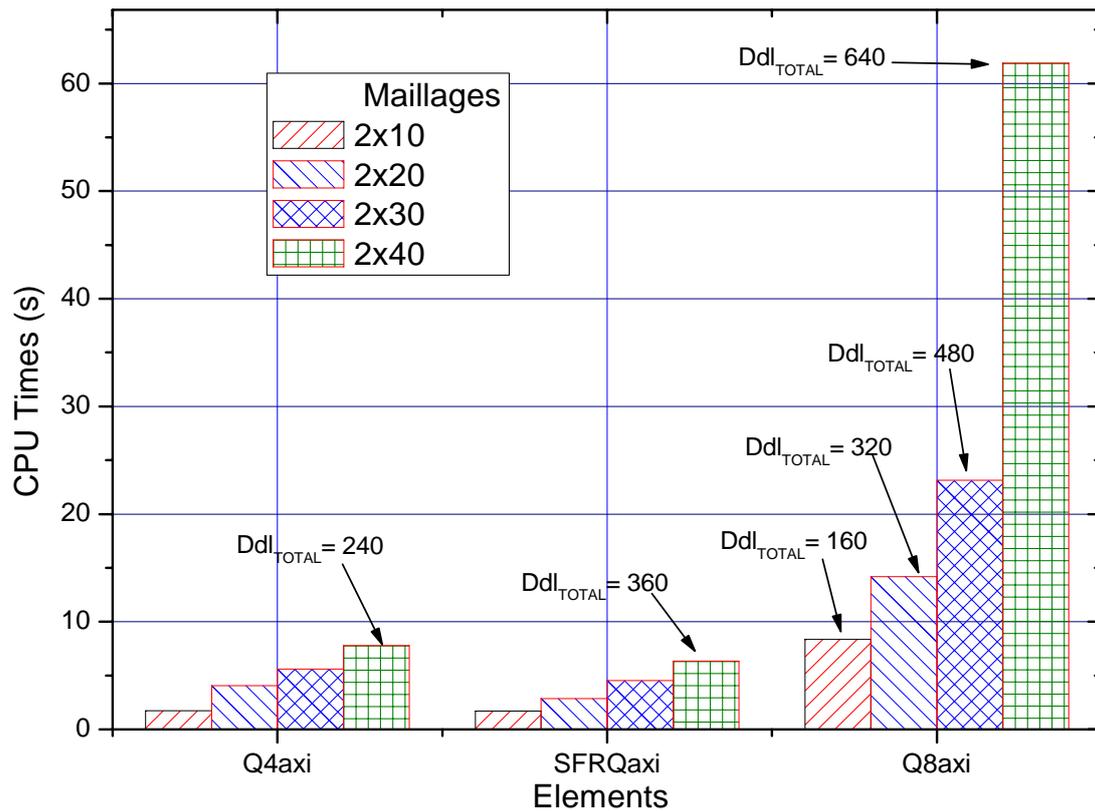


Figure 4-15 Temps CPU d'une plaque en flexion

Nous avons voulu examiner l'influence des distorsions des maillages sur les résultats de notre modèle SFRQ-Axi. Deux maillages différents ont été considérés : le premier est relativement structuré mais distordu (Figure 4-16) et le deuxième est non structuré (maillage libre complètement distordu) (Figure 4-17). Les résultats obtenus sont globalement du même ordre de grandeurs que ceux obtenus à l'aide des maillages structurés ou réguliers. Nous n'avons pas représenté les résultats du maillage non structuré en raison des difficultés liées au post-traitement sur les valeurs de l'épaisseur pour ce type de maillages.

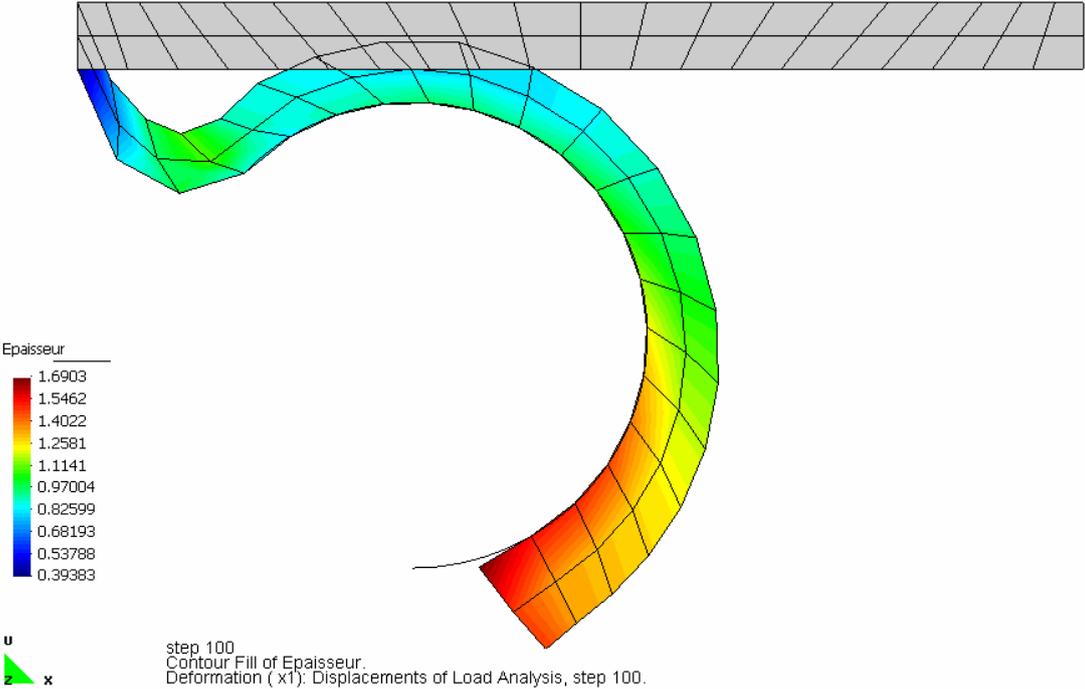


Figure 4-16 Répartition des épaisseurs avec un maillage distordu

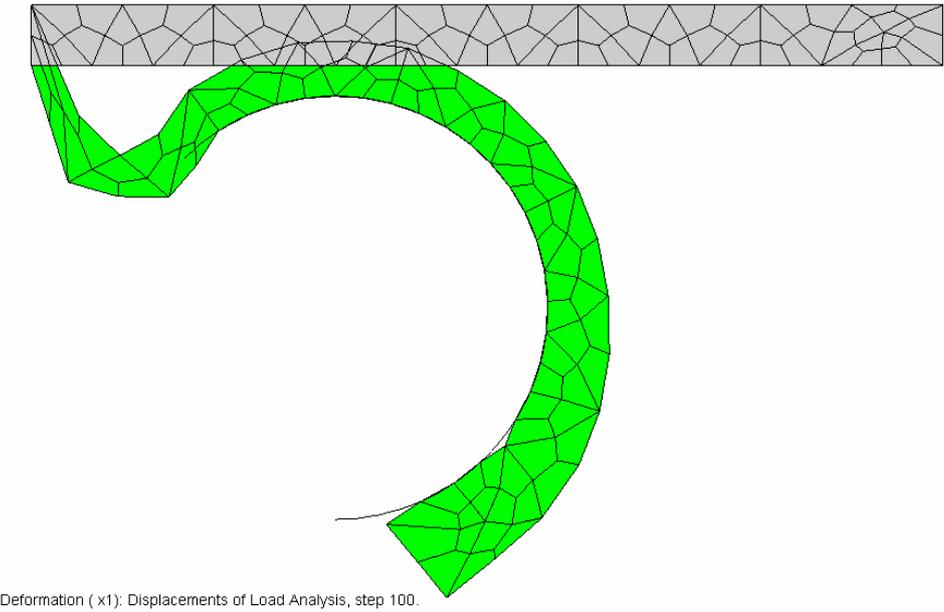


Figure 4-17 Répartition des épaisseurs avec un maillage non structuré

4.3. Conclusion

L'élément SFRQ-Axi a été testé avec succès sur des cas-tests avec et sans contact. Dans le premier exemple, les éléments travaillent seulement en membrane. Les résultats obtenus par SFRQ-Axi sont très proches de ceux de l'élément quadratique Q8-Axi pour un même nombre total de ddl. L'élément développé pourrait constituer une alternative à l'élément Q8-Axi, réputé précis mais très coûteux en temps de calcul.

Le test de la plaque circulaire en contact avec un tore rigide montre que l'élément SFRQ-Axi a des taux de convergence assez élevés. De plus, il s'adapte aux problèmes avec contact, puisqu'il offre 2 nœuds par côté au lieu de 3 nœuds pour les éléments quadratiques. Ainsi, la gestion de nœuds candidats au contact peut se faire aisément tout en gardant une bonne précision proche des éléments quadratiques.

5 Chapitre 5

5.1. Applications

5.1.1. Thermoformage d'un godet

Un premier exemple traite le thermoformage d'un godet. Dans ce problème nous considérons une feuille de plastique d'épaisseur 0.1 in simplement appuyée sur un godet cylindrique et soumise à une pression uniforme. La géométrie est illustrée sur la (Figure 5-1). Cet exemple a été traité par DeLorenzi [Del88]. Le calcul est fait sur deux matériaux avec des propriétés hyper-élastiques différentes (loi de comportement de type Mooney Rivlin) : le premier matériau est celui considéré par DeLorenzi avec les constantes $C_1 = 20.7 \text{ Psi}$, $C_2 = 3.2 \cdot 10^6 \text{ Psi}$ et $k = 10^4 \text{ Psi}$ (Bulk Modulus). Le deuxième matériau est étudié avec des constantes $C_1 = 80 \text{ Psi}$, $C_2 = 20 \text{ Psi}$ et $k = 10^4 \text{ Psi}$. La résolution est effectuée à l'aide d'un schéma implicite de type Newton Raphson à chargement imposé. Le contact feuille plastique est supposé collant et le coefficient de pénalité pris égal à 10^7 .

Le but de ce test, réputé pour être sévère, est d'étudier la répartition des épaisseurs du godet lors de la mise en forme (Figure 5-2-Figure 5-4). Les pas de chargement devront être très petits pour mieux atténuer les fortes oscillations numériques observées. Une comparaison avec l'élément Q8-Axi est faite pour un meilleur examen des performances de précision sur la répartition des épaisseurs. La Figure 5-5 montre l'allure de la courbe de distribution des épaisseurs le long de la génératrice du godet. Les résultats fournis par les deux modèles sont en accord avec les tests expérimentaux.

La génération du volume du godet traité de manière axisymétrique peut être reconstituée par une simple rotation de la génératrice du godet (Figure 5-5).

Pour le premier matériau, une pression de 10.45 Psi s'est avérée nécessaire pour plaquer complètement la préforme contre les parois du moule. Il est à noter que le calcul en zones de fond arrondies (fond du godet) nécessite un temps de calcul considérable. Pour y remédier, il est tout à fait possible qu'un remaillage localisé des zones à cavités arrondies ou de forte courbure soit réalisé. Une autre solution consiste à appliquer des coefficients de charge de forte valeur pour le calcul implicite. Dans le cas du second matériau, une pression plus élevée (155.5 Psi) était nécessaire pour la mise en forme totale de la feuille.

Soulignons la bonne stabilité de notre modèle SFRQ-Axi face aux fortes oscillations rencontrées durant le calcul. La non linéarité de contact pourrait être la cause de ces oscillations ; les efforts de contact étant calculés par la méthode de pénalité dans la présente étude.

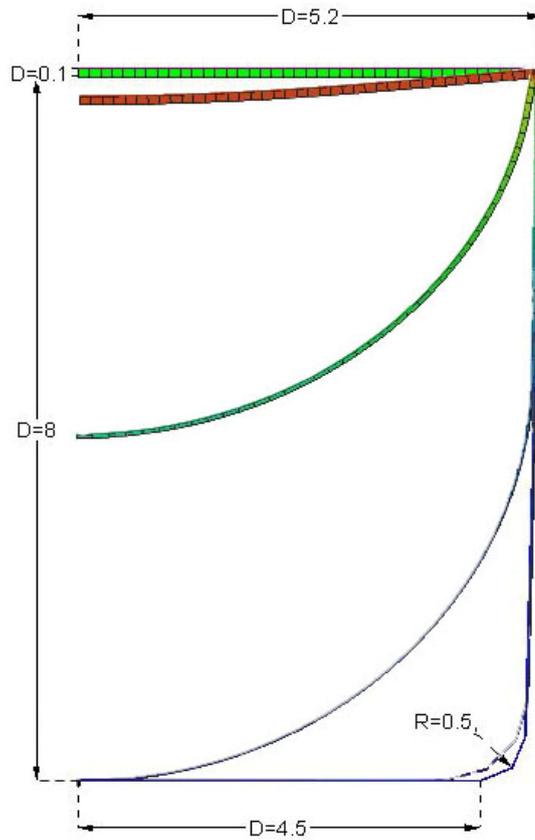


Figure 5-1 Thermoformage d'un godet

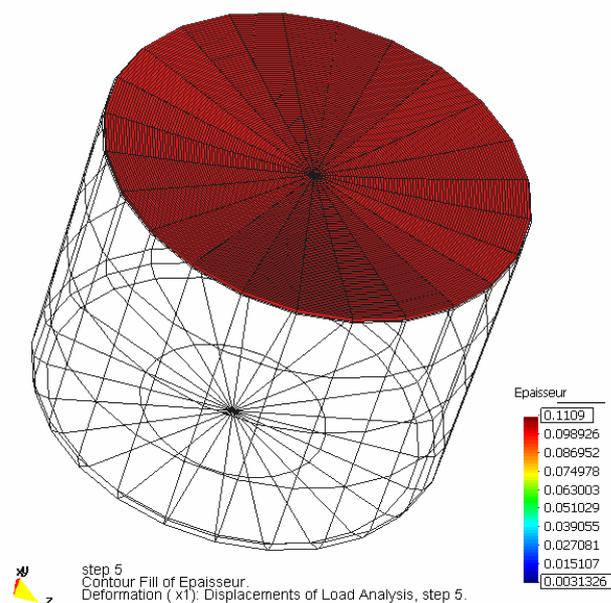


Figure 5-2 Distribution de l'épaisseur de la Plaque au pas 5

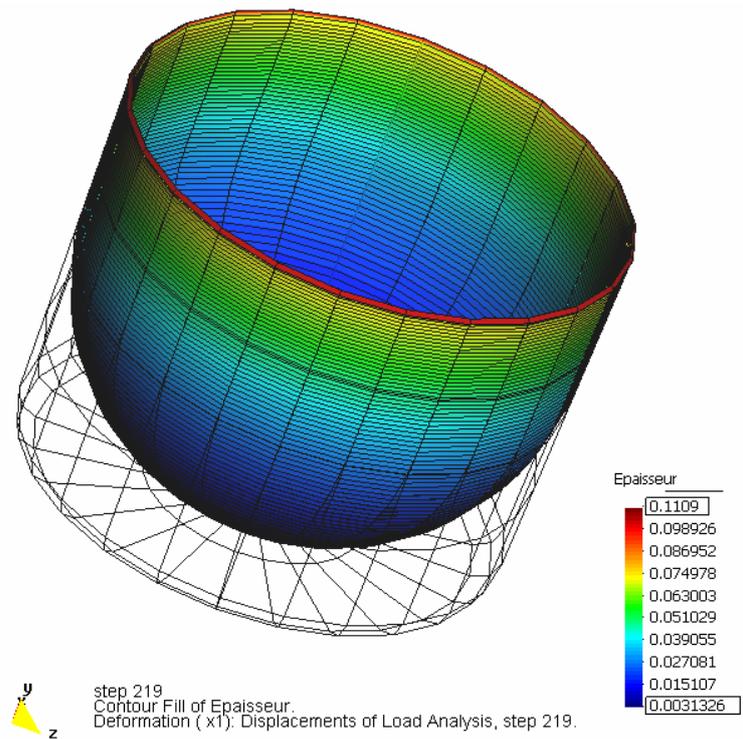


Figure 5-3 Distribution de l'épaisseur de la Plaque au pas 219

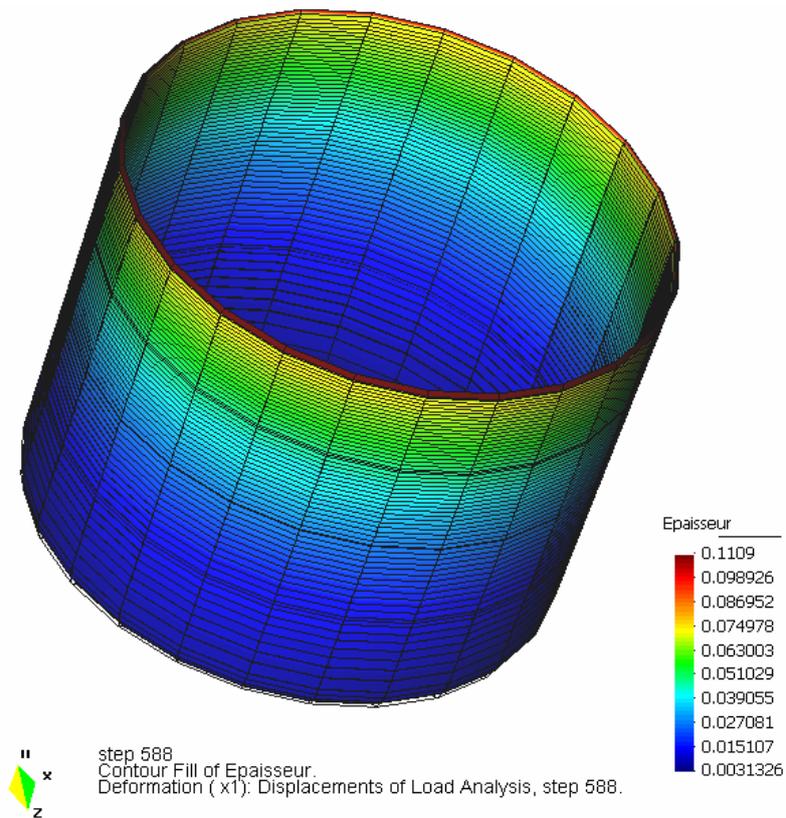


Figure 5-4 Distribution de l'épaisseur de la Plaque au pas final

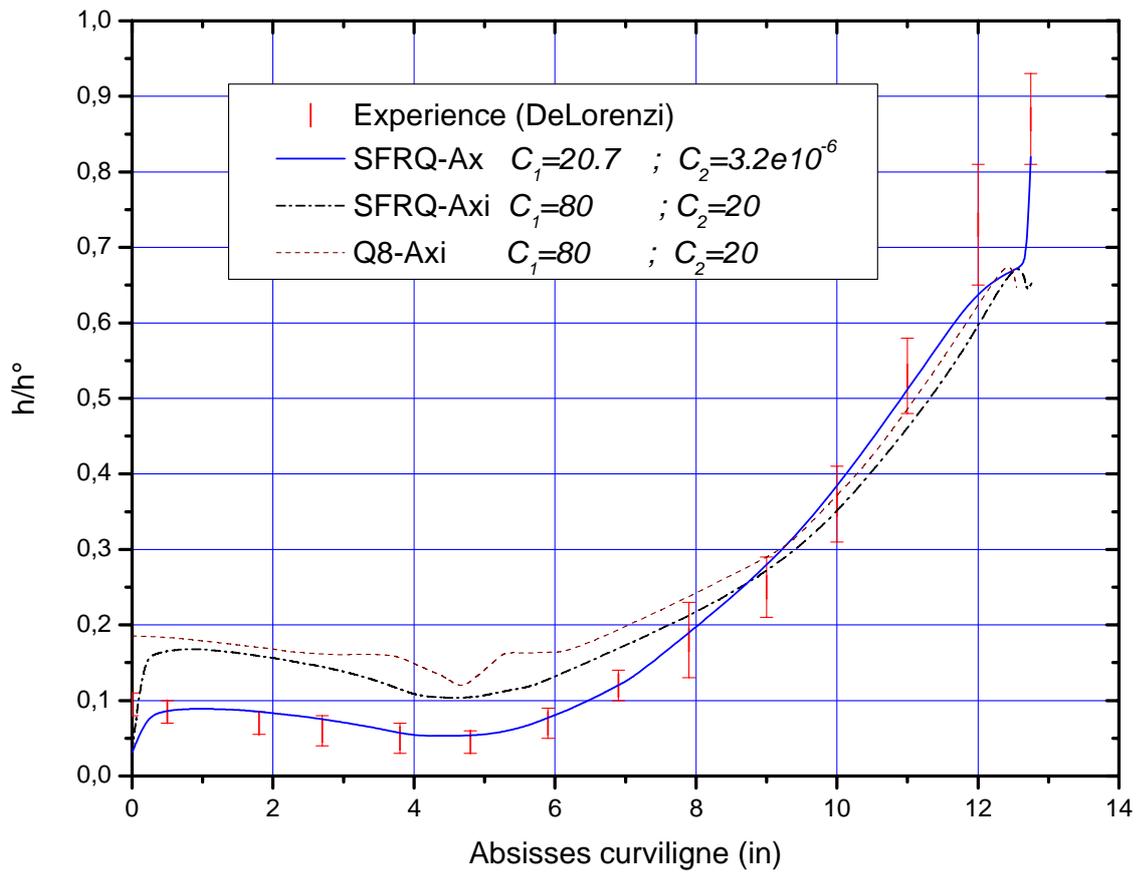


Figure 5-5 Distribution de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne

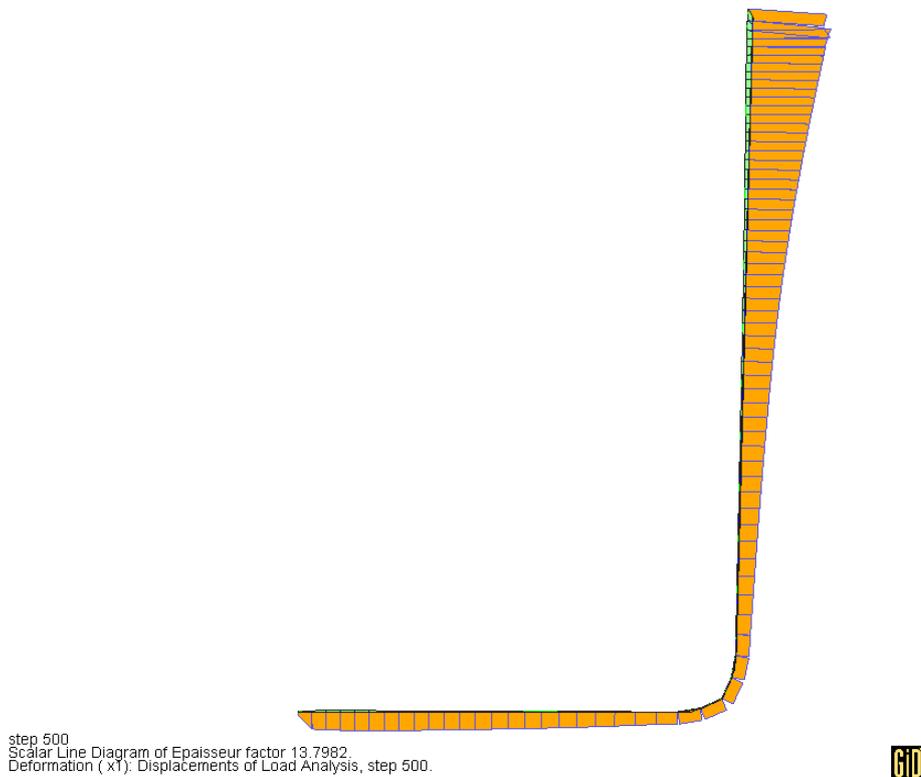


Figure 5-6 Répartition de la normale le long du godet

5.1.2. Poinçonnage d'une plaque circulaire

La plaque circulaire de la Figure 5-7 est en caoutchouc. Elle est déformée par un poinçon rigide. Ce test est traité expérimentalement par William [Wil70] pour étudier la distribution de l'épaisseur de la plaque lors de la mise en forme. La modélisation est effectuée avec un maillage à 2x20 éléments hyper-élastiques. Les résultats numériques fournis par les éléments SFRQ-Axi, Q4-Axi et Q8-Axi sont comparés aux résultats expérimentaux (Figure 5-9).

Le contact est considéré comme collant. Le comportement du matériau est représenté par un modèle néo-Hookéen avec $C_1 = 0.448 \text{ Mpa}$ et le coefficient d'incompressibilité pris égal à $k = 10^2 \text{ Mpa}$. La course du poinçon rigide est de 90 mm. La résolution est effectuée à l'aide d'un schéma implicite de type Newton-Raphson chargé par le poinçon rigide. Pour calculer les réactions de contact, nous avons pris un coefficient de pénalité égal à 10^5 .

Type élément	Pas total	Itération Total	Temps CPU (s)
SFRQ-Axi	90	303	4.85
Q4-Axi	90	274	3.74
Q8-Axi	90	280	93.67

Tableau 5-1 Temps CPU des différents éléments hyper élastiques

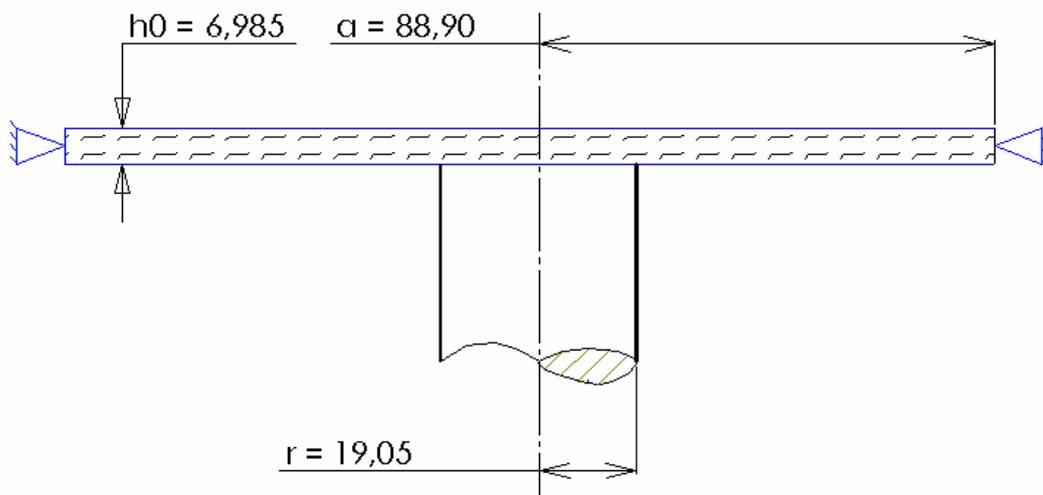


Figure 5-7 Membrane circulaire hyper élastique déformée par un poinçon

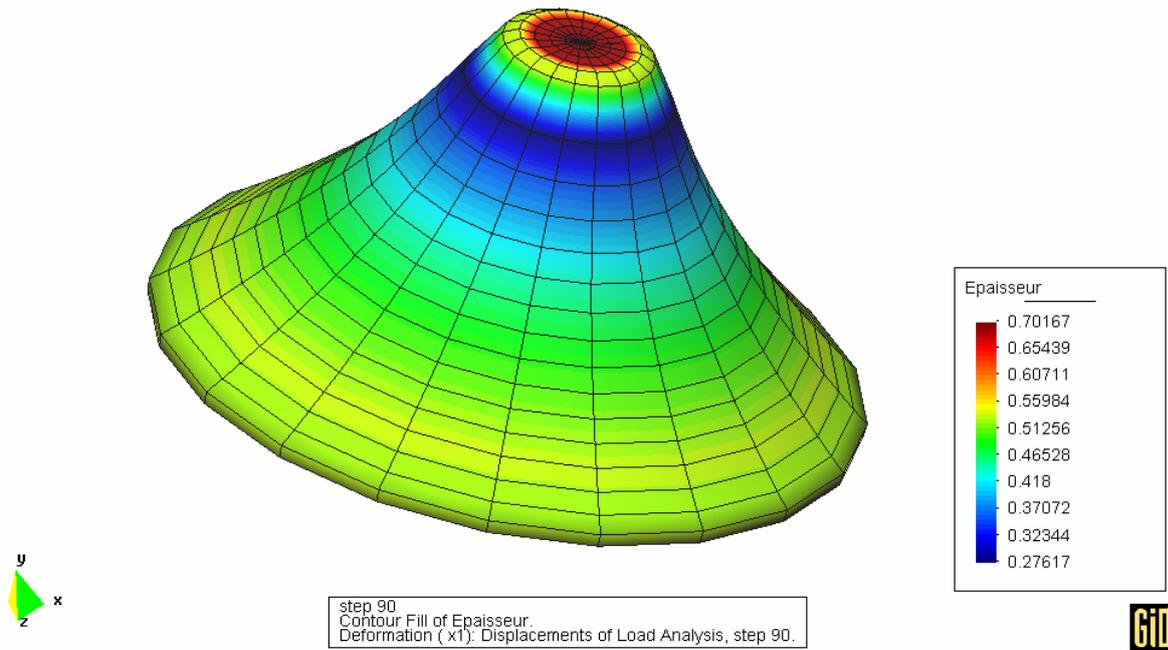


Figure 5-8 Allure de la membrane après déformation

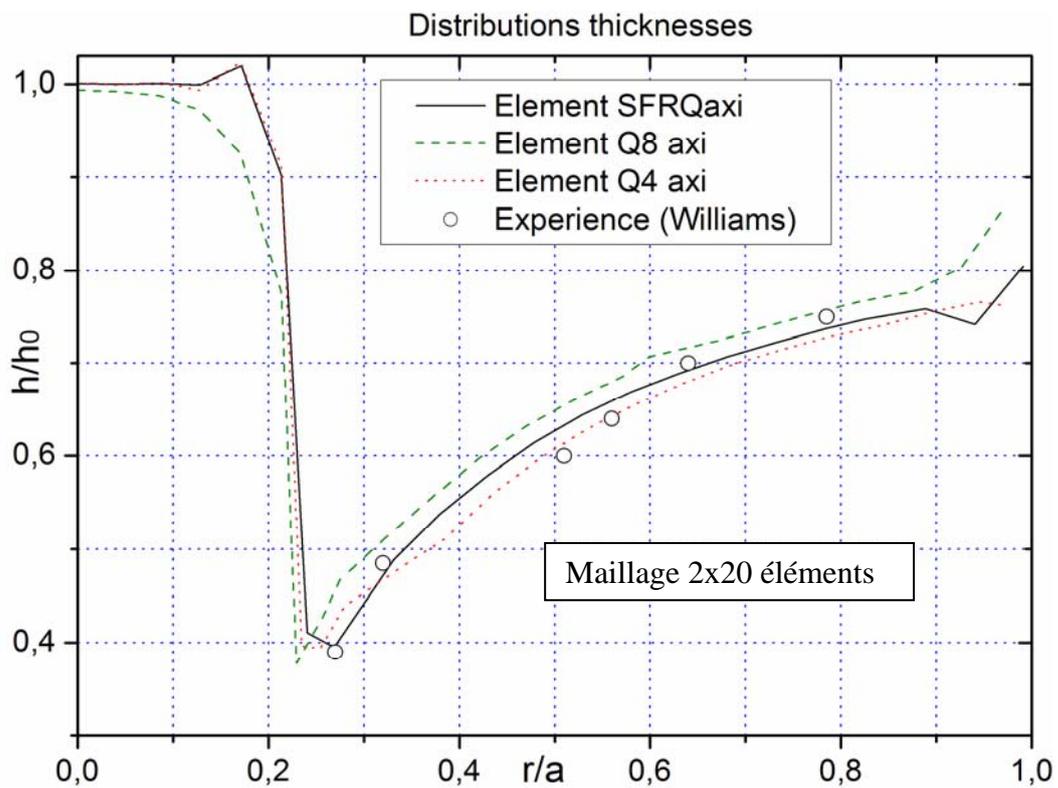


Figure 5-9 Variation de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne

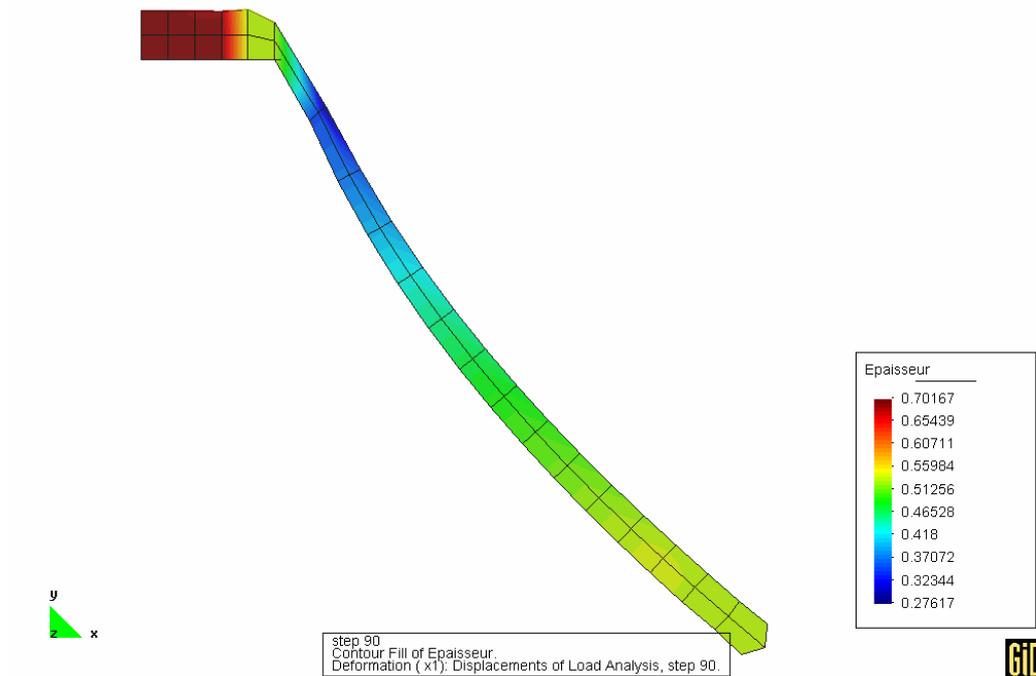


Figure 5-10 Distribution de l'épaisseur

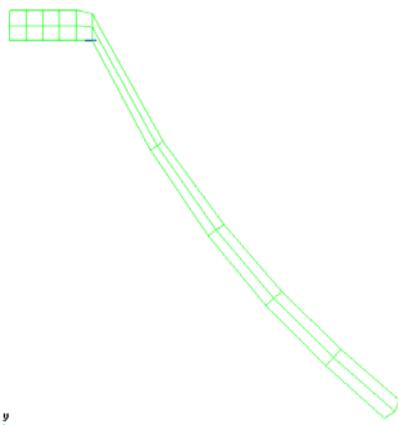


Figure 5-11 SFRQ-Axi avec un maillage 2x10

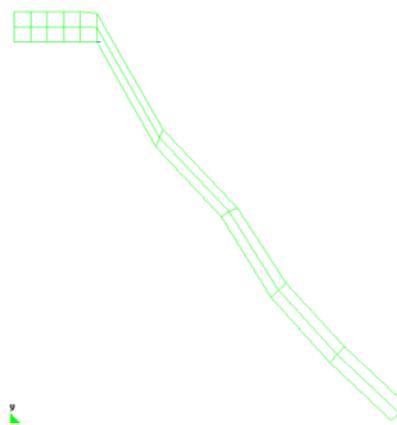


Figure 5-12 Q4-Axi avec un maillage 2x1

L'élément SFRQ-Axi avec 1 degré de liberté en plus que l'élément Q4-Axi donne un temps CPU très proche de ce dernier (Voir Tableau 5-1). Avec un maillage grossier, le Q4-Axi a tendance à donner des résultats moins précis (voir Figure 5-12).

Dans le cas d'un contact collant, on constate que l'épaisseur reste constante sous le poinçon (Figure 5-10). Les résultats de la variation des épaisseurs sont en accord avec ceux de l'expérience.

L'élément développé donne des résultats similaires à ceux du modèle Q8-Axi (réputé performant), avec un temps CPU réduit de plus de la moitié pour un même nombre d'éléments. Rappelons que notre élément utilise une intégration à 2x2 PG au lieu de 3x3 PG

pour Q8-Axi : un avantage majeur pour gagner du temps CPU lors de la simulation de problèmes non- linéaires avec des lois de comportement hyperélastiques.

Un autre avantage dans l'utilisation de notre modèle est la possibilité, pour accélérer les calculs, d'effectuer des remaillages dans des zones à forte courbure ; le nombre de ddl étant réduit pour SFRQ-Axi par rapport au Q8-Axi. Enfin, nous ne manquons pas de citer un avantage de taille pour notre élément par rapport à la représentation des distributions d'épaisseur, comparativement aux éléments finis de membrane ou de coque qui sont définis, rappelons le sur une surface moyenne. L'évaluation étant directe sans pouvoir passer par des hypothèses cinématiques de structures minces. Un inconvénient plus ou moins contraignant mérite toutes fois d'être cité : les simulations nécessitent d'avoir une valeur adéquate du terme de pénalité associé à la densité d'énergie pour converger rapidement et donner les résultats escomptés. L'élément développé offre donc, un bon compromis entre la vitesse d'exécution et de la précision de la solution recherchée.

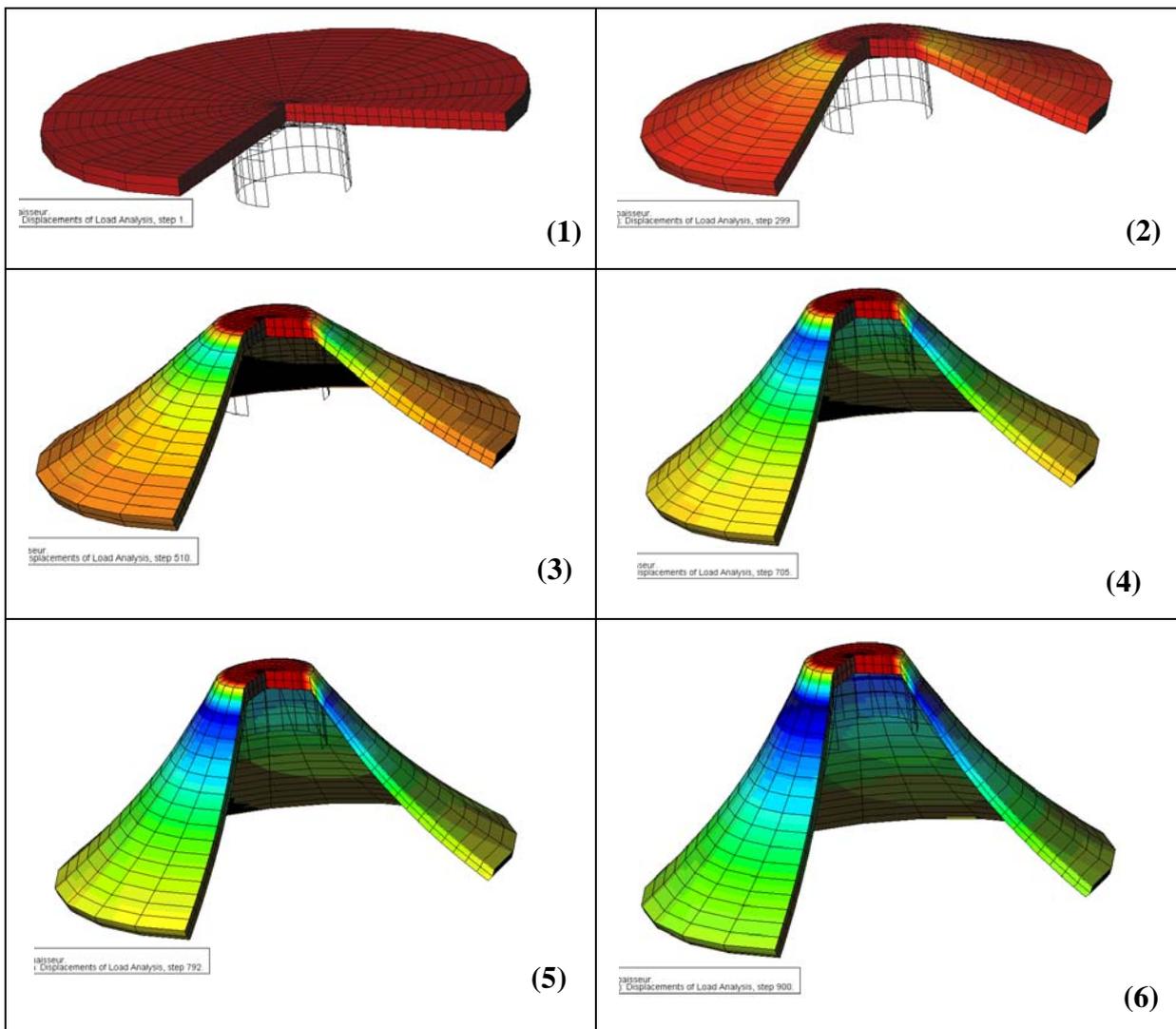
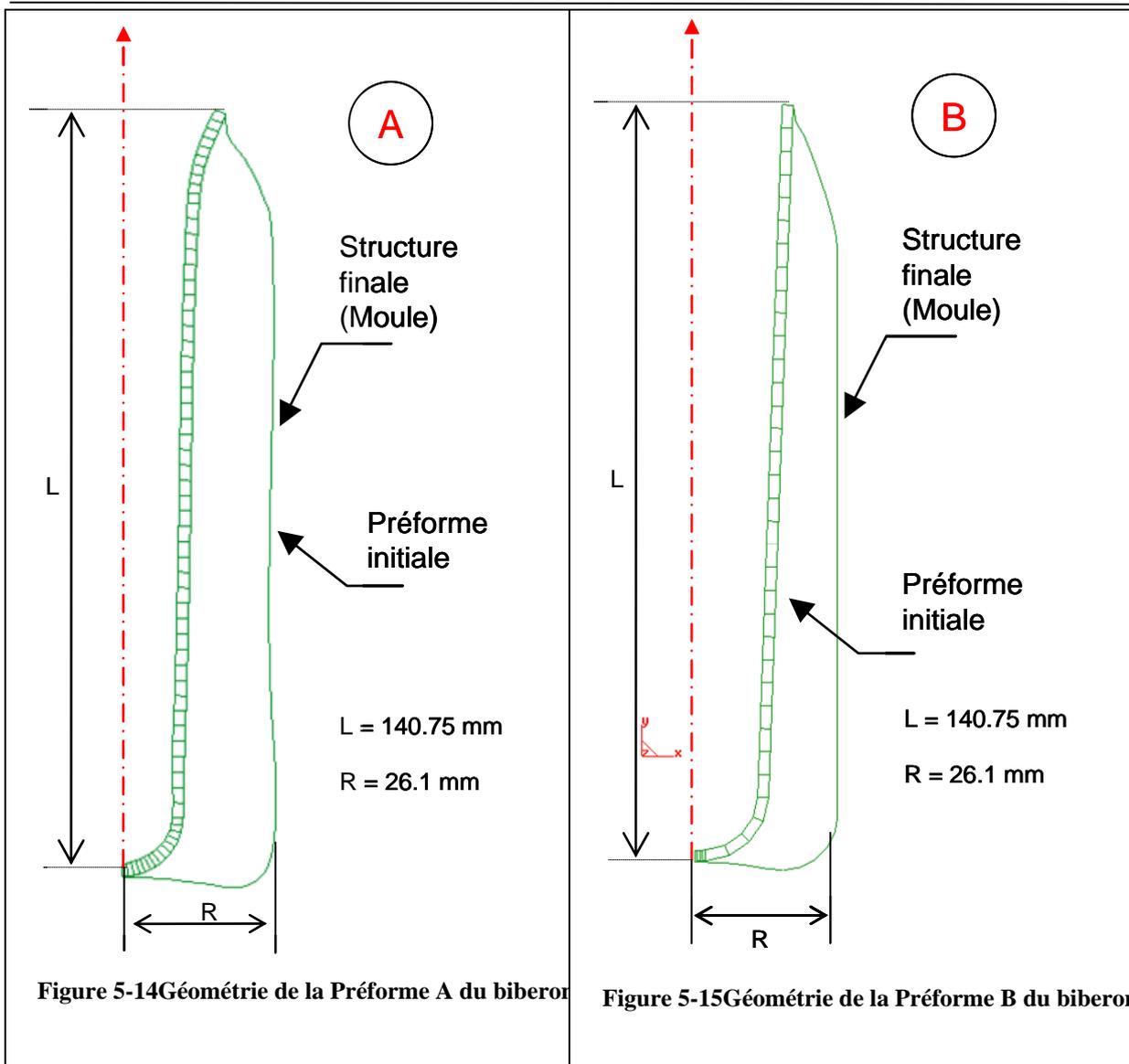


Figure 5-13 Poinçonnage de la plaque circulaire

5.1.3. Soufflage d'un biberon

L'exemple étudié est un biberon en polycarbonate fabriqué par la société « LA PRECISION PLASTIQUE ». Les géométries du moule et de la préforme sont données par la (Figure 5-14). Le biberon est obtenu en soufflant directement la préforme fixée aux deux extrémités. La température de soufflage est au environ de 150°C. Ce test est traité par plusieurs auteurs [Ben93] [Zia99] en utilisant les constantes suivantes du matériau : loi de Mooney Rivlin à 2 paramètres ($C_1 = 1.61335 \text{ Mpa}$, $C_2 = 0.3225 \text{ Mpa}$) et coefficient d'incompressibilité $\kappa = 10^2 \text{ Mpa}$.

Deux type de préformes longues de forme A et B. d'épaisseur $h^0 = 2.1 \text{ mm}$ sont traités.(Figure 5-14 et Figure 5-15). La simulation est réalisée avec deux matériaux différents. Le matériau 1 est défini par les paramètres précédents, le matériau 2 a pour constantes $C_1 = 80.0 \text{ Mpa}$ et $C_2 = 20.0 \text{ Mpa}$. Le contact paraison moule est supposé collant. La préforme A est testée en premier.



La Figure 5-17 montre la distribution des épaisseurs le long de la paroi du biberon. Les résultats du modèle développé SFRQ-Axi avec un calcul explicite est en parfait accord avec les résultats expérimentaux (préforme A) sauf au bout dans la zone A (voir Figure 5-18). Les résultats de la répartition des épaisseurs pour le matériau 2 donne une épaisseur plus importante ; ce qui est normal puisque ce matériau est plus rigide que le premier.

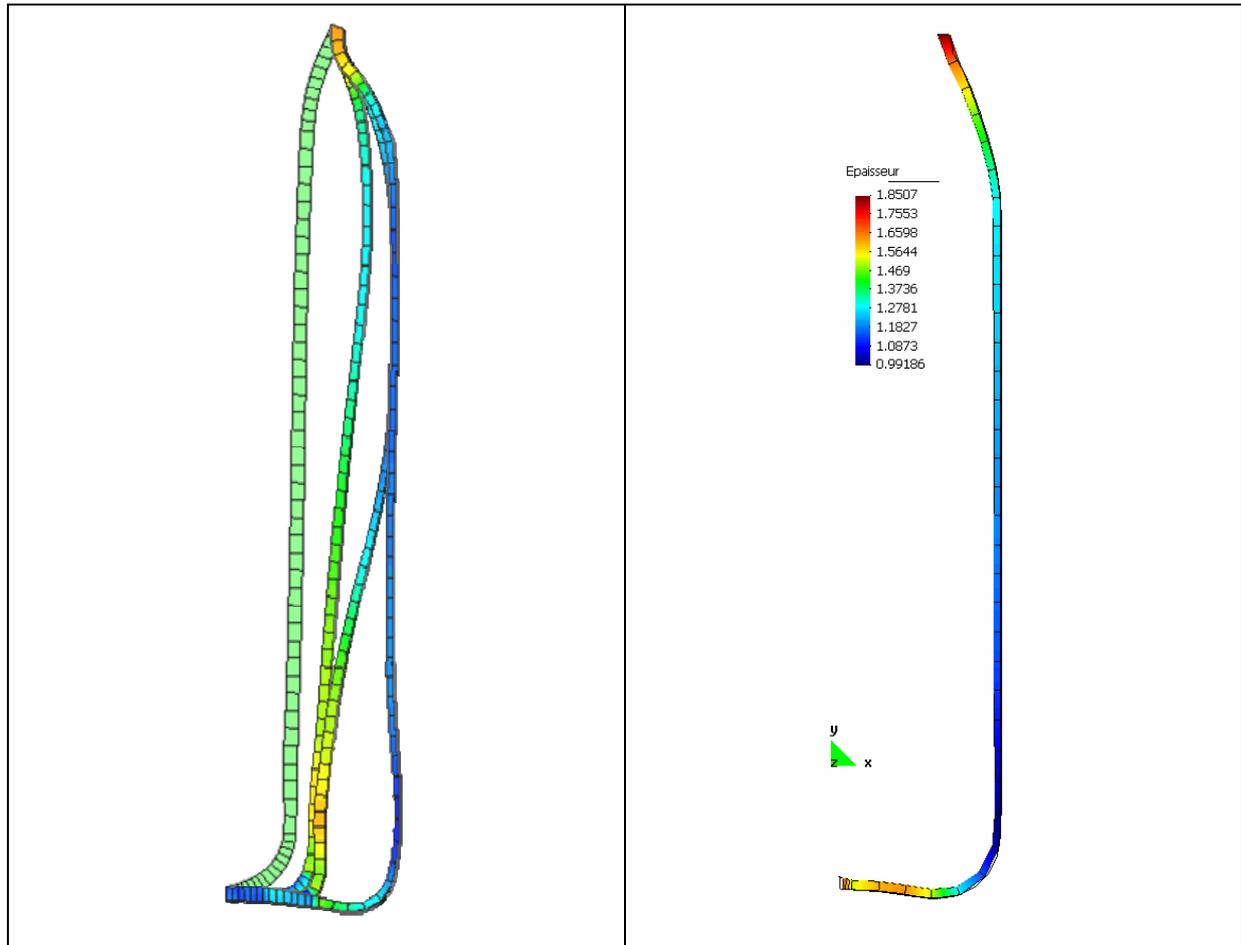


Figure 5-16 Répartition de l'épaisseur à partir une préforme (A) longue

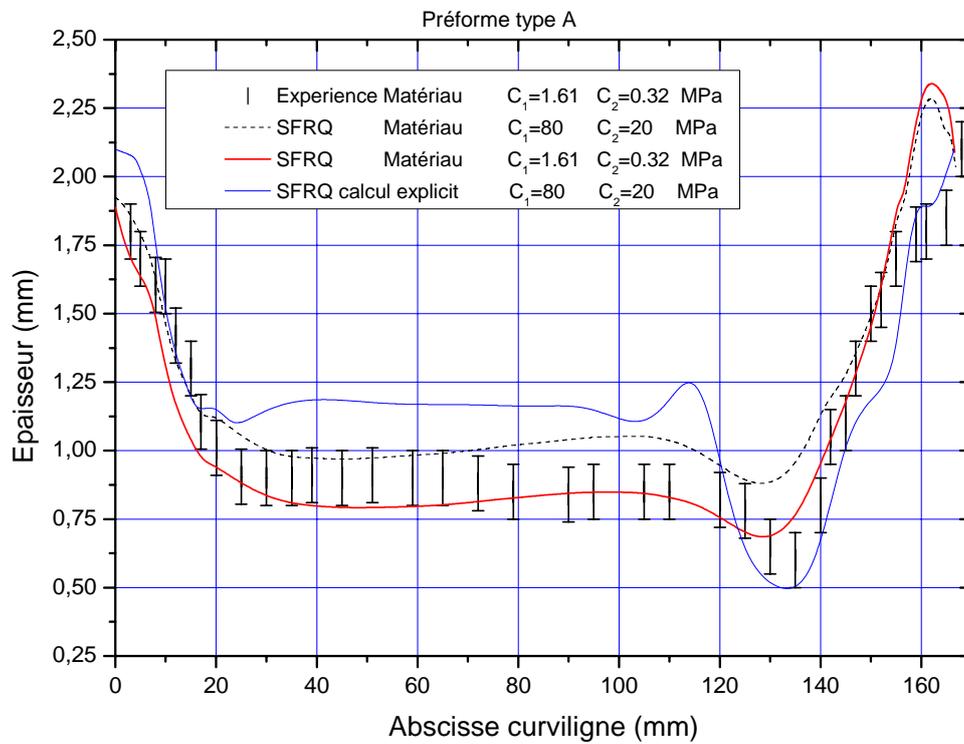
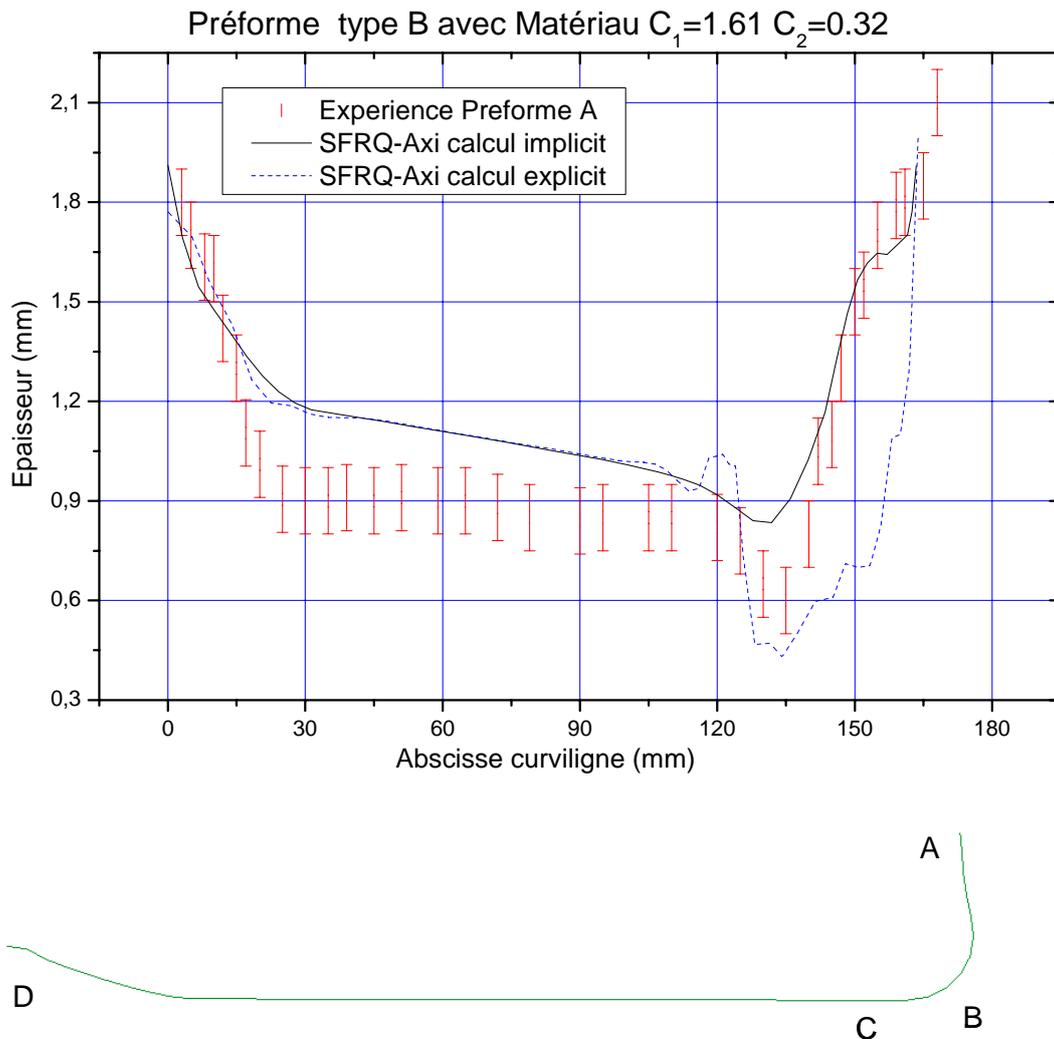


Figure 5-17 Distribution de l'épaisseur en fonction de l'abscisse curviligne préforme A

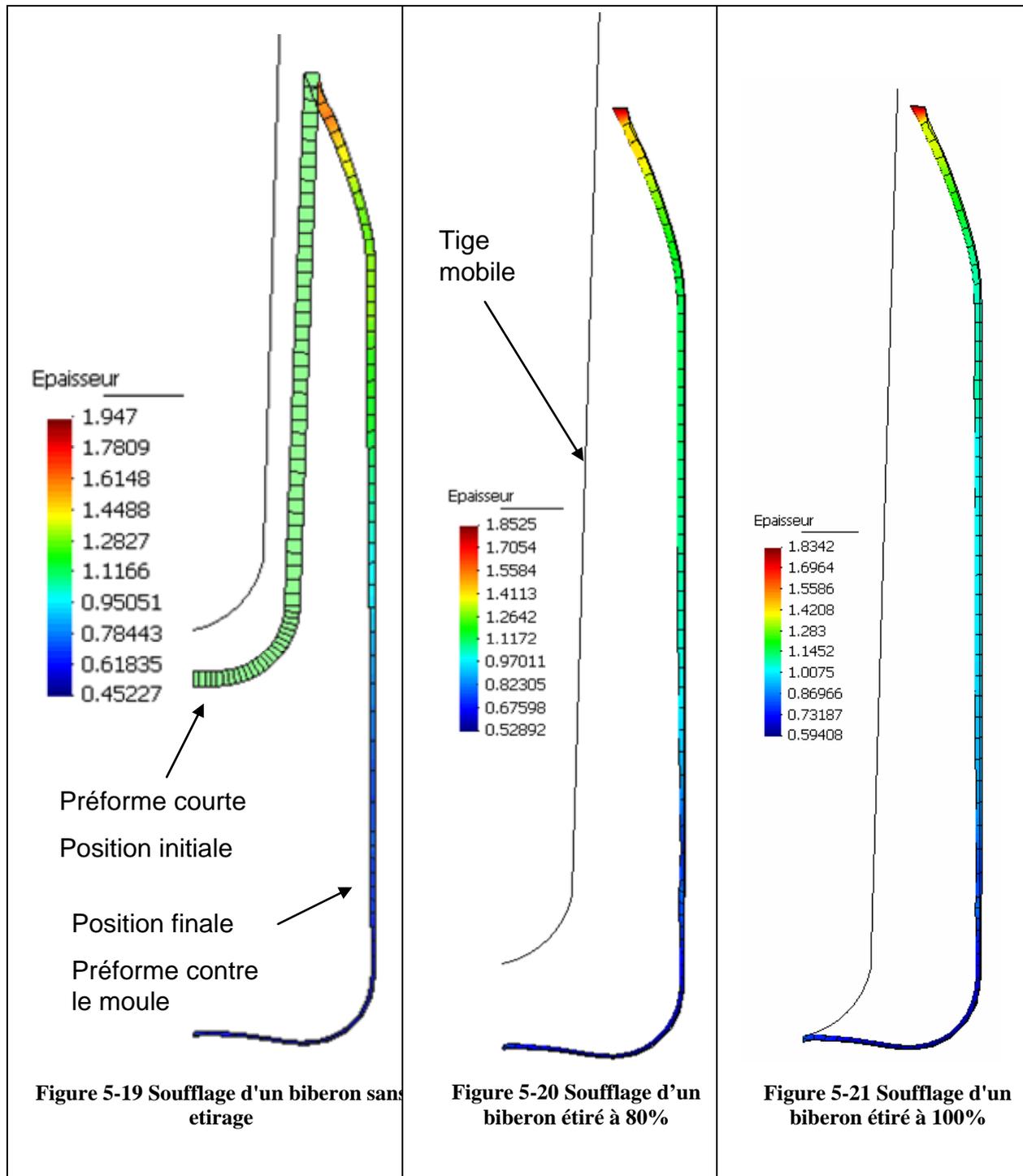


Le calcul explicite donne une répartition des épaisseurs plus homogène et proche des résultats expérimentaux que le calcul implicite. Les résultats peuvent être améliorés pour le calcul explicite en adoptant, d'une part, une variation d'un débit d'air, au lieu de prendre une pression constante dans le calcul et, d'autre part, un ajustement artificiel de la masse (masse scaling) pour accélérer le temps de calcul. Le temps de calcul mis par le schéma implicite est nettement plus rapide que le schéma explicite.

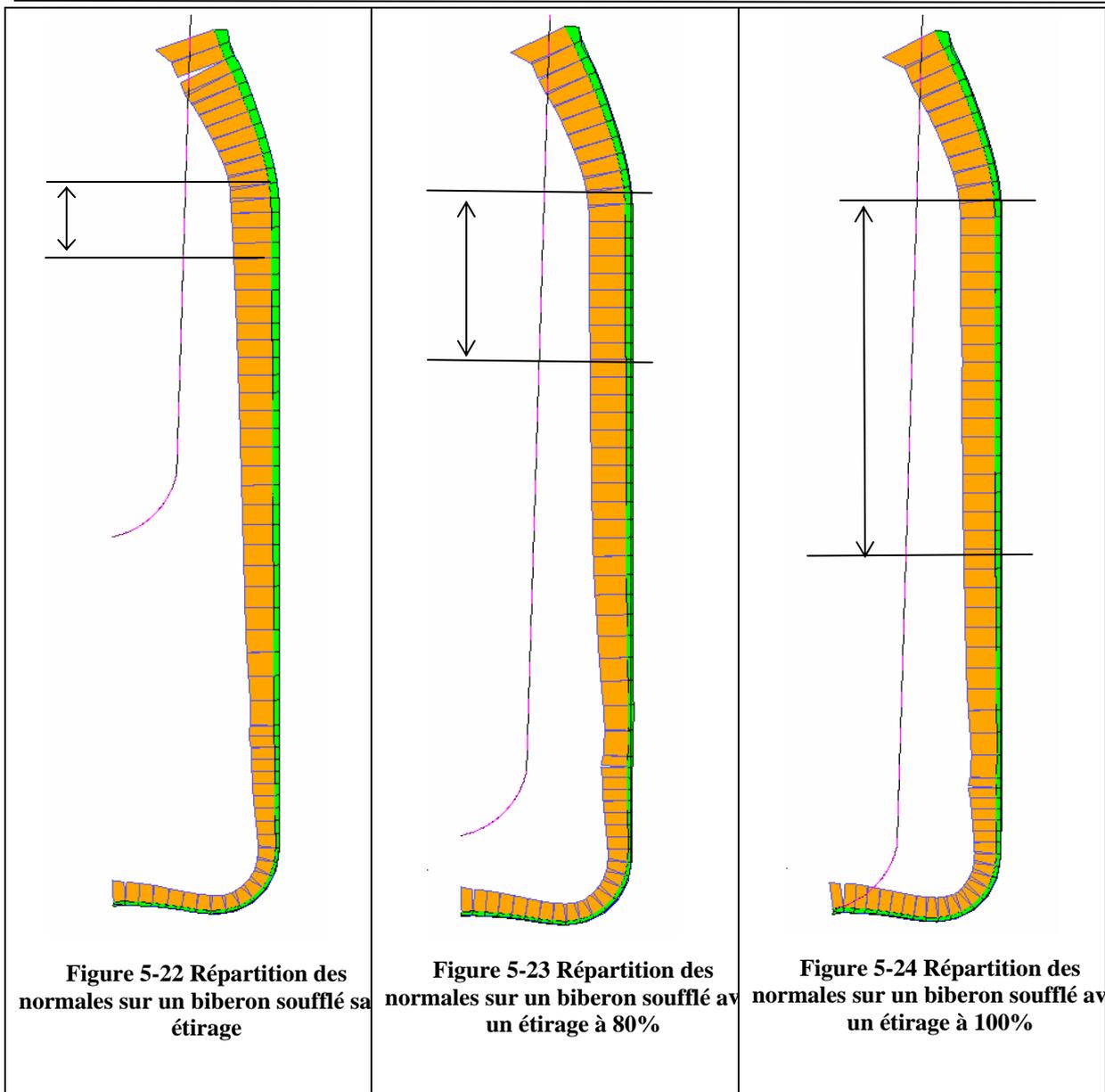
5.1.3.1. Bi étirage d'un biberon avec préforme courte

Dans cet exemple, nous avons étudié l'influence de l'étirage de la tige sur la répartition de l'épaisseur le long du biberon. Trois tests sont effectués sur des préformes courtes : le premier étant fait sans étirage (Figure 5-19), le deuxième est étiré à 80% (Figure 5-20) et le dernier est étiré jusqu'au fond du biberon (Figure 5.21). Le matériau a pour

constantes $C_1 = 80.0 \text{ Mpa}$ et $C_2 = 20.0 \text{ Mpa}$. Le contact paraison-moule et paraison-tige est supposé collant.



Les résultats des trois tests montre que, plus on étire dans les deux directions (bi-étirage) sous l'action mécanique de la tige et du soufflage, plus la distribution des épaisseurs a tendance à s'uniformiser. La répartition peut être améliorée en prenant une préforme injectée avec des épaisseurs variables (d'où l'intérêt d'un outil de simulation d'injection).



La représentation de la répartition des normales le long de la paroi du biberon (Figure 5-22, Figure 5-23, Figure 5-24) montre que le bi étirage améliore la répartition des épaisseurs.

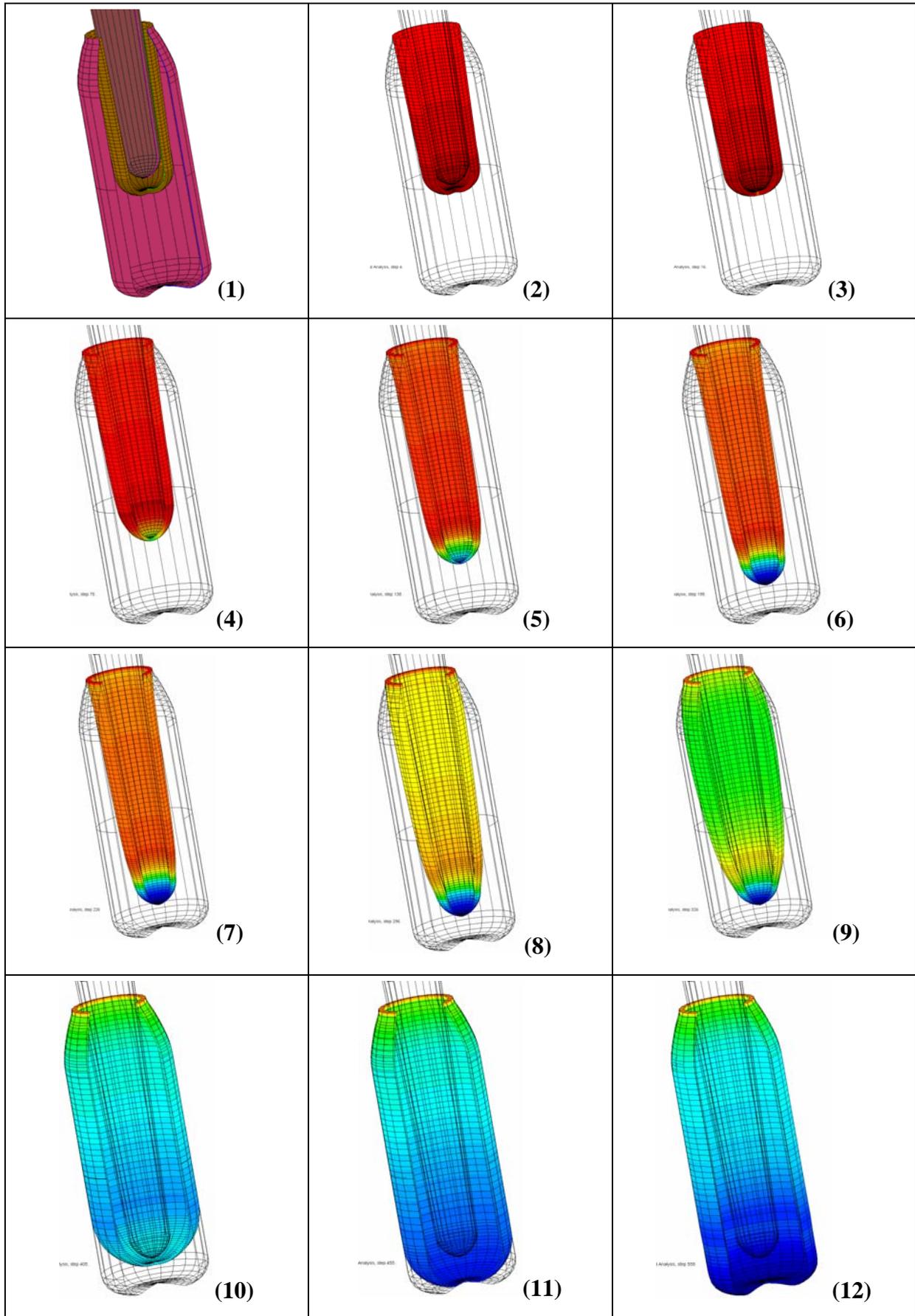


Tableau 5-2 Simulation du bi étirage d'un biberon

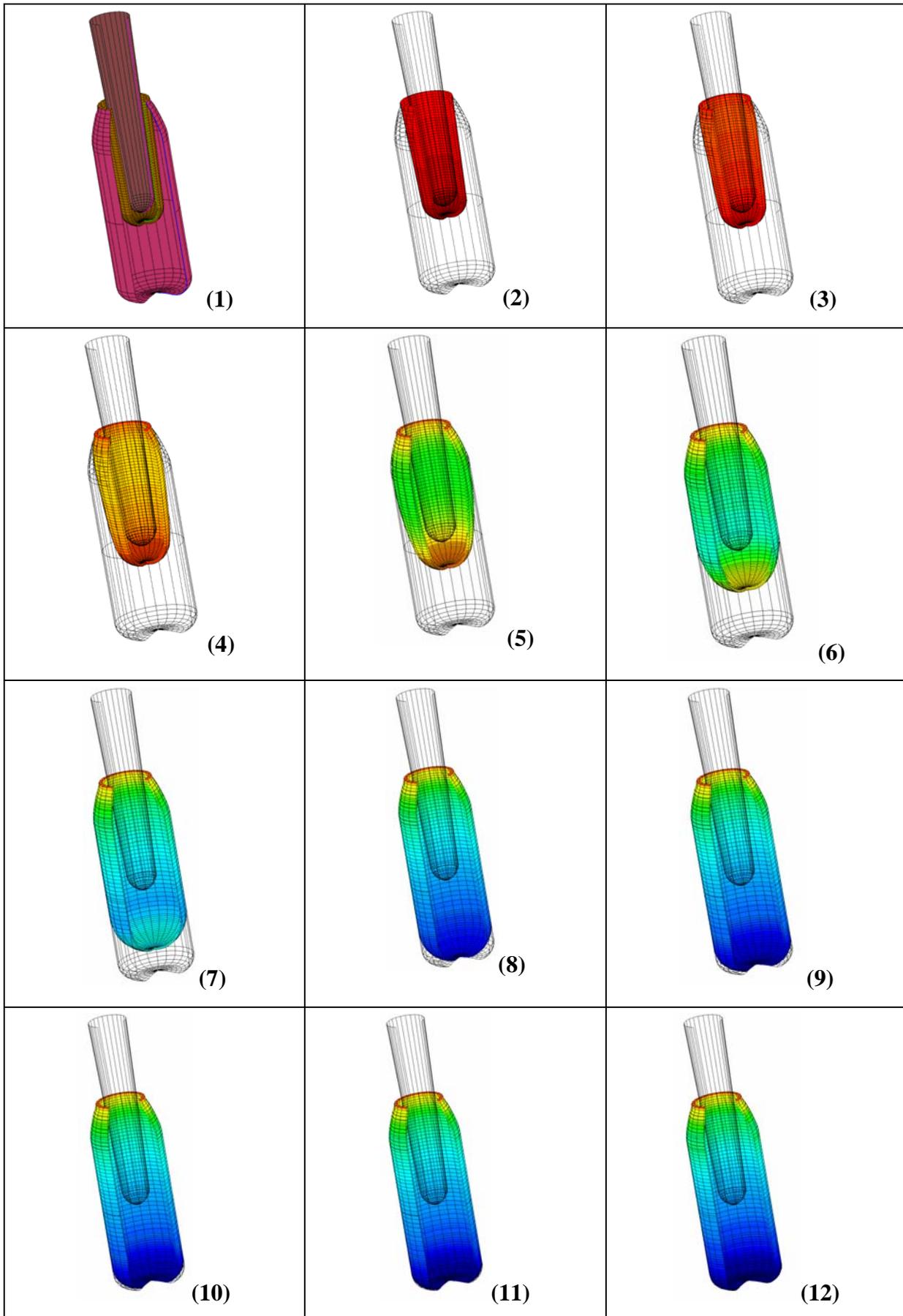


Tableau 5-3 Simulation du soufflage (sans étirage) d'un biberon

5.1.4. Soufflage d'une bouteille

Cet exemple a été traité par Michaeli [Mic92] en éléments solides axisymétriques Q4. Il s'agit d'un soufflage d'une bouteille en polypropylène à partir d'une paraison d'épaisseur constante $h^0 = 2.9\text{ mm}$. La géométrie de la paraison et du moule est illustrée sur la (Figure 5-25). Les constantes du matériau pour un modèle de Mooney Rivlin sont $C1=0.4257\text{ Mpa}$ et $C2=0.0683\text{ Mpa}$. La paraison est fixée dans les deux directions r et z à une de ses extrémités et libre suivant r dans l'autre extrémité. La bouteille est discrétisée par 150 éléments SFRQ-Axi et 150 éléments linéaires de pression et 32 éléments rigides.

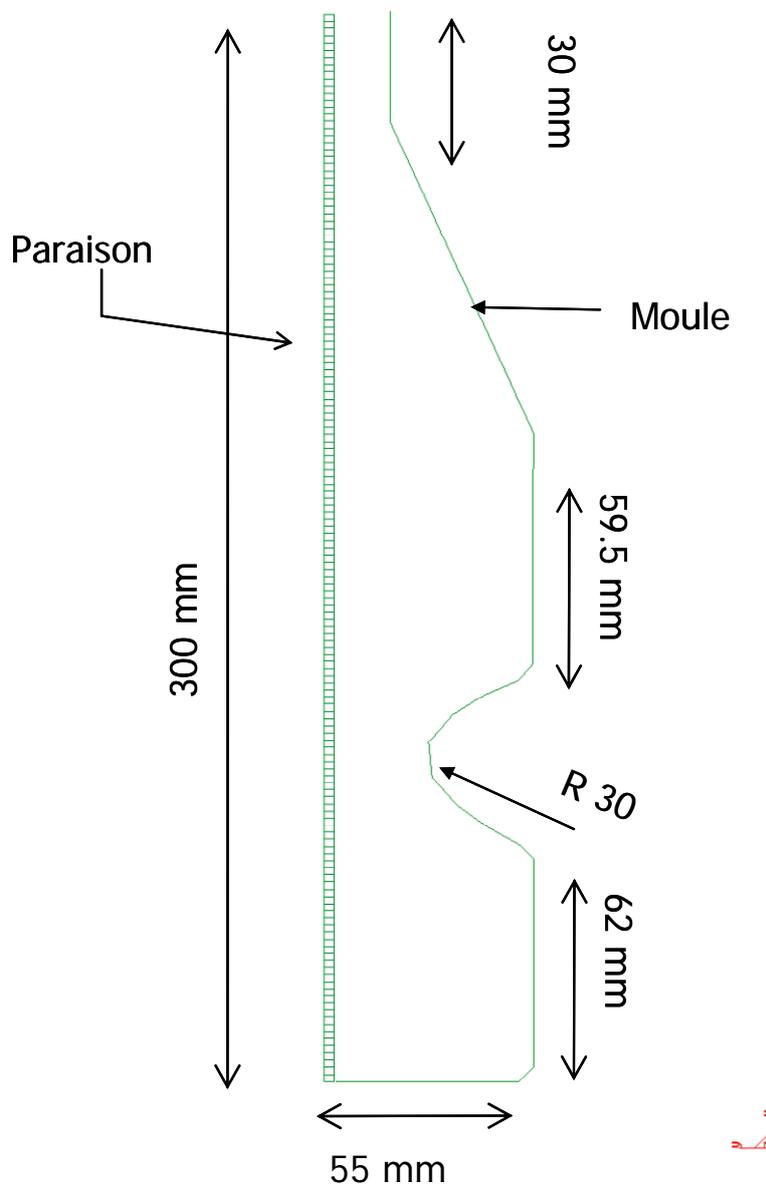


Figure 5-25 Géométrie de la paraison et du moule

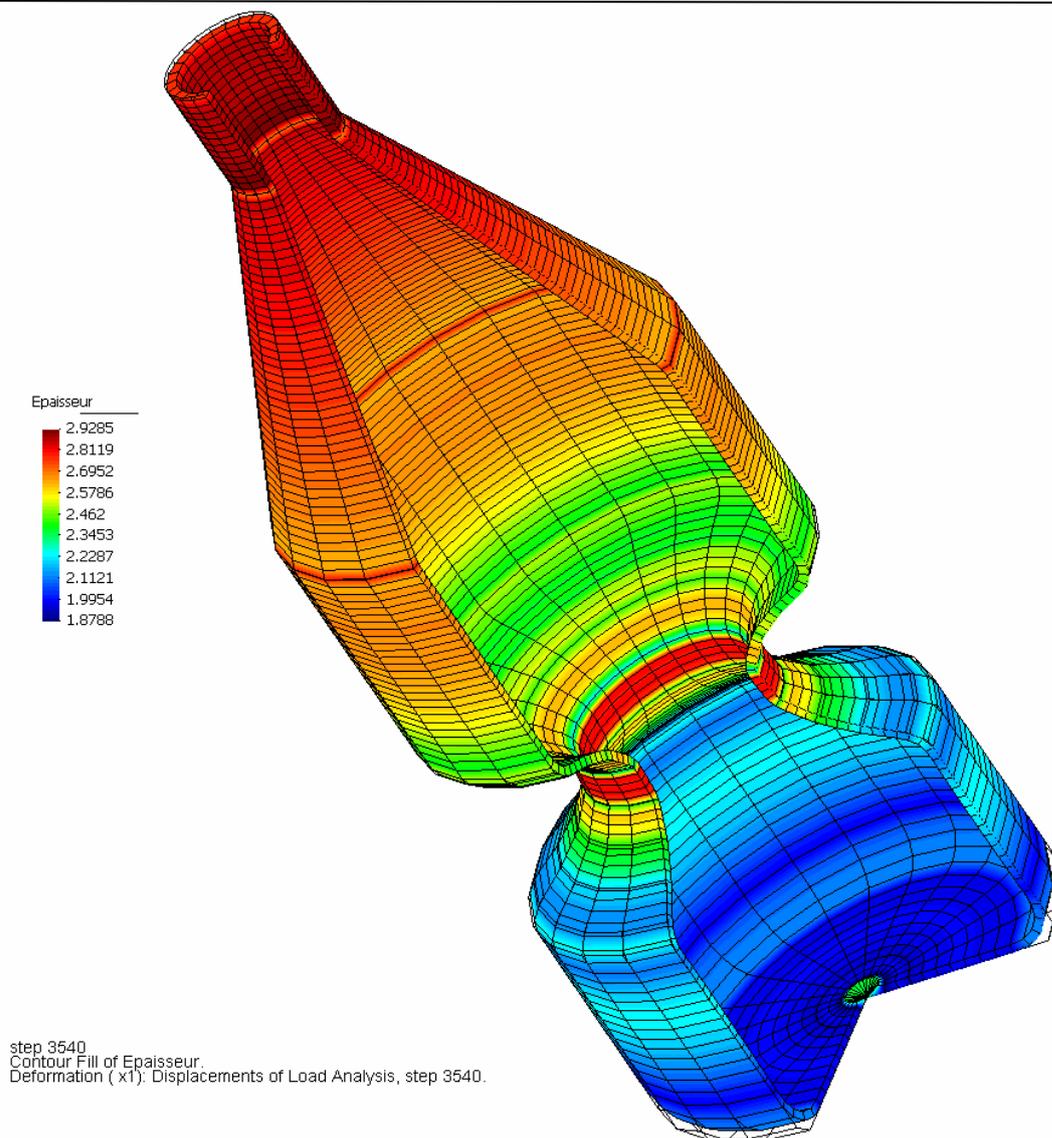


Figure 5-26 Répartition des épaisseurs sur la bouteille soufflée

5.1.5. Emmanchement d'un cylindre bloc

Ce problème consiste à étudier la déformation d'un cylindre bloc en caoutchouc subissant un emmanchement forcé entre un axe et une douille coaxiaux (voir Figure 5-27). Les deux pièces sont en métal et le montage est lubrifié. Cet exemple est traité par Chen [Che97b] pour étudier le déplacement axial de la pièce en caoutchouc. Les propriétés du matériau néo-Hookeen donnés par Tseng [Tse87] sont $C_1 = 2.298 \text{ MPa}$ et le module d'incompressibilité (Bulk modulus) $k = 10^3 \text{ MPa}$. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la structure est modélisé.

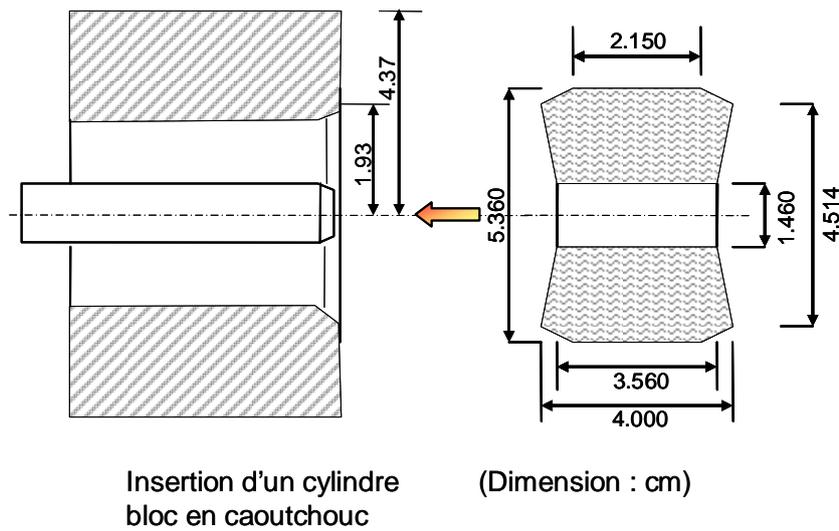


Figure 5-27 Montage du cylindre Bloc

Etude du cas de mise en forme par écrasement vertical

Nous avons effectué le test avec un chargement en déplacement de 50 pas de 0.15 cm. Le calcul a été fait avec un maillage non-structuré (Figure 5-28) et un maillage structuré (Figure 5-29)

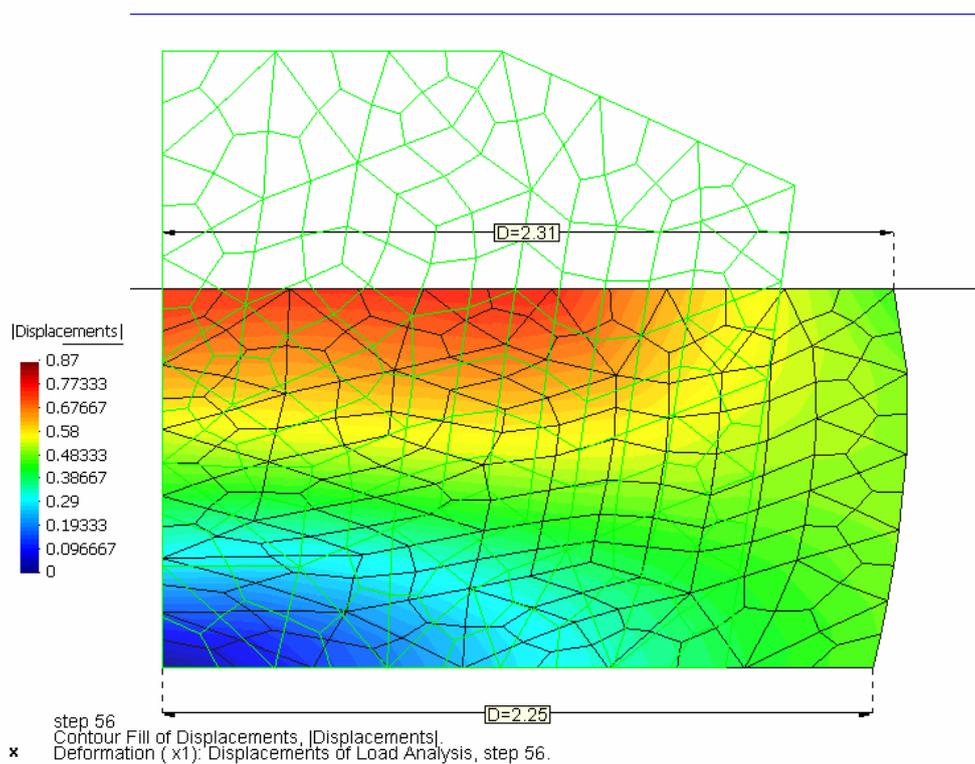


Figure 5-28 Déplacement axial le long du rayon intérieur (Maillage non structuré)

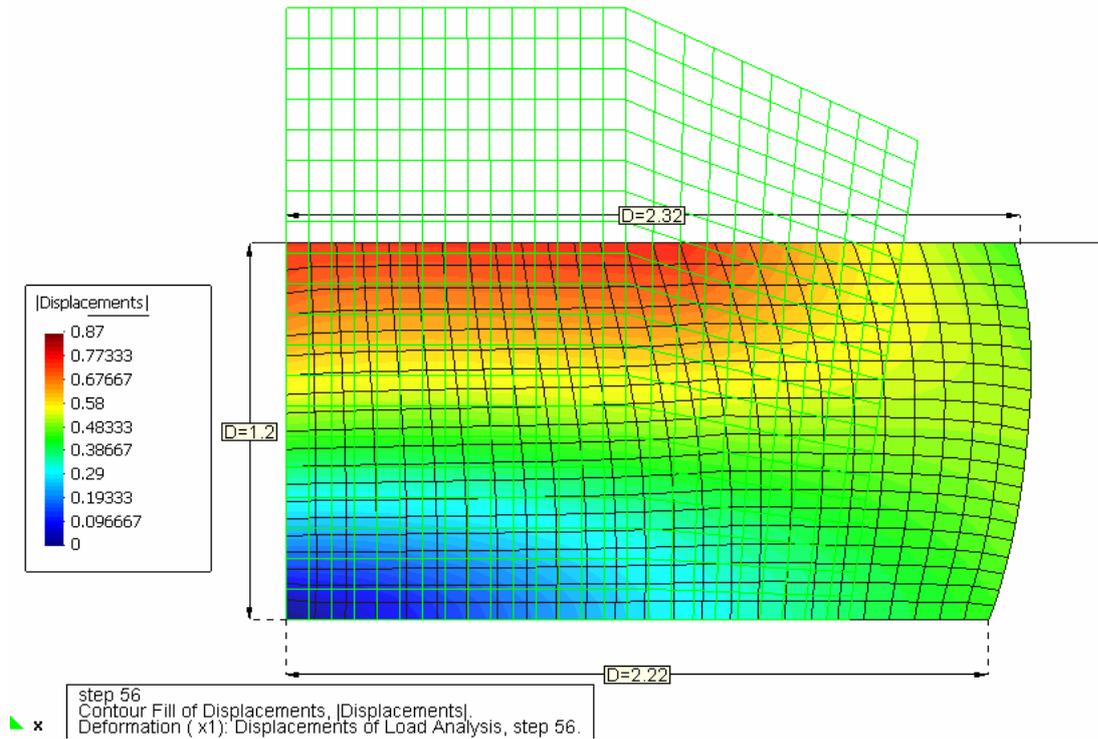


Figure 5-29 Déplacement axial le long du rayon intérieur (Maillage structuré)

Chen propose une solution à partir d’un maillage raffiné de 725 nœuds et 672 éléments Q4. La solution trouvée de 2.25 cm est calculée à partir d’un code commercial. Nous proposons de prendre comme solution de référence celle obtenue en utilisant l’élément quadratique (plus riche) à 8 nœuds Q8-Axi. Celle-ci, d’une valeur égale à 2.2339cm, est obtenue avec un maillage plus fin (35x25 éléments). Une série de tests est effectuée sur les éléments finis Q4-Axi, Q8-Axi et SFRQ-Axi. Les trois éléments ont été implémentés sur notre code de calcul « Model’Pack Forming ». Un récapitulatif des résultats est donné sur la Tableau 5-4. Les maillages 8x5éléments (Figure 5-30) ne sont pas des tests représentatifs pour la simple raison que la plaque ne pousse pas tous les nœuds en fin de test.

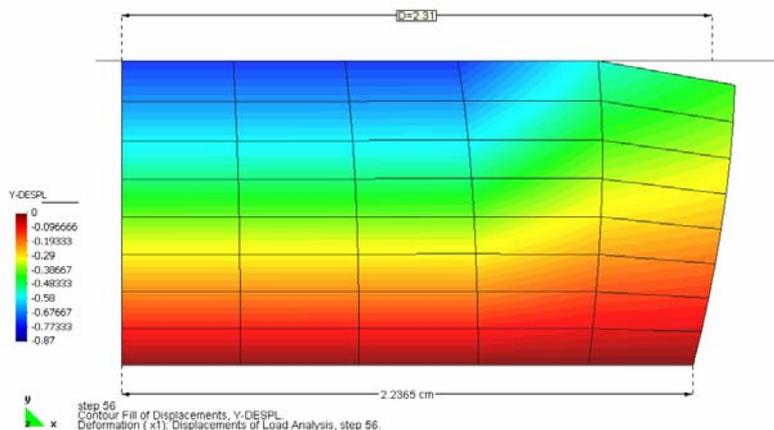


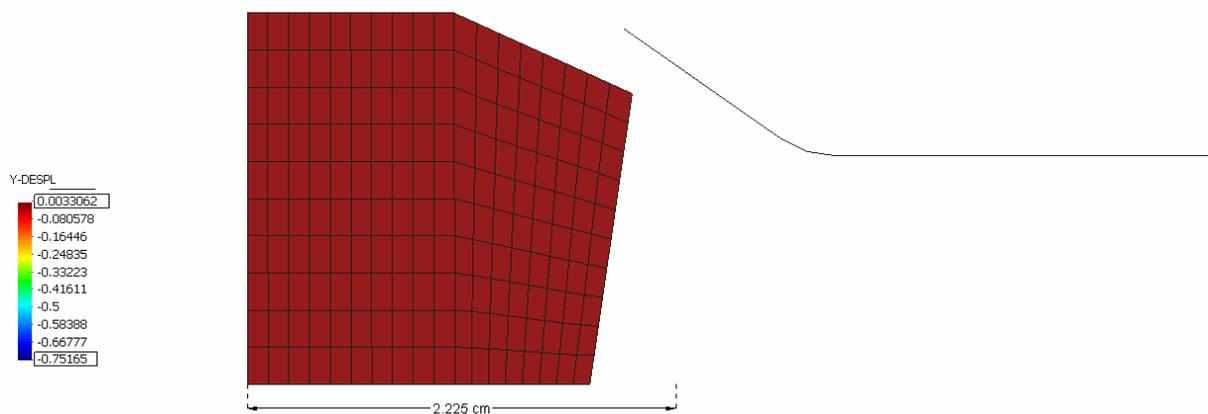
Figure 5-30 Maillage 8x5 éléments Q4-Axi

Type d'Elémen	Maillage (éléments)	Solution (cm)	Temps (s) (%)	
Q4-Axi	8x5	2.2365	2.86	
	18x10	2.234	16.17	98,44
	25x20	2.2450	21.42	97,94
	50x40	2.2432	190.08	81,74
SFRQ-Axi	8x5	2.2108	1.8	99,83
	18x10	2.2263	10.22	99,02
	25x20	2.2230	29.54	97,16
	50x40	2.2354	248.5	76,12
Q8-Axi	18x10	2.2372	32.20	96,91
	25x20	2.2356	133.97	87,13
Q8 référence	35x25	2.2339	1040.73	

Tableau 5-4 Temps CPU en fonction des différents types éléments finis

Etude du cas de mise en forme par emmanchement forcé (avancement de la plaque rigide)

Le même test est effectué cette fois-ci avec les mêmes données que précédemment. La différence réside dans la manière d'imposer le chargement. En effet, c'est la plaque rigide qui, en avançant dans la direction de l'axe, simule un emmanchement forcé du cylindre bloc. Les résultats des étapes successives d'écrasement sont reportés sur la Figure 5-31. Pour un maillage de 18x10 éléments SFRQ-Axi, nous obtenons presque le même résultat d'écrasement à 2.225 cm que pour le cas a.



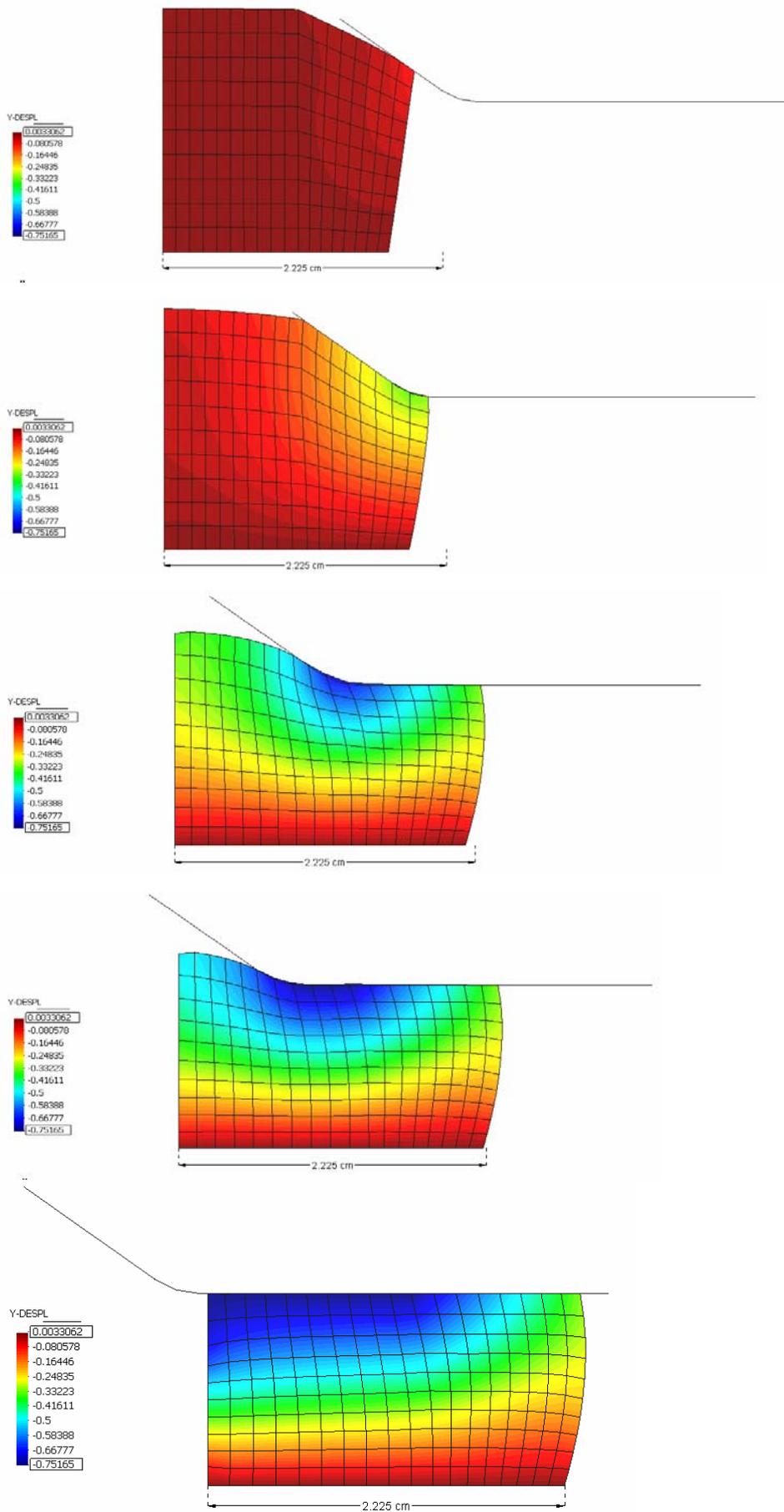


Figure 5-31 Simulation du montage forcé du cylindre bloc

6 Chapitre 6

6.1. Élément SFRH8 solide tridimensionnelle (FLT)

Nous présentons les principales équations utilisées pour l'implémentation de la loi de comportement dans un élément solide tridimensionnel. La formulation est du type Lagrangienne Totale. L'élément fini formulé est un modèle déplacement enrichi basé sur un concept cinématique de rotation d'une fibre spatiale [Aya02]. L'élément présenté est labellisé « SFRH8 » (Space Fibre Rotation Hexaèdre 8 nodes).

6.1.1. Approximation géométrique

Le vecteur position d'un point quelconque dans le plan méridien exprimé dans une base cartésien est donné par :

$$\vec{x}_p = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (6.1)$$

$$\text{Avec} \quad x = \sum_{i=1}^{Noeuds} N_i x_i ; \quad y = \sum_{i=1}^{Noeuds} N_i y_i ; \quad z = \sum_{i=1}^{Noeuds} N_i z_i \quad (6.2)$$

6.1.2. Formulation du modèle déplacement

Le champ de déplacements d'un point quelconque p(x,y,z) du volume est défini par l'approximation suivante :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \vec{\omega}_i \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (6.3)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix}_i \wedge \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Le terme $\vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_i)$ (6.3) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} \theta_{y_i}(z - z_i) - \theta_{z_i}(y - y_i) \\ \theta_{z_i}(x - x_i) - \theta_{x_i}(z - z_i) \\ \theta_{x_i}(y - y_i) - \theta_{y_i}(x - x_i) \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Où $(\vec{r} - \vec{r}_i)$ est le vecteur position de la fibre reliant le point p au nœud i (Figure 6-1)

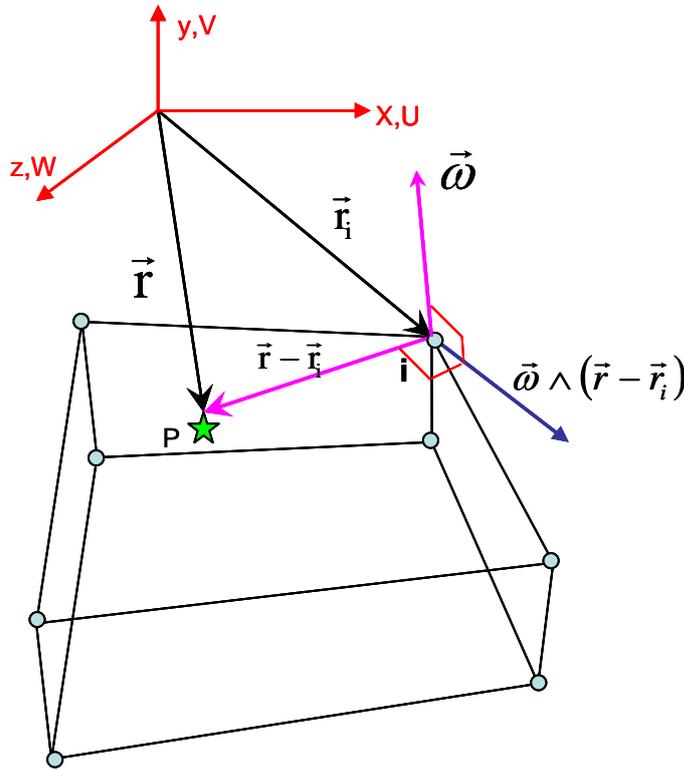


Figure 6-1 Cinématique de la fibre rotative

Les composantes $\langle U, V, W \rangle$ (6.5) s'écrivent finalement ainsi :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \\ W_8 \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & (z-z_1) & -(y-y_1) & \dots & 0 & (z-z_8) & -(y-y_8) \\ -(z-z_1) & 0 & (x-x_1) & \dots & -(z-z_8) & 0 & (x-x_8) \\ (y-y_1) & -(x-x_1) & 0 & \dots & (y-y_8) & -(x-x_8) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ \vdots \\ \theta_{x_8} \\ \theta_{y_8} \\ \theta_{z_8} \end{Bmatrix}$$

Les fonctions de forme et leurs dérivées sont celles d'un élément classique H8 :

On pose :

$$a_1 = 1 + \xi; \quad a_2 = 1 - \xi; \quad b_1 = 1 + \eta; \quad b_2 = 1 - \eta; \quad c_1 = 1 + \zeta; \quad c_2 = 1 - \zeta$$

	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
1	$\frac{1}{8} a_2 b_2 c_2$	$\frac{1}{8} (-b_2 c_2)$	$\frac{1}{8} (-a_2 c_2)$	$\frac{1}{8} (-a_2 b_2)$
2	$\frac{1}{8} a_1 b_2 c_2$	$\frac{1}{8} (b_2 c_2)$	$\frac{1}{8} (-a_1 c_2)$	$\frac{1}{8} (-a_1 b_2)$
3	$\frac{1}{8} a_1 b_1 c_2$	$\frac{1}{8} (b_1 c_2)$	$\frac{1}{8} (a_1 c_2)$	$\frac{1}{8} (-a_1 b_1)$
4	$\frac{1}{8} a_2 b_1 c_2$	$\frac{1}{8} (-b_1 c_2)$	$\frac{1}{8} (a_2 c_2)$	$\frac{1}{8} (-a_2 b_1)$
5	$\frac{1}{8} a_2 b_2 c_1$	$\frac{1}{8} (-b_2 c_1)$	$\frac{1}{8} (-a_2 c_1)$	$\frac{1}{8} (a_2 b_2)$
6	$\frac{1}{8} a_1 b_2 c_1$	$\frac{1}{8} (b_2 c_1)$	$\frac{1}{8} (-a_1 c_1)$	$\frac{1}{8} (a_1 b_2)$
7	$\frac{1}{8} a_1 b_1 c_1$	$\frac{1}{8} (b_1 c_1)$	$\frac{1}{8} (a_1 c_1)$	$\frac{1}{8} (a_1 b_1)$
8	$\frac{1}{8} a_2 b_1 c_1$	$\frac{1}{8} (-b_1 c_1)$	$\frac{1}{8} (a_2 c_1)$	$\frac{1}{8} (a_2 b_1)$
Tableau 6-1 Fonction de forme et leurs drivées pour un élément H8				

Les dds additionnels $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ associés à la rotation spatiale de la fibre ip auront pour conséquence un enrichissement du champs des déformations, rendant ainsi l'éléments final précis sans augmenter le nombre de nœuds. Un schéma à 2x2x2 points de gauss suffit pour obtenir une intégration cohérente de la matrice de rigidité tangente.

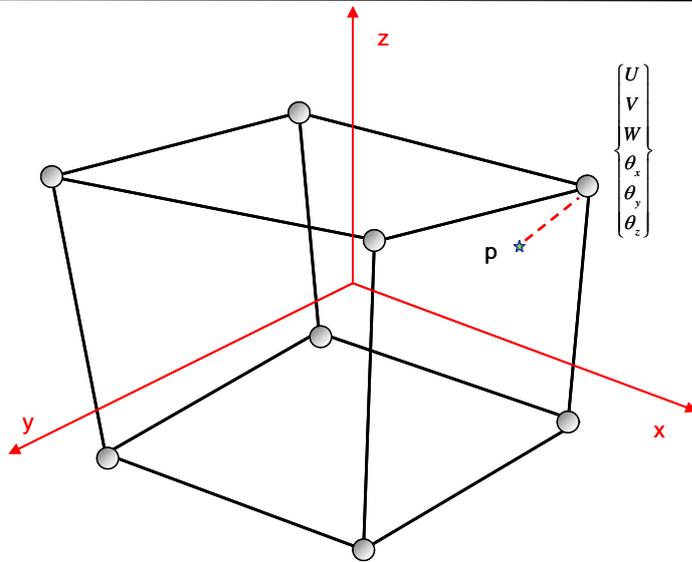


Figure 6-2 Elément tridimensionnel SFRH8

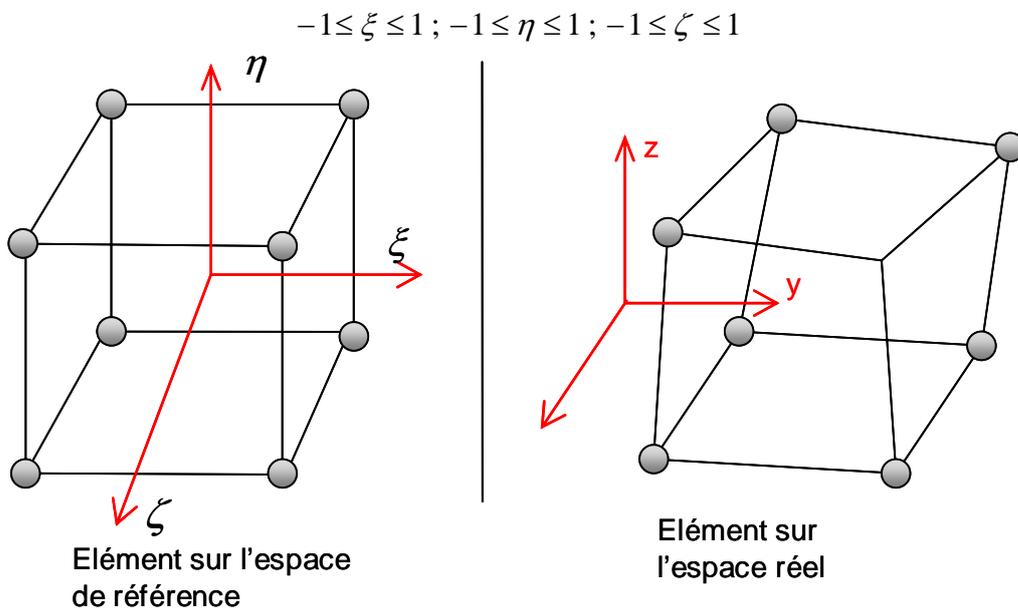


Figure 6-3 Espace réel et référence de l'Elément SFRH8

$$\begin{Bmatrix} U_{,x} \\ U_{,y} \\ U_{,z} \\ V_{,x} \\ V_{,y} \\ V_{,z} \\ W_{,x} \\ W_{,y} \\ W_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{8,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{8,y} \\ N_{1,z} & \dots & N_{8,z} \\ & N_{1,x} & \dots & N_{8,x} \\ & N_{1,y} & \dots & N_{8,y} \\ & N_{1,z} & \dots & N_{8,z} \\ & & N_{1,x} & \dots & N_{8,x} \\ & & N_{1,y} & \dots & N_{8,y} \\ & & N_{1,z} & \dots & N_{8,z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \\ W_8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x}(z-z_1) & -N_{1,x}(y-y_1) & \dots & 0 & N_{8,x}(z-z_8) & -N_{8,x}(y-y_8) \\ 0 & N_{1,y}(z-z_1) & -N_{1,y}(y-y_1)-N_1 & \dots & 0 & N_{8,y}(z-z_8) & -N_{8,y}(y-y_8)-N_8 \\ 0 & N_{1,z}(z-z_1)+N_1 & -N_{1,z}(y-y_1) & \dots & 0 & N_{8,z}(z-z_1)+N_8 & -N_{8,z}(y-y_8) \\ -N_{1,x}(z-z_1) & 0 & N_{1,x}(x-x_1)+N_1 & \dots & -N_{8,x}(z-z_8) & 0 & N_{8,x}(x-x_8)+N_8 \\ -N_{1,y}(z-z_1) & 0 & N_{1,y}(x-x_1) & \dots & -N_{8,y}(z-z_8) & 0 & N_{8,y}(x-x_8) \\ -N_{1,z}(z-z_1)-N_1 & 0 & N_{1,z}(x-x_1) & \dots & -N_{8,z}(z-z_8)-N_8 & 0 & N_{8,z}(x-x_8) \\ N_{1,x}(y-y_1) & -N_{1,x}(x-x_1)-N_1 & 0 & \dots & N_{8,x}(y-y_8) & -N_{8,x}(x-x_8)-N_8 & 0 \\ N_{1,y}(y-y_1)+N_1 & -N_{1,y}(x-x_1) & 0 & \dots & N_{8,y}(y-y_8)+N_8 & -N_{8,y}(x-x_8) & 0 \\ N_{1,z}(y-y_1) & -N_{1,z}(x-x_1) & 0 & \dots & N_{8,z}(y-y_8) & -N_{8,z}(x-x_8) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ \vdots \\ \theta_{x_8} \\ \theta_{y_8} \\ \theta_{z_8} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

6.1.3. Déformations de Green Lagrange

Les tenseurs gradients de déformation [F] (2.4) et de Cauchy Green Droit [C] (2.8) s'écrivent dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1+U_{,x} & U_{,y} & U_{,z} \\ V_{,x} & 1+V_{,y} & V_{,z} \\ W_{,x} & W_{,y} & 1+W_{,z} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$C = [F^T][F] \quad (6.9)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (1+U_{,x})^2 + V_{,x}^2 + W_{,x}^2 & (1+U_{,x})U_{,y} + (1+V_{,y})V_{,x} + W_{,x}W_{,y} \\ (1+U_{,x})U_{,y} + (1+V_{,y})V_{,x} + W_{,x}W_{,y} & U_{,y}^2 + (1+V_{,y})^2 + W_{,y}^2 \\ (1+U_{,x})U_{,z} + V_{,x}V_{,z} + (1+W_{,z})W_{,x} & U_{,y}U_{,z} + (1+V_{,y})V_{,z} + W_{,y}(1+W_{,z}) \\ (1+U_{,x})U_{,z} + V_{,x}V_{,z} + (1+W_{,z})W_{,x} & \\ U_{,y}U_{,z} + (1+V_{,y})V_{,z} + W_{,y}(1+W_{,z}) & \\ U_{,z}^2 + V_{,z}^2 + (1+W_{,z})^2 & \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Les trois invariant de [C] sont :

$$\begin{aligned}
I_1 &= C_{11} + C_{22} + C_{33} \\
I_2 &= C_{11}C_{22} + C_{22}C_{33} + C_{33}C_{11} - C_{12}^2 - C_{23}^2 - C_{13}^2 \\
I_3 &= C_{11}C_{22}C_{33} + 2C_{12}C_{23}C_{13} - C_{11}C_{23}^2 - C_{22}C_{13}^2 - C_{33}C_{12}^2
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Le tenseur de Green Lagrange est défini par :

$$[E] = \frac{1}{2}([C] - [I]) \tag{6.13}$$

6.1.4. Principe du minimum d'énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale est définie par :

$$\Pi = \sum_k (\Pi_{\text{int}}^k - \Pi_{\text{ext}}^k) \tag{6.14}$$

Π_{int}^k est l'énergie potentielle élémentaire interne. Elle est définie par :

$$\Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) dV^0 \tag{6.15}$$

W représente l'énergie de déformation par unité de volume non déformé, accumulée dans la structure pendant la déformation :

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W_d(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_s(J) \tag{6.16}$$

Pour une loi de Mooney-Rivlin [Riv48], W est donné par Crisfield [CriV2]:

$$W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = C1(\bar{I}_1 - 3) + C2(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{2}\kappa(J - 1)^2 \tag{6.17}$$

Où \bar{I}_1 et \bar{I}_2 représentent les invariants modifiés et sont déjà donnés par les expressions (4.20).

La variation de l'énergie potentielle externe Π_{ext}^k

$$\delta \Pi_{\text{ext}}^k = \iint_{S^0} \langle \delta u \rangle \{p\} dS^0 \tag{6.18}$$

$\langle \delta u \rangle$: Déplacement dans la base locale $\langle \vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n} \rangle$,

$\{p\}$: représente les forces de pression réparties

6.1.4.1. Vecteur résidu

$$\delta \Pi = \sum_k (\delta \Pi_{\text{int}}^k - \delta \Pi_{\text{ext}}^k) = 0 \tag{6.19}$$

Où $\delta \Pi_{\text{int}}^k$ représente la première variation de l'énergie élémentaire interne :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} \delta W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) dV^0 \quad (6.20)$$

Nous obtenons ainsi le vecteur des forces internes :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \langle \delta U_n \rangle \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \{ \bar{r} \} \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (6.21)$$

$$\langle \delta U_n \rangle = \left\langle \delta U_1 \quad \delta V_1 \delta W_1 \quad \delta \theta_{,x1} \delta \theta_{,y1} \delta \theta_{,z1} \quad \dots \quad \delta U_8 \quad \delta V_8 \delta W_8 \quad \delta \theta_{,x8} \delta \theta_{,y8} \delta \theta_{,z8} \right\rangle$$

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \langle \delta U \rangle \{ \mathbf{f}_{\text{int}}^k \} \quad (6.22)$$

Pour une loi de Mooney-Rivlin :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} (A_1 \delta \bar{I}_1 + A_2 \delta \bar{I}_2 + A_3 \delta \bar{I}_3) dV^0 \quad (6.23)$$

Avec :

$$A_1 = C_1 I_3^{-\frac{1}{3}} \quad ; \quad A_2 = C_2 I_3^{-\frac{2}{3}} \quad ; \quad A_3 = -\frac{1}{3} C_1 I_1 I_3^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} C_2 I_2 I_3^{-\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} \frac{\kappa(J-1)}{J} \quad (6.24)$$

$$\text{Et} \quad J = \sqrt{I_3} \quad (6.25)$$

$\delta \bar{I}_1$, $\delta \bar{I}_2$ et $\delta \bar{I}_3$ représentent les variations des invariants du tenseur droit (6.11).

$$\begin{aligned} \delta \bar{I}_1 &= \text{tr}(\delta [C]) = \delta C_{11} + \delta C_{22} + \delta C_{33} \\ \delta \bar{I}_2 &= (C_{22} + C_{33}) \delta C_{11} + (C_{11} + C_{33}) \delta C_{22} + (C_{11} + C_{22}) \delta C_{33} - 2C_{12} \delta C_{12} - 2C_{13} \delta C_{13} - 2C_{23} \delta C_{23} \\ \delta \bar{I}_3 &= (C_{22} C_{33} - C_{23}^2) \delta C_{11} + (C_{11} C_{33} - C_{13}^2) \delta C_{22} + (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) \delta C_{33} + \\ & 2(C_{13} C_{23} - C_{12} C_{33}) + 2(C_{12} C_{23} - C_{22} C_{13}) \delta C_{13} + 2(C_{12} C_{13} - C_{11} C_{23}) \delta C_{23} \end{aligned} \quad (6.26)$$

En injectant les équations (6.26) et (6.24) dans (6.27), l'expression du potentiel élémentaire interne de déformation devient :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} (B_1 \delta C_{11} + B_2 \delta C_{11} + B_3 \delta C_{33} + B_4 \delta C_{12} + B_5 \delta C_{13} + B_6 \delta C_{23}) dV^0 \quad (6.27)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 + (C_{22} + C_{33})A_2 + (C_{22}C_{33} - C_{23}^2)A_3 \\
B_2 &= A_1 + (C_{11} + C_{33})A_2 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2)A_3 \\
B_3 &= A_1 + (C_{11} + C_{22})A_2 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)A_3 \\
B_4 &= -2(C_{12}A_2 + (C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23})A_3) \\
B_5 &= -2(C_{13}A_2 + (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})A_3) \\
B_6 &= -2(C_{23}A_2 + (C_{11}C_{23} - C_{12}C_{13})A_3)
\end{aligned} \tag{6.28}$$

La variation du tenseur de Cauchy-Green droit δC conduit à :

$$\begin{aligned}
\delta C_{11} &= 2(1+U_{,x})\delta U_{,x} + 2V_{,x}\delta V_{,x} + 2W_{,x}\delta W_{,x} \\
\delta C_{22} &= 2U_{,y}\delta U_{,y} + 2(1+V_{,y})\delta V_{,y} + 2W_{,y}\delta W_{,y} \\
\delta C_{33} &= 2U_{,z}\delta U_{,z} + 2V_{,z}\delta V_{,z} + 2(1+W_{,z})\delta W_{,z} \\
\delta C_{12} &= U_{,y}\delta U_{,x} + (1+U_{,x})\delta U_{,y} + (1+V_{,y})\delta V_{,x} + V_{,x}\delta V_{,y} + W_{,y}\delta W_{,x} + W_{,x}\delta W_{,y} \\
\delta C_{13} &= U_{,z}\delta U_{,x} + (1+U_{,x})\delta U_{,z} + V_{,z}\delta V_{,x} + V_{,x}\delta V_{,z} + (1+W_{,z})\delta W_{,x} + W_{,x}\delta W_{,z} \\
\delta C_{23} &= U_{,z}\delta U_{,y} + U_{,y}\delta U_{,z} + V_{,z}\delta V_{,y} + (1+V_{,y})\delta V_{,z} + (1+W_{,z})\delta W_{,y} + W_{,y}\delta W_{,z}
\end{aligned} \tag{6.29}$$

En injectant l'équation (6.11) dans (6.27), l'expression du potentiel élémentaire interne de déformation devient :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \int_{V^0} \left(\begin{array}{l} D_1 \delta U_{,x} + D_2 \delta U_{,y} + D_3 \delta W_{,z} + D_4 \delta U_{,y} + D_5 \delta U_{,z} \\ + D_6 \delta V_{,x} + D_7 \delta V_{,z} + D_8 \delta W_{,x} + D_9 \delta W_{,y} \end{array} \right) dV^0 \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}
\delta U_{,x} &= N_{i,x} \delta U_i + N_{i,x} (\delta \theta_{y_i} (z - z_i) - \delta \theta_{z_i} (y - y_i)) \\
\delta V_{,y} &= N_{i,y} \delta V_i + N_{i,y} (\delta \theta_{z_i} (x - x_i) - \delta \theta_{x_i} (z - z_i)) \\
\delta W_{,z} &= N_{i,z} \delta W_i + N_{i,z} (\delta \theta_{x_i} (y - y_i) - \delta \theta_{y_i} (x - x_i)) \\
\delta U_{,y} &= N_{i,y} \delta U_i + N_{i,y} (\delta \theta_{y_i} (z - z_i) - \delta \theta_{z_i} (y - y_i)) - N_i \delta \theta_{z_i} \\
\text{Avec } \delta U_{,z} &= N_{i,z} \delta U_i + N_{i,z} (\delta \theta_{y_i} (z - z_i) - \delta \theta_{z_i} (y - y_i)) + N_i \delta \theta_{y_i} \\
\delta V_{,x} &= N_{i,x} \delta V_i + N_{i,x} (\delta \theta_{z_i} (x - x_i) - \delta \theta_{x_i} (z - z_i)) + N_i \delta \theta_{z_i} \\
\delta V_{,z} &= N_{i,z} \delta V_i + N_{i,z} (\delta \theta_{z_i} (x - x_i) - \delta \theta_{x_i} (z - z_i)) - N_i \delta \theta_{x_i} \\
\delta W_{,x} &= N_{i,x} \delta W_i + N_{i,x} (\delta \theta_{x_i} (y - y_i) - \delta \theta_{y_i} (x - x_i)) - N_i \delta \theta_{y_i} \\
\delta W_{,y} &= N_{i,y} \delta W_i + N_{i,y} (\delta \theta_{x_i} (y - y_i) - \delta \theta_{y_i} (x - x_i)) + N_i \delta \theta_{x_i}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Et :

$$\begin{aligned}
D_1 &= 2B_1(1+U_{,x}) + B_4U_{,y} + B_5U_{,z} \\
D_2 &= B_4V_{,x} + 2B_2(1+V_{,y}) + B_6V_{,z} \\
D_3 &= 2B_3(1+W_{,z}) + B_{5,x}W_{,x} + B_6W_{,y} \\
D_4 &= B_6U_{,z} + 2B_2U_{,y} + B_4(1+U_{,x}) \\
D_5 &= 2B_3U_{,z} + B_5(1+U_{,x}) + B_6U_{,y} \\
D_6 &= 2B_1V_{,x} + B_5V_{,z} + B_4(1+V_{,y}) \\
D_7 &= 2B_3V_{,z} + B_5V_{,x} + B_6(1+V_{,y}) \\
D_8 &= B_5(1+W_{,z}) + 2B_1W_{,x} + B_4W_{,y} \\
D_9 &= B_4W_{,x} + 2B_2W_{,y} + B_6(1+W_{,z})
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Ce qui donne :

$$\delta \prod_{\text{int}}^k = \int_{V^0} \sum_{i=1}^{\text{Noeuds}} (f_1 \delta U + f_2 \delta V + f_3 \delta W + f_4 \delta \theta_x + f_5 \delta \theta_y + f_6 \delta \theta_z) dV^0 \tag{6.33}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
f_1 &= 2(1+U_{,x})N_{,x}B_1 + 2U_{,y}B_2 + 2U_{,z}N_{i,z}B_3 + (U_{,y}N_{,x} + (1+U_{,x})N_{,y})B_4 \\
&+ (U_{,z}N_{i,x} + (1+U_{,x})N_{i,z})B_5 + (U_{,z}N_{i,y} + U_{,y}N_{i,z})B_6 \\
f_2 &= 2V_{,x}N_{i,x}B_1 + 2(1+V_{,y})N_{,y}B_2 + 2V_{,z}N_{i,z}B_3 + (V_{,x}N_{i,y} + (1+V_{,y})N_{i,x})B_4 \\
&+ (V_{,x}N_{,z} + V_{,z}N_{i,x})B_5 + ((1+V_{,y})N_{i,z} + V_{,z}N_{i,y})B_6 \\
f_3 &= 2W_{,x}N_{,x}B_1 + 2W_{,y}N_{i,y}B_2 + 2(1+W_{,z})N_{,z}B_3 + (W_{,x}N_{i,y} + W_{,y}N_{i,x})B_4 \\
&+ (W_{,x}N_{i,x} + (1+W_{,z})N_{i,x})B_5 + (W_{,y}N_{,z} + (1+W_{,z})N_{i,y})B_6
\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & (2V_{,x}N_{,x}(-z+z_i)+2W_{,x}N_{i,x}(y-y_i))B_1 + (2W_{,y}(N_{i,y}(y-y_i)+N_i)+2(1+V_{,y})N_{,y}(-z+z_i))B_2 \\
& + (2(1+W_{,z})N_{i,z}(y-y_i)+2V_{,z}(N_{i,z}(-z+z_i)-N_i))B_3 + \\
& (W_{,x}(N_{i,y}(y-y_i)+N_i)+W_{,y}N_{i,x}(y-y_i)+V_{,x}N_{i,y}(-z+z_i)+(1+V_{,y})N_{i,x}(-z+z_i))B_4 + \\
& ((1+W_{,z})N_{i,x}(y-y_i)+W_{,x}N_{i,z}(y-y_i)+V_{,z}N_{i,x}(-z+z_i)+V_{,x}(N_{i,z}(-z+z_i)-N_i))B_5 + \\
& ((1+W_{,z})(N_{i,y}(y-y_i)+N_i)+W_{,y}N_{i,z}(y-y_i)+V_{,z}N_{i,y}(-z+z_i)+(1+V_{,y})(N_{i,z}(-z+z_i)-N_i))B_6 \\
\\
f_5 = & (2W_{,x}(-N_{i,x}(x-x_i)-N_i)+2(1+U_{,x})N_{,x}(z-z_i))B_1 + (2U_{,y}N_{i,y}(z-z_i)-2W_{,y}N_{,y}(x-x_i))B_2 \\
& + (-2(1+W_{,z})N_{i,z}(x-x_i)+2U_{,z}(N_{i,z}(z-z_i)+N_i))B_3 \\
& + (W_{,y}(-N_{i,x}(x-x_i)-N_i)-W_{,x}N_{i,y}(x-x_i)+(1+U_{,x})N_{i,y}(z-z_i)+U_{,y}N_{i,x}(z-z_i))B_4 \\
& + ((1+W_{,z})(-N_{i,x}(x-x_i)-N_i)+U_{,z}N_{i,z}(z-z_i)+(1+U_{,x})(N_{i,z}(z-z_i)+N_i)-W_{,x}N_{i,z}(x-x_i))B_5 \\
& + (-(1+W_{,z})N_{i,y}(x-x_i)+U_{,y}(N_{i,z}(z-z_i)+N_i)-W_{,y}N_{i,z}(x-x_i)+U_{,z}N_{i,y}(z-z_i))B_6 \\
\\
f_6 = & (-2(1+U_{,x})N_{i,x}(y-y_i)+2V_{,x}(N_{i,x}(x-x_i)+N_i))B_1 + (2U_{,y}(-N_{i,y}(y-y_i)-N_i)+2(1+V_{,y})N_{i,y}(x-x_i))B_2 \\
& + (-2U_{,z}N_{i,z}(y-y_i)+2V_{,z}N_{i,z}(x-x_i))B_3 \\
& + ((1+U_{,x})(-N_{i,y}(y-y_i)-N_i)-U_{,y}N_{i,x}(y-y_i)+(1+V_{,y})(N_{i,x}(x-x_i)+N_i)+V_{,x}N_{i,y}(x-x_i))B_4 \\
& + (-U_{,z}N_{,x}(y-y_i)V_{,z}(N_{i,x}(x-x_i)+N_i)+V_{,x}N_{i,z}(x-x_i)-(1+U_{,x})N_{i,z}(y-y_i))B_5 \\
& + (V_{,z}N_{i,y}(x-x_i)+(1+V_{,y})N_{i,z}(x-x_i)-U_{,y}N_{i,z}(y-y_i)+U_{,z}(-N_{i,y}(y-y_i)-N_i))B_6
\end{aligned} \tag{6.35}$$

$$\text{Et} \quad dV^0 = \det J \, d\xi d\eta d\zeta \tag{6.36}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_{i,x} \rangle &= j_{11} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{12} \langle N_{i,\eta} \rangle + j_{13} \langle N_{i,\zeta} \rangle \\
\langle N_{i,y} \rangle &= j_{21} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{22} \langle N_{i,\eta} \rangle + j_{23} \langle N_{i,\zeta} \rangle \\
\langle N_{i,z} \rangle &= j_{31} \langle N_{i,\xi} \rangle + j_{32} \langle N_{i,\eta} \rangle + j_{33} \langle N_{i,\zeta} \rangle
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$j_{11}; j_{12}; j_{13}; j_{21}; j_{22}; j_{23}; j_{31}; j_{32}; j_{33}$ sont les neufs termes de la matrice jacobienne inverse $[j] = [J]^{-1}$:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

Le vecteur force interne s'exprime ainsi :

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \left\langle \delta U_1 \quad \delta V_1 \quad \delta W_1 \quad \delta \theta_{x1} \quad \delta \theta_{y1} \quad \delta \theta_{z1} \quad \cdots \quad \delta U_8 \quad \delta V_8 \quad \delta W_8 \quad \delta \theta_{x1} \quad \delta \theta_{y1} \quad \delta \theta_{z1} \right\rangle \tag{6.39}$$

$$\int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} \langle f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad \cdots \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \rangle^T \det J \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

$$\delta \Pi_{\text{int}}^k = \langle \delta U \rangle \{ \mathbf{f}_{\text{int}}^k \} \tag{6.40}$$

Les degrés de liberté de rotation, définies initialement dans le repère cartésien local, devront être transformés dans le repère global.

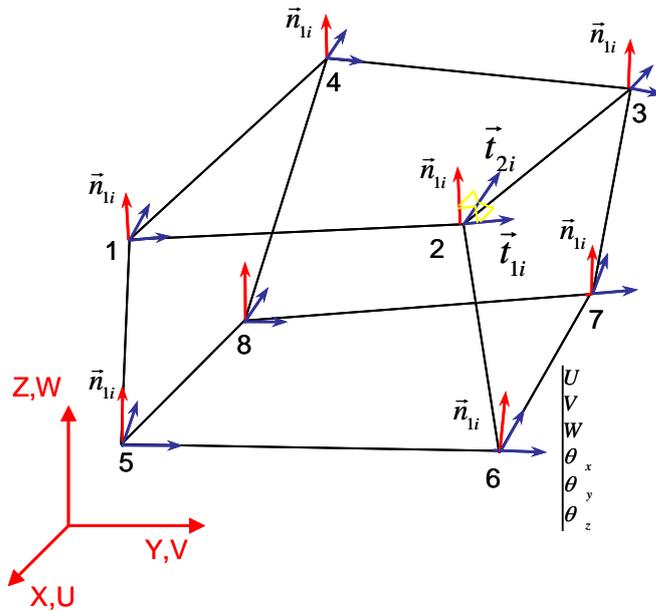


Figure 6-5 repères locaux dans une base orthonormée

6.1.5.1. Repère covariant

Les vecteurs de la base covariante \vec{a}_1 et \vec{a}_2 sont définis par :

$$\vec{a}_1 = \sum N_{i,\xi} \vec{X}_i \quad ; \quad \vec{a}_2 = \sum N_{i,\eta} \vec{X}_i \tag{6.44}$$

Avec $N_{i,\xi}$ et $N_{i,\eta}$ fonction de forme et leurs dérivées d'un élément H8 voir Tableau 6-1

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \quad ; \quad \{a\} = \begin{Bmatrix} a_{1y} a_{2z} - a_{1z} a_{2y} \\ a_{1z} a_{2x} - a_{1x} a_{2z} \\ a_{1x} a_{2y} - a_{1y} a_{2x} \end{Bmatrix} \tag{6.45}$$

6.1.5.2. Repère orthonormée

En chacun des 8 nœuds, une base orthonormée $[Q_i]$ est définie comme suit :

<p>Pour chaque nœud $i=1,8$ $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \mp 1, \mp 1, \mp 1)$</p> <p>Calculer $[F_0] = [\bar{a}_1 : \bar{a}_2 : \bar{n}]$</p> <p>Construire $[Q_i] = [\bar{t}_{1i} : \bar{t}_{2i} : \bar{n}_i]$</p> <p>Avec $[Q] = [\bar{t}_1 : \bar{t}_2 : \bar{n}] = \left[\begin{array}{c c c} C + \frac{1}{1+C} n_y^2 & -\frac{1}{1+C} n_x n_y & n_x \\ -\frac{1}{1+C} n_x n_y & C + \frac{1}{1+C} n_x^2 & n_y \\ \hline -n_x & -n_y & n_z \end{array} \right]$</p> <p>Avec $(\bar{n}) = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$</p>
--

6.2. Validation de l'élément

6.2.1. Plaque circulaire en gonflement libre

Le même test de gonflement est repris pour valider l'élément sous les sollicitations membranaires (il est décrit dans le sous chapitre 4.1.5). Les conditions de calcul sont maintenues. Le calcul est effectué sur le quart de la plaque circulaire pour des raisons de symétrie. L'élément SFRH8 est confronté à l'élément classique hexaédrique H8 et aux résultats de Hughes [Hug83] pris comme solution de référence pour ce test.

L'allure des courbes obtenues sont en léger décalage ; le point milieu de la plaque n'étant pas le même que celui du test précédent (§4.1.5). Le point pilote est décalé pour des raisons de commodité de maillage. Le mailleur automatique exige 6 faces (volume) pour générer des éléments de type Hexaèdre H8.

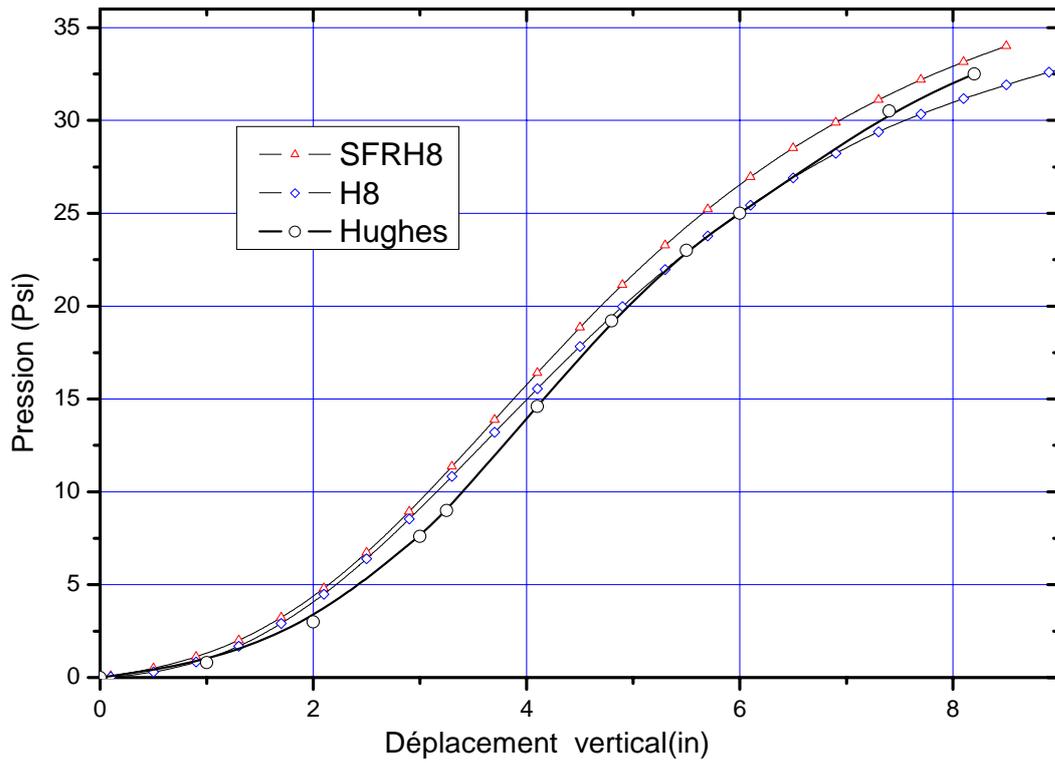


Figure 6-6 Pression en fonction de la flèche du point milieu

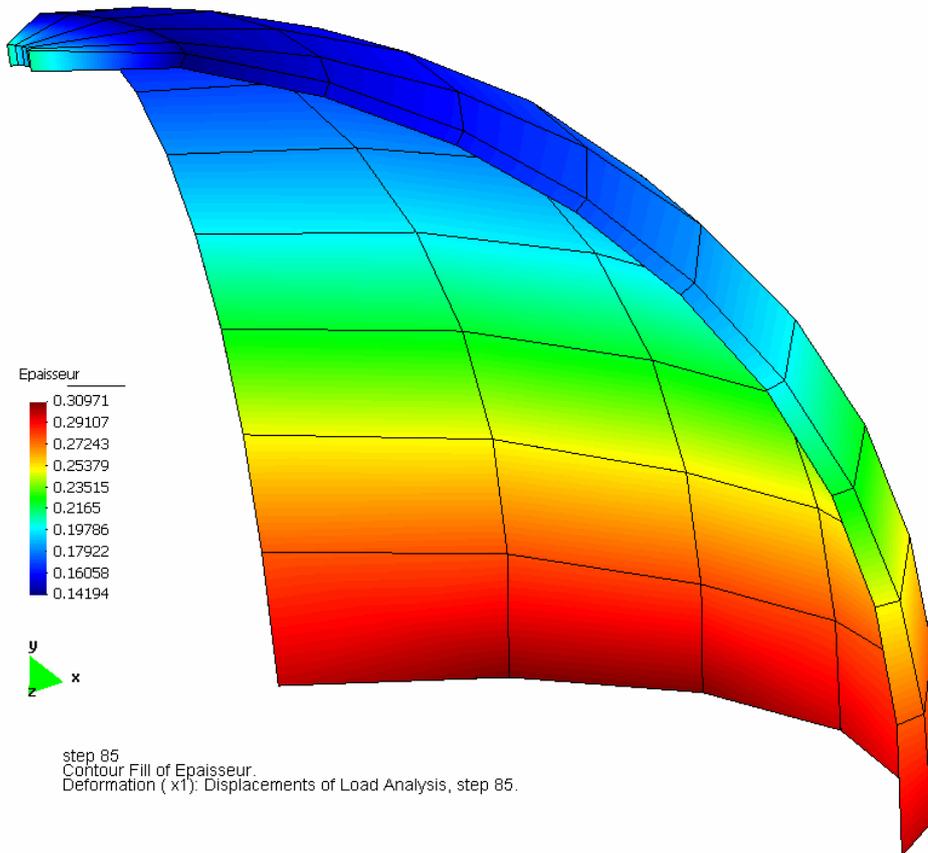
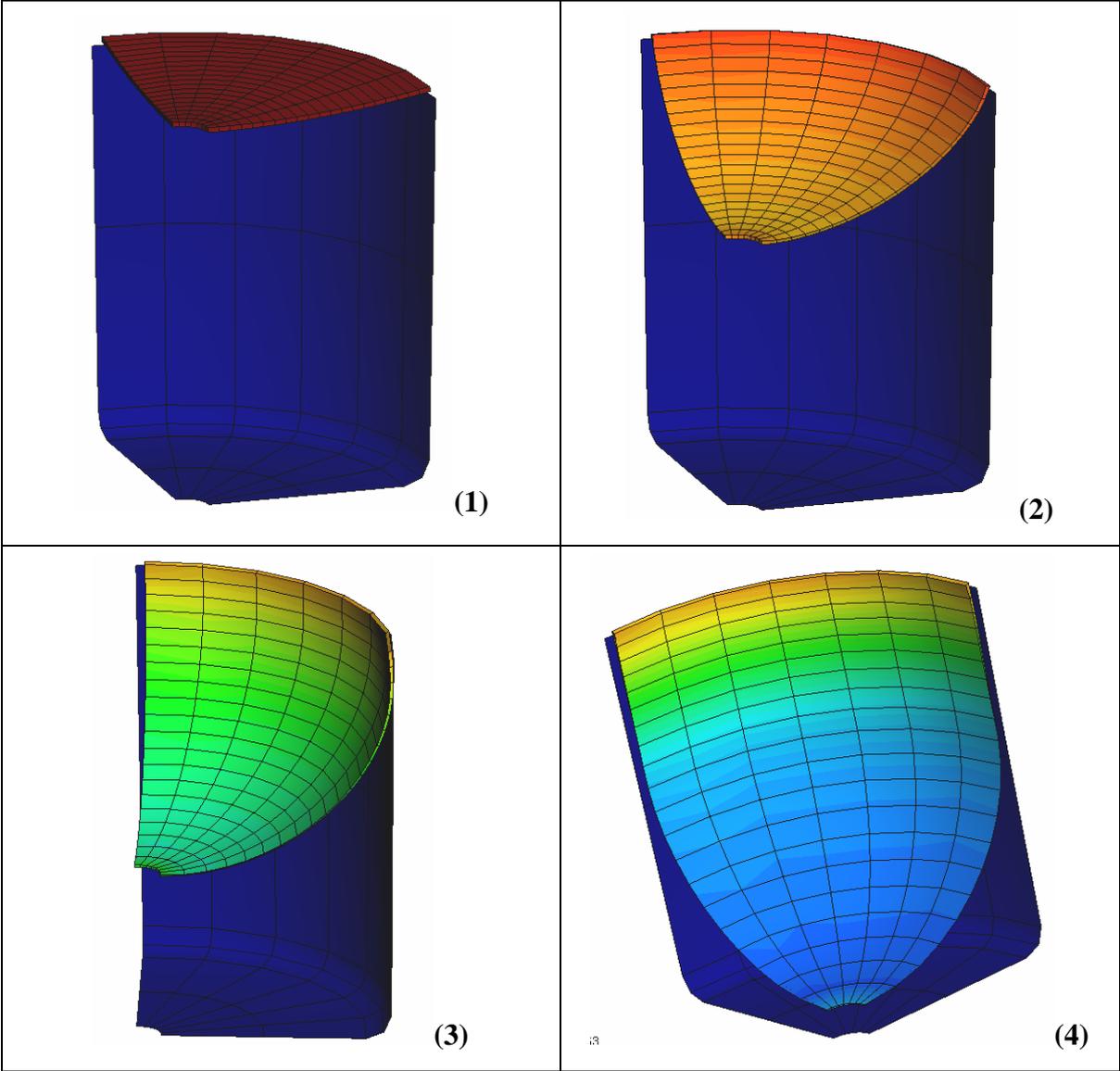


Figure 6-7 Répartition des épaisseurs

6.2.2. Mise en forme d'un godet. Validation du contact 3D

Ce dernier test concerne la modélisation de la mise en forme d'un godet en utilisant avec l'élément fini H8 hyperélastique. L'objectif est de valider l'algorithme de recherche de contact en 3D que nous avons développé. Un quart du godet est modélisé pour des raisons de symétrie. Les résultats satisfaisants de la Figure 6-8 montre que l'algorithme de recherche 3D du contact permet d'aller jusqu'à la fin de la mise en forme sans problèmes de divergence.



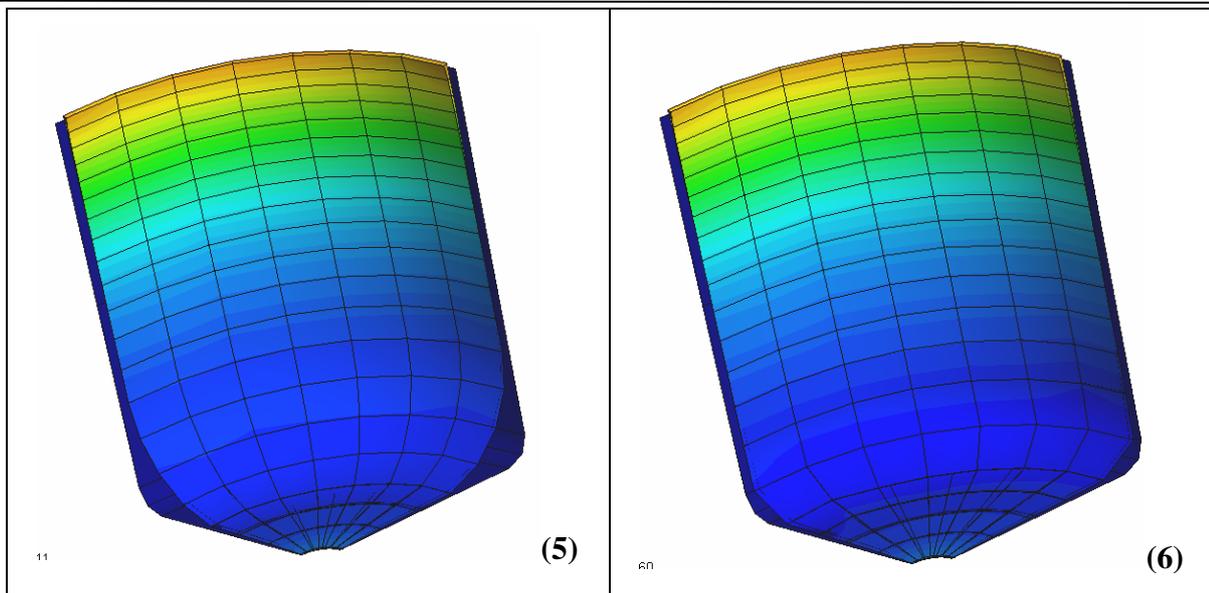


Figure 6-8 Mise en forme du godet. Validation du contact 3D

6.3. Conclusion

L'élément SFRH8 a été testé sans contact. Travaillant seulement en membrane, SFRH8 peut être une alternative aux éléments quadratiques de type H20. L'élément donne des résultats proches de résultats de références de Hughes [Hug83] pour un même nombre d'éléments. Par contre, il engendre un coût de calcul plus élevé que l'élément H8.

7 Conclusion générale et perspectives

7.1. Conclusion

L'objectif principal de ce travail est de mettre au point un logiciel de mise en forme des corps plastiques creux 3D axisymétriques, avec une répartition précise des épaisseurs et un coût de calcul moins élevé. Cela est devenu possible avec l'élaboration d'un nouvel élément fini de solide axisymétrique (baptisé SFRQ-Axi) basé sur le concept cinématique de rotation d'une fibre spatiale (Space Fiber Rotation concept). L'élément fini développé a l'avantage de converger rapidement pour les problèmes à contact présentant des zones de flexion. Le choix de l'algorithme de recherche de contact joue aussi un rôle dans le traitement rapide de la gestion des nœuds candidats au contact. Un algorithme de recherche local simple est élaboré pour tester la pénétration des segments « masters » par les nœuds « slaves ».

Notons aussi les difficultés numériques rencontrées auxquelles nous avons fait face, et qui sont dues aux fortes nonlinéarités géométriques, matérielles et surtout aux nonlinéarités de contact. Soulignons aussi la difficulté de gérer l'incompressibilité des éléments finis 3D volumiques ou axisymétriques.

Deux approches de calcul implicite et explicite sont traitées pour un exemple de biberon. Les résultats obtenus montrent la bonne précision du calcul implicite par rapport au calcul explicite.

Les tests de validation de l'élément SFRQ-Axi avec contact sur un test de flexion d'une plaque circulaire, s'enroulant sur un tore rigide, montre la bonne vitesse de convergence et une meilleure précision des résultats des épaisseurs. Les résultats des tests de mise en forme donnent aussi une bonne répartition des épaisseurs à l'intérieur de la plage donnée par les résultats expérimentaux. Néanmoins ces tests restent globalement plus ou moins complexes.

D'autres éléments finis complètement volumiques, de type hexaèdres à 8 nœuds H8, avec des lois hyperélastiques sont implémentés dans notre code « Model'Pack Forming » afin de tester l'algorithme de contact, développé pour la recherche 3D des nœuds candidat au contact.

7.2. Perspectives

Les travaux futurs devront porter sur l'implémentation de lois hyperélastiques de type Ogden et autres. L'objectif est de pouvoir simuler de façon réaliste des problèmes de mise en forme des corps plastique creux.

Un bloc thermique en régime instationnaire est nécessaire pour tenir compte de la variation de la température en fonction du temps au cours de la mise en forme. Ce comportement s'approche du comportement visqueux réel des polymères. L'intégration des modèles viscoélastiques de type G'Sell ou autres est préconisé, ou une combinaison tirant profit des deux comportement hyper-élastique et viscoélastique (visco-hyper élastique). Les modèles hyperélastiques permettent d'obtenir une bonne répartition des épaisseurs avec en général une représentation moins précise de l'état de contrainte. Les modèles viscoélastiques prennent en compte la vitesse de déformation et aboutissent à un état de contrainte satisfaisant; ce qui permet une meilleure prédiction le produit finale après soufflage (retrait).

Enfin, il nous paraît utile de penser à implémenter une loi d'endommagement adapté au comportement des polymères. Cela permettra entre autres d'apporter une amélioration dans la prédiction des phénomènes de déchirures observés durant la mise en forme.

Pour enrichir la librairie des éléments finis du code, il serait nécessaire de formuler :

- Des éléments finis de coque avec une partie membranaire basée sur le concept SFR. Cela permettra de mieux simuler les effets de la membrane.
- Des éléments finis solide 3D de type tétraèdre 4 nœuds permettant de mailler des géométries complexes et palier à la difficulté de générer des maillages structurés.

D'autres améliorations sont nécessaires pour augmenter l'efficacité du programme :

- Calcul des distances de pénétration optimale à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, ou de la méthode de Lagrange augmenté
- Stockage et assemblage des éléments de la matrice tangente dans des matrices creuses (sparse matrix) et résolution du système d'équations adapté à ce type de matrice..
- Remaillage automatique.
- Lissage de segments ou surfaces « master » par des splines afin d'enlever les zones d'angles morts. Ce lissage semble mieux adapter pour les algorithmes de recherche local.
- Traitement du contact cas déformable- déformable (self-contact)
- Re-programmation du code Model'Pack Forming en MPI (multiprocesseurs) pour tirer profit de la puissance de calcul des nouvelles puces « grand public » de type processeurs double cœurs.

8 Références bibliographiques

- [Arm99] F. Armero, E. Petocz, A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 179 (1999) 151-178.
- [Arr93] E.M. Arruda and M.C. Boyce. A three dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 41(2):389-412, 1993.
- [Aya93] R. Ayad « Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement ». Thèse de Doctorat, UTC, 1993.
- [Aya02] R. Ayad, Contribution à la Modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. Application à des matériaux d'emballage. Thèse d'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Reims. 2002
- [Bat88] K.J. Bathe and S. Mijailovich, Finite element of frictional contact problems, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics. Special issue, supplement No1 to Vol7.* 1988.
- [BatV1] J.L. Batoz & G.Dhatt « Modélisation des structures par éléments finis ». Volume 1 : Poutres et Plaques. Hermès Editeur, Paris 1990.
- [BatV2] J.L. Batoz & G.Dhatt « Modélisation des structures par éléments finis ». Volume 2 : Poutres et Plaques. Hermès Editeur, Paris 1990.
- [BatV3] J.L. Batoz & G. Dhatt « Modélisation des structures par éléments finis ». Volume 3 : Coques. Hermès Editeur, Paris 1992.
- [Bel06] M.Bellet, B. Monasse et J.F. Agassant, Techniques de ingénieur traité plastiques et composites AM 3-705. 2006.
- [Bel91] T. Belytschko, M.O. Neal, Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1991; 31:547-572.
- [Ben93] B. Ben Chaabane. Contribution à la modélisation numérique de la mise en forme des corps creux plastiques. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1993.
- [Ber84] D.P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York. (1984).
- [Bit98] Eduardo Bittencourt, Guillermo J. Creus, Finite element analysis of three-dimensional contact and impact in large deformation problems, *Computers and Structures* 69 (1998) 219-234 pergamon.
- [Cha87] J.M. Charrier, S. Shrivastava et R. Wu, Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming- Axisymmetric problems, *J. Strain Analysis*, Vol. 22, pp. 115-125, 1987. (P19)
- [Cha89] J.M. Charrier, S. Shrivastava et R. Wu, Free and constrained inflation of elastic membranes in relation to thermoforming- Non Axisymmetric problems, *J. Strain Analysis*, Vol. 24, No. 2, pp. 55-73, 1989. (P19).

- [Che97a] J.S. Chen, W. Han, C.T. Wu and W. Duan, On the perturbed Lagrangian formulation for nearly incompressible and incompressible hyperélastique, *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 142:335-351, 1997.
- [Che97b] J.-S. Chen, C. Pan, C.-T. Wu, Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics* 19 (1997) 211 – 227 Springer-Verlag 1997.
- [Cos97] C. Coste. Contribution à la simulation numérique du procédé d'extrusion soufflage de réservoir à carburants. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1997.
- [Cou85] C.A. Coulomb, *Mémoires de mathématiques et de physiques de l'académie royale des sciences*. 1785.
- [CriV1] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids an structures*, volume 1. Wiley, England, 1991.
- [CriV2] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids an structures*, volume 2. Wiley, England, 1991.
- [Cze01] A.Czekanski, S.A. Meguid, Solution of dynamic frictional contact problems using non di optimization, *International Journal of Mechanical Sciences* 43 (2001)1369
- [CzM01] A.Czekanski, S.A. Meguid, Analysis of dynamic frictional contact problems using variational inequalities, *Finite Elements in Analysis and Design* 37 (2001)861–879.
- [Del87] HG DeLorenzi, and H.F.Nied, Blow Molding and Thermoforming of Plastics: Finite Element Modeling, *Computers & Structures*, Vol. 26, pp. 197-206. 1987. (P19)
- [Del88] H.G DeLorenzi, H.F. Nied and C.A. Taylor, Blow molding and thermoforming of plastics: finite element modelling. *Computer and Structures. SPE, Tech.*, (34):797-799, 1988
- [Del91] H.G. DeLorenzi and H.F. Nied, 1991, "Finite Element Simulation of Thermoforming and Blow Molding," *Modeling of Polymer Processing*, AI. Isayev, Ed., Hanser Verlag, Munich.
- [DeIHT] H.G. DeLorenzi, H.F.Nied, C.A.Taylor, 1991, "A Numerical/Experimental Approach to Software Development for Thermoforming Simulations," *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 113,pp.102-114. (P19).
- [Duv76] G. Duvaut and J.L. Lions. *Inequalites in mechanics and physics*. Springer Verlag, Berlin, 1976.]
- [Nie90] H.F.Nied, C.A.Taylor and H.G.DeLorenzi,"Three-Dimensional Finite Element Simulation of Thermoforming", *Polymer Eng. Sci.*, Vol 30, No.20, pp. 1314-1322, 1990. (P19)
- [Dha84] G. Dhatt et G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 2eme édition Maloine, Paris, 1984.
- [Die02] R. Diekmann, J. Hungershofer, M. Lux, L. Taenzer and J-M. Wierum, Efficient contact search for finite element analysis, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 20000*, Barcelona Sept 2000,
- [Dus03] A Düster , S. Hartmann , E. Rank. P-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192 (2003) 5147–5166.

- [EIM89] M. El Mouatassim. Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1989.
- [Ern05] A. Erner, Etude Expérimentale du Thermoformage Assisté Par Poinçon d'un Mélange de Polystyrènes, Ecole des Mines de Paris, mars 2005, France.
- [Far00] K. Farahani, M. Mod, A. Vafai, Comput. A solution method for general contact-impact problems, *Methods Appl. Mech. Engrg.* 187 2000 69-77.
- [Fja98] P.O. Fjallstrom, J. Petersson, L. Nilsson, Z. H. Zhong Evaluation of range searching methods for contact searching in mechanical engineering. *International Journal of Computational Geometry and Applications* 1998; 8(1): 67–83.
- [Fra75] A. Francavilla and O.C. Zienkiewicz. A note on numerical computation of elastic contact problems. *International journal numerical methods in engineering*, 9:913-924, 1975.
- [Ger86] P. Germain. Cours de mécanique des milieux continus, Masson et Cie, 1986.
- [Gha00] F. Gharzeddine, A. Ibrahimbegovic, Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity, *Comput. Mech.* 24 (2000) 419–425.
- [Hag83] B. Häggblad and J.A. Saundberg. *Computer and Structures*, (26): 181.1983.
- [Hai79] D.W. Haines and W.D. Wilson. Strain energy density function for rubberlike materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 27:345-360, 1979.
- [Hal85] J.O. Hallquist, G.L. Goudreau, D.J. Bension, Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1985; 51:107–137.
- [Hal93] J.O. Hallquist, LS-DYNA3D Theoretical Manual. Livermore Software Technology Corporation, Livermore, Rev.2, 1993.
- [Hal95] J.O. Hallquist, B. Waincott, K. Schweizerhof. Improved simulation of thin-sheet metalforming using LS-DYNA3D on parallel computers. *Journal of Materials Processing Technology* 1995; 50(1–4):144–157.
- [Hei99] M.W. Heinstein and T.A. Laursen, An algorithm for the matrix free solution of quasistatic frictional contact problems, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 1999; 44:1205-1226.
- [Hei00] M.W. Heinstein, F.J. Mello, S.W. Attaway, T.A. Laursen, Contact-impact modelling in explicit transient dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 187 2000 621-640.
- [Hug83] T.J.R. Hughes and E. Carnoy. Non linear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Comp. Meth. In Appl. Mech. And Eng.* 39:69-82, 1983.
- [Hun93] I. Hunek. On a penalty formulation for contact-impact problems. *Computers and structures*, 48(2):193-203, 1993.
- [Jam98] J.C. Jammet., Thermoformage, *Techniques de l'ingénieur*, 1998, AM, AM3660. (P12)
- [Jam75] A.G. James, A. Green, and G.M. Simpson, Strain energy function of rubber. i. Characterization of gum vulcanizates. *Journal of Applied Polymer Science*, 19:2033-2058, 1975.
- [Jea88] M. Jean et G. Touzot. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformation problems. *Journal of theoretical and applied mechanics*, special issue, supplement nu. 1 to vol. 7. 1988.

- [Ju88] J. Ju et R.L.Taylor, A perturbed Lagrangian formulation for the element solution of nonlinear frictional contact problems, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Special issue, supplement nu. 1 to vol. 7, 1988.
- [Ju98] S.H. Ju. Cubic-spline contact element for frictional contact problems. *Journal of the Chinese Institute of Engineers* 1998; 21(2):119–128.
- [Kaw95] S. Kawabata, Y. Yamashita, H. Ooyama and S. Yoshida. Mechanism of carbon-black reinforcement of rubber vulcanizate. *Rubber Chemistry and Technology*, 68(2):311-329, 1995.
- [Mar02] G. Marckmann, E. Verron, L. Gornet, G. Chagnon, P. Charrier, P. Fort, A theory of network alteration for the Mullins effect, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002) 2011–2028.
- [Mar04] G. Marckmann, Contribution a l'Etude des Elastomères et des Membranes Soufflées, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, juin 2004, France.
- [Moo40] M. Mooney, "A Theory of Large Elastic Deformation", *Journal of Applied Physics*, Vol. 6, pp. 582-592 (1940).
- [Mun98] A. Munjiza and K.R.F. Andreuws, NBS contact detection algorithm for bodies of similar size, *Int. J. Numer. Meth. Enging.* 43, 131-149 (1998)
- [Mic92] W. Michaeli and H. Reinhold. Simulation des formgebenden prozesses beim therformen und extrusionsblasformen. *Messen, Pruen, QS*, 3:26-31, 1992.
- [Ode83] J.T. Oden and E.B. Pires. Non local and non linear friction laws and variational principals for contact problems in elasticity. *Journal Applied Mechanics*, 50: 421-432, 1983.
- [Ogd72] R.W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubber like solids. *Proc. R. Soc. Lond., A*. 326:565-584, 1972.
- [Old94] M. Oldenburg and L. Nilsson, The position code algorithm for contact searching. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1994, vol 37, 359-386,
- [Pap93] R. Papadopoulos, R.T. Taylor. Simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems. *Computers and Structures* 1993; 46(6):1107–1118.
- [Pen70] R.W Penn., (1970): Volume changes accompanying the extension of rubber. *Trans. Soc. Rheo.* 14: 4, 509–517
- [Per92] D. Peric and D.R.J. Owen. Computational model for the 3rd contact problems with friction based on the penalty method. *Int. J. Num. Met. in Ing.*, 35:1289-1309, 1992.
- [Pet80] C.J.S. Petrie, K. Ito, Prediction of wall thickness of blow moulded containers, *Plastics Rubber Proc.*, No. June, PP. 68-72, 1980. (P18).
- [Pha04] X.T. Pham, F. Thibaut and L.T. Lim, Modeling and Simulating of Stretch Blow Molding of Polyethylene Terephthalate. *Polymer Engineering and Science*, August 2004 Vol. 44, No. 8
- [Rac93] M. Rachik. Simulation de la mise en forme des structures minces (soufflage des plastiques et emboutissages des tôles). Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1993.

- [Rya82] M.E. Ryan and A. Dutta. Mathematical modelling of the blow-molding process. *Polym. Engng. Sci.*, 22:1075, 1982.(P18)
- [Rio03] G. Rio. Un modèle éléments finis de contact sans multiplicateur de Lagrange ou pénalisation. 16^{ème} Congrès Français de Mécanique. 1-5 sep 2003.
- [Riv48] R.S. Rivlin. Large elastic deformation of isotropic materials. i. Fundamental concepts. *Phil. Transactions of the royal society of London* 240:459-490. 1948.
- [Rod97] A. Rodriguez-Villa. Etude théorique et expérimentale de l'extrusion-soufflage de corps creux en polymère. Thèse de doctorat, Ecole supérieure des mines de Paris, France 1997. (P19).
- [Sac81] T.D. Sachdeva, C.V. Ramakrishnan and R. Natarajan. A finite element method for the elastic contact problem. *Trans. ASME.*, 103:456-461, 1981.
- [Sch75] L.R. Schimdt and J.F. Carley. Biaxial stretching of heat softened plastic sheets: experiments and results. *Poly. Eng. Sc.*, (15):51, 1975.
- [Sch96] F.M. Schimdt, J.F. Agassant, M. Bellet, L.Desoutter, Viscoelastic simulation of PET stretch/blow molding process. *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Elsevier 1996. (P19).
- [Sha95] F.S. Shan and P.R. Dawson, Simulation of materials processing theory, methods and application. Numiform 95, Cornell University, 1995.
- [Shi95] T. Shimizu, T. Sano, Application of a penalty method contact and friction algorithm to a three-dimensional tool surface expressed by a B-spline patch. *Journal of Materials Processing Technology* 1995; 48(1-4):207-213.
- [Shi93] S. Shrivastava, J. Tang, Large deformation finite element analysis of non-linear viscoelastic membranes with reference to thermoforming, *J. Strain Analysis*, Vol. 28, No. 1, pp. 31-51, 1993. (P19).
- [Sig59] Signorini, Questini di elastostatica linearizzata e semilinearizzata. *Rend. Di. Maatem. E sur Appl.*, 18, 1959.
- [Sim85] J.C. Simo, P. Wriggers et R.L. Taylor, A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50, pp.163-180, 1985.
- [SoMV] W. N. Song, F. A. Mirza, and J. Vlachopoulos. Finite extension simulation of plug assist forming. *International Polymer Processing*, VII(3):248-256, 1985.
- [Sze04] K.Y. Szea, S.-J. Zhenga, S.H. Lob. A stabilized eighteen-node solid element for hyperelastic analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004) 319-340.
- [Tal96] N. Talbi. Modélisation du comportement semi_rigide d'un connecteur métallique sous sollicitations statiques. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1996.
- [Tre44] L.R.G. Treloar, Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of eformation. *Trans. Faraday Soc.*, 40:59-70, 1944
- [Tre76] L.R.G. Treloar. The mechanics of rubber elasticity. *Proc. R.Soc. London*, 351:301-330, 1976.
- [Tsh70] N.W. Tshoeg. Constitutive equation for elatomers. *Journal of Polymer Science*, 9 A-1:1959-1970, 1971.

- [Tse87] Tseng, N.-T, Satyamurthy, K.; Chang, J.-P., Nonlinear finiteelement analysis of rubber based products, Rubber Division, Montreal, Quebec, May 26–29. (1987).
- [Tuz04] V.H. Tuzel, H.A. Erbay; The dynamic response of an incompressible non-linearly elastic membrane tube subjected to a dynamic extension; *Int. J. of Non-Linear Mechanics* 39; 515 – 537; 2004
- [Ula99] S. Ulaga, M. Ulbin, J. Flaker. Contact problems of gears using Overhauser splines. *International Journal of Mechanical Sciences* 1999 ; 41 :385–395.
- [Ver97] E. Verron, Contribution expérimentale et numérique aux procédés de moulage par soufflage et thermoformage. Thèse de doctorat, école centrale de Nantes, France 1997. (P20).
- [Ver03] E. Verron, G. Marckmann, Inflation of elastomeric circular membranes using network constitutive equations, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38 (2003) 1221–1235.
- [Wan97] S.P.Wang, E. Nakamachi. The inside–outside contact search algorithm for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997; 40(19):3665–3685.
- [WaF01] Fujun Wang, Jiangang Cheng and Zhenhan Yao, FFS contact searching algorithm for dynamic Finite element analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2001; 52 :655 –672.
- [WaS00] S. Wang, and A. Makinouchi, Contact search strategies for FEM simulation of the blow modelling process, *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2000; 48:501-521.
- [Wie03] J.M. Wierum, Anwendung diskreter raumfüllender Kurven Graphpartitionierung und Kontaktsuche in der Finite-Elemente-Simulation. Thesis Doktorat, Paderborn, Oktober 2003.
- [Wil70] J.G. Williams, A method of calculation for thermoforming plastics sheets. *J. of Strain Analysis*, Vol. 5 N°1, pp 49-57, 1970. (P18).
- [Whi94] R.G. Whirley, Engelmann BE. Automatic contact algorithm in DYNA3D for crashworthiness and impact problems. *Nuclear Engineering and Design* 1994; 150(2–3):225–233.
- [Wro94] M. Wronski. Couplage du contact et du frottement avec la mécanique non linéaire des solides en grandes déformations «Application à l'étude des blocs de mousse en polyuréthane». Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1994.
- [WNO84] P. Wriggers and B. Nour Oid. Solution methods for contact problems. Technical report UCB/SESM 84-09, University of California, CA., 1984.
- [Yan00] L.M. Yang, V.P.W. Shim, C.T. Lim, A visco-hyperelastic approach to modelling the constitutive behaviour of rubber, *International Journal of Impact Engineering* 24 (2000) 545-560
- [Yeo93] O.H. Yeoh. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 66:757-771, 1993.
- [Zho89] Z.H. Zhong and L. Nilsson. A contact searching for general contact problem, *Computers and structures*, vol 33(1); 197-209, 1989.

-
- [Zho93] Z.H. Zhong, Finite Element Procedures for Contact–impact Problems, Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [Zho94] Z.H. Zhong and L. Nilsson. Automatic contact searching for dynamic finite element analysis, Computers and structures, 52(2); 187-197, 1994.
- [Zho96] Z.H. Zhong and L. Nilsson, A unified contact algorithm based on the territory concept, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 130 (1996) 1-16
- [Zia99] M. Ziane. Contribution à la simulation numérique du soufflage thermoformage de corps creux plastiques axisymétriques. Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1999. (P20).
- [Zie91] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, in: The Finite Element Method, fourth ed., vol. 2, McGraw-Hill, Berkshire, UK, 1991.