



UNIVERSITE DE REIMS
CHAMPAGNE-ARDENNE

Thèse

Présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne Ardenne

Spécialité

**GENIE INFORMATIQUE, AUTOMATIQUE ET
TRAITEMENT DU SIGNAL**

par

Badr MANSOURI

**CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDES EN
POURSUITE DE TRAJECTOIRE POUR
LES SYSTEMES FLOUS DE TYPE TAKAGI SUGENO INCERTAINS**

Soutenue le 9 décembre 2005 devant la commission d'examen composée de :

Rapporteurs :

T-M. Guerra
N. K. M'Sirdi

Pr. à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (LAMIH)
Pr. à l'École Polytechnique Universitaire de Marseille (LSIS)

Examineurs :

A. El Hajjaji
A. Hamzaoui
N. Manamanni
J. Zaytoon

Pr. à l'Université d'Amiens (CREA) (président)
Pr. à l'Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)
MC.&HDR à l'Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)
Pr. à l'Université de Reims Champagne Ardenne (CReSTIC)

A ma mère

Ma source éternelle d'inspiration, de motivation et de bénédiction

A la mémoire de mon père,

Mon maître de passion, de patience et de persévérance

À mes sœurs et mes frères

À mes nièces et mes neveux

À mes amis d'enfance et de toute circonstance

Remerciements

Ce mémoire est le résultat de trois années de travail et conclut ma thèse de doctorat en Génie Informatique, Automatique et Traitement du signal au sein du Centre de Recherche en STIC à l'université de Reims Champagne Ardenne.

Je tiens à exprimer d'abord ma reconnaissance au Professeur Janan ZAYTOON, en tant que directeur du CReSTIC de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire, et en tant que directeur de thèse pour son soutien scientifique et humain ainsi que la confiance qu'il m'a témoigné tout au long de ce travail de recherche.

Mes sincères remerciements à Monsieur Thierry Marie GUERRA Professeur à l'université de Valenciennes, et Monsieur Nacer K. M'SIRDI Professeur à l'école Polytechnique de Marseille, d'avoir pris le temps de juger ce travail et de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie en particulier Monsieur Thierry Marie GUERRA pour les discussions enrichissantes qu'on a eues au LAMIH, et pour ses idées pertinentes.

Je tiens également à remercier Monsieur El HAJJAJI Professeur à l'Université d'Amiens pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.

La satisfaction et le regret de voir cette période de thèse s'achever sont à partager avec mon codirecteur de thèse Nouredine MANAMANNI, que je remercie chaleureusement pour ses directives scientifiques, pédagogiques et même personnelles pour lesquelles je lui suis hautement redevable. De même, je lui suis extrêmement reconnaissant pour son soutien humain et moral et son aide précieuse à la rédaction de ce manuscrit de thèse. Les nuits du ramadhan, les vacances les week-ends au CReSTIC demeurent des souvenirs inoubliables à jamais, des moments, pleins de plaisirs, de bonheur, de tristesse et de toutes les émotions, mais surtout plein de fraternité.

J'exprime ma sincère gratitude à Monsieur Abdelaziz HAMZAOU, de m'avoir intégré dans l'équipe d'automatique après mon DEA, pour ses conseils avisés, pour son suivi et pour son soutien scientifique, humain et moral.

Je remercie très chaleureusement Mr Najib ESSOUNBOULI, pour son amitié sincère, pour ses conseils, et tous les services qu'il m'a pu me rendre durant cette thèse.

Sans oublier Mr Kevin GUELTON mon partisan des modèles TS, pour ses remarques et ses conseils précieux.

Je ne terminerai pas mes remerciements sans avoir une pensée sympathique pour toutes les personnes qui m'ont soutenu ne serait-ce qu'avec un sourire sincère.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
1.1. Introduction	9
1.2. Modèle flou de type TS.....	10
1.2.1. Modèle flou TS.....	10
1.2.2. Construction d'un modèle flou TS.....	11
1.2.3. Analyse de stabilité des modèles TS.....	15
1.3. Lois de commande floue et conditions de stabilisation de base.....	16
1.3.1. Problème d'optimisation convexe LMI	16
1.3.2. Lois de commande floue.....	16
1.3.3. Stabilisation des modèles TS avec une loi de commande du type PDC.....	20
1.3.4. Stabilisation avec observateur flou	23
1.3.4.1. Observateur flou TS.....	23
1.3.4.2. Commande PDC avec observateur flou.....	25
1.4. Commande robuste des modèles TS.....	25
1.4.1. Modèles TS incertains.....	26
1.4.2. Modèles TS perturbés : atténuation des perturbations	27
1.4.3. Modèles TS incertains et perturbés.....	30
1.4.4. Autres approches de synthèse.....	32
1.4.4.1 Placement de pôles.....	32
1.4.4.2 Commande optimale.....	33
1.5. Conclusion.....	34

CHAPITRE 2 SUIVI DE TRAJECTOIRE DES MODELES TS

2.1. Introduction.....	39
2.2. Problème du suivi de trajectoire.....	40
2.2.1. Le suivi de trajectoire pour les modèles TS.....	40
2.2.2. Problème de suivi de trajectoire : Stratégie de commande	42
2.2.2.1. Le modèle physique et le modèle TS.....	42
2.2.2.2. L'observateur flou TS.....	43

2.2.2.3. Le système de référence.....	43
2.2.2.4. Loi de commande.....	44
2.3. Synthèse de commande avec observateur : approche H_∞.....	45
2.3.1. Commande basée sur l'approche H_∞	45
2.3.2. Conditions de relaxation.....	49
2.3.3. Exploitation numérique des résultats	49
2.3.4. Exemple et simulations	56
2.4. Conclusion	62

CHAPITRE 3 SUIVI DE TRAJECTOIRE DES MODELES TS PERTURBES ET INCERTAINS AVEC CRITERES H_∞

3.1. Introduction.....	64
3.2. Synthèse de commande sans observateur.....	66
3.2.1. Synthèse de commande par Approche BMI.....	67
3.2.2. Synthèse de commande par Approche LMI.....	70
3.2.3. Simulations et Résultats.....	74
3.3. Synthèse de commande avec observateur.....	78
3.3.1. Approche LMI.....	78
3.3.2. Exemple de poursuite avec observateur.....	86
3.4. Conclusion.....	88

CHAPITRE 4 COMMANDE SOUS OPTIMALE DES MODELES TS INCERTAINS

4.1. Introduction.....	91
4.2. Modèle TS et fonction de coût.....	92
4.3. Synthèse de commande sans observateur.....	93
4.3.1. Problématique : construction du système augmenté.....	93
4.3.2. Conditions de stabilité.....	95
4.3.3. Exemple et Simulation.....	100
4.4. Synthèse de commande avec observateur.....	101
4.4.1. Problématique : construction du système augmenté.....	101
4.4.2. Conditions de stabilité.....	104
4.4.3. Exemple et Simulation.....	108
4.5. Conclusion.....	111

CONCLUSION GENERALE.....	113
ANNEXES.....	117
ANNEXE A : Rappel sur la stabilité selon Lyapunov.....	117
ANNEXE B : Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles (LMI).....	123
ANNEXE C : Modélisation exacte du pendule inversé.....	131
ANNEXE D : Relaxation sans observateur : approche BMI.....	137
BIBLIOGRAPHIE.....	143

INTRODUCTION GENERALE

La diversité des problèmes rencontrés en automatique, notamment portant sur la théorie de la commande et de la conception, ont connu une évolution considérable ces dernières années. Parmi ces théories, la commande des systèmes non linéaires ne cesse de se perfectionner. Ainsi, le concept des ensembles flous qui s'est avéré très utile du point de vue de la synthèse de commandes. Les travaux sur la théorie des ensembles flous et la logique floue ont été initiés dans les années soixante par Lotfi Zadeh ([Zadeh, 1965](#)) à l'Université de Berkeley afin de modéliser l'incertitude inhérente au langage humain. Ces travaux, qui ont mis un certain temps avant d'être acceptés par la communauté de l'automatique et l'industrie, avaient déjà posé les bases de la commande floue. La logique floue, de part ses aptitudes multidisciplinaires, a été utilisée dans des domaines aussi variés que la gestion de base de données, les systèmes experts, le traitement du signal, la classification de données, la modélisation ainsi que la commande de systèmes automatiques. De fait, elle s'est attirée les critiques des scientifiques de chacun des domaines respectifs en introduisant une solution informelle à des problèmes pour lesquels les développements mathématiques d'alors ne trouvaient pas de solutions ([Verbruggen et al., 1999](#)). Il faut attendre les années quatre-vingts dix pour que ces nouvelles théories soit reconnues et utilisées à bon escient au sein d'applications variées, notamment la modélisation et la commande de systèmes complexes. La première application de la commande floue fut réalisée par ([Mamdani, 1974](#)) en 1974 sur un moteur à vapeur. La première application industrielle a porté sur le contrôle d'un four à ciment par logique floue ([Holmblad & Ostergaard, 1982](#)). Ce n'est qu'en 1973, que la théorie

de la logique floue fut introduite en France par Arnold Kaufmann (Kaufmann, 1973). Depuis, les applications de la logique floue en théorie du contrôle se succèdent jusqu'à nos jours. Celle-ci concernent des domaines aussi variés que le génie industriel (Yamakawa, 1993; Russo, 1996; Wu et al., 2001; Lauber, 2003), le diagnostic (Chen et al., 1995 ; Wang, 2005), ou encore la biomécanique (Jacobs, 1997 ; Davoodi, 2004 ; Guelton, 2003).

Afin de s'affranchir de la connaissance parfaite d'un processus à contrôler, le comportement dynamique peut être pris en compte par une modélisation analytique, c'est-à-dire un modèle de connaissance. On obtient alors une représentation mathématique qui doit ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle et son adéquation avec une forme mathématiquement exploitable. Dans ce contexte, une première approche pour étudier un système ayant un comportement non linéaire consiste à l'approximer par un modèle linéaire. L'inconvénient d'une telle approche est son aspect local. D'autre part, plusieurs travaux ont été développés afin de démontrer qu'un système flou peut être utilisé comme un approximateur universel (Kosko, 1994 ; Zeng & Singh, 1995 ; Nguyen et al., 1996, Zeng et al., 2000; Essounbouli, 2004). Ainsi, la question de l'approximation se pose : *un modèle flou peut-il uniformément approximer n'importe quelle fonction réelle sur un sous ensemble compact avec un degré de précision arbitraire ?* La capacité de l'approximation universelle d'un modèle flou est la base de recherches théoriques et de leurs applications en commande et/ou en identification floue. De nombreux chercheurs se sont donc intéressés à cette notion. Il s'agit alors de donner une justification théorique aux succès rencontrés par les applications de la logique floue. Notamment, sur des systèmes difficilement contrôlables à l'aide de techniques conventionnelles (Buckley, 1992 ; Buckley, 1993 ; Castro, 1995).

La structure d'un modèle ou d'un régulateur flou, est décrite par un ensemble de règles, dite règles floues, qui sont constituées chacune par une partie prémisse, et une partie conclusion. De ce point de vue là, on distingue deux classes principales de modèles flous : les modèles inférés par des règles floues de type Mamdani et ceux inférés par des règles floues de type Takagi-Sugeno (TS) (Takagi & Sugeno, 1985 ; Sugeno & Kang, 1988). Les modèles de type Mamdani utilisent le formalisme flou pour modéliser l'inférence. En revanche, bien que la partie prémisse des règles de type TS conserve le formalisme flou, l'inférence correspond à une simple interpolation des conclusions. Il en résulte que, pour un modèle TS, les règles sont inférées par des variables décrites dans l'univers du discours flou. En revanche, la description

globale du système qu'elles représentent permet, après défuzzification, d'aboutir à une fonction non linéaire liant arithmétiquement les entrées et les sorties du système.

L'approche de modélisation TS permet donc de représenter un système non linéaire par une interconnexion de modèles affines et linéaires autour de différents points de fonctionnement à travers des fonctions de pondération normalisées appelées fonctions d'activations. Ces fonctions peuvent être soit identifiées à partir d'un processus réel (Gasso, 2000), soit sur la base d'un modèle de connaissance afin d'aboutir à une représentation exacte de celui-ci dans un espace compact de l'espace d'état (Morère, 2001).

Une approche typique de la commande des systèmes utilisant ce type de modèle est la stabilisation par interpolation de retour d'état appelée commande PDC (Parallele Distributed Compensation) (Wang *et al.*, 1996 ; Wang *et al.*, 1995). La majorité des travaux qui s'inspirent de cette loi de commande ont une démarche basée sur la deuxième méthode de Lyapunov. La formulation de celle-ci aboutit à un ensemble d'inégalité écrite, dans la mesure du possible, sous la forme inégalités matricielles linéaires (LMI). Les LMI, s'il s'avère qu'elles admettent une solution, peuvent être résolues à l'aide d'outils issus du domaine de l'optimisation convexe (El Ghaoui, 1997). Cependant, si théoriquement il est toujours possible de représenter la dynamique d'un système non linéaire affine en la commande par un système flou, en pratique cette représentation peut aboutir à l'obtention d'un très grand nombre de règles floues. Une manière de réduire le nombre de règles floues est de prendre en compte certaines non linéarités du modèle au sein d'incertitudes inhérentes à la modélisation, on se place alors dans le cas de la modélisation flou TS de systèmes incertains. L'objectif étant d'obtenir un modèle flou comportant un nombre fini et raisonnable de règles fixé a priori. En revanche, la synthèse de lois de commande pour de tels modèles s'avère plus difficile. Dans ce contexte, plusieurs approches de relaxation des LMI ont été proposées dans la littérature (Guerra *et al.*, 1999a ; Tuan *et al.*, 2001 ; Liu & Zhang, 2003 ; Kim & Lee, 2000).

La commande type PDC ne permet pas toujours de répondre à tous les critères de performance si, en plus des incertitudes, le système est perturbé ou à retard. C'est pourquoi des travaux traitant de la synthèse de commandes robustes pour la stabilisation de ce type de modèles ont été proposés ces dernières années (Tanaka *et al.*, 1996 ; Lee *et al.*, 2001 ; Palacios-Hernandez, 2004). Nous développons ce point dans la suite du manuscrit.

Au sein de la littérature on constate que la synthèse de lois de commande est peu traitée dans le cas du suivi de trajectoire (Tracking) pour les systèmes TS incertains et perturbés. En effet, le passage d'un problème de stabilité à celui d'un suivi de trajectoire n'est pas

nécessairement trivial. Ainsi, le thème principal de ce travail est le développement de structures de commande, pour des systèmes continus mis sous forme TS incertains et perturbés, permettant d'assurer la stabilité et la robustesse dans le cadre du suivi de trajectoire. Deux problématiques peuvent émerger : l'obtention de conditions sous forme de LMI et, la garantie des performances de poursuite.

Le **chapitre 1**, présente une vue d'ensemble bibliographique allant de la définition et mise en œuvre d'un modèle TS à la synthèse de commande robuste des systèmes flous du type TS incertains et perturbés. Ainsi, nous présentons d'abord les différentes techniques d'obtention d'un modèle TS avec un exemple d'illustration sur la méthode la plus employée pour y aboutir. Ensuite, nous aborderons les concepts de stabilisation de base des modèles TS. Un intérêt particulier sera consacré aux résultats les plus récents traitant du problème de la stabilité des modèles TS incertains et perturbés. Ainsi, cette synthèse bibliographique permettra de positionner notre travail dans le domaine et de poser clairement le problème abordé dans cette thèse.

Dans le **chapitre 2**, nous aborderons le problème de poursuite de trajectoire des modèles TS. Une présentation des techniques existantes pour résoudre cette problématique permettra de dresser un bilan synthétique sur les travaux publiés dans la littérature. Dès lors, nous présenterons la stratégie de commande que nous avons abordé dans ce travail. Par la suite, nous traiterons de la synthèse de commande pour les modèles flous TS soumis à des perturbations externes. La synthèse de commande proposée se base sur la minimisation de l'erreur de poursuite par rapport aux perturbations selon un critère H_∞ . Le résultat principal dans ce chapitre est de fournir des conditions relâchées au sens de l'optimisations convexes LMI, en l'occurrence un maximum d'atténuation des perturbations en assurant la poursuite. Des résultats de simulations illustreront les performances obtenues.

Les principaux résultats du **chapitre 3**, traitent essentiellement de la synthèse de commande pour des modèles TS incertains et perturbés. Dans un premier temps, l'approche est élaborée dans le cas où tous les états sont disponibles. Deux approches de synthèse différentes seront présentées afin de garantir les performances de poursuite. Il s'agit d'une approche dont les résultats sont écrits sous forme de BMI (Bilinear Matrix Inequality) et d'une approche obtenue directement sous la forme de LMI. Nous montrerons ensuite, à travers des résultats de simulation, que la seconde approche assure de meilleures performances que la première.

Notamment, à cause de la conservativité des résultats de la première approche. Nous considérerons également un observateur dans le cas où tous les états ne sont pas disponibles. Les résultats, également exprimés sous forme LMI, seront illustrés à travers un exemple en simulation.

Dans le **chapitre 4**, nous traitons du problème de poursuite de trajectoire pour les modèles TS incertains en nous basant sur le concept de la commande optimale. La méthode proposée consiste à minimiser un critère quadratique relatif à la commande et à l'erreur de poursuite. Les résultats ainsi obtenus sont présentés directement sous forme de problème à valeurs propres généralisées GEVP (General Eigen-Value Problem). L'approche proposée concerne la synthèse de commande, aussi bien dans le cas où tous les états sont disponibles que celui avec observateur. Les techniques de commande proposées assurent la stabilité des structures de commande, la robustesse vis-à-vis des incertitudes et la mise sous forme LMI des conditions des théorèmes proposés.

Chapitre 1

Stabilité et stabilisation des modèles TS

1.1. Introduction	9
1.2. Modèle flou de type TS.....	10
1.2.1. Modèle flou TS.....	10
1.2.2. Construction d'un modèle flou TS.....	11
1.2.3. Analyse de stabilité des modèles TS.....	15
1.3. Lois de commande floue et conditions de stabilisation de base.....	16
1.3.1. Problème d'optimisation convexe LMI	16
1.3.2. Lois de commande floue.....	16
1.3.3. Stabilisation des modèles TS avec une loi de commande du type PDC.....	20
1.3.4. Stabilisation avec observateur flou	23
1.3.4.1. Observateur flou TS.....	23
1.3.4.2. Commande PDC avec observateur flou.....	25
1.4. Commande robuste des modèles TS.....	25
1.4.1. Modèles TS incertains.....	26
1.4.2. Modèles TS perturbés : atténuation des perturbations	27
1.4.3. Modèles TS incertains et perturbés.....	30
1.4.4. Autres approches de synthèse.....	32
1.4.4.1 Placement de pôles.....	32
1.4.4.2 Commande optimale.....	33
1.5. Conclusion.....	34

Chapitre 1

Stabilité et stabilisation des modèles TS

1.1. Introduction

Ce chapitre a pour objet de présenter certains travaux sur la modélisation la stabilité, et la stabilisation des modèles flous de type Takagi Sugeno (TS). En effet, la problématique de poursuite de trajectoires des modèles de type TS, que nous abordons dans ce travail, repose essentiellement sur les travaux et méthodes détaillés dans cette partie.

Ainsi, ce chapitre sera structuré comme suit. Nous présentons d'abord les différentes techniques d'obtention d'un modèle TS et donnerons un exemple d'illustration sur la méthode la plus employée pour y aboutir. Ensuite, la seconde partie est consacrée à la présentation des notions de stabilité et de stabilisation de ce type de modèles rencontrées dans la littérature. Un recensement non exhaustif des lois de commande pour les modèles TS proposés sera présenté. A partir de là, on s'intéressera aux résultats les plus récents traitant du problème de la synthèse de commande robuste pour les modèles TS incertains et perturbés, dans le cas de la stabilisation. Cette étude permettra de positionner notre travail dans le domaine et de poser clairement le problème abordé dans cette thèse.

1.2. Modèle flou de type TS

1.2.1. Modèle flou TS

Le modèle flou de Takagi-Sugeno (TS) d'un système dynamique est décrit par un ensemble de règles floues **Si-Alors**. Sa caractéristique principale est qu'il représente localement les relations entrées sorties d'un système en exprimant chaque conclusion par un système linéaire (Takagi & Sugeno, 1985).

La $i^{\text{ème}}$ règle du modèle flou s'écrit:

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_i^1 \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_i^p \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

F_i^j est l'ensemble flou et r est le nombre de règles **Si-Alors**. $x(t) \in R^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur des commandes, $y(t) \in R^q$ est le vecteur de sortie du système, $A_i \in R^{n \times n}$, est la matrice d'état, $B_i \in R^{n \times m}$, est la matrice d'entrée du système, $C_i \in R^{q \times n}$ est la matrice de sortie et $z_1(t) \sim z_p(t)$ sont les prémisses fonctions de l'état.

Pour une paire $(y(t), u(t))$ donnée, l'inférence du système flou est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\text{où } z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)], \quad w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_i^j(z_j(t)) \quad i=1, 2, \dots, r \quad (1.3)$$

$F_i^j(z_j(t))$ est la valeur de la fonction d'appartenance $z_j(t)$ dans l'ensemble flou F_i^j , et $\forall t \geq 0$ on a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

En posant :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.5)$$

Le modèle TS (1.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

Les $h_i(z(t)) \geq 0$ possèdent la propriété de somme convexe : $\forall t \geq 0 \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ (1.7)

1.2.2. Construction d'un modèle flou TS

Pour obtenir un modèle flou TS, trois méthodes distinctes peuvent être employées :

- La première dite par identification ([Gasso et al., 1999](#) ; [Gasso, 2000](#)), permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement.
- La seconde méthode consiste à linéariser le modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement choisis judicieusement ([Tanaka & Wang, 2001](#) ; [Ma et al., 1998](#)) ; dans ce cas il s'agit de modèles locaux affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interpolation des modèles locaux avec des fonctions d'activation conçu de manière judicieuse en fonctions des spécifications souhaitées (triangulaire, gaussienne,...etc.)
- La troisième approche est adaptée pour les systèmes non linéaires de complexité modérée. Dans ce cas, le modèle flou TS représente de manière exacte le modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état et est obtenu par transformation

polytopique convexe. On effectue ainsi un découpage des non linéarités qui permet de définir des modèles locaux en fonction du nombre des non linéarités (Tanaka *et al.*, 1998a ; Morère, 2001 ; Guerra & Vermeiren, 2003b).

Dans les deux dernières approches, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire. Notons aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle TS n'est pas unique.

Etant donné que la dernière approche représente le modèle non linéaire d'une façon exacte, nous l'explicitons à travers un exemple illustrant la construction d'un modèle TS. Le lecteur pourra se référer à (Ma *et al.*, 1998 ; Gasso, 2000 ; Tanaka & Wang, 2001) pour plus de détails sur les deux premières approches d'obtention d'un modèle TS. Pour obtenir à partir d'une non linéarité les fonctions d'appartenance associée d'un modèle flou, on utilise le lemme suivant.

Lemme 1.1 : (Morère, 2001)

Si $\forall x \in [-b, a], a, b \in R^+, f(x) : R \rightarrow R$ borné sur $[-b, a]$ alors il existe deux fonctions $w_1(x)$ et $w_2(x)$ ainsi que deux réels α et β tels que :

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x)$$

$$w_1(x) + w_2(x) = 1, w_1(x) \geq 0, w_2(x) \geq 0$$

Preuve :

Considérons la fonction $f(x)$ bornée tel que $\underline{f} \leq f(x) \leq \bar{f}$, on peut alors toujours écrire:

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x) \text{ avec } \alpha = \bar{f}, \beta = \underline{f}, w_1 = \frac{f(x) - \underline{f}}{\bar{f} - \underline{f}} \text{ et } w_2 = \frac{\bar{f} - f(x)}{\bar{f} - \underline{f}}.$$

■

Remarque1.1 :

Dans le cas général, si on considère un modèle non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \tag{1.8}$$

Avec $f(0) = 0$ et sous l'hypothèse que les champs de vecteurs f et g soient bornés sur R^n , alors le modèle TS représente de façon exacte le modèle non linéaire (1.8) pour $x \in R^n$. Dans

le cas contraire, sous la condition f et g continues, alors l'équivalence n'est vraie que sur un sous-espace compact de R^n (Tanaka *et al.*, 1998a ; Morère, 2001).

Exemple 1.1 :

On considère le modèle non linéaire autonome de dimension 2 suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) & 0 \\ 0 & x_2^3(t) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Ce modèle peut être réécrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)} & 0 \\ 0 & x_2^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) présente deux non linéarités qu'on notera $N_1(x_1(t))$ et $N_2(x_2(t))$ respectivement tels que :

$$N_1(x_1(t)) = \frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)}, \quad N_2(x_2(t)) = x_2^2(t) \quad (1.11)$$

Nous remarquons que le terme non linéaire $N_1(x_1(t))$ est borné $\forall x(t) \in R^n$ i.e $N_1(x_1(t)) \in [\sin(x_{1_0})/x_{1_0}, I]$ (où $\sin(x_{1_0})/x_{1_0} = \min(\sin(x_1)/x_1) \approx -0.217$) alors que le terme $N_2(x_2(t))$ ne peut l'être que sur un compact défini par $x_2(t) \in [-a, a]$, avec $a > 0$. Ainsi, on peut transformer les termes non linéaires $N_1(x_1(t))$ et $N_2(x_2(t)) \forall x(t) \in R^n \times [-a, a], a > 0$, tel que :

$$N_1(x_1(t)) = F_1^1(x_1(t)) \cdot I + F_1^2(x_1(t)) \cdot \frac{\sin(x_{1_0})}{x_{1_0}} \quad (1.12)$$

$$N_2(x_2(t)) = F_2^1(x_2(t)) \cdot a^2 + F_2^2(x_2(t)) \cdot 0 \quad (1.13)$$

avec les ensembles flous donnés par :

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{(\sin(x_1(t))/x_1(t)) - (\sin(x_{l_0})/x_{l_0})}{1 - (\sin(x_{l_0})/x_{l_0})}, F_1^2(x_1(t)) = \frac{1 - (\sin(x_1(t))/x_1(t))}{1 - (\sin(x_{l_0})/x_{l_0})} \quad (1.14)$$

$$F_2^1(x_2(t)) = \frac{x_2(t)^2}{a^2}, F_2^2(x_2(t)) = 1 - \frac{x_2(t)^2}{a^2} \quad (1.15)$$

On aboutit alors au modèle TS correspondant à partir des 4 combinaisons possibles des bornes des termes non linéaires $N_1(x_1(t))$ et $N_2(x_2(t))$, décrits par les matrices f_i suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^1(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^1(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^2(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^1(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_{l_0})}{x_{l_0}} & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \text{Si } x_1(t) \text{ est } F_1^2(x_1(t)) \text{ et } x_2(t) \text{ est } F_2^2(x_2(t)) \text{ Alors } \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sin(x_{l_0})}{x_{l_0}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cette transformation conduit à un certain nombre de modèles locaux LTI (Linear Time Invariant) dépendant du nombre de non linéarités contenues dans la fonction $f(t)$. En règle générale si $f(t)$ présente κ termes non linéaires alors le modèle TS est constitué d'au plus 2^κ modèles locaux. Notons également que la transformation adoptée conditionne fortement les résultats d'analyse puisque les matrices des modèles locaux en dépendent directement selon des objectifs fixés préalablement.

A partir de cet exemple, nous avons montré que le nombre de règle d'un modèle TS exact, augmente en fonction des non linéarités à prendre en compte dans le modèle non linéaire, ce qui provoque plus de conservativité des résultats. Pour diminuer le nombre de règles, une représentation sous forme descripteur d'état à été élaboré (Taniguchi et al., 2001). La forme descripteur d'un modèle TS s'écrit alors comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^e v_k(z(t)) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

où r et e sont respectivement le nombre de règles associées au membre de gauche et de droite de l'équation d'état, les $v_k(z(t))$ ont les mêmes propriétés que les $h_i(z(t))$ définis précédemment. Durant ce mémoire, nous nous traiterons pas de ce type de modèle mais uniquement ceux décrits par (1.6).

Après cette étape de modélisation, nous abordons dans la suite le problème de stabilisation du modèle TS, notamment la synthèse de loi de commande. Nous pouvons avoir recours à une théorie de base pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires. Parmi ces théories le critère de Popov (Melin & Vidolov, 1996), la première et la seconde méthode de Lyapunov ont été largement appliqués dans la littérature. En effet, la structure d'un modèle TS se prête à l'application des concepts et des approches de l'automatique classique par le fait que ce type de modèle est une interconnexion d'un ensemble de modèles linéaires locaux. Un aperçu sur les concepts de stabilité les plus utilisés dans l'étude des modèles TS est rappelé dans ce qui suit.

1.2.3. Analyse de stabilité des modèles TS

L'analyse de la stabilité des modèles flous est généralement basée sur les fonctions de Lyapunov candidates (Borne et al., 1993 ; Khalil, 1996). Un rappel sur la théorie de Lyapunov donné en Annexe A, montre les différentes fonctions de Lyapunov les plus souvent employées dans la théorie de stabilité des modèles TS. Nous nous limitons dans ce travail à l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques, de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), P > 0 \quad (1.18)$$

1.3. Lois de commande floue et conditions de stabilisation de base

1.3.1. Problème d'optimisation convexe LMI (Linear Matrix Inequality)

Les résultats d'analyse et de synthèse dans ce mémoire, se basent essentiellement sur des formulations de problèmes d'optimisations convexes. Celles-ci présentent l'avantage d'avoir un coût de calcul raisonnable. En effet, depuis quelques années, de nombreux travaux concernant l'analyse et la synthèse de la commande des systèmes dynamiques se résolvent par l'intermédiaire de problèmes convexes. Parmi ces méthodes, la méthode du point intérieur est utilisée dans le cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives (Nesterov & Nemirovski, 1994). En automatique, cette approche est connue sous le nom de LMI (Linear Matrix Inequalities) (Boyd et al., 1994). Un bref rappel sur des problèmes LMI classiques, ainsi que certains lemmes utiles pour la suite de ce travail sont présentés en Annexe B.

1.3.2. Lois de commande floue

Pour garantir la stabilité d'un modèle de type TS, nous avons recours à la synthèse d'une commande stabilisante. Pour ce faire, en s'inspirant des résultats d'analyse de stabilité des systèmes dynamiques, on aboutit à des conditions de synthèse de commande par retour d'état ou bien par retour de sortie (Wang et al., 1996). Les conditions sur les gains de commande ainsi obtenues, ne sont pas nécessairement formulées directement en un problème LMI. En effet, dans certains cas, on obtient des contraintes BMI (Bilinear Matrix Inequalities) (§ B.3), qui nécessitent un ensemble de transformations matricielles bijectives à posteriori. Dans ce contexte, pour générer un signal de commande stabilisant pour le système (1.6), plusieurs formules de commande floue sont proposées dans la littérature, on ne citera ici que les plus utilisés et celles desquelles nous nous sommes inspirés par la suite.

Loi de commande PDC (Wang et al., 1996 ; Wang et al., 1995) (Parallel Distributed Compensation)

Une loi de commande fréquemment utilisée pour les modèles non linéaires TS est la loi PDC. Elle est donnée par la loi de commande suivante

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (1.19)$$

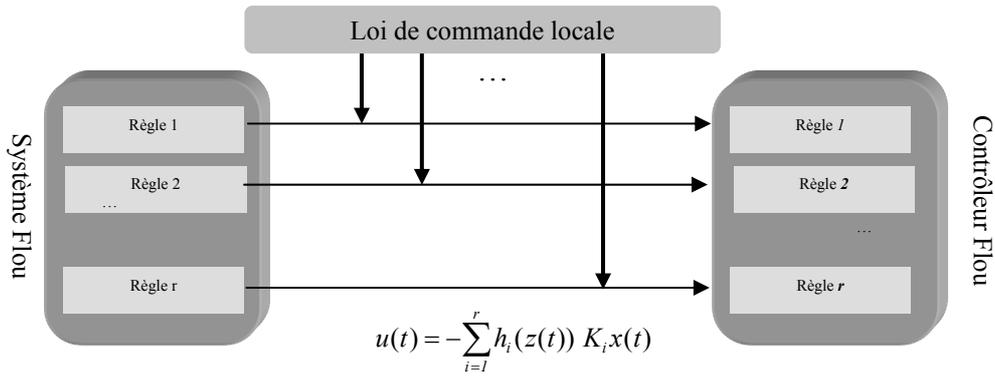


Figure 1.1 : Principe de la commande PDC

où $K_i \in R^{m \cdot p}$ est le gain de retour local relatif au $i^{\text{ème}}$ modèle. Le principe de cette méthode illustrée par la Figure 1.1, est d'élaborer une commande par retour d'état pour chaque modèle local, puis d'effectuer une interconnexion floue d'une manière similaire à la technique utilisée pour les modèles locaux. L'avantage majeur de cette loi de commande, est de respecter la même structure de découpage des non linéarités que celle utilisée pour l'obtention du modèle TS. Dans le cas où le modèle TS est obtenu par découpage exact, cette loi de commande est donc valable quelque soit le point du sous espace compact de l'espace d'état.

Plusieurs variantes de ce type de commande ont été alors développées dans la littérature à partir de la commande PDC, nous pouvons citer :

Loi de commande PDC proportionnel

C'est une loi de commande très similaire à celle de PDC elle est proposée dans (Lin & Er, 2001)

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F x(t) \quad (1.20)$$

Dans ce cas, on multiplie la commande PDC par un gain de retour $F \in R^{m \cdot p}$ commun à tous les modèles locaux avec $k_i \in R$ un coefficient de proportionnalité relatif à chacun des modèles locaux. L'avantage d'une telle loi de commande est la réduction du nombre des inconnues à $(r+mp)$ au lieu de (rmp) pour la loi de commande PDC.

Loi de commande augmentée du terme $\sum_{i=1}^r \frac{\partial h_i(z(t))}{\partial t} K_i x(t)$

Cette loi de commande s'inspire de la précédente et permet de réduire le conservatisme de stabilisation quadratique (Tanaka *et al.*, 2001). En effet, elle s'adapte parfaitement aux fonctions de Lyapunov polyquadratique § A.2. C'est une loi de commande qui tient compte de la variation des fonctions d'activation ; elle est défini comme suit

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) k_i F x(t) - \sum_{i=1}^r \frac{\partial h_i(z(t))}{\partial t} K_i x(t) \quad (1.21)$$

La caractéristique principale de cette loi est qu'elle impose des fonctions d'activation continues dérivables, pour lesquelles le calcul en temps réel de la dérivée du tout évident.

Loi de commande CDF (Compensation et Division pour modèles Flous)

Dans (Guerra *et al.*, 1999a), les auteurs ont proposé une loi de commande dite CDF pour un cas particulier de modèles TS afin réduire le nombre de conditions mise en œuvre. Ceci entraîne une réduction du conservatisme pouvant être occasionné par la loi de type PDC. La loi de commande CDF s'écrit (Guerra & Vermeiren, 2001) :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \alpha_i K_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \alpha_i} x(t) \quad (1.22)$$

Notons que dans le cas particulier de la colinéarité positive des matrices d'entrée, la boucle fermée s'écrit sans les modèles croisés i.e. $i=j$, ce qui permet de réduire le degré de conservatisme des résultats quadratiques par rapport à la loi de commande PDC ; en effet, il n'y a que r LMI à vérifier au lieu de $r(r+1)/2$, ce qui représente l'avantage majeur apporté par cette loi de commande.

Cependant dans le cas général, on obtient des conditions BMI difficiles à transformer en LMI. Dans (Morère, 2001), l'auteur propose un algorithme pour résoudre ce problème d'optimisation non convexe.

Lois de commande à base de CDF et PDC.

D'autres lois de commande s'inspirant de celle de CDF et PDC ont été proposées par (Park *et al.*, 2001). La première est légèrement différente de la commande CDF et peut être exprimée par :

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i}{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))\alpha_i} x(t) \quad (1.23)$$

Notons que si $\alpha_i = I, \forall i = 1, 2, \dots, r$, cette loi de commande ainsi que la loi CDF se ramènent à une loi de commande de type PDC. De plus, pour un chagement de variable bijectif $K_i = \alpha_i F_i$ on retrouve une loi de commande CDF. Sous réserve de la colinéarité positive des matrices d'entrée, cette loi permet également d'éviter les modèles croisés (i.e. $i \neq j$).

La seconde peut être vue comme une loi de commande PDC filtré par un filtre passe bas sur les systèmes LPV (Linear Parameter Variant) (Apkarian *et al.*, 1995). Elle est donnée par :

$$\dot{u}(t) = A_c u(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i}_{\text{commande PDC}} x(t) \quad (1.24)$$

où $A_c \in R^{m \times m}$. Il s'agit de la loi de commande PDC filtrée par la fonction de transfert $G(s) = (sI - A_c)^{-1}$.

Par ailleurs, il existe d'autres lois de commande qui s'inspirent de la commande PDC et qui se basent sur le retour de sortie. Parmi ces lois, on distingue, la commande DPDC (dynamique PDC) qui représente un contrôleur non linéaire (Li *et al.*, 2000). Ensuite la loi de commande OPDC (Output PDC) qui est de la forme (Chadli, 2002)

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i y(t) \quad (1.25)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à la synthèse d'une loi de commande de type PDC ainsi qu'aux résultats de stabilisation utilisant ce type de loi de commande. Les travaux dans la littérature ont montré son efficacité pour les modèles TS du point de vue

entrée sortie. En effet, quelque soit le type de fonctions d'appartenance et quelque soit la dimension des entrées sorties cette loi de commande ne présente pas de difficultés, elle permet aussi d'approcher au mieux les problèmes qui se posent dans la stabilisation des modèles TS. En outre, les approches que nous proposons dans ce travail portent sur la synthèse d'une loi de commande similaire à celle de PDC, mais pourront être étendues par la suite à d'autres type de lois de commande, selon la nature et les performances désirées.

1.3.3. Stabilisation des modèles TS avec une loi de commande du type PDC

La commande PDC, notamment la stabilisation quadratique, se base sur la fonction de Lyapunov pour montrer la convergence du modèle flou en boucle fermée, en l'occurrence déterminer les retours d'états correspondants à chaque modèle LTI composant le modèle TS. Ainsi, à partir d'une telle fonction, on peut trouver une matrice définie positive P commune entre tous les modèles locaux en boucle fermée. Pour obtenir le modèle flou en boucle fermée, on applique la commande PDC au modèle TS (1.6). Ainsi le modèle flou obtenu est le suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (1.26)$$

avec $G_{ij} = A_i - B_i K_j$

Le premier résultat concernant la stabilisation des modèles TS par la commande PDC a été donné par Wang et al ([Wang et al., 1996](#)). En posant

$$Y_{ij} = G_{ij}^T P + P G_{ij} \quad (1.27)$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 1.2 : ([Wang et al., 1996](#))

L'équilibre du modèle flou continu (1.26) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que :

$$Y_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.28)$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} < 0, \quad i < j \quad (1.29)$$

$$\text{avec } h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0, \quad t > 0 \quad (1.30)$$

Elaborer un régulateur flou PDC consiste donc à déterminer les matrices de gains de retour d'état K_j satisfaisant les conditions du théorème 1.2 avec l'existence d'une matrice P définie positive. Pour mettre au point ce régulateur, on se ramène donc à un problème de faisabilité des LMI qui peut être résolu à l'aide des outils issus de l'optimisation convexe, et plus particulièrement des LMIs (Linear Matrix Inequalities) (Boyd *et al.*, 1994). Pour cela, on effectue les changements de variables bijectifs usuels suivants (Wang *et al.*, 1996) : $N = P^{-1}$ et $K_j = Y_j P^{-1}$, d'où après congruence avec $N = P^{-1}$ des inégalités (1.28) et (1.29), on obtient les expressions LMI suivantes par rapport aux variables N et Y_j

$$NA_i^T + A_i N - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.31)$$

$$A_i N + NA_i^T + A_j N + NA_j^T - B_i Y_j - Y_j^T B_i^T - B_j Y_i - Y_i^T B_j^T < 0, \quad i < j \quad (1.32)$$

Remarque 1.2 :

Notons que le nombre de conditions à vérifier est $r(r+1)/2$, et que ce nombre croît en fonction du nombre de règles r .

Le fait d'utiliser une fonction de Lyapunov quadratique implique la recherche d'une matrice $P = P^T > 0$ unique qui se retrouve dans toutes les $r(r+1)/2$ inégalités. Il est alors clair que le nombre de règles est un facteur essentiel pour réduire le conservatisme des résultats issus des conditions (1.31) et (1.32) du théorème 1.2.

Ainsi, disposant d'un modèles TS, le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type PDC est celui du conservatisme des conditions sur les gains de retour. Par conséquent, dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des conditions de relaxation LMI ont fait l'objet de plusieurs travaux notamment ceux développés dans (Tanaka *et al.*, 1998a) où les auteurs se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant pour réduire le conservatisme de conditions de stabilisations. Kim et Lee (Kim & Lee, 2000) s'inspirent de ces travaux, en introduisant des conditions supplémentaires. Dans (Teixeira *et al.*, 2003), les auteurs proposent d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples pour rechercher plusieurs matrices définies positive au lieu de chercher qu'une seule commune, comme dans le cas de stabilisation par la fonction de Lyapunov quadratique. Parmi les résultats de relaxation utilisant une fonction de Lyapunov quadratique, nous pouvons citer des conditions de relaxations très pertinentes proposées par (Tuan *et al.*, 2001) qui sont donnés dans le théorème suivant :

Théorème 1.3 : (Tuan *et al.*, 2001)

Les conditions (1.28) et (1.29) du théorème 1.2 sont vérifiées si l'une des conditions suivantes est vraie

$$1) \quad \Upsilon_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} + \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (1.34)$$

2) Il existe des matrices symétriques $Q_{ij} = Q_{ji}$, $i \neq j$ telles que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r-1} \Upsilon_{ii} & Q_{ij} \\ Q_{ij} & \frac{1}{r-1} \Upsilon_{jj} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}) < Q_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq r \quad (1.36)$$

3) Il existe des matrices symétriques $Q_{ij} = Q_{ji}$, $i \neq j$ telles que

$$\Upsilon_{ij} + \sum_{j \neq i}^r Q_{ij} < 0, \quad Q_{ij} \geq 0, \quad Q_{ij} \geq \frac{1}{2} (\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji}), \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (1.37)$$

La première condition de ce théorème, ne nécessite l'existence d'aucune matrice définie positive supplémentaire, ce qui facilite l'obtention d'une solution au problème LMI, notamment quand il s'agit d'un système augmenté avec un observateur par exemple.

Dans le même objectif de ce dernier théorème, un autre résultat complémentaire concernant la relaxation est présenté dans (Liu & Zhang, 2003). Le résultat de ce théorème stipule l'existence de matrices définies positives qui peuvent être libres, ce qui permet de relâcher les LMI trouvées. Par contre, cette condition de relaxation peut impliquer des difficultés de mise au point quand il s'agit de conditions BMI.

Théorème 1.4 : (Liu & Zhang, 2003)

On considère les Υ_{ij} définies en (1.27). L'équilibre d'un modèle flou continu décrit par (1.26) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, des matrices $Q_{ij} > 0$ et $Q_{ij} = Q_{ij}^T$ telle que :

$$\Upsilon_{ii} + Q_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.38)$$

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} + Q_{ij} + Q_{ji} < 0, \quad i \leq j \leq r \quad (1.39)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{r(r-1)} & Q_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (1.40)$$

Remarque 1.3 :

Dans le cadre de la relaxation, les conditions de (Kim & Lee, 2000) sont incluses dans celle du théorème 1.4. On note aussi que ce type de relaxation est utile que si les Υ_{ij} existent et ne sont pas nuls, c'est-à-dire qu'il est nécessaire que les sous modèles croisés existent.

Nous avons montré à partir du modèle TS, une méthode de synthèse de commande type PDC. Cette loi de commande très utilisée, est basée sur la connaissance de l'état. Par conséquence, dans le cas où l'état du système n'est pas totalement disponible, il est nécessaire d'avoir recours à un observateur permettant d'estimer l'état du système.

Dans le cas des modèles TS, on privilégie les observateurs flous TS se basant généralement sur des modèles linéaires de type « Luenberger ». Ces derniers, ont pour avantage d'avoir la même structure que les modèles TS.

1.3.4. Stabilisation avec observateur flou

Plusieurs travaux concernant la synthèse de commande avec un observateur flou ont été élaborés pour la stabilisation des modèles TS (Xiao-Jun *et al.*, 1998 ; Xiadong & Zhang, 2002). Les résultats existant pour ce type d'observateur sont très variés selon la fonction de Lyapunov choisis et selon le type de commande utilisé pour stabiliser le modèle flou. Les principes de base de ce type d'observateurs sont synthétisées dans ce qui suit.

1.3.4.1. Observateur flou TS

La structure la plus simple d'un observateur flou TS est obtenue par interconnexion de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger. Il s'écrit d'une façon générale comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.41)$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{z}(t)$ représentent respectivement l'état estimé de l'observateur flou et le vecteur de prémisse reconstruit, et L_i les gains de l'observateur (Tanaka *et al.*, 1998a ; Guerra & Vermeiren, 2003).

Hypothèse 1.1 :

Tout au long de ce travail, on supposera que toutes les variables de prémisses sont mesurables c'est à dire $\hat{z}(t) = z(t)$ et les fonctions d'activation de l'observateur sont les mêmes que celles caractérisant le modèle TS (1.26)

Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, pour assurer la convergence de l'observateur, le nombre de conditions est augmenté de façon significative par l'apparition des produits $h_i(\hat{z}(t))h_j(z(t))$ (Lauber, 2003). De plus, dans un contexte de commande avec observateur, la classe des systèmes vérifiant cette hypothèse est à notre connaissance, la seule permettant d'obtenir un théorème de séparation entre commande et observateur (Ma *et al.*, 1998 ; Yoneyama *et al.*, 2000).

Pour évaluer la convergence de l'observateur flou (1.41), on considère l'erreur d'estimation du vecteur d'état donnée par

$$e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.42)$$

Note : L'indice 'o' indique que l'erreur est liée à l'observateur, un indice 'p' signifie l'erreur de poursuite. On adoptera cette notation tout le long du manuscrit.

Tenant compte du modèle TS (1.6) et l'observateur (1.41), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [A_i - L_i C_j] e_o(t) \quad (1.43)$$

Ainsi, la synthèse d'un tel observateur consiste en la détermination des gains locaux L_i afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation (1.43). Les

conditions de synthèse d'un observateur flou (1.41) sont duales de celles d'un contrôleur flou (1.26) (Ma *et al.*, 1998 ; Yoneyama *et al.*, 2000).

1.3.4.2. Commande PDC avec observateur flou

Dans le cas où tous les états ne sont pas mesurables, la commande PDC synthétisée emploie le retour d'état reconstruit et nous pouvons alors écrire.

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (1.44)$$

La boucle fermée complète composée de l'état du système et l'erreur d'estimation, permet d'écrire le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_o \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Etant donnée que toutes les variables de prémisses sont mesurables, il existe un principe de séparation (Ma *et al.*, 1998 ; Yoneyama *et al.*, 2000). On peut donc déterminer les gains K_i à partir des conditions du théorème 1.2 et les gains L_i à partir des mêmes conditions appliquées au problème dual, i.e ; avec $G_{ij} = A_i^T - C_j^T L_i^T$. En effet, la propriété de séparation garantie pour les systèmes linéaires (Khalil, 1980) est également valide dans le cas des modèles TS dont les variables de décision sont mesurables (Ma *et al.*, 1998) mais n'est pas toujours trivial à déterminer. Cette propriété garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov, paramétrée par un scalaire positif α , de la forme suivante:

$$V(x(t)) = x^T(t) P(\alpha) x(t) \quad (1.46)$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \alpha P_2 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

Jusqu'ici les lois de commande développées ne tiennent pas compte des erreurs de modélisations, et/ou de perturbations externes pour les modèles TS. Par ailleurs, d'autres problèmes récurrents ont fait l'objet de plusieurs travaux. Notamment, la synthèse de commande robuste pour les modèles TS incertains et/ou soumis à des perturbations externes.

Nous présentons, dans la section suivante de manière synthétique, certaines approches de synthèse de commande robuste pour les systèmes TS incertains et perturbés.

1.4. Commande robuste des modèles TS

La commande robuste concerne les systèmes incertains et/ou perturbés. Dans la littérature plusieurs travaux ont été développés concernant la synthèse de commandes robustes pour les modèles TS avec incertitudes paramétriques bornées. Nous pouvons citer les principaux résultats qui traitent de la stabilisation avec une commande sans observateur pour les modèles TS incertains et/ou perturbés (Zhao et al., 1996 ; Lee et al., 2001 ; Tanaka & Wang, 2001 ; Tanaka et al., 1996). La commande avec observateur et variables de prémisses mesurables est abordé par Yoneyama et al dans (Yoneyama et al., 2000) avec le principe de séparation. En revanche dans le cas où les variables de prémisses ne sont pas mesurables, dans (Lauer, 2003) l'auteur considère le découpage des variables non mesurables comme des incertitudes de modélisation.

Vu la diversité des résultats existant sur la stabilisation des modèles TS incertains et/ou perturbés, nous nous restreindrons sur quelques concepts de base que nous avons exploités, dans les chapitres suivants pour la mise en œuvre des approches développées dans le cas du suivi de trajectoire.

1.4.1. Modèles TS incertains

Le modèle TS avec incertitudes paramétriques s'écrit d'une manière générale comme suit: (Tanaka & Wang, 2001)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))[(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(C_i + \Delta C_i)x(t) \end{cases} \quad (1.48)$$

avec $\Delta A_i = Ha\Delta a_i Ea_i$, $\Delta B_i = Hb\Delta b_i Eb_i$ et $\Delta C_i = Hc\Delta c_i Ec_i$ où Ha , Hb , Hc , Ea_i , Eb_i , Ec_i sont des matrices constantes, et les incertitudes $\Delta a_i(t)$, $\Delta b_i(t)$ et $\Delta c_i(t)$ sont bornées dans le temps de la façon suivante :

$$\Delta a_i^T(t)\Delta a_i(t) \leq I, \Delta b_i^T(t)\Delta b_i(t) \leq I \text{ et } \Delta c_i^T(t)\Delta c_i(t) \leq I$$

En général, les incertitudes rencontrées dans ce type de modèle sont dus à la modélisation du système qui est effectuée de manière à réduire le nombre de règles (Taniguchi *et al.*, 2001 ; Lauber, 2003). Le principe de synthèse de commande dans ce cas, se base sur l'application de la loi de commande (1.44) au système (1.48) avec l'observateur flou (1.41), en considérant la dynamique de l'erreur d'estimation (1.42). Le problème revient alors à stabiliser le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}_o \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i)K_j & (B_i + \Delta B_i)K_j \\ \Delta A_i + L_i\Delta C_j - \Delta B_i K_j & A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e_o \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Ainsi, en ce qui concerne la commande robuste avec observateur flou pour les modèles TS incertains et en se plaçant dans le cas où le théorème de séparation (Ma *et al.*, 1998) n'est pas applicable, on introduit les non linéarités qui dépendent des variables de prémisses non mesurables dans les matrices contenant les incertitudes. Dans (Lauber, 2003) une méthode basée sur le couplage des parties commande et observateur est proposée, puis résout le problème d'une façon séquentielle grâce à deux problèmes LMI. Une partie des travaux de (Chen *et al.*, 2000) rejoint également cette méthode. De la même manière que pour le cas de stabilisation, l'étude de stabilité, de tels systèmes repose sur la fonction de Lyapunov quadratique de la forme $V(x, e_o) = x^T P x + e_o^T P e_o$. Un résultat récent (Lauber *et al.*, 2004) consiste à résoudre ce problème sous forme de LMIs d'une manière systématique.

1.4.2. Modèles TS perturbés : atténuation des perturbations

Les systèmes non linéaires sont également susceptibles d'être soumis à des perturbations externes. Ainsi l'atténuation des perturbations est parmi les spécifications des performances qu'il faut prendre en considération.

Un modèle TS soumis à une perturbation externe s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_{1i} u(t) + B_{2i} \varphi(t)\} \\ p(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{C_i x(t) + D_{1i} u(t) + D_{2i} \varphi(t)\}\end{aligned}\tag{1.50}$$

où $\varphi(t)$ représente la perturbation externe de borne supérieure connue $\varphi_{up} \geq \|\varphi(t)\|$ et $p(t)$ est la sortie à réguler. Pour ce qui suit, une définition de la norme H_∞ est nécessaire

Définition 1.1 : (Alazard *et al.*, 1999) on appelle norme H_∞ du transfert $T_{x\varphi}$ entre φ et p :

$$\|T_{z\varphi}\|_\infty = \sup_{\varphi(t) \neq 0} \frac{\|p(t)\|_2}{\|\varphi(t)\|_2}\tag{1.51}$$

L'objectif en plus de la stabilisation, est de déterminer une loi de commande qui atténue l'effet des perturbations externes $\varphi(t)$ sur la grandeur à réguler (norme H_∞) en boucle fermée avec un taux d'atténuation donnée η :

$$\|p(t)\|_2 \leq \eta \|\varphi(t)\|_2\tag{1.52}$$

Avec $\|p(t)\|_2^2$ définie par $\|p(t)\|_2^2 = \int_0^\infty p^T(t)p(t)dt$

$$\tag{1.53}$$

Une faible valeur de cette norme indique un faible effet des perturbations, le but est alors de déterminer des lois de commande qui permettent de minimiser cette norme, en l'occurrence une meilleure atténuation η .

Remarque 1.4 : Le taux d'atténuation η s'appelle aussi la performance H_∞ quadratique.

Pour assurer la stabilité du système (1.50) ainsi qu'une performance H_∞ quadratique, nous considérons une fonction de Lyapunov de type quadratique. Le théorème suivant donne une condition suffisante assurant cette performance :

Théorème 1.5 : (Boyd *et al.*, 1994)

En considérant le modèle (1.50), la norme H^∞ est assurée pour un taux d'atténuation inférieur à η si et seulement si il existe une fonction de Lyapunov quadratique $v(x) = x^T P x$ telle que

$$\frac{dV(x)}{dt} + p^T p - \eta^2 \varphi^T \varphi < 0 \quad (1.54)$$

Remarque 1.5 :

La condition (1.54) peut être écrite en ajoutant une matrice de pondération à la variable à réguler (Tseng *et al.*, 2001b)

$$\frac{dV(x)}{dt} + p^T Q p - \eta^2 \varphi^T \varphi < 0 \quad \text{avec } Q > 0 \quad (1.55)$$

En se plaçant dans le cadre des modèles TS contenant uniquement des perturbations externes sans matrice d'entrée, le modèle devient (Chiang *et al.*, 2001) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t) + \varphi(t)\} \quad (1.56)$$

Pour synthétiser une commande PDC (1.19) permettant de stabiliser et d'atténuer les perturbations du système (1.56), le critère H^∞ correspondant serait donc défini comme suit

$$\int_0^{t_f} x^T(t) Q x(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \varphi^T(t) \varphi(t) dt \quad (1.57)$$

Le système en boucle fermée est alors donné par

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[(A_i - B_i K_j) x(t) + \varphi(t) \right] \quad (1.58)$$

En considérant les conditions initiales de l'état du système, le critère (1.57) devient (Alazard *et al.*, 1999 ; Chiang *et al.*, 2001)

$$\int_0^{t_f} x^T(t) Q x(t) dt \leq x(0) P x(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} \varphi^T(t) \varphi(t) dt \text{ avec } P = P^T > 0. \quad (1.59)$$

Un premier résultat immédiat s'inspirant de la condition (1.59) montre une condition suffisante assurant la stabilité avec atténuation des perturbations.

On considère Y_{ij} définis en (1.27).

Théorème 1.6 : (Chiang et al., 2001)

Le système en boucle fermée (1.58) est stable, s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante positive constante η et des retours d'état K_i montrés dans (1.19) et qui satisfont les conditions suivantes :

$$Y_{ii} + \eta^{-1} P P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.60)$$

$$\frac{Y_{ij} + Y_{ji}}{2} + \eta^{-1} P P < 0, \quad i < j \quad (1.61)$$

1.4.3. Modèles TS incertains et perturbés

D'autres résultats en fonction des modèles étudiés sont disponibles. Notamment les résultats concernant les modèles TS soumis à des perturbations externes et avec incertitudes paramétriques. Parmi les résultats principaux, on peut se référer à (Tanaka et al., 1996 ; Lee et al., 2001). Dans (Lee et al., 2001) les modèles pris en compte peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_{1i} + \Delta B_{1i})u(t) + (B_{2i} + \Delta B_{2i})\varphi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [C_i x(t) + D_{1i}u(t) + D_{2i}\varphi(t)] \end{cases} \quad (1.62)$$

Pour ce type de modèle, les auteurs dans (Lee et al., 2001) donnent une condition suffisante sur les gains de retour assurant la stabilité et l'atténuation des perturbations sous forme d'un problème LMI. Ce résultat repose sur la structure particulière des incertitudes qui sont de la forme suivante :

$$[\Delta A_i \quad \Delta B_{1i} \quad \Delta B_{2i}] = HF(t)[E_{1i} \quad E_{2i} \quad E_{3i}] \quad i=1, 2, \dots, r \quad (1.63)$$

et H , E_{1i} , E_{2i} et E_{3i} sont des matrices constantes, et la matrice incertaine $F(t)$, est bornée dans le temps de la façon suivante :

$$F(t)^T F(t) \leq I \quad i=1, 2, \dots, r \quad (1.64)$$

Notons que cette structure nécessite deux matrices communes entre toutes les règles notées H et $F(t)$, ce qui n'est pas le cas dans la structure du modèle (1.48)

En posant :

$$Y_{ij} = \begin{bmatrix} P^{-1}A_i^T + A_iP^{-1} + Y_j^TB_{2i}^T + B_{2i}Y_j + 2\alpha Q & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \lambda^{-1}H^T & -\lambda^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -\eta^2 & (*) & (*) \\ E_{1i}P^{-1} + E_{3i}Y_j & 0 & E_{2i} & -\lambda^{-1}I & 0 \\ C_iP^{-1} + D_{2i}Y_j & 0 & D_{2i} & 0 & -I \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

Le symbole (*) indique la quantité transposée dans une matrice symétrique.

Le résultat principal peut être synthétisé par le théorème suivant :

Théorème 1.7 : (Lee et al., 2001)

Avec le modèle flou (1.62) et les Y_{ij} définis en (1.65), il existe une loi de commande (PDC) robuste stabilisante avec un taux de décroissance α de la fonction de Lyapunov quadratique. La performance H^∞ (1.55) est garantie pour un taux d'atténuation η pour les incertitudes admissibles, s'il existe une matrice $P > 0$, des matrices K_j et un scalaire $\lambda > 0$ tels que les conditions (1.28) et (1.29) sont satisfaites.

Les travaux que nous avons détaillés ne sont pas exhaustifs mais posent les bases de la synthèse de commande robuste dans le cas des systèmes TS. Aussi, on peut trouver également plusieurs méthodes récentes pour traiter le problème de commande robuste pour des systèmes TS incertains tels que (Lo & Lin, 2004 ; Assawinchaichote et al., 2004) dans le cas de systèmes TS incertains et singulièrement perturbés.

1.4.4. Autres approches de synthèse

1.4.4.1 Placement de pôles

La commande par placement de pôles est parmi les méthodes utilisées pour spécifier les performances souhaitées. Cette approche, consiste à construire une loi de commande de telle manière à ce que les valeurs propres en boucle fermée pour chaque sous modèle linéaire soient situées dans un domaine prédéfini (D), i.e. : $\sigma(A_i + B_i K_j) \subset D$

Bien entendu, ce placement de pôles n'est qu'une description du comportement du modèle non linéaire obtenu sous forme TS. La performance attendue (temps de réponse, coefficient d'amortissement...) sera donc une approximation attendue des dynamiques fixées pour tous les modèles locaux. Dans le cadre des modèles TS, l'idée est de caractériser des régions dans le demi plan complexe gauche (Chilali *et al.*, 1996) avec une fonction de Lyapunov en terme de problèmes LMI. Pour ce faire, on définit un domaine D par trois paramètres λ , ρ et \mathcal{G} selon la figure 1.2.

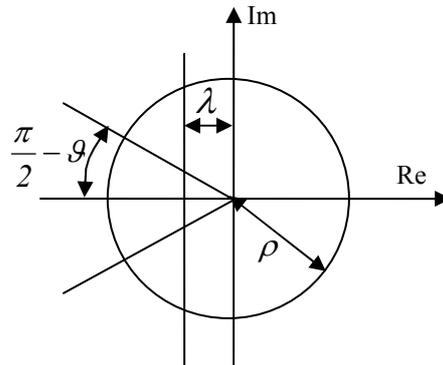


Figure 1.2. :Définition d'un domaine (D)

Pour un modèle linéaire, les valeurs propres de la matrice d'état A sont situées dans ce domaine (D), i.e. $\sigma(A) \subset D$ s'il existe une matrice $P > 0$ telle que (Chilali *et al.*, 1996)

$$A^T P + PA + 2\lambda P < 0 \quad (1.66)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho P & A^T P \\ PA & -\rho P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.67)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\mathcal{G})(A^T P + PA) & -\sin(\mathcal{G})(A^T P - PA) \\ \sin(\mathcal{G})(A^T P - PA) & \cos(\mathcal{G})(A^T P + PA) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.68)$$

Dans le cadre des modèles TS, ces méthodes de caractérisation ont été appliquées dans (Palacios-Hernandez, 2004). Dans ce contexte, Hong & Langari (Hong & Langari, 2000) procèdent de la même manière avec une atténuation des perturbations. Dans le cas de modèles TS incertains, les travaux de (Toulotte *et al.*, 2004) utilisent le placement de pôles pour toutes les incertitudes admissibles.

1.4.4.2 Commande optimale

La commande optimale est parmi les méthodes de synthèse de commande les plus élaborées pour spécifier les performances d'un système, notamment l'optimisation du coût de la commande, le temps, les grandeurs des variables d'état etc ... (Alazard *et al.*, 1999 ; Zhou *et al.*, 1995). Cette approche consiste à chercher un commande minimisant une fonction de coût notée J et qui est généralement de la forme quadratique suivante

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q x(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (1.69)$$

Où Q et R sont deux matrices définies positives de dimensions appropriées

Dans le cas linéaire, on utilise la commande par retour d'état, la recherche des gains revient à résoudre l'équation de Ricatti (Alazard *et al.*, 1999), ce type de contrôleur est connu sous le nom d'un problème LQR (Linear Quadratic Regulator). Cependant, pour les systèmes non linéaires en général, le problème d'optimisation se réduit à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi qui représente une équation aux dérivées partielles (Tanaka *et al.*, 1998). Dans le cas de la stabilisation des modèles TS, il existe plusieurs travaux concernant la commande optimale, ou plutôt sous optimale du fait de l'existence d'une borne supérieure, dans (Wu & Lin, 2000a) les auteurs proposent une méthode de conception d'un contrôleur flou optimal à horizons (temps) finis pour les modèles TS continus et discrets. Dans ce même contexte (Wu & Lin, 2000b) présentent une approche globale, c'est à dire, un contrôleur flou optimal à horizons libres (fixes) et à horizon infini. Dans (Park *et al.*, 2004) un contrôleur optimal avec des contraintes sur la commande est proposé. Ce type d'approche se transpose en utilisant la commande PDC (1.19) de la même manière que celle d'un système linéaire sous une formulation LMI, à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique (Tanaka & Wang, 2001). Nous exploiterons dans la suite de ce travail le résultat principal de cette dernière approche qui peut être synthétisé dans le théorème suivant:

Théorème 1.8 : (Tanaka & Wang, 2001)

Si μ est la borne supérieur de la fonction J telle que

$$J < x(0)^T P x(0) < \mu \tag{1.70}$$

Alors, les gains de retour de la commande PDC (1.19) sont obtenus en résolvant le problème d'optimisation suivant :

Minimiser μ
P

sous les contraintes

$$N > 0 \tag{1.71}$$

$$\begin{bmatrix} \mu & x^T(0) \\ x(0) & N \end{bmatrix} > 0 \tag{1.72}$$

$$Y_{ii} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{1.73}$$

$$Y_{ij} + Y_{ji} < 0 \quad i < j. \tag{1.74}$$

$$\text{avec } Y_{ij} = \begin{bmatrix} NA_i^T + A_i N - B_i Y_j - Y_j^T B_i^T & (*) & (*) \\ C_i N & -Q^{-1} & 0 \\ -Y_j & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \text{ et } K_i = Y_i N^{-1}$$

pour $t > 0$, $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$.

En utilisant les conditions du théorème 1.8, la borne supérieur de J (1.70) est égale à $x^T(0)Px(0)$, par conséquent la loi de commande adoptée est alors sous optimale puisque la borne supérieur de J dépend des conditions initiales i.e. $x^T(0)Px(0)$.

Cette dernière approche, sera exploitée par la suite pour proposer une synthèse de commande optimale pour les modèles TS dans le cas du suivi de trajectoire en rajoutant un modèle de référence.

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu bibliographique sur les différents problèmes des modèles TS. Nous avons mis en avant les principaux résultats de la littérature concernant

la stabilisation des systèmes représentés par des modèles TS. Nous avons également détaillé le principe de la commande PDC et la mise en œuvre d'observateur TS. Ces outils présentés serviront également pour les travaux que nous abordons dans les chapitres suivants

Par ailleurs, nous avons présenté également quelques résultats concernant la relaxation des LMI. Quant aux systèmes TS incertains et/ou perturbés, quelques résultats de commande robustes ont été cités, notamment les approches PDC utilisant un critère H_∞ . A la fin du chapitre, d'autres approches spécifiant les performances d'un système TS ont été traitées : la synthèse de commande par placement de pôles et la commande optimale.

Notons que tous les résultats cités dans ce chapitre ne concernent que le problème de stabilisation des modèles TS. En revanche, le problème de suivi de trajectoire est peu ou pas traité dans la littérature et reste encore ouvert. Ce dernier, se subdivise à son tour en deux problèmes différents ; le problème de synthèse de commande robuste et celui de l'exploitation numérique des résultats. En effet, le passage du problème de stabilisation au problème de suivi de trajectoire n'est pas trivial dans le cas des modèles TS et l'obtention des résultats en terme de LMI n'est pas systématique. Mais d'un certain point de vue, la méthode d'analyse reste similaire pour traiter le problème de stabilisation et celui du suivi de trajectoire. C'est ce dernier point qui fera l'objet des travaux menés dans les chapitres suivants

Chapitre 2

Suivi de trajectoire des modèles TS

2.1. Introduction.....	39
2.2. Problème du suivi de trajectoire.....	40
2.2.1. Le suivi de trajectoire pour les modèles TS.....	40
2.2.2. Problème de suivi de trajectoire : Stratégie de commande	42
2.2.2.1. Le modèle physique et le modèle TS.....	42
2.2.2.2. L'observateur flou TS.....	43
2.2.2.3. Le système de référence.....	43
2.2.2.4. Loi de commande.....	44
2.3. Synthèse de commande avec observateur : approche H_∞.....	45
2.3.1. Commande basée sur l'approche H_∞	45
2.3.2. Conditions de relaxation.....	49
2.3.3. Exploitation numérique des résultats	49
2.3.4. Exemple et simulations	56
2.4. Conclusion	62

Chapitre 2

Suivi de trajectoire des modèles TS

2.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un rappel bibliographique concernant les résultats qui traitent de la stabilisation des modèles flous de type TS. Ces différentes approches traitent notamment des conditions de stabilisation de base y compris celle de la relaxation des problèmes LMI, et la synthèse de commandes robustes.

D'une autre part, la commande des procédés non linéaires peut être vue sous différentes facettes. En plus de la stabilisation, on distingue aussi les problèmes de régulation, ou de suivi d'une trajectoire générée par un modèle de référence. Dans ce chapitre, nous considérerons le cas le plus général, celui du suivi d'une trajectoire désirée. Ainsi, le chapitre, est reparti en deux sections principales ; dans la première, nous allons présenter les principales approches élaborées dans le cadre de la synthèse de commande pour assurer le suivi de trajectoire pour les modèles TS. Ensuite, dans la seconde partie, nous traiterons de la synthèse de commande pour les modèles flous TS soumis à des perturbations externes. Cette approche, s'appuie sur

l'emploi d'un modèle de référence pour spécifier la trajectoire désirée. La loi de commande ainsi élaborée, est basée sur la minimisation de l'erreur de poursuite par rapport aux perturbations selon un critère H^∞ . Le résultat principal dans ce chapitre est de montrer une condition plus relâchée au sens d'optimisations convexes LMI, en l'occurrence un maximum d'atténuation des perturbations en assurant la poursuite.

2.2. Problème de suivi de trajectoire

Le problème de suivi de trajectoire des systèmes non linéaires notamment les systèmes affines en la commande a été traité avec plusieurs approches classiques depuis plusieurs années, parmi ces méthodes assez développées dans la littérature, on peut distinguer ; la commande adaptative floue (Wang *et al.*, 1996, Essounbouli, 2004), la commande à modes glissants (Utkin, 1977 ; Manamanni, 1998), la commande H^∞ (Essounbouli, 2004 ; Alazard *et al.*, 1999), la commande PID (proportionnel intégrale dérivé) (Diordiev *et al.*, 2003) etc ... En revanche, la synthèse de commande pour assurer le suivi de trajectoire pour les systèmes non linéaires décrits par les modèles flous du type TS sont très peu ou pas traité dans la littérature, et en particulier, la synthèse de commande robuste et la relaxation des problèmes LMI.

Dans le paragraphe suivant, nous parlerons brièvement des résultats existants dans la littérature et traitant le problème du suivi de trajectoire des modèles TS.

2.2.1. Le suivi de trajectoire pour les modèles TS

En dépit d'une littérature abondante sur le problème de stabilisation des modèles flous TS, seulement peu de résultats sont disponibles concernant le problème de suivi de trajectoire (Kung & Li, 1997 ; Ying, 1999 ; Tseng & Chen, 2001 ; Tseng *et al.*, 2001b ; Zheng *et al.*, 2002 ; Lam *et al.*, 2002 ; Taniguchi *et al.*, 1999 ; Tong *et al.*, 2002 ; Pagès *et al.*, 2003).

Dans (Kung & Li, 1997) la conception d'un contrôleur flou était proposée en utilisant la technique de linéarisation du retour de sortie. Cette approche ne concerne que les modèles TS à temps discret obtenu par identification selon un modèle AR (Auto - Régressif). De la même manière et pour le même type de modèle, une condition nécessaire et suffisante, liée à la notion de stabilité des systèmes à non minimum de phase, a été établie dans (Ying, 1999) pour déterminer analytiquement la stabilité du contrôleur flou.

Les auteurs de (Tseng & Chen, 2001), traitent le problème de suivi de trajectoire pour les modèles TS, avec des perturbations externes et un bruit de mesure. Cette approche est basée sur un critère H_∞ minimisant l'erreur de poursuite avec un modèle de référence par rapport à l'ensemble des perturbations, la synthèse de la loi de commande établie ; utilise un observateur flou du type Luenberger. Les conditions ainsi obtenues représentent des BMI. Dans (Tseng et al., 2001b) la même stratégie a été développée pour une classe particulière de systèmes non linéaires interconnectés. Une autre approche au sujet du suivi de trajectoire des modèles TS (Zheng et al, 2002) est basée sur la technique de commande à structure variable, cette méthode est très restreinte au sens de la robustesse car les incertitudes sur les matrices d'entrée sont considérées négligeable.

Dans le même contexte, (Lam et al., 2002) ont conçu un contrôleur à commutation en utilisant un modèle de référence. Cette méthode se caractérise par la complexité de la loi de commande et la difficulté de vérifier une relation entre les matrices d'entrée sortie et le modèle de référence. Dans (Taniguchi et al., 1999) une commande floue basée sur la linéarisation de l'erreur de poursuite a été établie en utilisant une méthode similaire à celle de PDC reposant sur un modèle de référence non linéaire. Cette commande n'est pas robuste, et concerne particulièrement le problème de régulation.

Une autre approche, se basant sur une combinaison de la commande à mode glissant et la commande PDC pour les modèles TS a été proposée dans (Chang et al, 2002). Dans cette méthode, l'analyse de stabilité avec les deux commandes se fait d'une manière indépendante. Récemment, une tentative de synthèse de commande pour le suivi de trajectoire avec un modèle de référence a été proposée dans (Tong et al., 2002). Les résultats ainsi trouvés, se basent malheureusement sur une confusion de l'erreur d'observation et celle de poursuite, ce qui donne évidemment des conditions erronées sur les gains de commande et ceux d'observation.

A partir de ce tour d'horizon bibliographique sur le problème de suivi de trajectoire des modèles TS, on se rend compte que les résultats ne sont pas très abondants, que certaines restrictions sont considérées. En effet, dans la majorité des cas les systèmes ne sont pas perturbés ou sont considérés comme certains. Partant de ce constat, nous avons abordé l'étude de cette problématique en adoptant une stratégie de commande basée sur un modèle de référence. L'approche par modèle de référence n'est pas nouvelle en soit mais les types de systèmes TS que nous considérons et les théorèmes établis constituent la majeure partie de notre travail

Dans ce qui suit, nous présentons la stratégie de commande de manière générale. Les détails seront explicités au fur et à mesure des chapitres selon chaque cas, en fonction, du modèle et de la commande flous utilisés.

2.2.2. Problème de suivi de trajectoire : Stratégie de commande

Durant tout ce travail, le problème de suivi de trajectoire des modèles TS sera traité en se basant sur la technique schématisée selon la figure 2.3.

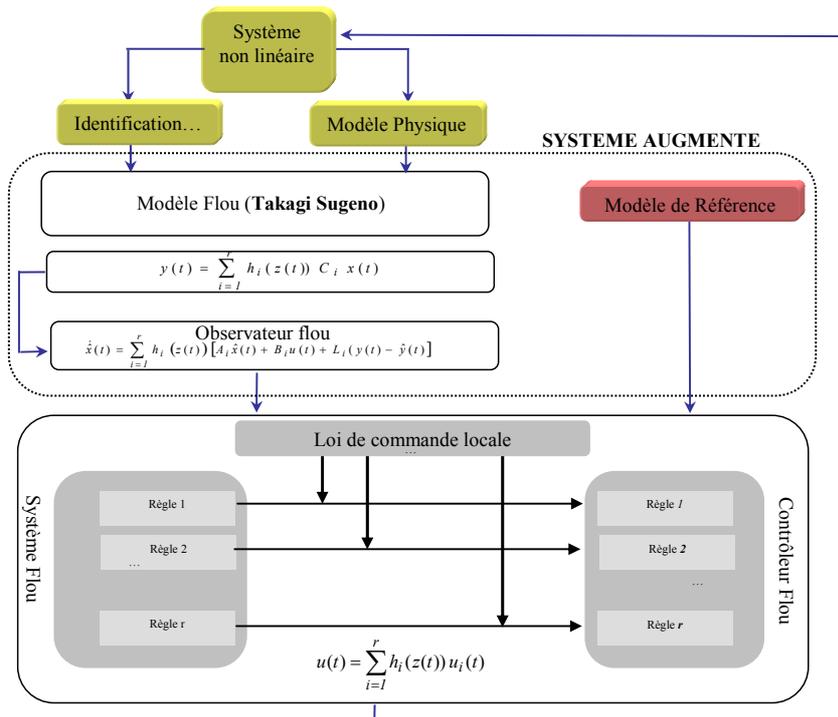


Figure 2.3. Schéma de la stratégie de commande adoptée.

Le principe de la stratégie de commande que nous adoptons est de construire un modèle flou TS appelé modèle augmenté. En effet, il regroupe le modèle du système, celui de l'observateur s'il est nécessaire d'estimer les variables d'état, ainsi que celui du modèle de référence. Ces différentes étapes sont détaillées comme suit :

2.2.2.1. Le modèle physique et le modèle TS

En considérant le modèle non linéaire affine en la commande, il s'agit d'obtenir un modèle flou TS en utilisant les méthodes décrites dans §1.2.2. Par l'intermédiaire des variables de

prémises, le modèle physique fournit les informations sur l'état du système, en l'occurrence l'état du modèle TS.

2.2.2.2. L'observateur flou TS

La synthèse d'un observateur flou de type Luenberger (2.1) peut être considérée dans le cas où l'état du système n'est pas disponible.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$\hat{x}(t) \in R^n$ est l'état estimé et L_i est le gain d'observation de la i ème règle.

2.2.2.3. Le système de référence

Pour spécifier la trajectoire désirée, on distingue plusieurs types de modèle, à savoir les modèles linéaires et non linéaires.

a) Modèles linéaires

Parmi les modèles de références linéaires, les plus utilisés sont de la forme (2.2) (Tseng et al., 2001b) :

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t) \quad (2.2)$$

où $x_r(t)$ est la variable de référence pour $t \geq 0$, A_r est une matrice asymptotiquement stable et $r(t)$ est une entrée de consigne bornée dans le temps. Cette entrée peut être considérée comme étant une entrée exogène (Tseng et al., 2001b).

Le modèle (2.2) peut être muni d'une matrice d'entrée (Pagès et al., 2003 ; Uang & Huang, 2004), qui permet d'avoir un système de référence commandable dont la matrice A_r n'est pas forcément stable, ce qui nécessite un retour d'état de référence dans la loi de commande utilisée pour assurer le suivi de trajectoire. Ce modèle s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r r(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

où $r(t)$ est une entrée exogène B_r et C_r sont des matrices de dimensions appropriées.

Un autres type de modèles de référence très adoptés pour les systèmes linéaires est un modèle linéaire autonome, dont la dynamique i.e. la trajectoire désirée, est définie par les pôles de la matrice A_r et les conditions initiales $x_r(0)$. Ce modèle est de la forme suivante (Wu & Leitman, 2000) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Dans ce cas, la matrice A_r n'est pas forcément stable, ce qui peut entraîner des problèmes de faisabilité au niveau des calculs LMI.

b) Modèles non linéaires

On peut également adopter un modèle de référence non linéaire de type TS, obtenu par un découpage des non linéarités dans un espace compact de l'espace d'état. Ce modèle est de la forme suivante (Taniguchi *et al.*, 1999) :

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^l v_i(z_r(t)) D_i x_r(t)\tag{2.5}$$

où l est le nombre de règles, v_i représentent les fonctions d'appartenance et $z_r(t)$ est la variable de prémisse. Dans ce type de modèle, les matrices D_i ne sont pas toutes forcements stables.

Dans la suite de ce mémoire nous adoptons le modèle de référence de type linéaire (2.2) puisqu'il possède une plus grande souplesse pour générer la consigne désirée.

2.2.2.4. Loi de commande

La forme de la commande utilisée dans ces approches est similaire à celle d'une commande PDC (1.19), sauf que celle-ci est en fonction de l'état du système, mais aussi de l'état de

référence autrement dit en fonction de l'erreur de poursuite. Dans le cas de la disponibilité de l'état du système le signal de commande est donné par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - x(t)] \quad (2.6)$$

Dans le cas échéant, notre commande serait donc en fonction de l'état estimé du système

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (2.7)$$

Après avoir présenté la stratégie adoptée dans ce mémoire concernant la synthèse de commande pour assurer le suivi de trajectoire, dans la section qui suit, nous traitons un premier problème de poursuite et de relaxation LMI qui concerne les modèles TS perturbés.

2.3. Synthèse de commande avec observateur : approche H_∞

Dans ce paragraphe, nous nous restreindrons à la synthèse de commande pour les modèles TS perturbés avec observateur (Mansouri et al, 2005b ; Manamanni et al, 2005). Pour des raisons d'homogénéité des chapitres, la commande sans observateur est détaillée en Annexe D. Les résultats obtenus seront synthétisés sur deux théorèmes et nous montrerons que les conditions du deuxième théorème que nous proposons, sont plus relâchées au sens de LMI. Les conditions ainsi développées, sont présentées sous forme de BMI. Nous proposons une méthode pour résoudre ce problème. Pour mettre en relief les conditions de relaxation et les résultats de poursuite, un exemple d'illustration sera présenté à la fin du chapitre.

2.3.1. Commande basée sur l'approche H_∞

Soit le modèle TS perturbé suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + \varphi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) + \nu(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

$\varphi(t)$ est une perturbation externe inconnue avec une borne supérieure $\varphi_{up} \geq \|\varphi(t)\|$ et $\nu(t)$ un bruit de mesure de la sortie. Comme tous les états ne sont pas disponibles, on considère l'observateur flou (2.1). Soit $e_o(t)$ l'erreur d'observation donnée par :

$$e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.9)$$

A partir des équations (2.1), (2.8) et (2.9), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [(A_i - L_i C_j) e(t) - L_i \nu(t)] + \varphi(t) \quad (2.10)$$

Pour spécifier la trajectoire désirée, nous avons considéré le modèle de référence défini par (2.2). L'atténuation de l'effet des perturbations sera faite en considérant la performance H_∞ liée à l'erreur de poursuite $x_r(t) - x(t)$ définie comme suit (Tseng et al., 2001b ; Golea et al., 2002 ; Chen et al., 2000) :

$$\frac{\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt}{\int_0^{t_f} \{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + \nu(t)^T \nu(t) \} dt} \leq \eta^2 \quad (2.11)$$

Ou bien

$$\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) + \nu(t)^T \nu(t) \} dt \quad (2.12)$$

où t_f représente le temps finale, Q est une matrice définie positive, et η est le taux d'atténuation fixé.

Comme nous l'avons spécifié en 2.2.2, nous considérons la loi de commande

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (2.13)$$

Par conséquent à partir des dynamiques $e(t)$, $x(t)$ et $x_r(t)$ correspondant respectivement à l'erreur d'estimation, l'état du système et la variable de référence, nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[\tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t) + \tilde{F}_i \tilde{\phi}(t) \right] \quad (2.14)$$

Avec

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j & 0 & 0 \\ -B_i K_j & A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}_i = \begin{bmatrix} -L_i & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \text{et } \tilde{\phi}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Ainsi, en tenant compte des conditions initiales, le critère H_∞ relatif à l'erreur de poursuite en (2.12) peut être modifié comme suit :

$$\int_0^{\eta} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt = \int_0^{\eta} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \tilde{x}^T(0) P \tilde{x}(0) + \eta^2 \int_0^{\eta} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt \quad (2.16)$$

où $\tilde{x}(0)$ représente le vecteur des conditions initiales du système (2.14)

$$\text{et } \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & -Q \\ 0 & -Q & Q \end{bmatrix}.$$

Notons aussi que $r^T(t)r(t) + \varphi^T(t)\varphi(t) + v^T(t)v(t) = \tilde{\phi}^T(t)\tilde{\phi}(t)$.

L'objectif maintenant est de déterminer les gains K_i et L_i , pour le système augmenté (2.14) en garantissant la performance H_∞ (2.16) pour tout $\tilde{\phi}(t)$. La synthèse de commande consistera d'abord à atténuer au maximum l'effet des perturbations, ensuite à garantir la stabilité quadratique du système en boucle fermée (2.17) c'est-à-dire (2.14) sans $\tilde{\phi}(t)$ (Tseng et al., 2001b).

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[\tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t) \right] \quad (2.17)$$

Dans le but de réduire le nombre de conditions et d'avoir un résultat moins conservatif, l'idée est de reformuler le théorème établi dans (Tseng et al., 2001b) en deux conditions, l'une pour les termes dominants et l'autre pour les termes croisés.

Théorème 2.1 :

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe une matrice symétrique définie positive $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes soient vérifiées.

$$\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} + \tilde{Q} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (2.18)$$

et

$$(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}^T)^T \tilde{P} + \tilde{P} (\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}) + \gamma^{-1} \tilde{P} (\tilde{F}_i \tilde{F}_i^T + \tilde{F}_j \tilde{F}_j^T) \tilde{P} + 2\tilde{Q} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r, \quad (2.19)$$

Alors, le critère H_∞ (2.16) est garantie pour le système augmenté (2.14) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (2.17) est assurée.

Preuve :

Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) \quad \text{avec } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (2.20)$$

En dérivant (2.20) on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \dot{\tilde{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\tilde{x}^T(t) (\tilde{G}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ij}) \tilde{x}(t) + \tilde{\phi}^T(t) \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{\phi}(t) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

En appliquant le lemme (B.8) défini dans l'Annexe B, on peut écrire que :

$$\tilde{\phi}^T(t) \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{\phi}(t) \leq \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) + \gamma^{-1} \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t)$$

L'inégalité (2.21) devient alors :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} \right] \tilde{x}(t) + \gamma^{-1} \tilde{x}^T \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \\
&= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P} (\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}) + \gamma^{-1} \tilde{P} (\tilde{F}_i \tilde{F}_i^T + \tilde{F}_j \tilde{F}_j^T) \tilde{P} \right] + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

D'après (2.18) et (2.19) du théorème 2.1 on a

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \tag{2.23}$$

Dans le cas où $\tilde{\phi}(t) = 0$, (2.23) signifie que $\dot{V}(t) \leq 0$, ce qui veut dire que le système (2.17) est quadratiquement stable. En intégrant (2.23) de $t=0$ à $t=t_f$

$$V(t_f) - V(0) \leq -\int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt + \eta^2 \int_0^{t_f} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt \tag{2.24}$$

Le système étant stable, on obtient

$$\int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \tilde{x}^T(0) \tilde{P} \tilde{x}(0) + \eta^2 \int_0^{t_f} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt$$

Par conséquent la performance H_∞ (2.16) est assurée pour un niveau d'atténuation $\gamma = \eta^2$. ■

2.3.2. Conditions de relaxation

Un modèle exact ne l'est que dans un sous espace compact de l'espace d'état. De plus la limite d'un sous espace est liée à celle des grandeurs physiques du système. D'autre part, trouver un modèle exact pour n'importe quel système, n'est pas trivial, alors qu'il est toujours possible d'obtenir un modèle TS par linéarisation en considérant des points de fonctionnement judicieusement choisis.

La méthode précédente montre que le problème de poursuite de trajectoire se réduit au problème de stabilisation du système flou augmenté (2.14) et consiste à trouver une matrice

commune P entre toutes les règles. En effet, si le nombre de règles r est grand, il serait difficile de trouver une matrice P commune qui satisfait les conditions du théorème 2.1. Par conséquent, il serait difficile de trouver des gains garantissant la stabilité du système avec une bonne atténuation des perturbations. Pour alléger ce problème, de nouvelles conditions moins conservatives seront données dans ce paragraphe pour assurer la stabilité du système (2.14) (Mansouri et al., 2005b). En effet, nous allons utiliser deux propriétés concernant le nombre maximal de règles actives à chaque instant. Ces propriétés sont explicitées dans les corollaires suivants :

Corollaire 2.1 : (Tanaka et al., 1998a) Si s est le nombre maximal de règles actives à chaque instant t , où $1 < s \leq r$, alors

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \geq \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} 2h_i(z(t))h_j(z(t)) \quad (2.25)$$

Corollaire 2.2 : Si s est le nombre maximal de règles actives à chaque instant t , où $1 < s \leq r$, alors

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \geq \frac{1}{s} \quad (2.26)$$

Preuve :

En employant la propriété suivante,

$$1 = \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \right)^2 = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} 2h_i(z(t))h_j(z(t))$$

et celle donnée en (2.25), nous obtenons

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) + (s-1) \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \geq 1 \text{ ce qui vérifie (2.26).}$$

■

Le résultat principal de cette partie, peut être donné par des conditions relaxées décrites dans le théorème suivant :

Théorème 2.2 : (Mansouri et al., 2005b)

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$, $M > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} + (s-1)M + s\tilde{Q} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (2.27)$$

et

$$(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P}(\tilde{G}_{ij} + \tilde{G}_{ji}) + \gamma^{-1} \tilde{P}(\tilde{F}_i \tilde{F}_i^T + \tilde{F}_j \tilde{F}_j^T) \tilde{P} - 2M < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r, \quad (2.28)$$

Alors, le critère H^∞ (2.16) est assuré pour le système augmenté (2.14) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (2.17) est garantie.

Preuve :

On considère la même fonction de Lyapunov (2.20). Partant de (2.22) dans le théorème 2.1 et en utilisant (2.28) du théorème 2.2, on aboutit à :

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) [2M] + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)$$

En utilisant le corollaire 2.1, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} \right] \tilde{x}(t) + \frac{(s-1)}{2} \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) [2M] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) \left[\tilde{G}_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ii} + \gamma^{-1} \tilde{P} \tilde{F}_i \tilde{F}_i^T \tilde{P} + (s-1)M \right] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \end{aligned}$$

Ensuite à partir de la condition (2.27) on a

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \tilde{x}^T(t) [s\tilde{Q}] \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)$$

et en utilisant maintenant la propriété du corollaire 2.2, nous avons

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + \gamma \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t)$$

De la même façon que le théorème 1.2 on peut alors garantir le critère H^∞ (2.16) avec un taux d'atténuation $\gamma = \eta^2$. Par conséquent, la stabilité quadratique du système (2.17) est assurée. ■

Remarque 2.1 :

Pour une meilleure performance de poursuite, les conditions du théorème.2.1 (Resp : théorème 2.2) peuvent être formulées comme un problème de minimisation, de telle sorte que le taux d'atténuation du critère H^∞ soit le plus réduit possible.

$$\min_{\tilde{P} \text{ (Resp: } \tilde{P}, M)} \eta^2 \tag{2.29}$$

Sous les contraintes $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$, (2.18) et (2.19), (Resp : $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$, $M > 0$, (2.27) et (2.28)).

Remarque 2.2 :

Les résultats du théorème 2.2 se basent sur le nombre de règles maximales actives à chaque instant. Par conséquent, cette notion trouve son importance en particulier pour les modèles TS obtenus par linéarisation. En revanche, quand il s'agit de modèles TS obtenus par découpage des non linéarités, dans un espace compact dans l'espace d'état, hormis quelques points particuliers de l'espace l'ensemble règles sont toujours actives.

2.3.3. Exploitation numérique des résultats

Les conditions montrées dans le théorème 2.1 et 2.2, présentent des conditions BMI. Dans la suite, nous proposons une méthode qui consiste à résoudre ce problème BMI en deux étapes dont chacune est un problème LMI (Mansouri et al., 2005b). Ainsi, ces LMI peuvent être résolues efficacement par les techniques d'optimisations convexes (Gahinet et al., 1995). Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à résoudre les conditions du théorème 2.2. Celles du théorème 2.1 peuvent être résolus d'une manière semblable.

Pour pouvoir exprimer un problème LMI, on considère

$$\tilde{P} = \text{diag}[P_1 \quad P_2 \quad P_3] \quad \text{et} \quad M = \text{diag}[M_1 \quad M_2 \quad M_3] \tag{2.30}$$

En prenant $\gamma = \eta^2$ et en substituant (2.30) dans (2.27) et (2.28), les conditions du théorème.2.2 deviennent respectivement :

$$\begin{bmatrix} TI_{11} & TI_{12} & 0 \\ TI_{21} & TI_{22} & TI_{23} \\ 0 & TI_{32} & TI_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (2.31)$$

et

$$\begin{bmatrix} TJ_{11} & TJ_{12} & 0 \\ TJ_{21} & TJ_{22} & TJ_{23} \\ 0 & TJ_{32} & TJ_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r, \quad (2.32)$$

où

$$TI_{11} = (A_i - L_i C_i)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_i) + \frac{1}{\eta^2} P_1 (L_i L_i^T + I) P_1 + (s-1) M_1$$

$$TI_{12} = TI_{21}^T = -(B_i K_i)^T P_2 + \frac{1}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$TI_{22} = (A_i + B_i K_i)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_i) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + sQ$$

$$TI_{23} = TI_{32}^T = -P_2 (B_i K_i) - sQ$$

$$TI_{33} = A_r^T P_3 + P_3 A_r + \frac{1}{\eta^2} P_3 P_3 + (s-1) M_3 + sQ$$

et

$$TJ_{11} = (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + (A_j - L_j C_i)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_i) + \frac{1}{\eta^2} P_1 (L_i L_i^T + L_j L_j^T + 2I) P_1 - 2 M_1$$

$$TJ_{12} = TJ_{21}^T = -(B_i K_j)^T P_2 - (B_j K_i)^T P_2 + \frac{2}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$TJ_{22} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j + B_j K_i) + \frac{2}{\eta^2} P_2 P_2 - 2M_2$$

$$TJ_{23} = TJ_{32}^T = -P_2 (B_i K_j) - P_2 (B_j K_i)$$

$$TJ_{33} = 2(A_r^T P_3 + P_3 A_r + \frac{1}{\eta^2} P_3 P_3 - M_3)$$

A partir de (2.31) et (2.32), on constate des termes non LMI, notamment dans les blocs diagonaux. Pour les éliminer, on considère le changement de variable bijectif $Z_i = P_i L_i$. En appliquant un complément de Schur §B.2, (2.31) et (2.32) deviennent respectivement

$$\begin{bmatrix} D_{11} & P_1 & Z_i & D_{14} & 0 & 0 \\ P_1 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_i^T & 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ D_{14}^T & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45}^T & D_{55} & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r, \quad (2.33)$$

et

$$\begin{bmatrix} E_{11} & P_1 & Z_i & Z_j & E_{15} & 0 & 0 \\ P_1 & -\frac{\eta^2}{2} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_i^T & 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_j^T & 0 & 0 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ E_{15}^T & 0 & 0 & 0 & E_{55} & E_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{56}^T & E_{66} & P_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & -\frac{\eta^2}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r, \quad (2.34)$$

où,

$$D_{11} = A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_i^T Z_i^T - Z_i C_i + (s - I) M_1$$

$$D_{14} = -(B_i K_i)^T P_2 + \frac{1}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$D_{44} = (A_i + B_i K_i)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_i) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s - I) M_2 + s Q$$

$$D_{45} = -P_2 (B_i K_i) - s Q$$

$$D_{55} = A_r^T P_3 + P_3 A_r + (s - I) M_3 + s Q$$

et

$$E_{11} = A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_j^T Z_i^T - Z_i C_j + A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_i^T Z_j^T - Z_j C_i - 2 M_1$$

$$E_{15} = -(B_i K_j)^T P_2 - (B_j K_i)^T P_2 + \frac{2}{\eta^2} P_1 P_2$$

$$E_{55} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j + B_j K_i) + \frac{2}{\eta^2} P_2 P_2 - 2 M_2$$

$$E_{56} = -P_2(B_i K_j) - P_2(B_j K_i)$$

$$E_{66} = 2(A_r^T P_3 + P_3 A_r - M_3)$$

Pour résoudre les inégalités (2.33) et (2.34), on procédera en deux étapes dont chacune consiste à résoudre une LMI. Tout d'abord, il s'agit de trouver P_2 , K_i M_2 à partir des blocs diagonaux D_{44} et E_{55} ensuite P_1 , P_3 , M_1 , M_3 et L_i à partir des inégalités (2.33) et (2.34) comme expliqué ci dessous :

D'abord, notons que (2.33) et (2.34) impliquent respectivement :

$$D_{44} = (A_i + B_i K_i)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_i) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + sQ < 0 \quad \text{pour } i < j \leq r, \quad (2.35)$$

et

$$E_{55} = (A_i + B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j + B_j K_i) + \frac{2}{\eta^2} P_2 P_2 - 2M_2 < 0 \quad (2.36)$$

pour $i < j \leq r$

En effectuant une congruence de (2.35) et (2.36) avec P_2^{-1} et avec les changements de variables bijectifs $N_2 = P_2^{-1}$, $Y_i = K_i N_2$, et $X_2 = N_2 M_2 N_2$, et un complément de Shur, (2.35) et (2.36) sont respectivement équivalents à :

$$\begin{bmatrix} N_2 A_i^T + A_i N_2 + B_i Y_i + (B_i Y_i)^T + \frac{1}{\eta^2} I + (s-1) X_2 & N_2 \\ N_2 & -Q^{-1}/s \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r \quad (2.37)$$

et

$$N_2 A_i^T + A_i N_2 + B_i Y_j + (B_i Y_j)^T + N_2 A_j^T + A_j N_2 + B_j Y_i + (B_j Y_i)^T + \frac{2}{\eta^2} I - 2X_2 < 0 \quad (2.38)$$

pour $i < j \leq r$

Les variables N_2 , Y_i et X_2 i.e $P_2 = N_2^{-1}$, $K_i = Y_i N_2^{-1}$ et $M_2 = N_2^{-1} X_2 N_2^{-1}$ sont obtenues en résolvant les LMI (2.37) et (2.38).

Dans une seconde étape, on substitue P_2 , M_2 et K_i dans (2.33) et (2.34) puis on résoud la nouvelle LMI obtenu en P_1 , P_3 , M_1 , M_3 , et L_i (i.e $L_i = P_1^{-1} Z_i$). Alors, s'il existe des matrices

définies positives P_1, P_2, P_3, M_1, M_2 et M_3 tels que (2.33) et (2.34) sont vérifiées, le critère H^∞ (2.16) est assuré pour le système augmenté (2.14) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (2.17) est garantie.

2.3.4. Exemple et simulations

Pour illustrer les résultats de relaxation obtenu dans (2.27) et (2.28), considérons à titre d'exemple le problème de poursuite d'un pendule inversé sur un chariot mobile (Figure 2.1). La position du chariot n'est pas prise en compte. Le modèle non linéaire du pendule est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l/3 - a m l \cos^2(x_1)} \end{cases} \quad (2.39)$$

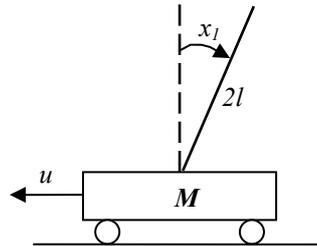


Figure 2.1 : Pendule inversé

où x_1 est l'angle (en radians) du pendule avec la verticale, et x_2 est la vitesse angulaire. $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est la constante de pesanteur, m est la masse du pendule, M est la masse du chariot, $2l$ est la longueur du pendule et u est la force appliquée au chariot (en Newton). $a = 1/(m+M)$. On prendra $m = 0.1 \text{ Kg}$, $M = 1 \text{ Kg}$, $2l = 1.0 \text{ m}$.

Pour faciliter la mise en œuvre, nous utilisons le modèle linearisé sur deux points de fonctionnement selon les deux règles suivantes :

Règle 1 : Si $x_1(t)$ est proche de 0

$$\text{Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_1 x(t) \end{cases},$$

Règle 2 : Si $x_1(t)$ est proche de $x_1 = \pm \pi / 2$ ($|x_1(t)| < \pi / 2$)

$$\text{Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) + \varphi(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ g/4l/3 - aml & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a/4l/3 - aml \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 2g/\pi (4l/3 - aml\beta^2) & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a\beta/4l/3 - aml\beta^2 \end{bmatrix}$$

et $C_1 = [I \ 0]$, $C_2 = [I \ 0]$.

Notons si $x_l = \pm\pi/2$, le système est non commandable, pour remédier à ce problème en prend $\beta = \cos(88^\circ)$

Résultats de relaxation

Pour montrer l'intérêt de la relaxation des conditions (2.27) et (2.28), nous comparons les résultats des théorèmes 2.1 et 2.2 de la façon suivante :

On considère la matrice de pondération Q définie dans (2.16).

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix},$$

On varie le taux d'atténuation η en fonction du paramètre de pondération q selon les figures 2.2 et 2.3.

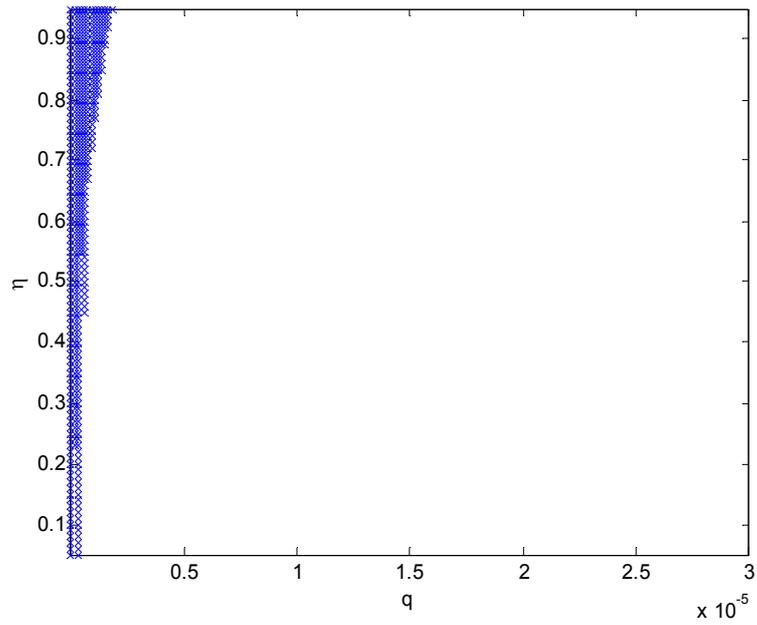


Figure.2.2: Champ de faisabilité du théorème 2.1

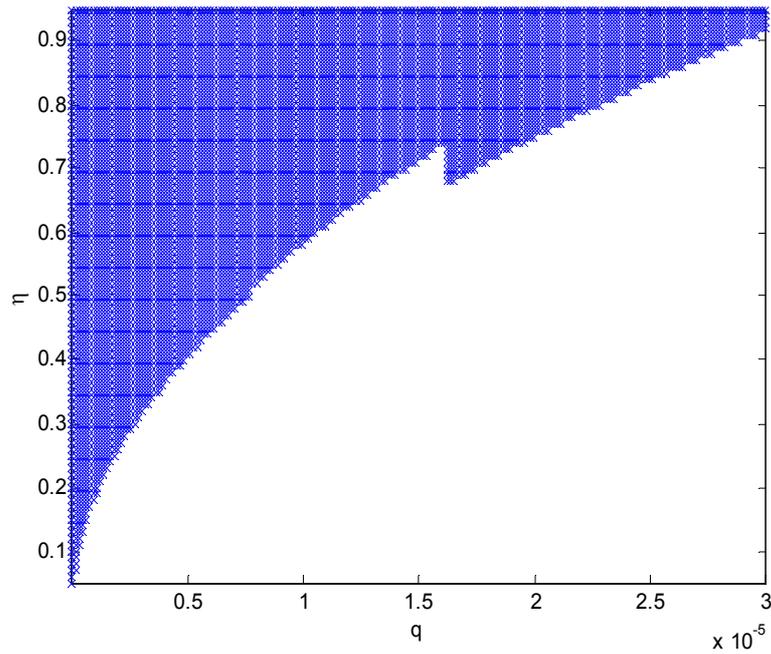


Figure.2.3: Champ de faisabilité du théorème 2.2

Les figures 2.2 et 2.3 montrent les champs de faisabilité des conditions des théorèmes 2.1 et 2.2 respectivement. Ces surfaces sont obtenues pour les paramètres $q > 0.05 \times 10^{-4}$ et $\eta > 0.05$. Grâce à l'existence de la matrice commune M dans le théorème 2.2, le champ faisable est plus large comparé à celui du théorème 2.1, par conséquent grâce au théorème 2.2, on obtient une

meilleure atténuation. Cela montre bien que les conditions du théorème 2.1 sont plus conservatives.

Poursuite de trajectoires

Pour montrer les performances en poursuite, on considère le même exemple du pendule inversé ci-dessus. Les fonctions d'appartenance du modèle flou avec deux règles sont illustrées par la figure 2.4.

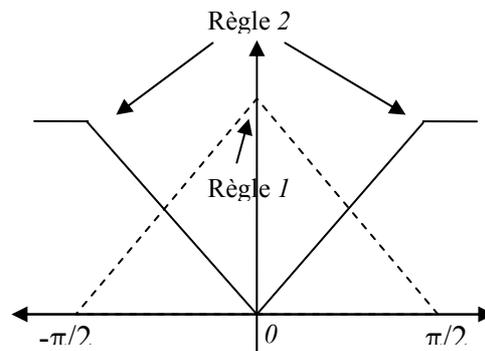


Figure.2.4: Fonctions d'appartenance du modèle flou à 2 règles

On calcule les gains K_i selon les étapes définies dans 2.2.3 pour les conditions (2.27) et (2.28) par la méthode de minimisation donnée dans la remarque 2.1. En choisissant :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000027 & 0 \\ 0 & 0.00002 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \text{ et } r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.46 \sin(t) \end{bmatrix}$$

Les gains suivants sont obtenus $K_1 = [598.2934 \quad 195.17]$, $K_2 = [1267.5 \quad 413.6]$ et le taux d'atténuation minimisé est $\eta = 0.25$.

Les résultats des figures (2.6 – 2.8) illustrent les simulations effectuées pour une poursuite de trajectoire sinusoïdale avec un pic de perturbation à $t=5.5s$ et $t=15s$. On constate que les performances de poursuite sont assurées ainsi que la convergence de l'observateur. La figure 2.6a présente la poursuite en position du pendule. Un zoom (figure 2.6b) montre la convergence des états estimés vers les états réels puis vers la trajectoire de références. Les figures 2.7a et 2.7b illustrent les mêmes performances, mais dans le cas d'une poursuite en vitesse. Nous avons représenté sur la figure 2.8a et 2.8b respectivement les erreurs d'estimation en position et en vitesse. Le signal de commande et l'erreur quadratique sont donnés respectivement sur les figures 2.9a et 2.9b.

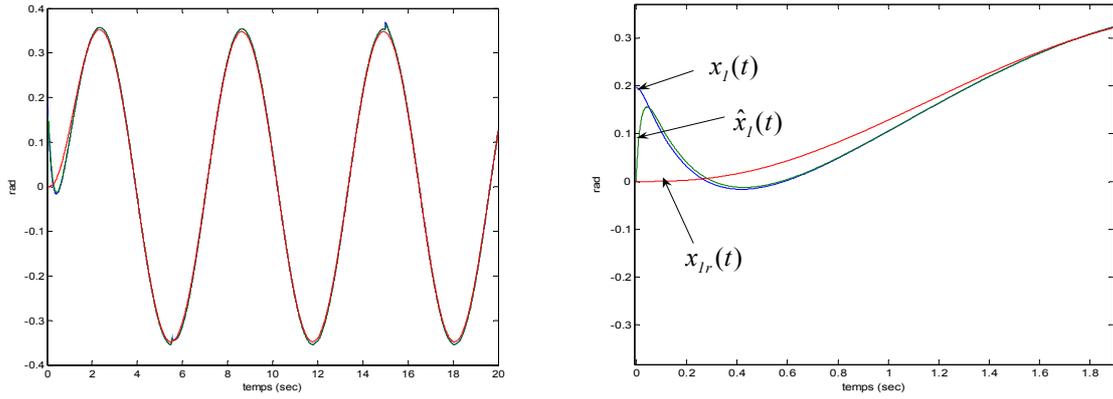


Figure.2.6: a) Poursuite en position. b) Zoom

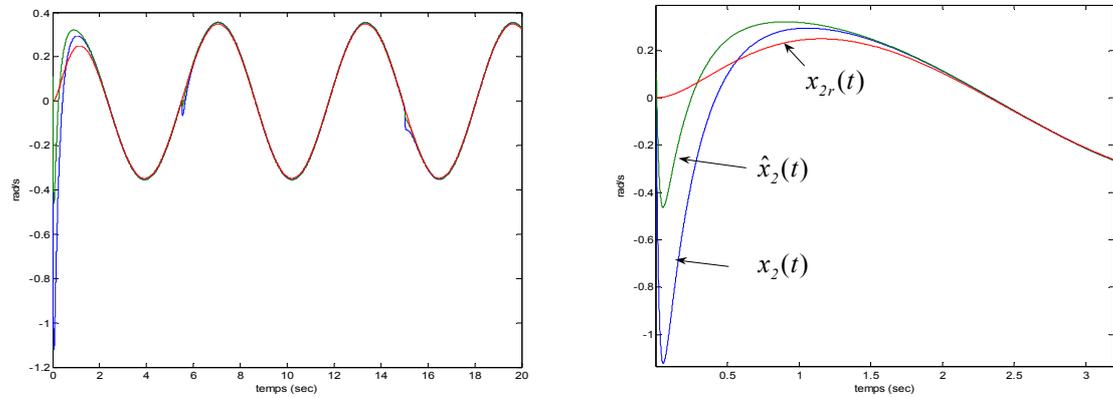


Figure.2.7: a) Poursuite en vitesse. b) Zoom.

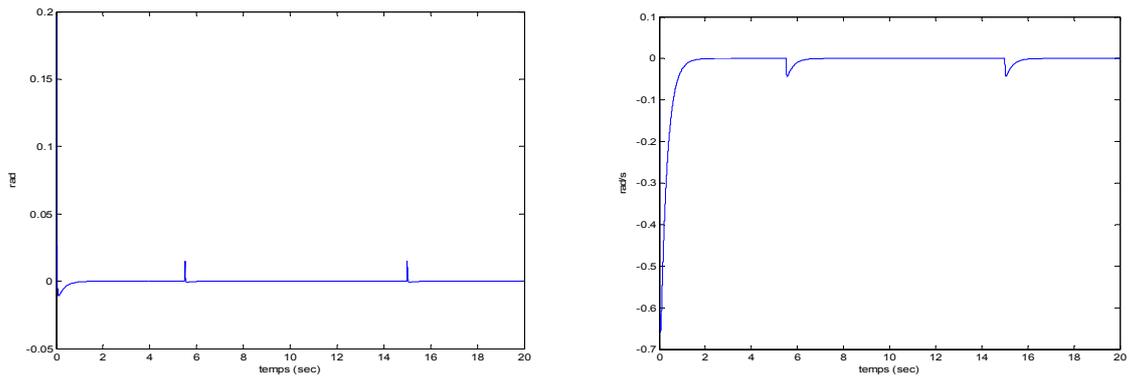


Figure.2.8: a) Erreur d'estimation de position. b) Erreur d'estimation de vitesse

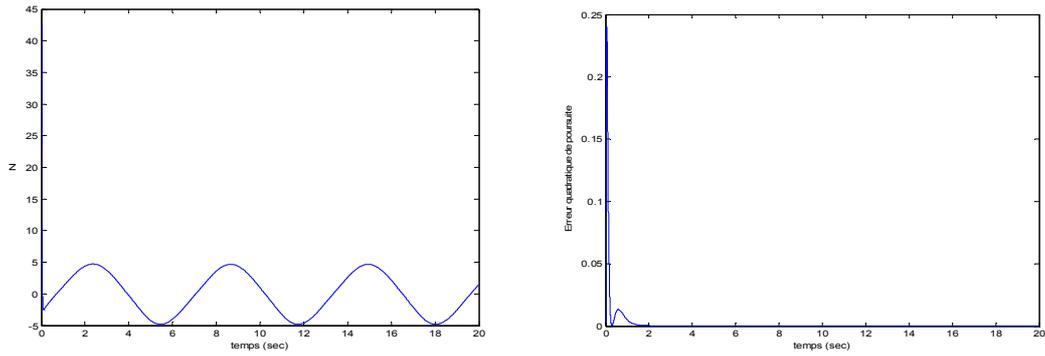


Figure.2.9: a) Signal de commande (Newton) b) Erreur quadratique de poursuite

Si on considère une perturbation externe de type sinusoïdal donnée par $\varphi(t) = \begin{bmatrix} 0.04 \cdot \frac{\pi}{9} \cdot \sin(t) & 0 \end{bmatrix}^T$, on remarque (figures (2.10, 2.11)) que les performances de poursuite et de convergence de l'observateur demeurent assurées. Les figures (2.10) et (2.11) montrent les erreurs d'estimation de la position et de la vitesse.

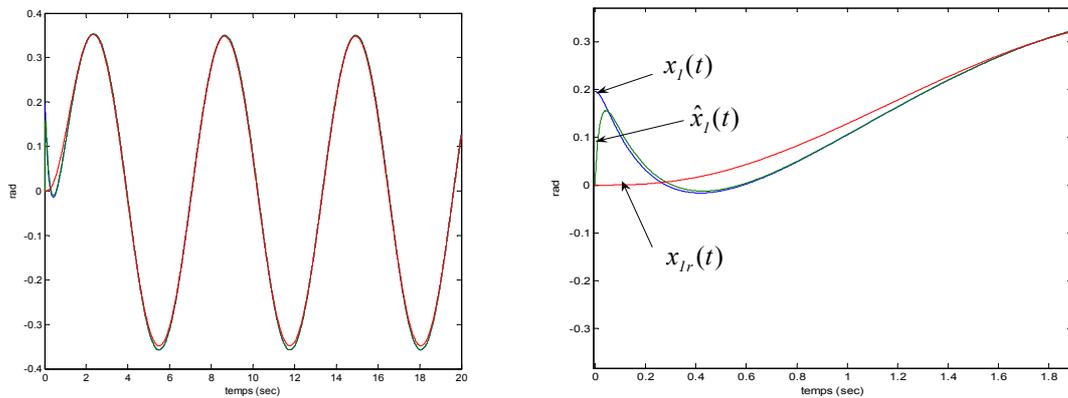


Figure.2.10: a) Poursuite en position. b) Zoom

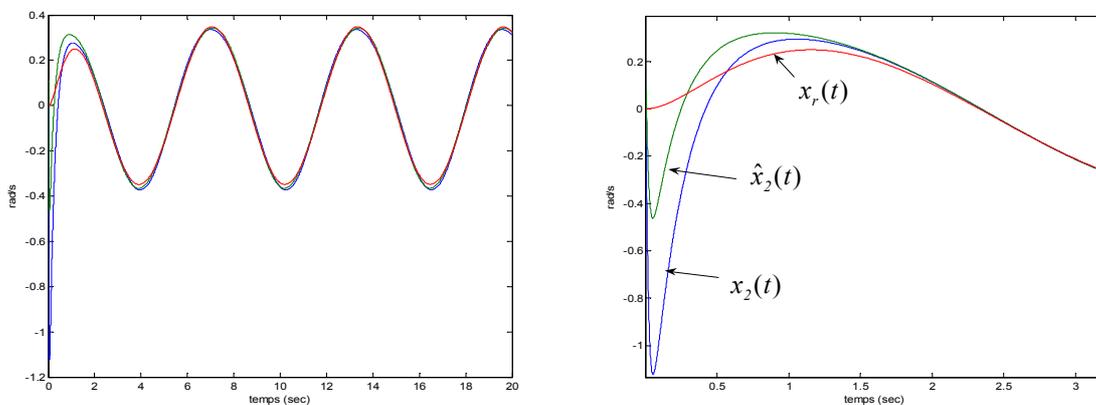


Figure.2.11: Poursuite en vitesse. b) Zoom

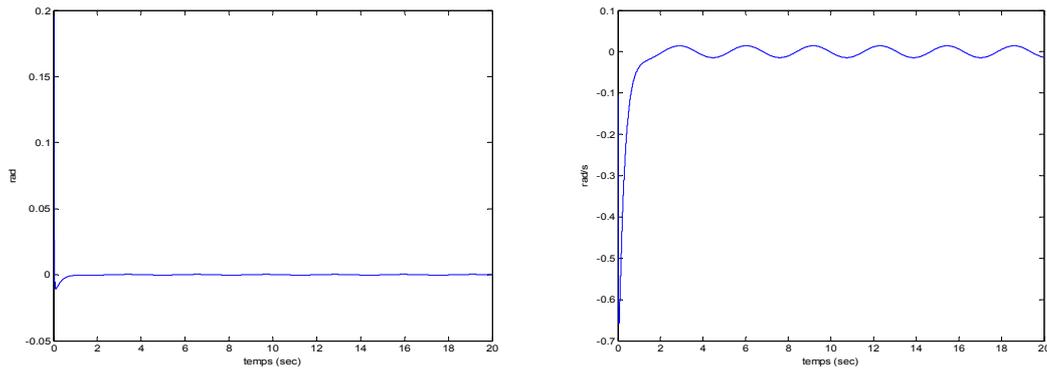


Figure.2.12: a) Erreur d'estimation de position. b) Erreur d'estimation de Vitesse

2.4. Conclusion

Durant ce chapitre, nous avons abordé le problème du suivi de trajectoire des modèles TS en tenant compte aussi bien des performances de poursuite en présence de perturbations externes que de la méthode de résolution. Après un tour d'horizon sur les travaux dans le domaine, nous avons présenté la stratégie de commande adoptée dans ce mémoire. Ensuite, nous avons élaboré la synthèse de commande robuste des modèles TS perturbés pour assurer le suivi de trajectoire en se basant sur l'approche H^∞ qui consiste à minimiser l'erreur de poursuite par rapport à l'ensemble des perturbations. Le résultat principal de cette approche, réside dans les conditions relâchées au sens de LMI qui se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant. Les résultats ainsi développés se présentent sous forme de BMI, une méthode pour résoudre ce problème a été proposée. Enfin, pour montrer l'intérêt de ces conditions de relaxation, nous avons illustré l'approche à travers un exemple pour comparer les deux théorèmes au niveau de la faisabilité LMI. Dans les deux cas de figures présentées, les performances de poursuites sont garanties.

Cette approche, montre bien ses limites de trois points de vue ; tout d'abord, quand il s'agit des modèles TS exactes la méthode a peu d'importance, puis, l'exploitation numérique des résultats n'est pas optimale au sens du problème d'optimisation convexe à cause de la méthode de résolution proposée. Enfin l'approche proposée ne concerne que les modèles certains et perturbés. Dans le chapitre qui suit, nous proposons une méthode employant la même approche H^∞ dont les résultats seront présentés sous forme de LMI, et prenant en considérations les modèles TS incertains.

Chapitre 3

Suivi de trajectoire des modèles TS perturbés et incertains avec critère H_∞

3.1. Introduction.....	64
3.2. Synthèse de commande sans observateur.....	66
3.2.1. Synthèse de commande par Approche BMI.....	67
3.2.2. Synthèse de commande par Approche LMI.....	70
3.2.3. Simulations et Résultats.....	74
3.3. Synthèse de commande avec observateur.....	78
3.3.1. Approche LMI.....	78
3.3.2. Exemple de poursuite avec observateur.....	86
3.4. Conclusion.....	88

Chapitre 3

Suivi de trajectoire des modèles TS perturbés et incertains avec critère H_∞

3.1. Introduction

Dans la littérature, la plupart des travaux traitant du problème de la commande robuste pour les modèles TS incertains ou/et perturbés (Tanaka & Wang., 2001 ; Taniguchi et al., 2001; Lauber, 2003 ; Chen et al., 2000 ; Tseng et al., 2001b ; Chiang et al., 2001) ne concernent que le problème de stabilisation. Dans ce chapitre, le problème de poursuite de trajectoire pour les modèles TS incertains et perturbés est abordé avec la même stratégie de commande que celle adoptée dans le chapitre 2, à savoir une minimisation de l'erreur de poursuite par rapport aux perturbations externes en utilisant un modèle de référence selon un critère H_∞ . Notre contribution dans ce chapitre concerne la prise en compte des incertitudes dans le modèle TS, dans le cas de la poursuite d'une trajectoire, la garantie des performances de poursuite et de stabilité du système ainsi que l'obtention de résultats directement sous forme LMI.

Ainsi, ce chapitre sera structuré de la manière suivante. Nous traitons dans un premier temps la poursuite d'une trajectoire dans le cas où tout les états sont disponibles. Dans ce cas, nous

présentons deux approches de synthèse différentes permettant de garantir les performances de poursuite. Nous montrerons ensuite, à travers des résultats de simulation, que la seconde approche aboutie directement à des conditions LMI. Ceci permet d'avoir des résultats plus facilement exploitables numériquement et d'assurer de meilleures performances que la première approche qui donne des solutions en deux étapes et de ce fait est plus conservatives. Nous considérons également un observateur dans le cas où tous les états ne sont pas disponibles. Les résultats également exprimés sous forme LMI seront illustrés à travers des simulations dans le cas de la poursuite pour un pendule inversé.

3.2. Synthèse de commande sans observateur

Soit le modèle flou TS incertain et perturbé défini comme suit

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)] + \varphi(t) \quad (3.1)$$

Nous supposons dans un premiers temps que l'état est totalement disponible. $\Delta A_i(t)$ et $\Delta B_i(t)$ représentent les incertitudes du modèle qui peuvent être des incertitudes paramétriques ou dus à la modélisation. Ces incertitudes sont exprimées dans notre cas de la manière suivante :

$$\Delta A_i(t) = H_i F_i(t) E_{ai} \text{ et } \Delta B_i(t) = H_i F_i(t) E_{bi} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.2)$$

avec H_i , E_{ai} , E_{bi} des matrices constantes, et la matrice incertaine $F_i(t)$, bornée de la façon suivante.

$$F_i(t)^T F_i(t) \leq I \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.3)$$

Pour spécifier la trajectoire à poursuivre, nous adoptons la stratégie de commande développée dans le chapitre 2. Ainsi, le modèle de référence est donné par l'équation (2.2). L'atténuation des perturbations externes doit être garantie par la performance H_∞ liée à l'erreur de poursuite $x_r(t) - x(t)$ est défini comme suit :

$$\int_0^{\eta} \left\{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \right\} dt \leq \eta^2 \int_0^{\eta} \left\{ r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) \right\} dt \quad (3.4)$$

La loi de commande adoptée dans ce cas est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - x(t)] \quad (3.5)$$

A partir de là, nous avons développé deux approches pour garantir la stabilité globale du système et les performance de poursuite. La première approche ([Mansouri et al., 2005b](#)), mène à des conditions BMI et la seconde est systématiquement mise sous forme LMI.

3.2.1. Synthèse de la commande par approche BMI

En considérant les dynamiques respectives de l'état du système $x(t)$ et de la variable de référence $x_r(t)$, on peut établir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [\bar{A}_{ij} + \bar{H}_i F_i(t) \bar{E}_{ij}] \bar{x}(t) + \bar{\varphi}(t) \quad (3.6)$$

Avec

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} E_{ai} + E_{bi} K_j & -E_{bi} K_j \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\bar{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

Tenant compte de l'état augmenté $\bar{x}(t)$, la performance H_∞ (3.4) peut être modifiée comme suit :

$$\int_0^{\eta} \left\{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \right\} dt = \int_0^{\eta} \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{\eta} \bar{\varphi}^T(t) \bar{\varphi}(t) dt \quad (3.8)$$

$$\text{où } \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\phi}(t)^T \bar{\phi}(t) = r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t)$$

Considérons, la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\bar{x}, t) = \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) \text{ avec } \bar{P} = \bar{P}^T > 0 \quad (3.9)$$

On peut montrer la stabilité du système augmenté (3.6) à travers le théorème suivant :

Théorème 3.1 : (Mansouri *et al.*, 2005b)

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe une matrice symétrique définie positive $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$ et des constantes positives τ et η telle que la condition suivante est vérifiée.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} & \bar{P} \bar{H}_i & \bar{P} & \bar{E}_{ij}^T \\ \bar{H}_i^T \bar{P} & -\tau I & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ \bar{E}_{ij} & 0 & 0 & -\tau^{-1} I \end{bmatrix} \leq 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (3.10)$$

Alors, le système en boucle fermée (3.6) est quadratiquement stable et la performance H^∞ (3.8) est assurée pour un certain taux d'atténuation η .

Preuve :

Considérons une nouvelle variable $\bar{q}_{ij}(t)$ telle que :

$$\bar{q}_{ij}(t) = F_i(t) \bar{E}_{ij} \bar{x}(t) \quad (3.11)$$

le système (3.6) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{A}_{ij} \bar{x}(t) + \bar{H}_i \bar{q}_{ij}(t) + \bar{\phi}(t) \right] \quad (3.12)$$

Sachant que les incertitudes sont supposées bornées, en utilisant (3.3) et (3.11), on aboutit à la contrainte :

$$\bar{q}_{ij}(t)^T \bar{q}_{ij}(t) = \bar{x}^T(t) \bar{E}_{ij}^T F_i^T(t) F_i(t) \bar{E}_{ij} \bar{x}(t) \leq \bar{x}(t)^T \bar{E}_{ij}^T \bar{E}_{ij} \bar{x}(t) \quad (3.13)$$

Cette contrainte peut être réécrite sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\bar{E}_{ij}^T \bar{E}_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.14)$$

Pour garantir un taux d'atténuation η avec la performance H_∞ (3.8) et assurer la stabilité quadratique du système en boucle fermée (3.6), la contrainte suivante doit être réalisée :

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \leq 0 \quad (3.15)$$

En utilisant l'expression (3.9), la contrainte (3.15) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \\ &= \dot{\bar{x}}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \dot{\bar{x}}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{x}^T(t) (\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \bar{q}_{ij}^T(t) \bar{H}_i^T \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{H}_i \bar{q}_{ij}(t) \right. \\ & \quad \left. + \bar{\phi}^T(t) \bar{P} \bar{\phi}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{\phi}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ainsi, nous devons garantir que :

$$\begin{aligned} & \bar{x}^T(t) (\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \bar{q}_{ij}^T(t) \bar{H}_i^T \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{H}_i \bar{q}_{ij}(t) \\ & \quad + \bar{\phi}^T(t) \bar{P} \bar{\phi}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{\phi}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'inégalité (3.17), peut être mise sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} & (*) & (*) \\ \bar{H}_i^T \bar{P} & 0 & 0 \\ \bar{P} & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.18)$$

En utilisant la S-procedure (Annexe A), les deux contraintes peuvent être rassemblées en une seule contrainte, sous réserve de l'existence d'une constante positive τ . Ainsi, on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + \bar{Q} + \bar{E}_{ij}^T \bar{E}_{ij} & (*) & (*) \\ \bar{H}_i^T \bar{P} & -\tau I & 0 \\ \bar{P} & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{q}_{ij}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.19)$$

Enfin, en appliquant un complément de Shur, on retrouve l'inégalité du théorème 3.1. ■

Cette solution formulée sous forme BMI peut être une alternative pour assurer la poursuite. Cependant sa résolution se fera en deux étapes comme celle proposée dans § 2.3.3. Nous avons montré dans (Mansouri *et al.*, 2005b) que la performance de poursuite est assurée et la stabilité est garantie. Des résultats de simulation en fin de section illustreront cette approche et la comparant à celle que nous développerons juste après § 3.1.2. En effet, nous proposons dans la section suivante de formuler les conditions directement sous forme LMI. On montrera que ceci permet d'avoir des solutions moins conservatives et par conséquent une amélioration des performances de poursuite.

3.2.2. Synthèse de commande par approche LMI

Dans cette approche, l'état du système augmenté est construit à partir de la dynamique de l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$ et de la variable de référence $x_r(t)$. Nous considérons la loi de commande (3.5) et le modèle de référence (2.2).

En considérant (3.1), (3.5) et (2.2), la dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t) \\ &= (A_i + \Delta A_i) e_p + (B_i + \Delta B_i) K_j e_p(t) + (A_i - A_r + \Delta A_i) x_r(t) + \varphi(t) - r(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

On peut alors exprimer le nouveau système augmenté par :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \bar{A}_{ij} \bar{x}(t) + \bar{S}\bar{\phi}(t) \quad (3.21)$$

où

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j & (A_i - A_r + \Delta A_i) \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} e_p(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la performance H^∞ (3.4) relative à l'erreur de poursuite par rapport à l'ensemble des perturbations est alors modifiée comme suit:

$$\int_0^{t_f} \{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \} dt = \int_0^{t_f} \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) dt \quad (3.23)$$

où $\bar{Q} = \text{diag}[Q \quad 0]$ et $\bar{\phi}^T(t)\bar{\phi}(t) = r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t)$.

En utilisant la fonction de Lyapunov (3.9), on peut montrer la stabilité du système augmenté (3.21) à travers le théorème suivant :

Théorème 3.2 :

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques définies positives $N_i = N_i^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et des constantes positives μ_1 , μ_2 , μ_3 , et η , tels que la LMI suivante est vérifiée.

$$\begin{bmatrix} (AN_i + B_i Y_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})H_i H_i^T & N_i & N_i E_{ai}^T & Y_j^T E_{bi}^T & (*) & (*) & (*) \\ N_i & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} N_i & 0 & -\mu_2^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} Y_j & 0 & 0 & -\mu_3^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ (A_i^T - A_r^T) & 0 & 0 & 0 & A_r^T P_2 + P_2 A_r + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & (*) \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.24)$$

pour $i=1, 2, \dots, r$,

Alors, la stabilité quadratique du système en boucle fermée (3.21) est assurée et la performance H^∞ (3.23) est garantie pour une atténuation η . Avec les changements de variables bijectifs N_i , et Y_i i.e $P_1 = N_i^{-1}$, et $K_i = Y_i N_i^{-1}$.

Preuve :

Pour démontrer ce théorème, comme pour le cas précédent, nous devons également vérifier la contrainte suivante :

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t)\bar{\phi}(t) \leq 0 \quad (3.25)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (3.9) et d'après (3.25), on aboutit à l'inégalité suivante :

$$\left[\bar{x}^T(t)(\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A}_{ij} + \bar{Q})\bar{x}(t) + \bar{\phi}^T(t)\bar{S}^T \bar{P}\bar{x}(t) + \bar{x}^T(t)\bar{P}\bar{S}\bar{\phi}(t) - \eta^2 \bar{\phi}^T(t)\bar{\phi}(t) \right] \leq 0 \quad (3.26)$$

L'inégalité (3.26) peut s'écrire donc sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A}_{ij} + \bar{Q} & \bar{P}\bar{S} \\ \bar{S}^T \bar{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.27)$$

En l'occurrence

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A}_{ij} + \bar{Q} & \bar{P}\bar{S} \\ \bar{S}^T \bar{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.28)$$

Pour pouvoir écrire un problème LMI, nous supposons que $\bar{P} = \text{diag}[P_1 \ P_2]$. En remplaçant les matrices augmentées définies en (3.22), on obtient

$$\begin{bmatrix} P_1(A_i + \Delta A_i + B_i K_j + \Delta B_i K_j) + (*) + Q & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T + \Delta A_i^T)P_1 & A_r^T P_2 + P_2 A_r & 0 & (*) \\ P_1 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.29)$$

Afin de pouvoir résoudre cette condition, l'idée dans ce cas, est d'effectuer une séparation des incertitudes du système, l'inégalité (3.29) peut s'écrire sous la forme

$$\bar{\Pi} + \Delta \bar{\Pi} \leq 0 \quad (3.30)$$

avec

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} P_1(A_i + B_i K_j) + (*) + Q & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T)P_1 & A_r^T P_2 + P_2 A_r & 0 & (*) \\ P_1 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} P_1(\Delta A_i + \Delta B_i K_j) + (*) & (*) & 0 & 0 \\ \Delta A_i^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 H_i F_i(t) E_{ai} + P_1 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) & (*) & 0 & 0 \\ E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En procédant à l'élimination de certains éléments de la matrice grâce à la procédure détaillée dans le lemme B.2 et l'exemple B.1 de l'Annexe B, nous pouvons de la même manière éliminer les éléments anti-diagonaux de la matrice incertaine $\Delta\bar{\Pi}$. Ainsi, $\Delta\bar{\Pi}$ se retrouve majorée de la façon suivante :

$$\Delta\bar{\Pi} \leq \begin{bmatrix} (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

avec μ_1, μ_2 , et μ_3 des paramètres constants qui peuvent être fixés ou recherchés.

Posons, $\Upsilon_{ij} = P_1(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j$

Grâce à (3.31), l'inégalité (3.30) est donc équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T)P_1 & A_r^T P_2 + P_2 A_r + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & (*) \\ P_1 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.32)$$

Pour aboutir à une condition LMI, nous effectuons un changement de variable en pré post multipliant (3.32) par $\text{diag}[N_1 \quad I \quad I \quad I]$ avec $N_1 = P_1^{-1}$. En posant

$$\Upsilon_{ij} = (A_i N_1 + B_i Y_j) + (*) + N_1 Q N_1 + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})H_i H_i^T + \mu_2 N_1 E_{ai}^T E_{ai} N_1 + \mu_3 Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T) & A_r^T P_2 + P_2 A_r + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & (*) \\ I & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ -I & P_2 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.33)$$

Avec des compléments de Shur effectués sur le bloc Υ_{ij} , on retrouve l'inégalité (3.24) du théorème 3.2. ■

L'approche ainsi développée, représente une condition directement sous forme de LMI, qui peut être résolue en une seule étape avec les algorithmes d'optimisation convexe (Boyd *et al.*, 1994).

3.2.3. Simulations et Résultats :

Considérons un représentant TS exact du modèle non linéaire du pendule inversé détaillé en Annexe C. Ce modèle tient compte des incertitudes dues à la modélisation. Pour illustrer les performances de chacun des théorèmes 3.1 et 3.2 correspondant respectivement aux approches BMI et LMI, nous avons d'abord comparé les champs de faisabilité obtenus pour chacun des théorèmes établis. La variation du du taux d'atténuation η en fonction du paramètre q de la matrice de pondération $Q = \text{diag}[q \ q]$ (c.f. § 2.3.4) nous a conduit aux résultats illustrés par les figures 3.1 et 3.2.

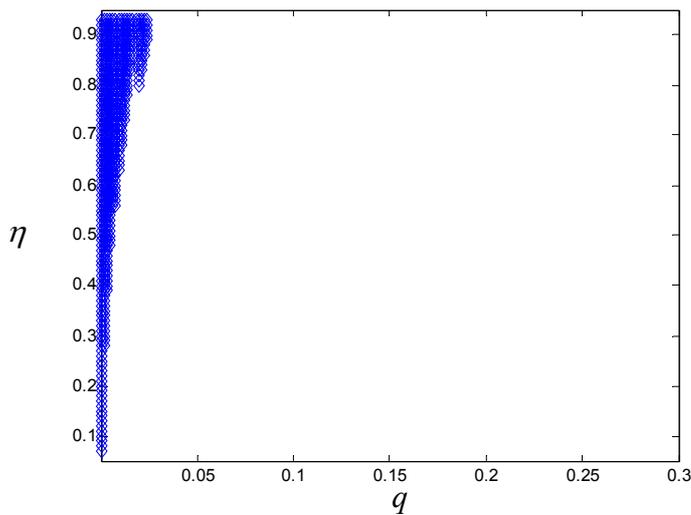


Figure.3.1: Champ de faisabilité du théorème 3.1

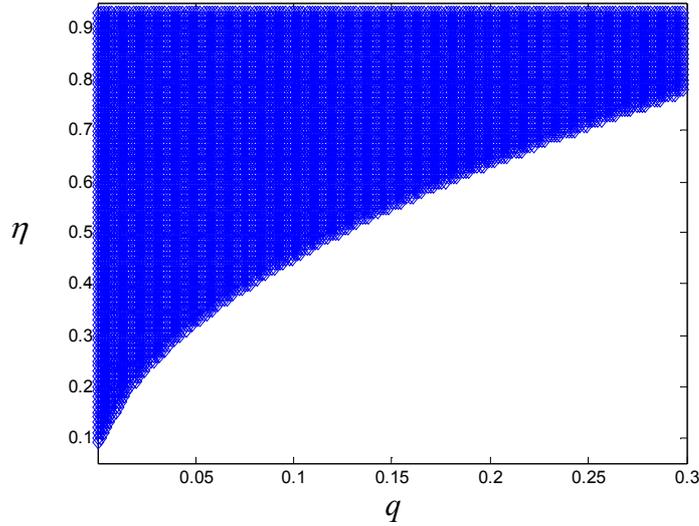


Figure.3.1: Champ de faisabilité du théorème 3.2

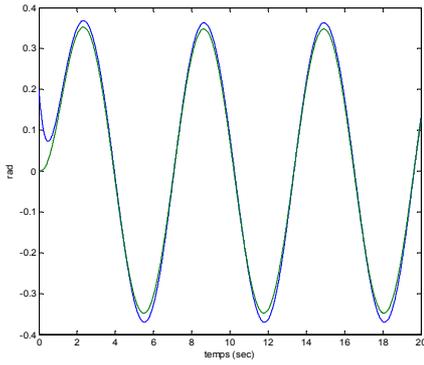
Les surfaces obtenues sont calculées pour les paramètres $q > 0.01$ et $\eta > 0.05$. Grâce à la formulation LMI obtenu directement dans le théorème 3.2, la possibilité de trouver des gains de retours est plus large comparée à celle du théorème 3.1, et par conséquent une meilleure atténuation est obtenue. Cela montre que les conditions du théorème 3.1 déduites à partir d'une résolution BMI en deux étapes sont plus conservatives.

Dans une seconde étape, nous avons comparé les performances de poursuite de chacun des théorèmes ; nous fixons les mêmes paramètres de performance pour les deux théorèmes, à savoir, le taux d'atténuation η et la matrice de pondération Q , puis nous déduisons les gains pour les deux approches à travers les résultats de simulations.

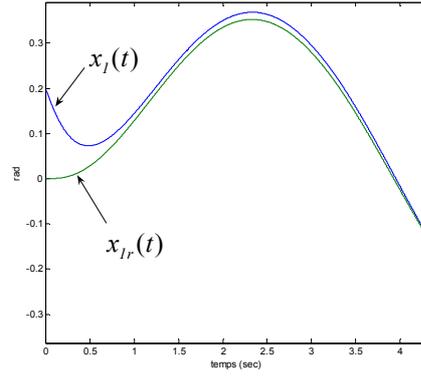
En prenant $\eta = 0.9$ $Q = \text{diag}[0.001 \ 0.0003]10^{-6}$, les gains donnés par le théorème 3.1 sont :

$K_1 = [618.7739 \ 196.5710]$ et $K_2 = [620.7679 \ 190.611]$. Ceux du théorème 3.2 sont :

$K_1 = [239.9597 \ 76.05280]$ et $K_2 = [239.7865 \ 76.7438]$

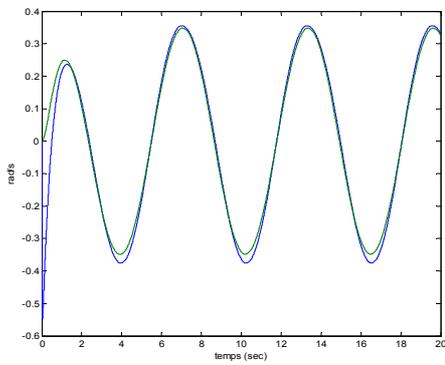


a) position réelle et position de référence

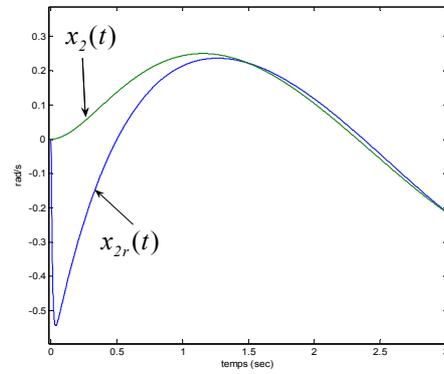


b) Zoom

Figure.3.3: Poursuite en Position (Théorème 3.1)

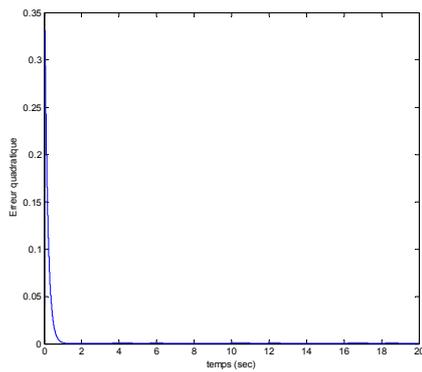


a) vitesse réelle et vitesse de référence

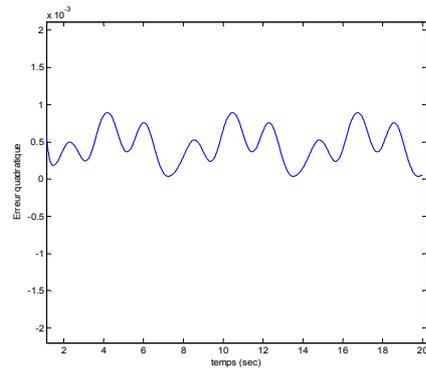


b) Zoom

Figure.3.4: Poursuite en vitesse (Théorème 3.1)

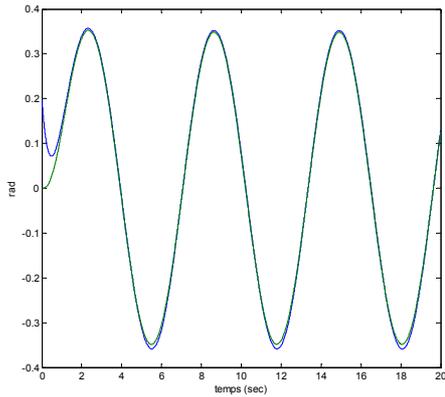


a) Erreur quadratique

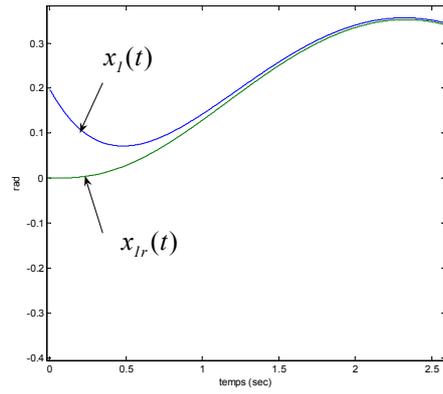


b) Zoom

Figure.3.5: Erreur quadratique (Théorème 3.1)

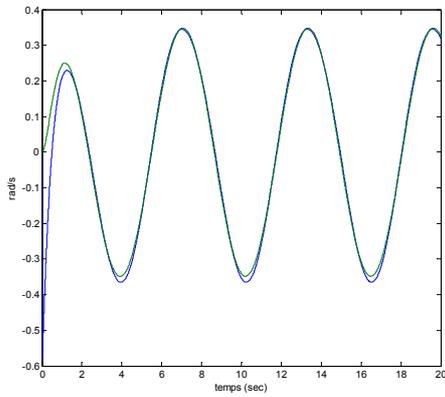


a) position réelle et position de référence

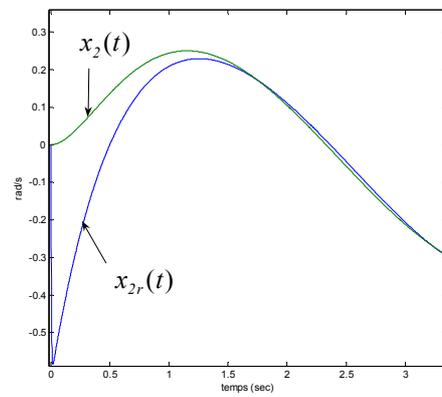


b) Zoom

Figure.3.6: Poursuite en Position (Théorème 3.2)

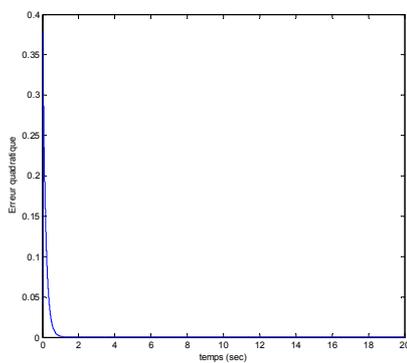


a) vitesse réelle et vitesse de référence

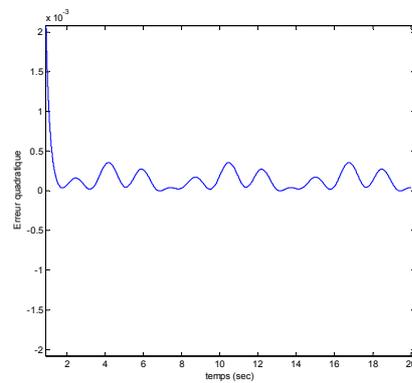


b) Zoom

Figure.3.7: Poursuite en Vitesse (Théorème 3.2)



a) Erreur quadratique



b) Zoom

Figure.3.8: Erreur quadratique (Théorème 3.2)

D'après les figures 3.3-3.8 illustrant la poursuite en position, la poursuite en vitesse et l'erreur quadratique de poursuite respectivement pour chacun des théorèmes 3.1 et 3.2, nous constatons que les gains de commandes trouvés (approches en deux étapes) donnent des performances moins bonnes, en terme de poursuite, que dans le cas du théorème 3.2. Ainsi, pour les mêmes paramètres, les gains trouvés par le théorème 3.1, sont plus conservatifs du point de vue de la performance de poursuite. En d'autres termes les deux approches mènent à des solutions viables pour garantir la stabilité et la poursuite même si un plus large éventail de gains performants est obtenu dans le cas du théorème 3.2.

3.3. Synthèse de commande avec observateur

3.3.1. Approche LMI

Dans cette section, on s'intéresse à la synthèse de commande avec observateur. Le modèle TS incertain et perturbé est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)] + \varphi(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (3.34)$$

Comme nous supposons que les états ne sont pas totalement disponibles, nous considérons l'observateur flou développé dans (2.2). Le modèle de référence utilisé est celui défini dans (2.2). La loi de commande par contre est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (3.35)$$

Avec $\hat{x}(t) \in R^n$ représentant l'état estimé du système.

Remarque 3.1 :

Notons que l'approche BMI développée dans 3.2.1 peut être également appliquée pour la synthèse de commande avec observateur. En effet, en considérant la variable augmentée (2.15) définie dans le chapitre 2 et en employant la loi de commande (3.35), nous aboutissons

à un résultat similaire à celui du théorème 3.1. Pour éviter cette redondance, nous avons préféré détailler dans ce chapitre, l'approche LMI uniquement. En effet, cette dernière présente l'avantage d'être exploitable facilement d'un point de vue numérique et avec moins de conservativité par rapport à la recherche des gains à partir d'une BMI en procédant en deux étapes.

Ainsi, en se basant sur le modèle de référence (2.2) et la loi de commande (3.35), nous définissons une nouvelle variable augmentée $\tilde{x}(t)$ composé de la dynamique de l'erreur d'estimation $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ ¹, de l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$ et enfin, de la variable de référence $x_r(t)$.

En appliquant la commande (3.35) au système (3.34), la dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[-(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) x(t) \right. \\ &\quad \left. -(B_i K_j + \Delta B_i K_j) x_r(t) - (A_i + \Delta A_i) x_r(t) + (A_i + \Delta A_i) x_r(t) \right] + \varphi(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[-(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) + (A_i + \Delta A_i) x_r(t) \right] + \varphi(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation en fonction de $e_o(t)$, $e_p(t)$ et $x_r(t)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[(A_i - L_i C_j - \Delta B_i K_j) e_o(t) + (\Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) + \Delta A_i x_r(t) \right] + \varphi(t) \quad (3.37)$$

Par conséquent, la dynamique de l'erreur de poursuite en fonction de $e_o(t)$, $e_p(t)$ et $x_r(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[-(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) \right. \\ &\quad \left. + (A_i - A_r + \Delta A_i) x_r(t) \right] + \varphi(t) - r(t) \end{aligned} \quad (3.38)$$

D'où, le système augmenté relatif aux dynamiques respectives $e_o(t)$, $e_p(t)$ et $x_r(t)$, s'écrit :

¹ Nous rappelons que l'indice o : observé, p : poursuite

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[\tilde{G}_{ij} \right] \tilde{x}(t) + \tilde{S}\tilde{\phi}(t) \quad (3.39)$$

Avec

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ e_p(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j - \Delta B_i K_j & \Delta A_i + \Delta B_i K_j & \Delta A_i \\ -B_i K_j - \Delta B_i K_j & A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j & A_i - A_r + \Delta A_i \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\text{et } \tilde{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le critère H_∞ correspondant à la structure du système augmenté (3.39), est décrit comme suit :

$$\int_0^{t_f} \left\{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \right\} dt = \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^{t_f} \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) dt \quad (3.41)$$

Avec la matrice $\tilde{Q} = \text{diag}[0 \quad Q \quad 0]$

Avant de présenter le résultat principal, nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) \text{ avec } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (3.42)$$

Pour obtenir des conditions assurant le suivi de trajectoire en termes de LMI, nous nous basons essentiellement sur un nouveau lemme 3.1 (Guerra et al., 2006) qui a l'avantage de séparer les variables dont les termes ne sont pas LMI, avec moins de conservativité par rapport aux autres techniques utilisées dans les transformations matricielles.

Lemme 3.1 (Guerra et al., 2006) :

Soit une matrice définie négative $\Omega < 0$.

Quelque soit une matrice x de dimension approprié telle que $X^T \Omega X < 0$ alors ; $\exists \alpha \in R$ telle que $\alpha > 0$ et $X^T \Omega X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Omega^{-1}$

Preuve :

Ω étant définie positive alors : $X^T \Omega X < 0$

$\exists \alpha \in R$ et $\alpha > 0$ tel que : $(X + \alpha \Omega^{-1})^T \Omega (X + \alpha \Omega^{-1}) \leq 0$

$X^T \Omega X + 2\alpha X + \alpha^2 \Omega^{-1} \leq 0$

Enfin $X^T \Omega X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Omega^{-1}$

■

Le résultat principal concernant la synthèse de commande avec observateur et qui permet d'aboutir directement à des conditions sous forme LMI, se résume dans le théorème suivant :

Théorème 3.3 :

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_1 = P_1^T > 0$, $P_3 = P_3^T > 0$, $N_2 = N_2^T > 0$

$M > 0$ et des constantes positives $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6, \mu_7, \mu_8$ et η , tels que la LMI suivante est vérifiée.

$$\left[\begin{array}{c|c} \Gamma & \Lambda^T \\ \hline \Lambda & \Psi \end{array} \right] < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (3.43)$$

avec

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2\alpha N_2 & 0 & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*) \\ E_{bi} Y_j & 0 & -\mu_1^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} Y_j & 0 & 0 & -\mu_5^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha I & 0 & 0 & 0 & P_1 A_i - Z_i C_j + (*) & (*) & (*) & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_i^T P_1 & -(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_i^T P_1 & 0 & -\mu_4 I & 0 \\ 0 & \alpha I & 0 & 0 & P_1 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_i N_2 + B_i Y_j + (*) + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) H_i H_i^T & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & -I \\ & N_2 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{bi} Y_j & 0 & -\mu_2^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{bi} Y_j & 0 & 0 & -\mu_7^{-1} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{ai} N_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_3^{-1} I & 0 & 0 & 0 \\ & E_{ai} N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_6^{-1} I & 0 & 0 \\ & (A_i^T - A_r^T) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + \mu_4 E_{ai}^T E_{ai} & (*) & P_3 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{ai} & -\mu_8^{-1} & 0 \\ & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} -B_i Y_j N_2 & 0_{1 \times 8} \\ \hline 0_{8 \times 2} & 0_{8 \times 8} \end{array} \right]$$

avec les changements de variables bijectifs N_2 , et Y_i i.e $P_2 = N_2^{-1}$, $K_i = Y_i N_2^{-1}$ et $Z_i = P_1 L_i$

Alors, la stabilité quadratique du système en boucle fermée (3.39) est assurée et la performance H^∞ (3.41) est garantie avec une atténuation η^2 .

Preuve :

Pour assurer la stabilité quadratique du système en boucle fermée (3.39), tout en garantissant la performance H^∞ (3.41) avec un taux d'atténuation η , l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$\frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} + \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) - \eta^2 \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \leq 0 \quad (3.44)$$

Ainsi, en utilisant la fonction de Lyapunov (3.42) et le système en boucle fermée (3.39), la condition (3.44) implique :

$$\left[\tilde{x}^T(t) (\tilde{G}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{G}_{ij} + \tilde{Q}) \tilde{x}(t) + \tilde{\phi}^T(t) \tilde{S}^T \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{S} \tilde{\phi}(t) - \eta^2 \tilde{\phi}^T(t) \tilde{\phi}(t) \right] \leq 0 \quad (3.1)$$

Cette inégalité peut être écrite sous une forme quadratique de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{ij} + \tilde{Q} & \tilde{P} \tilde{S} \\ \tilde{S}^T \tilde{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{\phi}(t) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.45)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{ij} + \tilde{Q} & \tilde{P} \tilde{S} \\ \tilde{S}^T \tilde{P} & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.46)$$

En posant $\tilde{P} = \text{diag}[P_1 \quad P_2 \quad P_2]$ et en remplaçant les matrices augmentées définies en (3.40), l'inégalité (3.46) devient :

$$\begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) - P_1 \Delta B_i K_j + (*) & (*) & (*) & P_1 & 0 \\ -P_2 B_i - P_2 \Delta B_i K_j + K_j^T \Delta B_i^T P_1 + \Delta A_i^T P_1 & P_2(A_i + \Delta A_i + B_i K_j + \Delta B_i K_j) + (*) + Q & (*) & P_2 & -P_2 \\ \Delta A_i^T P_1 & (A_i^T - A_r^T + \Delta A_i^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r & 0 & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & -P_2 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.47)$$

A partir de (3.47) on peut séparer les termes contenant les incertitudes, ce qui permet d'exprimer (3.47) comme suit :

$$\tilde{\Pi} + \Delta \tilde{\Pi} \leq 0 \quad (3.48)$$

Avec

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) + (*) & (*) & 0 & P_1 & 0 \\ -P_2 B_i & P_2(A_i + B_i K_j) + (*) + Q & (*) & P_2 & -P_2 \\ 0 & (A_i^T - A_r^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r & 0 & P_3 \\ P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\ 0 & -P_2 & P_3 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Delta \tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} -P_1 \Delta B_i K_j + (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ -P_2 \Delta B_i K_j + K_j^T \Delta B_i^T P_1 + \Delta A_i^T P_1 & P_2(\Delta A_i + \Delta B_i K_j) + (*) + Q & (*) & 0 & 0 \\ \Delta A_i^T P_1 & \Delta A_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On utilise l'expression (3.2) relative aux incertitudes du système, la matrice incertaine $\Delta \tilde{\Pi}$ devient :

$$\Delta \tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} -P_1 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ -P_2 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + K_j^T E_{bi}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 + E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 & P_2 H_i F_i(t) E_{ai} + P_2 H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) + Q & (*) & 0 & 0 \\ E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_1 & E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour éliminer les éléments anti-diagonaux nous avons utilisé également le lemme (B.2) de l'Annexe B. Par conséquent, la matrice contenant les incertitudes peut être bornée de la manière suivante :

$$\Delta \tilde{\Pi} \leq \text{diag}[d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad 0 \quad 0]$$

Avec

$$\begin{aligned}
d_1 &= (\mu_1 + \mu_5)K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 \\
d_2 &= (\mu_2 + \mu_7)K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1})P_2 H_i H_i^T P_2 + (\mu_3 + \mu_6)E_{ai}^T E_{ai} \\
d_3 &= (\mu_4 + \mu_8)E_{ai}^T E_{ai}
\end{aligned}$$

Alors, l'inégalité (3.48) implique :

$$\begin{bmatrix}
P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + d_1 & (*) & 0 & P_1 & 0 \\
-P_2 B_i K_j & P_2(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + d_2 & (*) & P_2 & -P_2 \\
0 & (A_i^T - A_r^T)P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3 & 0 & P_3 \\
P_1 & P_2 & 0 & -\eta^2 I & 0 \\
0 & -P_2 & P_3 & 0 & -\eta^2 I
\end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.49)$$

L'inégalité ainsi trouvée n'est pas encore LMI. Ainsi, pour remettre la matrice (3.49) sous forme homogène du point de vue des variables inconnues à rechercher, on effectue une congruence par la matrice (3.50) en faisant permuter les lignes et les colonnes de la matrice (3.49) suivant l'ordre 1,4,2,3 et 5.

$$\begin{bmatrix}
I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I
\end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Ainsi, l'inégalité (3.49) devient :

$$\begin{bmatrix}
P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + d_1 & P_1 & (*) & 0 & 0 \\
P_1 & -\eta^2 I & P_2 & 0 & 0 \\
-P_2 B_i K_j & P_2 & P_2(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + d_2 & (*) & -P_2 \\
0 & 0 & (A_i^T - A_r^T)P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3 & P_3 \\
0 & 0 & -P_2 & P_3 & -\eta^2 I
\end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.51)$$

Ensuite, nous procédons à un changement de variable en pré post multipliant l'inégalité (3.51) par $\text{diag}[N_2 \quad N_2 \quad N_2 \quad I \quad I]$ avec $N_2 = P_2^{-1}$ et $K_i = Y_i N_2^{-1}$. On obtient :

$$\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \Omega_1 \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_5)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (*) & 0 & 0 \\
\hline
-B_i Y_j & X_2 & \Omega_2 & (*) & (*) \\
0 & 0 & (A_i^T - A_r^T) & A_r^T P_3 + P_3 A_r + d_3 & (*) \\
0 & 0 & -I & P_3 & -\eta^2 I
\end{bmatrix} \quad (3.52)$$

avec

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 & P_1 \\ P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2 = N_2 A_i + B_i Y_j + (*) + N_2 Q N_2 + (\mu_2 + \mu_7) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) H_i H_i^T + (\mu_3 + \mu_6) N_2 E_{ai}^T E_{ai} N_2$$

Pour éliminer les termes non LMI, on applique le lemme 3.1 sur le premier bloc diagonal de (3.52). On obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \Omega_1 \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \leq -2\alpha \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} - \alpha^2 \Omega_1^{-1} + \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53) \\ & = \begin{bmatrix} -2\alpha N_2 + (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 \end{bmatrix} - \alpha^2 \Omega_1^{-1} \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant un complément de Shur, (3.53) devient :

$$\begin{bmatrix} -2\alpha N_2 + (\mu_1 + \mu_5) Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & 0 & (*) & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 & 0 & (*) \\ \alpha I & 0 & P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 & (*) \\ 0 & \alpha I & P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.54)$$

Enfin, en injectant la contrainte ci-dessus dans (3.52), on obtient l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & \alpha I & 0 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha N_2 & 0 & \alpha I & (*) & 0 & 0 \\ \alpha I & 0 & H_{33} & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha I & P_1 & -\eta^2 I & 0 & 0 & 0 \\ \hline -B_i Y_j & N_2 & 0 & 0 & H_{55} & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (A_i^T - A_r^T) & H_{66} & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & P_3 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

avec

$$\begin{aligned}
H_{11} &= -2\alpha N_2 + (\mu_1 + \mu_3)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j \\
H_{33} &= P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1})P_1 H_i H_i^T P_1 \\
H_{55} &= N_2 A_i + B_i Y_j + (*) + N_2 Q N_2 + (\mu_2 + \mu_7)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1})H_i H_i^T + (\mu_3 + \mu_6)N_2 E_{ai}^T E_{ai} N_2 \\
H_{66} &= A_r^T P_3 + P_3 A_r + d3
\end{aligned}$$

Avec des compléments de Shur sur les blocs diagonaux H_{11} , H_{33} , H_{55} et H_{66} , on retrouve la condition (3.43) du théorème 3.3. ■

Remarque 3.2 :

Dans les deux cas de figures traités, le champ de faisabilité des théorèmes 3.2 et 3.3 peut être élargit. En effet, plus de gains peuvent être trouvés si les LMI (3.24) et (3.43) peuvent être écrites sous la forme donnée par Tuan (Tuan *et al.*, 2001). Ainsi, on obtient des conditions plus relâchées au sens d'optimisation convexe.

3.3.2. Exemple de poursuite de trajectoire avec observateur

Pour montrer les performances en poursuite avec l'approche LMI du théorème 3.3, on considère un représentant TS exact du modèle non linéaire du pendule inversé en Annexe C.

On calcule les gains de commande K_i selon la condition LMI (3.43) définie dans §3.3.1. En choisissant :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.000027 & 0 \\ 0 & 0.00002 \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \text{ et } r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.46 \sin(t) \end{bmatrix}$$

Les gains suivants sont obtenus

$$K_1 = [253.0622 \quad 71.1764], K_2 = [253.0622 \quad 71.1764], L_1 = [30.0 \quad 460.2651],$$

$$L_2 = [30.0 \quad 460.2651] \text{ et le taux d'atténuation minimisé est } \eta = 0.25.$$

Les résultats des figures (3.7 – 3.10) illustrent les simulations effectuées pour une poursuite de trajectoire sinusoïdale avec une perturbation sinusoïdale donnée par

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 0.04 \cdot \frac{\pi}{9} \cdot \sin(t) & 0 \end{bmatrix}^T. \text{ On constate que les performances de poursuite sont assurées ainsi}$$

que la convergence de l'observateur. La figure 3.7a présente la poursuite en position du pendule. Un zoom (figure 3.7b) montre la convergence des états estimés vers les états réels

puis vers la trajectoire de références. Les figures 3.8a et 3.8b illustrent les mêmes performances mais dans le cas d'une poursuite en vitesse. Nous avons représenté sur la figure 3.9a et 3.9b respectivement les erreurs d'estimation en position et en vitesse. Le signal de commande et l'erreur quadratique sont donnés respectivement sur les figures 3.10a et 3.10b.

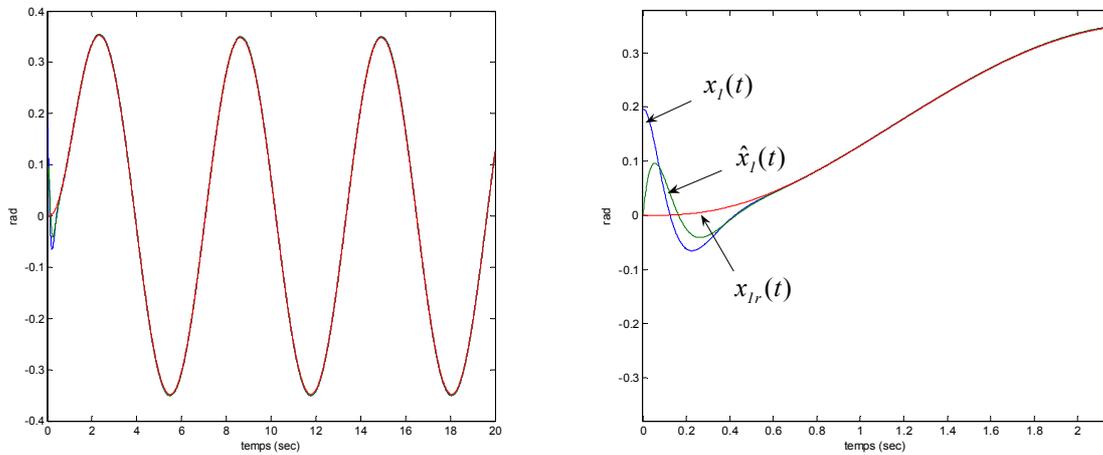


Figure. 3.7: a) Poursuite en position. b) Zoom

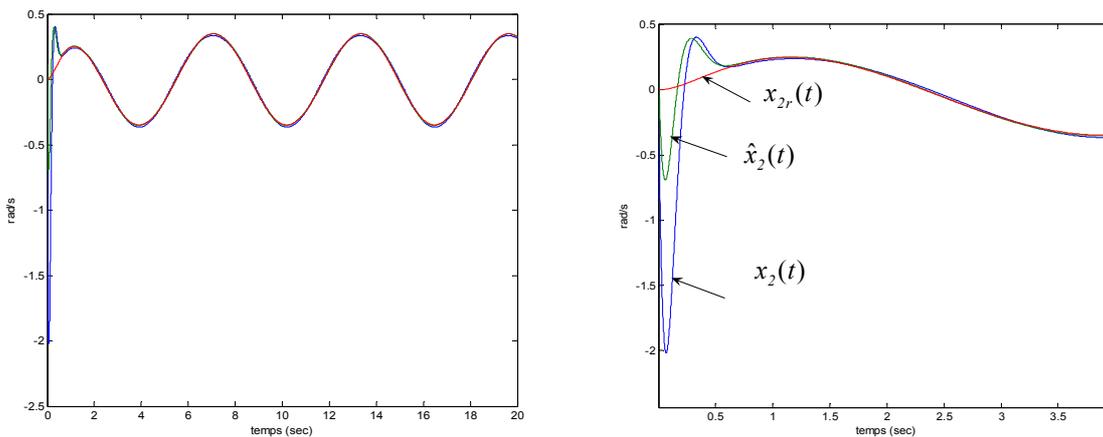


Figure. 3.8: a) Poursuite en vitesse. b) Zoom.

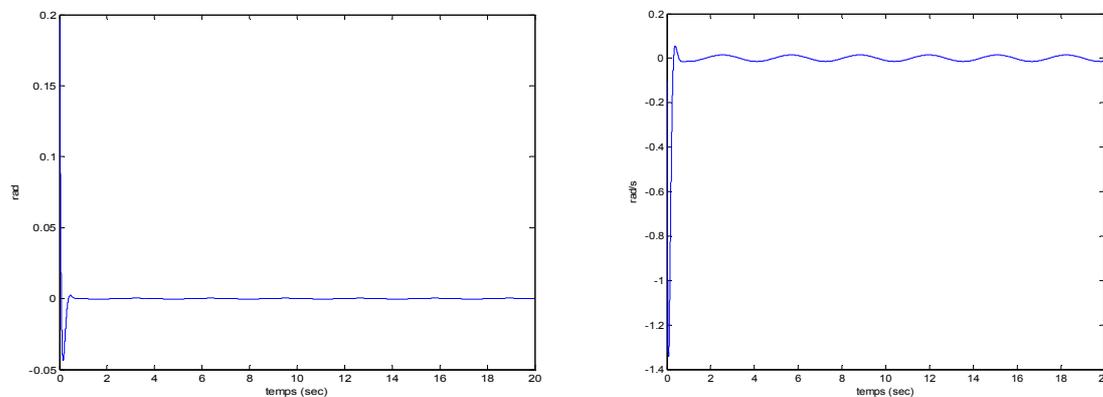


Figure. 3.9 a) Erreur d'estimation de position. b) Erreur d'estimation de vitesse

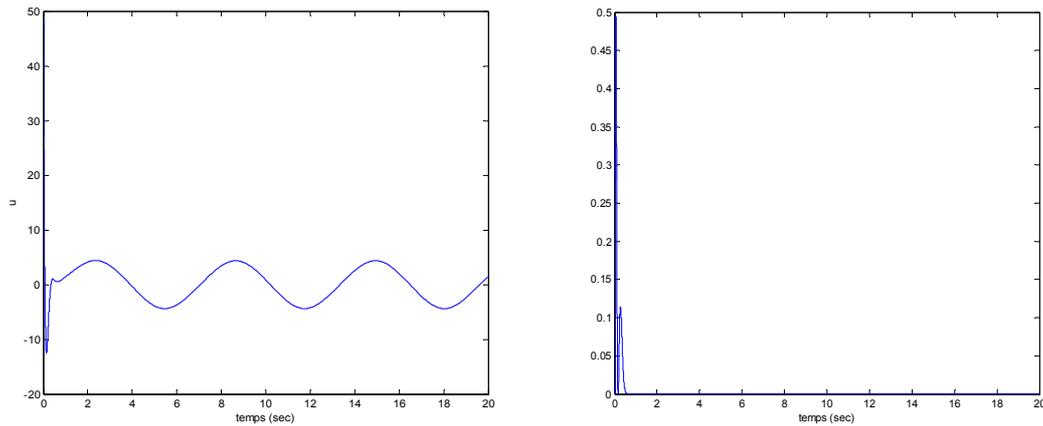


Figure.3.10 a) Signal de commande (Newton) b) Erreur quadratique de poursuite

Nous constatons également que la performance de poursuite est bien meilleure, par rapport celle issue de la méthode de synthèse explicitée dans le chapitre 2, qui de plus ne tenait pas compte des incertitudes du système. L'approche LMI directe permet ainsi de procurer des gains plus performants.

3.4. Conclusion

Ce troisième chapitre a présenté des travaux ayant trait à la commande des modèles TS incertains et perturbés dans le cas de suivi de trajectoire. Nous avons développé deux approches pour garantir la stabilité et la performance de poursuite dans ce cas. La première approche ([Mansouri et al., 2005b](#)) BMI est plus conservatrice que la seconde, la procédure de résolution se fait en deux étapes, cependant, elle peut générer une perte de gains performants. Une seconde approche directement LMI a été élaborée en changeant la structure du système augmenté. Nous avons montré que le résultat obtenu peut être directement résolu avec les algorithmes d'optimisation convexe existants. Des résultats de simulation ont montré la performance de poursuite pour chacun des gains trouvés par ces deux approches.

Comme il n'est toujours pas possible d'observer tous les états du système à commander, la dernière partie du chapitre présente des résultats concernant le suivi de trajectoires des modèles TS incertains et perturbés avec un observateur flou. Ce dernier résultat représente l'avantage d'être formulé également en conditions LMI avec moins de conservativité. Un exemple de simulation a également été présenté à la fin du chapitre concernant cette approche et comparé avec celle présenté dans le chapitre 2.

Chapitre 4

Commande sous optimale des modèles TS incertains

4.1. Introduction.....	91
4.2. Modèle TS et fonction de coût.....	92
4.3. Synthèse de commande sans observateur.....	93
4.3.1. Problématique : construction du système augmenté.....	93
4.3.2. Conditions de stabilité.....	95
4.3.3. Exemple et Simulation.....	100
4.4. Synthèse de commande avec observateur.....	101
4.4.1. Problématique : construction du système augmenté.....	101
4.4.2. Conditions de stabilité.....	104
4.4.3. Exemple et Simulation.....	108
4.5. Conclusion.....	111

Chapitre 4

Commande sous optimale des modèles TS incertains

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons du problème de poursuite de trajectoire pour les modèles TS incertains en se basant sur le concept de la commande optimale. La méthode proposée consiste à minimiser un critère quadratique relatif à la commande et l'erreur de poursuite. Nous adoptons dans ce cas la stratégie de commande utilisée dans les chapitres précédents basés sur un modèle de référence. La différence réside dans le critère considéré qui dans ce cas est un critère quadratique. Notre contribution dans ce chapitre consiste d'une part à assurer les performances de poursuite pour des systèmes incertains en utilisant un critère optimal et d'autre part à présenter des résultats directement sous forme de problème de valeur propres généralisées GEVP (General Eigen-Value Problem), ce qui évite de résoudre les conditions obtenues en deux étapes, en l'occurrence réduire la conservativité des résultats.

Ce chapitre sera structuré comme suit. Après la position du problème, nous traitons le cas où l'état du système TS incertain est complètement mesurable. Nous aboutissons à un problème de minimisation sous des contraintes directement sous forme LMI. Nous abordons ensuite le cas de la poursuite avec un observateur flou de type TS. Les théorèmes établis montreront que les performances de stabilité et de poursuite sont garanties. Les démonstrations des théorèmes et des résultats de simulations illustreront la viabilité de l'approche proposée.

4.2. Modèle TS et fonction de coût

Nous considérons le modèle flou TS incertain défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

dont les matrices incertaines $\Delta A_i(t)$ et $\Delta B_i(t)$ sont décrites par la structure ci-dessous :

$$\Delta A_i = H_i F_i E_{ai} \text{ et } \Delta B_i = H_i F_i E_{bi} \quad i= 1, 2, \dots, r \quad (4.2)$$

H_i, E_{ai}, E_{bi} sont des matrices constantes, et la matrice incertaine $F_i(t)$, est bornée de la façon suivante.

$$F_i(t)^T F_i(t) \leq I \quad i= 1, 2, \dots, r \quad (4.3)$$

Pour spécifier la trajectoire désirée, nous utilisons le modèle de référence explicité en §2.2.2 :

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t) \quad (4.4)$$

L'objectif est de synthétiser une commande optimale minimisant une fonction de coût notée J . Pour ce faire, nous considérons le critère quadratique relatif à l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$. Cette fonction de coût est donnée par l'équation suivante (Li et al., 2000 ; Tanaka & Wang, 2001)

$$J = \int_0^{\infty} (e_p^T(t)Q e_p(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (4.5)$$

Où Q et R sont des matrices définies positives de dimensions appropriées.

4.3. Synthèse de commande sans observateur

4.3.1. Construction du système augmenté

Dans cette section, nous considérons un modèle TS incertain, avec l'hypothèse que l'état du système est totalement disponible. Pour la synthèse de commande, nous utilisons la loi donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - x(t)] \quad (4.6)$$

Pour aboutir à des résultats sous forme de LMI systématiquement et avec moins de conservativité, le choix de la variable augmentée est similaire à celui dans §3.2.2. Cependant, la variable d'état augmenté va contenir, la dynamique de l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$, et la variable de référence $x_r(t)$. Pour ce faire, en considérant la loi de commande (4.6), le système TS (4.1) et le modèle de référence (4.4), la dynamique de l'erreur de poursuite $e_p(t)$ s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{e}_p(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(A_i + \Delta A_i) e_p + (B_i + \Delta B_i) K_j e_p(t) + (A_i - A_r + \Delta A_i) x_r(t) \right] - r(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Par conséquent, les dynamiques $e_p(t)$ et $x_r(t)$ nous mènent au système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{A}_{ij} \right] \bar{x}(t) + \bar{\theta}(t) = \bar{A}_a \bar{x}(t) + \bar{\theta}(t) \quad (4.8)$$

où les matrices augmentées sont décrites par :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} e_p(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j & (A_i - A_r + \Delta A_i) \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\theta}(t) = \begin{bmatrix} -r(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Dans ce cas, la performance quadratique (4.5) peut être réécrite en fonction de la variable augmentée $\bar{x}(t)$ comme suit :

$$J = \int_0^{\infty} (e^T(t)Q e(t) + u^T(t)Ru(t)) dt = \int_0^{\infty} (\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (4.10)$$

où $\bar{Q} = \text{diag}[Q \ 0]$. Par ailleurs, la loi de commande (4.6) peut également être exprimée en fonction de la variable augmentée $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i e_p(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [K_i \ 0] \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

En posant $\bar{K}_a = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [K_i \ 0]$ et $\bar{K}_i = [K_i \ 0]$, la loi de commande (4.11) peut s'écrire sous la forme :

$$u(t) = \bar{K}_a \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{K}_i \bar{x}(t) \quad (4.12)$$

S'il existe une fonction de Lyapunov quadratique avec un taux de décroissance α (decay rate) tel que :

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) \text{ et } \dot{V}(\bar{x}(t)) < -2\alpha V(\bar{x}(t)) \quad (4.13)$$

alors, la stabilité du système bouclé (4.8) est garantie et le critère quadratique (4.5) est minimal avec une borne supérieure $\bar{x}^T(0) \bar{P} \bar{x}(0)$, si et seulement si l'équation suivante est vérifiée (Tanaka & Wang, 2001).

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + 2\alpha V(\bar{x}(t)) + \bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) < 0 \quad (4.14)$$

La loi de commande qui découle de cette condition est alors sous optimale puisque la borne supérieure de J dépend des conditions initiales i.e. $\bar{x}^T(0)\bar{P}\bar{x}(0)$. Dans ce cas, on peut introduire un paramètre à minimiser dans le problème (Tanaka & Wang, 2001) :

$$J \leq \bar{x}^T(0)\bar{P}\bar{x}(0) \leq \lambda \quad (4.15)$$

4.3.2. Conditions de stabilité

Pour montrer la stabilité du système augmenté (4.8), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1 :

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

Le système en boucle fermée (4.8) est globalement asymptotiquement stable et minimise la fonction de coût (4.5), S'il existe des matrices symétriques définies positives $N_1 = N_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et des constantes positives μ_1 , μ_2 , μ_3 , et η , tels que le GEVP suivant ;

$\min_{N_1, P_2, Y_j} \lambda$ Sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} \lambda - x_r^T(0)P_2x_r(0) & e_p^T(0) \\ e_p(0) & N_1 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} Y_{ij} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ N_1 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai}N_1 & 0 & -\mu_2^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi}Y_j & 0 & 0 & -\mu_3^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ (A_i^T - A_r^T) & 0 & 0 & 0 & A_r^T P_2 + P_2 A_r + 2\alpha P_2 + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ Y_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

avec $Y_{ij} = (A_i N_1 + B_i Y_j) + (*) + 2\alpha N_1 + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1}) H_i H_i^T$ pour $i, j = 1, 2, \dots, r$.

et les changements de variables bijectifs N_1 , et Y_i i.e $P_1 = N_1^{-1}$, et $K_i = Y_i N_1^{-1}$.

Preuve :

En considérant l'inégalité (4.14), on obtient :

$$\dot{\bar{x}}(t)^T \bar{P}\bar{x}(t) + \bar{x}(t)^T \bar{P}\dot{\bar{x}}(t) + 2\alpha\bar{x}(t)^T \bar{P}\bar{x}(t) + \bar{x}(t)^T \bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) < 0 \quad (4.17)$$

La minimisation du critère en fonction de l'état initial $\bar{x}(0)$ sans entrée, c'est-à-dire $\bar{\theta}(t) = 0$, nous ramène au problème du régulateur. Ainsi (4.17) devient :

$$\bar{A}_a^T \bar{P} + \bar{P}\bar{A}_a + 2\alpha\bar{P} + \bar{Q} + \bar{K}_a^T R \bar{K}_a < 0 \quad (4.18)$$

D'une autre part, d'après (4.14) on a :

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} + \bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) < 0 \quad (4.19)$$

En intégrant (4.19) on obtient :

$$J = \int_0^\infty (\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t)) < -\bar{x}(0)^T \bar{P}\bar{x}(0) \quad (4.20)$$

Le système en boucle fermée (4.8) étant stable pour une entrée $\bar{\theta}(t) = 0$, par conséquent la fonction de coût J peut être bornée par :

$$J = \int_0^\infty (\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t)) < \bar{x}(0)^T \bar{P}\bar{x}(0) \quad (4.21)$$

En introduisant λ comme étant une borne supérieure de la fonction J , le problème $J < \bar{x}(0)^T \bar{P}\bar{x}(0) < \lambda$ peut être mis sous forme d'un problème GEVP.

En revanche, dans le cas échéant, i.e. pour prouver la stabilité du système en boucle fermée (4.8) avec une trajectoire bornée et variant dans le temps $\bar{\theta}(t) \neq 0$, nous utilisons la notion d'ISS (Input to State Stability) (Sontag & Wang, 1995). Pour ce faire, il s'agit de déterminer deux fonctions $\delta(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ de classe K^∞ telles que :

$$\dot{\bar{V}}(x(t)) \leq \beta(\|\bar{\theta}(t)\|) - \delta(\|\bar{x}(t)\|) \quad (4.22)$$

A partir de (4.18), nous pouvons écrire que :

$$\bar{x}^T(t) (\bar{A}_a^T \bar{P} + (*) + 2\alpha \bar{P} + \bar{Q} + \bar{K}_a^T R \bar{K}_a) \bar{x}(t) < -\lambda_{\min} \|\bar{x}(t)\|^2$$

avec λ_{\min} représente la plus petite valeur propre de $\bar{A}_a^T \bar{P} + (*) + 2\alpha \bar{P} + \bar{Q} + \bar{K}_a^T R \bar{K}_a$. Or en considérant $\bar{\theta}(t) \neq 0$ et en partant de (4.17) nous avons :

$$\bar{x}^T(t) (\bar{A}_a^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_a + 2\alpha \bar{P} + \bar{Q} + \bar{K}_a^T R \bar{K}_a) \bar{x}(t) + \bar{\theta}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{\theta}(t) < 0 \quad (4.23)$$

Nous pouvons écrire : $\bar{\theta}(t) = [-1 \ 1]^T r(t) = \bar{\Gamma} r(t)$, ainsi (4.23) devient :

$$\dot{\bar{V}}(\bar{x}(t)) \leq -\lambda_{\min} \|\bar{x}(t)\|^2 + 2\bar{x}^T(t) \bar{P} \bar{\Gamma} r(t)$$

et en bornant en norme de façon usuelle (4.22) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\dot{\bar{V}}(\bar{x}(t)) \leq -\lambda_{\min} \|\bar{x}(t)\|^2 + 2\|\bar{P}\bar{\Gamma}\| \|\bar{x}(t)\| \|r(t)\|$$

Notons que :

$$-\frac{\lambda_{\min}}{2} \|\bar{x}(t)\|^2 + 2\|\bar{P}\bar{\Gamma}\| \|\bar{x}(t)\| \|r(t)\| - \frac{2}{\lambda_{\min}} \|\bar{P}\bar{\Gamma}\|^2 \|r(t)\|^2 = -\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{2}} \|\bar{x}(t)\| - \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}}} \|\bar{P}\bar{\Gamma}\| \|r(t)\| \right)^2 \leq 0$$

d'où :

$$-\frac{\lambda_{\min}}{2} \|\bar{x}(t)\|^2 + 2\|\bar{P}\bar{\Gamma}\| \|\bar{x}(t)\| \|r(t)\| \leq \frac{2}{\lambda_{\min}} \|\bar{P}\bar{\Gamma}\|^2 \|r(t)\|^2$$

Il vient donc que $\dot{\bar{V}}(\bar{x}(t))$ peut être bornée par :

$$\dot{\bar{V}}(\bar{x}(t)) \leq -\frac{\lambda_{\min}}{2} \|\bar{x}(t)\|^2 + \frac{2}{\lambda_{\min}} \|\bar{P}\bar{\Gamma}\|^2 \|r(t)\|^2 \quad (4.24)$$

Comme $\|\bar{P}\bar{\Gamma}\|^2$ est borné, la résolution du problème LMI associé à (4.18), (4.24) assure que la propriété (4.22) est vraie, et donc l'ISS de (4.8) est garantie.

Pour montrer la stabilité du système augmenté (4.8) la propriété donnée par le lemme suivant est nécessaire :

Lemme 4.1 :

$$K_i^T R K_j + K_j^T R K_i \leq K_i^T R K_i + K_j^T R K_j \quad \text{où } R > 0. \quad (4.25)$$

Ainsi, en utilisant ce lemme, à partir de l'équation (4.12) nous pouvons exprimer les gains K_i d'une façon homogène de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bar{K}_a^T R \bar{K}_a &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{K}_i^T \right) R \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{K}_i \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{K}_i^T \right) R \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \bar{K}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{K}_i^T R \bar{K}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{K}_j^T R \bar{K}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{K}_i^T R \bar{K}_j + \bar{K}_j^T R \bar{K}_i \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{K}_i^T R \bar{K}_i + \bar{K}_j^T R \bar{K}_j \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Alors, d'après (4.26) l'inégalité (4.18) est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[\bar{A}_{ij}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_{ij} + 2\alpha \bar{P} + \bar{Q} + \frac{1}{2} \bar{K}_i^T R \bar{K}_i + \frac{1}{2} \bar{K}_j^T R \bar{K}_j \right] < 0 \quad (4.27)$$

En supposant que $\bar{P} = \text{diag}[P_1 \ P_2]$, avec $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = P_2^T > 0$. et en remplaçant la matrice augmentée (4.9) dans (4.27), on obtient après un complément de Shur :

$$\left[\begin{array}{cccc} P_i(A_i + \Delta A_i + B_i K_j + \Delta B_i K_j) + (*) + 2\alpha P_i + Q & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T + \Delta A_i^T) P_i & A_r^T P_2 + P_2 A_r + 2\alpha P_2 & 0 & 0 \\ K_i & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ K_j & 0 & 0 & -2R^{-1} \end{array} \right] < 0 \quad (4.28)$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, r$,

A partir de la structure des matrices incertaines dans (4.2), les incertitudes peuvent être regroupées dans une matrice notée $\Delta\bar{\Pi}$, et dans ce cas, l'inégalité (4.28) peut se mettre sous la forme :

$$\bar{\Pi} + \Delta\bar{\Pi} \leq 0 \quad (4.29)$$

avec

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} P_l(A_l + B_l K_j) + (*) + 2\alpha P_l + Q & (*) & (*) & (*) \\ (A_l^T - A_r^T)P_l & A_r^T P_2 + P_2 A_r + 2\alpha P_2 & 0 & 0 \\ K_i & 0 & -2R^{-l} & 0 \\ K_j & 0 & 0 & -2R^{-l} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

et

$$\Delta\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} P_l H_i F_i(t) E_{ai} + P_l H_i F_i(t) E_{bi} K_j + (*) & (*) & 0 & 0 \\ E_{ai}^T F_i^T(t) H_i^T P_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, r$,

Nous allons dans un premier temps éliminer les éléments anti-diagonaux de la matrice incertaine $\Delta\bar{\Pi}$ comme expliqué dans l'Annexe §B.2. Ainsi, $\Delta\bar{\Pi}$ peut être majorée de la façon suivante :

$$\Delta\bar{\Pi} \leq \begin{bmatrix} (\mu_1^{-l} + \mu_2^{-l} + \mu_3^{-l}) P_l H_i H_i^T P_l + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Par conséquent, à partir de (4.30) et (4.31) l'inégalité (4.29) devient équivalente à

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{ij} & (*) & (*) & (*) \\ (A_l^T - A_r^T)P_l & A_r^T P_2 + P_2 A_r + 2\alpha P_2 + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & 0 \\ K_i & 0 & -R^{-l} & 0 \\ K_i & 0 & 0 & -R^{-l} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

avec $\Upsilon_{ij} = P_l(A_l + B_l K_j) + (*) + 2\alpha P_l + Q + (\mu_1^{-l} + \mu_2^{-l} + \mu_3^{-l}) P_l H_i H_i^T P_l + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j$

Nous effectuons un changement de variable en effectuant une congruence de (4.32) par $\text{diag}[N_2 \quad I \quad I]$ avec $N_1 = P_1^{-1}$. Le terme Υ_{ij} devient alors :

$\Sigma_{ij} = (A_i N_1 + B_i Y_j) + (*) + 2\alpha N_1 + N_1 Q N_1 + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1 + \mu_2 E_{ai}^T E_{ai} + \mu_3 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j$
 en remplaçant dans (4.32) on aboutit finalement à :

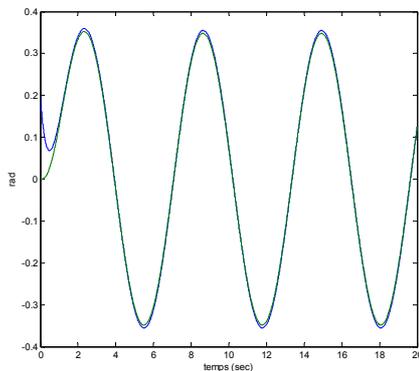
$$\begin{bmatrix} \Sigma_{ij} & (*) & (*) & (*) \\ (A_i^T - A_r^T) & A_r^T P_2 + P_2 A_r + 2\alpha P_2 + \mu_1 E_{ai}^T E_{ai} & 0 & 0 \\ Y_i & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ Y_j & 0 & 0 & -2R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.33)$$

Avec des compléments de Shur sur Σ_{ij} , on retrouve facilement la condition du théorème 4.1. ■

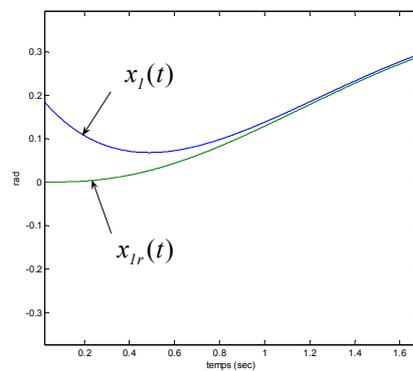
4.3.3. Exemple et Simulation

A titre d'exemple, pour montrer les performances des conditions du théorème 4.1 concernant la commande optimale, nous considérons le modèle exact du pendule inversé détaillé en Annexe D. Le modèle ainsi développé, prend en considération les incertitudes dues à la modélisation. Pour les conditions initiales $x^T(0) = [0.34 \quad 0]$, nous avons choisi $\alpha = 1.9$ (taux de décroissance) ce qui nous a mené aux gains suivants :

$K_1 = [647.0678 \quad 192.9486]$ $K_2 = [638.6690 \quad 190.3207]$, la valeur de la fonction de coût minimale correspond dans ce cas à $\lambda = 1.0553 \cdot 10^{-5}$

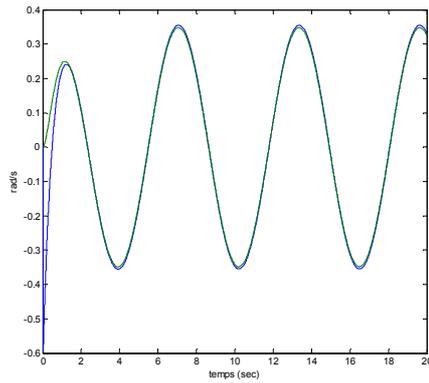


a) Position réelle et position de référence

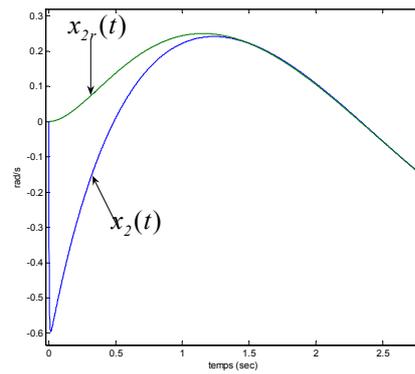


b) Zoom

Figure.4.1: Poursuite en Position (Théorème 4.1)

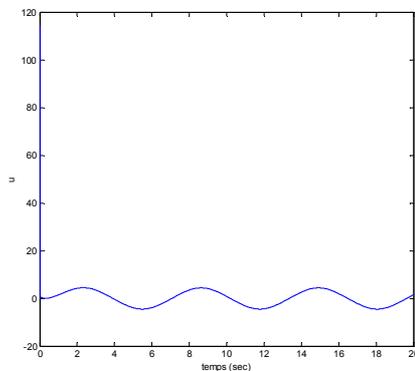


a) Vitesse réelle et vitesse de référence

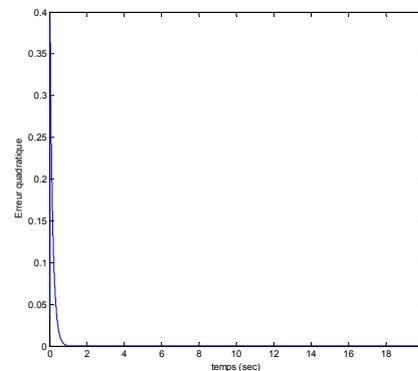


b) Zoom

Figure.4.2: Poursuite en vitesse (Théorème 4.1)



a)



b)

Figure.4.3: a) Signal de commande. b) Erreur quadratique de poursuite (Théorème 4.1)

Les figures 4.1 et 4.2 montrent les performances de poursuite en position et en vitesse obtenues en synthétisant les résultats du théorème 4.1. La poursuite de trajectoire est assurée et le signal de commande est légèrement atténué. En effet, un compromis doit être fait entre les performances de poursuite et la sollicitation de la commande dans ce cas.

4.4. Synthèse de commande avec observateur

4.4.1. Problématique : construction du système augmenté

En considérant toujours le cas des systèmes incertains donnés par (4.1), nous supposons dans cette section que tous les états ne sont pas disponibles à la mesure. Dans ce cas, la synthèse d'un observateur d'état est nécessaire. Considérons l'observateur flou donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.34)$$

$\hat{x}(t) \in R^n$ est l'état estimé du système.

La loi de commande que nous avons considérée en (4.6) devient alors :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \quad (4.35)$$

L'objectif de synthèse dans cette approche consiste aussi à déterminer une condition sur les gains K_i , permettant de minimiser le critère quadratique (4.5). Aussi, pour avoir des conditions en terme de LMI, et avec moins de conservativité la dynamique de la variable augmenté sera composée de ; la dynamique de l'erreur d'estimation $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, celle de l'erreur de poursuite $e_p(t) = x(t) - x_r(t)$, et la variable de référence $x_r(t)$.

En considérant la loi de commande (4.35) et le modèle de référence (4.4), nous pouvons exprimer chaque variable du système augmenté en fonction de ses dynamiques. Le modèle TS (4.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[-(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) x(t) \right. \\ &\quad \left. -(B_i K_j + \Delta B_i K_j) x_r(t) - (A_i + \Delta A_i) x_r(t) + (A_i + \Delta A_i) x_r(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[-(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) + (A_i + \Delta A_i) x_r(t) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Par conséquent, la dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(A_i - L_i C_j - \Delta B_i K_j) e_o(t) + (\Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) + \Delta A_i x_r(t) \right] \quad (4.37)$$

Enfin, la dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$e_p(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[-(B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j) e_p(t) \right. \\ \left. + (A_i - A_r + \Delta A_i) x_r(t) \right] - r(t) \quad (4.38)$$

Grâce aux équations (4.37), (4.38) et (4.4) respectives, on aboutit au système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) [\tilde{A}_{ij}] \tilde{x}(t) + \tilde{\theta}(t) = \tilde{A}_a \tilde{x}(t) + \tilde{\theta}(t) \quad (4.39)$$

Avec

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ e_i(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j - \Delta B_i K_j & \Delta A_i + \Delta B_i K_j & \Delta A_i \\ -B_i K_j - \Delta B_i K_j & A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j & A_i - A_r + \Delta A_i \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\tilde{A}_a = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \tilde{A}_{ij} \text{ et } \tilde{\theta}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -r(t) \\ r(t) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la fonction de coût (4.5) peut être modifiée en fonction de $\tilde{x}(t)$ comme suit :

$$J = \int_0^{\infty} (e_p^T(t) Q e_p(t) + u^T(t) R u(t)) dt = \int_0^{\infty} (\tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (4.41)$$

Avec la matrice $\tilde{Q} = \text{diag}[0 \quad Q \quad 0]$

Or, la loi de commande peut être écrite en fonction de la variable augmentée comme suit

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - \hat{x}(t)] \\ = \sum_{i=1}^r h_i K_i [-e_o(t) + x(t) - x_r(t)] \quad (4.42) \\ = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [-e_o(t) + e_p(t)]$$

En posant $\tilde{K}_a = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \tilde{K}_i$ et $\tilde{K}_i = [-K_i \quad K_i \quad 0]$, la commande (4.42) devient :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \tilde{K}_i \tilde{x}(t) = \tilde{K}_a \tilde{x}(t) \quad (4.43)$$

Pour assurer la stabilité du système en boucle fermée (4.39), avec une commande minimisant le critère quadratique (4.5), l'inégalité suivante doit être vérifiée (Tanaka & Wang, 2001) :

$$\frac{dV(\tilde{x}, t)}{dt} + 2\alpha V(\tilde{x}(t)) + \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t) < 0 \quad (4.44)$$

Avec $V(\tilde{x}, t)$ une fonction de Lyapunov quadratique avec un taux de décroissance α :

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) \text{ avec } \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0 \quad (4.45)$$

Comme la loi de commande qui découle de la condition (4.44) est également sous-optimale puisque la borne supérieure de J dépend des conditions initiales i.e. $\tilde{x}^T(0) \tilde{P} \tilde{x}(0)$, on introduit alors un paramètre λ à minimiser dans le problème :

$$J \leq \tilde{x}^T(0) \tilde{P} \tilde{x}(0) \leq \lambda \quad (4.46)$$

4.4.2. Conditions de stabilité

Le résultat principal concernant la synthèse de commande avec observateur se résume dans le théorème suivant

Théorème 4.2:

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t)) h_j(z(t)) \neq 0$

Le système en boucle fermée (4.8) est globalement asymptotiquement stable et minimise la fonction de coût (4.5), s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_1 = P_1^T > 0$, $P_3 = P_3^T > 0$, $N_2 = N_2^T > 0$, $M > 0$ et des constantes positives μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , μ_5 , μ_6 , μ_7 et μ_8 , tels que le GEVP suivant est vérifié

$\min_{N_1, P_2, Y_j} \lambda$ Sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} \lambda - e_o^T(0)P_1e_o(0) - x_r^T(0)P_3x_r(0) & e_p^T(0) \\ e_p(0) & N_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.47)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \Gamma & \Lambda^T \\ \hline \Lambda & \Psi \end{array} \right] < 0 \quad (4.48)$$

avec

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2\beta N_2 & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 \\ E_{bi}Y_j & -\mu_1^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi}Y_j & 0 & -\mu_5^{-1}I & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & 0 & (P_1A_i - Z_iC_j) + (*) + 2\alpha P_1 & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & H_i^T P_1 & -(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1})^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_i^T P_1 & 0 & -\mu_4 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Theta_{ij} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 & (*) & (*) \\ N_2 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi}Y_j & 0 & -\mu_2^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi}Y_j & 0 & 0 & -\mu_7^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai}N_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_3^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai}N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_6^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (A_i^T - A_r^T) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + 2\alpha P_3 + \mu_4 E_{ai}^T E_{ai} & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{ai} & -\mu_8^{-1} & 0 & 0 \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ Y_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{ij} = A_i N_2 + B_i Y_j + (*) + 2\alpha N_2 + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) H_i H_i^T$$

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -B_i Y_j \\ 0_{7 \times 1} \\ -Y_i \\ -Y_j \end{matrix} & 0_{10 \times 5} \end{array} \right]$$

pour $i, j=1, 2, \dots, r$.

Avec les changements de variables bijectifs N_2 , et Y_i i.e $P_2 = N_2^{-1}$, $K_i = Y_i N_2^{-1}$ et $Z_i = P_1 L_i$

Preuve :

D'une façon similaire au théorème 4.1 pour le système augmenté (4.39), en considérant

$\tilde{\theta}(t) = 0$ et en partant de (4.44), on aboutit à :

$$\tilde{A}_a^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_a + 2\alpha \tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{K}_a^T R \tilde{K}_a < 0 \quad (4.49)$$

On peut également montrer que la borne supérieure de la fonction J est donnée par :

$$J = \int_0^\infty \tilde{x}^T(t) \tilde{Q} \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t) < \tilde{x}(0)^T \tilde{P} \tilde{x}(0) \quad (4.50)$$

Cette borne peut être minimisée en introduisant λ selon le problème GEVP :
 $J < \tilde{x}(0)^T \tilde{P} \tilde{x}(0) < \lambda$.

Maintenant il reste à garantir l'ISS pour montrer la stabilité avec une entrée bornée et variant dans le temps i.e. $\tilde{\theta}(t) \neq 0$. En effet, nous pouvons déterminer deux fonctions $\delta(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ de classe K^∞ telles que :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) \leq \beta(\|\tilde{\theta}(t)\|) - \delta(\|\tilde{x}(t)\|) \quad (4.51)$$

Pour montrer cela, nous avons à partir de (4.49) :

$$\tilde{x}^T(t) (\tilde{A}_a^T \tilde{P} + (*) + 2\alpha \tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{K}_a^T R \tilde{K}_a < 0) \tilde{x}(t) < -\lambda_{\min} \|\tilde{x}(t)\|^2$$

avec λ_{\min} et la plus petite valeur propre de $\tilde{A}_a^T \tilde{P} + (*) + 2\alpha \tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{K}_a^T R \tilde{K}_a$. Or en considérant $\tilde{\theta}(t) \neq 0$ et en partant de (4.44) nous avons

$$\tilde{x}^T(t) (\tilde{A}_a^T \tilde{P} + (*) + 2\alpha \tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{K}_a^T R \tilde{K}_a < 0) \tilde{x}(t) + \tilde{\theta}^T(t) \tilde{P} \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \tilde{P} \tilde{\theta}(t) < 0 \quad (4.52)$$

En posant : $\tilde{\theta}(t) = [0 \quad -1 \quad 1]^T r(t) = \tilde{\Gamma} r(t)$, (4.23) nous pouvons montrer pareillement que :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) \leq -\frac{\lambda_{\min}}{2} \|\tilde{x}(t)\|^2 + \frac{2}{\lambda_{\min}} \|\tilde{P} \tilde{\Gamma}\|^2 \|r(t)\|^2 \quad (4.53)$$

$\|\tilde{P} \tilde{\Gamma}\|^2$ étant borné. Donc en résolvant le problème LMI associé à (4.49), (4.53) assure que la propriété (4.51) est vraie, et donc l'ISS de (4.39) est garantie. De même, en revenant à l'inégalité (4.49), et en utilisant le lemme 4.1, et les transformations (4.43) et (4.40), la contrainte (4.49) devient :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \left[\tilde{A}_{ij}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{ij} + 2\alpha \tilde{P} + \tilde{Q} + \frac{1}{2} \tilde{K}_i^T R \tilde{K}_i + \frac{1}{2} \tilde{K}_j^T R \tilde{K}_j \right] < 0 \quad (4.54)$$

En supposant que $\tilde{P} = \text{diag}[P_1 \ P_2 \ P_3]$ avec $P_1 = P_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$ et $P_3 = P_3^T > 0$. et remplaçant les matrices augmentées, (4.54) est alors équivalente à :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -P_2 B_i K_j - P_2 \Delta B_i K_j + K_j^T \Delta B_i^T P_1 + \Delta A_i^T P_1 & D_{22} & (*) & (*) & (*) \\ \Delta A_i^T P_1 & (A_i^T - A_r^T + \Delta A_i^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + 2\alpha P_3 & 0 & 0 \\ -K_i & K_i & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ -K_j & K_j & 0 & 0 & -2R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.55)$$

avec

$$D_{11} = P_1(A_i - L_i C_j) - P_1 \Delta B_i K_j + (*) + 2\alpha P_1$$

$$D_{22} = P_2(A_i + \Delta A_i + B_i K_j + \Delta B_i K_j) + (*) + Q + 2\alpha P_2$$

pour $i, j=1, 2, \dots, r$,

Il suffit maintenant de ramener les matrices incertaines dans les blocs diagonaux. Ceci peut être réalisé en utilisant le lemme B.2 et le résultat de l'exemple B.2 dans l'Annexe B. Ainsi, l'inégalité (4.55) implique la contrainte suivante :

$$\begin{bmatrix} P_1(A_i - L_i C_j) + (*) + 2\alpha P_1 + d1 & (*) & 0 & (*) & (*) \\ -P_2 B_i K_j & P_2(A_i + B_i K_j) + (*) + Q + 2\alpha P_2 + d2 & (*) & (*) & (*) \\ 0 & (A_i^T - A_r^T) P_2 & A_r^T P_3 + P_3 A_r + 2\alpha P_3 + d3 & 0 & 0 \\ -K_i & K_i & 0 & -2R^{-1} & 0 \\ -K_j & K_j & 0 & 0 & -2R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.56)$$

pour $i, j=1, 2, \dots, r$,

avec :

$$d1 = (\mu_1 + \mu_5) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1} + \mu_3^{-1} + \mu_4^{-1}) P_1 H_i H_i^T P_1$$

$$d2 = (\mu_2 + \mu_7) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\mu_5^{-1} + \mu_6^{-1} + \mu_7^{-1} + \mu_8^{-1}) P_2 H_i H_i^T P_2 + (\mu_3 + \mu_6) E_{ai}^T E_{ai}$$

$$d3 = (\mu_4 + \mu_8) E_{ai}^T E_{ai}$$

Pour aboutir à une condition LMI, nous procédons à une congruence de (4.56) par $\text{diag}[N_2 \ N_2 \ I \ I \ I]$ où $N_2 = P_2^{-1}$. L'inégalité (4.56) devient :

$$\left[\begin{array}{c|ccc} N_2\Omega N_2 + (\mu_1 + \mu_5)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & (*) & 0 & (*) & (*) \\ \hline -B_i N_2 & (A_i N_2 + B_i Y_j) + (*) + N_2 Q N_2 + 2\alpha N_2 + N_2 d 2 N_2 & (*) & (*) & (*) \\ 0 & (A_i^T - A_r^T) & A_r^T P_3 + P_3 A_r + 2\alpha P_3 + d 3 & 0 & 0 \\ -Y_i & Y_i & 0 & -2R^{-l} & 0 \\ -Y_j & Y_j & 0 & 0 & -2R^{-l} \end{array} \right] < 0$$

pour $i, j=1, 2, \dots, r$, (4.57)

avec :

$$\Omega = P_i(A_i - L_i C_j) + (*) + 2\alpha P_i + (\mu_1^{-l} + \mu_2^{-l} + \mu_3^{-l} + \mu_4^{-l}) P_i H_i H_i^T P_i$$

En utilisant le lemme 3.1, on peut majorer $N_2\Omega N_2$ en introduisant un scalaire positif α . Le premier bloc diagonal, correspondant aux deux premières lignes et aux deux premières colonnes de l'inégalité (4.57), peut être majoré de la manière suivante :

$$N_2\Omega N_2 + (\mu_1 + \mu_5)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j \leq -2\beta N_2 - \beta^2 \Omega^{-l} + (\mu_1 + \mu_5)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j \quad (4.58)$$

pour $i, j=1, 2, \dots, r$,

En effectuant un complément de Shur, la contrainte (4.58) devient alors :

$$\left[\begin{array}{cc} -2\beta N_2 + (\mu_1 + \mu_5)Y_j^T E_{bi}^T E_{bi} Y_j & \beta I \\ \beta I & P_i(A_i - L_i C_j) + (*) + 2\alpha P_i + (\mu_1^{-l} + \mu_2^{-l} + \mu_3^{-l} + \mu_4^{-l}) P_i H_i H_i^T P_i \end{array} \right] < 0 \quad (4.59)$$

pour $i, j=1, 2, \dots, r$,

A partir de (4.59) et (4.57) et avec des complément de Shur on aboutit à l'inégalité (4.48) du théorème 4.3. ■

4.4.3. Exemple et Simulation

Pour montrer les performances en poursuite avec l'approche LMI du théorème 4.2, on considère le modèle exact du pendule inversé donné en Annexe D.

On calcule les gains de commande K_i et L_i selon la condition LMI définies dans §4.4.2 En choisissant :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad r(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.46 \sin(t) \end{bmatrix} \text{ et un taux de croissance (Decay rate) } \alpha = 1.9 \text{ et en}$$

partant des conditions initiales $x^T(0) = [0.34 \ 0]$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \ 0.1]$. Les gains suivants sont obtenus

$$K_1 = [474.4289 \ 147.2128], \quad K_2 = [474.7678 \ 147.3133]$$

$$L_1^T = [20 \ 210.2651], \quad L_2^T = [20 \ 215.7756]$$

Pour une valeur minimale (de la fonction de coût) de $\lambda = 9.3 \cdot 10^{-4}$

Les résultats des figures (4.3 – 4.7) illustrent les simulations effectuées pour une poursuite de trajectoire sinusoïdale. Ainsi dans le cas d'une commande avec critère optimal et observateur, on constate qu'aussi bien les performances de poursuite que celle de l'observateur, sont garanties. Les zooms figure 4.5b et figure 4.b illustrent la convergence des états réels et estimés vers la trajectoire de référence. Nous avons représenté sur la figure 4.7a et 4.7b respectivement les erreurs d'estimation en position et en vitesse. Le signal de commande et l'erreur quadratique sont donnés respectivement sur les figures 4.8a et 4.8b. On constate que la commande, dans cette approche, est beaucoup moins sollicitée que celui de l'approche H_∞ ce qui est de surcroît normal puisque le critère de coût minimise également la commande. Notons que les gains calculés dans cette approche sont obtenus en une seule étape également. Et que la commande sous optimale développée, est une alternative pour assurer la poursuite de trajectoire.

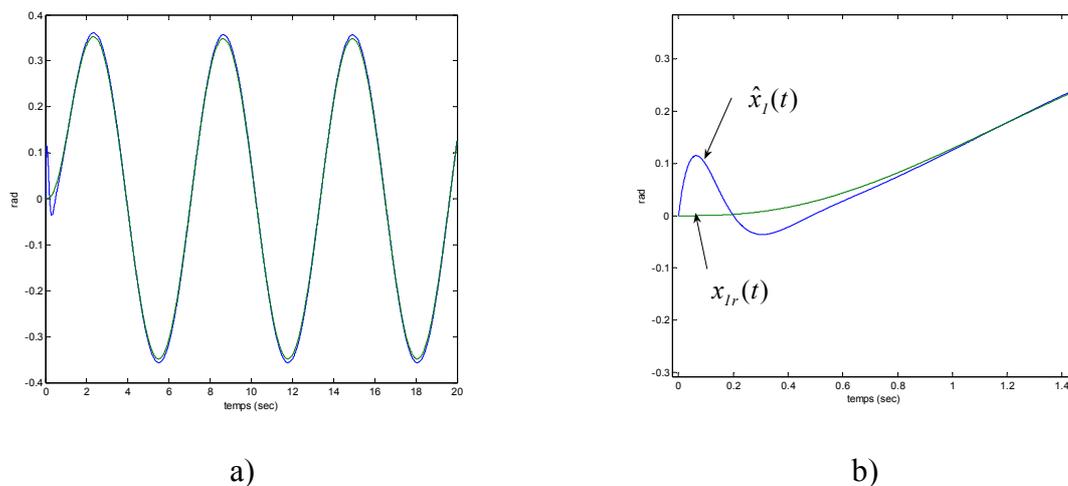
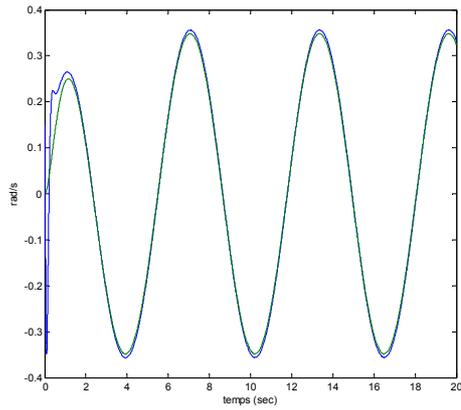
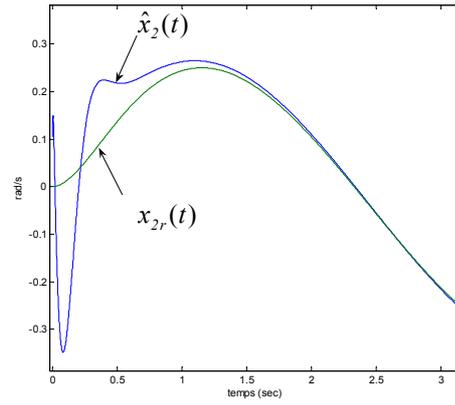


Figure. 4.3: a) Poursuite en position. b) Zoom

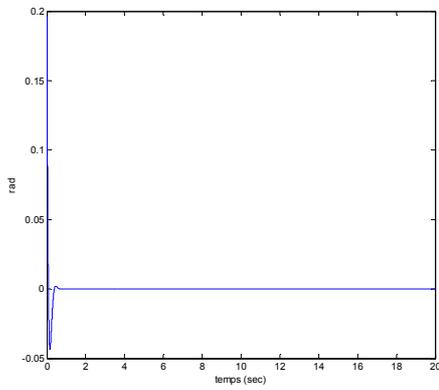


a)

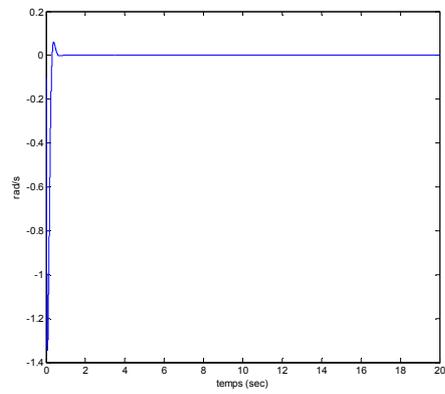


b)

Figure. 4.4: a) Poursuite en vitesse. b) Zoom.

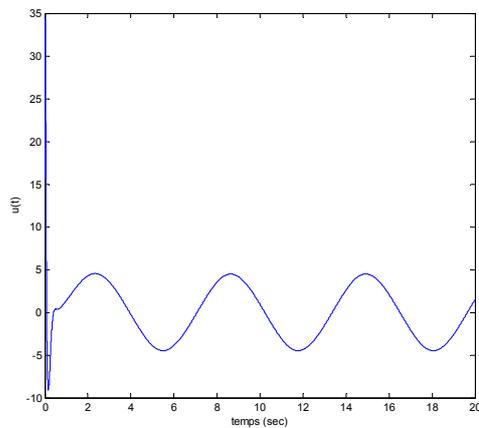


a)

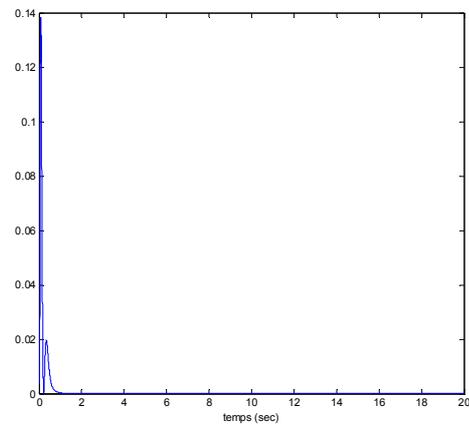


b)

Figure. 4.5 a) Erreur d'estimation de position. b) Erreur d'estimation de vitesse



a)



b)

Figure.4.6 a) Signal de commande (Newton) b) Erreur quadratique de poursuite

4.5. Conclusion

Le problème de suivi de trajectoire dans ce chapitre, a été traité avec une approche dite sous optimale. Elle permet de faire une synthèse de commande minimisant une fonction de coût de type quadratique. Cependant la borne supérieure de cette fonction de coût, dépend des conditions initiales du système ce qui nécessite un nouveau calcul des gains à chaque changement de conditions initiales. La minimisation de la fonction de coût se traduit donc par un problème de valeurs propres généralisé (GEVP) sous des contraintes formulées en LMI. La synthèse de commande a été effectuée en prenant en considération la disponibilité ou pas de l'état du système. Ainsi, nous avons établies des conditions directement sous forme LMI aussi bien dans le cas avec ou sans observateur. Pour chaque cas, un exemple de simulation a été illustré. L'objectif ici était surtout de développer une autre alternative de poursuite de trajectoire pour les modèles TS incertains et non pas de la comparer avec l'approche H_∞ . Néanmoins un compromis en la qualité de la poursuite, l'atténuation des perturbations ou l'allure du signal de commande reste toujours à faire selon les critères de performances souhaitées.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons abordé le problème de suivi de trajectoires des systèmes non linéaires décrits par les modèles flous de type TS. Cette contribution traite essentiellement de la synthèse de commande robuste pour les systèmes incertains et/ou perturbés. Les approches élaborées, se basent sur deux critères distincts, à savoir un critère H_∞ pour atténuer l'effet des perturbations et un critère quadratique à minimiser dans le but d'une commande optimale. Les résultats ainsi obtenus, sont formulés en termes de LMI pour une meilleure exploitation numérique des résultats.

Dans le chapitre 1, nous avons mené une étude bibliographique, partant de la modélisation floue jusqu'à la synthèse de commande robuste, ce qui a permis de présenter un état de l'art sur les principaux résultats de la littérature concernant la stabilisation des modèles TS. Dans cette partie, nous avons détaillé le principe de la commande PDC, les principales lois de commande qui en découlent avec la mise en œuvre d'observateur TS ainsi que quelques résultats concernant la relaxation des LMI. Quant aux systèmes TS incertains et/ou perturbés, quelques résultats de commandes robustes ont été cités, notamment les approches PDC utilisant un critère H_∞ , ainsi que les approches spécifiant les performances d'un système TS tel que la synthèse de commande par placement de pôles et la commande optimale. Ces outils ainsi présentés ont été exploités par la suite dans les différentes approches que nous avons développées.

Après un positionnement du problème concernant le suivi de trajectoire des modèles TS, le chapitre 2 vise à montrer l'intérêt des approches de synthèse des lois de commandes proposées dans ce mémoire. Ainsi, la synthèse de commande robuste des modèles TS perturbés pour assurer le suivi de trajectoire avec un modèle de référence est abordée. Cette loi de commande se base sur l'approche H_∞ qui consiste à minimiser l'erreur de poursuite par rapport à l'ensemble des perturbations. Au cours de cette approche, nous avons montré des conditions relâchées qui tiennent compte du nombre maximal de règles actives à chaque instant. Aussi, les conditions des théorèmes développés qui se présentent sous forme de BMI ont pu être résolues en deux étapes. Des résultats de simulation ont montré les domaines de faisabilité des conditions obtenues par rapport à ceux de la littérature.

Pour étendre les approches développées dans le chapitre 2, nous nous sommes ensuite intéressés aux modèles incertains. Les incertitudes structurelles ou paramétriques, qui admissibles et bornées sont généralement dues à la modélisation ou aux paramètres variant dans le temps. Ainsi, nous avons développé deux approches pour garantir la stabilité et les performances de poursuite dans le cadre de ce type de modèles, une approche BMI et une autre directement sous forme LMI. Nous avons constaté que la première est plus conservative que la seconde étant donné que la procédure de résolution s'effectue en deux étapes et génère ainsi une perte de gains performants. La seconde approche est obtenue directement en LMI en changeant la structure du système augmenté. Nous avons ensuite étendue la seconde approche au cas où tous les états ne sont pas disponibles à la mesure en considérant la synthèse d'un observateur flou de type Luenberger. Des résultats de simulation d'un pendule inversé ont permis d'illustrer les performances de poursuite et d'observation pour chacune des approches proposés dans ce chapitre.

Enfin, dans l'objectif de développer une autre alternative de poursuite de trajectoire pour les modèles TS incertains, nous avons proposé une commande qui minimise un critère optimal. En l'occurrence, nous avons opté pour un critère différent de celui du chapitre 3. Il s'agit d'une commande sous optimale, qui se base sur la minimisation d'une fonction de coût de type quadratique. En adoptant la même stratégie de synthèse de la commande, nous avons aboutis à des gains de retours optimaux au sens du critère quadratique, en résolvant un problème d'optimisation convexe, sous une formulation GEVP avec contraintes LMI. L'approche ainsi établie traite de la synthèse avec et sans observateur également. Le problème

de suivi de trajectoire ainsi traité dans ce chapitre, a été mis en évidence avec l'exemple de simulation abordé précédemment avec le critère H_∞ .

Par ailleurs, un certain nombre de perspectives sont envisageables dans ce travail. A très court terme, il s'agit d'appliquer les approches développées dans les trois derniers chapitres sur un système multi entrées multi sorties. Ces travaux sont en cours de finalisation au niveau de l'équipe pour un double pendule inversé modélisé par un représentant TS exacte avec prise en compte des incertitudes. Nous comptons également aborder rapidement la recherche d'un principe de séparation entre la commande et l'observateur développés. Dans ce même contexte, il a, à notre connaissance, quasiment pas de résultats établis pour ce type de systèmes lorsque les variables de prémisses $z(t)$ ne sont pas mesurables (Guerra *et al.*, 2006).

Les travaux présentés dans cette thèse, pourront être également étendus à d'autres problématiques au niveau de notre équipe. Il s'agit d'utiliser des concepts développés pour des systèmes dynamiques hybrides tels que l'utilisation de fonctions de Lyapunov multiples pour l'étude de stabilité. La prise en compte de ces techniques dans le cas de la commande des modèles TS est très récente, et peu de travaux concernent les modèles incertains et perturbés et, encore moins, les systèmes écrits sous forme descripteurs. En effet, l'utilisation de fonctions de Lyapunov multiples serait une alternative, pour avoir des conditions plus relâchées et réduire le conservatisme d'obtention des gains de commande.

Des perspectives, d'un point de vue expérimental sont également envisageables au niveau de l'équipe. En effet, des machines de rééducation et d'entraînement pour le genou et les membres supérieurs sont en cours de réalisation. Ces machines représentent des systèmes robotisés à plusieurs degrés de liberté, pour lesquels les protocoles d'entraînements induisent des trajectoires particulières à effectuer dans une zone compacte de l'espace d'évolution. Dans ce cas, les approches que nous avons développées sont parfaitement adéquates pour les besoins et performances désirées. Il s'agira de considérer les modèles TS de ces systèmes, les incertitudes pouvant venir de la complexité du modèle ou de la prise en compte de l'interaction homme machine pendant le mouvement. Des lois de commandes robustes seront nécessaires. De plus, pour ce type de système mécanique, une écriture du modèle sous forme descripteur est souvent appropriée et la transposition de nos travaux dans ce cas peut être envisageable.

Rappel sur la stabilité selon Lyapunov

A.1 Stabilité selon Lyapunov : Méthode directe

Le principe de stabilité selon Lyapunov repose sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Si cette énergie, représentée généralement par une fonction scalaire, est continûment dissipée, on parle alors de système dissipatif. Dans ce cas, on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. En l'occurrence, en étudiant la variation de cette fonction scalaire, nous pouvons éventuellement conclure sur la stabilité du système étudié.

Considérons le système non linéaire autonome (non commandé) suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{A.1}$$

où, $x(t)$ représente l'état du système et la fonction $f(x(t)) \in C^1$ telle que $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente le système dynamique. La fonction f décrit les dynamiques du système et peut être modélisée par des équations algébriques classiques et/ou un modèle flou à base de connaissance.

Le système (A.1) est dit en équilibre autour de x_0 si son état ne varie pas au cours du temps en l'absence d'influence externe, x_0 est alors appelé point d'équilibre.

Définition A.1 (point d'équilibre) :

x_0 est appelé point d'équilibre du système (A.1) si $f(x_0) = 0 \quad \forall t > 0$

Dans ce travail, nous avons considéré que le point d'équilibre ($x_0 = 0$) est l'origine de l'espace d'état. Cette supposition est assez générale et ne change rien à l'étude de la convergence de l'état du système, car si $x_0 \neq 0$ est un point d'équilibre du système (A.1) alors $x_0 = 0$ est point d'équilibre du système $\dot{z}(t) = f(z(t) + x_0)$.

Il existe de nombreuses définitions de la stabilité de Lyapunov dans la littérature **et nous ne présentons que les plus utilisées dans les modèles TS**. Pour cela, la définition d'une certaine classe de fonctions est nécessaire.

Définition A.2 : Une fonction continue $\alpha(r) : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe κ si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$ si $a = \infty$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$, la fonction est dite de classe κ_∞

Théorème A.1 : (Isidori, 1999) (Vidyasagar, 1993)

Soit une fonction scalaire $V(x(t)) \in C^1$ telle que

$$\alpha_1(x(t)) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(x(t)) \tag{A.2}$$

$\forall \|x\| < d$ où $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont des fonctions de classe κ définies sur $[0, d)$, $d \in \mathbb{R}^{+*}$

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$, $\forall \|x\| < d$ alors le point d'équilibre ($x_0 = 0$) de (A.1) est *localement stable*.

Il est globalement stable si de plus $d = \infty$ et les fonctions $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe κ_∞ .

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\forall \|x\| < d$ avec $\alpha_0(\cdot)$ fonction de classe κ définie sur $[0, d)$, alors le point d'équilibre de (A.1) est *localement asymptotiquement stable*.

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\forall x (d = \infty)$ avec $\alpha_0(\cdot)$ et les fonctions $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe κ_∞ , alors le point d'équilibre de (A.1) est *globalement asymptotiquement stable*.

- Si $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$, $\forall x$ ($d = \infty$) et les fonctions $\alpha_0(\cdot)$, $\alpha_1(\cdot)$ et $\alpha_2(\cdot)$ sont de classe κ_∞ , de la forme

$$\alpha_1(\|x\|) = a\|x\|^p, \alpha_2(\|x\|) = b\|x\|^p, \alpha_0(\|x\|) = c\|x\|^p$$

telles que $a, b, c \geq 0$, $p \geq 1$, alors le point d'équilibre de (A.1) est *globalement exponentiellement stable*.

D'autres définitions de la stabilité de Lyapunov sont présentées dans (Borne et al., 1993) (Khalil, 1996). Par ailleurs, dans le cadre de ce travail, on s'intéressera à la Stabilité Asymptotique Globale du point d'équilibre du système dynamique (A.1).

A.2 Fonctions de Lyapunov usuelles

En général, il n'existe pas de méthodes systématiques pour trouver toutes les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction $V(x(t))$ et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains...). Parmi ces fonctions on distingue les formes suivantes :

a) Fonction de Lyapunov quadratique :

Une fonction candidate classique consiste à utiliser une forme quadratique :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), P > 0 \tag{A.3}$$

De très nombreux travaux utilisent ce type de fonctions pour l'étude de stabilité. Notamment dans le cas des systèmes incertains, des systèmes linéaires ainsi que dans celui des modèles TS (Tanaka et al., 1998a). Dans ce cas, la forme générale de la fonction est celle utilisée dans le cas des systèmes de type Lur'e (Khalil, 1996).

Trouver la fonction de Lyapunov adéquate revient à trouver une matrice définie positive P . L'atout majeur de cette fonction dans le cas des modèles TS est que la formulation convexe

du problème permet aisément l'extraction d'une telle fonction lorsqu'elle existe. L'inconvénient de cette fonction réside dans l'obtention des conditions de stabilités très conservatives, d'où l'intérêt de chercher des conditions qui le sont beaucoup moins (conditions relaxées). Cette fonction fera l'objet de l'étude de stabilité durant tous ces travaux.

Une autre variante de ces fonctions candidates peut être exprimée de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{A.4})$$

avec $P_i > 0$ et $\alpha_i \in R^{+*}$. Ces fonctions ont été utilisées dans le cas des systèmes interconnectés (Lunz, 1992 ; Sezer & Siljak, 1988) ensuite dans les modèles TS (Akar & Ozguner, 1998 ; Akar & Ozguner, 2000).

b) Fonction affine paramétrique

Cette fonction est de la forme suivante

$$V(x(t)) = x^T(t) P(\theta) x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{A.5})$$

avec $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$ et est souvent utilisée pour étudier les systèmes linéaires à paramètres incertains variants dans le temps (Gahinet *et al.*, 1996).

c) Fonction polyquadratique

La forme de cette fonction est la suivante (Cao *et al.*, 1996)

$$V(x(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{A.6})$$

où les h_i sont les fonctions d'activation définies au Chapitre 1, §1.2.1. Dans le cas des modèles TS, cette fonction permet de relaxer les contraintes imposées par la méthode quadratique. En effet, trouver une matrice pour chaque modèle local est plus facile que trouver une matrice commune entre tout les modèles locaux. Pour chercher les matrices P_i ,

une procédure d'optimisation convexe a été proposée par Johansen (Johansen, 2000) dans le cas des systèmes non linéaires continûment différentiables. Remarquons que cette fonction représente le cas le plus général des fonctions quadratiques, en effet, il suffit de choisir $P_i=P$ pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Plusieurs travaux utilisent ce type de fonctions que ce soit dans le cas continu (Jadbabaie, 1999 ; Morère, 2001 ; Blanco *et al.*, 2001 ; Tanaka *et al.*, 2001), ou bien dans le cas discret (Morère, 2001 ; Wang *et al.*, 1996).

d) Fonctions continues par morceaux

Ce type de fonctions est donné par la forme :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_r(x(t))), \quad (\text{A.7})$$

avec

$$V_i(x(t)) = x^T(t)P_i(\theta)x(t), \quad P_i > 0 \quad (\text{A.8})$$

Ce type de fonctions présente l'avantage d'être moins conservatif que les fonctions quadratiques. Au départ, elle a été utilisée pour étudier les systèmes linéaires variant dans le temps (Boyd *et al.*, 1994), puis adoptée pour l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques hybrides notamment les systèmes à commutations (Pettersson, 1999 ; Xu, 2001 ; Mansouri *et al.*, 2003 ; Feng *et al.*, 1997). Récemment, ce type de fonction fait l'objet d'applications dans le cas des systèmes flous (Cao *et al.*, 1999 ; Zhang *et al.*, 2001 ; Johanson *et al.*, 1999).

Analyse convexe et inégalités linéaires matricielles (LMI)

Les résultats d'analyse et de synthèse dans ce mémoire, se basent essentiellement sous des formulations des problèmes d'optimisations convexes. Celles-ci présentent l'avantage d'avoir un coût de calcul raisonnable et le résultat obtenu correspond à un minimum global unique, ce qui exclu l'existence d'un minimum local de la fonction à optimiser.

Généralement, les problèmes auxquels on abouti ne sont pas forcément convexes, et nécessitent quelques transformations en un problème convexe, ce qui peut entraîner des restrictions des domaines de validité des conditions trouvées. Le résultat ainsi obtenu, est optimal au sens du nouveau problème, i.e, après transformation du problème non convexe en un problème convexe. Cette remarque est fondamentale pour l'interprétation des résultats obtenus par la méthode d'optimisation convexe, en effet celle-ci change pour chaque nouveau problème convexe obtenu.

B.1 Problèmes LMI

Depuis quelques années, de nombreux travaux, concernant l'analyse et la synthèse de la commande des systèmes dynamiques, se résolvent par l'intermédiaire de problèmes convexes, notamment, la programmation semi-définie (SDP) ([El Ghaoui, 1997](#)). Parmi ces méthodes, on

distingue la méthode du point intérieur développée initialement par (Karmakar, 1984) pour la programmation linéaire qui a été étendue ensuite par (Nesterov & Nemirovski, 1994) dans le cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives. En automatique, cette approche est connue sous le nom de LMI (Linear Matrix Inequalities) (Boyd et al., 1994), cette méthode est l'une des plus appliquées dans le domaine de la commande grâce à l'existence de méthodes de résolution numérique efficaces. Dans le paragraphe suivant nous allons présenter les principes de bases de cette approche.

Définition B.1 :

Etant donnée une famille de matrices symétriques P_0 et $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ de $R^{p \times p}$ et un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, une inégalité matricielle linéaire (LMI) stricte (resp. non strict) en x est de la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0) \tag{B.1}$$

La contrainte $F(x) > 0$ est convexe (Boyd et al., 1994) et appelée contrainte LMI.

Remarque B.1 :

Etant donnée plusieurs LMI, elles peuvent être regroupés dans une matrice diagonale constituant une seule contrainte LMI.

On distingue trois type de problèmes d'optimisation convexe rencontrés sous forme de LMI

1) Problème de faisabilité

Trouver un vecteur x tel que $F(x) > 0$. Ce problème est résolu généralement en cherchant le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < t.I \tag{B.2}$$

Si la valeur minimale de t est négative alors le problème est faisable.

2) Problème de valeur propre (EVP : Eigen-Value Problem)

Minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

Minimiser λ

$$\text{Sous les contraintes } \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

3). Problème de valeurs propres généralisées (General EVP)

Minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices par rapport à une contrainte LMI :

Minimiser λ

$$\text{Sous les contraintes } \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Techniques d'analyse et transformations matricielles

En général, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles. Dans la suite nous présentons quelques techniques de transformation matricielle utiles pour les résultats établis dans ce mémoire.

a. **Congruence** : Si $P(x) > 0$ et X est régulière, alors : $X^T P(x) X > 0$

b. **Complément de Schur** : (El Ghaoui, 1997) soient trois matrices $R(x) = R(x)^T$, $Q(x) = Q(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x . les LMI suivantes sont équivalentes

$$\text{i) } \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{ii) } R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x) > 0$$

c. **Complément de Schur généralisé :**

$$\begin{cases} Y - XR^{-1}X^T - US^{-1}U^T > 0 \\ R > 0, S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Y & X & U \\ X^T & R & 0 \\ U^T & 0 & S \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.5})$$

d. **Contrainte quadratique convexe :** la contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$ où $Z(x) \in R^{p,q}$ est affine par rapport à la variable $x \in R^p$ est représentée par

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.6})$$

e. **Lemme de S- procédure (Boyd et al, 1994) :**

C'est une technique qui permet d'approcher un ensemble de contraintes quadratiques par une seule contrainte quadratique.

Lemme B.1 : Soient F_0, \dots, F_p des fonctions quadratiques de la variable $\zeta \in R^m$ avec :

$$F_i(\zeta) = \zeta^T T_i \zeta + 2u_i^T \zeta + v_i \quad (\text{B.7})$$

où $T_i = T_i^T \in R^p$, $i \in \{0, \dots, p\}$.

Alors la proposition (1) implique la proposition (2)

$$(1) \text{ Il existe : } \tau_i \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, p\} \text{ tels que : } \begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(2) F_0(\zeta) \geq 0 \text{ pour tout } \zeta \neq 0 \text{ tel que } F_i(\zeta) \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, p\}.$$

f. **Le carré matriciel et ses dérivées :**

Lemme B.2 (Zhou & Khargonedkar, 1988): Soit deux matrices A et B de dimensions appropriées, on a

$$A^T B + B^T A \leq \gamma A^T A + \gamma^{-1} B^T B \quad (\text{B.8})$$

où γ est une constante positive.

Pour réduire le conservatisme, cette propriété peut être également écrite en fonction d'une matrice définie positive $M > 0$.

$$A^T B + B^T A \leq A^T M A + B^T M^{-1} B \quad (\text{B.9})$$

Les propriétés (B.8) et (B.9) ont l'avantage de pouvoir éliminer les termes anti-diagonaux et les ramener dans les blocs diagonaux, comme l'explique l'exemple B.1.

Exemple B.1 :

On souhaite éliminer les termes anti-diagonaux A et B de la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} Y & W^T + B^T A^T \\ W + AB & Z \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.10})$$

(B.10) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} Y & W^T \\ W & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.11})$$

Or

$$\begin{bmatrix} 0 & B^T A^T \\ AB & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

En utilisant la propriété (B.9), on obtient l'inégalité :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^T \\ 0 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

La condition (B.10) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} Y + B^T Q^{-1} B & W^T \\ W & Z + AQA^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{B.14})$$

g. Lemme d'élimination :

Ce lemme est aussi connu sous le nom de projection, il est très utilisé dans les formulations LMI.

Lemme B.3 (Boyd et al., 1994): Pour des matrices réelles $W = W^T$, M et N de tailles appropriées, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Il existe une matrice réelle K telle que :

$$W + MKN^T + NK^T M^T < 0 \quad (\text{B.15})$$

- Il existe un scalaire réel σ tel que :

$$W < \sigma MM^T \text{ et } W < \sigma NN^T \quad (\text{B.16})$$

- Les compléments orthogonaux M^\perp et N^\perp de M et N , respectivement, vérifient :

$$M^{\perp T} W M^\perp < 0 \text{ et } N^{\perp T} W N^\perp < 0 \quad (\text{B.17})$$

B.3 Les inégalités matricielles bilinéaires.

Beaucoup de problèmes de commande se présentent sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI). Aujourd'hui, il n'existe pas de méthodes exactes pour résoudre ce genre de problème, mais des heuristiques ont été mises en place dans différents cadres. D'une façon générale, une BMI est définie comme suit

Définition B.2 :

On appelle BMI en x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, une inégalité de la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j P_{ij} > 0 \quad (\text{B.18})$$

Où les matrices P_i et P_{ij} appartenant à $R^{p \times p}$ sont symétriques.

Ce type de contrainte, constitue un problème d'optimisation non convexe. Il peut y avoir plusieurs solutions locales qui ne se résolvent pas par les techniques d'optimisation convexe comme celles de résolution des LMI. Pour ce genre de problèmes, des méthodes itératives

sans garantir la convergence permettent de résoudre certaines classes de BMI. D'autre part, des algorithmes permettant de trouver des solutions locales (Hassibi et al., 1999) et globales (Beran et al., 1997) ont été développées ces dernières années pour résoudre ces problèmes non convexes.

Certaines BMI peuvent se ramener facilement à des LMI. Dans cette issue, plusieurs méthodes sont envisageables. On distingue la méthode de changement de variable judicieux et les techniques d'élimination des variables en utilisant le lemme d'élimination.

Exemple B.2 :

A titre d'exemple, nous considérons la condition de stabilisation du modèle TS par la commande PDC qui se présente sous un problème BMI en K_i et P comme suit :

$$P > 0, (A_i + B_i K_i)P + P(A_i + B_i K_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{B.19})$$

Avec congruence par $P^{-1} = Q$ on obtient

$$Q > 0, Q(A_i + B_i K_i)^T + (A_i + B_i K_i)Q < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{B.20})$$

En posant $Y_i = K_i Q$ on obtient les LMI suivantes en Y_i et Q

$$N > 0, A_i N + N A_i^T + B_i Y_i + Y_i^T B_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{B.21})$$

Annexe C

Modélisation TS exacte du pendule inversé

Pour illustrer les résultats montrés dans les chapitres 3 et 4, nous considérons à titre d'exemple, le problème de poursuite d'un pendule inversé sur un chariot mobile figure C.1. Le modèle non linéaire du pendule est donné par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a m x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a \cos(x_1) u}{4l / 3 - a m l \cos^2(x_1)}\end{aligned}\tag{C.1}$$

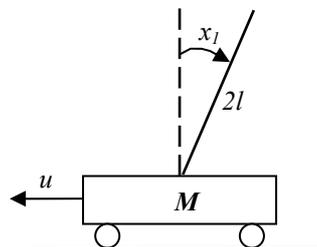


Figure. C.1. Pendule inversé

où x_1 est l'angle (en radians) du pendule avec la verticale, et x_2 est la vitesse angulaire. $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ est la constante de pesanteur, m est la masse du pendule, M est la masse du chariot, $2l$

est la longueur du pendule et u est la force appliquée au chariot (en Newton). $a = l/(m+M)$. On prendra $m = 0.1\text{Kg}$, $M = 1\text{Kg}$, $2l = 1.0\text{ m}$.

Pour obtenir le modèle TS exacte du système (C.1) nous procédons de la même manière que l'exemple 1.1 dans §1.2.2. Pour faciliter la mise en œuvre, nous utilisons un minimum de règles possibles. Par conséquent, avant de donner le modèle flou du pendule inversé, (C.1) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a \cos(x_1)u}{l\left(\frac{1}{3}m + \frac{4}{3}M + m \sin^2(x_1)\right)} + \frac{-amlx_2^2 \sin(x_1) \cos(x_1)}{l\left(\frac{1}{3}m + \frac{4}{3}M + m \sin^2(x_1)\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

La fonction non linéaire $x_2^2(t)\sin(x_1(t))$, contient la vitesse angulaire qui ne peut pas être mesurée. Ce terme non linéaire, ne sera pas découpé, il peut être considéré comme un paramètre incertain borné. En effet, si les règles floues utilisent la vitesse, il est évident que les variables de prémisses demeurent non mesurables et par conséquent ne peuvent pas être employées (Foulloy et al., 2001). $m \sin^2(x_1(t))$ est négligeable devant $\frac{1}{3}m + \frac{4}{3}M$. Ainsi, le système (C.2) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - a \cos(x_1)u}{\frac{4}{3}l - aml} + \frac{-amlx_2^2 \sin(x_1) \cos(x_1)}{\frac{4}{3}l - aml} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Nous avons d'après C.3 trois non linéarités; $\sin(x_1(t))$ et $\cos(x_1(t))$ à découper dans un espace compact, puis $x_2^2(t)$ à borner et à considérer comme un paramètre incertain. Cette dernière fonction non linéaire peut être bornée en utilisant le lemme développées dans (Morère, 2001) §1.2.2.

Soit $g(x) = x_2^2(t)$, cette fonction peut être bornée de la façon : $g(x) \in [\min g(x), \max g(x)]$. La vitesse minimale étant nulle, en considérant que $v = \max(g(x))$ correspond à la vitesse maximale. Alors, la non linéarité $x_2^2(t)$ peut s'écrire sous la forme : $x_2^2(t) = \theta + v f(x_2)$ avec $|f(x)| \leq 1$. A partir de là, en considérant les incertitudes de modélisation, le système (C.3) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= d(x, u) + \Delta d(x, u)\end{aligned}\tag{C.4}$$

avec :

$$d(x, u) = \frac{g \sin(x_1) - a \cos(x_1)u}{\frac{4}{3}l - aml} \text{ et } \Delta d(x, u) = \frac{-amlv f(x_2) \sin(x_1) \cos(x_1)}{\frac{4}{3}l - aml}$$

Soit $x_1 \in [-\theta_0, \theta_0]$. Les deux autres fonctions non linéaires peuvent être découpées de la façon suivante :

$$\sin(x_1(t)) = F_1^1(x_1(t))x_1(t) + F_1^2(x_1(t))\frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}x_1(t)$$

$$\cos(x_1(t)) = F_2^1(x_1(t)) + F_2^2(x_1(t))\cos(\theta_0)$$

où

$$F_1^1(x_1(t)) = \frac{\theta_0 \sin(x_1(t)) - x_1(t) \sin(\theta_0)}{x_1(t)(\theta_0 - \sin(\theta_0))} \in [0, 1]$$

$$F_1^2(x_1(t)) = 1 - F_1^1(x_1(t)) = \frac{\theta_0 x_1(t) - \theta_0 \sin(x_1(t))}{x_1(t)(\theta_0 - \sin(\theta_0))} \in [0, 1]$$

$$F_2^1(x_1(t)) = \frac{\cos(x_1(t)) - \cos(\theta_0)}{1 - \cos(\theta_0)} \in [0, 1]$$

$$F_2^2(x_1(t)) = 1 - F_2^1(x_1(t)) = \frac{1 - \cos(x_1(t))}{1 - \cos(\theta_0)} \in [0, 1]$$

Remarque C.1

Notons que F_1^1 et F_2^1 (resp. F_1^2 et F_2^2) sont superposés. Dans ce cas, il suffit de prendre $h_1(z(t)) = F_2^1(x_1(t))$ et $h_2(z(t)) = F_2^2(x_1(t))$

Par conséquent, le système peut être approché par le modèle flou exacte constitué des deux règles suivantes (Foulloy et al., 2001).

Règle 1 : Si $x_1(t)$ is F_1^1

$$\begin{aligned}\text{Alors } \dot{x}(t) &= (\Delta A_1(t) + A_1)x(t) + (\Delta B_1(t) + B_1)u(t) + \varphi(t), \\ y(t) &= C_1x(t)\end{aligned}$$

Règle 2 : Si $x_1(t)$ is F_1^2

$$\begin{aligned}\text{Alors } \dot{x}(t) &= (\Delta A_2(t) + A_2)x(t) + (\Delta B_2(t) + B_2)u(t) + \varphi(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + v(t)\end{aligned}$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ g/(4l/3 - aml) & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a/(4l/3 - aml) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ g \sin(\theta_0)/\theta_0 (4l/3 - aml) & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \cos(\theta_0)/(4l/3 - aml) \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [I \ 0], \quad C_2 = [I \ 0].$$

Les matrices incertaines sont données par :

$$\Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-amlv}{\frac{4}{3}l - aml} f(x) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-amlv \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)}{\frac{4}{3}l - aml \theta_0} f(x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \Delta B_1(t) = \Delta B_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En considérant la structure des incertitudes suivante :

$$\Delta A_i(t) = H_i F_i(t) E_{ai} \quad \text{et} \quad \Delta B_i(t) = H_i F_i(t) E_{bi}$$

on a :

$$\Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -aml \\ \frac{4}{3}l - aml \end{bmatrix} f(x_2) [v \ 0] \quad \text{et} \quad \Delta A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -aml \frac{\sin(\theta_0) \cos(\theta_0)}{\theta_0} \\ \frac{4}{3}l - aml \end{bmatrix} f(x_2) [v \ 0]$$

Ce qui veut dire :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aml \\ \frac{4}{3}l - aml \end{bmatrix}, \quad E_{a1} = [v \ 0], \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -aml \frac{\sin(\theta_0) \cos(\theta_0)}{\theta_0} \\ \frac{4}{3}l - aml \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_{a2} = [v \ 0]$$

avec $v=0.01$,

Notons quand $x_l = \pm\pi/2$, le système est non commandable, pour remédier à ce problème, on prend $\theta_0 = 88^\circ$.

Les fonctions d'appartenance du modèle flou avec deux règles sont illustrées par la figure C.2.

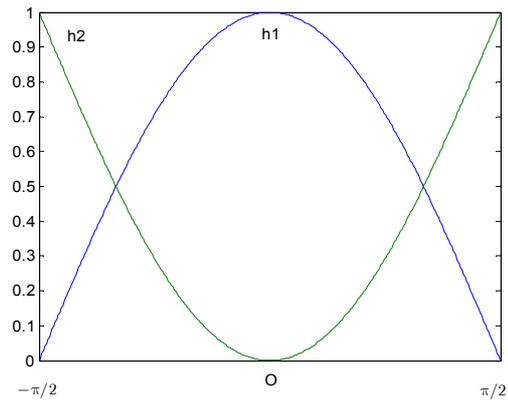


Figure.C.2: Fonctions d'appartenance du modèle flou exacte à 2 règles

Annexe D

Relaxation sans observateur : approche BMI

Si toutes les variables d'état sont disponibles, nous utilisons la loi de commande donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i [x_r(t) - x(t)] \quad (\text{D.1})$$

Dans ce cas, les dynamiques, $x(t)$ et $x_r(t)$ peuvent mener au système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{G}_{ij} \bar{x}(t) + \bar{\phi}(t) \quad (\text{D.2})$$

avec:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & -B_i K_j \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

D'une manière similaire au chapitre 2, le critère H_∞ relatif à l'erreur de poursuite peut être écrit comme suit :

$$\int_0^{\theta} \left\{ [x_r(t) - x(t)]^T Q [x_r(t) - x(t)] \right\} dt = \int_0^{\theta} \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) + \eta^2 \int_0^{\theta} \bar{\phi}^T(t) \bar{\phi}(t) dt \quad (\text{D.4})$$

Où P est une matrice symétrique définie positive, $\bar{x}(0)$ représente l'état initial et

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix}$$

Notons aussi que : $r(t)^T r(t) + \varphi(t)^T \varphi(t) = \bar{\phi}(t)^T \bar{\phi}(t)$

L'objectif est de chercher d'une part, les conditions sur les gains K_i garantissant la minimisation de l'erreur par rapport à $\bar{\phi}(t)$ selon le critère H_∞ (D.4) et d'autre part d'assurer que le système bouclé (D.5) est stable.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{G}_{ij} \bar{x}(t) \quad (\text{D.5})$$

Alors le résultat suivant peut être énoncé.

Théorème D.1 : *Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$*

S'il existe une matrice symétrique définie positive $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\bar{G}_{ii}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{G}_{ii} + \gamma^{-1} \bar{P} \bar{P} + \bar{Q} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.6})$$

et

$$\left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right)^T \bar{P} + \bar{P} \left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2} \right) + \gamma^{-1} \bar{P} \bar{P} + \bar{Q} < 0 \quad \text{for } i < j \leq r, \quad (\text{D.7})$$

Alors, le critère H_∞ (D.4) est assuré pour le système augmenté (D.2) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (D.5) est garantie.

Preuve :

La preuve est semblable à celle du théorème 2.1. ■

D'une manière similaire, les conditions relâchées dans ce cas-ci, sont données par le résultat suivant :

Théorème D.2 : *Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$*

S'il existe des matrices définies positives $\bar{P} = \bar{P}^T > 0$, $M = M^T > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\bar{G}_{ii}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{G}_{ii} + \gamma^{-1} \bar{P} \bar{P} + (s-1)M + s\bar{Q} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.8})$$

et

$$\left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}}{2}\right) + \gamma^{-1} P P - M < 0 \quad \text{for } i < j \leq r, \quad (\text{D.9})$$

Alors, le critère H_∞ (D.4) est assuré pour le système augmenté (D.2) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique du système en boucle fermée (D.5) est garantie.

Avec s le nombre maximal de règles actives à chaque instant t .

Proof:

La preuve est similaire à celle du Théorème 2.2. ■

Remarque B.1 :

Pour une meilleure performance de poursuite, les conditions du théorème B.1 (Resp : théorème B.2) peuvent être formulées comme celles du problème de minimisation de la remarque 1.2, de telle sorte que le taux d'atténuation du critère H_∞ soit réduit au plus petit possible

Les conditions montrées dans les théorèmes B.1 et B.2, présentent des inégalités matricielles bilinéaires. Nous proposons une méthode pour paramétrer ces conditions en termes de LMI et la résoudre ainsi efficacement par des techniques d'optimisations convexes ([Gahinet et al., 1995](#)). On se limitera donc à la résolution des conditions du théorème B.2 seulement. Celles du théorème B.1 étant similaires.

En considérant $\bar{P} = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ et $M = \text{diag}[M_1 \ M_2]$ les conditions du théorème B.2 deviennent :

$$\begin{bmatrix} TI_{11} & TI_{12} \\ TI_{21} & TI_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.10})$$

et

$$\begin{bmatrix} TJ_{11} & TJ_{12} \\ TJ_{21} & TJ_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{for } i < j \leq r, \quad (\text{D.11})$$

où :

$$TI_{11} = (A_i + B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i K_i) + \frac{1}{\eta^2} P_i P_i + (s-1) M_i + sQ$$

$$TI_{12} = TI_{21}^T = -P_i B_i K_i - sQ$$

$$TI_{22} = A_r^T P_2 + P_2 A_r + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + sQ$$

et

$$TJ_{11} = \left(\frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2} \right)^T P_i + P_i \left(\frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2} \right) + \frac{1}{\eta^2} P_i P_i - M_i$$

$$TJ_{12} = TJ_{21}^T = -P_i \left(\frac{B_i K_j + B_j K_i}{2} \right)$$

$$TJ_{22} = \left(\frac{A_r^T P_2 + P_2 A_r}{2} \right) + \frac{1}{\eta^2} P_2 P_2 - M_2$$

Avec un complément de Schur, (D.10) et (D.11) sont respectivement équivalents à :

$$\begin{bmatrix} TI_{11} & TI_{12} & 0 \\ TI_{21} & SI_{22} & P_2 \\ 0 & P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.12})$$

et

$$\begin{bmatrix} TJ_{11} & TJ_{12} & 0 \\ TJ_{21} & SJ_{22} & P_2 \\ 0 & P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \text{for } i < j \leq r, \quad (\text{D.13})$$

avec :

$$SI_{22} = A_r^T P_2 + P_2 A_r + (s-1) M_2 + sQ$$

$$SJ_{22} = \left(\frac{A_r^T P_2 + P_2 A_r}{2} \right) - M_2$$

Les solutions P_i et P_2 peuvent être résolues en deux étapes. D'abord, notons que (D.12) et (D.13) impliquent respectivement :

$$(A_i + B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i K_i) + \frac{1}{\eta^2} P_i P_i + (s-1) M_i + sQ < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.14})$$

et

$$\left(\frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2} \right)^T P_i + P_i \left(\frac{(A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i)}{2} \right) + \frac{1}{\eta^2} P_i P_i - M_i < 0 \quad (\text{D.15})$$

pour $i < j \leq r$,

En prenant les changement de variables $N_i = P_i^{-1}$, $Y_i = K_i N_i$, and $X_i = N_i M_i N_i$, (D.14) et (D.15) sont respectivement équivalent à :

$$N_i A_i^T + A_i N_i + B_i Y_i + (B_i Y_i)^T + \frac{1}{\eta^2} I + (s-1) X_i + s N_i Q N_i < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.16})$$

et

$$1/2 \left(N_i A_i^T + A_i N_i + B_i Y_i + (B_i Y_i)^T + N_i A_j^T + A_j N_i + B_j Y_i + (B_j Y_i)^T \right) + \frac{1}{\eta^2} I - X_i < 0 \quad (\text{D.17})$$

pour $i < j \leq r$,

En appliquant le complément de Schur, (D.16) est équivalente à la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} N_i A_i^T + A_i N_i + B_i Y_i + (B_i Y_i)^T + \frac{1}{\eta^2} I & N_i \\ & +(s-1) X_i \\ N_i & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, r, \quad (\text{D.18})$$

Les variables N_i , Y_i et X_i (ainsi $P_i = N_i^{-1}$, $K_i = Y_i N_i^{-1}$ et $M_i = N_i^{-1} X_i N_i^{-1}$) peuvent être obtenues en résolvant les LMI (D.17) et (D.18).

Dans la seconde étape, en substituant P_i , M_i et K_i dans (D.12) et (D.13) qui deviendront des LMI standard (LMI's). De même, on peut résoudre facilement P_2 et M_2 à partir de (D.12) et (D.13).

Bibliographie

- (Akar & Ozguner, 1998) Akar M., Ozguner U., Stability and stabilization of T-S fuzzy systems. *In Proc. of the ACC*. pp. 3840-3845. Philadelphia, USA, 1998.
- (Akar & Ozguner, 2000) Akar, M., Ozguner, U., Decentralized techniques for the analysis and control of T-S fuzzy systems. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*. Vol. 8. No. 6, pp. 691-704, 2000.
- (Alazard et al., 1999) Alazard, D., Cumer, C., Apkarian, P., Gauvrit, M., et Ferreres G. Robustesse et Commande Optimale. *Cepaduès*, 1999.
- (Apkarian et al., 1995) Apkarian, P., Gahinet, P. and Becker, G., Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*. No 31, pp. 1251-1261, 1995.
- (Assawinchaichote et al., 2004) Assawinchaichote, W., Nguang, S.K., Shi, P., H_∞ output feedback control design for uncertain fuzzy singularly perturbed systems: An LMI Approach. *Automatica*. pp. 2147-2152. 2004.
- (Beran et al., 1997) Beran, E., Vandenberghe, L., and Boyd, S., A global BMI algorithm based on the generalised bender decomposition. *In Proc of ECC* Brussels, Belgium, 1997.
- (Blanco et al., 2001) Blanco, Y., Perruquetti W., Borne P. Stability and stabilizability of non linear systems and T-S fuzzy models. *In Mathematical Problems in Engineering*. No. 7, pp. 221-240, 2001.
- (Borne et al., 1993b) Borne, P., Richard, J.P., et Radhy, N.E., Stabilité, stabilisation, régulation: approche par les normes vectorielles, volume 2 de Systèmes non linéaires : Stabilité-stabilisation. *Masson Editeur*, 1993.

- (Boukezzoula, 2000) Boukezzoula, R., Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires: application au problème de suivi de trajectoire, *Thèse de Doctorat, Université de Savoie*, 2000.
- (Boyd et al., 1994) Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: *SIAM*, 1994.
- (Buckley, 1992) Buckley, J., Universal fuzzy controllers. *Automatica*. vol. 28. No. 6, pp. 1245-1248, 1992.
- (Buckley, 1993) Buckley, J., Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol, 53 pp. 299–303, 1993.
- (Cao et al., 1996) Cao, G., Rees, N.W., and Feng, S.G., Stability analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Control*, Vol. 64. No. 6, pp. 1069-1087, 1996.
- (Cao et al., 1999) Cao, G., Rees, N.W., and Feng, S.G. Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy state space models. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*. Vol. 7, No 2, pp. 192-200, 1999.
- (Castro, 1995) Castro, J., Fuzzy logic controllers are universal approximator. *IEEE Trans. Syst., Man and Cyber-part C*. Vol.25, pp. 629-635, 1995.
- (Chadli, 2002) Chadli, M., Stabilité et commande de systèmes décrits par de multimodèles. *Thèse de Doctorat de l'INPL*. 2002
- (Chang et al, 2002) Chang, W, Bae Park, J., Joo, Y. H, and Chen, G., Design of robust fuzzy-model-based controller with sliding mode control for SISO nonlinear systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 125, Issue 1, pp. 1-22, 2002.
- (Chen et al, 1995) Chen, P.; Toyota, T.; and Sasaki, Y., Fuzzy diagnosis and fuzzy navigation for plant inspection and diagnosis robot. *Proceedings, IEEE International Conference*. Vol 1, pp. 185 - 192, 1995

- (Chen et al., 2000). Chen, B. S., Tseng C. S., and Uang, H. J., Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems : An LMI approach. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 8 No 3, pp. 249-265, 2000.
- (Chiang et al., 2001) Chiang, W.L., Chen, T.W., Liu M.Y., et Hsu, C.J., Application and robust H_∞ control of PDC fuzzy controller for nonlinear systems with external disturbance. *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 9, No. 2, pp 84-90, 2001.
- (Chilali et al., 1999) Chilali M. and Gahinet, P., H_∞ design with pole placement constraints An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, No 41, Vol. 3, pp 358-367, 1996.
- (Diordiev et al, 2003) Diordiev, A., Ursaru, O., Lucanu, M., and Tigaeru,L., A hybrid PID-fuzzy controller for dc/dc converters. *Inter. Symp. On Signals, Circuits and Systems*, Vol. 1, pp. 97-100, 2003.
- (Davoodi, 2004) Davoodi, R., and Andrews, B. J., Fuzzy Logic Control of FES Rowing Exercise In paraplegia. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, scheduled for publication in March 2004.
- (El Ghaoui, 1997) El Ghaoui, L., Oustry, F., and Ait Rami, M.A, Cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transaction and Automatic Control*, Vol. 42, No. 8, pp. 1171-1176, 1997.
- (Essounbouli, 2004) Essounbouli N. Commande adaptative floue robuste des systèmes non linéaires incertains. *Thèse de doctorat, CReSTIC*. Université de Reims, 2004.
- (Feng et al., 1997) Feng, G., Cao, S.G.,. Rees, N.W., and Chak, C.K., Design of fuzzy control systems with guaranteed stability. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 85, Issue 1. pp. 1-10, 1997.
- (Foulloy et al., 2001) Foulloy, L., Galichet, S., and Titli, A., Commande Floue 1: de la stabilisation à la supervision . *Systèmes Automatisés, Ed. Hermes Lavoisier* 2001.

- (Gahinet et al., 1995) Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J., and Chilali, M., LMI Control Toolbox. Natick, MA: *MathWorks*, 1995.
- (Gahinet et al., 1996) Gahinet P., Apkarian, P., and Chilali, M., Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol. 41. No 3, pp. 436-442, 1996.
- (Gasso et al., 1999) Gasso, K., Mourot, G., Boukhriss, A., et Ragot, J., Optimisation de la structure d'un modèle de Takagi-Sugeno. *Actes des rencontres francophones LFA'99, Valenciennes, France*, pp 233-240, 1999.
- (Gasso, 2000) Gasso., K., Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles. *Thèse de doctorat de l'INPL*, Décembre, 2000.
- (Golea et al., 2002) Golea, N., Golea, A., and Benmahammed, K., Fuzzy model reference adaptive control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, Issue: 4, pp. 436-444, 2002.
- (Guerra et al., 1999) Guerra, T.M., Vermeiren, L., Delmotte, F., et Borne, P., Lois de commande pour systèmes flous continus Lois de commande pour systèmes flous continus. *JESA*, Vol. 33, No 4, p. 489-527, 1999.
- (Guerra & Vermeiren, 2001) Guerra, T. M., and Vermeiren, L., Control laws for Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 120 , Issue 1. pp. 95-108, 2001.
- (Guerra & Vermeiren, 2003) Guerra, T. M., et Vermeiren., L., Stabilité et stabilisation à partir de modèles flous. *Commande flous 1 : de la stabilisation à la supervision*. Sous la direction de L. Foulloy, S. Galichet et A. Titli. *IC2 Hermes*, pp59-98, 2003.
- (Guerra et al., 2006) Guerra, T.M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., and Tirmant, H., Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form, rapport interne du LAMIH, *Fuzzy set and systems* à paraître en 2006.

- (Guelton, 2003) Guelton, K., Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en œuvre d'observateurs flous sous forme descripteur. *Thèse de Doctorat. LAMIH*, Université de valenciennes, 2003.
- (Hassibi et al., 1999) Hassibi A., How J., Boyd S. A path-following method for solving BMI problems in control. *In Proc. Of ACC, San Diego, California*. pp. 1385-1389, 1999.
- (Holmblad & Ostergaard, 1982) Holmblad, L., and Ostergaard, J., Control of a cement kiln by fuzzy logic. *Fuzzy Information and Decision Processes*, éditeurs M. Gupta et E. Sanchez, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- (Hong & Langari, 2000) Hong, S.K., et Langari, R., An LMI-based H_∞ fuzzy control system design with TS framework. *Information sciences*, 123 pages 163-179, 2000.
- (Isidori, 1999) Isidori, A., Nonlinear control systems II. *Springer-Verlag*, London, 1999.
- (Jacobs, 1997) Jacobs, R., Control model of human stance using fuzzy logic. *Biological Cybernetics*. Vol. 77: pp.63-70, 1997.
- (Jadbabaie, 1999) Jadbabaie, A., A reduction in conservatism in stability and L2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. *In Proc of the IFAC*, China. pp. 285-289, 1999.
- (Johansen, 2000) Johansen, T., A. Computation of Lyapunov function for smooth nonlinear systems using convex optimization. *Automatica*. No 36, pp. 1617-1626, 2000.
- (Johanson et al., 1999) Johanson, M., Rantzer, A., Arzen, K., Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*. vol. 7, No 6, pp. 713-721, 1999.
- (Karmakar, 1984) Karmakar, N., A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*. Vol. 4. No. 4, pp. 373-395, 1984.

- (Khailath, 1980) Khailath, T., Linear systems. *Englewoodcliffs*, USA, 1980.
- (Khalil, 1996) Khalil, H., Nonlinear systems. Prentice hall, Inc. second edition, USA, 1996.
- (Kim & Lee, 2000) Kim, E., and Lee, H., New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 8. No 5, 2000.
- (Kaufmann, 1973) Kaufmann, A., Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. *Tome 1 : Éléments théoriques de base*. Masson & Cie, Paris, 1973.
- (Kosko, 1992) Kosko, B., Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 8-12, pp.1153 – 1162. March 1992
- (Kung & Li, 1997) Kung, C., and Li, H., Tracking control of non linear systems by fuzzy model-based controller. in Proc. IEEE Int. Conf., Vol. 2, July 1997, pp. 623-628. 1997.
- (Lam et al., 2002) Lam, H. K., Frank H. F. Leung, and Peter K. S. Tam., A switching controller for uncertain nonlinear systems. *IEEE Control Systems Magazine LECTURE NOTES*, pp. 7-14, 2002.
- (Lauber, 2003) Lauber, J., Moteur à allumage commandé avec EGR: modélisation et commande non linéaire. *Thèse de doctorat*, LAMIH, Université de Valenciennes, 2003.
- (Lauber et al., 2004) Lauber, J., Guerra, T.M., Perruquetti, W., LMI conditions for continuous uncertain TS models in closed-loop with an observer: application to engine speed control. *IEEE VPP*, Paris October 2004.
- (Lee et al., 2001) Lee, K.R., Jeung, E.T., Park, H.B., Robust Fuzzy H_∞ Control for Uncertain Nonlinear Systems via State Feedback: an LMI approach. *Elsevier Fuzzy Sets and Systems*. pp. 123-134, 2001.

- (Li et al., 2000) Li, J., Wang, H.O., Newmann, D., and Tanaka, K., Dynamic parallel distributed compensation For Takagi Sugeno systems: An LMI approach. *Information Sciences*, 2000. non. 123, pp. 201-221.
- (Lin & Er, 2001) Lin D. and Er, M.J., A new approach for stabilising nonlinear systems with time delay. *In proc. of the ECC, Porto, Portugal*. pp. 114-119, 2001.
- (Liu & Zhang, 2003) Liu, X., and Zhang, Q., New approaches to H^∞ controller design based on fuzzy observers for fuzzy TS systems via LMI. *Automatica*, Vol 39, Issue 9, pp. 1571-1582, 2003.
- (Lo & Lin, 2004). Lo, J. C; Lin, M. L., Observer-based robust H^∞ control for fuzzy systems using two-step procedure. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 12, no3. pp. 350- 359. 2004.
- (Lunz, 1992) Lunz, J., Feedback control of large scale systems. *Prentice Hall Int.*, U.K., 1992
- (Ma et al., 1998) Ma, X.J., Sun, Z. Q., He., Y.Y., Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 1, p. 41-50, 1998.
- (Mamdani, 1974) Mamdani, E.H., Application of fuzzy algorithm for control of simple dynamic plant. *IEE*, Vol 121, pp. 1585-1588, 1974.
- (Manamanni, 1998) Manamanni, N., commandes et observateurs pour systèmes pneumatiques : Méthodologie pour la locomotion à pattes, *Thèse de doctorat* de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998.
- (Manamanni et al., 2005) Manamanni, N., Mansouri, B., Hamzaoui, A., J. Zaytoon, Relaxed Conditions in Tracking Control Design for T-S Fuzzy Model. Version Corrigée en Relecture au *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*.

- (Mansouri et al., 2005a) Mansouri, B., Manamanni, N., Hamzaoui, A., Conditions de relaxation LMI dans le cas de la poursuite de trajectoires des modèles Takagi-Sugeno perturbés, *JDMACS*, Lyon - France, 5-7 Septembre 2005.
- (Mansouri et al., 2005b) Mansouri, B., Manamanni, N., A. Hamzaoui, Zaytoon., J., Tracking control for uncertain Takagi Sugeno fuzzy systems with external disturbances, *16th IFAC World Congress*. Prague July 2005.
- (Mansouri et al., 2005c) Mansouri, B., Manamanni, N., Hamzaoui, A., Zaytoon, J., Optimal Tracking Control Design for Uncertain T-S Fuzzy Model”, Soumise à 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, France, July, 2006
- (Mansouri et al., 2003) Mansouri, B., Manamanni, N., Hamzaoui, A., Analyse de stabilité des systèmes à commutations par la méthode du temps de séjour, *Journée Doctorale d'Automatique*, JDA'03, Valenciennes Juin 2003.
- (Melin & Vidolov, 1996) Melin, C., and Vidolov, B., Stabilisation of linear systems by fuzzy controllers (Part I). *RAIRO-APII-JESA*, 30 (5):675_705, 1996. (in french).
- (Morère, 2001) Morère., Y. Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno. *Thèse de doctorat*, LAMIH-SF, del'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.
- (Nesterov & Nemirovski, 1994) Nesterov Y. and Nemirovski A. Interior point polynomial methods in convex programming: theory and applications. *SIAM*, Philadelphia, PA, 1994.
- (Nguyen et al., 1996) Nguyen, Hung T., Kreinovich, V., and Sirisaengtaksin, O., Fuzzy control as a universal control tool. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 80, No 1, pp. 71-86, 1996.
- (Pagès et al., 2003) Pagès, O., El Hajjaji, A., Ordonez. R., Hinfinité Tracking for fussy systems with an application to four Wheel steering of vehicles. *IEEE; Systems, Man and Cybernetics, International Conference*. Vol.5. pp. 4364 - 4369, 2003.

- (Palacios-Hernandez, 2004) Palacios-Hernandez E. R. Contribution à la commande floue de type Takagi Sugeno des systèmes non linéaires. *Thèse de Doctorat*, LAAS, 2004.
- (Park et al., 2001) Park, J., Kim, J., and Park., D., LMI Based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by T-S fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001. No 122, pp. 7382.
- (Park et al, 2004) Park, Y., Tahk, M., and Bang, H., Design and analysis of optimal controller for fuzzy systems with input constraint. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 12, No. 6. pp 766-779, 2004.
- (Pettersson, 1999) Pettersson, S., Analysis and design of hybrid systems. *PhD thesis*, Chalmers University of Technology, Sweden, 1999.
- (Russo, 1996) Russo, F.; Fuzzy systems in instrumentation:, IEEE Transactions on fuzzy signal processing. Instrumentation and Measurement. Vol 45, Issue 2. pp. 683-689, 1996.
- (Sezer & Siljak, 1988) Sezer, M. E. and Siljak, D., Robust stability of discrete systems. *International Journal of Control*. Vol. 48, No. 28, pp. 15-33, 1988.
- (Sontag & Wang, 1995) Sontag, E.D. and Wang Y., On characterizations of the input-to-state stability property. *System and Control Letters* vol. 24, 351-359, 1995.
- (Sugeno & Kang, 1988) Sugeno M. and Kang., G.T., Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 28, pp.15-33, 1988.
- (Takagi & Sugeno, 1985) Takagi, T., and Sugeno, M., Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control". *IEEE Trans. Syst., Man and Cyber*, Vol.1115, pp. 116-132,1985.

- (Tanaka & Wang, 2001) Tanaka, K., Wang, H.O., Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach. *John Wiley & Son Eds, New York, Wiley-Interscience* ISBN 0-471-32324-190000, 2001.
- (Tanaka et al., 1996) Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O., Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H_∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 4 No 1, 1996.
- (Tanaka et al., 1998a) Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O., Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys*, Vol. 6 No 2, May 1998.
- (Tanaka et al, 1998b) Tanaka, K., Nishimura, M., and Wang, H. O. Multi-objective fuzzy control of High Rise/High speed elevators using LMIs. *American Control Conference*, pp. 3450-3454, 1998.
- (Tanaka et al., 2001) Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H.O., New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions: a fuzzy Lyapunov approach; Decision and Control, 2001. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol.4, pp.3942-3947, 2001.
- (Taniguchi et al., 1999) Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., and Wang, H. O., A new PDC Fuzzy Reference Models. *Proceedings IEEE International Fuzzy Systems Conference* August 1999, Seoul Korea, 1999.
- (Taniguchi et al., 2001) Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang, H.O., Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 9, No 4, p. 525-537, 2001.
- (Teixeira et al., 2003) Teixeira, M., E Assunçao, C. M., and Avellar, R. G., On relaxed LMI-Based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 11 No 5, 2003.

- (Tong et al., 2002) Tong, S., Wang, T., Li, H.X., Fuzzy robust tracking control for uncertain nonlinear systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 30, pp. 73-90, 2002.
- (Toulotte et al., 2004) Toulotte, P.F, delpart, S., Guerra, T. M., and J. Boonaert. Robust fuzzy control with pole placement in LMI region : Application to Automated vehicle. *IEEE VTS VPP*. Paris 2004.
- (Tseng & Chen, 2001) Tseng, C., and Chen, B., H_{∞} decentralized fuzzy model reference tracking control design for non linear interconnected systems. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 9 No 6, December 2001.
- (Tseng et al., 2001b) Tseng, C., Chen, B., and Uang, H. J., Fuzzy tracking Control Design for nonlinear Dynamic systems via T-S fuzzy model. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, vol. 9 no 3, pp. 381-392, 2001.
- (Tuan et al., 2001) Tuan, H.D., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y., Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 9 No 2, pp. 324-332, 2001.
- (Uang & Huang, 2004) Uang, H., and Huang, G.S., A robust fuzzy model following observer-based control design for nonlinear system. *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Control Applications*. Vol. 1, pp. 171-176, 2004.
- (Utkin, 1977) Utkin, V.I., Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- (Verbruggen et al., 1999) Verbruggen, H. B., Zimmermann, H. J., and Babuska., R., Fuzzy algorithm for control, chapitre 1. *International Series In Intelligent Technologies*. KAP, 1999.
- (Vidyasagar, 1993) Vidyasagar, M., Nonlinear systems analysis. *Prentice hall*, 2nd ed., 1993.

- (Wang *et al.*, 1995) Wang, H. O., K. Tanaka and M. Griffin, "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model" *Proc. Fuzz IEEE/IFES*, pp. 531-538, 1995.
- (Wang *et al.*, 1996) Wang, H.O., Tanaka, K., and Griffin, M., An approach to fuzzy control of non linear systems : Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 4, pp 14-23, 1996.
- (Wang *et al.*, 1996b) Wang, F.; Mingzhong; Li., Wang, J.; Adaptive generalized predictive control for nonlinear systems using neural networks. *Proceedings of The IEEE International Conference on Industrial Technology*. pp.:806 – 810, (ICIT '96) December1996.
- (Wang & Yang, 2005) Wang, P.; and Yang, S.; A New Diagnosis Approach for Handling Tolerance in Analog and Mixed-Signal Circuits by Using Fuzzy Math Circuits and Systems I., *IEEE Transactions on Fundamental Theory and Applications*. Vol 52, Issue 10, pp. 2118-2127, 2005.
- (Wu *et al.*, 2001) Wu; S., Meng, Er; J., and Gao; Y., Generation of fuzzy rules to develop fuzzy logic modulation controllers for damping of power system oscillations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 9, Issue 4, Aug. 2001 pp. 578 – 594
- (Wu & Leitman, 2000) Wu, H. S., and Leitman, G., Robust tracking and model following control with zero tracking error for uncertain dynamical systems. *Journal of optimization theory an applications*: Vol 107, No 1, pp. 169-182, 2000.
- (Wu & Lin, 2000a) Wu, S. J., and Lin, C. T., Optimal fuzzy controller design: local concept approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 8, No. 2. pp 171-185, 2000.
- (Wu & Lin, 2000b) Wu, S. J., and Lin, C. T., Optimal fuzzy controller design in continuous fuzzy system: global concept approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol 8, No. 6. pp 713-729, 2000.

- (Xiadong & Zhang, 2002) Xiadong, L. and Zhang, O., H^∞ Controller Based on Fuzzy Observers for T-S Fuzzy Systems via LMI. *Proc of the IEEE, CDC*. Las Vegas, Nevada USA, 2002.
- (Xiao-Jun et al., 1998) Xiao-Jun, M., Sun, Z. O., and He, Y. Y., Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 6 No 1, 1998.
- (Xu, 2001) Xu. X., Analysis and design of switched systems. *PhD thesis*. University of Notre Dame, Indiana, 2001.
- (Yamakawa, 1993) Yamakawa, T., A fuzzy inference engine in nonlinear analog mode and its application to a fuzzy logic control, *IEEE Transactions on Neural Networks* Vol 4, Issue 3, pp. 496-522, 1993.
- (Ying, 1999) Ying, H., Analytical analysis and feedback linearization tracking control of the general Takagi-Sugeno fuzzy dynamic systems. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, Vol. 29, pp 290-298, 1999.
- (Yoneyama et al., 2000) Yoneyama, J., Nishikawa, M., Katayama, H., and Ichikawa, A., Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 111, p. 253-266, 2000.
- (Zadeh, 1965) Zadeh, L.A. Information and control. *Fuzzy Sets*, No 8. pp. 338-353, 1965.
- (Zeng & Singh, 1995) Zeng; Xiao-Jun., Singh, M.G.; Approximation theory of fuzzy systems-MIMO case. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*.Vol. 3, No. 2., pp. 219 - 235, 1995.
- (Zeng et al., 2000) Zeng, K., Zhang, N. Y., and Xu, W. L., A comparative study on sufficient condition for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. Vol. 8, No. 6, pp. 773-780, 2000.

- (Zhang et al., 2001) Zhang, J. M., LI, R. H., and Zhang, P. A., Stability Analysis and systematic design of fuzzy control systems. *Fuzzy Set and Systems*. No 120, pp. 65-72, 2001.
- (Zhao et al., 1996) Zhao, J., Gorez, R., and Wertz., V., Fuzzy controllers with guaranteed robustness and performance. *EUFIT'96*, Aachen, pp. 1886-1890, 1996.
- (Zheng et al, 2002) Zheng, F., Wang, Q., and Lee, T. H., Output tracking control of MIMO fuzzy nonlinear systems using variable structure control approach. *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.*, Vol. 10 No 6, December 2002.
- (Zhou & Khargonedkar, 1988) Zhou, K., and Khargonedkar, P., Robust Stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Sys. Control Letters.*, 10, pp. 17-20, 1988.
- (Zhou et al., 1995) Zhou, K., Doyle, J. C., and Glover, K., Robust and Optimal Control. *Prentice Hall*, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Résumé :

Ce travail traite du problème de suivi de trajectoire (Tracking) pour les systèmes non linéaires incertains et perturbés décrits par les modèles flous de type TS (Takagi Sugeno). Une problématique récurrente dans ce type de problème concerne les transformations matricielles pour l'obtention des conditions en terme de LMI (Linear Matrix Inequality), en l'occurrence, la possibilité de l'exploitation numérique de ces résultats. Dans ce cadre, nous avons synthétisé une loi de commande robuste dans le cas des modèles TS perturbés ensuite incertains et perturbés selon un critère H^∞ . Pour spécifier la trajectoire désirée et par conséquent assurer la poursuite de trajectoire, nous avons utilisé un système de référence. Les cas avec et sans observateurs flous de type TS ont été traités. Les résultats obtenus, sont présentés en deux approches, BMI (Bilinear Matrix Inequality) puis LMI. Cette dernière approche montre l'efficacité de l'exploitation numérique des résultats. Une deuxième approche a été également développée et concerne l'étude du même problème avec une commande sous optimale. Les résultats dans ce cas sont également reformulés directement en LMI.

Mots clés : Commande floue, inégalité matricielle linéaire (LMI), critère H^∞ , poursuite de trajectoire, système flou, système non linéaire, modèle Takagi Sugeno, commande optimale.

Abstract:

This work deals with a fuzzy tracking control design for uncertain nonlinear dynamic system with external disturbances and using a TS (Takagi-Sugeno) fuzzy model description. In this case, a recurring problem is related to the LMI (Linear Matrix Inequality) formulation. In this way, we have synthesised a robust control law for TS fuzzy perturbed systems an uncertain perturbed systems based on H^∞ performances. To specify the desired trajectory and consequently to ensure the tracking trajectory, we have used a reference model. The cases with and without fuzzy observers are either treated. The obtained results are presented in two approaches, BMI (Bilinear Matrix Inequality) and LMI one. This last approach shows the effectiveness of the numerical exploitation of the results. A second approach was also developed and relates to the same problem and based on a suboptimal control. The results in this case are also reformulated directly in LMI's terms.

Keywords: Fuzzy control, linear matrix inequality (LMI), tracking, H^∞ robust control, Takagi-Sugeno fuzzy model, nonlinear systems, optimal control.