

Singularités en optique non-linéaire : étude mathématique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 9 février 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Reims Champagne-Ardenne
(spécialité mathématiques)

par

Gilles CABART

Directeur de thèse

M. Satyanad KICHENASSAMY

Composition du jury

Président : M. André Unterberger Université de Reims

Rapporteurs : M. Fabrice Bethuel Université de Paris VI
M. Marco Cannone Université de Marne-la-Vallée

Examineur : M. Jacques Alev Université de Reims

À mon oncle,

Remerciements

Je voudrais remercier ici toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont aidé à réaliser cette thèse.

Je voudrais d'abord exprimer toute la reconnaissance que j'éprouve envers M. Satyanad Kichenassamy pour son soutien humain et mathématique, ainsi que pour sa disponibilité et son enthousiasme à faire partager ses connaissances et sa passion pour la recherche.

Je tiens à remercier également MM. Fabrice Bethuel et Marco Cannone pour leur lecture attentive de cette thèse et pour avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je voudrais remercier vivement MM. Jacques Alev et André Unterberger d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je tiens aussi à adresser de très sincères remerciements à tous les membres du département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Reims pour m'avoir accueilli si chaleureusement et pour m'avoir offert un environnement de travail idéal.

Enfin, je remercie ma famille, et plus particulièrement mon père, ma mère et ma sœur, ainsi que mes amis : Matt, FredB, Aude et Chloé, FredP, Dam, Amandine, Macq, Ben, Pascaline, Greg et Dalen, JC et Delphine, Fab, Thomas, Claire et Pauline... (j'en oublie, pardon pour eux)... pour leur soutien continu et leurs conseils avisés.

Table des matières

Introduction	1
1 Position du problème	1
2 Démarche suivie	1
3 Principaux résultats	5
4 Méthodes spécifiques employées	6
5 Structure de la thèse	7
5.1 Organisation de la première partie	8
5.2 Organisation de la seconde partie	8
5.3 Annexes	9

Partie I Réductions Fuchsiennes

Introduction	13
1 Première réduction Fuchsienne et solutions formelles	15
1.1 Cas de l'équation cubique réelle NLCR	15
1.1.1 Construction d'une solution formelle	15
1.1.2 Expression explicite des premiers termes	19
1.1.3 Interprétation géométrique	20
1.2 Cas de l'équation cubique complexe NLCC	21
1.2.1 Développement en série formelle près de l'explosion	21
1.2.2 Expression explicite des premiers coefficients et interprétation géométrique des conditions de non-logarithme	24

2	Deuxième réduction Fuchsienne et convergence	27
2.1	Cas de l'équation cubique réelle NLCR	27
2.2	Cas de l'équation cubique complexe NLCC	30
3	Troisième réduction Fuchsienne et cas non-analytique	33
3.1	Cas de l'équation cubique réelle NLCR	33
3.2	Cas de l'équation cubique complexe NLCC	36
	Conclusion	41

Partie II Applications

	Introduction	45
1	Non-focalisation de l'énergie	47
1.1	Présentation du problème	47
1.2	Résultats	47
2	Comportement des normes L^p à l'explosion	51
2.1	Conditions initiales et seconds membres réguliers	51
2.2	Conditions initiales et seconds membres moins réguliers	54
2.2.1	Utilisation de séries tronquées	54
2.2.2	Utilisation de séries tronquées inverses	59
2.3	Conclusion	62
3	Étude numérique de l'équation cubique réelle NLCR	63
3.1	Choix du schéma numérique classique	64
3.2	Domaine de validité du schéma numérique classique	66
3.2.1	Consistance	66
3.2.2	Stabilité et convergence	69

3.3	Des schémas adaptés près de l'explosion	76
3.3.1	Construction de tels schémas numériques	76
3.3.2	Étude partielle des schémas inverses introduits	78
3.4	Choix du schéma le plus approprié	82
3.4.1	Condition numérique de non-explosion	82
3.4.2	Étude numérique complète	84
3.5	Résultats numériques	86
3.5.1	Tests pour des surfaces d'explosion connues	86
3.5.2	Autres résultats	89
Conclusion		95
Conclusion		97
1	Bilan	97
2	Perspectives	97

Annexes

A	Rappels de géométrie différentielle	101
A.1	Cas de la dimension 1 d'espace	101
A.2	Cas de la dimension 2 d'espace	103
A.3	Cas de la dimension d'espace $n \geq 3$	105
B	Équation Fuchsienne généralisée et forme de la solution	107
B.1	Problème	107
B.2	Analyse et synthèse	108
B.3	Généralisation au cas d'un système Fuchsien	110
B.4	Optimisation	112
B.5	Application à quelques exemples	112
B.5.1	Cas de l'équation cubique réelle NLCR	112

B.5.2	Cas de l'équation cubique complexe NLCC	113
B.5.3	Équation $D^2(D - 2)^5(D - 3)^4(D - 5)^2v = T(v^3 + Tv^3 + T^4v)$.	114
Index		115
Bibliographie		117

Introduction

Cette thèse est essentiellement composée de deux parties : la première est consacrée à la preuve d'un certain nombre de résultats théoriques tandis que la seconde regroupe un chapelet d'applications de ces résultats.

1 Position du problème

L'objet de cette thèse est l'étude de deux équations d'ondes semi-linéaires présentant des non-linéarités cubiques. Plus précisément nous allons nous intéresser aux solutions des deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\square u + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 2u|u|^2 + \beta u, \quad (\text{NLCC})$$

et

$$\square u = 2u^3, \quad (\text{NLCR})$$

où $\square = \partial_t^2 - \sum_i \partial_{x_i}^2$ représente l'opérateur de d'Alembert en dimension n d'espace, $z = x_n$ et où $\alpha \in i\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

La première équation (NLCC) (non linéaire cubique complexe) est issue de l'optique non-linéaire ; elle modélise le comportement de l'enveloppe u d'une onde lumineuse se propageant dans un milieu de type Kerr, pour lequel la non-linéarité dominante est cubique.

La deuxième équation (NLCR) (non linéaire cubique réelle) est en fait un cas particulier de la première, pour $\alpha = \beta = 0$ et pour des solutions réelles. Les résultats s'énoncent de façon beaucoup plus claire et succincte pour cette dernière équation, c'est pourquoi nous la traitons séparément.

2 Démarche suivie

Dans un premier temps, nous allons construire des solutions explosives pour ces deux équations. En fait, pour toute hypersurface Σ de genre espace de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, d'équation $t = \psi(x)$, on exhibe à la fois des solutions de (NLCR) et de (NLCC) explosant exactement sur Σ .

Pour chacune des deux équations (NLCR) et (NLCC), la démarche repose sur la méthode de réduction Fuchsienne exposée par S. Kichenassamy et *al.* dans [6, 7, 10] et

introduite alors pour l'étude de l'équation aux dérivées partielles $\square u = e^u$. Rappelons brièvement les motivations ainsi que les principales étapes de cette méthode.

La méthode de réduction Fuchsienne permet une approche très systématique de l'étude d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, dont les coefficients sont aussi bien analytiques que non-analytiques. Plus précisément, on répond aux questions suivantes :

- ◇ Trouver un ensemble de séries formelles contenant des solutions formelles de l'équation considérée ;
- ◇ Donner une procédure systématique permettant d'associer, à chaque solution formelle, une unique solution exacte ;
- ◇ Déterminer, parmi les termes de la série définissant la solution formelle, lesquels suffisent pour caractériser la solution exacte associée.

L'idée sous-jacente est la même pour la méthode de réduction Fuchsienne que pour la théorie de Puiseux :

- ◇ La théorie de Puiseux, pour la résolution d'une équation algébrique, est basée sur la réduction de cette équation en une équation de la forme :

$$y = a + x \varphi(x, y),$$

à laquelle on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. On prouve ainsi l'existence de solutions ayant la forme de séries à exposants fractionnaires ;

- ◇ En ce qui concerne la réduction Fuchsienne, on réduit l'équation différentielle ou aux dérivées partielles étudiée à une équation non-linéaire, présentant un point singulier régulier où la variable de temps T s'annule, et à laquelle on peut appliquer les résultats d'existence prouvés dans [6, 7, 9] et [10]. Cette procédure de réductions conduit naturellement à étendre les algèbres de séries formelles à des séries plus générales, contenant, par exemple, des combinaisons de logarithmes (comme cela va être le cas pour les deux équations (NLCR) et (NLCC)) ou même des puissances variables de la forme $T^{k(x)}$.

Il apparaît rapidement qu'il suffit seulement de connaître quelques résultats théoriques concernant les équations Fuchsiennes, pour être ensuite capable d'aborder une très large classe d'équations différentielles et aux dérivées partielles. C'est ce qui rend la méthode aussi systématique.

On distingue les quatre étapes suivantes ; on a précisé en incise les résultats obtenus à chaque étape pour l'équation cubique réelle (NLCR) et pour une surface d'explosion $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ analytique (pour des surfaces d'explosion moins régulières, il faut effectuer une réduction Fuchsienne un peu différente) :

1. Identifier la variable T par rapport à laquelle on va développer — ici $T = t - \psi(x)$;
2. Identifier un ensemble de séries formelles suffisamment général, qui contienne une solution formelle ayant le plus de termes arbitraires possible. On cherche alors des solutions formelles présentant le plus de paramètres de déformation — pour l'équation cubique réelle (NLCR), l'ensemble de séries formelles optimal est l'ensemble $\mathcal{A}_{1/4,1}$

défini p. 108 ; les solutions formelles réelles sont de la forme :

$$u(X, T) = T^{-1} \left\{ u_0(X) + u_1(X) T + u_2(X) T^2 + u_3(X) T^3 \right. \quad (\text{SFR}) \\ \left. + \sum_{\substack{j \geq 4 \\ 0 \leq k \leq j/4}} u_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\}.$$

On détermine l'expression explicite des premiers coefficients de la série : u_0, u_1, u_2, u_3 et $u_{4,1}$; $u_{4,0}$ est arbitraire et on dispose aussi d'une condition nécessaire et suffisante pour l'apparition de termes logarithmiques ; cette condition s'exprime en termes de la géométrie de la surface d'explosion Σ comme sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ muni de la métrique de Minkowski ;

3. Définir une inconnue renormalisée qui n'est autre que la partie régulière de la solution — ici l'inconnue renormalisée est f définie par :

$$u = \frac{u_0}{T} + u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + u_{4,1} T^3 \ln T + f(X, T) T^3 ;$$

4. Obtenir un système Fuchsien généralisé pour l'inconnue renormalisée, et conclure que la solution formelle considérée est associée à une unique solution exacte — on obtient pour f l'équation Fuchsienne suivante :

$$(1 - |\nabla\psi|^2) N(N + 5)f = T h_1[X, T, Y, f, Nf] + Y h_2[X, T, Y, f, Nf],$$

où $Y = T \ln T$, $N = T \partial_T + (T + Y) \partial_Y$ et où h_1 et h_2 sont deux fonctions analytiques en X, T, Y, f, Nf et leurs dérivées spatiales.

On peut alors conclure que la série (SFR) admet un rayon de convergence non-nul et qu'elle définit donc une solution exacte de l'équation (NLCR).

Cette construction nous offre l'avantage de connaître précisément le comportement des solutions explosives de l'équation (NLCR) près de leur surface d'explosion. On peut alors tirer parti de ces informations pour résoudre différents problèmes en relation avec l'étude de (NLCR).

C'est l'objet de notre seconde partie qui se décompose de la façon suivante :

1. Notre première application consiste en l'étude de certaines intégrales construites sur le modèle de l'intégrale suivante dite "intégrale d'énergie" (IE) :

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{2} \int [u_t^2(x, t) + |\nabla u|^2(x, t) - u^4(x, t)] dx. \quad (\text{IE})$$

Si u est de classe C^2 et que pour tout t , $u(\cdot, t)$ est supportée dans un compact, il est facile de voir que cette intégrale ne dépend pas du temps. De ce fait, il est intéressant de comprendre comment des intégrales du même genre se comportent près de l'explosion.

En fait pour une solution u de l'équation (NLCR) explosant sur $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ et pour un point (x_0, t_0) de sa surface d'explosion, on donne un développement asymptotique, pour α petit, de l'intégrale suivante :

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{B_\alpha} [u_t^2 + |\nabla u|^2 - u^4](x_0 + x, t_0 - \alpha) dx,$$

où B_α est la boule de \mathbb{R}^n de centre 0 et de rayon α . La figure (1) représente le domaine d'intégration pour $(x_0, t_0) = (0, 0)$ en dimension 1.

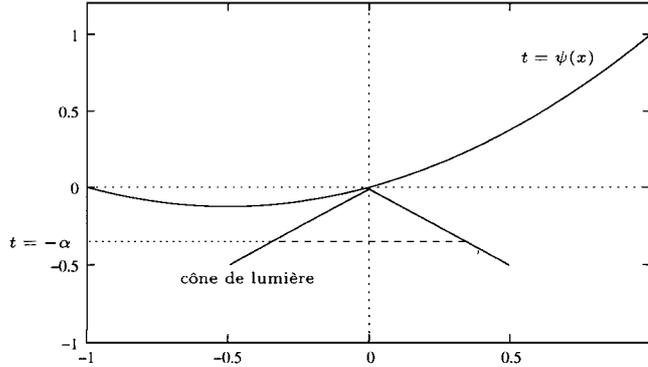


FIG. 1 – Domaine d'intégration.

On montre ainsi que le comportement de $E(\alpha)$ est directement lié à la géométrie locale au point (x_0, t_0) de la surface d'explosion ;

2. Par ailleurs, connaître l'allure des solutions explosives de l'équation cubique réelle (NLCR) près de leurs surfaces d'explosion et être capable de construire de telles solutions explosives, nous permet d'appréhender le comportement asymptotique, au voisinage du premier temps d'explosion, des normes L^q de certaines solutions de problèmes construits autour de perturbations de l'équation (NLCR).

Plus précisément, pour une solution explosive u du problème forcé suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2u^3 + F(x, t), & x \in B_1 \text{ et } -1 < t < 0, \\ u = \phi(x, t), & x \in \partial B_1 \text{ et } -1 < t < 0, \\ (u, u_t) = (f(x), g(x)), & \text{pour } t = -1, \end{cases} \quad (\text{NLCRF})$$

on appelle $q_0(u)$ la borne inférieure de l'ensemble des exposants q pour lesquels la norme L^q de u explose. L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permet d'affirmer que si $n \leq 3$ et (u, u_t) explose dans $H_0^1 \times L^2$ alors u explose dans L^q pour $q > n$. De ce fait, si $n \leq 3$ alors $q_0 \leq n$.

Dans notre travail, nous avons d'abord étudié la valeur de $q_0(u)$ pour des problèmes (NLCRF) où $F \equiv 0$ et dont les solutions présentent des surfaces d'explosion régulières au voisinage de leurs minima : on montre en particulier que, si la surface d'explosion présente un minimum global non dégénéré, alors $q_0(n) = \frac{n}{2}$. Ensuite, nous avons exhibé des problèmes (NLCRF) et des solutions correspondantes qui nous permettent de répondre en partie à la question de savoir dans quelle mesure $q_0(u)$ peut se rapprocher de n ; dans ces problèmes, F est non identiquement nulle et les solutions considérées admettent des surfaces d'explosions peu régulières ;

3. Enfin, on applique les résultats théoriques démontrés tout au long de la première partie à l'étude de la consistance, de la stabilité et de la convergence du schéma numérique suivant associé à un problème de Cauchy pour l'équation (NLCR) et pour $n = 1$:

$$U_i^{n+1} = \lambda^2 U_{i+1}^n + 2(1 - \lambda^2) U_i^n + \lambda^2 U_{i-1}^n - U_i^{n-1} + 2h^2 (U_i^n)^3, \quad (\text{SchNu})$$

où U_i^n approche $u(x_i, t_n)$ et où λ représente le rapport entre les pas d'espace et de temps : $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

On montre par exemple que si K est un compact n'interceptant pas la surface d'explosion éventuelle de la solution du problème de Cauchy considéré, alors le schéma numérique choisi est d'ordre 2 dans K . De même le schéma (SchNu) converge dans K , sous certaines hypothèses supplémentaires sur λ . La question se pose alors de déterminer numériquement la surface d'explosion éventuelle. On répond en partie à cette question en construisant des conditions numériques de non-explosion et en proposant un schéma numérique adapté près de l'explosion.

3 Principaux résultats

Voici quelques-uns des principaux résultats prouvés tout au long de cette thèse. Bien que pour certains de ces théorèmes, on ait prouvé une proposition analogue pour le cas de l'équation complexe (NLCC), nous ne donnons ici (pour simplifier) que des résultats concernant l'équation cubique réelle (NLCR).

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à la construction de solutions explosives de l'équation (NLCR). Les deux théorèmes suivants résument nos résultats, l'un dans le cas de surfaces d'explosions analytiques et le deuxième pour des surfaces d'explosion moins régulières. Il sont prouvés respectivement dans les sections 2.1 et 3.1. Considérons $\Sigma = \{t - \psi(x) = 0\}$, une variété C^1 de genre espace (*i. e.* telle que $|\nabla\psi| < 1$) et de dimension $n \geq 1$.

Théorème (I.3 p. 27). *Soit (x_0, t_0) un point sur Σ , supposée ici analytique. Alors l'équation (NLCR) admet une infinité de solutions définies près de (x_0, t_0) et explosant précisément sur Σ . Ces solutions sont de la forme :*

$$u(x, t) = \pm T^{-1} \left\{ u_0(X) + u_1(X) T + u_2(X) T^2 + u_3(X) T^3 + \sum_{\substack{j \geq 4 \\ 0 \leq k \leq j/4}} u_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\}.$$

Les coefficients u_0, u_1, \dots sont analytiques et uniquement déterminés par la donnée de $u_{4,0}$, une fonction arbitraire et analytique.

Le théorème I.4 (énoncé p. 30) constitue l'analogue, pour l'équation (NLCC) du théorème précédent.

Théorème (I.6 p. 35). *Si $\psi \in H^r$, $r > \frac{n}{2} + 7$, on peut trouver une infinité de solutions u de (NLCR), définies pour T petit et explosant exactement sur Σ :*

$$u(X, T) = \frac{u_0}{T} + u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + u_{4,1} T^3 \ln T + w(X, T, T \ln T) T^3,$$

où $w(X, T, T \ln T)$ est continue en T , et prend ses valeurs dans H^{r-6} pour T petit et où les coefficients $u_0, u_1, u_2, u_3, u_{4,1}$ sont les mêmes que ceux introduits dans le théorème I.3.

En ce qui concerne l'équation cubique complexe (NLCC), un résultat similaire est énoncé p. 37 sous la forme du théorème I.7.

Relativement aux applications exposées dans la seconde partie, on distingue trois types de résultats.

Tout d'abord, dans le chapitre 1, on a précisé le comportement, pour α petit, des intégrales $E(\alpha)$ définies p. 3, quand u est une solution de (NLCR) explosant sur la surface Σ d'équation $t = \psi(x)$, où ψ est supposée de classe C^∞ . Ces résultats sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème (II.1 p. 48). *Quand α tend vers 0 :*

- i) $E(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{n-4})$;
- ii) si $\nabla\psi(x_0) = 0$, alors $E(\alpha) \sim -\frac{1}{3} \text{vol}(B_1) \Delta\psi(x_0) \alpha^{n-3}$;
- iii) si la Hessienne de ψ s'annule également en x_0 , alors $E(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{n-1})$.

Ensuite on s'est intéressé à la détermination de $q_0(u)$, la borne inférieure des q pour lesquels une solution u du problème forcé (NLCRF) explose dans L^q .

On a d'abord donné un résultat général optimal traitant des cas où la surface d'explosion $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ est régulière, sous la forme du théorème II.2. Puis on a énoncé un certain nombre de théorèmes bâtis sur le modèle du théorème II.6 ci-dessous ; ils permettent de mieux comprendre dans quelles circonstances q_0 peut se rapprocher de n , la dimension d'espace.

Ces résultats sont tous prouvés dans le chapitre 2.

Théorème (II.2 p. 52). *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un problème de la forme (NLCRF) avec certaines fonctions f, g, F, φ de classe C^∞ pour lequel $q_0 = n/2m$. Il existe aussi des problèmes pour lesquels $q_0 = 0$.*

Théorème (II.6 p. 59). *Si $\epsilon \in (0, 1)$ et $n > 6 - 6\epsilon$, il existe un problème de la forme (NLCRF) admettant une solution classique bornée pour tout $t < 0$, et telle que $q_0 = n/(1 + \epsilon)$.*

Enfin, dans le chapitre 3, on énonce des résultats de consistance, puis de stabilité et de convergence pour le schéma numérique (SchNu) associé à l'équation cubique réelle (NLCR). On démontre en particulier le théorème suivant :

Théorème (II.8-3.2.2 p. 68 et 76). *Si $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ et $\sup_x |\nabla\psi(x)| < \lambda \leq 1$, alors pour tout $\delta > 0$, le schéma (SchNu) est convergent au sens l^2 dans la région :*

$$\{(x, t) \mid t \leq \psi(x) - \delta\}.$$

De plus, dans cette région, il est d'ordre 2.

4 Méthodes spécifiques employées

La plupart des résultats démontrés dans la première partie et qui concernent la construction de solutions explosives pour les équations (NLCR) et (NLCC) sont obtenus grâce aux techniques de réduction Fuchsienne développées par S. Kichenassamy et al. dans [6, 7, 10].

En ce qui concerne la deuxième partie, on distingue principalement deux types de méthodes :

1. Une large part des résultats prouvés dans cette partie découle presque directement de la connaissance acquise dans la première partie du comportement asymptotique au voisinage de l'explosion des solutions de l'équation cubique (NLCR). Au nombre de ces résultats, on compte les théorèmes concernant l'allure des intégrales $E(\alpha)$ et des normes L^q dans le cas de surfaces d'explosion régulières. L'étude de la consistance du schéma numérique (SchNu) et la construction de critères numériques de non-explosion reposent aussi sur une démarche analogue ;
2. L'approche suivie dans la première partie pour produire des solutions explosives de l'équation (NLCR) fournit également un point de départ pour la construction de solutions explosives de problèmes forcés (NLCRF). En effet, si u est solution de (NLCR), alors u admet, au voisinage de l'explosion, un développement asymptotique de Laurent. On construit alors des solutions de (NLCRF), soit en considérant une série de Laurent tronquée après 1, 2 ou 3 termes et coïncidant avec le développement asymptotique de u , soit en s'intéressant à ce qu'on appellera une "série inverse tronquée". Ces dernières sont de la forme $1/v$ où v est un polynôme en T , dont les coefficients sont choisis de telle sorte que les premiers termes des développements asymptotiques de u et $1/v$ coïncident.

Ces méthodes offrent l'avantage d'être très générales puisqu'une large classe d'équations aux dérivées partielles peuvent se réduire sous la forme d'une équation Fuchsienne. De plus, comme on l'a vu dans la seconde partie, de nombreuses applications découlent, presque sans effort, du caractère constructif des techniques liées à la réduction Fuchsienne.

5 Structure de la thèse

D'abord un mot sur la numérotation. Cette thèse s'articule en : une introduction générale (celle là même que vous êtes en train de lire), deux parties (I et II), puis une conclusion générale suivie de deux annexes (A et B). Chacune des deux parties sera divisée en trois chapitres et admettra sa propre numérotation. Les chapitres (1, 2 et 3) seront eux-même découpés en sous chapitres (1.1, 1.2, 2.1,...) et en paragraphes (1.1.1, 1.1.2, 2.2.1,...). Les deux annexes A et B seront elle-mêmes divisées en chapitres (par exemple A.1, A.2 pour l'annexe A) et en paragraphes (par exemple B.5.1 pour l'annexe B). L'introduction et la conclusion générales sont divisées en chapitres (1,2,...) et paragraphes (5.1, 5.2,...).

Pour chaque partie (I et II), les équations seront numérotées de la façon suivante : par exemple l'équation 2.7 sera la 7^{ème} équation du chapitre 2 (mais elle pourra se trouver dans le sous-chapitre 2.2), alors que l'équation 3.2 sera la 2^{ème} équation du chapitre 3. Les théorèmes seront numérotés ainsi : le théorème I.3 sera le 3^{ème} théorème de la partie I, tandis que le théorème II.7 sera le 7^{ème} théorème de la partie II. Les remarques, observations, définitions et propositions de ces deux parties admettront chacune une numérotation propre, bien que obéissant aux mêmes règles. Par exemple, la remarque 3.1.1 sera la première remarque du sous-chapitre 3.1, de même, l'observation 3.2.2 sera la 2^{ème} observation du sous-chapitre 3.2. En ce qui concerne les figures, elles seront nommées comme suit : la

figure 3.3 sera la 3^{ème} figure du chapitre 3. Enfin, les corollaires n'admettrons pas de numérotation.

Pour les appendices, on a adopté la numérotation suivante : par exemple, l'équation B.6 sera la 6^{ème} équation de l'annexe B, la remarque A.1.1 sera la première remarque du chapitre 1 de l'annexe A (et ce système de numérotation sera aussi commun aux définitions, aux lemmes, aux observations et aux propositions), enfin, le théorème B.1 sera le premier théorème de l'appendice B.

L'introduction et la conclusion générales adopterons chacune une numérotation propre. Plus particulièrement, de part leur importance et la fréquence à laquelle on s'y rapportera dans la suite, chaque équation sera baptisée d'un nom "explicite". Par ailleurs, pour chaque théorème, est rappelée entre parenthèse la numérotation avec la quelle il apparaîtra dans la suite de la thèse ainsi que la page où il sera énoncé.

5.1 Organisation de la première partie

Dans cette partie, on décrit en détail le mécanisme de réduction Fuchsienne pour les équations (NLCR) et (NLCC).

Plus précisément, le chapitre 1 est consacré à la mise en œuvre d'une première réduction Fuchsienne prouvant l'existence de solutions formelles explosives pour (NLCR) et (NLCC). On y précise exactement la forme de ces solutions comme séries de Laurent en T et $T \ln T$ et on donne l'expression explicite des premiers coefficients de ces séries de Laurent ainsi que, au moins dans certains cas, une interprétation géométrique de ces coefficients.

Dans le chapitre 2 on réalise une deuxième réduction Fuchsienne ; cette dernière nous permet de conclure, dans le cas de surfaces d'explosion analytiques, à la convergence des séries de Laurent formelles introduites dans le chapitre précédent. On dispose alors, dans ce cas, de solutions explosives des équations (NLCR) et (NLCC).

Enfin, l'objet du chapitre 3 est la réduction des équations (NLCR) et (NLCC) à certains systèmes Fuchsien dit "symétriques". Cette dernière réduction Fuchsienne nous permet de prouver l'existence de solutions explosives de (NLCR) et (NLCC) dans le cas de surfaces d'explosion beaucoup moins régulières. Ces solutions admettent, près de l'explosion, un développement asymptotique qui coïncide avec le début des séries de Laurent introduites dans le chapitre 1.

5.2 Organisation de la seconde partie

Cette seconde partie est consacrée aux applications des résultats prouvés dans la première partie.

En particulier, le chapitre 1 traite de l'étude du comportement, pour α petit, des intégrales $E(\alpha)$ construites sur le modèle de l'intégrale d'énergie (IE).

Le chapitre 2 est, quant à lui, consacré à la recherche, pour une solution u du problème forcé (NLCRF), de la borne inférieure $q_0(u)$. On s'intéresse d'abord à des solutions explo-

sant sur des surfaces très régulières au voisinage de leur minimums et on traite ensuite des cas où la surface d'explosion est peu régulière.

Dans le dernier chapitre, on aborde l'analyse du schéma numérique (SchNu) associé à l'équation cubique (NLCR). On prouve sa convergence dans des domaines compacts n'interceptant pas la surface d'explosion éventuelle de la solution de (NLCR). On évoque aussi le problème de la recherche numérique du lieu d'explosion et on propose un schéma numérique plus adapté près de l'explosion.

5.3 Annexes

On a rajouté deux courts appendices A et B. Le premier rappelle certaines notions concernant les invariants géométriques d'une hypersurface plongée dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ muni de la métrique de Minkowski. Le second traite de façon générale, pour une équation ou un système Fuchsien donné, de la forme des solutions comme série en T et $\ln T$. Le but est en fait d'automatiser, autant que faire se peut, certaines des étapes franchies dans la première partie de la thèse. On a pris soin de l'agrémenter de quelques exemples supplémentaires.

Première partie
Réductions Fuchsiennes

Introduction

Cette première partie va être tout entière consacrée à la construction de solutions réelles explosives pour l'équation cubique réelle :

$$\square u = 2u^3, \quad (\text{NLCCR})$$

ainsi que pour l'équation cubique complexe :

$$\square u + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 2u|u|^2 + \beta u, \quad (\text{NLCC})$$

où $\alpha \in i\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$; $u = u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = z, t)$ peut prendre des valeurs complexes.

Précisons tout de même que nous n'allons pas directement travailler sur l'équation complexe (NLCC) mais sur une équation équivalente.

En effet, la présence du terme $\alpha \frac{\partial u}{\partial z}$ nous empêche d'effectuer des transformations de Lorentz, bien utiles pour simplifier l'expression des résultats. Heureusement, on remarque que si v satisfait :

$$\square v = 2v|v|^2 + (\beta - \alpha^2/4)v$$

et si l'on pose $u = v e^{\alpha z/2}$ alors u est solution de (NLCC). De fait, nous supposons désormais que $\alpha = 0$ et considérerons plutôt l'équation modifiée équivalente suivante :

$$\square u = 2u|u|^2 + \beta u. \quad (\text{NLCC-bis})$$

Cette équation est, elle, Lorentz-invariante et est symétrique par rapport aux variables d'espace (la direction $Ox_n = Oz$ n'est plus privilégiée).

Pour les deux équations (NLCCR) et (NLCC-bis), la démarche sera identique :

1. Au cours du chapitre 1 on prouve, pour toute hypersurface analytique de genre espace $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$, l'existence de solutions formelles explosant exactement sur Σ . Ces solutions s'écrivent toutes sous la forme de la somme d'un terme explosif $u_0(x)/(t - \psi(x))$ et d'une série formelle en $T = t - \psi$ et $\ln T$. On donne également les expressions explicites des premiers coefficients de ces séries formelles ainsi que, au moins en certains points, une interprétation géométrique de ces mêmes coefficients.
2. Ensuite, dans le chapitre 2, on montre la convergence des séries formelles précédemment introduites, dans le cas où la surface d'explosion Σ est analytique. On obtient alors, dans ce cas, des solutions explosives de (NLCCR) et de (NLCC-bis).

3. Enfin, le chapitre 3 est consacré à la construction de solutions explosives des équations (NLCR) et (NLCC-bis), explosant sur des surfaces beaucoup moins régulières. Ces solutions vont admettre, près de leurs lieux d'explosion, un développement asymptotique de la même forme que celui rencontré dans les chapitres 1 et 2.

Cette approche est calquée sur celle entreprise par S. Kichenassamy et *al.* dans [6, 7, 10] et sur les méthodes de réduction Fuchsienne introduites dans ces articles.

1

Première réduction Fuchsienne et solutions formelles

Sommaire

1.1	Cas de l'équation cubique réelle NLCR	15
1.1.1	Construction d'une solution formelle	15
1.1.2	Expression explicite des premiers termes	19
1.1.3	Interprétation géométrique	20
1.2	Cas de l'équation cubique complexe NLCC	21
1.2.1	Développement en série formelle près de l'explosion	21
1.2.2	Expression explicite des premiers coefficients et interprétation géométrique des conditions de non-logarithme	24

Nous allons commencer par l'étude de l'existence éventuelle de solutions explosives formelles pour les équations (NLCR) et (NLCC-bis). En fait, pour toute hypersurface de genre espace $\Sigma = \{\Phi(x, t) = 0\}$, on va trouver des solutions formelles explosant exactement sur Σ . Ces solutions vont être construites comme la somme d'un terme explosif de la forme $u_0(x)/T$ et d'une série formelle en T et $\ln T$ où $T = \Phi(x, t)$. On précisera la forme de cette série.

Par la suite, nous donnerons les expressions explicites des premiers termes de cette série formelle ainsi qu'une interprétation géométrique des coefficients associés.

1.1 Cas de l'équation cubique réelle NLCR

1.1.1 Construction d'une solution formelle

Au cours de cette section nous allons nous attacher à la construction de solutions formelles de l'équation cubique réelle (NLCR). Ces solutions auront la forme de séries de Laurent autour de la surface d'explosion.

Remarquons tout d'abord que l'équation (NLCR) admet $(x, t) \mapsto \frac{\pm 1}{t-a}$, $a \in \mathbb{R}$ comme famille de solutions évidentes. Ainsi, il paraît naturel de rechercher des solutions de la forme plus générale suivante :

$$u(x, t) = \tilde{u}(X, T) = \frac{u_0(X)}{T} + v(X, T), \quad (1.1)$$

où v est analytique près de $(0, 0)$. On a, en outre, effectué le changement de variables :

$$\begin{cases} X = x, \\ T = \Phi(x, t). \end{cases} \quad (1.2)$$

où Φ est analytique en chacune de ses deux variables et $\nabla\Phi \neq 0$.

On peut alors exprimer les dérivées partielles ∂_t et ∂_{x_i} : $\partial_t = \Phi_t \partial_T$ et $\partial_{x_i} = \delta_i^j \partial_{X_j} + \Phi_{x_i} \partial_T$ et donc le d'Alembertien s'écrit :

$$\begin{aligned} \square &= \partial_t^2 - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \\ &= [\Phi_t^2 - \sum_i \Phi_{x_i}^2] \partial_{TT} + \Phi_{tt} \partial_T - \sum_i \delta_i^j \partial_{X_j}^2 - 2 \sum_i \Phi_{x_i} \delta_i^j \partial_{X_j, T} - \sum_i \Phi_{x_i x_i} \partial_T. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1. La forme de la singularité en $1/T$ se justifie également d'une deuxième manière. En effet, on aurait pu chercher des solutions formelles explosives se comportant comme $u_0(X) T^{-\alpha}$ (avec $\alpha > 0$) près de l'explosion. Alors, si les dérivées en temps et en espace se comportent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u(x, t) &\sim u_0(X) T^{-\alpha}, & u_T(x, t) &\sim -\alpha u_0(X) T^{-\alpha-1}, \\ u_{TT}(x, t) &\sim \alpha(\alpha+1) u_0(X) T^{-\alpha-2}, & u_{X_i}(x, t) &\sim \partial_{X_i} u_0(X) T^{-\alpha}, \\ u_{X_i X_j}(x, t) &\sim \partial_{X_i X_j} u_0(X) T^{-\alpha}, & u_{X_i T}(x, t) &\sim -\alpha \partial_{X_i} u_0(X) T^{-\alpha-1}, \end{aligned}$$

on obtient le tableau ci-dessous, résumant le comportement près de l'explosion de chacun des termes intervenant dans l'équation (NLCR).

$[\Phi_t^2 - \sum_i \Phi_{x_i}^2] \partial_{TT} u$	$[\Phi_{tt} - \sum_i \Phi_{x_i x_i}] \partial_T u$	$-\sum_i \delta_i^j \partial_{X_j}^2 u$	$-2 \sum_i \Phi_{x_i} \delta_i^j \partial_{X_j, T} u$	$2 u^3$
$T^{-\alpha-2}$	$T^{-\alpha-1}$	$T^{-\alpha}$	$T^{-\alpha-1}$	$T^{-3\alpha}$

Alors on voit que, pour que les termes les plus singuliers puissent se compenser, il faut nécessairement que $-\alpha - 2 = -3\alpha$ et donc $\alpha = 1$.

Reprenons notre raisonnement ; l'équation (NLCR) se traduit maintenant par :

$$\begin{aligned} \frac{2 u_0}{T^3} (\Phi_t^2 - \sum_i \Phi_{x_i}^2) + \frac{1}{T^2} (-\Phi_{tt} u_0 + (\Delta_x \Phi) u_0 + 2 \sum_i \Phi_{x_i} \partial_{X_i} u_0) - \frac{\Delta_X u_0}{T} + \square v \\ = \frac{2 u_0^3}{T^3} + \frac{6 u_0^2 v}{T^2} + \frac{6 u_0 v}{T} + 2 v^3. \end{aligned}$$

Après examen des termes en $\frac{1}{T^3}$ à droite et à gauche, il vient que Φ doit nécessairement vérifier :

$$\Phi_t^2 - \sum_i \Phi_{x_i}^2 = u_0^2 \geq 0, \quad \text{si } u_0 \text{ est réelle.}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_t \neq 0, \\ \text{la surface } \Sigma = \{\Phi(x, t) = 0\} \text{ est de genre espace.} \end{array} \right.$$

On peut ainsi supposer que Φ s'écrit $\Phi(x, t) = t - \psi(x)$, et ce, sans perte de généralité. Le changement de variables (1.2) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x, \\ T = t - \psi(x), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

et le couple (u_0, v) vérifie maintenant :

$$\begin{aligned} (1 - |\nabla\psi|^2) \frac{2u_0}{T^3} - \frac{u_0 \Delta\psi}{T^2} - \frac{2u_{0i} \psi^i}{T^2} - \frac{\Delta_X u_0}{T} + \square_{X,T} v \\ = \frac{2u_0^3}{T^3} + \frac{6u_0^2 v}{T^2} + \frac{6u_0 v^2}{T} + 2v^3, \end{aligned}$$

où on a adopté la convention de sommation d'Einstein et où, par exemple, u_{0i} et ψ^i représentent (resp.) $\partial_{x_i} u_0$ et $\partial_{x_i} \psi$. En examinant une fois encore les termes en $\frac{1}{T^3}$, on obtient directement l'expression de u_0^2 :

$$u_0^2 = 1 - |\nabla\psi|^2, \quad (1.4)$$

tandis que v est solution de :

$$\begin{aligned} u_0^2 (D + 2)(D - 3)v = u_0 \Delta\psi + 2u_{0i} \psi^i \\ + T (6u_0 v^2 + \Delta_X u_0 - \Delta\psi Dv - 2\psi^i D\partial_{X_i} v) + T^2 (2v^3 + \Delta_X v), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où D désigne $T\partial_T$.

Remarque 1.1.2. *Le choix du signe de u_0 conduit à deux familles distinctes de solutions. À partir de maintenant et jusqu'à la fin, on supposera toujours que $u_0 \geq 0$.*

Développons maintenant v en série formelle, sous la forme :

$$v = u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + \dots,$$

et calculons les coefficients successivement, en demandant qu'ils aient une dépendance polynomiale en $\ln T$. Après avoir remplacé v par la série précédente dans l'équation (1.5) et avoir comparé les termes constants et linéaires en T , on obtient les deux égalités suivantes :

$$u_0^2 P(D + 1)u_1 = u_0 \Delta\psi + 2u_{0i} \psi^i, \quad (1.6a)$$

$$u_0^2 P(D + 2)u_2 = 6u_0 u_1^2 + \Delta u_0 - \Delta\psi D u_1 - 2\psi^i D u_{1i}, \quad (1.6b)$$

où $P(D) = (D + 1)(D - 4)$. Ces équations déterminent u_1 et u_2 de manière unique.

Par ailleurs, en examinant les termes en T^{k-1} pour $k \geq 3$, on obtient la relation de récurrence suivante pour les u_k :

$$\begin{aligned} u_0^2 P(D+k)u_k &= 2 \sum_{\substack{1 \leq a, b, c < k \\ a+b+c=k}} u_a u_b u_c + 6 u_0 \sum_{\substack{1 \leq a, b < k \\ a+b=k}} u_a u_b \\ &- \Delta\psi(D+k-2) u_{k-1} + \Delta u_{k-2} \\ &- 2 \psi^i(D+k-2) \partial_{X_i} u_{k-1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Appelons l_k le degré de u_k en $\ln T$. Après calculs, on trouve :

$$l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = 0 \text{ et } l_4 \leq 1.$$

En fait, l'opérateur $P(D+k)$ est inversible dans l'espace des polynômes de degré k en $\ln T$, excepté quand $P(k) = 0$. Si k annule P à l'ordre m , on voit facilement que, pour tout polynôme r , l'équation $P(D+k)q(\ln T) = r(\ln T)$ admet une infinité de solutions q de degré inférieur à $m + \deg r$, définies à l'addition d'un polynôme arbitraire de degré $m - 1$ près. Ici, $P(k) = (k + 1)(k - 4)$ donc 4 est un zéro d'ordre 1 de P . C'est pourquoi, pour $k = 4$, bien que le membre de droite dans (1.7) soit de degré zéro en $\ln T$, u_4 peut être de degré 1 en $\ln T$. De plus u_4 n'est déterminé qu'à une constante additive près.

Si $k \geq 5$, $P(k) \neq 0$ donc le membre de gauche dans (1.7) est de degré l_k en $\ln T$. D'autre part le degré du membre de droite ne dépasse pas :

$$\max \left\{ l_{k-2}, l_{k-1}, \max_{\substack{1 \leq a, b < k \\ a+b=k}} (l_a + l_b), \max_{\substack{1 \leq a, b, c < k \\ a+b+c=k}} (l_a + l_b + l_c) \right\}.$$

Il s'ensuit par récurrence sur k que $l_k \leq k/4$, pour tout $k \geq 0$.

Remarque 1.1.3. Dans la plupart des cas u_4 est de degré 1 en $\ln T$, mais comme nous allons le voir, il existe des cas particuliers pour lesquels $l_4 = 0$. Dans cette situation, aucun terme logarithmique n'apparaît dans la série, qui devient donc une série en T uniquement.

On peut résumer ces résultats en énonçant le théorème suivant :

Théorème I.1. L'équation (NLCR) admet une infinité de solutions formelles u explosant exactement sur Σ . Elles sont de la forme (SFR) suivante :

$$\begin{aligned} T^{-1} \left\{ u_0(X) + u_1(X)T + u_2(X)T^2 + u_3(X)T^3 \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j \geq 4 \\ 0 \leq k \leq j/4}} u_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\}, \end{aligned} \quad (\text{SFR})$$

et sont entièrement déterminées par la donnée de $u_{4,0}$. Remarquons aussi que si u est solution de (NLCR), alors c'est aussi le cas pour $-u$. On construit ainsi une deuxième famille de solutions.

Comme nous allons le voir dans la suite, il peut être très intéressant de disposer de l'expression explicite des premiers coefficients de cette série de Laurent. Ainsi, la prochaine sous-section est consacrée à leur calcul.

1.1.2 Expression explicite des premiers termes

Les équations (1.4), (1.6a) et (1.6b) ainsi que la relation de récurrence (1.7) se traduisent par les équations suivantes, déterminant uniquement u_0 , u_1 , u_2 et u_3 :

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{1 - |\nabla\psi|^2}, \\ 6 u_0^2 u_1 &= -(u_0 \Delta\psi + 2 \psi^i u_{0i}), \\ 6 u_0^2 u_2 &= -(6 u_0 u_1^2 + \Delta u_0), \\ 4 u_0^2 u_3 &= -(2 u_1^3 + 12 u_0 u_1 u_2 + \Delta u_1) + (2 \psi^i \partial_i + \Delta\psi) u_2. \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient les expressions explicites de u_0 , u_1 , u_2 et u_3 en termes de ψ et de ses dérivées spatiales :

$$u_0 = \sqrt{1 - |\nabla\psi|^2}, \quad (1.8)$$

$$u_1 = \frac{\psi^{ij} \psi_i \psi_j}{3(1 - \psi^i \psi_i)^{3/2}} - \frac{\Delta\psi}{6\sqrt{1 - \psi^i \psi_i}}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{(\psi^{ij} \psi_i \psi_j)^2}{9(1 - \psi^i \psi_i)^{7/2}} + \frac{2(\psi^{ij} \psi_i \psi_j) \Delta\psi + 3 \psi^{ij} \psi_j \psi_i^k \psi_k}{18(1 - \psi^i \psi_i)^{5/2}} \\ &\quad + \frac{6(\Delta\psi)^i \psi_i + 6 \psi^{ij} \psi_{ij} - (\Delta\psi)^2}{36(1 - \psi^i \psi_i)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{\lambda_5}{27(1 - \psi^i \psi_i)^{11/2}} + \frac{\lambda_4}{9(1 - \psi^i \psi_i)^{9/2}} + \frac{\lambda_3}{36(1 - \psi^i \psi_i)^{7/2}} \\ &\quad + \frac{\lambda_2}{108(1 - \psi^i \psi_i)^{5/2}} + \frac{\lambda_1}{24(1 - \psi^i \psi_i)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

où les coefficients λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 and λ_5 sont définis comme suit :

$$\lambda_1 = \Delta^2 \psi, \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -2(\Delta\psi)^3 + 18 \Delta\psi (\psi^{ij} \psi_{ij}) + 15 \Delta\psi (\Delta\psi^i \psi_i) - 18 \psi^{ij} \psi_i^k \psi_{jk} \\ &\quad - 36 \psi^{ijk} \psi_i \psi_j \psi_k, \end{aligned} \quad (1.12b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 2(\Delta\psi)^2 (\psi^{ij} \psi_i \psi_j) - 4(\psi^{ij} \psi_i \psi_j) (\Delta\psi^i \psi_i) + 13 \Delta\psi (\psi^{ij} \psi_j \psi_i^k \psi_k) \\ &\quad + 2(\psi^{ijk} \psi_i \psi_j \psi_k) - 4(\psi^{ij} \psi_i \psi_j) (\psi^{ij} \psi_{ij}) - 12 \psi^{ijk} \psi_i \psi_j \psi_k^l \psi_l \\ &\quad - 30 \psi^{ij} \psi_i^k \psi_j \psi_k^l \psi_l, \end{aligned} \quad (1.12c)$$

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \Delta\psi (\psi^{ij} \psi_i \psi_j)^2 - 11(\psi^{ij} \psi_i \psi_j) (\psi^{ij} \psi_j \psi_i^k \psi_k) \\ &\quad - (\psi^{ij} \psi_i \psi_j) (\psi^{ijk} \psi_i \psi_j \psi_k), \end{aligned} \quad (1.12d)$$

$$\lambda_5 = -8(\psi^{ij} \psi_i \psi_j)^3. \quad (1.12e)$$

Ces expressions sont un peu compliquées, c'est pourquoi nous allons essayer d'en donner une interprétation géométrique simple, au moins en certains points et pour des petites dimensions d'espaces.

1.1.3 Interprétation géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Rappelons que la surface d'explosion $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ est nécessairement de genre espace et que donc $|\nabla\psi(x)| < 1$. Ainsi, quitte à appliquer une transformation de Lorentz bien choisie, on peut toujours supposer que le gradient de ψ s'annule et que sa Hessienne (ψ_{ij}) est diagonale au point x .

De plus, il est clair que, appliquer une telle transformation à une solution de (NLCR) sans terme logarithmique conduit à une nouvelle solution qui n'a toujours pas de terme en $\ln T$. De ce fait, la condition de non-logarithme $u_{4,1} = 0$ doit s'exprimer à partir des seuls invariants géométriques de la surface d'explosion.

En outre, les expressions de u_0, u_1, u_2 et u_3 prennent une forme bien plus simple en un point où $\nabla\psi(x) = 0$ et, bien qu'ils ne soient certainement pas invariants par une transformation de Lorentz, nous sommes capables, en un tel point x , d'écrire ces premiers coefficients en terme des invariants géométriques de Σ .

Supposons donc que x est tel que $\nabla\psi(x) = 0$. Alors (1.8)-(1.11) s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1, \\ u_1(x) &= -\frac{\Delta\psi}{6}, \\ u_2(x) &= -\frac{1}{36}\Delta\psi^2 + \frac{1}{6}\psi^{ij}\psi_{ij}, \\ u_3(x) &= -\frac{1}{54}\Delta\psi^3 + \frac{1}{6}\Delta\psi\psi^{ij}\psi_{ij} + \frac{1}{24}\Delta^2\psi - \frac{1}{6}\psi^{ij}\psi_j^k\psi_{ik}, \end{aligned}$$

alors que $u_{4,0}$ est arbitraire et (1.7) donne :

$$\begin{aligned} u_{4,1}(x) &= -\frac{2}{27}(\Delta\psi)^4 - \frac{2}{3}(\Delta\psi)^{ij}\psi_{ij} + \frac{7}{9}(\Delta\psi)^2\psi^{ij}\psi_{ij} \\ &\quad - \frac{8}{9}\Delta\psi\psi^{ij}\psi_j^k\psi_{ik} - \frac{1}{9}\Delta\psi^i\Delta\psi_i - \frac{2}{3}(\psi^{ij}\psi_{ij})^2 \\ &\quad + \frac{2}{9}\Delta\psi\Delta^2\psi - \frac{1}{3}\psi^{ijk}\psi_{ijk} - \frac{1}{3}\psi^{ij}\psi^{kl}\psi_{ik}\psi_{jl}. \end{aligned}$$

En particulier, en dimension d'espace $n = 1$:

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, \\ u_1(x) = -\frac{H(x)}{6}, \\ u_2(x) = \frac{5}{36}H^2(x), \\ u_3(x) = \frac{1}{24}\frac{d^2H}{ds^2}(x) - \frac{31}{216}H^3(x), \end{cases}$$

tandis que la condition de non-logarithme $u_{4,1} = 0$ s'écrit (que $\nabla\psi$ s'annule ou pas) :

$$\frac{d^2(H^2)}{ds^2}(x) = \frac{2}{3}H^4(x), \quad (1.13)$$

où $H(x)$ désigne la courbure (moyenne) de Σ au point x et s est une abscisse curviligne sur Σ , induite par la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

En dimension $n = 2$, ces expressions sont remplacées par :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1, \\ u_1(x) = -\frac{H(x)}{6}, \\ u_2(x) = \frac{5}{36} H^2(x) - \frac{1}{3} K(x), \\ u_3(x) = \frac{1}{24} \Delta_g H(x) - \frac{31}{216} H^3(x) + \frac{1}{2} H(x)K(x), \end{cases}$$

où x vérifie encore $\nabla\psi(x) = 0$. L'équation $u_{4,1} = 0$ est quant à elle toujours équivalente à :

$$\begin{aligned} & -\frac{37}{54} H^4 + \frac{23}{9} H^2 K - \frac{4}{3} K^2 + \frac{1}{6} H \Delta_g H \\ & + \frac{1}{36} \Delta_g(H^2) + \frac{1}{6} \Delta_g^2 |g| = 0. \end{aligned}$$

Ici $H(x)$ représente toujours la courbure moyenne de Σ au point x , $K(x)$ est la courbure totale (ou courbure de Gauss), $|g(x)| = 1 - |\nabla\psi(x)|^2$, et Δ_g désigne le Laplacien sur Σ (respectant la métrique induite sur Σ par la métrique de Minkowski sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$).

Remarque 1.1.4. Pour les dimensions d'espace $n \geq 3$, on dispose de la formule suivante pour la condition de non-logarithme :

$$\begin{aligned} & -\frac{37}{54} H^4 + \frac{23}{9} H^2 K_2 - \frac{4}{3} K_2^2 - \frac{5}{3} H K_3 + \frac{1}{6} H \Delta_g H \\ & + \frac{1}{36} \Delta_g(H^2) - \frac{4}{3} K_4 + \frac{1}{6} \Delta_g^2 |g| = 0, \end{aligned}$$

où H est la courbure moyenne de Σ , alors que K_2, K_3 et K_4 sont d'autres fonctions symétriques des courbures principales de la surface d'explosion (pour plus de détail, voir l'annexe A).

1.2 Cas de l'équation cubique complexe NLCC

1.2.1 Développement en série formelle près de l'explosion

Dans cette section, comme dans le cas de l'équation (NLCC), nous allons nous attacher à la recherche de solutions formelles pour (NLCC-bis) explosant sur une hypersurface donnée de l'espace-temps de Minkowski : $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$, où ψ est choisie de telle sorte que $|\nabla\psi| < 1$ (on se restreint une fois encore à ce type de surface d'explosion après un raisonnement analogue à celui tenu au début de la section 1.1). Σ est donc de genre espace.

Effectuons en outre le changement de variables (1.3) et définissons encore $D = T\partial_T$.

Le résultat principal s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème I.2. *L'équation (NLCC-bis) admet une infinité de solutions formelles explosant exactement sur Σ . Elles sont de la forme (SFC) suivante :*

$$\frac{u_0(X)}{T} \left\{ 1 + v_1(X) T + v_2(X) T^2 + \sum_{\substack{j \geq 3 \\ 0 \leq k \leq j/3}} v_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\}. \quad (\text{SFC})$$

Les coefficients u_0, v_1, v_2, \dots peuvent être complexes et sont complètement déterminés par la donnée de ψ , de l'argument de u_0 , de la partie imaginaire de $v_{3,0}$ et de la partie réelle de $v_{4,0}$.

Démonstration. Pour commencer, posons :

$$u(X) = u_0(X) \left(\frac{1}{T} + v(X, T) \right),$$

avec

$$|u_0|^2 = 1 - |\nabla\psi|^2.$$

Rappelons aussi que l'opérateur de d'Alembert s'écrit dans les nouvelles variables X et T :

$$\begin{aligned} \square &= \partial_t^2 - \sum_i \partial_{x_i}^2 \\ &= (1 - |\nabla\psi|^2) \partial_{TT} + \Delta\psi \partial_T + 2\psi^i \partial_T \partial_{X_i} - \Delta_X, \end{aligned}$$

avec les notations introduites plus tôt.

Alors, en remplaçant dans (NLCC-bis), on trouve immédiatement que v est solution de

$$|u_0|^4 (D(D-1)v - 4v - 2\bar{v}) = \Delta\psi |u_0|^2 + 2\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + T g[X, T, v],$$

où

$$\begin{aligned} g[X, T, v] &= 2|u_0|^4 (v^2 + 2|v|^2) + \beta |u_0|^2 - |u_0|^2 \Delta\psi Dv \\ &\quad - 2\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 Dv - 2|u_0|^2 \psi^i D\partial_{X_i} v + \Delta u_0 \bar{u}_0 \\ &\quad + T \left[\Delta u_0 \bar{u}_0 v + 2u_0^i \bar{u}_0 \partial_{X_i} v + |u_0|^2 \Delta_X v \right. \\ &\quad \left. + 2|u_0|^4 v |v|^2 + \beta |u_0|^2 v \right]. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant $v = a + b$ avec a réelle et b imaginaire pure. Séparer les parties réelles et imaginaires dans l'équation précédente nous conduit aux relations de récurrence

suivantes :

$$\begin{aligned}
|u_0|^4 (D+2)(D-3) a &= \Delta\psi |u_0|^2 + \psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + \psi^i \bar{u}_{0i} u_0 \\
&+ T \left[2 |u_0|^4 (3a^2 - b^2) + \beta |u_0|^2 - |u_0|^2 \Delta\psi Da \right. \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0) - (\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 - \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Db \\
&- (\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Da - 2 |u_0|^2 \psi^i D\partial_{X_i} a \left. \right] \\
&+ T^2 \left[(u_0^i \bar{u}_0 + \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} a + (u_0^i \bar{u}_0 - \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} b \right. \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0) a + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0) b \\
&+ 2 |u_0|^4 a (a^2 - b^2) + |u_0|^2 \Delta_X a + \beta |u_0|^2 a \left. \right], \tag{1.14}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|u_0|^4 (D+1)(D-2) b &= \psi^i u_{0i} \bar{u}_0 - \psi^i \bar{u}_{0i} u_0 + T \left[(\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 - \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Da \right. \\
&+ (\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Db - \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0) \\
&- 4 |u_0|^4 a b + 2 |u_0|^2 \psi^i D\partial_{X_i} b + |u_0|^2 \Delta\psi Db \left. \right] \\
&+ T^2 \left[(u_0^i \bar{u}_0 + \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} b + (u_0^i \bar{u}_0 - \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} a \right. \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0) b + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0) a \\
&+ \beta |u_0|^2 b + 2 |u_0|^4 b (a^2 - b^2) + |u_0|^2 \Delta_X b \left. \right]. \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Ainsi, si nous décomposons a et b :

$$\begin{cases} a(X, T) = a_1(X) + a_2(X) T + a_3(X) T^2 + \dots, \\ b(X, T) = b_1(X) + b_2(X) T + b_3(X) T^2 + \dots, \end{cases}$$

où les coefficients a_j et b_j sont des polynômes en $\ln T$ de degré μ_j et ν_j respectivement, après calculs, on trouve :

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0 \text{ et } \mu_4 = 1, \\ \nu_1 = \nu_2 = 0 \text{ et } \nu_3 = \nu_4 = 1, \end{cases}$$

et la relation de récurrence suivante, pour $l \geq 5$

$$\begin{cases} \mu_l \leq \max_{i+j=l-1} \{\mu_i + \mu_j, \nu_i + \nu_j\}; & \max_{i+j+k=l-2} \{\mu_i + \mu_j + \mu_k, \mu_i + \nu_j + \nu_k\}, \\ \nu_l \leq \max_{i+j=l-1} \{\mu_i + \nu_j\}; & \max_{i+j+k=l-2} \{\nu_i + \nu_j + \nu_k, \mu_i + \nu_j + \nu_k\}. \end{cases}$$

Alors, une récurrence élémentaire conduit à $\mu_l \leq \frac{l}{3}$ et $\nu_l \leq \frac{l}{3}$ pour tout $l \geq 1$, comme annoncé. \square

1.2.2 Expression explicite des premiers coefficients et interprétation géométrique des conditions de non-logarithme

Il peut être intéressant de disposer de l'expression explicite des premiers coefficients de la série en terme de ψ et de l'argument de u_0 .

Posons ainsi :

$$u_0(X) = \sqrt{1 - |\nabla\psi(X)|^2} e^{i\theta(X)}.$$

Alors, en se servant des relations de récurrence (1.14) et (1.15), nous obtenons des expressions pour $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 = a_{3,0} + a_{3,1} \ln T = a_{3,0}, b_3 = b_{3,0} + b_{3,1} \ln T, a_4 = a_{4,0} + a_{4,1} \ln T$ et $b_4 = b_{4,0} + b_{4,1} \ln T$. En résumé, $b_{3,0}$ et $a_{4,0}$ sont arbitraires, tandis que $b_{3,1}$ et $a_{4,1}$ conditionnent la présence de termes logarithmiques dans la série. Remarquons aussi que l'on s'attendait à ce que a_4 s'écrive $a_4 = a_{4,0} + a_{4,1} \ln T + a_{4,2} \ln^2 T$ à cause de la forme de b_3 et de l'équation pour a . En fait, comme annoncé, $a_{3,2}$ est toujours nul. Les expressions des premiers coefficients de la série sont les suivantes :

$$\begin{aligned} a_1(X) &= -\frac{\Delta\psi}{6|u_0|^2} - \frac{\psi^j (\bar{u}_{0j} u_0 + u_{0j} \bar{u}_0)}{6|u_0|^4} \\ &= -\frac{\Delta\psi}{6(1 - |\nabla\psi|^2)} + \frac{\psi^{jk} \psi_j \psi_k}{3(1 - |\nabla\psi|^2)^2}, \\ b_1(X) &= \frac{\psi^j (\bar{u}_{0j} u_0 - u_{0j} \bar{u}_0)}{2|u_0|^4} \\ &= -i \frac{\psi^j \theta_j}{1 - |\nabla\psi|^2}, \\ a_2(X) &= -a_0^2 + \frac{b_0^2}{3} - \frac{\beta}{6|u_0|^2} - \frac{\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0}{12|u_0|^4} \\ &= -\frac{(\Delta\psi)^2}{36(1 - |\nabla\psi|^2)^4} + \frac{\Delta\psi \psi^{jk} \psi_j \psi_k}{9(1 - |\nabla\psi|^2)^6} - \frac{(\psi^{jk} \psi_j \psi_k)^2}{9(1 - |\nabla\psi|^2)^8} - \frac{(\psi^j \theta_j)^2}{3(1 - |\nabla\psi|^2)^4} \\ &\quad - \frac{\beta}{6(1 - |\nabla\psi|^2)} + \frac{\psi^{jk} \psi_j \psi_k}{(1 - |\nabla\psi|^2)^4} + \frac{\psi^j \Delta\psi_j}{(1 - |\nabla\psi|^2)^4} + \frac{\psi^{jk} \psi_{kl} \psi_j \psi^l}{(1 - |\nabla\psi|^2)^6} + \frac{\theta^j \theta_j}{(1 - |\nabla\psi|^2)}, \\ b_2(X) &= -2a_0 b_0 - \frac{\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0}{4|u_0|^2} \\ &= i \left[\frac{2}{3} \frac{\psi^j \theta_j (\psi^{jk} \psi_j \psi_k)}{(1 - |\nabla\psi|^2)^6} - \frac{\Delta\psi \psi^j \theta_j}{3(1 - |\nabla\psi|^2)^4} + \frac{\psi^{jk} \psi_j \theta_k}{(1 - |\nabla\psi|^2)} - \frac{1}{2} \Delta\theta \right]. \end{aligned}$$

Pour le cas de la dimension d'espace $n = 1$, le calcul des coefficients suivants est moins fastidieux ; de même, ces coefficients s'expriment sous une forme plus simple en un point x

vérifiant $\psi'(x) = 0$. En fait, en un tel point on a :

$$\begin{aligned}
 a_1(x) &= -\frac{\psi''(x)}{6}, \\
 b_1(x) &= 0, \\
 a_2(x) &= \frac{\theta'(x)^2}{6} + \frac{5\psi''(x)^2}{36}, \\
 b_2(x) &= -i\frac{\theta''(x)}{2}, \\
 a_3(x) &= \frac{1}{216}(-18(\beta + 5\theta'(x)^2)\psi''(x) - 4\psi''(x)^3 + 9\psi^{(4)}(x)), \\
 b_{31}(x) &= -\frac{4}{9}i(\theta''(x)\psi''(x) + \theta'(x)\psi^{(3)}(x)), \\
 a_{41}(x) &= \frac{4}{135}(9\theta''(x)^2 + 6\psi''(x)^4 + 9\theta'(x)\theta^{(3)}(x) + 3\psi^{(3)}(x)^2 + 3\psi''(x)\psi^{(4)}(x)).
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Remarque 1.2.1. On peut toujours, via une transformation de Lorentz appropriée, se ramener au cas $\psi'(x) = 0$.

On peut maintenant, comme dans le cas de la non-linéarité cubique réelle (NLCR), donner (au moins en dimension d'espace $n = 1$) une interprétation géométrique des conditions de non-logarithme pour la série (SFC). En effet, en suivant un raisonnement analogue à celui tenu dans la sous-section 1.1.3, on conclut une fois encore que ces conditions doivent être invariantes par transformation de Lorentz et donc s'exprimer en terme des invariants de la surface d'explosion Σ et des dérivées successives de θ , l'argument de u_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 0 = 8 \frac{d^2\theta}{ds^2} H + 8 \frac{d\theta}{ds} \frac{dH}{ds}, \\
 0 = 24 \frac{d^2H}{ds^2} H + 24 \left(\frac{dH}{ds}\right)^2 - 8 H^4 + 72 \frac{d\theta}{ds} \frac{d^3\theta}{ds^3} \\
 \quad - 72 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 H^2 + 72 \left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)^2,
 \end{array} \right. \tag{1.17}$$

Bien que ces quantités ne soient certainement pas invariantes par transformation de Lorentz, on écrit de la même façon les premiers coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, a_{3,0}$ de la série (en un point x tel que $\psi'(x) = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_1 = -\frac{H}{6}, \\
 b_1 = 0, \\
 a_2 = \frac{5H^2}{36} + \frac{1}{6} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \frac{\beta}{6}, \\
 b_2 = -\frac{i}{2} \frac{d^2\theta}{ds^2}, \\
 a_{3,0} = \frac{1}{24} \frac{d^2H}{ds^2} - \frac{31}{216} H^2 - \frac{5}{12} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 H - \frac{\beta}{12} H.
 \end{array} \right. \tag{1.18}$$

Les notations sont identiques à celles introduites dans la sous-section 1.1.3.

2

Deuxième réduction Fuchsienne et convergence

Sommaire

2.1	Cas de l'équation cubique réelle NLCR	27
2.2	Cas de l'équation cubique complexe NLCC	30

Dans la section précédente nous avons prouvé l'existence de solutions formelles explosives pour les équations (NLCR) et (NLCC-bis). Ces solutions se présentent sous la forme de la somme d'un terme singulier se comportant comme $1/T$ pour T petit, et d'une série formelle en T et $\ln T$.

Ces résultats ont été obtenus en ramenant (NLCR) et (NLCC-bis) à la résolution de certaines équations Fuchsiennes. En fait, comme nous allons le voir dans la présente section, si nous effectuons d'autres réductions Fuchsiennes, on parvient à montrer que, si la surface d'explosion est analytique, ces solutions formelles sont en fait des solutions exactes, sommes d'une partie singulière en $1/T$ et d'une partie analytique en T et $Y = T \ln T$.

2.1 Cas de l'équation cubique réelle NLCR

Cette sous-section est entièrement consacrée à la preuve du résultat suivant, complétant le théorème I.1 lorsque la surface d'explosion est analytique.

Théorème I.3. *Considérons $\Sigma = \{t - \psi(x) = 0\}$ avec $|\nabla\psi| < 1$, une variété analytique et de genre espace, de dimension n . Soit (x_0, t_0) un point sur Σ . Alors l'équation (NLCR) admet une infinité de solutions définies près de (x_0, t_0) et explosant précisément sur Σ .*

Ces solutions sont de la forme (SFR), c'est-à-dire

$$u(x, t) = \pm T^{-1} \left\{ u_0(X) + u_1(X) T + u_2(X) T^2 + u_3(X) T^3 + \sum_{\substack{j \geq 4 \\ 0 \leq k \leq j/4}} u_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\}.$$

Les coefficients u_0, u_1, \dots sont analytiques et uniquement déterminés par (1.8)-(1.11), la donnée de $u_{4,0}$ analytique et arbitraire, et la relation de récurrence (1.7).

La preuve va essentiellement reposer sur une deuxième réduction Fuchsienne qui diffère de celle utilisée dans la section précédente par l'introduction préalable de la nouvelle variable $Y = T \ln T$. On se ramène de cette manière à une équation Fuchsienne généralisée du type de celles étudiées par MM. S. Kichenassamy et W. Littman dans [6, 7]. Les résultats prouvés dans ces deux articles, par des méthodes de point fixe essentiellement, nous permettent alors de conclure.

Démonstration. Soit $u(X, T)$ une solution formelle de (NLCR). Nous avons vu dans la section (1.1) que u s'écrit nécessairement :

$$u = \frac{u_0}{T} + u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + u_{4,1} T^3 \ln T + f(X, T) T^3, \quad (2.1)$$

où $f(X, T)$ est une série formelle en T et $T \ln T$, et $u_0, u_1, u_2, u_3, u_{4,1}$ sont donnés par (1.8)-(1.11) et la relation de récurrence (1.7).

Définissons maintenant $Y = T \ln T$ et $N = T \partial_T + (T + Y) \partial_Y$. Alors f devient solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & (1 - |\nabla \psi|^2) N(N + 5)f + T \Delta \psi (3 u_{4,1} \ln T + 3 f + u_{4,1} + Nf) \\ & + 2 T \psi^i (3 u_{4,1i} \ln T + 3 \partial_{X_i} f + u_{4,1i} + N \partial_{X_i} f) - T (\Delta u_3 + \Delta u_{4,1} T \ln T + \Delta_X f T) \\ & = 2 T [(6 u_0 u_1 u_{4,1} \ln T + 6 u_0 u_1 f + 6 u_0 u_2 u_3 + 3 u_2^2 u_1) + \dots]. \end{aligned}$$

Remarquons que cette équation ne contient plus de termes de la forme $T^\alpha (\ln T)^\beta$ avec $\beta > \alpha$, et donc elle peut s'écrire (en n'utilisant plus que les variables T et Y) :

$$(1 - |\nabla \psi|^2) N(N + 5)f = T h_1[X, T, Y, f, Nf] + Y h_2[X, T, Y, f, Nf], \quad (2.2)$$

où h_1 et h_2 sont deux fonctions analytiques en X, T, Y, f, Nf et leurs dérivées spatiales.

Posons alors :

$$z = [f, Nf, T \partial_{X_1} f, \dots, T \partial_{X_n} f]^t.$$

Les composantes de z sont solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} Nz_1 = z_2, \\ (1 - |\nabla \psi|^2) (N + 5)z_2 = T h_1[X, T, Y, z_1, z_2] + Y h_2[X, T, Y, z_1, z_2], \\ Nz_{2+i} = (T \partial_T + (T + Y) \partial_Y) (T \partial_{X_i} f) \\ \quad = T \partial_{X_i} (Nf) + T \partial_{X_i} f = T \partial_{X_i} (z_1 + z_2). \end{array} \right.$$

Ce système d'équations est équivalent à :

$$(N + A)z = T \tilde{h}_1[X, T, Y, z] + Y \tilde{h}_2[X, T, Y, z], \quad (2.3)$$

où

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \\ 0 & 5 & \\ \hline & & O_n \end{array} \right].$$

Au vu de la définition de z et N , nous sommes intéressés seulement par les solutions de (2.3) vérifiant également :

$$\begin{aligned} z_1(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= f(X, 0, 0), \\ z_2(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= 0, \end{aligned}$$

et

$$z_{2+i}(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} = 0.$$

De cette façon, nous sommes amenés à résoudre le problème suivant :

$$(N + A)z = T \tilde{h}_1[X, T, Y, z] + Y \tilde{h}_2[X, T, Y, z], \quad (2.4)$$

$$z(X, 0, 0) = [f(X, 0, 0), 0, 0, \dots, 0]^t. \quad (2.5)$$

Notons que $z(X, 0, 0)$ appartient à $\text{Ker}(A)$ et donc (2.4)-(2.5) est connue pour admettre une unique solution (voir [6] et [7] pour plus de détails). Cette solution est alors analytique en ses arguments.

Réciproquement, toute solution de (2.4)-(2.5) vérifie :

$$\begin{aligned} Nz_1 &= z_2, \\ (1 - |\nabla\psi|^2)(N + 5)z_2 &= (1 - |\nabla\psi|^2)N(N + 5)z_1 \\ &= T h_1[X, T, Y, z_1, Nz_1] + Y h_2[X, T, Y, z_1, Nz_1], \end{aligned}$$

tandis que :

$$Nz_{2+i} = T \partial_{X_i}(z_1 + z_2). \quad (2.6)$$

De plus cette dernière égalité se traduit par :

$$\begin{aligned} (2.6) &\Leftrightarrow T z_{2+i,T} + (T + Y) z_{2+i,Y} = T \partial_i z_1 + T (T \partial_{X_i} z_{1,T} + (T + Y) \partial_{X_i} z_{1,Y}) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{z_{2+i,T} + (1 + \ln T) z_{2+i,Y}}_{\partial_T(z_{2+i}(X,T,Y))} = \underbrace{\partial_{X_i} z_1 + T (\partial_{X_i} z_{1,T} + (1 + \ln T) \partial_{X_i} z_{1,Y})}_{\partial_T(T \partial_{X_i} z_1(X,T,Y))} \\ &\Leftrightarrow z_{2+i} = T \partial_{X_i} z_1 + r(X) \quad \text{pour une certaine fonction } r(X). \end{aligned}$$

Étant donné la condition initiale (2.5) pour z , il est clair que $r(X)$ doit être identiquement égale à zéro. Ainsi toute solution de (2.4)-(2.5) est de la forme :

$$z = [z_1, Nz_1, T\partial_{X_1}z_1, \dots, T\partial_{X_n}z_1]^t,$$

où z_1 est solution de (2.2).

On conclut alors la preuve en posant $f = z_1$. En effet, puisque l'unique solution z de (2.4)-(2.5) est analytique en T , z_1 l'est également et coïncide donc localement avec sa série formelle. \square

2.2 Cas de l'équation cubique complexe NLCC

Nous allons prouver dans cette sous-section un théorème analogue concernant l'équation (NLCC). Ce résultat complète le théorème I.2 dans le cas où la surface d'explosion est analytique.

Théorème I.4. *Soit $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$, avec $|\nabla\psi(x)| < 1$, une variété analytique de dimension n , de genre espace, et (x_0, t_0) un point sur Σ . Alors l'équation (NLCC-bis) admet une infinité de solutions définies près de (x_0, t_0) et explosant exactement sur Σ . Ces solutions sont de la forme (SFC). C'est-à-dire :*

$$\frac{u_0(X)}{T} \left\{ 1 + v_1(X)T + v_2(X)T^2 + \sum_{\substack{j \geq 3 \\ 0 \leq k \leq j/3}} v_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\}.$$

Les coefficients u_0, v_1, v_2, \dots sont analytiques et uniquement déterminés par le choix de l'argument de u_0 , de la partie imaginaire de $v_{3,0}$ et de la partie réelle de $v_{4,0}$, des fonctions analytiques sur Σ .

Démonstration. Posons une nouvelle fois $Y = T \ln T$. Dans la section 1.2 nous avons conclu que toute solution formelle de (NLCC-bis) doit s'écrire :

$$u(X, T) = u_0(X) \left[\frac{1}{T} + v_1(X) + v_2(X)T + [v_{3,0}(X) + v_{3,1}(X) \ln T] T^2 + [v_{4,0}(X) + v_{4,1}(X) \ln T] T^3 + [w(X, T, Y) + \lambda(X) \ln T] T^4 \right], \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{cases} v_1 = a_1 + b_1, \\ v_2 = a_2 + b_2, \\ v_{3,0} = a_{3,0} + b_{3,0}, \\ v_{3,1} = b_{3,1}, \\ v_{4,0} = a_{4,0} + b_{4,0}, \\ v_{4,1} = a_{4,1} + b_{4,1}, \end{cases}$$

où les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ ont été trouvés plus tôt. En remplaçant dans la première équation (NLCC-bis), on montre que λ est uniquement déterminé et que en posant $N =$

$T\partial_T + (T + Y)\partial_Y$ et en écrivant $w = P + iQ$, P et Q doivent satisfaire les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} (N + 1)(N + 6)P = f_1(X) + T g_1[X, T, Y, P, Q] + Y h_1[X, T, Y, P, Q], \\ (N + 2)(N + 5)Q = f_2(X) + T g_2[X, T, Y, P, Q] + Y h_2[X, T, Y, P, Q], \end{cases} \quad (2.8)$$

pour certaines fonctions $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$ analytiques en leurs arguments.

Posons maintenant :

$$z = [P, NP, T \nabla_X P, Q, NQ, T \nabla_X Q]^t.$$

Alors, au vu du système (2.8) et de la définition de z , on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} Nz_1 = z_2, \\ (N + 7)z_2 + 6z_1 = f_1 + T g_1[T, Y, z] + Y h_1[T, Y, z], \\ Nz_{2+i} = T (\partial_{X_i} z_1 + \partial_{X_i} z_2), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\ Nz_{2+n+1} = z_{2+n+2}, \\ (N + 7)z_{2+n+2} + 10z_{2+n+1} = f_2 + T g_2[T, Y, z] + Y h_2[T, Y, z], \\ Nz_{2+n+2+i} = T (\partial_{X_i} z_{2+n+1} + \partial_{X_i} z_{2+n+2}), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \end{array} \right.$$

où on a oublié la dépendance par rapport à la variable d'espace X .

Ainsi, z vérifie une équation de la forme :

$$(N + A)z = f(X) + T g[X, T, Y, z] + Y h[X, T, Y, z], \quad (2.9)$$

pour certaines fonctions g et h analytiques en leurs arguments,

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -1 & & & & \\ 7 & 0 & & & & \\ \hline & & O_n & & & \\ \hline & & & 0 & -1 & \\ & & & 10 & 7 & \\ \hline & & & & & O_n \end{array} \right],$$

et F , le vecteur à $(2n + 4)$ composantes, défini par :

$$f(X) = [0, f_1(X), 0, \dots, 0, 0, f_2(X), 0, \dots, 0]^t.$$

La définition de z et de N nous amène à ne chercher que des solutions de (2.9) vérifiant aussi les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} z_1(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= P(X, 0, 0), \\ z_2(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= 0, \\ z_{2+i}(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= 0, & 1 \leq i \leq n, \\ z_{2+n+1}(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= Q(X, 0, 0), \\ z_{2+n+2}(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} &= 0, \end{aligned}$$

et

$$z_{2+n+2+i}(X, T, Y) \Big|_{T=Y=0} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

C'est-à-dire que nous cherchons à résoudre le problème :

$$(N + A)z = f(X) + T g[X, T, Y, z] + Y h[X, T, Y, z], \quad (2.10)$$

$$z(X, 0, 0) = [P(X, 0, 0), 0, \dots, 0, Q(X, 0, 0), 0, \dots, 0]^t. \quad (2.11)$$

Les valeurs propres de A sont 1, 2, 5, 6 avec multiplicité 1, et 0 avec multiplicité $2n$. De plus, $f(X)$ appartient à l'image de A . Ainsi le système (2.10)-(2.11) admet une unique solution (voir [6] et [7] pour plus de détails). Cette solution $z = z(X, T, Y)$ est analytique en ses arguments.

Réciproquement, soit z une solution de (2.10)-(2.11). Elle vérifie alors :

$$z_2 = Nz_1, \quad (2.12)$$

$$z_{2+i} = T \partial_{X_i} z_1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.13)$$

$$z_{2+n+2} = Nz_{2+n+1}, \quad (2.14)$$

$$z_{2+n+2+i} = T \partial_{X_i} z_{2+n+1}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.15)$$

En effet, montrons par exemple (2.13) : puisque z est solution de (2.10), on a :

$$Nz_1 = z_2,$$

et

$$Nz_{2+i} = T \partial_{X_i} (z_1 + z_2). \quad (2.16)$$

De plus

$$\begin{aligned} (2.16) &\Leftrightarrow T z_{2+i,T} + (T + Y) z_{2+i,Y} = T \partial_{X_i} z_1 + T (T \partial_{X_i} z_{1,T} + (T + Y) \partial_{X_i} z_{1,Y}) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{z_{2+i,T} + (1 + \ln T) z_{2+i,Y}}_{\partial_T(z_{2+i}(X,T,Y))} = \underbrace{\partial_{X_i} z_1 + T (\partial_{X_i} z_{1,T} + (1 + \ln T) \partial_{X_i} z_{1,Y})}_{\partial_T(T \partial_{X_i} z_1(X,T,Y))} \\ &\Leftrightarrow z_{2+i} = T \partial_{X_i} z_1 + r(X) \quad \text{pour une certaine fonction } r(X). \end{aligned}$$

Étant donné la condition initiale (2.11) pour z , il est clair que $r(X)$ est identiquement nulle. Une étude similaire nous conduit aux égalités (2.14) et (2.15).

Ainsi, z peut être écrit :

$$z = [z_1, Nz_1, T \nabla_X z_1, z_2, Nz_2, T \nabla_X z_2]^t,$$

où (z_1, z_2) est une solution de (2.8). Ce système admet, de fait, une unique solution. Il suffit maintenant de définir $(P, Q) = (z_1, z_2)$ pour achever la preuve. En effet, l'unique solution z de (2.10)-(2.11) étant analytique en T , c'est aussi le cas de z_1 et z_2 qui coïncident donc localement avec leurs séries formelles respectives. \square

Une fois encore, après avoir introduit la nouvelle variable $Y = T \ln T$, on a réduit l'équation de départ (NLCC-bis) sous la forme d'un système Fuchsien généralisé. On a pu ainsi s'appuyer sur les résultats d'existence de solutions analytiques pour de tels systèmes, prouvés par MM. S. Kichenassamy et W. Littman dans [6, 7].

3

Troisième réduction Fuchsienne et cas non-analytique

Sommaire

3.1	Cas de l'équation cubique réelle NLCR	33
3.2	Cas de l'équation cubique complexe NLCC	36

Afin de justifier totalement l'étude des séries formelles (SFR) et (SFC) entreprise dans les sections 1.1 et 1.2, il serait bon de prouver l'existence de solutions explosives pour (NLCR) et (NLCC-bis) admettant un tel développement près de leurs surfaces explosion, et ce, pour des surfaces d'explosions peu régulières. C'est ce que nous allons faire dans cette section, par le biais d'une troisième réduction Fuchsienne.

3.1 Cas de l'équation cubique réelle NLCR

Le principal résultat de cette sous-section est le théorème I.6 qui prouve l'existence de solutions explosives de l'équation (NLCR) admettant une surface d'explosion peu régulière et près de cette surface un développement similaire à (SFR). Pour atteindre un tel résultat, il nous faut déjà réduire (NLCR) sous la forme d'un système Fuchsien symétrique équivalent. Cette réduction s'exprime de la façon suivante :

Théorème I.5. *Il existe des matrices symétriques Q et A^j , $1 \leq j \leq n$, ainsi qu'une matrice constante A et une fonction f telles que, si l'on pose $t = (t_0, t_1)$ et*

$$Q(N + A)\vec{w} = t_0 A^j \partial_{X_j} \vec{w} + t \cdot f(t, X, \vec{w}), \quad (3.1)$$

alors la première composante w de \vec{w} engendre via

$$\begin{cases} \vec{w} = (w, w_{(0)}, w_{(i)}), \\ t_0 = T, \quad t_1 = T \ln T, \\ u = \frac{u_0}{t_0} + u_1 + u_2 t_0 + u_3 t_0^2 + u_{4,1} t_0^2 t_1 + w(t_0, t_1, X) t_0^3, \end{cases}$$

une solution singulière u de (NLCR) explosant pour $T = 0$, à condition que les $w_{(i)}$ soient pour $t_0 = t_1 = 0$ les composantes d'un gradient. Les coefficients $u_0, u_1, u_2, u_3, u_{4,1}$ sont ceux introduits dans la section (1.1), p. 19. De plus, si $\psi \in H^r(\mathbb{R}^n)$ alors Q et $A^j \in H_{loc}^{r-1}(\mathbb{R}^n)$, tandis que f envoie H^{r-1} dans H^{r-6} , si $r > \frac{n}{2} + 6$.

Démonstration. Posons $\gamma = 1 - |\nabla\psi|^2$. En suivant pas à pas le raisonnement tenu dans la section 3 de l'article [10] de M. S. Kichenassamy nous sommes amenés à définir Q, A^j, A et f de la façon suivante.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \gamma & \\ & & I_n \end{bmatrix}, \quad \text{et } A^j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\psi^j & e^j \\ 0 & {}^t e^j & 0 \end{bmatrix},$$

où $e^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n ;

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -6 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 2 \end{array} \right],$$

et enfin

$$f(t_0, t_1, X, \vec{w}) = [g_0(X, t_0, t_1, \vec{w}), g_1(X, t_0, t_1, \vec{w})],$$

avec

$$g_0(X, t_0, t_1, \vec{w}) = [0, b_0(X, t_0, t_1, \vec{w}), \partial_{X_1} u_{4,1}, \dots, \partial_{X_n} u_{4,1}]^t,$$

et

$$g_1(X, t_0, t_1, \vec{w}) = [0, b_1(X, t_0, t_1, \vec{w}), 3\partial_{X_1} u_{4,1}, \dots, 3\partial_{X_n} u_{4,1}]^t.$$

Les fonctions b_0 et b_1 sont définies par :

$$\begin{aligned} b_0(X, t_0, t_1, \vec{w}) = & 6u_1 u_2^2 + 6u_1^2 u_3 + 12u_0 u_2 u_3 + 12u_0 u_1 w \\ & + (2u_2^3 + 6u_0 u_3^2 + 12u_1 u_2 u_3 + 6u_1^2 w + 12u_0 u_2 w) t_0 \\ & + (6u_2^2 u_3 + 6u_1 u_3^2 + 12u_1 u_2 w + 12u_0 u_3 w) t_0^2 \\ & + (6u_2 u_3^2 + 12u_1 u_3 w + 6u_0 w^2 + 6u_2^2 w) t_0^3 \\ & + (2u_3^3 + 12u_2 u_3 w + 6u_1 w^2) t_0^4 + (6u_3^2 w + 6u_2 w^2) t_0^5 \\ & + 6u_3 w^2 t_0^6 + w^3 t_0^7, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 b_1(X, t_0, t_1, \vec{w}) = & -6\psi^i u_{4,1i} - 3\Delta\psi u_{4,1} + 12u_0 u_1 u_{4,1} + (6u_1^2 u_{4,1} \\
 & + 12u_0 u_2 u_{4,1}) t_0 + (12u_1 u_2 u_{4,1} + 12u_0 u_3 u_{4,1}) t_0^2 \\
 & + 6u_0 u_{4,1}^2 t_0^2 t_1 + (6u_2^2 u_{4,1} + 12u_1 u_3 u_{4,1} + 12u_0 u_{4,1} w) t_0^3 \\
 & + 6u_1 u_{4,1}^2 t_0^3 t_1 + (12u_2 u_3 u_{4,1} + 12u_1 u_{4,1} w) t_0^4 \\
 & + 6u_2 u_{4,1}^2 t_0^4 t_1 + (6u_3^2 u_{4,1} + 12u_2 u_{4,1} w) t_0^5 \\
 & + 6u_3 u_{4,1}^2 t_0^5 t_1 + 2u_{4,1}^3 t_0^5 t_1^2 + 12u_3 u_{4,1} w t_0^6 \\
 & + 12u_3 u_{4,1} w t_0^6 + 6u_{4,1}^2 w t_0^6 t_1 + 6u_{4,1} w^2 t_0^7.
 \end{aligned}$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u_0}{t_0} + u_1 + u_2 t_0 + u_3 t_0^2 + u_{4,1} t_0^2 t_1 + w(t_0, t_1, X) t_0^3, \\
 u_{(0)} &= -\frac{u_0}{t_0^2} + u_2 + 2u_3 t_0 + (t_0^2 + 3t_0 t_1) u_{4,1} + w_{(0)}(t_0, t_1, X) t_0^2, \\
 u_{(i)} &= \frac{u_{0i}}{t_0} + u_{1i} + u_{2i} t_0 + u_{3i} t_0^2 + w_{(i)}(t_0, t_1, X) t_0^2.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A partir de là, une vérification simple mais calculatoire montre que \vec{w} est solution de (3.1), et donc $\vec{u} := (u, u_{(0)}, u_{(i)})$ vérifie :

$$\begin{aligned}
 \partial_T u &= u_{(0)}, \\
 (1 - |\nabla\psi|^2) \partial_T u_{(0)} &= \sum_i (\partial_{X_i} u_{(i)} - 2\psi_i \partial_{X_i} u_{(0)}) - \Delta\psi u_{(0)} + 2u^3, \\
 \partial_T u_{(i)} &= \partial_{X_i} u_{(0)}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce système est le système symétrique hyperbolique du premier ordre usuellement associé à l'équation (NLCR) (dans les nouvelles variables X et T). Ainsi u est clairement solution de (NLCR) ce qui achève la preuve. \square

De cette façon, l'équation (NLCR) se ramène au problème Fuchsien généralisé (3.1). De telles équations ont été étudiées sous une forme plus générale par M. S. Kichenassamy dans [10] et sont connues pour admettre (sous des conditions supplémentaires) des solutions dans certains espaces de Sobolev.

Plus précisément, nous énonçons le résultat principal :

Théorème I.6. *Soit $\psi \in H^r$, $r > \frac{n}{2} + 1$, vérifiant $|\nabla\psi| < 1$ et définissons comme d'habitude $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$, la variété du genre espace et de dimension n correspondante.*

Si $r > \frac{n}{2} + 7$, on peut trouver une infinité de solutions u de (NLCR), explosant exactement sur Σ :

$$u = \frac{u_0}{T} + u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + u_{4,1} T^3 \ln T + w(X, T, T \ln T) T^3,$$

où $w(X, T, T \ln T)$ est continue en T , et prend ses valeurs dans H^{r-6} pour T petit et où les coefficients $u_0, u_1, u_2, u_3, u_{4,1}$ sont ceux introduits dans la section 1.1.

Démonstration. Observons tout d'abord que l'égalité (3.1) s'écrit aussi :

$$Q(N + A)\vec{w} = \sum_{k=0}^l t_k(B_k + f_k(t, \vec{w})), \quad (3.4)$$

pour $l = 1$,

$$B_k = \sum_{j=1}^n A_{jk} \partial_{X_j} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n A^j \partial_{X_j} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k = 1, \end{cases}$$

$$N = \sum_{i,j=0}^l m_{ij} t_j \frac{\partial}{\partial t_i} = t_0 \frac{\partial}{\partial t_0} + (t_0 + t_1) \frac{\partial}{\partial t_1},$$

et

$$f_k(t, \vec{w}) = g_k(X, t_0, t_1, \vec{w}), \quad k = 0, 1.$$

où nous nous servons des notations introduites dans la preuve du théorème I.5.

Écrite sous la forme de l'équation (3.4), l'équation (3.1) vérifie les hypothèses suivantes, introduites dans [10] :

- (H1) A est constante, tandis que la multiplication par Q , Q^{-1} et A_{jk} sont des opérateurs bornés dans H^s (à condition que $\psi \in H^r$, $r > n/2 + 6$ et $s = r - 6$) ; les valeurs propres de A ont une partie réelle positive (en fait $\text{Spec}(A) = \{0, 2, 5\}$) ;
- (H2) $f = (f_1, \dots, f_l)$ est une fonction C^∞ en w et définit une application de $\mathbb{R}^{l+1} \times H^s$ dans H^s (si $\psi \in H^r$, $r > n/2 + 6$ et $s = r - 6$) ; de plus, $f \equiv 0$ si $\|\vec{w}\|_{L^\infty}$ ou $|t|$ est suffisamment grand ;
- (H3) Il existe une fonction V , à valeur dans les matrices définies positives, qui commute avec Q et A_{jk} , vérifie $(u, VQAu) \geq 0$ et telle que (u, VQu) est équivalente à la norme L^2 . En outre, $VA_{jk} = A_{jk}$, et la multiplication par V est un opérateur borné dans H^s (on vérifie facilement que si $\psi \in H^r$, $r > n/2 + 6$ et $s = r - 6$, alors $V = \text{diag}(\gamma, \gamma, 1, 1, I_n, I_n)$ satisfait à ces conditions) ;
- (H4) Les valeurs propres de $M = (m_{ij})$ sont réelles et positives ; $M + {}^tM$ est définie et positive.

Remarque 3.1.1. La condition de décroissance dans (H2) peut être satisfaite en tronquant g_0 et g_1 pour les grandes valeurs de \vec{w} et de t . Puisque nous sommes uniquement intéressés par un voisinage immédiat de $T = Y = 0$, où \vec{w} reste petit, cette tronquation est raisonnable.

Ainsi, on peut appliquer directement les résultats prouvés dans la section 3 de [10]. La preuve de (I.6) s'ensuit directement. \square

3.2 Cas de l'équation cubique complexe NLCC

Cette sous-section est consacrée à la preuve d'un résultat analogue au théorème I.6 pour l'équation (NLCC-bis). Ce théorème s'énonce de la façon suivante :

Théorème I.7. Si $r > \frac{n}{2} + 7$, on peut trouver une infinité de solutions u de (NLCC-bis) explosant exactement sur Σ :

$$u(x, t) = u_0(X) \left[\frac{1}{T} + v_1(X) + v_2(X)T + [v_{3,0}(X) + v_{3,1}(X) \ln T] T^2 + [v_{4,0}(X) + v_{4,1}(X) \ln T] T^3 + [w(X, T, T \ln T) + \lambda(X) \ln T] T^4 \right],$$

où $w(X, T, T \ln T)$ est continue en T , à valeurs dans H^{r-6} pour T petit. Les coefficients u_0, v_1, v_2, \dots sont ceux introduits dans la section 1.2.

Comme dans le cas de la non-linéarité cubique réelle, nous allons commencer par réduire l'équation (NLCC-bis) à un système Fuchsien symétrique équivalent. Cette réduction est exprimée par le théorème suivant :

Théorème I.8. Il existe des matrices symétriques Q and A^j , $1 \leq j \leq n$, une matrice constante A et une fonction f telles que, si $t = (t_0, t_1)$ et

$$Q(N + A)\vec{w} = t_0 A^j \partial_{X_j} \vec{w} + t \cdot f(t, X, \vec{w}), \quad (3.5)$$

les deux premières composantes P et Q de \vec{w} engendrent via

$$\begin{cases} \vec{w} = (P, Q, P_{(0)}, Q_{(0)}, P_{(i)}, Q_{(i)}), \\ w = P + iQ, \\ t_0 = T, \quad t_1 = T \ln T, \\ u = u_0 \left\{ \frac{1}{t_0} + v_1 + v_2 t_0 + v_{3,0} t_0^2 + v_{3,1} t_0 t_1 + v_{4,0} t_0^3 + v_{4,1} t_0^2 t_1 + w(t_0, t_1, X) t_0^4 + \lambda t_0^3 t_1 \right\}, \end{cases}$$

une solution singulière u de (NLCC-bis) qui explose pour $T = 0$ à condition que les $\{w_{(i)}\}$ soient, pour $t_0 = t_1 = 0$, les composantes d'un gradient.

De plus, si $\psi \in H^r(\mathbb{R}^n)$ alors, Q et $A^j \in H_{loc}^{r-1}(\mathbb{R}^n)$, tandis que f envoie H^{r-1} dans H^{r-6} , si $r > \frac{n}{2} + 6$.

Démonstration. Posons $\gamma = 1 - |\nabla \psi(x)|^2$. Définissons aussi Q, A^j, A et f de la façon suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} I_2 & & \\ & \gamma I_2 & \\ & & I_{2n} \end{bmatrix},$$

$$A^j = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \hline & & -2\psi^j & 0 & e^j & 0 \\ & & 0 & -2\psi^j & 0 & e^j \\ \hline & & t e^j & 0 & & \\ & & 0 & t e^j & & \end{array} \right],$$

où e^j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Posons encore :

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc} 4 & 0 & -1 & 0 & & \\ 0 & 4 & 0 & -1 & & \\ -6 & 0 & 3 & 0 & & \\ 0 & -2 & 0 & 3 & & \\ \hline & & & & 3I_n & 0 \\ & & & & 0 & 3I_n \end{array} \right],$$

et enfin $f(t_0, t_1, X, \vec{w}) = (g_0(X, t_0, t_1, \vec{w}), g_1(X, t_0, t_1, \vec{w}))$, avec

$$g_0 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \operatorname{Re}\{b_0\} \\ \operatorname{Im}\{b_0\} \\ \operatorname{Re}\left\{\frac{\nabla_X u_0}{u_0}(w_0 + \lambda)\right\} \\ \operatorname{Im}\left\{\frac{\nabla_X u_0}{u_0}(w_0 + \lambda)\right\} \end{array} \right],$$

et

$$g_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \operatorname{Re}\{b_1\} \\ \operatorname{Im}\{b_1\} \\ 4 \operatorname{Re}\{\nabla_X \lambda\} \\ 4 \operatorname{Im}\{\nabla_X \lambda\} \end{array} \right].$$

Les fonctions b_0 et b_1 sont définies par :

$$\begin{aligned} u_0 b_0(X, t_0, t_1, \vec{w}) &= \Delta u_0 v_{4,0} + 2 u_{0i} v_{4,0}^i + u_0 \Delta v_{4,0} + u_0^i w_i - 2 \psi^i u_{0i} w_0 \\ &\quad - 2 \psi^i u_{0i} \lambda - 2 u_0 \psi^i \lambda_i - \Delta \psi u_0 w_0 - \Delta \psi u_0 \lambda \\ &\quad + h_0(t_0, t_1, w, \bar{w}, v_1, v_2, \dots, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots), \\ u_0 b_1(X, t_0, t_1, \vec{w}) &= \Delta u_0 v_{4,1} + 2 u_{0i} v_{4,1}^i + u_0 \Delta v_{4,1} - 2 \psi^i u_{0i} \lambda - 2 u_0 \psi^i \lambda_i \\ &\quad - 4 \Delta \psi u_0 \lambda + h_1(t_0, t_1, w, \bar{w}, v_1, v_2, \dots, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots), \end{aligned}$$

où h_0 et h_1 sont certaines fonctions polynomiales en leurs arguments.

Remarque 3.2.1. Ces quantités ont été trouvées en raisonnant pas à pas comme dans la section 3 de [10].

Posons finalement :

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 \left\{ \frac{1}{t_0} + v_1 + v_2 t_0 + v_{3,0} t_0^2 + v_{3,1} t_0 t_1 + v_{4,0} t_0^3 + v_{4,1} t_0^2 t_1 \right. \\
 &\quad \left. + w(t_0, t_1, X) t_0^4 + \lambda t_0^3 t_1 \right\}, \\
 u_{(0)} &= u_0 \left\{ -\frac{1}{t_0^2} + v_2 + 2 v_{3,0} t_0 + v_{3,1} (t_0 + 2 t_1) + 3 v_{4,0} t_0^2 + v_{4,1} (t_0^2 + 3 t_0 t_1) \right. \\
 &\quad \left. + w_{(0)}(t_0, t_1, X) t_0^3 + \lambda (t_0^3 + 4 t_0^2 t_1) \right\}, \\
 u_{(i)} &= \frac{u_{0i}}{t_0} + (u_{0i} v_1 + u_0 v_{1i}) + (u_{0i} v_2 + u_0 v_{2i}) t_0 + (u_{0i} v_{3,0} + u_0 v_{3,0i}) t_0^2 \\
 &\quad + (u_{0i} v_{3,1} + u_0 v_{3,1i}) t_0 t_1 + (u_{0i} v_{4,0} + u_0 v_{4,0i}) t_0^3 + (u_{0i} v_{4,1} + u_0 v_{4,1i}) t_0^2 t_1 \\
 &\quad + u_0 w_{(i)}(t_0, t_1, X) t_0^3,
 \end{aligned}$$

où $w_{(0)} = P_{(0)} + i Q_{(0)}$ et $w_{(j)} = P_{(j)} + i Q_{(j)}$.

A partir de là, on voit facilement que si \vec{w} est solution de (3.5), alors $\vec{u} := (u, u_{(0)}, u_{(i)})$ satisfait :

$$\begin{aligned}
 \partial_T u &= u_{(0)}, \\
 (1 - |\nabla \psi|^2) \partial_T u_{(0)} &= \sum_i (\partial_{X_i} u_{(i)} - 2 \psi_i \partial_{X_i} u_{(0)}) - \Delta \psi u_{(0)} + 2 u |u|^2, \\
 \partial_T u_{(i)} &= \partial_{X_i} u_{(0)}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ce système est le système symétrique hyperbolique du premier ordre habituellement associé à l'équation (NLCC-bis) (en les nouvelles variables X et T). Ainsi u est clairement une solution de (NLCC-bis) ce qui conclut la preuve. \square

Enfin, on vérifie aisément que l'équation (3.5), écrite sous la forme du système (3.4), satisfait aux hypothèses (H1), (H2), (H3) et (H4) introduites dans la section 3.1 et, de ce fait, on peut une fois encore se servir des résultats prouvés dans [10]. Le théorème I.7 en découle immédiatement.

Conclusion

Nous venons de prouver l'existence de solutions explosives pour les équations cubiques réelles et complexes (NLCR) et (NLCC) et ce, même pour des surfaces d'explosion peu régulières.

Comme nous allons le voir dans la prochaine partie, le caractère constructif des méthodes de réduction Fuchsienne employées offre de nombreux avantages. En effet, remarquons que, non seulement nous démontrons l'existence de telles solutions explosives, mais que nous précisons également leurs développements asymptotiques près de leurs surfaces d'explosion, et donnons même, au moins pour des surfaces d'explosion analytiques, la forme explicite de ces solutions.

Dans la partie II, nous allons mettre à profit ces informations afin de répondre à certaines questions liées à l'étude de l'équation cubique réelle (NLCR).

Conclusion

Deuxième partie

Applications

Introduction

Comme annoncé, cette partie va être entièrement consacrée à l'étude de problèmes connexes à l'équation cubique réelle (NLCR). Pour cela, nous ferons largement usage des résultats prouvés dans la partie I.

Nous allons nous intéresser successivement aux questions suivantes :

1. D'abord, dans le chapitre 1, on s'intéresse au comportement asymptotique quand α tend vers zéro des intégrales :

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{B_\alpha} [u_t^2 + |\nabla u|^2 - u^4](x_0 + x, t_0 - \alpha) dx,$$

où u est une solution explosive de l'équation (NLCR) et (x_0, t_0) un point de sa surface d'explosion. Cette étude est motivée par le fait que l'intégrale d'énergie (IE), qui a servi de modèle pour définir les intégrales $E(\alpha)$, ne dépend pas du temps ;

2. Le chapitre 2 est dédié à une question soulevée en 1984 par Haïm Brezis, à savoir : déterminer, pour une solution donnée u de l'équation cubique (NLCR) avec condition de Dirichlet sur un ouvert borné régulier, la borne inférieure $q_0(u)$ des exposants q tels que la norme L^q de u explose en un temps fini. En fait, il est à la fois commode et naturel de considérer le problème plus général suivant, où on a autorisé l'existence d'un "bruit" peu régulier au second membre :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 2u^3 + F(x, t), & x \in B_1 \text{ et } -1 < t < 0, \\ u = \phi(x, t), & x \in \partial B_1 \text{ et } -1 < t < 0, \\ (u, u_t) = (f(x), g(x)), & \text{pour } t = -1, \end{cases} \quad (\text{NLCRF})$$

On apporte ici des éléments de réponse à la fois dans les cas où la surface d'explosion et le reste F sont réguliers et dans des cas où ces quantités sont beaucoup moins régulières ;

3. Enfin, le chapitre 3 traite de l'aspect numérique de l'étude des solutions explosives de l'équation cubique réelle (NLCR). On y introduit d'abord le schéma numérique suivant :

$$U_i^{j+1} = \lambda^2 U_{i+1}^j + 2(1 - \lambda^2)U_i^j + \lambda^2 U_{i-1}^j - U_i^{j-1} + 2h^2 U_i^{j3}, \quad (\text{SchNu})$$

avant d'étudier sa consistance, puis sa stabilité et sa convergence. On s'attache également à proposer un schéma numérique alternatif près de l'explosion ainsi qu'à donner des critères numériques pour détecter cette explosion.

Les résultats que nous allons énoncer tout au long de cette partie sont, pour la plupart, des applications quasi-immédiates de ceux prouvés dans la partie I.

1

Non-focalisation de l'énergie

Sommaire

1.1	Présentation du problème	47
1.2	Résultats	47

1.1 Présentation du problème

Considérons $(x, t) \mapsto u(x, t)$ une solution explosive de l'équation aux dérivées partielles (NLCR). Alors on a vu dans la partie I que la surface d'explosion associée Σ est nécessairement de genre espace. Supposons, en outre, que cette surface soit de classe C^∞ , d'équation $t - \psi(x) = 0$. Alors ψ est de classe C^∞ et vérifie $|\nabla\psi| < 1$. Supposons également que $\psi(0) = 0$.

Nous savons que, si u est de classe C^2 et que pour tout temps $t \geq 0$, $u(\cdot, t)$ est supporté dans un compact, alors l'"intégrale d'énergie" :

$$\frac{1}{2} \int [u_t^2 + |\nabla u|^2 - u^4](x, t) dx, \tag{IE}$$

est finie et indépendante du temps t . Un problème intéressant est celui de l'étude du comportement de :

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{B_\alpha} [u_t^2 + |\nabla u|^2 - u^4](x, -\alpha) dx,$$

l'intégrale d'énergie de u au temps $-\alpha$ sur B_α , la boule de centre 0 et de rayon α (voir figure 1.1).

1.2 Résultats

Le théorème suivant résume le comportement de $E(\alpha)$ pour α petit.

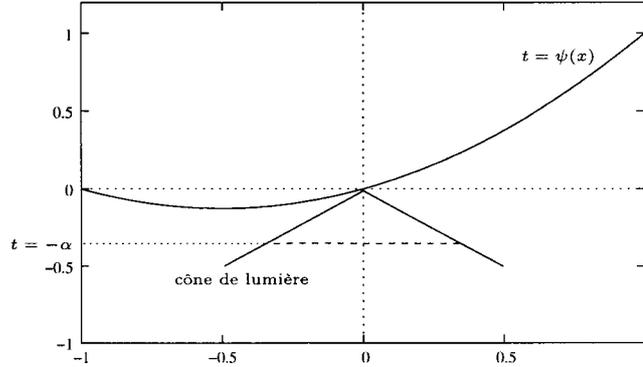


FIG. 1.1 – Domaine d'intégration.

Théorème II.1. *Quand α tend vers 0 :*

- i) $E(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{n-4})$;
- ii) si $\nabla\psi(0) = 0$, alors $E(\alpha) \sim -\frac{1}{3} \text{vol}(B_1) \Delta\psi(0) \alpha^{n-3}$;
- iii) si la Hessienne de ψ s'annule également à l'origine, alors $E(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{n-1})$.

Remarque 1.2.1. *Notons que si $(x = 0, t = 0)$ est le premier point d'explosion, alors ψ présente nécessairement un minimum en ce point et donc on se trouve dans la situation ii) ou iii).*

Démonstration. Posons d'abord :

$$e(x, t) = u_t^2(x, t) + u_i u^i(x, t) - u^4(x, t).$$

Nous avons montré dans les sections 1.1, 2.1 et 3.1 que, si $X = x$ et $T = t - \psi(x)$ alors u s'écrit nécessairement sous la forme :

$$u = \frac{u_0}{T} + u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + u_{4,1} T^3 \ln T + w(X, T, T \ln T) T^3,$$

où les coefficients $u_0, u_1, u_2 \dots$ sont donnés explicitement par (1.8)-(1.11) et la relation de récurrence (1.7) et où w est de classe C^∞ en espace pour T petit et est continue en T .

Alors, en remplaçant dans l'expression de $e(x, t)$, on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned} e(x, t) &= \frac{2 u_0^2 \psi_i \psi^i}{T^4} + \frac{2 \psi^i u_{0i} - 4 u_0^3 u_1}{T^3} \\ &+ \frac{u_{0i} u_0^i + 2 \psi^i u_{1i} u_0 - 2 \psi^i \psi_i u_0 u_2 - 2 u_0 u_2 - 6 u_0^2 u_1^2 - 4 u_0^3 u_2}{T^2} \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Substituons maintenant à u_0, u_1, u_2 dans (1.1) leurs expressions explicites données par (1.8)-(1.10) ; on obtient alors (pour $s \in B_1$ et $\alpha > 0$) :

$$e(\alpha s, -\alpha) = \frac{2 M^2 (1 - M^2)}{(1 + \psi^i(0) s_i)^4 \alpha^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^3}\right),$$

où $M = \sqrt{1 - |\nabla\psi(0)|^2}$.

En effet :

$$\begin{aligned} T|_{(x,t)=(\alpha \mathbf{s}, -\alpha)} &= -\alpha - \psi(\alpha \mathbf{s}), \\ &= -\alpha - \alpha \mathbf{s} \cdot \nabla\psi(0) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad \text{puisque } \psi(0) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_0(\alpha \mathbf{s}) &= \sqrt{1 - |\nabla\psi(\alpha \mathbf{s})|^2}, \\ &= \sqrt{1 - |\nabla\psi(0)|^2} + \mathcal{O}(\alpha), \\ &= M + \mathcal{O}(\alpha), \end{aligned}$$

tandis que les autres coefficients u_{0i} , u_1, \dots sont de classe C^∞ et donc sont bornés uniformément quand T tend vers zéro.

Alors le terme le plus singulier dans $e(x, t)$ est $\frac{2u_0^2\psi_i\psi^i}{T^4}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \frac{\alpha^n}{2} \int_{B_1} e(\alpha \mathbf{s}, -\alpha) ds \\ &= \alpha^{n-4} \int_{B_1} \frac{M^2(1 - M^2)}{(1 + \psi^i(0)s_i)^4} ds + \mathcal{O}(\alpha^{n-3}), \end{aligned}$$

ce qui prouve *i*).

Supposons maintenant que $\nabla\psi(0) = 0$. Alors, pour $(x, t) = (\alpha \mathbf{s}, -\alpha)$, on a les estimations suivantes :

$$\begin{cases} T|_{(x,t)=(\alpha \mathbf{s}, -\alpha)} = -\alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 \psi^{ij}(0) s_i s_j + \mathcal{O}(\alpha^3), \\ \psi^i(x) = \alpha \psi^{ij} s_j + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ \vdots \end{cases}$$

Ainsi les premiers termes du développement de u ont le comportement suivant (en se servant des égalités (1.8)-(1.10)) :

$$\begin{cases} u_0(x) = 1 + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ u_{0i}(x) = \mathcal{O}(\alpha), \\ u_1(x) = -\frac{\Delta\psi(0)}{6} + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ u_2(x) = -\frac{\Delta\psi(0)^2}{36} + \frac{\psi^{ij}(0)\psi_{ij}(0)}{6} + \mathcal{O}(\alpha). \end{cases}$$

Donc $e(x, t)$ s'écrit, pour α petit :

$$\begin{aligned} e(x, t) &= -\frac{2\Delta\psi(0)}{3\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^2} \left[2\psi^{ij}(0)\psi_i^k(0) s_j s_k + \Delta\psi(0) \psi^{ij}(0) s_i s_j \right. \\ &\quad \left. - \psi^{ij}(0)\psi_{ij}(0) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

et en intégrant :

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \frac{\alpha^n}{2} \int_{B_1} e(\alpha \mathbf{s}, -\alpha) \, ds \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{vol}(B_1) \Delta\psi(0) \alpha^{n-3} + C \alpha^{n-2} + \mathcal{O}(\alpha^{n-1}), \end{aligned}$$

où $C = 0$ quand la Hessienne de ψ s'annule à l'origine. Cela achève donc la preuve des points *ii*) et *iii*). \square

Remarque 1.2.2. *Remarquons que l'on a également montré que, dans le cas où $\nabla\psi(0) = 0$, $\Delta\psi(0) = 0$ mais $|\nabla^2\psi(0)| \neq 0$, on a l'estimation $E(\alpha) = \mathcal{O}(\alpha^{n-2})$, pour α proche de 0.*

Le théorème II.1 montre que si ψ est assez plate au premier point d'explosion ou que $n \geq 4$ alors l'"énergie" ne se focalise pas en ce point ; par exemple, si $n = 3$ et $\nabla\psi = 0$, $E(\alpha)$ reste bornée.

De plus, dans le cas où ψ est régulière et admet un extremum local à l'origine, on peut prédire la valeur de $\Delta\psi(0)$ en se servant uniquement d'intégrales sur le cône de lumière "rétrograde" ; c'est relativement étonnant en le sens où le cône de lumière ne rencontre la surface d'explosion qu'en un unique point.

2

Comportement des normes L^p à l'explosion

Sommaire

2.1	Conditions initiales et seconds membres réguliers	51
2.2	Conditions initiales et seconds membres moins réguliers .	54
2.2.1	Utilisation de séries tronquées	54
2.2.2	Utilisation de séries tronquées inverses	59
2.3	Conclusion	62

Tout au long de cette section, nous allons mettre en application les résultats prouvés dans la partie I, dans le but d'étudier l'explosion de solutions de problèmes du type (NLCRF) :

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u &= 2u^3 + F(x, t), & x \in B_1 \text{ et } -1 < t < 0, & \text{(NLCRF-a)} \\u &= \phi(x, t), & x \in \partial B_1 \text{ et } -1 < t < 0, & \text{(NLCRF-b)} \\(u, u_t) &= (f(x), g(x)), & \text{pour } t = -1. & \text{(NLCRF-c)}\end{aligned}$$

Plus particulièrement, on s'intéresse à q_0 , la borne inférieure de l'ensemble des $q > 0$ pour lesquels la solution u d'un tel problème explose dans L^q ; on étudie également la façon dont cette borne inférieure dépend des différentes fonctions f , g , ϕ et F .

2.1 Conditions initiales et seconds membres réguliers

Dans cette sous-section, nous allons nous intéresser au comportement de certaines solutions du système (NLCRF) dans le cas où la surface d'explosion ainsi que les conditions initiales et le second membre sont réguliers. Plus particulièrement, nous étudierons le comportement de leurs normes L^p pour des temps proches du temps d'explosion.

Le résultat principal s'exprime de la façon suivante :

Théorème II.2. *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe un problème de la forme (NLCRF) avec certaines fonctions f, g, F, φ de classe C^∞ pour lequel $q_0 = n/2m$. Il existe aussi des problèmes pour lesquels u explose uniformément sur un sous-ensemble de B_1 d'intérieur non vide et pour lesquels $q_0 = 0$.*

Démonstration. Fixons d'abord un entier $m \geq 1$ et choisissons $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que :

$$|\nabla\psi| < 1 \quad \text{et} \quad \psi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} |x|^{2m}.$$

On construit alors une solution u du problème (NLCRF) qui explose sur $\{t = \psi(x)\}$.

La surface d'explosion est régulière de classe C^∞ donc, pour tout $r > 0$, ψ est dans H^r . Ainsi, le théorème I.6 prédit l'existence de solutions explosives de l'équation $\square u = 2u^3$ explosant précisément sur $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$.

Rappelons que, si $T = t - \psi(x)$, ces solutions s'écrivent de la façon suivante :

$$u = \frac{u_0}{T} + u_1 + u_2 T + u_3 T^2 + u_{4,1} T^3 \ln T + w(X, T, T \ln T) T^3,$$

où les coefficients u_0, u_1, u_2, u_3 sont donnés par (1.8)-(1.11), $u_{4,1}$ est défini par la relation de récurrence (1.7) et où w est continue en T et C^∞ en espace (au moins pour T petit).

Remarque 2.1.1. *Notons que si $v : (x, t) \mapsto v(x, t)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles $\square u = 2u^3$, c'est aussi le cas pour $v^{(\eta)} : (x, t) \mapsto v^{(\eta)}(x, t) = \eta v(\eta x, \eta t)$.*

Ainsi, quitte à effectuer une telle transformation, on peut toujours supposer que la fonction u définie ci-dessus est bien définie dans $B_1 \times [-1, 0)$. Par conséquent, u est solution de (NLCRF) avec $F \equiv 0$ et certaines fonctions φ, f et g de classe C^∞ .

Étudions maintenant le comportement de T, u_0, u_1, u_2, \dots pour $t = 0$ et $x \rightarrow 0$. D'un côté :

$$T = t - \psi(x) \sim -|x|^{2m}, \quad \text{et} \quad u_0(x) \sim 1,$$

et d'un autre côté, les autres coefficients u_0, u_1, u_2, \dots sont de classe C^∞ . En effet, on a par exemple :

$$u_0 = \sqrt{1 - |\nabla\psi|^2},$$

$$\text{et} \quad u_1 = \frac{\psi^{ij} \psi_i \psi_j}{3(1 - \psi^i \psi_i)^{3/2}} - \frac{\Delta\psi}{6\sqrt{1 - \psi^i \psi_i}},$$

où ψ est de classe C^∞ et vérifie $|\nabla\psi| < 1$ dans B_1 . De la même façon, en examinant les expressions explicites (1.10) et (1.11) pour u_2 et u_3 ainsi que la relation de récurrence (1.7) permettant de calculer $u_{4,1}$, on prouve facilement la régularité des autres coefficients.

Ces différents coefficients sont donc bornés quand x est proche de l'origine. Puisque w est elle aussi régulière en espace pour T petit, on peut maintenant déduire le comportement de u près de son premier point d'explosion $(0, 0)$:

$$u(x, 0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -|x|^{-2m}.$$

Par conséquent :

$$u(\cdot, 0) \in L^q(B_1) \Leftrightarrow q < \frac{n}{2m}.$$

La borne inférieure q_0 de l'ensemble des exposants q tels que la norme L^q de u explose est donc :

$$q_0 = \frac{n}{2m}.$$

De façon à prouver la deuxième assertion du théorème II.2, supposons maintenant que ψ est C^∞ , que $|\nabla\psi| < 1$ et que $\psi \equiv 0$ sur un sous-ensemble strict de B_1 d'intérieur non vide. Soit $K \subset B_1$ un compact tel que $\psi \equiv 0$ sur K .

Le théorème I.6 nous prédit une fois encore l'existence de solutions pour $\square u = 2u^3$, explosant sur $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$. Par ailleurs, le théorème I.1 prévoit que les seules solutions formelles de $\square u = 2u^3$ s'écrivent sous la forme :

$$T^{-1} \left\{ u_0(X) + u_1(X)T + u_2(X)T^2 + u_3(X)T^3 + \sum_{\substack{j \geq 4 \\ 0 \leq k \leq j/4}} u_{j,k}(X) T^j (\ln T)^k \right\},$$

où $X = x$ et $T = t - \psi(x)$.

Le coefficient $u_{4,0}$ est arbitraire et les autres coefficients u_0, u_1, u_2, \dots sont donnés par (1.8)-(1.11), et la relation de récurrence (1.7). Choisissons par exemple $u_{4,0} \equiv 0$; alors, puisque $\psi \equiv 0$ sur K , on obtient grâce à (1.8)-(1.11) et (1.7) :

$$u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad u_1(x) = u_2(x) = \dots = u_{j,k}(x) = \dots = 0, \quad \text{pour tout } x \text{ dans } K.$$

De cette façon, si t est proche de zéro :

$$u(x, t) = \frac{1}{t} \quad \text{pour } x \in K.$$

De plus, u est solution de (NLCRF) pour $F \equiv 0$ et pour certaines fonctions φ, f et g de classe C^∞ (pour les mêmes raisons que précédemment). Donc, pour tout $q > 0$ et $t \in [-1, 0)$ suffisamment petit :

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^q}^q &= \int_{B_1} |u(x, t)|^q dx \\ &\geq \int_K |u(x, t)|^q dx \\ &\geq \frac{1}{|t|^q} \text{vol}(K) \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty \end{aligned}$$

Par conséquent, u explose dans $L^q(B_1)$ pour tout $q > 0$ i. e. $q_0 = 0$. Cela conclut la preuve du théorème II.2. \square

Il apparaît donc que la forme de la surface d'explosion (suivant qu'elle est plus ou moins plate au premier point d'explosion) influe énormément sur la valeur de la borne inférieure q_0 . On a donc construit des problèmes du type (NLCRF) qui admettent des

solutions explosant sur des surfaces très régulières en leur minimum (premier temps d'explosion), et pour lesquelles :

$$0 \leq q_0 = \frac{n}{2m} \leq \frac{n}{2}.$$

Dans la suite nous allons voir que, si on s'autorise des surfaces d'explosion moins régulières, on peut exhiber des problèmes de la forme (NLCRF) admettant des solutions pour lesquelles q_0 est aussi proche qu'on le veut de n , la dimension d'espace.

2.2 Conditions initiales et seconds membres moins réguliers

Dans cette section, nous allons nous pencher sur le comportement à l'explosion de la norme L^p de certaines solutions de système du type (NLCRF) pour des conditions initiales et un second membre peu réguliers. Les principaux résultats sont énoncés sous la forme des théorèmes II.3, II.4 et II.5. L'idée directrice est l'étude de solutions du problème (NLCRF) obtenues en tronquant la série formelle (SFR). De plus, dans la sous-section 2.2.2, nous améliorons sensiblement ces résultats en étudiant des solutions construites comme des séries tronquées inverses.

2.2.1 Utilisation de séries tronquées

Commençons par deux définitions :

Définition 2.2.1. *Dans la suite, nous dirons que “ u est une solution classique” de l'équation (NLCRF-a) si u satisfait aux conditions suivantes :*

- ◇ $u \in \bigcap_{k=0}^2 C^k([-1, 0]; H^{2-k}(B_1))$;
- ◇ u^3 est bornée dans $L^2(B_1)$;
- ◇ $F \in C([-1, 0]; L^2(B_1))$;
- ◇ l'équation (NLCRF-a) est vérifiée au sens des distributions ;
- ◇ u a une énergie finie.

Définition 2.2.2. *Nous dirons également que “ u est une solution H^1 ” de l'équation (NLCRF-a) si u vérifie :*

- ◇ $u \in \bigcap_{k=0}^1 C^k([-1, 0]; H^{1-k}(B_1))$;
- ◇ u^3 , Δu et u_{tt} sont uniformément bornés dans $L^1(B_1)$;
- ◇ $F \in C([-1, 0]; L^1 \cap H^{-1}(B_1))$;
- ◇ u est solution de (NLCRF-a).

Les résultats sont alors les suivants :

Théorème II.3. *Si $\epsilon \in (0, 1)$ et $n > \max(8 - 4\epsilon, 12 - 12\epsilon)$, il existe un problème de la forme (NLCRF) admettant une solution classique telle que $q_0 = n/(1 + \epsilon)$; de plus, F est régulière sur la surface d'explosion privée de l'origine.*

Théorème II.4. Si $\epsilon \in (0, 1)$ et $n > 6 + 2\epsilon$, il existe aussi un problème de la forme (NLCRF) ayant une solution classique bornée pour tout $t < 0$, et telle que $q_0 = n/(1 + \epsilon)$.

Théorème II.5. Si $\epsilon \in (0, 1)$ et $n > 4 + 2\epsilon$, il existe un problème de la forme (NLCRF) admettant une solution H^1 bornée en espace pour tout $t < 0$, et pour laquelle $q_0 = n/(1 + \epsilon)$; cette solution explose dans H^2 si $n = 5$ et $\epsilon < 1/4$.

Dans la suite, nous allons prouver en détail les théorèmes II.4 et II.5 tandis que nous allons seulement esquisser une preuve du théorème II.3.

Preuve des théorèmes II.4 et II.5. Soit $\epsilon \in (0, 1)$. Nous allons exhiber à la fois des solutions classiques et H^1 d'un problème explicite de la forme (NLCRF). En effet, soit $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^{\epsilon+1}/(\epsilon + 1)$; alors ψ est C^1 et vérifie $|\nabla\psi| < 1$ sur B_1 . Définissons maintenant :

$$u(x, t) = \frac{u_0(x)}{T},$$

où $u_0(x) = \sqrt{1 - \psi^i \psi_i(x)}$. u est construite à partir de la série (SFR) étudiée dans la section 1.1; elle est continue sur $B_1 \times [-1, 0)$ et de classe C^∞ sur $B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0)$. Par conséquent, u est bornée en espace pour tout $t < 0$.

Posons aussi :

$$\begin{cases} F(x, t) = \square u - 2u^3, & \forall (x, t) \in B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0), \\ \varphi(x, t) = u(x, t), & \forall (x, t) \in \partial B_1 \times (-1, 0), \\ f(x) = u(x, -1), & \forall x \in B_1, \\ g(x) = u_t(x, -1), & \forall x \in B_1 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier en détail le comportement de u et F pour x proche de 0. On a, pour tout $(x, t) \in B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0)$:

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= \frac{u_0 \psi_i}{T^2} + \frac{u_{0i}}{T}, \\ u_{ij}(x, t) &= \frac{2u_0 \psi_i \psi_j}{T^3} + \frac{u_{0i} \psi_j + u_{0j} \psi_i}{T^2} + \frac{u_{0ij}}{T}, \\ u_t(x, t) &= -\frac{u_0}{T^2}, \\ u_{ti}(x, t) &= -\frac{2u_0 \psi_i}{T^3} - \frac{u_{0i}}{T^2}, \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{2u_0}{T^3}, \end{aligned}$$

tandis que :

$$F(x, t) = -\frac{2\psi^i u_{0i} + \Delta\psi u_0}{T^2} - \frac{\Delta u_0}{T}.$$

Remarque 2.2.1. Les quantités ci-dessus sont bien définies et continues pour $(x, t) \in B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0]$.

On a aussi quand $x \rightarrow 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{\epsilon+1}), \\ \psi_i(x) = \mathcal{O}(|x|^\epsilon), \\ \psi_{ij}(x) = \mathcal{O}(|x|^{\epsilon-1}), \\ \psi_{ijk}(x) = \mathcal{O}(|x|^{\epsilon-2}), \\ u_0(x) = \sqrt{1 - \psi^k \psi_k} = \mathcal{O}(1), \\ u_{0i}(x) = -\frac{\psi_i^k \psi_k}{\sqrt{1 - \psi^k \psi_k}} = \mathcal{O}(|x|^{2\epsilon-1}), \\ u_{0ij}(x) = -\frac{\psi_i^k \psi_k \psi_j^l \psi_l(x)}{(1 - \psi^l \psi_l)^{3/2}} - \frac{\psi_i^k \psi_{jk} + \psi_{ij}^k \psi_k}{\sqrt{1 - \psi^k \psi_k}} = \mathcal{O}(|x|^{2\epsilon-2}). \end{array} \right.$$

En notant que $T = t - \psi(x) = \mathcal{O}(1)$ si $t < 0$, et $\mathcal{O}(|x|^{\epsilon+1})$ si $t = 0$, on peut facilement compléter le tableau suivant qui résume le comportement de u et F pour x proche de 0.

	$t = 0$	$t < 0$
$u(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-1})$	$\mathcal{O}(1)$
$u_i(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-2})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-1})$
$u_{ij}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-2})$
$u_t(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-2\epsilon-2})$	$\mathcal{O}(1)$
$u_{ti}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-2\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-1})$
$u_{tt}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-3\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(1)$
$F(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-2})$

En fait, la première ligne de ce tableau est "exacte" dans le sens où quand x tend vers 0,

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) \sim -(1 + \epsilon) |x|^{-\epsilon-1}, \\ u(x, t < 0) \sim \frac{1}{t}. \end{array} \right.$$

Ainsi on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u(\cdot, 0)\|_{L^q} < +\infty \Leftrightarrow q < \frac{n}{1 + \epsilon}, \\ \|u(\cdot, t < 0)\|_{L^q} < +\infty, \quad \forall q > 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire : u explose dans $L^q(B_1) \Leftrightarrow q \geq n/(1 + \epsilon)$ i. e. $q_0 = n/(1 + \epsilon)$.

Pour achever la preuve, il reste à analyser pour quelles valeurs de n u est une solution classique ou une solution H^1 de l'équation (NLCRF).

Par exemple, si $n > 4 - 4\epsilon$ alors pour tout $-1 < t < 0$, $F(\cdot, t) \in L^2(B_1)$, tandis que $n > 6 + 2\epsilon$ implique $F(\cdot, 0) \in L^2(B_1)$. Alors, en se servant des propriétés de régularité

de F sur $B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0]$ ainsi que du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on conclut :

$$n > 6 + 2\epsilon \Rightarrow F \in C([-1, 0]; L^2(B_1)).$$

Les autres contraintes requises pour que u soit une solution classique (cf définition 2.2.1) sont aussi satisfaites pour $n > 6 + 2\epsilon$. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner attentivement ces conditions au regard de la table précédente.

Cela termine la preuve du théorème II.4 puisque nous venons de prouver que si $n > 6 + 2\epsilon$, alors u est une solution classique de (NLCRF).

Un argument similaire en tous points nous permet d'affirmer que si $n > 4 + 2\epsilon$, alors u est solution H^1 du problème étudié (la contrainte la plus restrictive est encore une fois la condition de régularité sur F).

Enfin, pour achever la preuve du théorème II.5, observons que si $n = 5$ et $\epsilon < 1/4$ alors $\nabla^2 u(\cdot, 0) \notin L^2(B_1)$ (et ce, à cause de l'"exactitude" de l'estimation de $u_{ij}(x, 0)$ pour x près de 0). Ainsi $u(\cdot, 0)$ n'appartient pas à $H^2(B_1)$ mais appartient à $H^1(B_1)$. \square

Esquissons maintenant la preuve du théorème II.3 :

Preuve du théorème II.3. L'idée principale de la démonstration est très similaire à celle employée plus haut. La seule différence réside dans le fait que u est construite à partir de la série (SFR) en la tronquant après *trois* termes. De ce fait, F est régulière sur la surface d'explosion privée de l'origine et l'explosion de la solution apparaît comme moins artificielle.

Soit $\epsilon \in (0, 1)$, $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^{\epsilon+1}/(\epsilon+1)$ (ψ est C^1 et vérifie $|\nabla\psi| < 1$ sur B_1) et définissons :

$$u(x, t) = \frac{u_0(x)}{T} + u_1(x) + u_2(x) T,$$

où les coefficients u_0, u_1, u_2 sont donnés par (1.8)-(1.10).

Au regard de la régularité de ψ , il est clair que u est bien définie et continue sur $B_1 \setminus \{0\} \times [-1, 0]$ tandis qu'elle est de classe C^∞ sur $B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0)$. De plus $u(\cdot, -1)$ est C^∞ sur $B_1 \setminus \{0\}$.

Remarque 2.2.2. *A cause du manque de régularité de ψ et des coefficients u_1 et u_2 , $u(\cdot, t)$ n'est pas bornée en espace, pour chaque $t < 0$.*

Posons maintenant :

$$\begin{cases} F(x, t) = \square u - 2u^3, & \forall (x, t) \in B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0), \\ \varphi(x, t) = u(x, t), & \forall (x, t) \in \partial B_1 \times (-1, 0), \\ f(x) = u(x, -1), & \forall x \in B_1 \setminus \{0\}, \\ g(x) = u_t(x, -1), & \forall x \in B_1 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Remarquons aussi que :

$$\begin{aligned} F(x, t) = & -\Delta u_1 - 2u_1^3 + \Delta\psi u_2 + 2\psi^i u_{2i} - 12u_0 u_1 u_2 \\ & - (\Delta u_2 + 6u_0 u_2^2 + 6u_1^2 u_2) T - 6u_1 u_2^2 T^2 - 2u_2^3 T^3, \end{aligned}$$

donc $\forall x \neq 0$, $F(x, \cdot)$ est de classe C^∞ ; F est régulière sur la surface d'explosion privée de l'origine.

Comme dans le cas précédent, nous allons maintenant nous intéresser au comportement de u et F pour x proche de 0. Une étude attentive du comportement de ψ , u_0 , u_1 , u_2 et de leurs dérivées spatiales nous amène à remplir la table suivante, résumant nos résultats.

	$t = 0$	$t < 0$
$u(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-1})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-2})$
$u_i(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-2})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-3})$
$u_{ij}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-4})$
$u_t(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-2\epsilon-2})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-2})$
$u_{ti}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-2\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-3})$
$u_{tt}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-3\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(1)$
$F(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{2\epsilon-4}) + \mathcal{O}(x ^{6\epsilon-6})$

Encore une fois, la première ligne de ce tableau est "exacte"; on en conclut :

$$q_0 = n/(1 + \epsilon).$$

Remarque 2.2.3. On a aussi, pour tout $t < 0$:

$$u(\cdot, t) \in L^q \Leftrightarrow q < \frac{n}{2 - 2\epsilon}.$$

Comme dans la preuve des théorèmes II.4 et II.5, il reste à montrer que si $n > \max(8 - 4\epsilon, 12 - 12\epsilon)$ alors u est une solution classique du problème (NLCRF) avec F , φ , f et g introduits plus haut. Pour parvenir à cette conclusion, la méthode est la même que celle déjà utilisée *i. e.* se servir des estimations précédentes de u et F , ainsi que du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Remarque 2.2.4. On peut aussi remarquer que si n est impair, $\epsilon < 1/3$ et $\frac{n}{2} - 2 + 2\epsilon \leq k < \frac{n}{2} - 1 - \epsilon$, alors $u(\cdot, t) \notin H^k$ pour tout $t < 0$ tandis que $u(\cdot, 0) \in H^k$; la solution u devient instantanément plus régulière au temps d'explosion qu'auparavant. En effet, on peut aller un peu plus loin et donner des estimations "exactes" des dérivées spatiales de u quand x est proche de 0

$$\begin{cases} \nabla_x^k u(\cdot, t < 0) = \mathcal{O}(|x|^{2\epsilon-2-k}), \\ \nabla_x^k u(\cdot, 0) = \mathcal{O}(|x|^{-\epsilon-1-k}). \end{cases}$$

□

Les preuves des théorèmes II.3, II.4 et II.5 sont toutes basées sur la construction de solutions extraites de la série (SFR), en gardant plus ou moins de termes. On peut remarquer deux choses :

- i) Augmenter le nombre de termes dans la série tronquée présente l'avantage de régulariser $(x, t) \mapsto F(x, t)$ de façon à ce qu'elle reste continue sur la surface d'explosion $\{t = \psi(x)\}$ et que l'explosion de la solution n'apparaisse pas artificielle ;
- ii) Dans le même temps, plus la série tronquée contient de termes, moins elle est régulière pour $t < 0$. Ce phénomène est dû au manque de régularité de ψ qui se traduit par un manque de régularité des coefficients de la série : u_0, u_1, u_2, \dots . En fait, dès que la série contient deux termes ou plus, des singularités apparaissent pour $(x = 0, t < 0)$. Une façon de prévenir l'émergence de nouvelles singularités est d'étudier d'autres formes de solutions comme nous allons le faire dans la sous-section suivante.

2.2.2 Utilisation de séries tronquées inverses

On améliore sérieusement les résultats précédents en énonçant :

Théorème II.6. *Si $\epsilon \in (0, 1)$ et $n > 6 - 6\epsilon$, il existe un problème de la forme (NLCRF) admettant une solution classique bornée pour tout $t < 0$, et telle que $q_0 = n/(1 + \epsilon)$; de plus, F est régulière sur $B_1 \times [-1, 0]$.*

Théorème II.7. *Si $\epsilon \in (0, 1)$ et $n > \max(4 - 6\epsilon, 3 - 3\epsilon)$, il existe un problème de la forme (NLCRF) admettant une solution H^1 bornée pour tout $t < 0$, et telle que $q_0 = n/(1 + \epsilon)$; de plus, F est régulière sur $B_1 \times [-1, 0]$.*

Le théorème II.6 englobe les théorèmes II.3 et II.4 tandis que le théorème II.7 est une amélioration du théorème II.5. Un des avantages de ces nouveaux résultats sur les précédents est qu'ils s'appliquent en dimension d'espace $n = 2$ et 3 qui ont un grand sens physique.

L'idée est d'étudier des solutions de la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{v(x, t)},$$

où $v(x, t)$ est une série tronquée dont les coefficients sont choisis de telle sorte que les premiers termes du développement de $u(x, t)$ en puissances de T coïncide avec les premiers termes de la série (SFR). En particulier, si les quatre premiers termes sont identiques, nous sommes conduits aux résultats énoncés.

Preuve des théorèmes II.6 et II.7. Soit $\epsilon \in (0, 1)$ et $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^{\epsilon+1}/(\epsilon + 1)$ (ψ est C^1 et vérifie $|\nabla\psi| < 1$ sur B_1). On prouve à la fois les théorèmes II.6 et II.7 en étudiant la série tronquée inverse suivante :

$$u(x, t) = \frac{1}{v_0(x)T + v_1(x)T^2 + v_2(x)T^3 + v_3(x)T^4},$$

où v_0, v_1, v_2, v_3 sont choisis de telle sorte que $u(x, t)$ s'écrive près de $T = 0$:

$$u(x, t) = u_0(x)/T + u_1(x) + u_2(x)T + u_3(x)T^2 + \mathcal{O}(T^3), \quad (2.1)$$

où u_0, u_1, u_2 et u_3 sont les quatre premiers coefficients de la série (SFR) *i. e.* u_0, u_1, u_2 et u_3 sont donnés explicitement par (1.8)-(1.11).

Pour que (2.1) soit satisfaite, il faut nécessairement :

$$\begin{cases} v_0 = \frac{1}{u_0}, \\ v_1 = -\frac{u_1}{u_0^2}, \\ v_2 = \frac{u_1^2}{u_0^3} - \frac{u_2}{u_0^2}, \\ v_3 = -\frac{u_1^3}{u_0^4} + \frac{2u_1u_2}{u_0^3} - \frac{u_3}{u_0^2}. \end{cases}$$

A cause du manque de régularité de ψ , les coefficients u_1, u_2, u_3 admettent une singularité en $x = 0$, tandis que $u_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in B_1$ (rappelons que $|\nabla\psi| < 1$). Par conséquent, v_0, v_1, v_2 et v_3 sont de classe C^∞ sur $B_1 \setminus \{0\}$. De plus, $\forall x \neq 0, v_0(x) > 0$ et pour cette raison $v(x, t) = T(v_0(x) + v_1(x)T + v_2(x)T^2 + v_3(x)T^3) \neq 0$ si T est suffisamment petit ; $u(x, t)$ est ainsi bien définie à cet endroit.

Grâce à une transformation similaire à celle exposée dans la remarque 2.1.1, on peut toujours supposer que u est bien définie sur $B_1 \setminus \{0\} \times [-1, 0)$. Enfin, on remarque que u est continue sur $\overline{B_1} \setminus \{0\} \times [-1, 0]$, C^∞ sur $B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0)$ et $u(\cdot, -1)$ est C^∞ sur $B_1 \setminus \{0\}$.

Posons maintenant :

$$\begin{cases} F(x, t) = \square u - 2u^3, & \forall (x, t) \in B_1 \setminus \{0\} \times (-1, 0), \\ \varphi(x, t) = u(x, t), & \forall (x, t) \in \partial B_1 \times (-1, 0), \\ f(x) = u(x, -1), & \forall x \in B_1 \setminus \{0\}, \\ g(x) = u_t(x, -1), & \forall x \in B_1 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Observons que, puisque les quatre premiers termes du développement de u près de $T = 0$ sont les mêmes que ceux de la série (SFR), on a (les coefficients u_0, u_1, u_2 et u_3 sont construits dans ce but précis) :

$$F(x, t) = \mathcal{O}(T), \quad \text{quand } T \rightarrow 0.$$

Ainsi F est régulière sur la surface d'explosion privée de l'origine.

Les prochaines étapes de la preuve sont :

- i) Exprimer de façon explicite les coefficients v_0, v_1, v_2, v_3 et leurs dérivées spatiales en terme de ψ et de ses dérivées spatiales, étudier leur comportement pour x proche de 0 puis trouver le comportement de $v, \nabla_X v, \nabla_X^2 v, v_T, \nabla_X v_T$ et v_{TT} (suivant que $t < 0$ ou $t = 0$) ;
- ii) Écrire $u, \nabla_X u, \nabla_X^2 u, u_T, \nabla_X u_T, u_{TT}$ en terme de $v, \nabla_X v, \nabla_X^2 v, v_T, \nabla_X v_T, v_{TT}$ et en déduire des estimations des première quantités quand x tend vers 0 (suivant que $t < 0$ ou $t = 0$) ;
- iii) Exprimer $u, \nabla_x u, \nabla_x^2 u, u_t, \nabla_x u_t, u_{tt}$ en terme de $u, \nabla_X u, \nabla_X^2 u, u_T, \nabla_X u_T, u_{TT}, \nabla_x \psi, \nabla_x^2 \psi$ et en conclure le comportement des premières quantités pour x proche de 0 (suivant que $t < 0$ ou $t = 0$) ;

iv) Développer F en terme de ψ et de ses dérivées spatiales et en déduire son comportement quand $x \rightarrow 0$ (suivant que $t < 0$ ou $t = 0$).

Ces étapes s'effectuent au prix de calculs à la fois très longs et très automatiques ; il suffit de remplacer, dans les expressions étudiées, chaque terme par son estimation obtenue à l'étape précédente. La table suivante résume nos résultats.

	$t = 0$	$t < 0$
$u(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-1})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+3})$
$u_i(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-2})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+2})$
$u_{ij}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+1})$
$u_t(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-2\epsilon-2})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+3})$
$u_{ti}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-2\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+2})$
$u_{tt}(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{-3\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+3})$
$F(x, t)$	$\mathcal{O}(x ^{3\epsilon-3})$	$\mathcal{O}(x ^{-\epsilon+1})$

Une des premières choses que nous pouvons remarquer est que, pour tout $t < 0$, $u(\cdot, t)$, $u_i(\cdot, t)$, $u_{ij}(\cdot, t)$, $u_t(\cdot, t)$, $u_{ti}(\cdot, t)$, $u_{tt}(\cdot, t)$ et $F(\cdot, t)$ sont bien définies et continues en $x = 0$ (rappelons que $0 < \epsilon < 1$). Par conséquent, ces quantités deviennent continues sur $B_1 \times [-1, 0)$ et pour tout $t < 0$, $u(\cdot, t)$ est bornée. Notons aussi que F est continue au point $(0, 0)$ et est donc régulière sur la totalité de la surface d'explosion.

Afin de finir la démonstration, il faut encore étudier pour quelles valeurs de n , u est une solution classique de (NLCRF) avec F , φ , f , g définies plus haut, et opur quels n c'est une solution H^1 .

Par exemple, si $n > 2 - 2\epsilon$ alors pour tout $-1 < t < 0$, $F(\cdot, t) \in L^2(B_1)$, tandis que $n > 6 - 6\epsilon$ implique $F(\cdot, 0) \in L^2(B_1)$. Alors, en se servant des propriétés de régularité de F sur $B_1 \times (-1, 0]$, ainsi que du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on conclut que :

$$n > 6 - 6\epsilon \Rightarrow F \in C([-1, 0]; L^2(B_1)).$$

En fait, les autres conditions requises pour que u soit une solution classique (cf définition 2.2.1) sont aussi vérifiées pour $n > 6 - 6\epsilon$. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner en détail ces conditions au vu du tableau précédent.

Cela achève la preuve du théorème II.6, puisque nous venons juste de montrer que si $n > 6 - 6\epsilon$, alors u est une solution classique de (NLCRF).

Un argument similaire en tous points nous permet de conclure également que si $n > \max(4 - 6\epsilon, 3 - 3\epsilon)$, alors u est une solution H^1 du problème étudié (la contrainte la plus restrictive est une fois encore la condition de régularité sur F). Cela termine la démonstration du théorème II.7. \square

Remarque 2.2.5. Remarquons que dans les démonstrations précédentes, nous n'avons été confronté à aucun des problèmes de régularité (régularité de F sur la surface d'explosion, régularité de u avant l'explosion) rencontrés dans les preuves des théorèmes II.3-II.5.

2.3 Conclusion

Pour résumer, nous avons prouvé les résultats suivants :

1. Si le "bruit" F est identiquement nul et que la surface d'explosion de la solution u du problème (NLCRF) est régulière et admet un minimum global d'ordre $2m$, alors $q_0(u) = n/2m$;
2. Pour $n \geq 6$ (resp. $n \geq 4$) et $\epsilon \in (0, 1)$ on peut trouver des problèmes (NLCRF) présentant des "bruits" F non-nuls mais réguliers sur $B_1 \times [-1, 0]$, et admettant des solutions classiques (resp. H^1) u bornées pour tout $t < 0$ et pour lesquelles $q_0(u) = n/(1 + \epsilon)$.

Afin de replacer ces résultats dans leur contexte, rappelons que pour des "bruits" $F \equiv 0$ et $n \leq 3$, on a $q_0(u) \leq n$ si u est solution H^1 du problème de Dirichlet (NLCRF). En effet l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permet d'exclure l'explosion dans H^1 si u reste bornée dans L^q pour un $q > n$ et donc il faut nécessairement $q_0(u) \leq n$.

On a encore, non seulement fait un large usage des résultats d'existence de solutions explosives prouvés dans la partie I, mais nous nous sommes aussi beaucoup inspirés de la forme de ces solutions pour exhiber des solutions exactes de problèmes approchés (NLCRF) pour lesquelles on a pu calculer explicitement la borne inférieure q_0 .

3

Étude numérique de l'équation cubique réelle NLCR

Sommaire

3.1	Choix du schéma numérique classique	64
3.2	Domaine de validité du schéma numérique classique . . .	66
3.2.1	Consistance	66
3.2.2	Stabilité et convergence	69
3.3	Des schémas adaptés près de l'explosion	76
3.3.1	Construction de tels schémas numériques	76
3.3.2	Étude partielle des schémas inverses introduits	78
3.4	Choix du schéma le plus approprié	82
3.4.1	Condition numérique de non-explosion	82
3.4.2	Étude numérique complète	84
3.5	Résultats numériques	86
3.5.1	Tests pour des surfaces d'explosion connues	86
3.5.2	Autres résultats	89
1	Bilan	97
2	Perspectives	97

Le calcul numérique apparaît, au premier abord, comme un outil bien mal adapté à l'étude du comportement près de l'explosion de solutions d'équations aux dérivées partielles telles que (NLCR) ou (NLCC). En effet, d'une part le phénomène d'explosion ne peut être que mal rendu par l'ordinateur pour lequel il n'existe que des valeurs finies (et alors comment faire la distinction entre "la solution explose" et "la solution prend de grandes valeurs" ?); et d'autre part il paraît naturel de penser que plus la solution va être grande et plus les erreurs introduites dans le schéma numérique vont l'être également (et c'est ce qui va se produire effectivement).

Nous nous proposons ici de résoudre en partie ces difficultés en nous appuyant sur les résultats théoriques prouvés précédemment (et notamment ceux concernant la forme de

la solution près de l'explosion) et de construire un protocole numérique tenant compte de l'explosion éventuelle de la solution.

La démarche va être la suivante :

1. Tout d'abord, nous allons étudier, pour des solutions explosives ou non, le schéma numérique classique d'ordre deux canoniquement associé au D'Alembertien. Nous allons en fait prouver que ce schéma admet une limite de validité directement liée à la distance à la surface d'explosion théorique éventuelle de la solution ; ce schéma est très inapproprié près de l'explosion ;
2. Ensuite nous proposerons une stratégie permettant de produire des schémas numériques (dits "inverses") qui nous semblent plus adaptés au phénomène d'explosion ;
3. Enfin, nous nous intéresserons au problème de déterminer numériquement la distance à l'explosion. Le but est bien sûr de pouvoir décider, à un instant donné, quel schéma numérique est le plus approprié : le schéma classique ou bien le schéma inverse. Ici encore, les résultats obtenus ne nous satisfont pas totalement. Malgré tout, ils sont suffisants pour faire le choix entre les deux schémas et donc pour nous permettre de donner un algorithme numérique complet.

Au cours de cette partie, nous allons être amenés à écrire de nombreuses inégalités faisant intervenir différentes constantes ; afin de simplifier l'écriture, nous désignerons, s'il n'y a pas d'ambiguïté, certaines constantes différentes par le même nom.

3.1 Choix du schéma numérique classique

Soient $m < M$ deux réels et considérons le problème de Cauchy suivant (en dimension 1 d'espace) :

$$\square u = 2u^3, \tag{3.1}$$

$$(u, u_t) = (f_0(x), f_1(x)), \quad \text{pour } x \in [m, M] \text{ et } t = 0. \tag{3.2}$$

On se propose d'étudier numériquement les solutions d'un tel problème, là où cela est possible. Notons $\Lambda_{[m,M]}$ la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ s'appuyant sur le segment $[m, M]$ sur laquelle nous allons pouvoir mener cette étude ; nous préciserons ce domaine dès que nous aurons introduit le schéma numérique choisi.

Avant d'aller plus avant, il nous faut maintenant introduire une discrétisation de l'espace et un schéma numérique associé à (3.1). Soit $m = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = M$ une discrétisation régulière de $[m, M]$:

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad x_i - x_{i-1} = k = \frac{M - m}{N},$$

et posons $t_j = j h$, $j \geq -1$, où k le pas en espace et h celui en temps sont reliés par la relation $\frac{h}{k} = \lambda$.

Choisissons les approximations suivantes pour les dérivées secondes de u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{k^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{h^2}.$$

La formule de Taylor au deuxième ordre autour de (x_i, t_j) nous motive dans ce choix.

On cherche à approcher $u(x_i, t_j)$ par U_i^j ; ainsi nous sommes conduits au schéma numérique suivant :

$$U_i^{j+1} = \lambda^2 U_{i+1}^j + 2(1 - \lambda^2)U_i^j + \lambda^2 U_{i-1}^j - U_i^{j-1} + 2h^2 (U_i^j)^3, \quad (\text{SchNu})$$

bien défini pour $1 \leq j \leq N/2$ et $j \leq i \leq N - j$.

Les vecteurs $(U_i^{-1})_{1 \leq i \leq N-1}$, $(U_i^0)_{0 \leq i \leq N}$ et $(U_i^1)_{1 \leq i \leq N-1}$ sont calculés à partir des conditions initiales (3.2) par le biais des relations

$$f_0(x_i) = u(x_i, 0) = U_i^0, \quad (3.3)$$

$$f_1(x_i) = u_t(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, t_{-1})}{2h} \approx \frac{U_i^1 - U_i^{-1}}{2h}. \quad (3.4)$$

et de la relation (SchNu) pour $j = 0$.

Le domaine de dépendance numérique associé au schéma (SchNu) est représenté par la figure 3.1.

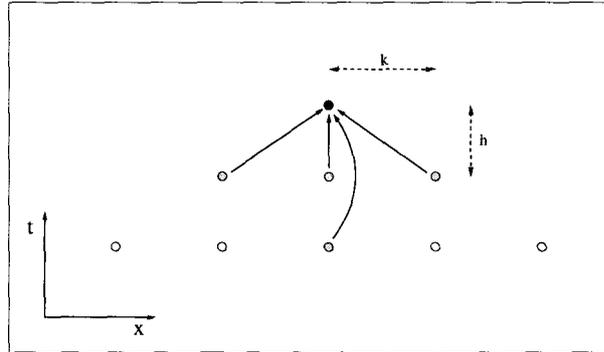


FIG. 3.1 – Domaine de dépendance numérique.

Ainsi, s'il converge, ce schéma va nous fournir une approximation de u en des points répartis régulièrement à l'intérieur d'un demi-cône rétrograde de base $[m, M]$ et de pente λ ; donc $\Lambda_{[m, M]}$ est la portion de cône suivante :

$$\Lambda_{[m, M]} = \left\{ (x, \lambda t), 0 \leq t \leq \frac{M - m}{2} - t, m + t \leq x \leq M - t \right\}. \quad (3.5)$$

Remarque 3.1.1. *Remarquons ici que, puisque le domaine de dépendance (et d'influence) d'un point $p_0 = (x_0, t_0)$ quelconque est égal à l'intérieur du cône de lumière de sommet p_0 , on s'attend à ce que $\Lambda_{[m, M]}$ soit inclus dans l'intérieur du demi-cône rétrograde de base $[m, M]$ i. e. $\lambda \leq 1$. Cette constatation se reflète, pour le cas linéaire, dans la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Levy (CFL).*

3.2 Domaine de validité du schéma numérique classique

3.2.1 Consistance

Deux notions étroitement liées à la convergence d'un schéma numérique donné sont les notions de consistance et de stabilité. La consistance exprime si l'erreur effectuée, en remplaçant l'équation aux dérivées partielles par le schéma numérique, est "petite" ou pas. La stabilité, elle, mesure l'influence d'une petite perturbation des données du schéma sur sa solution. Afin de préciser ces notions, introduisons la définition suivante, inspirée de la notion de consistance telle qu'elle est introduite dans [5] :

Définition 3.2.1. *Nous dirons que la méthode (SchNu) est consistante dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ avec l'équation aux dérivées partielles (3.1) et d'ordre $p > 0$ si pour toute solution u de (3.1),*

$$R(h) = \frac{1}{h^2} \max_{(x_i, t_j) \in \Lambda_{[m, M]}} r(x_i, t_j) = \mathcal{O}(h^p),$$

où $r(x, t)$, l'erreur de consistance au point (x, t) , est définie par :

$$r(x, t) = \left| u(x, t+h) - \lambda^2 u(x+k, t) - 2(1-\lambda^2)u(x, t) - \lambda^2 u(x-k, t) + u(x, t-h) - 2h^2 u(x, t)^3 \right|,$$

où $\lambda = h/k$.

Choisissons maintenant u une solution de (3.1). Alors on peut remplacer u^3 par le d'Alembertien de u ; l'erreur de consistance au point (x, t) s'écrit donc également :

$$r(x, t) = h^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{u(x, t+h) - 2u(x, t) + u(x, t-h)}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{u(x+k, t) - 2u(x, t) + u(x-k, t)}{k^2} \right|.$$

Donnons maintenant un ordre de grandeur pour cette erreur. La formule de Taylor à l'ordre 4 autour de (x, t) nous donne :

$$\frac{u(x, t+h) - 2u(x, t) + u(x, t-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) + \mathcal{O}(h^4),$$

et

$$\frac{u(x+k, t) - 2u(x, t) + u(x-k, t)}{k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + \mathcal{O}(k^4).$$

Ainsi :

$$r(x, t) = \frac{h^4}{12} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \right| + \mathcal{O}(h^6), \quad (3.6)$$

et donc si les dérivées successives de u sont bornées dans $\Lambda_{[m, M]}$, on obtient l'ordre de grandeur suivant :

$$R(h) = \frac{1}{h^2} \mathcal{O}(h^4) = \mathcal{O}(h^2). \quad (3.7)$$

Dans ce cas, le schéma (SchNu) est donc consistant d'ordre 2.

Malheureusement, il se peut que des solutions de (3.1) explosent en un temps fini et donc dans $\Lambda_{[m,M]}$. Dans ce cas, ni u , ni ses dérivées successives ne restent bornées, et pour des points (x, t) proches de la surface d'explosion l'erreur de consistance $r(x, t)$ tend à être très grande. En effet, supposons que notre solution u explose sur la surface $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ (rappelons au passage qu'une telle surface d'explosion est nécessairement du genre espace), avec $\psi \in H^r(\mathbb{R})$, $r > 21/2$. Alors l'étude théorique menée dans les sections 1.1, 2.1 et 3.1 montre qu'une telle solution s'écrit pour t proche de $\psi(x)$ (et donc $T = t - \psi(x)$ petit) :

$$u(x, t) = \frac{a_0(X)}{T} + a_1(X) + a_2(X)T + a_3(X)T^2 + a_{4,1}(X)T^3 \ln T + w(X, T, T \ln T)T^3 \quad (3.8)$$

$$= \frac{a_0(x)}{t - \psi(x)} + v(x, t), \quad (3.9)$$

où $w(X, T, T \ln T)$ est continue en T , et prend ses valeurs dans H^{r-6} pour T petit et où les coefficients $a_0, a_1, a_2, a_3, a_{4,1}$ sont ceux introduits dans la section sous les noms u_0, u_1, u_2, u_3 et $u_{4,1}$. On va supposer en outre que cette solution est de classe C^4 . 1.1.

Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, l'erreur de consistance s'écrit :

$$r(x, t) = \frac{h^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \left[\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t+hs) + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t-hs) \right] ds \quad (3.10)$$

$$- \frac{h^2 k^2}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x+ks, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x-ks, t) \right] ds.$$

Le reste v n'est pas complètement régulier à cause de la présence de termes logarithmiques. Malgré tout, ces termes vont au pire faire apparaître des termes en $\frac{1}{t-\psi(x)}$ et $\ln(t-\psi(x))$ dans $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t)$ et $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t)$, qui, comme nous allons le voir, vont être négligeables devant la contribution de la partie explosive de la solution : $u_{\text{explo}}(x, t) = a_0(x)/(t-\psi(x))$.

On a en effet :

$$\frac{\partial^4 u_{\text{explo}}}{\partial t^4}(x, t) = \frac{24 a_0(x)}{[t - \psi(x)]^5},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_{\text{explo}}}{\partial x^4}(x, t) &= \frac{24 a_0(x) \psi'(x)^4}{[t - \psi(x)]^5} + \frac{12 \psi'(x)^2 (2 a_0'(x) \psi'(x) + 3 a_0(x) \psi''(x))}{[t - \psi(x)]^4} \\ &+ \frac{12 \psi'(x)^2 a_0''(x) + 6 \psi''(x)^2 a_0(x) + 8 \psi'(x) (3 \psi''(x) a_0'(x) + \psi^{(3)}(x) a_0(x))}{[t - \psi(x)]^3} \\ &+ \frac{4 \psi'(x) a_0^{(3)}(x) + 6 \psi''(x) a_0''(x) + 4 \psi^{(3)}(x) a_0'(x) + \psi^{(4)}(x) a_0(x)}{[t - \psi(x)]^2} \\ &+ \frac{a_0^{(4)}(x)}{t - \psi(x)}. \end{aligned}$$

Alors, pour $t = \psi(x) + lh$, on obtient en estimant chacun des termes dans (3.10) :

$$r(x, t) = \frac{c_{-1}(x)}{h l^5} + \frac{c_0(x)}{l^4} + \frac{h c_1(x)}{l^3} + \frac{h^2 c_2(x)}{l^2} + \frac{h^3 c_3(x)}{l} + h^4 c_4(x) |\ln(lh)| + \mathcal{O}(h^4), \quad (3.11)$$

où c_{-1}, c_0, c_1, \dots sont certaines fonctions régulières de x .

Ainsi, comme nous l'avions annoncé, il apparaît que près de la surface d'explosion (l petit), l'erreur de consistance devient elle-même très grande. Par conséquent, le schéma (SchNu) ne sera pas consistant partout. Limitons donc le domaine de résolution numérique afin de contrôler ces erreurs de consistance. Supposons que l'on se limite à $\{t < \psi(x) - Lh\}$. Alors :

$$\begin{aligned} R(h) &= \frac{1}{h^2} \max_{\substack{(x_i, t_j) \in \Lambda_{[m, M]} \\ t_j < \psi(x_i) - Lh}} r(x_i, t_j) \\ &\leq \frac{C_{-3}}{h^3 L^5} + \frac{C_{-2}}{h^2 L^4} + \frac{C_{-1}}{h L^3} + \frac{C_0}{L^2} + \frac{C_1 h}{L} + C_2 h^2 |\ln(Lh)| + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

On en déduit aisément le résultat suivant :

Théorème II.8. *Pour tout $\delta > 0$, le schéma (SchNu) est d'ordre 2 dans la région :*

$$\Lambda_{[m, M]} \cap \{t \leq \psi(x) - \delta\}$$

Par contre, il est d'ordre 1 dans la région :

$$\Lambda_{[m, M]} \cap \{t \leq \psi(x) - \delta h^{\frac{1}{5}}\}.$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$.

La condition $t \leq \psi(x) - \delta$ se traduit par le fait que l'on applique le schéma numérique dans un compact fixe dont l'intersection avec la surface d'explosion est vide. De fait les dérivées successives de u sont bornées et on est ramené au cas (3.7). Cela prouve la première assertion.

Notons tout de même que, si on se limite à $t \leq \psi(x) - \delta$, alors $t_j \leq \psi(x_i) - Lh$ avec $L = \delta/h$, et donc l'inégalité (3.12) devient :

$$R(h) \leq \frac{C_{-3} h^2}{\delta^5} + \frac{C_{-2} h^2}{\delta^4} + \frac{C_{-1} h^2}{\delta^3} + \frac{C_0 h^2}{\delta^2} + \frac{C_1 h^2}{\delta} + C_2 h^2 |\ln \delta| + \mathcal{O}(h^2).$$

On a ainsi une idée du comportement de l'erreur de consistance commise quand on se rapproche de la surface d'explosion.

De la même manière $t \leq \psi(x) - \delta h^{\frac{1}{5}}$ se traduit par $t_j \leq \psi(x_i) - Lh$ avec $L = \delta/h^{\frac{4}{5}}$. L'inégalité (3.12) devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} R(h) &\leq \frac{C_{-3} h}{\delta^5} + \frac{C_{-2} h^{6/5}}{\delta^4} + \frac{C_{-1} h^{7/5}}{\delta^3} + \frac{C_0 h^{8/5}}{\delta^2} + \frac{C_1 h^{9/5}}{\delta} + C_2 h^2 |\ln(\delta h^{1/5})| + \mathcal{O}(h^2), \\ &\leq \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

Cela prouve la deuxième partie du théorème. □

Nous allons étudier maintenant la stabilité et la convergence du schéma précédent.

3.2.2 Stabilité et convergence

Il est plus simple ici, pour étudier la stabilité et la convergence du schéma numérique (SchNu), de considérer ce schéma, non plus sur $\Lambda_{[m,M]}$, mais sur un domaine de la forme $\mathbb{R} \times [0, T]$, avec des conditions initiales à support compact inclus dans $[m, M]$. C'est pourquoi on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \square u = 2u^3, \\ (u, u_t) = (f_0(x), f_1(x)), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

On suppose que les données initiales f_0 et f_1 sont à supports compacts inclus dans $[m, M]$.

Soit $u = u(x, t)$ solution de ce problème de Cauchy et soit $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$ la surface d'explosion associée.

Pour chaque pas $k = 1/N > 0$ et chaque paramètre $\lambda = h/k$, on construit la famille $(U_i^j(h))_{i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}}$, solution du schéma numérique (SchNu) associé au problème de Cauchy (3.13) et aux pas d'espace et de temps $k = 1/N$ et $h = \lambda/N$. Dans ces conditions, pour chaque $n \geq 0$, le vecteur $(U_i^j)_{i \in \mathbb{Z}}$ est presque nul *i. e.* n'admet qu'un nombre fini de valeurs non-nulles. Ce nombre est alors de l'ordre de N .

Avant d'énoncer le résultat principal, définissons d'abord quelques objets et introduisons quelques notations. Soit \mathcal{A} l'opérateur de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \\ (U_i) &\longmapsto (-U_{i+1} + 2U_i - U_{i-1}), \end{aligned}$$

et \mathcal{N} l'opérateur de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \\ (U_i) &\longmapsto ((U_i)^3). \end{aligned}$$

De cette façon, le schéma numérique (SchNu) s'écrit sous la forme :

$$U^{j+1} = 2U^j - U^{j-1} - \lambda^2 \mathcal{A}U^j + 2h^2 \mathcal{N}U^j.$$

L'opérateur \mathcal{A} est symétrique et défini positif; il induit donc une norme sur $l_0^2(\mathbb{R})$, définie pour tout $U \in l_0^2(\mathbb{R})$ par $\|U\|_{\mathcal{A}}^2 = (U, \mathcal{A}U)$, où $(,)$ représente le produit scalaire dans $l^2(\mathbb{R})$.

Remarquons dès à présent que, si $U \in l_0^2(\mathbb{R})$ est tel que $U_i = 0$ pour $|i| > N$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{\pi}{2N+2} \|U\|_2 \leq \|U\|_{\mathcal{A}} \leq 2\|U\|_2. \quad (3.14)$$

On va maintenant prouver le résultat de convergence au sens l^2 suivant :

Théorème II.9. Soit $0 < t_{\text{fin}} < \inf_{x \in \mathbb{R}} \psi(x)$. Notons e_i^j l'erreur $e_i^j = u(x_i, t_j) - U_i^j$ et $E^j = (e_i^j)_i$. Si la condition $\lambda < 1$ est vérifiée, alors il existe une constante positive C , indépendante de h , telle que

$$\sup_{0 \leq j, h \leq t_{\text{fin}}} \left(\frac{\|E^j\|_{\mathcal{A}}}{h} + \frac{\|E^{j+1} - E^j\|_2}{h} \right) \leq C h^{3/2}. \quad (3.15)$$

Démonstration. Commençons par construire par récurrence, pour chaque $h > 0$, trois suites croissantes de nombres positifs $(C_j^1(h))$, $(C_j^2(h))$ et $(C_j^3(h))$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\frac{1}{h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \leq C_j^1(h) h^3, \quad (C1)$$

$$\frac{\|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}}{h} + \frac{\|E^j - E^{j-1}\|_2}{h} \leq C_j^2(h) h^{3/2}, \quad (C2)$$

et

$$\|U^j\|_{\infty} \leq M + C_j^3(h) h^{3/2}, \quad (C3)$$

où M est un majorant des $\|u^{(j)}\|_{\infty}$ (un tel M existe puisque $t_j = j h \leq t_{\text{fin}} < \inf_x \psi(x)$ et donc u est majorée).

Initialisation ($j = 1$) : Dans ce cas, puisque $E^0 = 0$, on a :

$$\frac{1}{h^2} \|E^1 - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^1\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^1 - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) = \frac{\|E^1\|_2^2}{h^2},$$

et

$$\frac{\|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}}{h} + \frac{\|E^1 - E^{j-1}\|_2}{h} = \frac{\|E^1\|_2}{h}.$$

Par ailleurs, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $E_j^1 = u(x_j, t_1) - U_j^1$ où U_j^1 est défini à l'aide des deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{U_j^1 - u_j^{(1)}}{2h} = u_t(x_j, 0), \\ U_j^1 = \lambda^2 U_{j+1}^0 + 2(1 - \lambda^2) U_j^0 + \lambda^2 U_{j-1}^0 - U_j^{-1} + 2h^2 U_j^{03}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U_j^1 - U_j^{-1} = 2h u_t(x_j, 0), \\ U_j^1 + U_j^{-1} = \lambda^2 u(x_{j+1}, 0) + 2(1 - \lambda^2) u(x_j, 0) + \lambda^2 u(x_{j-1}, 0) + 2h^2 u(x_j, 0)^3, \end{cases}$$

ainsi :

$$U_j^1 = h u_t(x_j, 0) + \frac{\lambda^2}{2} u(x_{j+1}, 0) + (1 - \lambda^2) u(x_j, 0) + \frac{\lambda^2}{2} u(x_{j-1}, 0) + h^2 u(x_j, 0)^3.$$

Alors, en se servant de la formule de Taylor, et en se rappelant que $u = u(x, t)$ vérifie $\square u = 2u^3$, on obtient facilement l'estimation suivante, valable pour tout j entier :

$$|U_j^1 - u(x_j, t_1)| = \mathcal{O}(h^3),$$

et donc il existe une constante C telle que :

$$\frac{\|E_j^1\|_2}{h} = \frac{\|u(x_j, t_1) - U_j^1\|_2}{h} \leq C h^{3/2}. \quad (3.16)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|u(x_j, t_1) - U_j^1\|_2^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (u(x_j, t_1) - U_j^1)^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(h^6) \\ &= \mathcal{O}(h^5), \end{aligned}$$

car (U_j^1) et $(u(x_j, t_1))$ n'admettent qu'un nombre fini de valeurs non-nulles (n'oublions pas que les conditions initiales du problème de Cauchy considéré sont supportées dans un compact), de l'ordre de $N = \lambda/h$.

Il suffit maintenant de remarquer que les deux constantes $C_1^1(h) = C^2$ et $C_1^2(h) = C$ satisfont aux conditions (C1-C2).

En ce qui concerne l'inégalité (C3), elle se traduit par :

$$\sup_i |u(x_i, 0)| \leq M + C_0^3(h) h^{3/2},$$

où $M = \sup_{i,j} |u(x_i, t_j)|$; elle est donc vérifiée pour $C_0^3(h) = 0$.

Hérédité : Supposons construites les constantes $C_j^1(h)$, $C_j^2(h)$ et $C_j^3(h)$ vérifiant les conditions (C1-C3) et construisons $C_{j+1}^1(h)$, $C_{j+1}^2(h)$ et $C_{j+1}^3(h)$, satisfaisant aux mêmes contraintes.

Commençons par quelques observations :

Observation 3.2.1. *D'abord, il existe une constante $0 < \alpha < 1$, indépendante de k et h telle que si $C_j^1(h)$ vérifie l'inégalité (C1), alors $C_j^2(h)$ définie par $C_j^2(h) = \frac{2}{\lambda\sqrt{\alpha}} [C_j^1(h)]^{1/2}$ vérifie l'inégalité (C2).*

En effet, pour tout réel β :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \\ &= \frac{1}{h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 - \frac{(1-\beta)}{4h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - (1 - \frac{1-\beta}{2\lambda^2}) \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2). \end{aligned}$$

Mais $\|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 \leq 2(\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2)$; de plus, si $\lambda < 1$, alors $1 - \frac{1}{2\lambda^2} < \frac{1}{2}$. On peut donc trouver deux réels $0 < \beta < 1$ et $\gamma > 0$ tels que $(\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - (1 - \frac{1-\beta}{2\lambda^2})\|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \geq \gamma(\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2)$. D'autre part, $\frac{1}{h^2}\|E^j - E^{j-1}\|_2^2 - \frac{(1-\beta)}{4h^2}\|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 \geq \frac{\beta}{h^2}\|E^j - E^{j-1}\|_2^2$ puisque l'inégalité (3.14) est vérifiée. Alors, pour $\alpha = \max(\beta, \gamma)$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2}\|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2}(\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \\ & \geq \alpha\left(\frac{1}{h^2}\|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2}(\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2)\right), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure facilement.

Observation 3.2.2. *D'autre part, il existe $L > 0$, ne dépendant que de λ, m, M et t_{fin} , et tel que, pour h assez petit, on dispose de l'inégalité suivante :*

$$\|E^j\|_2 \leq L C_j^2(h) h^{3/2}. \quad (3.17)$$

Cette inégalité découle simplement des deux inégalités (C2) et (3.14) (n'oublions pas que le vecteur E^j est presque-nul, au vu des conditions initiales, et admet environ $\lambda(M - m)N + 2j \leq [\lambda(M - m) + 2t_{\text{fin}}]N$ termes non-nuls).

Les deux observations 3.2.1-3.2.2 ci-dessus permettent en outre d'écrire :

$$\begin{aligned} \|U^j\|_{\infty} & \leq \|u^{(j)}\|_{\infty} + \|U^j - u^{(j)}\|_{\infty} \\ & \leq M + \|E^j\|_{\infty} \\ & \leq M + \|U^j\|_2 \\ & \leq M + \frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}}(C_j^1(h))^{1/2} h^{3/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut poser $C_j^3(h) = \frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}}(C_j^1(h))^{1/2}$ pour tout indice j , et la condition (C3) sera vérifiée.

Construisons maintenant $C_{j+1}^1(h)$ à partir de $C_j^1(h)$. Pour cela, partons de l'égalité

$$\frac{1}{h}(E^{j+1} - E^j) = \frac{1}{h}(E^j - E^{j-1}) - \frac{\lambda^2}{h} \mathcal{A} E^j + 2h(N U^j - N u^{(j)}) + \frac{R^j}{h}.$$

En multipliant par $\frac{1}{h}(E^{j+1} - E^{j-1})$ et en utilisant l'identité $(a, a - b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a - b\|^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2}\|E^{j+1} - E^j\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2}(\|E^{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^{j+1} - E^j\|_{\mathcal{A}}^2) \\ & = \frac{1}{h^2}\|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2}(\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \\ & \quad + 2(N U^j - N u^{(j)}, E^{j+1} - E^{j-1}) + \frac{1}{h^2}(R^j, E^{j+1} - E^{j-1}). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h^2} \|E^{j+1} - E^j\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^{j+1} - E^j\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \leq \frac{1}{h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \quad + \frac{h}{\eta} \|NU^j - Nu^{(j)}\|_2^2 + \frac{\eta}{h} \|E^{j+1} - E^{j-1}\|_2^2 \\
 & \quad + \frac{1}{h^2} \left(\frac{\nu h}{2} \|E^{j+1} - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{1}{2\nu h} \|R^j\|_2^2 \right),
 \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h^2} (1 - h(\eta + \nu/2)) \|E^{j+1} - E^j\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^{j+1} - E^j\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \leq \frac{1}{h^2} (1 + h(\eta + \nu/2)) \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \quad + \frac{C^2}{2\nu} h^4 + \frac{9h}{\eta} \|E^j\|_2^2 (M + C_j^1(h))^{1/2} h^{3/2})^4.
 \end{aligned}$$

En effet, on a $\|NU^j - Nu^{(j)}\|_2 \leq 3\|E^j\|_2 (M + \frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}} (M + C_j^1(h))^{1/2} h^{3/2})^2$, puisque $M + \frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}} (C_j^1(h))^{1/2} h^{3/2}$ majore à la fois les $\|U^j\|_{\infty}$ et les $\|u^{(j)}\|_{\infty}$.

D'où,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h^2} (1 - h(\eta + \nu/2)) \|E^{j+1} - E^j\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^{j+1} - E^j\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \leq \frac{1}{h^2} (1 + h(\eta + \nu/2)) \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \quad + \frac{C^2}{2\nu} h^4 + \frac{144L}{\lambda\eta\sqrt{\alpha}} C_j^1(h) (M^4 + \left[\frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}}\right]^4 (C_j^1(h))^2 h^6) h^4,
 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{h^2} \|E^{j+1} - E^j\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^{j+1} - E^j\|_{\mathcal{A}}^2) \\
 & \leq \frac{1 + h(\eta + \nu/2)}{1 - h(\eta + \nu/2)} \left[\frac{1}{h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \right] \\
 & \quad + \frac{1}{1 - h(\eta + \nu/2)} \left[\frac{C^2}{2\nu} h^4 + \frac{144L}{\lambda\eta\sqrt{\alpha}} C_j^1(h) (M^4 + \frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}} (C_j^1(h))^2 h^6) h^4 \right] \\
 & \leq (1 + 3h(\eta + \nu/2)) C_j^1(h) h^3 + \\
 & \quad + 2 \left[\frac{C^2}{2\nu} h^4 + \frac{144L}{\lambda\eta\sqrt{\alpha}} C_j^1(h) (M^4 + \left[\frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}}\right]^4 (C_j^1(h))^2 h^6) h^4 \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut choisir :

$$C_{j+1}^1(h) = C_j^1(h) + h \left[3(\eta + \nu/2) C_j^1(h) + \frac{C^2}{\nu} + \frac{288L}{\lambda\eta\sqrt{\alpha}} M^4 C_j^1(h) + \frac{144}{\eta} \left[\frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}}\right]^5 (C_j^1(h))^3 h^6 \right]. \quad (3.18)$$

Remarquons que cette suite est alors croissante.

Il ne reste plus alors qu'à étudier le comportement de $C_j^1(1/N)$ pour $0 \leq j \lambda/N \leq t_{\text{fin}}$. On a $j \lambda/N \leq t_{\text{fin}}$ et donc $j \leq t_{\text{fin}} N/\lambda$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On va montrer, par récurrence sur j , qu'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que pour tout $0 \leq j \leq t_{\text{fin}} N/\lambda$, on a : $C_j^1(1/N) \leq C^2 (1 + \frac{\sigma}{N})^{(j-1)}$.

initialisation ($j=1$) : trivial, puisque $C_1^1(1/N) = C^2$.

hérédité : on a :

$$\begin{aligned} C_{j+1}^1(1/N) &= C_j^1(1/N) + \frac{1}{N} \left[3(\eta + \nu/2) C_j^1(1/N) + \frac{C^2}{\nu} + \frac{288 L}{\lambda \eta \sqrt{\alpha}} M^4 C_j^1(1/N) \right. \\ &\quad \left. + \frac{144}{\eta N^6} \left[\frac{2L}{\lambda \sqrt{\alpha}} \right]^5 C_j^1(1/N)^3 \right] \\ &\leq C_j^1(1/N) \left[1 + \frac{1}{N} \left[3(\eta + \nu/2) + \frac{1}{\nu} + \frac{288 L}{\lambda \eta \sqrt{\alpha}} M^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{144}{\eta N^6} \left[\frac{2L}{\lambda \sqrt{\alpha}} \right]^5 C_j^1(1/N)^2 \right] \right] \\ &\leq C^2 (1 + \frac{\sigma}{N})^{(j-1)} \left[1 + \frac{1}{N} (a(\nu, \eta) + \frac{b}{\eta N^6} C_j^1(1/N)^2) \right], \end{aligned}$$

si on pose :

$$a(\nu, \eta) = 3(\eta + \nu/2) + \frac{1}{\nu} + \frac{288 L}{\lambda \eta \sqrt{\alpha}} M^4, \quad \text{et} \quad b = 144 \left[\frac{2L}{\lambda \sqrt{\alpha}} \right]^5.$$

Réutilisons de nouveau l'hypothèse de récurrence pour contrôler $C_j^1(1/N)^2$. On a :

$$\begin{aligned} C_j^1(1/N) &\leq C^2 (1 + \frac{\sigma}{N})^{(j-1)} \\ &\leq C^2 (1 + \frac{\sigma}{N})^{N t_{\text{fin}}/\lambda} \\ &\leq C^2 \exp(\sigma t_{\text{fin}}/\lambda), \end{aligned}$$

donc :

$$C_j^1(1/N)^2 \leq C^4 \exp(2\sigma t_{\text{fin}}/\lambda).$$

Alors on obtient :

$$C_{j+1}^1(1/N) \leq C^2 (1 + \frac{\sigma}{N})^{(j-1)} \left[1 + \frac{1}{N} (a(\nu, \eta) + \frac{b}{\eta N^6} C^4 \exp(2\sigma t_{\text{fin}}/\lambda)) \right] \quad (3.19)$$

Il suffit alors de choisir les paramètres η , ν et σ de telle sorte que, au moins pour N grand, on ait :

$$1 + \frac{1}{N} (a(\nu, \eta) + \frac{b}{\eta N^6} C^4 \exp(2\sigma t_{\text{fin}})) \leq 1 + \frac{\sigma}{N}. \quad (3.20)$$

Ainsi l'inégalité (3.19) se traduira immédiatement par :

$$C_{j+1}^1(1/N) \leq C^2 \left(1 + \frac{\sigma}{N}\right)^j,$$

ce qui conclura la récurrence.

L'inégalité (3.20) équivaut à l'inégalité suivante :

$$3(\eta + \nu/2) + \frac{1}{\nu} + \frac{288L}{\lambda\eta\sqrt{\alpha}} M^4 + \frac{144}{\eta N^6} \left[\frac{2L}{\lambda\sqrt{\alpha}}\right]^5 C^4 \exp(2\sigma t_{\text{fin}}/\lambda) \leq \sigma.$$

On peut alors, par exemple, choisir :

$$\eta = 1, \quad \nu = 1 \quad \text{et} \quad \sigma = 3(\eta + \nu/2) + \frac{1}{\nu} + \frac{288L}{\lambda\eta\sqrt{\alpha}} M^4 + 1,$$

ainsi, si N est assez grand, l'inégalité (3.20) sera vérifiée et la récurrence terminée.

On vient donc de montrer l'existence de $\sigma > 0$ tel que :

$$\forall 0 \leq j \leq t_{\text{fin}} N, \quad C_j^1(1/N) \leq C^2 \left(1 + \frac{\sigma}{N}\right)^{(j-1)},$$

et donc :

$$\forall 0 \leq j \leq t_{\text{fin}} N, \quad C_j^1(1/N) \leq C^2 \exp(\sigma t_{\text{fin}}/\lambda).$$

Alors, pour tout $0 \leq j \leq t_{\text{fin}} N$, les inégalités (C1-C2) deviennent (rappelons que l'on a choisi $C_j^2(h) = \frac{2}{\lambda\sqrt{\alpha}} [C_j^1(h)]^{1/2}$) :

$$\frac{1}{h^2} \|E^j - E^{j-1}\|_2^2 + \frac{\lambda^2}{2h^2} (\|E^j\|_{\mathcal{A}}^2 + \|E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2 - \|E^j - E^{j-1}\|_{\mathcal{A}}^2) \leq C^2 \exp(\sigma t_{\text{fin}}/\lambda) h^3, \quad (\text{C1})$$

et

$$\frac{\|E^j\|_{\mathcal{A}}}{h} + \frac{\|E^{j+1} - E^j\|_2}{h} \leq \frac{2C}{\lambda\sqrt{\alpha}} \exp(\sigma t_{\text{fin}}/\lambda) h^{3/2}, \quad (\text{C2})$$

ce qui conclut donc la preuve du théorème II.9. \square

On vient de montrer que le schéma numérique (SchNu), associé au problème de Cauchy (3.13) à conditions initiales supportées dans un compact, est convergent d'ordre 2 dans toute région de la forme $0 \leq t \leq \inf \psi - \delta$ où $\delta > 0$ est fixé et où $t = \psi(x)$ est une équation de la surface d'explosion Σ associée à la solution $u = u(x, t)$ de (3.13).

Au vu des domaines de dépendance pour le schéma (SchNu) aussi bien que pour l'équation aux dérivées partielles $\square u = 2u^3$, et en se souvenant que la surface d'explosion Σ est nécessairement du genre espace, il paraît clair, que pour $\sup_x |\nabla\psi(x)| < \lambda < 1$, ce

résultat va se prolonger dans tout région de la forme $0 \leq t \leq \psi(x) - \delta$, au prix d'une démonstration similaire à celle ci-dessus.

La condition $\sup_x |\nabla\psi(x)| < \lambda < 1$ provient à la fois de la condition de stabilité : $\lambda < 1$ et du fait que, pour prolonger le schéma numérique au-delà du premier temps d'explosion, il faut que l'approximation numérique de u en un point (x_0, t_0) avec $t_0 \leq \psi(x_0) - \delta$ ne dépende que des approchées de u en des points (x, t) avec $t \leq \psi(x) - \delta$. C'est-à-dire que pour tout couple (x_0, t_0) avec $t_0 \leq \psi(x_0) - \delta$, il faut que $\{(x, t) \mid \lambda |x - x_0| \leq |t - t_0|, t \leq t_0\} \subset \{(x, t) \mid t \leq \psi(x) - \delta\}$, ce qui force λ à être plus grand ou égal à $\sup_x |\nabla\psi(x)|$ (qui est lui-même strictement plus petit que 1 puisque Σ est du genre espace).

Corollaire. Si $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ et $\sup_x |\nabla\psi(x)| < \lambda < 1$, alors pour tout $\delta > 0$, le schéma (SchNu) est convergent au sens l^2 dans la région :

$$\{(x, t) \mid t \leq \psi(x) - \delta\}.$$

Remarque 3.2.1. La seule information dont on dispose a priori sur la surface est le fait que cette dernière est nécessairement de genre espace et que donc $\sup_x |\nabla\psi(x)| < 1$. Ainsi, si l'on veut être assuré de la convergence du schéma numérique (SchNu) dans la région $\{(x, t) \mid t \leq \psi(x) - \delta\}$, il faudrait nécessairement choisir $\lambda = 1$, valeur limite pour laquelle le schéma n'a pas été montré convergent.

Le schéma classique (SchNu) est donc convergent et d'ordre 2 aussi près que l'on veut de la surface d'explosion ; et on peut donc en théorie s'en approcher autant qu'on le souhaite. Mais il faut tout de même noter deux points, deux obstacles qui rendent cette approche impossible en pratique :

- ◇ Pour la région $\Lambda_{[m, M]} \cap \{t \leq \psi(x) - \delta\}$ l'erreur de consistance est de l'ordre de h^2/δ^4 . Donc, même si cette erreur tend vers 0 quand h tend vers 0, dans la pratique la puissance de calcul limitée des calculateurs restreint le choix du paramètre h . Pour que l'erreur ne soit pas trop grande, il faut donc que δ ne soit pas trop petit ;
- ◇ Par ailleurs, s'approcher de la surface d'explosion, c'est traiter des nombres U_i^j de plus en plus grands. Or les calculateurs usuels représentent de tels nombres avec une précision très faible, d'où l'introduction de très grosses erreurs de calculs.

Pour ces raisons, il serait avantageux de pouvoir, près de l'explosion, proposer des schémas numériques plus appropriés.

3.3 Des schémas adaptés près de l'explosion

3.3.1 Construction de tels schémas numériques

Nous exposons ici brièvement une stratégie permettant de construire des schémas différents plus à même d'être efficaces près de l'explosion ; ces schémas seront dits "inverses".

L'idée principale qui nous guide est le fait que, près de sa surface d'explosion, une solution u de l'équation (NLCR) est "grande". De ce fait, u est non-nulle et donc on

peut, au moins dans cette région, considérer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $v = 1/u$. En effet, si on écrit $u = 1/v$ alors :

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 2u^3 && \text{(NLCR)} \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{v} \right]_{tt} - \left[\frac{1}{v} \right]_{xx} &= \frac{2}{v^3} \\ \Leftrightarrow -v[v_{tt} - v_{xx}] + 2[v_t^2 - v_x^2] &= 2. && \text{(3.21)} \end{aligned}$$

On dispose donc près de l'explosion de l'équation (3.21) pour $v = 1/u$ qui est totalement équivalente à l'équation de départ pour u .

Remarque 3.3.1. Notons d'abord que près de l'explosion, v est "petite" et donc on n'a plus à s'inquiéter des problèmes numériques liés au traitement des grandes valeurs.

On peut aussi observer que l'explosion de u , la solution de l'équation (NLCR) considérée se traduit exactement par l'annulation de v (accompagnée d'un changement de signe). Ainsi l'explosion de u , difficile à définir et à détecter numériquement comme nous le remarquons dans l'introduction, devient beaucoup plus facile à appréhender.

Il suffit maintenant de considérer des schémas numériques raisonnables pour l'équation (3.21), construits par exemple en remplaçant dans (3.21) les dérivées partielles par des différences finies suggérées par des formules de Taylor.

Si l'on garde des notations cohérentes avec celles introduites lors de l'étude du schéma classique (SchNu), on a par exemple considéré successivement les deux schémas inverses suivants :

$$\begin{aligned} 4h^2 &= (V_i^{j+1})^2 + (V_i^{j-1})^2 - \lambda^2 (V_{i+1}^j)^2 - \lambda^2 (V_{i-1}^j)^2 + 4(1 - \lambda^2) (V_i^j)^2 \\ &+ 2\lambda^2 V_{i-1}^j V_i^j + 2\lambda^2 V_{i+1}^j V_i^j - 2V_i^{j-1} V_i^j - 2V_i^{j+1} V_i^j \\ &- 2V_i^{j-1} V_i^{j+1} + 2\lambda^2 V_{i-1}^j V_{i+1}^j, \end{aligned} \quad \text{(SchInv1)}$$

et

$$2h^2 = V_i^j V_i^{j+1} + V_i^j V_i^{j-1} - 2V_i^{j-1} V_i^{j+1} - \lambda^2 (V_i^j V_{i+1}^j + V_i^j V_{i-1}^j - 2V_{i-1}^j V_{i+1}^j). \quad \text{(SchInv2)}$$

Remarque 3.3.2. Notons que le schéma (SchInv1) présente d'emblée l'inconvénient majeur de proposer, à chaque pas, deux solutions pour V_i^{j+1} , puisque cette quantité se présente comme la solution d'une équation polynomiale du second degré. Il faut alors choisir la "meilleure" de ces deux valeurs.

Ces deux schémas numériques s'obtiennent en faisant dans l'équation (3.21) les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} v_{xx}(x_i, t_j) &\approx \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{k^2}, \\ v_{tt}(x_i, t_j) &\approx \frac{V_i^{j+1} - 2V_i^j + V_i^{j-1}}{h^2}. \end{aligned}$$

La différence entre ces deux schémas se situe dans le fait que, pour trouver le schéma (SchInv1), on a considéré que :

$$v_x^2(x_i, t_j) \approx \left(\frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2k} \right)^2,$$

$$v_t^2(x_i, t_j) \approx \left(\frac{V_i^{j+1} - V_i^{j-1}}{2h} \right)^2,$$

alors que, pour parvenir au schéma (SchInv2), on a fait les approximations :

$$v_x^2(x_i, t_j) \approx \left(\frac{V_{i+1}^j - V_i^j}{k} \right) \left(\frac{V_i^j - V_{i-1}^j}{k} \right),$$

$$v_t^2(x_i, t_j) \approx \left(\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{h} \right) \left(\frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{h} \right).$$

3.3.2 Étude partielle des schémas inverses introduits

Nous allons ici commencer l'étude de la convergence des schémas inverses (SchInv1) et (SchInv2) définis plus haut.

Il s'avère que, non-content de nous obliger à chaque pas à faire un choix entre deux valeurs, le schéma (SchInv1) se révèle expérimentalement très mauvais. Empiriquement, il présente en effet, près de la surface d'explosion pour u , toutes les caractéristiques d'un schéma numérique très instable. C'est pourquoi nous allons l'abandonner ; nous ne l'avons en fait introduit que pour illustrer l'importance du choix des approximations pour les dérivées de v .

Nous allons traiter rigoureusement la question de la consistance du schéma (SchInv2), tandis que nous ne donnerons que quelques pistes pour ce qui concerne sa stabilité.

Nous conservons des notations analogues à celles introduites dans la section 3.2 pour l'étude de la convergence du schéma classique (SchNu).

Pour le schéma (SchInv2) l'erreur de consistance au point (x, t) est définie par :

$$r(x, t) = |v(x, t + h) - \tilde{v}(x, t + h)|,$$

où :

$$\tilde{v}(x, t + h) = \frac{1}{v(x, t) - 2v(x, t - h)} [2h^2 + \lambda^2 v(x - k, t) v(x, t) + \lambda^2 v(x + k, t) v(x, t) - v(x, t - h) v(x, t) - 2\lambda^2 v(x - k, t) v(x + k, t)].$$

Définissons la fonction p suivante :

$$p : h \mapsto 2h^2 - v(x, t) v(x, t - h) - v(x, t) v(x, t + h) + \lambda^2 v(x, t) v(x - k, t) + \lambda^2 v(x, t) v(x + k, t) + 2v(x, t - h) v(x, t + h) - 2\lambda^2 v(x - k, t) v(x + k, t),$$

où $k = h/\lambda$.

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à p , on obtient au point (x, t) :

$$\begin{aligned} p(h) &= h^2 \left[v (v_{tt} - v_{xx}) - 2 (v_t^2 - v_x^2) + 2 \right] \\ &\quad + \frac{h^4}{6} \int_0^1 p^{(4)}(h s) (1 - s)^3 ds \\ &= \frac{h^4}{6} \int_0^1 p^{(4)}(h s) (1 - s)^3 ds, \end{aligned} \quad (3.22)$$

puisque v satisfait à l'équation (3.21) par hypothèse.

De la même façon :

$$2v(x, t - h) - v(x, t) = v - 2h \int_0^1 v_t(x, t - h s) ds,$$

donc si $\frac{h}{v}$ est suffisamment petit :

$$\frac{1}{2v(x, t - h) - v(x, t)} = \frac{1}{v} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{2h}{v} \right)^k \left[\int_0^1 v_t(x, t - h s) ds \right]^k. \quad (3.23)$$

On en déduit une estimation pour l'erreur de consistance au point (x, t) (qui n'est autre que le produit des termes (3.22) et (3.23)), pour $\frac{h}{v}$ petit :

$$r(x, t) = \frac{h^4}{6v} \int_0^1 p^{(4)}(h s) (1 - s)^3 ds \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{h}{v} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Encore une fois, l'erreur de consistance est très raisonnable en des points suffisamment distants de l'explosion pour u , *i. e.* en des points où $v = 1/u$ n'est pas petit devant le pas h . En de tels points, l'erreur de consistance r est de l'ordre de h^4 et donc le schéma numérique (SchInv2) va être d'ordre 2 sur tout compact n'intersectant pas Σ , la surface d'explosion de u .

Si on se sert des estimations de v , on peut alors estimer l'erreur de consistance. En fait, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème II.10. *Soit K un compact fixé de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. On suppose que u , la solution du problème de Cauchy (3.1-3.2) étudié ne s'annule pas dans K et explose sur une hypersurface Σ d'équation $t = \psi(x)$ de classe C^2 .*

Si $K \cap \Sigma = \emptyset$ alors le schéma numérique (SchInv2) associé à l'équation inverse (3.21) est consistant d'ordre 2 sur K .

Si non, le schéma (SchInv2) est consistant d'ordre 1 sur K , sous l'hypothèse supplémentaire : $\psi''(x) \neq 0$, pour tout x .

Démonstration. La première partie du théorème découle immédiatement de l'estimation (3.24) de l'erreur de consistance r au point (x, t) . Cette estimation est valide puisque on reste à distance plus grande qu'un certain $\delta > 0$ fixé de la surface d'explosion pour u et donc du lieu des points où $v = 1/u$ s'annule. De cette façon $|v|$ est minorée par un réel strictement positif, indépendant de h et donc, si h est petit $\frac{h}{v}$ est lui-même petit. Rappelons aussi que le nombre de points de la discrétisation se trouvant dans K est de l'ordre de $N^2 = \frac{1}{h^2}$.

Intéressons nous maintenant à la preuve de la deuxième partie de ce théorème.

Soit K un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ sur lequel u ne s'annule pas. supposons en outre que l'intersection de ce compact avec la première surface d'explosion de u soit non-vide : $K \cap \Sigma = K \cap \{(x, \psi(x)), x \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, et que en tout point $(x, \psi(x)) \in K \cap \Sigma$, on ait $\psi''(x) \neq 0$.

On a :

$$r(x, t, h) = \left| \frac{p(x, t, h)}{v(x, t) - 2v(x, t-h)} \right|,$$

et

$$|p(x, t, h)| = \left| \frac{h^4}{6} \int_0^1 \frac{\partial^4 p}{\partial h^4}(x, t, h s) (1-s)^3 ds \right| \leq C h^4,$$

cette estimation étant valable sur tout le compact K .

Pour tout $\delta > 0$, on décompose K de la façon suivante : $K = K_\delta \cup \overline{K_\delta}$, où $K_\delta = \{(x, t) \in K \mid |\psi(x) - t| < \delta\}$ et $\overline{K_\delta} = K \setminus K_\delta$; de sorte que $\overline{K_\delta}$ est encore un compact, qui lui n'intersecte pas la surface d'explsion de u .

Alors on peut écrire :

$$\sum_{(x_i, t_j) \in K} r(x_i, t_j) = \sum_{(x_i, t_j) \in K_\delta} r(x_i, t_j) + \underbrace{\sum_{(x_i, t_j) \in \overline{K_\delta}} r(x_i, t_j)}_{\leq C h^2 \text{ par la première partie du théorème}},$$

et il reste donc à étudier $\sum_{(x_i, t_j) \in K_\delta} r(x_i, t_j)$. Or, pour tout $(x, t) \in K_\delta$, $t - \psi(x)$ est petit et donc, on sait estimer u , $v = 1/u$ et leurs dérivées en ce point. Ainsi :

$$v(x, t) = \frac{t - \psi(x)}{u_0(x)} - \frac{u_1(x)}{u_0(x)^2} (t - \psi(x))^2 + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (3.25)$$

et, si h est lui-même petit devant δ :

$$v(x, t-h) = \frac{t-h-\psi(x)}{u_0(x)} - \frac{u_1(x)}{u_0(x)^2} (t-h-\psi(x))^2 + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (3.26)$$

où :

$$u_0(x) = \sqrt{1 - \psi'(x)^2},$$

$$u_1(x) = \frac{[1 + 3\psi'(x)^2] \psi''(x)}{6(1 - \psi'(x)^2)^{3/2}}.$$

Alors, après calculs, on trouve :

$$\begin{aligned} v(x, t) - 2v(x, t - h) &= \frac{1}{u_0(x)} (\psi(x) - t + 2h) \\ &+ \frac{u_1(x)}{u_0(x)^2} [(\psi(x) - t + 2h)^2 - 2h^2] + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned}$$

En particulier, si $\psi(x) - t + 2h \neq 0$:

$$v(x, t) - 2v(x, t - h) = \frac{1}{u_0(x)} (\psi(x) - t + 2h) + \mathcal{O}(\delta^2),$$

et si $\psi(x) - t + 2h = 0$:

$$v(x, t) - 2v(x, t - h) = -\frac{2u_1(x)}{u_0(x)^2} h^2 + \mathcal{O}(h^3),$$

en prenant soin d'affiner l'estimation du reste dans ce cas.

Soit maintenant $(x_i, t_j) \in K_\delta$, on distingue deux cas :

Cas i) : Si $\psi(x_i) = t_{j-2}$ alors $v(x_i, t_j) - 2v(x_i, t_j - h) = -\frac{2u_1(x_i)}{u_0(x_i)^2} h^2 + \mathcal{O}(h^3)$, et donc l'erreur de consistance au point (x_i, t_j) vérifie :

$$r(x_i, t_j) \leq \left| \frac{C u_0(x_i)^3}{2 u_1(x_i)} \right| [h^2 + \mathcal{O}(h^3)]; \quad (3.27)$$

Cas ii) : Si $\psi(x_i) \neq t_{j-2}$ alors $v(x_i, t_j) - 2v(x_i, t_j - h) = \frac{1}{u_0(x_i)} (\psi(x_i) - t_j + 2h) + \mathcal{O}((\psi(x_i) - t_j + 2h)^2) + \mathcal{O}(h^2)$, et donc l'erreur de consistance au point (x_i, t_j) vérifie :

$$r(x_i, t_j) \leq \left| \frac{C u_0(x_i) h^4}{\psi(x_i) - t_{j-2}} \right| \left[1 + \mathcal{O}(\psi(x_i) - t_{j-2}) + \mathcal{O}\left(\frac{h^2}{\psi(x_i) - t_{j-2}}\right) \right],$$

et si l'on écrit $\psi(x_i) - t_{j-2}$ sous la forme $(\epsilon_i + l_j) h$ avec $0 < \epsilon_i < 1$ et $l_j \in \mathbb{Z}$ (remarquons aussi que puisque $(x_i, t_j) \in K_\delta$, on a $|l_j| < N\delta + 3$), on obtient :

$$r(x_i, t_j) \leq \left| \frac{C u_0(x_i) h^3}{\epsilon_i + l_j} \right| \left[1 + \mathcal{O}((\epsilon_i + l_j) h) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\epsilon_i + l_j}\right) \right]. \quad (3.28)$$

Il suffit maintenant de se rappeler que pour tout $0 < \epsilon < 1$, $\sum_{|l| < N\delta + 3} \left| \frac{1}{\epsilon + l} \right|$ est de l'ordre de $\ln N$ quand N est grand, que $\sum_{|l| < N\delta + 3} \frac{1}{(\epsilon + l)^2}$ est bornée indépendamment de N , et que le cas i) ne peut avoir lieu qu'une fois au plus pour chaque x_i . Ainsi, en majorant grossièrement :

$$\begin{aligned} \sum_{(x_i, t_j) \in K_\delta} r(x_i, t_j) &\leq C_1 N [h^2 + \mathcal{O}(h^3)] + C_2 N [h^3 \ln N + \mathcal{O}(h^3) + \mathcal{O}(h^4)] \\ &\leq C_3 h, \end{aligned}$$

pour certaines constantes C_1 , C_2 et C_3 indépendantes de N , si N est grand.

On conclut ainsi la preuve de la deuxième partie du théorème. □

Nous terminons cette étude partielle par deux remarques qui donnent une idée du travail restant et des difficultés que l'on risque de rencontrer encore.

Remarque 3.3.3. *Tout d'abord, bien que nous ne l'ayons pas encore montré rigoureusement, le schéma numérique inverse étudié ici apparaît comme empiriquement stable, près et loin de la surface d'explosion.*

Remarque 3.3.4. *Malgré tout, le schéma (SchInv2) n'est pas satisfaisant. En effet, au vu de la position du coefficient arbitraire $u_{4,0}(x)$ dans le développement asymptotique de la solution u de l'équation (NLCR) près de sa surface d'explosion, il paraît naturel de penser que le "bon" problème pour v à l'explosion est le suivant :*

$$\begin{cases} v^2 [v_{tt} - v_{xx}] - v [v_t^2 - v_x^2] = 2, \\ v(x, \psi(x)) = 0, \\ \frac{\partial^5 v}{\partial t^5}(x, \psi(x)) = f(x), \end{cases}$$

d'où la nécessité d'utiliser un schéma numérique pour v d'un ordre suffisamment élevé près de l'explosion de u pour rendre compte du comportement de la dérivée 5^{ème} de v par rapport au temps. Ce qui n'est pas le cas du schéma (SchInv2).

En conclusion, quitte à montrer la stabilité du schéma inverse (SchInv2), on dispose là d'un schéma numérique pour v qui converge jusqu'à l'explosion de u . Ce schéma permet donc, entre autre, l'étude numérique de la surface d'explosion de u qui n'est en fait que le lieu des points où v s'annule.

3.4 Choix du schéma le plus approprié

L'idée principale qui nous motive ici, est la recherche de conditions d'arrêt pour le schéma numérique classique. Le but est de pouvoir décider si le schéma (SchNu) est raisonnable dans la région considérée, et si ce n'est pas le cas, de le remplacer par un autre schéma plus approprié, par exemple le schéma inverse étudié dans le paragraphe précédent.

3.4.1 Condition numérique de non-explosion

L'idéal aurait été ici de proposer une condition nécessaire et suffisante d'explosion, liant les données de Cauchy sur un segment de la forme $\mathcal{I} = \{(x_0 + \Delta x, t_0) \mid -\delta \leq \Delta x \leq \delta\}$ et l'explosion de la solution dans la portion du cône de lumière rétrograde de base \mathcal{I} définie par : $\mathcal{C} = \{(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t) \mid 0 \leq \Delta t \leq \delta, -\Delta t \leq \Delta x \leq \Delta t\}$ (voir figure 3.2).

Il s'avère que le fait de connaître exactement le comportement des solutions explosives de l'équation (3.1) près de l'explosion, nous permet de construire des conditions nécessaires d'explosion et ce assez facilement.

Par contre, dans le cas général, nous ne sommes pas parvenu à exhiber une condition suffisante d'explosion.

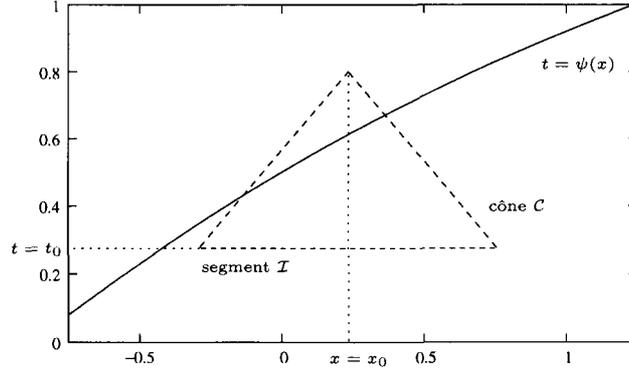


FIG. 3.2 – Cône de lumière.

Soit $u = u(x, t)$ solution exacte de (3.1-3.2) explosant sur la surface $\Sigma = \{t = \psi(x)\}$. Alors on sait (voir sections 1.1, 2.1 et 3.1) qu'une telle solution s'écrit pour t proche de $\psi(x)$:

$$u(x, t) = \frac{a_0(x)}{t - \psi(x)} + w(x, t) \sim \frac{a_0(x)}{t - \psi(x)}, \quad (3.29)$$

où $a_0(x)^2 = 1 - \psi'(x)^2$ avec $|\psi'(x)| < 1$ (la surface d'explosion est du genre espace) et v est régulière.

La présence du coefficient a_0 (éventuellement très petit) nous empêche d'utiliser des critères basés uniquement sur la taille de u . Par contre on peut remarquer que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -\frac{a_0(x)}{(t - \psi(x))^2} + \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \sim -\frac{a_0(x)}{(t - \psi(x))^2}, \quad (3.30)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{2a_0(x)}{(t - \psi(x))^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) \sim \frac{2a_0(x)}{(t - \psi(x))^3}. \quad (3.31)$$

De cette façon, on estime le comportement du quotient $\frac{u}{u_{tt}}$ quand t tend vers $\psi(x)$:

$$\frac{u(x, t)}{u_{tt}(x, t)} \sim \frac{[\psi(x) - t]^2}{2}. \quad (3.32)$$

De cet équivalent découle le théorème suivant :

Théorème II.11. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_0(\epsilon) > 0$ tel que, si $|t - \psi(x)| < \delta \leq \delta_0(\epsilon)$ alors :*

$$\left| \frac{u(x, t)}{u_{tt}(x, t)} \right| < (1 + \epsilon) \frac{\delta^2}{2}.$$

Fixons maintenant $\epsilon > 0$ et $\delta \leq \delta_0(\epsilon)$. Alors, par la contraposée on a :

Proposition 3.4.1. Si $\left| \frac{u(x,t)}{u_{tt}(x,t)} \right| \geq (1 + \epsilon) \frac{\delta^2}{2}$ alors $|t - \psi(x)| \geq \delta$.

Cette proposition nous donne ainsi une méthode pour tester si l'on est pas trop près de l'explosion.

Par ailleurs, pour (U_j^n) solution du schéma numérique (SchNu) associé à (3.1-3.2) avec le pas h (rappelons que λ est choisi égal à 1), on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) \approx \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{h^2}.$$

On peut alors traduire la proposition 3.4.1 en un critère numérique de non-explosion portant sur les U_j^n :

Corollaire. Si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left| \frac{2h^2 U_j^n}{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}} \right| \geq (1 + \epsilon) \delta^2, \quad (3.33)$$

alors $t_n - \psi(x_j) \geq \delta$.

Forts de ce critère, proposons maintenant un algorithme concret pour l'étude numérique de l'équation cubique réelle (NLCR), incluant un algorithme de décision du meilleur schéma entre le schéma classique (SchNu) et le schéma inverse (SchInv2).

3.4.2 Étude numérique complète

Nous avons, à partir des différent points que nous avons noté pour l'instant, construit un algorithme de calcul pour la résolution numérique du problème de Cauchy associé à l'équation cubique réelle (3.1-3.2). Cette approche va être basée sur l'utilisation des schémas classique (SchNu) et inverse (SchInv2) étudiés précédemment.

Choisissons d'abord un pas d'espace $k = 1/N$, un pas de temps $h = \lambda/N$, ainsi qu'un $\delta > 0$ qui va représenter la distance limite à la surface d'explosion éventuelle en-deçà de laquelle on considère qu'il n'est plus raisonnable de servir du schéma numérique classique (SchNu). Fixons aussi une discrétisation, associée aux pas h et k , de $\Lambda_{[m,M]}$ le domaine d'influence numérique des données de Cauchy sur le segment $[m, M] : \{(x_i, t_j) \mid 0 \leq j \leq N/2, j \leq i \leq N - j\}$.

L'algorithme que nous avons adopté se décompose de la façon suivante :

Initialisation : On détermine d'abord les vecteurs $(U_i^0)_i$ et $(U_i^1)_i$ grâce aux conditions initiales, aux relations (3.3-3.4) et au schéma numérique classique (SchNu) pour $j = 0$. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} U_i^0 = f_0(x_i), \\ U_i^1 = h f_1(x_i, 0) + \frac{1}{2} f_0(x_{i+1}, 0) + \frac{1}{2} f_0(x_{i-1}, 0) + h^2 f_0(x_i, 0)^3; \end{cases}$$

Routine : Ensuite, pour tout $j_0 \geq 1$ et tout $j_0 + 1 \leq i_0 \leq N - j_0 - 1$, on teste d'abord le critère (3.33) :

- ◊ S'il est vérifié aux indices $i_0 - 1$, i_0 et $i_0 + 1$, on considère que le point (x_{i_0}, t_{j_0+1}) est suffisamment loin de la surface d'explosion éventuelle et donc on se sert du schéma classique (SchNu) pour calculer $U_{i_0}^{j_0+1}$;
- ◊ S'il n'est pas vérifié pour au moins un indice parmi $i_0 - 1$, i_0 et $i_0 + 1$ et que l'on s'était encore servi du schéma classique pour trouver $U_{i_0}^{j_0}$, on pose $\Psi^-(x_{i_0}) = t_{j_0}$. On se sert alors, et jusqu'à nouvel ordre, du schéma inverse (SchInv2) pour calculer les $U_{i_0}^j = 1/V_{i_0}^j$, $j \geq j_0 + 1$.

Si on a employé le schéma inverse pour calculer à la fois $U_{i_0}^{j_0}$ et $U_{i_0}^{j_0+1}$ et que ces deux quantités sont de signes différents, alors c'est aussi le cas pour $V_{i_0}^{j_0}$ et $V_{i_0}^{j_0+1}$. On considère alors que $v(x_{i_0}, \cdot)$ s'est annulé entre t_{j_0} et t_{j_0+1} i. e. $u(x_{i_0}, \cdot)$ a explosé entre t_{j_0} et t_{j_0+1} . On pose alors $\Psi(x_{i_0}) = t_{j_0}$; c'est une première approximation pour $\psi(x_{i_0})$, le temps d'explosion au point x_{i_0} , la connaissance du comportement de u près de sa surface d'explosion va permettre d'affiner cette valeur. On pose également $\Psi^+(x_{i_0}) = t_{j_0} + \delta$, limite au-delà de laquelle on reviendra au schéma classique : si $t_j \geq \Psi^+(x_{i_0})$ on se sert du schéma (SchNu) pour calculer $U_{i_0}^j$, à moins que le critère (3.33) soit de nouveau mis en défaut.

Concluons sur quelques remarques :

Remarque 3.4.1. Au vu des domaines de dépendance des schémas numériques utilisés (les schémas (SchNu) et (SchInv2) ont en fait le même domaine de dépendance représenté à la figure 3.3), il est clair que pour chaque j_0 , il faut avoir calculé tous les $U_i^{j_0}$ avant de pouvoir passer à $j_0 + 1$. On peut par exemple parcourir les points de la discrétisation de la façon décrite dans la figure 3.4.

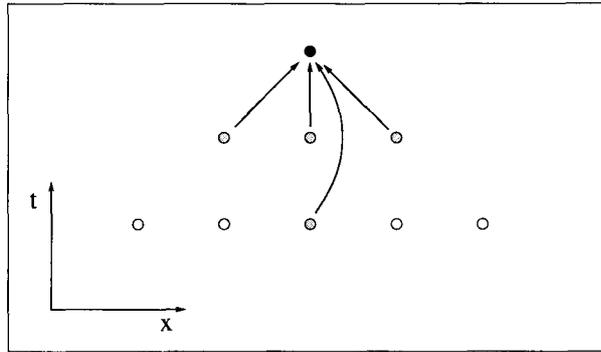


FIG. 3.3 – Domaine de dépendance numérique des schémas classique et inverse.

Remarque 3.4.2. Comme nous l'avons annoncé plus haut, on peut améliorer sensiblement l'approximation $\Psi(x_i)$ du temps d'explosion au point x_i . Il suffit, pour cela, de se rappeler du comportement de $v(x_i, t) = \frac{1}{u(x_i, t)}$ pour des temps t proches de $\psi(x_i)$.

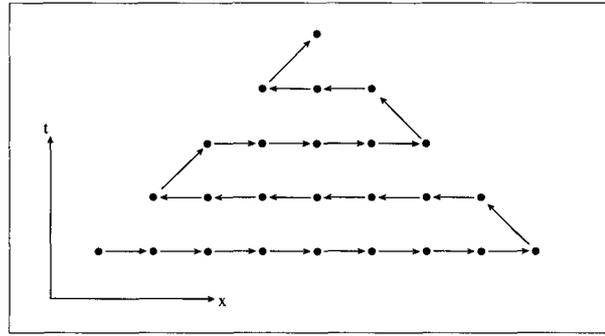


FIG. 3.4 – Parcours possible de la discrétisation.

En effet, on a calculé des valeurs approchées des $v(x_i, t_j)$ pour des temps t_j voisins du temps d'explosion $\psi(x_i)$. On peut alors, par exemple, déterminer un polynôme $P_K(T)$ interpolant les $2K + 1$ points (t_j, U_i^j) qui vérifient $|t_j - \psi(x_i)| \leq Kh$; puis approcher la racine de P_K la plus proche de $\psi(x_i)$ par une méthode numérique telle que la méthode de Newton. Cette racine, que l'on note alors $\tilde{\Psi}(x_i)$, est une bonne approximation de $\psi(x_i)$, suffisante en tout cas pour, si on le veut, trouver une estimation raisonnable de $\psi'(x_i)$.

3.5 Résultats numériques

Nous présentons ici un échantillon des résultats numériques que nous avons obtenus en mettant en application l'algorithme décrit dans la sous-section 3.4.2 pour différentes conditions initiales. On a d'abord testé le schéma complet pour des problèmes de Cauchy dont on connaissait la solution exacte, puis on l'a utilisé pour des conditions initiales plus générales.

3.5.1 Tests pour des surfaces d'explosion connues

Il est facile de vérifier que la fonction :

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, t) \longmapsto \frac{1}{t-1},$$

est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \square u = 2u^3, \\ (u, u_t) = (-1, -1), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

De plus, u admet pour unique surface d'explosion la droite d'équation $t = \psi(x) = 1$.

Remarque 3.5.1. En fait, ni u , ni ψ ne dépendent de la variable d'espace x , comme les conditions initiales. Cela va se refléter dans le fait que la valeur approchée U_i^j va être indépendante de l'indice d'espace i .

On applique alors l'algorithme complet dans le domaine conique $\Lambda_{[-10,10]}$ pour différents pas d'espace $k = 1/N > 0$ et de temps $h = \lambda/N$ et différentes bornes $\delta > 0$.

Remarque 3.5.2. Notons que puisque la surface d'explosion de la solution u du problème de Cauchy (3.34) considéré est plate, d'équation $t = \psi(x) = 1$, on a $\psi'' \equiv 0$ et donc le théorème II.10, assurant la consistance du schéma inverse, ne s'applique pas ici. Les résultats obtenus sont tout de même satisfaisants, comme nous allons le voir.

On s'est intéressé plus particulièrement au comportement des points $U_i^j = U_{i_0}^j$, $j \geq 0$ et à l'allure de la surface d'explosion numérique définie par les points $(x_i, \tilde{\Psi}_i)_i$. On a obtenu à chaque fois des courbes dont l'allure est similaire à celle des courbes 3.5 et 3.6, trouvées pour $N = 200$, $\lambda = 0.99$ et $\delta = 25/100$.

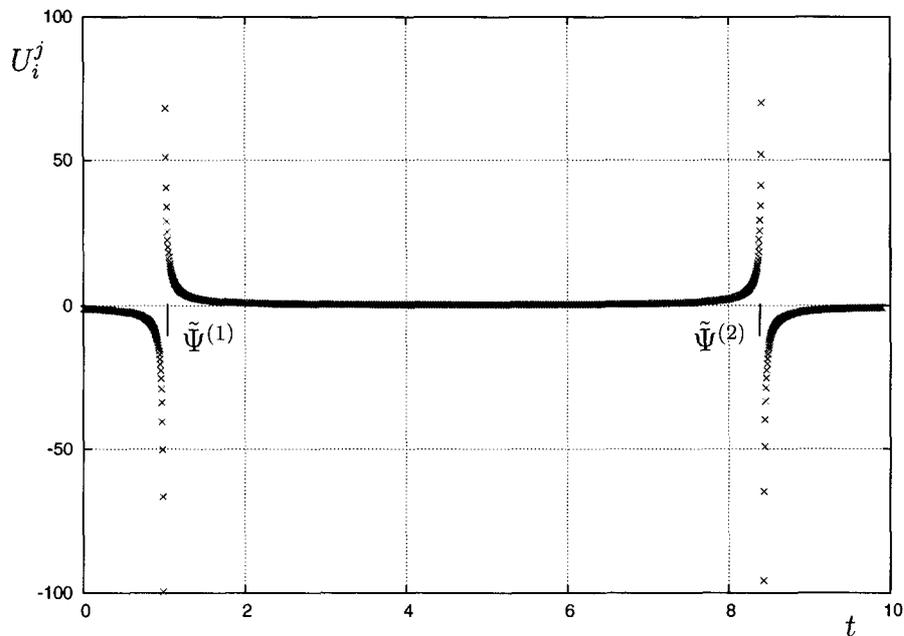


FIG. 3.5 – Solution numérique.

En étudiant ces courbes, on remarque d'abord que, jusqu'à la première explosion numérique $\tilde{\Psi}^{(1)}$, la solution numérique approchée \tilde{u} est voisine de la solution exacte u et que $\tilde{\Psi}^{(1)}$ est peu différent de $\psi(x) = 1$. Par contre, au-delà de ce premier temps d'explosion numérique, la solution approchée s'écarte peu à peu de la solution exacte qui, elle, tend vers 0 quand t tend vers l'infini. La solution approchée admet même une deuxième surface d'explosion numérique dans $\Lambda_{[-10,10]}$; cette surface admet pour équation $t = \tilde{\Psi}^{(2)}$.

L'algorithme décrit dans la sous-section 3.4.2 n'en est pas pour autant mauvais. Il faut, en effet, garder à l'esprit à la fois le fait que des erreurs, aussi minimales soient elles, sont inévitables, et le fait qu'il existe des conditions initiales (u, u_t) , pour $x \in \mathbb{R}$ et $t = 0$, aussi proches que l'on veut de $(-1, -1)$, et dont la solution du problème de Cauchy associé admet plus d'une unique surface d'explosion.

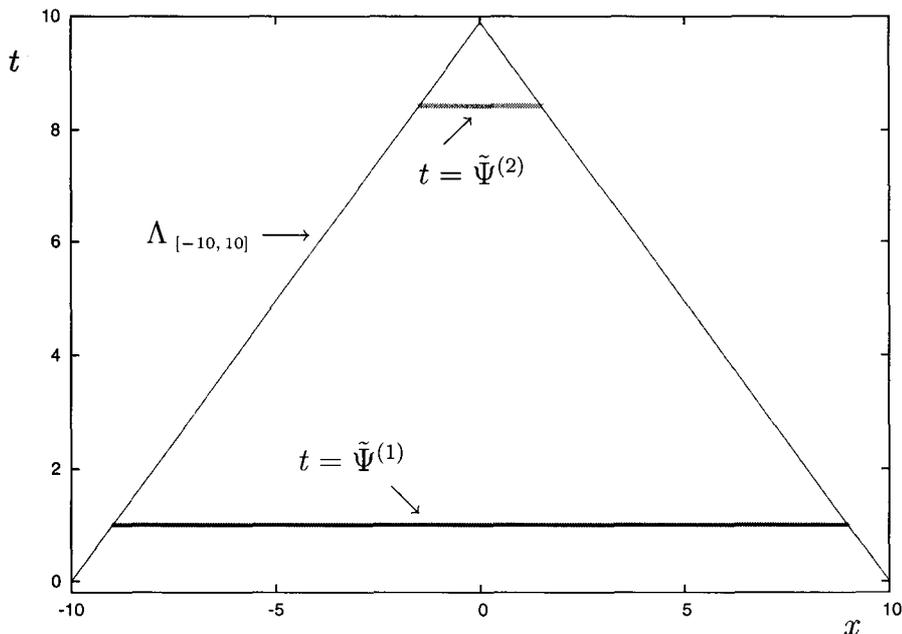


FIG. 3.6 – Surfaces d'explosion.

Afin de mieux se rendre compte des qualités et des défauts du schéma numérique complet mis en place, ainsi que de l'influence des paramètres N , λ et δ , nous allons présenter quelques courbes dont l'allure est caractéristique du comportement général de l'algorithme étudié.

On a jugé la qualité des résultats numériques obtenus sur trois valeurs plus particulièrement :

- la valeur du premier temps d'explosion numérique $\tilde{\Psi}^{(1)}$ (qui devrait être proche du temps d'explosion théorique, c'est à dire proche de 1) ;
- la valeur du second temps d'explosion numérique, quand celle-ci est constatée $\tilde{\Psi}^{(2)}$ (théoriquement, il n'y a pas de seconde explosion et donc plus grande sera cette valeur, meilleur sera le schéma ; l'idéal étant que cette seconde explosion numérique n'aie pas lieu) ;
- la valeur approchée de la solution au point $(x, t) = (0, 2)$ que l'on notera $\tilde{u}(0, 2)$ (on s'attend à ce que cette valeur soit proche de $u(0, 2) = 1$).

Les figures 3.7 à 3.15 ci-après, résument le comportement de ces trois valeurs en fonction, successivement, de N , λ et δ . A chaque fois, on a fixé deux de ces paramètres pour observer l'influence du troisième :

- i) Influence du nombre d'itérations N : Les courbes 3.7 à 3.9 ont été obtenues pour $\lambda = 0.79$ et $\delta = 0.1$ fixés, et pour des valeurs de N prises régulièrement entre 200 et 1000. On remarque que plus N est grand (et donc plus la grille de discrétisation est fine), plus les résultats numériques sont satisfaisants. En effet, quand N croît, $\tilde{\Psi}^{(1)}$ tend à se rapprocher de 1, sa valeur théorique. Dans le même temps, $\tilde{\Psi}^{(2)}$ augmente, *i. e.* la seconde explosion numérique est retardée ; plus encore, pour des grandes valeurs de N , on ne constate même plus de deuxième explosion numérique. Enfin,

plus N est grand et plus $\tilde{u}(0, 2)$ se rapproche de la valeur théorique $u(0, 2) = 1$.

- ii) Influence du paramètre λ : Les courbes 3.10 à 3.12 ont été obtenues pour $N = 500$ et $\delta = 0.1$ fixés, et pour des valeurs de λ prises régulièrement entre 0.6 et 0.99. On remarque essentiellement que plus le paramètre λ est choisi petit plus les résultats numériques obtenus sont satisfaisants. Ce phénomène se traduit de la même manière que pour le cas *i*).
- iii) Influence de la borne δ : Les courbes 3.13 à 3.15 ont été obtenues pour $N = 500$ et $\lambda = 0.79$ fixés, et pour des valeurs de δ prises régulièrement entre 0.05 et 0.25. Cette fois, on observe de meilleurs résultats pour les valeurs de δ les plus grandes parmi celles envisagées. Cette amélioration se traduit encore de la même façon que pour les cas *i*) et *ii*). Concernant la figure 3.14, précisons que à chaque fois que $\tilde{\Psi}^{(2)}$ prend la valeur -1 cela signifie que l'on n'a pas détecté d'explosion numérique dans le domaine de résolution numérique $\Lambda_{[-10,10]}$.

Ces trois tendances sont, en fait, assez légitimes. On s'attendait en effet à ce que les résultats soient meilleurs pour des grilles de discrétisation fines et donc pour des grandes valeurs de N . De la même façon, remarquons que diminuer le paramètre λ revient aussi à affiner la grille de discrétisation ; cela explique en partie l'influence du choix de λ sur la qualité des résultats numériques. Pour ce qui concerne le choix de la borne δ , on a déjà expliqué en quoi il est dangereux de trop se rapprocher de la surface d'explosion en utilisant le schéma classique (SchNu) ; ainsi les résultats obtenus sont assez conformes à ce à quoi nous nous attendions.

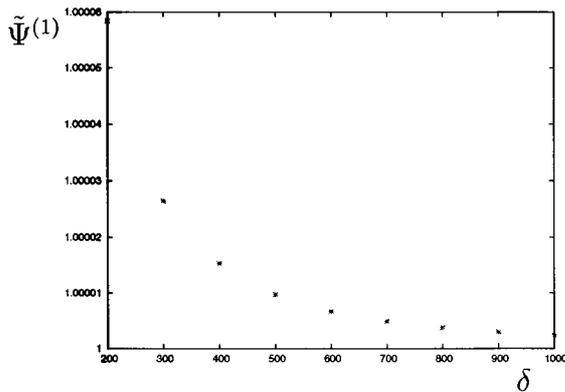


FIG. 3.7 – Influence de N sur le premier temps d'explosion numérique.

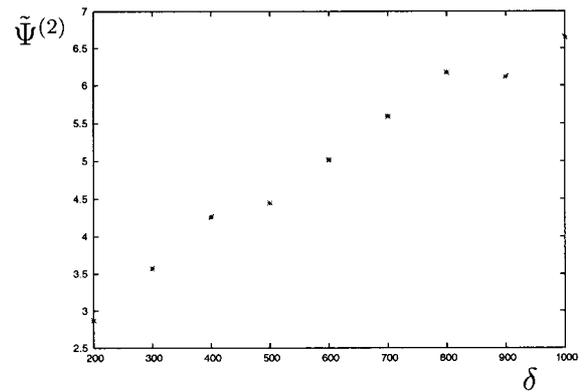


FIG. 3.8 – Influence de N sur le deuxième temps d'explosion numérique.

3.5.2 Autres résultats

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats obtenus, en appliquant l'algorithme décrit dans la section 3.4.2 à des problèmes de Cauchy (3.1-3.2) et ce, pour différentes conditions initiales f_0 et f_1 .

On s'est concentré sur la recherche de la première surface d'explosion. En effet, dans la plupart des cas étudiés, on a vu apparaître une deuxième (et parfois même une troisième)

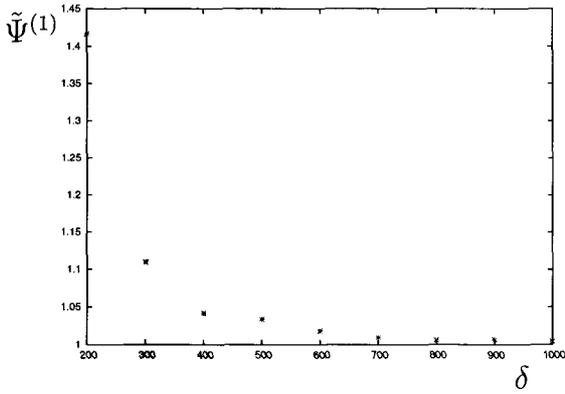


FIG. 3.9 – Influence de N sur la valeur de $\tilde{u}(0, 2)$.

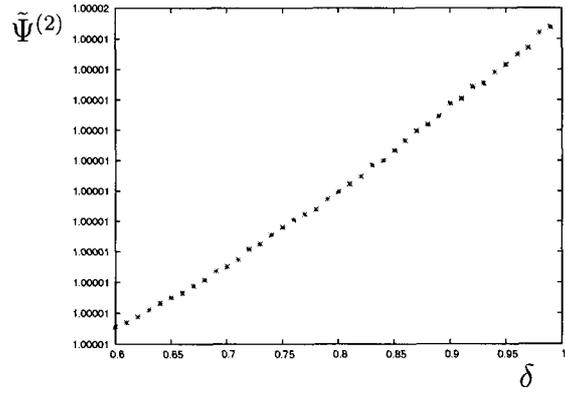


FIG. 3.10 – Influence de λ sur le premier temps d'explosion numérique.

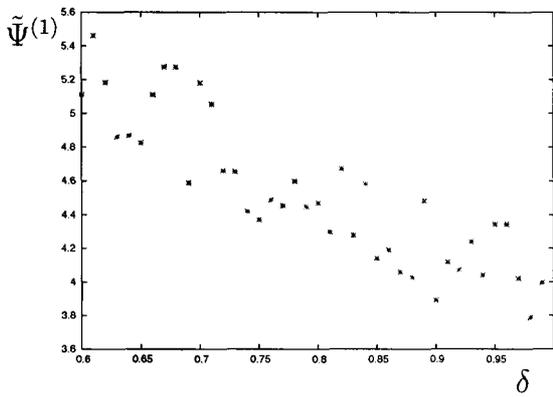


FIG. 3.11 – Influence de λ sur le deuxième temps d'explosion numérique.

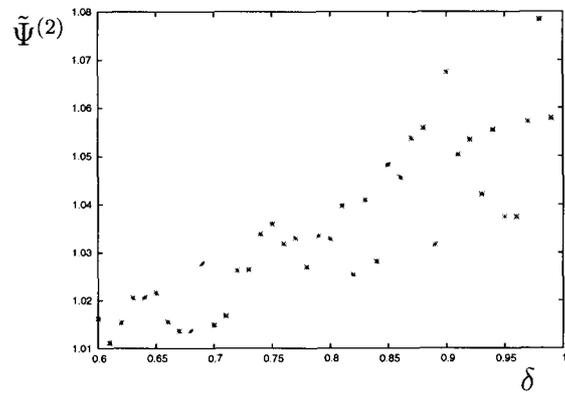


FIG. 3.12 – Influence de λ sur la valeur de $\tilde{u}(0, 2)$.

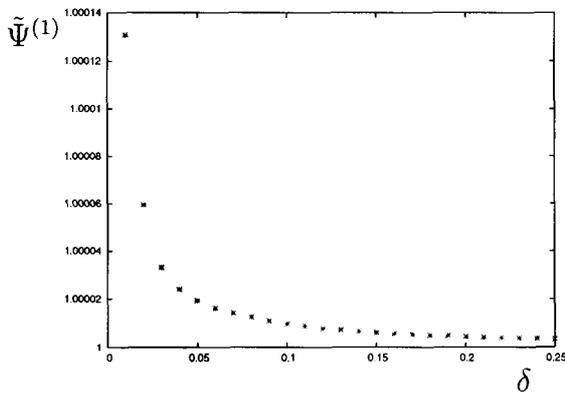


FIG. 3.13 – Influence de δ sur le premier temps d'explosion numérique.

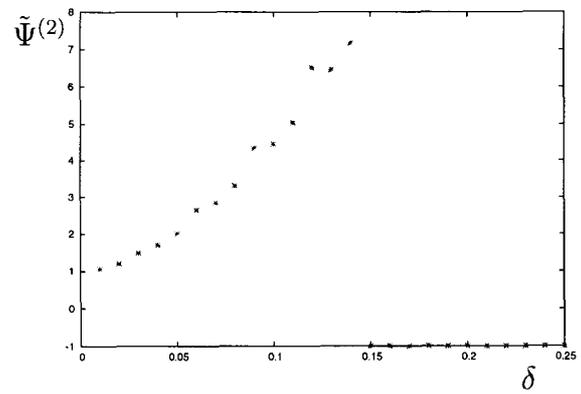


FIG. 3.14 – Influence de δ sur le deuxième temps d'explosion numérique.

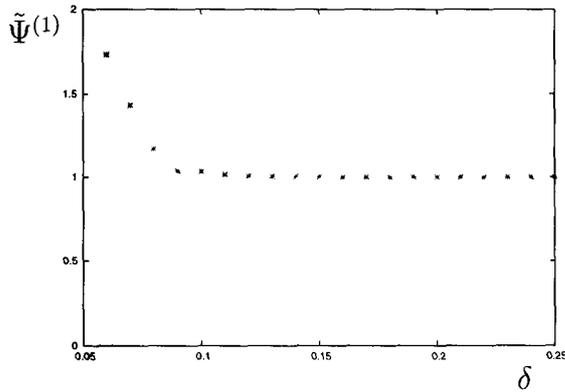


FIG. 3.15 – Influence de δ sur la valeur de $\tilde{u}(0, 2)$.

surface d'explosion numérique, mais comme on l'a constaté dans la sous-section 3.5.1, on ne peut pas affirmer que cette deuxième explosion soit autre chose qu'un artefact de l'étude numérique ; c'est pourquoi, on a préféré ne pas en tenir compte et, en fait, stopper le schéma numérique juste après la première explosion.

Les figures ci-après s'organisent de la façon suivante :

Figure 3.16 : Surface d'explosion numérique pour les conditions initiales :

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2},$$

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{1+x^4},$$

pour le pas $h = 1/1000$, le paramètre $\lambda = 0.99$ et la borne $\delta = 0.1$.

Figure 3.17 : Surface d'explosion numérique pour les conditions initiales :

$$f_0 : x \mapsto x^2,$$

$$f_1 : x \mapsto 1,$$

pour le pas $h = 1/1000$, le paramètre $\lambda = 0.99$ et la borne $\delta = 0.1$.

Figure 3.18 : Surface d'explosion numérique pour les conditions initiales :

$$f_0 : x \mapsto x^2 + x,$$

$$f_1 : x \mapsto x^2 + 1,$$

pour le pas $h = 1/1000$, le paramètre $\lambda = 0.99$ et la borne $\delta = 0.1$.

Figure 3.19 : Surface d'explosion numérique pour les conditions initiales :

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{2 + \cos(x^2)},$$

$$f_1 : x \mapsto \sin(x),$$

pour le pas $h = 1/1000$, le paramètre $\lambda = 0.99$ et la borne $\delta = 0.1$.

Figure 3.20 : Surface d'explosion numérique pour les conditions initiales :

$$\begin{aligned} f_0 : x &\longmapsto x^3, \\ f_1 : x &\longmapsto x, \end{aligned}$$

pour le pas $h = 1/3000$, le paramètre $\lambda = 0.99$ et la borne $\delta = 0.01$.

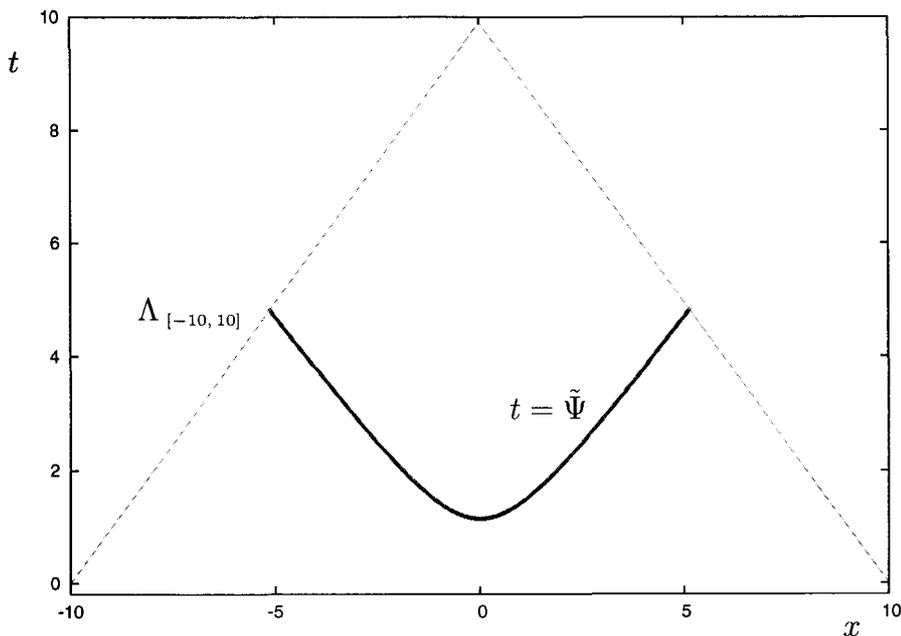


FIG. 3.16 – Surface d'explosion.

Remarque 3.5.3. Les deux dernières figures (3.19 et 3.20) sont particulièrement intéressantes puisqu'elles suggèrent l'existence, pour des données de Cauchy très régulières (en fait C^∞), de surfaces d'explosion peu régulières (non- C^1 , plus précisément). Faisons quelques remarques à ce propos :

1. A chaque fois que l'on a observé un tel manque de régularité, il s'est traduit par une surface d'explosion numérique présentant, en un point x_0 , toutes les caractéristiques d'une courbe admettant, en ce même point, deux demi-tangentes, l'une de pente -1 et l'autre de pente 1 ;
2. On a été confronté à de telles surfaces d'explosion numérique dès que l'on a considéré un problème de Cauchy ayant des conditions initiales impaires ; et dans ce cas, c'est au point $x_0 = 0$ que la surface d'explosion numérique ne semble pas être dérivable. Notons aussi que, si $u = u(x, t)$ est solution de $\square u = 2u^3$ avec des conditions initiales impaires, alors u doit nécessairement vérifier $u(0, t) = 0$, pour tout t ; ainsi u ne peut exploser au point $x_0 = 0$ et donc on ne peut pas définir de surface d'explosion en ce point.

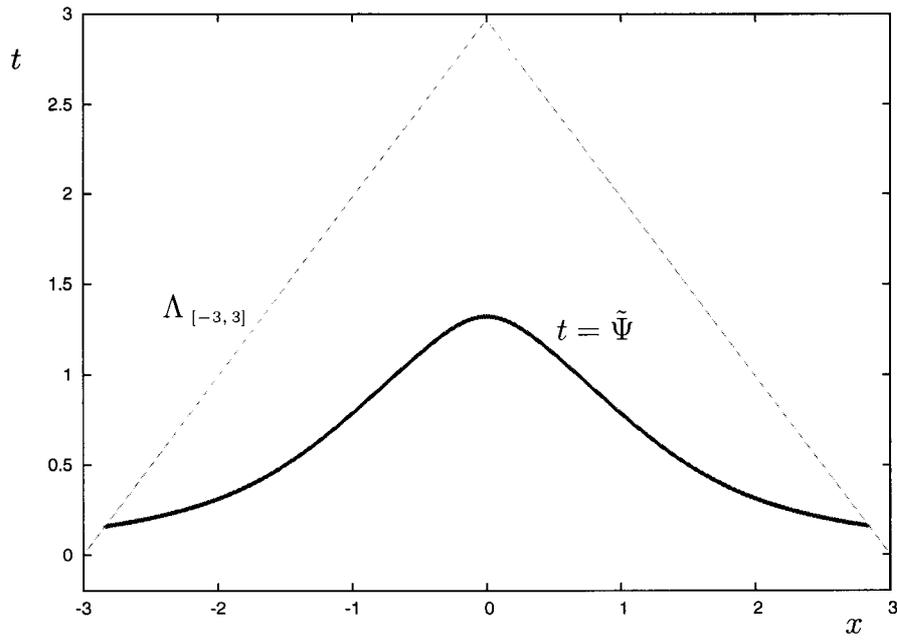


FIG. 3.17 – Surface d'explosion.

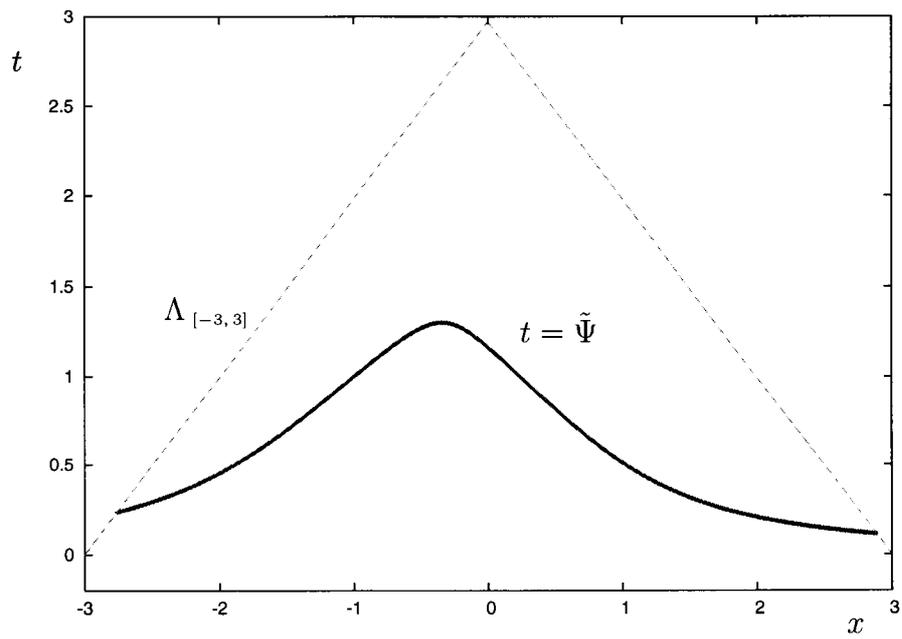


FIG. 3.18 – Surface d'explosion.

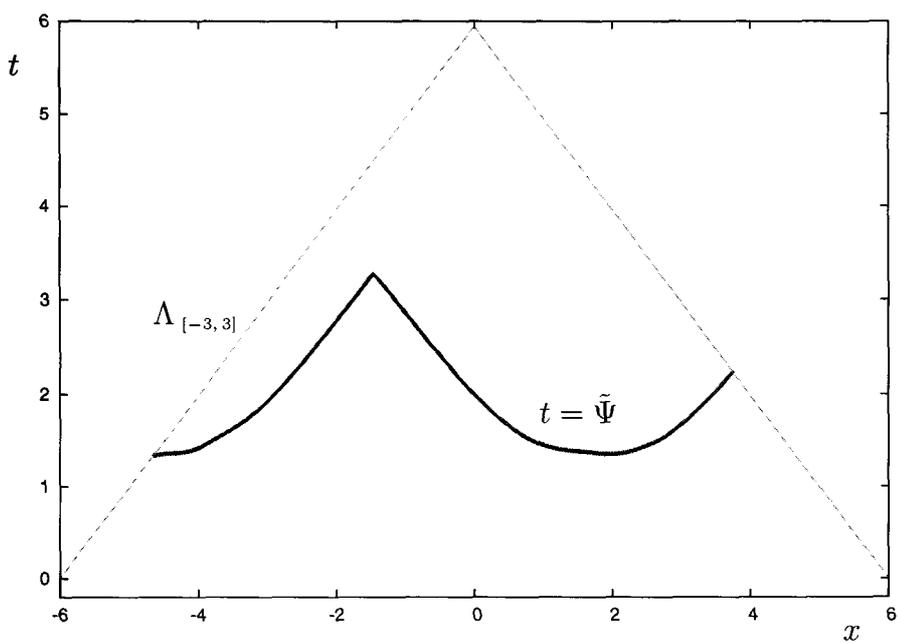


FIG. 3.19 – Surface d'explosion.

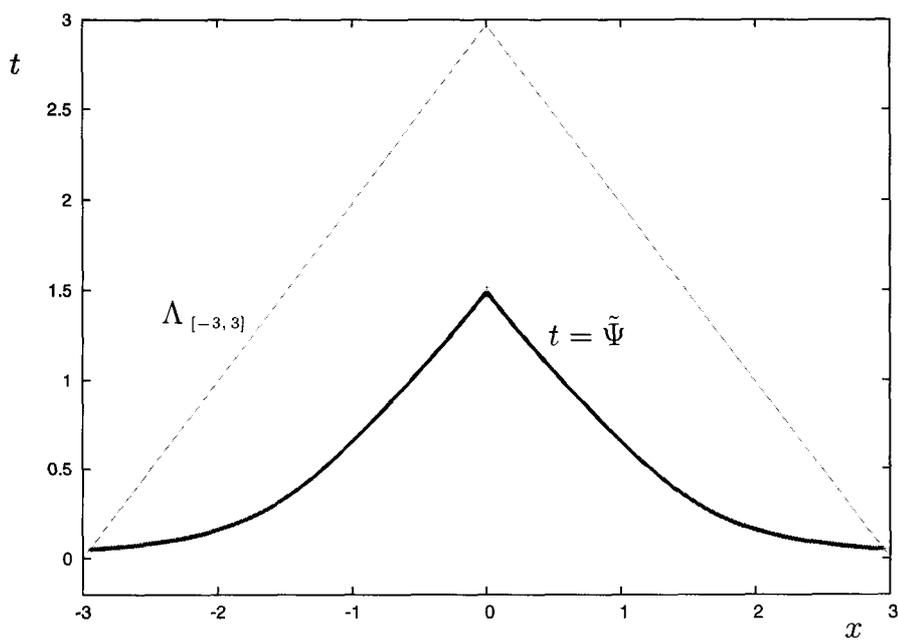


FIG. 3.20 – Surface d'explosion.

Conclusion

Nous venons de prouver de nombreux résultats portant sur des questions connexes à l'étude de l'équation cubique réelle (NLCR). A chaque fois, nous nous sommes largement servis des théorèmes d'existence de solutions explosives ainsi que des développements asymptotiques de ces solutions annoncés dans la partie I.

La démarche suivie tout au long de cette partie met ainsi en évidence le caractère fertile des méthodes constructives basées sur des réductions Fuchsiennes dont on s'est servi dans la partie I. On pourrait en effet mettre encore en application ces résultats, pour s'intéresser à quantités d'autres problèmes en relation, soit avec l'équation cubique réelle (NLCR), soit avec l'équation cubique complexe (NLCC).

Conclusion

Conclusion

1 Bilan

Il me semble que la chose la plus importante à retenir dans ce travail, en dehors des différents résultats que l'on a pu prouver, c'est la fertilité et le caractère générique des méthodes de réductions Fuchsiennes utilisées. Comme on n'a cessé de le rappeler, ces méthodes offrent en effet des résultats très précis sur l'existence et le comportement asymptotique près de l'explosion des solutions explosives des équations (NLCR) et (NLCC); on a vu dans la partie II comment ces résultats engendrent quasi-immédiatement des applications multiples et variées.

2 Perspectives

Le travail entrepris dans cette thèse est loin d'être clos et offre encore de nombreuses perspectives de recherche.

Donnons quelques unes des pistes encore à suivre :

1. En ce qui concerne la partie théorique, l'une des prochaines étapes à mettre en œuvre est l'adaptation, pour les deux équations qui nous intéressent (NLCR) et (NLCC), des résultats et des méthodes de l'article [9] écrit par S. Kichenassamy. Ces travaux, basés sur l'utilisation du théorème de point fixe de Nash-Moser, font le lien entre le problème de Cauchy pour l'équation aux dérivées partielles $\square u = e^u$ et le problème à l'explosion pour cette même équation. Plus précisément, il est montré dans cet article, que si u est solution de $\square u = e^u$ avec des données de Cauchy pour $t = 1$ proches de $(\ln 2, -2)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ où s est un entier suffisamment grand, alors u doit exploser sur une hypersurface de genre espace de \mathbb{R}^n définie par une équation $t = \psi(x)$ avec $\psi \in H^{s-149-9[n/2]}(\mathbb{R}^n)$;
2. On peut encore certainement améliorer les résultats présentés dans la section 2 de la partie II concernant la recherche de la borne inférieure q_0 . L'idée est d'étudier d'autres solutions de problèmes forcés (NLCRF) construites soit sur le modèle des séries tronquées autour d'autres surfaces d'explosion, soit sur des modèles complètement différents;
3. La partie numérique soulève aussi diverses questions intéressantes. Il faudrait, par exemple, s'intéresser à la stabilité et à la convergence du schéma inverse proposé près de l'explosion. Il serait bon également de continuer l'étude des critères numériques d'explosion. Les résultats obtenus numériquement suggèrent aussi des résultats théo-

riques, notamment en ce qui concerne les solutions explosives des problèmes à données de Cauchy impaires.

4. Pour ce qui est de l'équation cubique complexe (NLCC), il faudrait prendre le temps de démontrer des résultats du type de ceux prouvés dans la partie II pour l'équation réelle (NLCR).

Annexes

A

Rappels de géométrie différentielle

Nous allons donner ici quelques rappels de géométrie différentielle. En particulier, nous nous intéresserons à la géométrie locale d'une hypersurface de l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sur lequel on a défini la forme quadratique de signature $(n, 1)$ suivante :

$$Q(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - t^2, \quad \forall (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Pour $n = 3$, cet espace est connu sous le nom d'espace-temps de Minkowski.

Considérons maintenant Σ une variété de dimension n , régulière et de genre espace ; c'est-à-dire : pour tout vecteur v tangent à Σ , $Q(v) > 0$. De cette façon, pour chaque point (x_0, t_0) de la surface, la forme quadratique Q induit sur $T_{(x_0, t_0)}\Sigma$, l'espace tangent en (x_0, t_0) à Σ , une forme quadratique définie-positive. On en déduit alors une métrique sur Σ .

Comme Σ est régulière et de genre espace, le théorème d'inversion globale assure l'existence d'une fonction ψ telle que $\Sigma = \{t = \psi(x), x \in \mathbb{R}^n\}$. Nous supposons pour le reste de cette section que ψ est suffisamment régulière. Alors on a : $|\nabla\psi| < 1$.

Nous allons nous intéresser aux propriétés géométriques locales de cette surface, en dimension d'espace $n = 1$ d'abord, puis pour $n = 2$ et enfin nous finirons par le cas général $n \geq 3$.

A.1 Cas de la dimension 1 d'espace

Ici $\Sigma = \{t = \psi(x), x \in \mathbb{R}\}$ est réduite à une courbe de \mathbb{R}^2 . Comme nous l'avons expliqué plus haut, la forme quadratique Q induit une métrique sur Σ . Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= Q(d\vec{M}), \quad \text{où } \vec{M}(x) = (x, \psi(x)) \\ &= (1 - \psi'^2(x)) dx^2. \end{aligned}$$

et donc :

$$ds = \sqrt{(1 - \psi'^2(x))} dx$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned}\vec{T}(x) &= \frac{d\vec{M}}{ds} \\ &= \frac{d\vec{M}}{dx} \frac{dx}{ds} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\psi'^2(x)}}, \frac{\psi'(x)}{\sqrt{1-\psi'^2(x)}} \right).\end{aligned}$$

Ainsi $\vec{T}(x)$ est tangent à Σ et vérifie $Q(\vec{T}) = 1$.

Définissons alors la normale orientée à Σ , unitaire : $\vec{n}(x)$, et $H(x)$ la courbure moyenne de Σ au point $(x, \psi(x))$ par :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds}(x) = H(x) \vec{n}(x), \\ Q(\vec{n}) = -1. \end{cases}$$

En dérivant la relation $Q(\vec{T}(x)) = 1$, on trouve que : $\langle \vec{n}, \vec{T} \rangle_Q = 0$. Puisque $\vec{n}(x)$ est unitaire, on a l'expression suivante pour la courbure $H(x)$:

$$H(x) = \frac{\psi''(x)}{(1-\psi'^2(x))^{3/2}}.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{ds}(x) &= \frac{dx}{ds} \frac{d\vec{T}}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\psi'^2(x)}} \left(\frac{\psi'(x)\psi''(x)}{(1-\psi'^2(x))^{3/2}}, \frac{\psi''(x)}{(1-\psi'^2(x))^{3/2}} \right) \\ &= \left(\frac{\psi'(x)\psi''(x)}{(1-\psi'^2(x))^2}, \frac{\psi''(x)}{(1-\psi'^2(x))^2} \right),\end{aligned}$$

Donc

$$Q\left(\frac{d\vec{T}}{ds}(x)\right) = H^2(x) Q(\vec{n}) = -\frac{\psi''^2(x)}{(1-\psi'^2(x))^3},$$

et ainsi :

$$H^2(x) = \frac{\psi''^2(x)}{(1-\psi'^2(x))^3}.$$

Remarque A.1.1. $R(x) = \frac{1}{H(x)}$ est le rayon de courbure de Σ au point $(x, \psi(x))$.

A.2 Cas de la dimension 2 d'espace

Cette fois ci $\Sigma = \{t = \psi(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ est une surface de \mathbb{R}^3 . Comme précédemment, posons :

$$\begin{aligned} ds^2 &= Q(d\vec{M}), \quad \text{où } \vec{M}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \\ &= E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

C'est la première forme fondamentale introduite par Gauss. Après calculs, on trouve les expressions suivantes pour E , F et G :

$$\begin{cases} E = 1 - \psi_1^2, \\ F = -\psi_1 \psi_2, \\ G = 1 - \psi_2^2, \end{cases}$$

où ψ_i désigne $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ pour $i = 1, 2$.

La forme quadratique Q est non-dégénérée et $\text{vect}(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2})$ est un espace vectoriel de dimension 2. De ce fait, il existe un unique vecteur \vec{n} , orthogonal à chaque vecteur de l'espace tangent à Σ au point $(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))$, et vérifiant également :

$$\begin{cases} Q(\vec{n}) = -1, \\ \det\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2}, \vec{n}\right) = -1. \end{cases}$$

Après avoir dérivé l'égalité $\langle \vec{n}, d\vec{M} \rangle_Q = 0$, on obtient :

$$\langle \vec{n}, d^2\vec{M} \rangle_Q + \langle d\vec{n}, d\vec{M} \rangle_Q = 0,$$

donc on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, d^2\vec{M} \rangle_Q &= - \langle d\vec{n}, d\vec{M} \rangle_Q \\ &= L dx_1^2 + 2M dx_1 dx_2 + N dx_2^2. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

C'est la deuxième forme fondamentale de Gauss. L , M et N admettent les expressions suivantes :

$$\begin{cases} L = \frac{\psi_{11}}{\sqrt{1 - |\nabla \psi|^2}}, \\ M = \frac{\psi_{12}}{\sqrt{1 - |\nabla \psi|^2}}, \\ N = \frac{\psi_{22}}{\sqrt{1 - |\nabla \psi|^2}}, \end{cases}$$

où, par exemple : ψ_{12} désigne $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}$.

La courbure normale à Σ dans la direction (dx_1, dx_2) est alors définie par :

$$\mathcal{C}(dx_1, dx_2) = \frac{L dx_1^2 + 2 M dx_1 dx_2 + N dx_2^2}{E dx_1^2 + 2 F dx_1 dx_2 + G dx_2^2},$$

et les courbures principales \mathcal{C}^M et \mathcal{C}^m sont respectivement les maximum et minimum de la quantité précédente quand dx_1 et dx_2 varient.

Posons maintenant :

$$H = \mathcal{C}^m + \mathcal{C}^M \quad \text{et} \quad K = \mathcal{C}^m \mathcal{C}^M.$$

$H(x_1, x_2)$ et $K(x_1, x_2)$ sont appelées respectivement courbure moyenne et totale (ou de Gauss) de la surface Σ au point $(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))$.

Remarque A.2.1. Définissons les matrices g et k suivantes :

$$g = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad k = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Puisque la surface Σ est de genre espace, on a :

$$\begin{aligned} \det(g) &= EG - F^2 \\ &= (1 - \psi_1^2)(1 - \psi_2^2) - (-\psi_1\psi_2)^2 \\ &= 1 - |\nabla\psi|^2 > 0. \end{aligned}$$

La matrice g est donc inversible.

Les courbures principales \mathcal{C}^m et \mathcal{C}^M coïncident alors avec les valeurs propres de la matrice $g^{-1}k$. Les vecteurs propres correspondants sont les multiples de :

$$u^m = \begin{bmatrix} dx_1^m \\ dx_2^m \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad u^M = \begin{bmatrix} dx_1^M \\ dx_2^M \end{bmatrix},$$

où \mathcal{C}^m et \mathcal{C}^M sont atteints pour $(dx_1, dx_2) = (dx_1^m, dx_2^m)$ et $(dx_1, dx_2) = (dx_1^M, dx_2^M)$ respectivement.

Démonstration. En effet, $0 \neq u = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix}$ est vecteur propre de $g^{-1}k$ si et seulement si il existe un scalaire λ tel que :

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix},$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} L dx_1 + M dx_2 = \lambda (E dx_1 + F dx_2) \\ M dx_1 + N dx_2 = \lambda (F dx_1 + G dx_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L dx_1 + M dx_2)(F dx_1 + G dx_2) = (M dx_1 + N dx_2)(E dx_1 + F dx_2) \\ L dx_1^2 + 2 M dx_1 dx_2 + N dx_2^2 = \lambda (E dx_1^2 + 2 F dx_1 dx_2 + G dx_2^2) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Par ailleurs, pour que (dx_1, dx_2) réalise un extremum de la fonction \mathcal{C} , il faut que (dx_1, dx_2) annule le gradient $\nabla \mathcal{C}$ i. e. après simplification :

$$(L dx_1 + M dx_2)(F dx_1 + G dx_2) = (M dx_1 + N dx_2)(E dx_1 + F dx_2).$$

Ainsi le système (A.1) se traduit exactement par :

- (i) (dx_1, dx_2) réalise un extremum de \mathcal{C} ;
- (ii) Cet extremum vaut $\mathcal{C}(dx_1, dx_2) = \lambda$.

□

Cette remarque va servir de base à la généralisation en dimension d'espace $n \geq 3$.

A.3 Cas de la dimension d'espace $n \geq 3$

Soit Σ une variété de dimension n plongée dans \mathbb{R}^{n+1} :

$$\Sigma = \{t = \psi(x), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

On construit les première et seconde formes fondamentales de Gauss de la même façon que précédemment. On obtient alors :

$$g^{ij}(x) dx_i dx_j, \quad (\text{I})$$

$$k^{ij}(x) dx_i dx_j, \quad (\text{II})$$

avec, après calculs :

$$\begin{cases} g^{ij}(x) = \delta^{ij} - \psi^i(x)\psi^j(x), \\ k^{ij}(x) = \frac{\psi^{ij}(x)}{\sqrt{1 - \psi_i(x)\psi^i(x)}}. \end{cases}$$

Définissons maintenant $g(x)$ et $k(x)$ comme les matrices de (I) et (II) au point x , i. e. les matrices dont les coefficients sont les $g^{ij}(x)$ et les $k^{ij}(x)$ respectivement. Remarquons aussi que le déterminant $|g(x)|$ de la matrice $g(x)$ est égal à $1 - \psi_i(x)\psi^i(x)$. Alors, comme la surface Σ est supposée de genre espace, $|g(x)|$ est donc positif strictement et $g(x)$ est inversible.

Les courbures principales de Σ au point $(x, \psi(x))$ sont alors définies comme les valeurs propres algébriques de la matrice $n \times n$: $g^{-1}(x) k(x)$. Ces valeurs propres ne sont pas nécessairement réelles. On préfère donc considérer des fonctions symétriques élémentaires en ces valeurs propres qui, elles, restent réelles : $K_1 = H$, K_2, \dots, K_n . En fait ces quantités sont (au signe près) les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $g^{-1} k$. Après calculs, on trouve les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} H(x) &= \text{Tr}(g^{-1} k) = \frac{\Delta\psi}{|g|^{1/2}} + \frac{\psi^{ij}\psi_i\psi_j}{|g|^{3/2}}, \\ K_2(x) &= \text{Tr}(\text{Min}(g^{-1} k; 2)) = \frac{(\Delta\psi)^2 - \psi^{ij}\psi_{ij}}{2|g|} \\ &\quad + \frac{\Delta\psi \psi^{ij}\psi_i\psi_j - \psi^{ij}\psi_i^k\psi_j\psi_k}{|g|^2}, \end{aligned}$$

et si x vérifie $\nabla\psi(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 K_3(x) &= \text{Tr}(\text{Min}(g^{-1}k; 3)) = \frac{1}{3} \psi^{ij} \psi_j^k \psi_{ik} - \frac{1}{2} \Delta\psi \psi^{ij} \psi_{ij} + \frac{1}{6} (\Delta\psi)^3, \\
 K_4(x) &= \text{Tr}(\text{Min}(g^{-1}k; 4)) = \frac{1}{24} (\Delta\psi)^4 - \frac{1}{4} (\Delta\psi)^2 \psi^{ij} \psi_{ij} + \frac{1}{8} (\psi^{ij} \psi_{ij})^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3} \Delta\psi \psi^{ij} \psi_j^k \psi_{ik} - \frac{1}{4} \psi^{ij} \psi^{kl} \psi_{ik} \psi_{jl}, \\
 &\quad \vdots \\
 K_n(x) &= \text{Tr}(\text{Min}(g^{-1}k; n)) = \det(g^{-1}K).
 \end{aligned}$$

Ici Tr désigne la trace tandis que $\text{Min}(A, k)$ est le $k^{\text{ème}}$ mineur de la matrice A .

$H(x)$ et $K_n(x)$ sont respectivement les courbures moyenne et totale de la surface Σ au point $(x, \psi(x))$.

B

Équation Fuchsienne généralisée et forme de la solution

Dans cette annexe, nous allons, pour une équation Fuchsienne généralisée donnée, déterminer dans quels espaces de séries formelles en T et $\ln T$ il faut chercher des solutions formelles.

Cette étude a pour but d'automatiser, autant que faire se peut, les raisonnements tenus dans les sous-sections 1.1.1 et 1.2.1.

B.1 Problème

Intéressons nous pour commencer à l'équation suivante :

$$Q(D)v = F + T.P[v] \quad (\text{B.1})$$

où Q est un polynôme en $D = T\partial_T$ et P est polynomial en T, v, Dv, \dots de degré (en v, Dv, \dots) supérieur ou égal à deux (second membre non linéaire).

Écrivons :

$$Q(D) = R(D)D^{\alpha_1}(D-1)^{\alpha_2} \dots (D-k)^{\alpha_{k+1}} \dots, \quad (\text{B.2})$$

où $\forall n \in \mathbb{N}, R(n) \neq 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, i est donc résonance d'ordre α_i (éventuellement nul).

Remarque B.1.1. Si $F = 0$, alors on fait l'hypothèse supplémentaire $\alpha_1 \geq 1$. Cette dernière condition est une conséquence directe du bon déroulement de l'algorithme de Fuchsianisation qui a mené à (B.1). En effet, on va chercher une solution de la forme $v = v_0 + Tw$. Si $\alpha_1 = 0$, on doit forcément choisir $v_0 = 0$ et donc on peut réappliquer l'algorithme (i. e. factoriser par T à gauche et à droite et linéariser)

On recherche v sous la forme :

$$v = v_0 + v_1 T + v_2 T^2 + \dots, \quad (\text{B.3})$$

où v_k est un polynôme en $\ln T$ de degré q_k .

Posons maintenant, pour tous s et $l \geq 0$,

$$\mathcal{A}_{l,s} = \left\{ \sum_{\substack{0 \leq p \\ 0 \leq q \leq l(p+s)}} a_{pq} (\ln T)^q T^p \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Le problème est maintenant de trouver pour quels l et s on peut construire une solution formelle de l'équation (B.1) de la forme (B.3) et qui soit dans $\mathcal{A}_{l,s}$.

Précisons pour cela la forme de $P[v]$:

$$P[v] = \sum_{0 \leq k} P_k[v] T^k,$$

où $P_k[v]$ est un polynôme en v , Dv , D^2v , ... de degré p_k .

B.2 Analyse et synthèse

En remplaçant $v = v_0 + v_1 T + v_2 T^2 + \dots$ dans l'équation (B.1) et en séparant les termes de même degré en T , on trouve :

$$\begin{cases} R(D)D^{\alpha_1} \dots (D-k)^{\alpha_{k+1}} \dots v_0 = F, \\ R(D+k)(D+k)^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_{k+1}} \dots v_k = \{P[v]\}_{k-1}, \forall k \geq 1. \end{cases}$$

Écrivons tout d'abord :

$$\deg v_k = q_k \leq l_k (k+s),$$

où (l_k) est une suite croissante.

Alors la première équation ci-dessus se traduit immédiatement par :

$$s l_0 = \tilde{\alpha}_1, \quad (\text{B.5})$$

où

$$\tilde{\alpha}_1 = \begin{cases} \alpha_1 - 1 & \text{si } F = 0, \\ \alpha_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part, le membre de gauche de la deuxième équation est de degré $q_k - \alpha_{k+1}$ en $\ln T$ tandis que le membre de droite est de degré inférieur ou égal à :

$$l_{k-1} \sup_{r \geq 0} (k-1-r+sp_r).$$

En effet :

$$\{P[v]\}_{k-1} = \left\{ \sum_{r \geq 0} T^r P_r[v] \right\}_{k-1} = \sum_{r \geq 0} \underbrace{\{P_r[v]\}}_{\text{de degré } p_r} \}_{k-r-1},$$

et donc,

$$\begin{aligned} \deg \{P[v]\}_{k-1} &\leq \sup_{\substack{r \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_{p_r} = k-r-1}} l_{k-1} (k_1 + s + \dots + k_{p_r} + s), \\ &\leq l_{k-1} \sup_{r \geq 0} (k-r-1+sp_r). \end{aligned}$$

Ainsi il faut nécessairement :

$$l_k(k+s) \geq l_{k-1} \sup_{r \geq 0} (k-1-r+sp_r) + \alpha_{k+1}, \quad \forall k \geq 1,$$

i. e.

$$(l_k - l_{k-1})(k+s) \geq l_{k-1} \sup_{r \geq 0} [(p_r - 1)s - r - 1] + \alpha_{k+1}. \quad (\text{B.6})$$

Posons maintenant :

$$s_0 = \inf_{p_r \geq 2} \frac{r+1}{p_r-1}.$$

Remarquons que s_0 est bien défini, positif ou nul puisque le second membre est non-linéaire.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème B.1. *On distingue trois cas :*

(i) *Si $s_0 > 0$ alors l'équation Fuchsienne (B.1) admet des solutions formelles dans $\mathcal{A}_{l,s}$ avec :*

$$\begin{cases} s \geq s_0 = \inf_{p_r \geq 2} \frac{r+1}{p_r-1}, \\ l \geq \tilde{l} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{s_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{k+1}}{k+s_0}; \end{cases}$$

(ii) *Si $s_0 = 0$ et $\tilde{\alpha}_1 = 0$ alors l'équation Fuchsienne (B.1) admet des solutions formelles dans $\mathcal{A}_{l,s}$ avec :*

$$\begin{cases} s \geq s_0 = 0, \\ l \geq \tilde{l} = \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{k+1}}{k}; \end{cases}$$

(iii) *Si $s_0 = 0$ et $\tilde{\alpha}_1 > 0$ alors l'équation Fuchsienne (B.1) n'admet dans le cas général pas de solution dans des ensembles de séries formelles du type $\mathcal{A}_{l,s}$.*

Démonstration. (i) **Si $s_0 > 0$:** On choisit $s = s_0$ et $l_0 = \frac{\tilde{\alpha}_1}{s_0}$. Alors la condition (B.5) est vérifiée tandis que (B.6), la contrainte sur l , se ramène à :

$$l_k - l_{k-1} \geq \frac{\alpha_{k+1}}{k+s_0}, \quad \forall k \geq 1,$$

et donc on peut prendre :

$$l \geq \tilde{l} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{s_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{k+1}}{k+s_0}.$$

(ii) **Si $s_0 = 0$ et $\tilde{\alpha}_1 = 0$:** On choisit encore $s = s_0 = 0$ et $l_0 = 0$. Dans ce cas la condition (B.5) est encore satisfaite et (B.6) conduit comme précédemment à :

$$l_k - l_{k-1} \geq \frac{\alpha_{k+1}}{k}, \quad \forall k \geq 1,$$

i. e.

$$l \geq \tilde{l} = \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{k+1}}{k}.$$

(iii) Si $s_0 = 0$ et $\tilde{\alpha}_1 \geq 1$: Dans ces conditions, on ne peut *a priori* pas espérer trouver une solution formelle dans $\mathcal{A}_{l,s}$. Il suffit pour s'en convaincre d'étudier attentivement l'exemple suivant :

$$D^2 v = \sum_{r \geq 1} T^r v^{r^2}.$$

En effet si l'on cherche une solution v de la forme (B.3) il vient de façon presque immédiate :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0 = 1, \\ l_1 = 1, \\ l_2 = 4, \\ l_3 = 9, \\ \vdots \\ l_k = k^2, \\ \vdots \end{array} \right.$$

Donc il n'existe pas de couple (l, s) tel que $l_k \leq l(k + s)$ pour tous $k \geq 0$. □

B.3 Généralisation au cas d'un système Fuchsien

En raisonnant de manière tout à fait analogue, on peut énoncer le théorème B.2 ci-après qui précise la forme des solutions du système Fuchsien non-linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(D)v^{(1)} = F_1 + T P_1[v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}], \\ Q_2(D)v^{(2)} = F_2 + T P_2[v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}], \\ \vdots \\ Q_p(D)v^{(p)} = F_p + T P_p[v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}], \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

où les Q_i et les P_i s'écrivent respectivement :

$$Q_i(D) = R_i(D) D^{\alpha_1^{(i)}} (D-1)^{\alpha_2^{(i)}} \dots (D-k)^{\alpha_{k+1}^{(i)}} \dots,$$

et

$$P_i[v^{(1)}, \dots, v^{(p)}] = \sum_{k \geq 0} P_k^{(i)}[v^{(1)}, \dots, v^{(p)}] T^k,$$

avec $R_i(n) \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et où les $P_k^{(i)}$ sont des expressions polynomiales en $v^{(1)}, Dv^{(1)}, \dots, v^{(p)}, Dv^{(p)}$ de degré $p_k^{(i)}$.

Remarque B.3.1. Si $F_i = 0$ alors on fait l'hypothèse supplémentaire que $\alpha_1^{(i)} \geq 1$ i. e. 1 est résonance.

Posons maintenant pour tout $1 \leq i \leq p$:

$$\tilde{\alpha}_1^{(i)} = \begin{cases} \alpha_1^{(i)} - 1 & \text{si } F_i = 0, \\ \alpha_1^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons également :

$$s_0 = \inf_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p_r^{(i)} \geq 2}} \frac{r+1}{p_r^{(i)} - 1},$$

$$\tilde{A}_1 = \sup_{1 \leq i \leq p} \tilde{\alpha}_1^{(i)},$$

et pour tout $k \geq 2$:

$$A_k = \sup_{1 \leq i \leq p} \alpha_k^{(i)}.$$

On suppose enfin que le système Fuchsien (B.7) est non-linéaire; alors s_0 est bien défini, positif ou nul puisqu'il existe $r \geq 0$ et $1 \leq i \leq p$ tels que $p_r^{(i)} \geq 2$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat annoncé :

Théorème B.2. On distingue de nouveau trois cas :

(i) Si $s_0 > 0$ alors le système Fuchsien (B.7) admet des solutions formelles $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(p)})$ dont chacune des composantes est dans $\mathcal{A}_{l,s}$ avec :

$$\begin{cases} s \geq s_0, \\ l \geq \tilde{l} = \frac{\tilde{A}_1}{s_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{A_{k+1}}{k + s_0}; \end{cases}$$

(ii) Si $s_0 = 0$ et $\tilde{A}_1 = 0$ alors le système Fuchsien (B.7) admet des solutions formelles $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(p)})$ dont chacune des composantes est dans $\mathcal{A}_{l,s}$ avec :

$$\begin{cases} s \geq s_0 = 0, \\ l \geq \tilde{l} = \sum_{k \geq 1} \frac{A_{k+1}}{k}; \end{cases}$$

(iii) Si $s_0 = 0$ et $\tilde{A}_1 > 0$ alors le système Fuchsien (B.7) n'admet dans le cas général pas de solution dont les composantes sont dans des ensembles de séries formelles du type $\mathcal{A}_{l,s}$.

La preuve est en tout point similaire à celle du théorème B.1 démontré plus haut.

B.4 Optimisation

On vient d'exhiber des valeurs de l et s pour lesquelles l'équation (B.1) admet une solution formelle dans $\mathcal{A}_{l,s}$. Dans quelle mesure peut-on améliorer le choix de l pour $s = s_0$ fixé ?

Plaçons nous dans l'un des deux premiers cas précédents ($s_0 > 0$ ou $s_0 = 0$ et $\tilde{\alpha}_1 = 0$). Alors, si l'on pose encore $s = s_0$, l'équation (B.6) conduit à :

$$l_k - l_{k-1} \geq 0,$$

dés lors que α_{k+1} est nul. Ainsi, si k_0 est la plus grande résonance positive (*i. e.* $\alpha_k = 0$, pour tous $k > k_0$), il suffit de calculer explicitement q_k le degré en $\ln T$ de v_k pour les premiers termes de la série ($0 \leq k \leq k_0 - 1$) puis de poser :

$$l = \max_{0 \leq k \leq k_0 - 1} \frac{q_k}{k + s_0}$$

Un tel couple (l, s_0) est alors clairement optimal :

Théorème B.3. *Si k_0 est la plus grande résonance positive alors, pour s fixé à s_0 , la valeur optimale de l est :*

$$l = \max_{0 \leq k \leq k_0 - 1} \frac{q_k}{k + s_0}.$$

Un corollaire presque immédiat au résultat ci-dessus est le suivant :

Corollaire. *Si l'équation Fuchsienne (B.1) admet une unique résonance strictement positive alors, pour $s = s_0$ fixé, la valeur optimale pour l est égale à \tilde{l} définie dans le théorème B.1.*

Pour le cas du système Fuchsien (B.7) on peut tenir un raisonnement tout à fait semblable et déterminer de la même façon, pour $s = s_0$ fixé, la meilleure valeur possible pour l .

B.5 Application à quelques exemples

Nous allons étudier ici quelques exemples. En particulier, nous allons appliquer les résultats ci-dessus aux équations Fuchiennes que nous avons été amenés à considérer dans les sous-sections 1.1.1 et 1.2.1.

B.5.1 Cas de l'équation cubique réelle NLCR

Au cours de la sous-section 1.1.1 nous avons étudié l'équation Fuchsienne suivante :

$$\begin{aligned} u_0^2 (D + 2)(D - 3)v &= \Delta \Psi u_0 + 2\Psi^i u_{0i} \\ &+ T(6u_0 v^2 + \Delta_X u_0 - \Delta \Psi Dv - 2\Psi^i Dv_i) + T^2(2v^3 + \Delta_X v). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Grâce à un raisonnement par récurrence, nous avons prouvé que cette équation admet des solutions formelles dans l'ensemble $\mathcal{A}_{1/4,1}$.

En reprenant les notations précédentes, $Q(D)$ admet 4 comme unique résonance avec une multiplicité égale à 1. De plus, après étude du membre de droite, on trouve :

$$s_0 = 1.$$

Alors :

$$\tilde{l} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{s_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{k+1}}{k + s_0} = 0 + \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4}.$$

Le théorème B.1 et le corollaire du théorème B.3 permettent donc de conclure, sans aucun calcul supplémentaire, que l'équation Fuchsienne (1.5) admet des solutions formelles dans $\mathcal{A}_{1/4,1}$ et que pour $s = 1$ fixé, la valeur $l = 1/4$ est optimale.

B.5.2 Cas de l'équation cubique complexe NLCC

Dans la sous-section 1.2.1 nous avons été amenés à étudier le système Fuchsien suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_0|^4 (D + 2)(D - 3) a = \Delta \psi |u_0|^2 + \psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + \psi^i \bar{u}_{0i} u_0 \\ \quad + T \left[2 |u_0|^4 (3 a^2 - b^2) + \beta |u_0|^2 - |u_0|^2 \Delta \psi Da \right. \\ \quad + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0) - (\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 - \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Db \\ \quad \left. - (\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Da - 2 |u_0|^2 \psi^i D \partial_{X_i} a \right] \\ \quad + T^2 \left[(u_0^i \bar{u}_0 + \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} a + (u_0^i \bar{u}_0 - \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} b \right. \\ \quad + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0) a + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0) b \\ \quad \left. + 2 |u_0|^4 a (a^2 - b^2) + |u_0|^2 \Delta_X a + \beta |u_0|^2 a \right], \\ |u_0|^4 (D + 1)(D - 2) b = \psi^i u_{0i} \bar{u}_0 - \psi^i \bar{u}_{0i} u_0 + T \left[(\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 - \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Da \right. \\ \quad + (\psi^i u_{0i} \bar{u}_0 + \psi^i \bar{u}_{0i} u_0) Db - \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0) \\ \quad \left. - 4 |u_0|^4 a b + 2 |u_0|^2 \psi^i D \partial_{X_i} b + |u_0|^2 \Delta \psi Db \right] \\ \quad + T^2 \left[(u_0^i \bar{u}_0 + \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} b + (u_0^i \bar{u}_0 - \bar{u}_0^i u_0) \partial_{X_i} a \right. \\ \quad + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 + \Delta \bar{u}_0 u_0) b + \frac{1}{2} (\Delta u_0 \bar{u}_0 - \Delta \bar{u}_0 u_0) a \\ \quad \left. + \beta |u_0|^2 b + 2 |u_0|^4 b (a^2 - b^2) + |u_0|^2 \Delta_X b \right]. \end{array} \right. \quad (1.14-1.15)$$

Grâce à un raisonnement par récurrence, nous avons prouvé que ce système admet des solutions formelles (a, b) dont chaque composante est dans $\mathcal{A}_{1/3,1}$.

En reprenant les notations précédentes, $Q_1(D)$ et $Q_2(D)$ admettent respectivement 4 et 3 comme uniques résonances avec une multiplicité égale à 1. De plus, après étude des membres de droite, on trouve encore :

$$s_0 = 1.$$

Alors :

$$\tilde{l} = \frac{\tilde{A}_1}{s_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{A_{k+1}}{k + s_0} = 0 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} = \frac{7}{12}.$$

Le théorème B.2 permet alors de conclure, sans aucun calcul supplémentaire, que le système Fuchsien (1.14-1.15) admet des solutions formelles dont chaque composante est dans $\mathcal{A}_{7/12,1}$. La valeur de l que l'on vient de trouver, n'est clairement pas optimale. Par contre, l'étude menée plus haut dans la section B.4, permet d'éviter la récurrence entreprise dans la sous-section 1.2.1 et de donner, pour $s = s_0 = 1$, la valeur optimale de l , aussitôt que l'on a calculé les 4 premiers termes des séries formelles en T pour a et b . On trouve comme prévu $l = \sup\{0, 0, 0, 1/4, 0, 0, 1/3, 1/4\} = 1/3$.

B.5.3 Équation $D^2(D-2)^5(D-3)^4(D-5)^2v = T(v^3 + Tv^3 + T^4v)$

Ici $Q(D)$ admet 1, 3, 4 et 6 comme résonances, avec pour multiplicités respectives 2, 5, 4 et 2. Dans ce cas :

$$s_0 = \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\tilde{l} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{s_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{k+1}}{k + s_0} = \frac{424}{77} \simeq 5,51$$

Le théorème B.1 assure donc l'existence de solutions formelles de l'équation ci-dessus dans les $\mathcal{A}_{l,s}$ avec $s \geq s_0$ et $l \geq \tilde{l}$.

En fait, pour cet exemple, un calcul un peu fastidieux montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = 1, \\ q_1 = 3, \\ q_2 = 10, \\ q_3 = 16, \\ q_4 = 18, \\ q_5 = 23. \end{array} \right.$$

Et donc, conformément au théorème B.3, pour s fixé à $s_0 = 1/2$, le choix optimal pour l est :

$$l = \max\{2, 2, 4, 32/7, 4, 46/11\} = \frac{32}{7} \simeq 4,57.$$

Pour cette équation le couple $(s, l) = (s_0, \tilde{l})$ défini au théorème B.1 n'est donc pas optimal.

Index

- B_α , 47
- $C_j^1(h)$, 70
- $C_j^2(h)$, 70
- $C_j^3(h)$, 70
- D , 17
- $E(\alpha)$, 3
- $H(x_1, x_2)$, 104
- $K(x_1, x_2)$, 104
- N , 28, 64
- $R(h)$, 66
- T , 17
- U_i^j , 65
- X , 17
- Y , 28
- $\Lambda_{[m, M]}$, 64
- Σ , 1
- δ , 68, 83, 87
- λ , 64
- $\tilde{\Psi}$, 87
- \mathcal{A} , 69
- \mathcal{N} , 69
- ψ , 1
- ds , 101
- h , 64
- k , 64
- $q_0(u)$, 4
- $r(x, t)$, 66
- t_j , 64
- t_{fin} , 70
- x_i , 64
- équation Fuchsienne, 107
- \square , 1
- NLCRF, 4
- NLCR, 1
- IE, 3
- NLCC-bis, 13
- NLCC, 1
- SFR, 18
- SFC, 22
- SchInv2, 78
- SchInv1, 78
- SchNu, 65
- “exacte”, 56
- condition de stabilité de CFL, 65
- consistance, 66
- deuxième forme fondamentale, 103
- inégalité de Gagliardo-Nirenberg, 62
- première forme fondamentale, 103
- réduction Fuchsienne, 1
- séries tronquées, 54
- séries tronquées inverses, 59
- schémas inverses, 77
- solution classique, 54
- solution H^1 , 54

Bibliographie

- [1] C. Antonini, F. Merle, Optimal bounds on positive blow-up solutions for a semilinear wave equation, *Internat. Math. Res. Notices*, 21, 1141-1167 (2001).
- [2] J.-M. Bony, Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires, *Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz*, 1983-1984, École Polytechnique (17 janvier 1984).
- [3] H. Brezis, Notes de cours de DEA *Univ. Paris VI, non publié*, (1984).
- [4] G. Cabart, S. Kichenassamy, Explosion et normes L^p pour l'équation des ondes non-linéaire cubique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 335, 903-908 (2002).
- [5] M. Crouzeix, A. L. Mignot, Analyse numérique des équations différentielles, 2^{ème} éd., *Masson*, (1989).
- [6] S. Kichenassamy, W. Littman, Blow-up surfaces for nonlinear wave equations, I, *Commun. in Partial Differential Equations*, 18(3&4), 431-452 (1993).
- [7] S. Kichenassamy, W. Littman, Blow-up surfaces for nonlinear wave equations, II, *Commun. in Partial Differential Equations*, 18(11), 1869-1899 (1993).
- [8] S. Kichenassamy, G. K. Srinivasan, The structure of WTC expansion and applications, in *J. Phys. A : Math. Gen.*, 28, 1977-2004 (1995).
- [9] S. Kichenassamy, The Blow-up problem for exponential nonlinearities, *Commun. in Partial Differential Equations*, 21(1&2), 125-162 (1996).
- [10] S. Kichenassamy, Fuchsian equations in Sobolev spaces and blow-up, *J. of Differential Equations*, 125, 299-327 (1996).
- [11] S. Kichenassamy, Stability of blow-up patterns for non-linear wave equations , *Contemp. Math.*, 255, 139-162 (2000).
- [12] S. Kichenassamy, On a conjecture of Fefferman and Graham, *Adv. Math.*, à paraître.
- [13] H. Lindblad, C. Sogge, On existence and scattering with minimal regularity for non-linear wave equations, *J. Funct. Anal.*, 130, 357-426 (1995).
- [14] W. Strauss, Nonlinear wave equations, *CBMS Lecture Notes*, Vol. 73, American Mathematical Society, Providence (1999).

Bibliographie

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de deux équations des ondes semi-linéaires présentant une non-linéarité de type cubique :

$$\square u = 2u^3, \quad (\text{NLCR})$$

et

$$\square u + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} = 2u|u|^2 + \beta u, \quad (\text{NLCC})$$

où $\alpha \in i\mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On prouve d'abord, en s'appuyant sur les techniques de réduction Fuchsienne développées par S. Kichenassamy et *al.*, l'existence, pour plusieurs classes d'hypersurfaces de genre espace de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, de solutions explosant exactement sur la surface considérée. Par ailleurs, l'aspect constructif des méthodes nous offre de nombreuses informations sur la forme de ces solutions au voisinage de leur surface d'explosion.

La suite est consacrée à diverses applications des connaissances acquises : on exploite notamment celles concernant le comportement des solutions près de leur lieu d'explosion, pour répondre partiellement à trois questions :

- Comment se comporte, près de la surface d'explosion, une intégrale particulière construite sur le modèle de l'"intégrale d'énergie" canoniquement associée avec l'équation (NLCR) ?
- Dans quels espaces de type L^p , les solutions de l'équation (NLCR) –éventuellement un peu perturbée– peuvent-elles exploser ou pas ?
- Dans quelle mesure peut-on mettre en oeuvre une étude numérique complète de l'équation (NLCR), prenant en compte les difficultés inhérentes à l'explosion ?

Mots-clés : équation des ondes semi-linéaire, non-linéarité cubique, comportement à l'explosion, étude numérique