

工学博士学位论文

框架结构截面和拓扑优化
的方法与软件开发

杜家政

北京工业大学

2004年4月

分类号 TU323.5

单位代码: 10005

学 号: B200101009

密 级:

北京工业大学博士学位论文

题 目: 框架结构截面和拓扑优化的方法与软件开发

英文并列

题 目: METHODS AND SOFTWARE DEVELOPMENT

OF SECTIONAL AND TOPOLOGICAL OPTIMIZATION

OF FRAME STRUCTURES

研究生姓名: 杜 家 政

专 业: 机械设计及理论

研究方向: 结构优化

导师 姓名: 隋 允 康

职 称: 教 授

郭 英 乔

教 授

论文报告提交日期: 2004 年 4 月

学位授予日期: _____

授予单位名称和地址: 北京工业大学 北京市朝阳区平乐园 100 号

Ph. D. Dissertation

**Methods and Software Development
of Sectional and Topological Optimization
of Frame Structures**

Specialty **Machine Design and Theory**

Doctoral Candidate **Du Jiazheng**

Supervisor **Professor Sui Yunkang**

Professor Guo Yingqiao

Beijing University of Technology

April 2004

独创性声明

本人声明所提交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京工业大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名：_____ 日期：_____

关于论文使用授权的说明

本人完全了解北京工业大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____

摘要

框架结构因其良好的传力特性，被广为采用在工程实际当中。尽管框架结构分析已不成问题，但对平面和空间框架结构进行优化方法的研究及开发相应的软件却有大量工作可做，而且因其有非常重要的安全与经济意义，相应的工作具有迫切性。正是为了适应工程界对于框架结构优化方法和软件的需求，本文对框架结构的截面和拓扑优化的方法进行了研究。

框架结构截面优化的理论虽然比较成熟，但从大型通用优化软件实现的角度看，还远不能尽如人意，其优化模型的建立和求解等各个环节的方法都有许多问题急待解决，它们对优化效率、优化结果以及程序实现等都有很大的影响，需要进行进一步认真的研究，从而为程序开发提供可靠的依据。

在框架结构拓扑优化方面，应当指出：框架结构有类似于桁架结构的特点，都属于骨架类结构，然而由于研究者往往忽视了两者的本质区别，未能将连续体拓扑优化的结果转化为框架结构，却直接简化为桁架结构；在骨架类结构方面只研究桁架结构拓扑优化，很少涉及框架结构的拓扑优化；然而研究表明：两者之间的本质区别对结构拓扑结果的影响不容忽视；因此，对框架结构拓扑优化方法的研究不仅具有实用价值，而且具有非常重要的理论意义。

本文在对框架结构截面和拓扑优化做了理论和方法研究的基础上，首次利用 MSC.Patran&Nastran 软件作为平台，开发了相应的软件，主要研究内容包括：

1 框架结构截面优化的方法

1.1 框架结构截面优化模型的建立

对不同性质的约束采用不同的处理方法：应力约束是局部性约束，为避免一阶近似带来的繁重计算量，将其按零阶近似处理，并借鉴满应力准则将应力约束转化为动态尺寸下限；位移约束作为全局性约束，不能采用零阶近似，根据单位虚载荷法将其显式化。通过上述对应力和位移约束的处理，建立了以结构重量为目标、满足应力和位移约束的框架结构的近似显式优化模型，并分别用截面惯性矩为设计变量和无量纲的设计变量进行了研究。

1.2 优化模型的求解

上述模型的求解难度会随着设计变量的增多而不断加大，求解效率也会随之降低。为了提高模型的求解效率，依据关系映射反演（RMI）的方法论思想，根据对偶理论求解原问题的对偶模型，通过在对偶空间迭代求解对偶模型得到原模型的解。

1.3 近似射线步技术和删除无效约束技术

近似射线步技术就是根据结构响应和约束的关系计算得到一个射线步系数，然后所有设计变量同时乘以这个系数将设计点从可行域外或可行域内拉到可行域边界附近，能有效降低每次迭代的计算量，使迭代过程更加平稳。删除无效约束技术就是在近似射线步以后，根据一定的准则，将约束分为无效约束和有效约束，删除无效约束，保留有效约束，减小优化模型的规模，提高求解效率。

2 框架结构拓扑优化的方法

2.1 框架结构的拓扑优化模型的建立

基于隋允康教授提出的 ICM (Independent Continuous Mapping, 即独立、连续、映射) 方法, 对单元重量、单元许用应力和单元刚度分别引入不同的过滤函数, 把 0-1 型离散拓扑变量转化为 $[0, 1]$ 区间上的连续拓扑变量, 建立了拓扑变量连续的优化模型。

2.2 调整折减系数搜索最佳阈值

为了能使程序快速准确的得到满足约束的最优拓扑结构, 根据框架结构的特性引入结构非奇异、结构响应不被违背和结构重量不改变三个准则判断迭代收敛, 并根据这三个准则的满足情况, 在优化迭代过程中自适应的调整折减系数来搜索最佳阈值。

2.3 删除单元的处理方法

根据阈值可以将连续的拓扑变量回归为 0-1 型拓扑变量, 拓扑变量为 0 的单元应该删除, 但是如果直接将单元删除将会引起结构奇异、误删单元不能恢复等一系列的问题, 而不能得到最优的拓扑结构。因而不能将单元真正删除, 而是用非常“弱”的单元 (对结构响应作用可以忽略的单元) 进行处理。本文根据框架结构的特性提出了两种处理方法: “弱材料”单元法和“小截面”单元法。

2.4 多工况拓扑优化问题的处理方法

结构拓扑优化的本质是对结构最佳传力路径的寻求, 多工况的拓扑优化问题涉及到多个最佳传力路径的权衡, 处理的难度非常大, 因此探索多工况下的优化策略十分重要。本文按局部性约束、全局性约束及两者的结合三种情况进行了处理: 第一种情况按“包络法”和“平均法”两种方法进行数值实验比较; 第二种情况按数学规划对多工况进行统一计算; 第三种情况是对前二种情况的恰当综合。

3 软件开发

根据上述模型和算法, 对 MSC.Patran&Nastran 软件进行软件二次开发, 以 MSC.Nastran 软件为有限元求解器, 以 MSC.Patran 软件为开发平台, 完成了框架结构截面和拓扑优化软件, 能够对应力和位移约束下的框架结构进行截面和拓扑优化。算例表明该软件比 MSC.Nastran 的优化模块效率更高、结果更优。

关键词 框架结构; 截面优化; 拓扑优化; 二次开发; MSC.Patran&Nastran 软件平台

Abstract

For the excellent characteristic of transmitting force, the frame structures are widely adopted in engineering practice. Although there is no problem in the structural analysis of the frame structures, there is plenty of work to do about the researches on optimization methods of planar and spatial frame structures and the development of the relevant software. Moreover the relevant work is in urgent need for its very important safe and economic significance. To satisfy the requirements of the engineering cycles to the optimization methods and software of frame structures, the sectional and topological optimization methods of frame structures are researched in this paper.

The sectional optimization theory of frame structures is relatively mature, but it is not perfect in view of the implementation of large-scale general optimization software. So it is very urgent to solve the problems about the methods of modeling and solution etc, which have great effects on the optimization efficiency, the maximum results and the program implementation. Farther researches are required to provide the credible foundation for the program development.

On the aspect of topological optimization of frame structures, it must be indicated that the essential difference between truss structures and frame structures is often ignored for both of them are very similar and belong to the skeleton structures. As a result, the optimum topologies of continuum structures are not transformed to frame structures but directly simplified to truss structures and the researches are mainly concentrated on the topological optimization of truss structures and are little related to the topological optimization of frame structures. But the researches show that the effect of the essential difference on structural topological results should not be ignored. So the researches on the topological optimization method of frame structures have not only the applied value but also the very important theoretical significance.

Based on the researches on the theory and method of the sectional and topological optimization of frame structures, the relevant software is firstly developed with the MSC.Patran&Nastran software. The main contents researched in this paper are as follows.

1 Sectional Optimization Method of Frame Structures

1.1 Sectional Optimization Modeling of Frame Structures

Different methods are adopted to process the constraints with different properties. To avoid the heavy computations from the first-order approximation, the stress constraints as a local constraint are approached in term of the zero-order approximation to transform to movable sectional lower limits with the full stress criterion. The displacement constraints as a global constraint can not be approached in term of the zero-order approximation but are transformed to explicit expressions with the unit virtual load method. By above processes to stress and displacement

constraints, an approximate explicit sectional optimization model of frame structures is built with stress and displacement constraints with structural weight as object, and the model is researched respectively with sectional moment of inertias as design variables and dimensionless design variables.

1.2 Solution of the Optimization Model

Above model is becoming more difficult to solve along with more and more design variables and the solving efficiency decreases too. To improve the solving efficiency, according to the methodology of Relation Mapping Inverse (RMI), the dual model of the original optimization model is solved according to the dual theory by iteratively solving the dual model in its dual space.

1.3 Approximate Scaling Step and Deletion of Negative Constraints

Approximate scaling step is a technique to move the design point from the outer or the inner of feasible region to the boundary with multiplying all design variables by a scaling step factor, which is computed with the relations between the structural response and the constraints. The technique can effectively decrease the iterative computations and smooth the iterative process. Deletion of negative constraints is a technique to divide the constraints to the effective and the negative according to a specific criterion after the approximate scaling step. The negative constraints are deleted and the effective constraints are reserved, which can reduce the size of the optimization model to improve the solving efficiency.

2 Topological Optimization Method of Frame Structures

2.1 Topological Optimization Modeling of Frame Structures

Based on the ICM (Independent Continuous Mapping) method presented by Prof. SUI Yunkang, different filter functions of element weight, element allowable stress and element stiffness are introduced to change the 0-1 type discrete topological variables to continuous topological variables between 0 and 1, thus a topological optimization model with continuous topological variables is built.

2.2 Adjusting the Discount Factor to Search for Optimum Doorsill

For quickly and accurately obtaining the optimum topological structures, three criteria which are no singular structures, no violated constraints of structural responses and no changed structural weight are introduced to judge iteration convergence. According to the three criteria, an appropriate doorsill is found by adaptively adjusting a discount factor in the process of iteratively solving.

2.3 Method of Processing the Deleted Elements

According to the doorsill, the continuous topological variables can be regressed to the 0-1 type discrete topological variables. The elements whose topological variables are zero should be deleted. But if the elements are deleted indeed, many problems as structures are singular and falsely deleted elements can't be recovered will come forth so that the optimum topological structures can not be obtained. So the elements can not be deleted indeed but should be processed with very weak elements whose effect on structural responses can be ignored. According to the characteristic of frame structures, two processing methods are presented, which are weak material

element method and tiny section element method.

2.4 Method of Processing Topological Optimization Problems under Multiple Loading Cases

Essentially, structural topological optimization is to seek the best path of structures transmitting forces, so the topological optimization under multiple loading cases is involved in the balance of many paths of transmitting forces, which is difficult to process. So the researches on optimization strategy under multiple loading cases are very important. The optimization problem under multiple loading cases is processed in term of three conditions, which are local constraints, global constraints and their combination. The problem is processed with envelope method and average method in the first condition, is uniformly computed with mathematical programming in the second condition and is processed by synthesizing the methods of above two conditions in the third condition.

3 Software Development

According to above model and arithmetic, the MSC.Patran&Nastran software is secondly developed. With MSC.Nastran software as the structural analysis solver and MSC.Patran software as developing platform, the sectional and topological optimization software of frame structures is accomplished, which can optimize the section and topology of frame structures with stiffness and strength constraints. The examples show that the software is more effective and has better results than the optimization module of MSC.Nastran software.

Key Words: Frame Structures; Sectional Optimization; Topological Optimization; Secondly Developing; MSC.Patran&Nastran Software Platform

Méthodes et implantation de l'optimisation de section et de topologie des structures de poutre

Résumé

A fin de satisfaire les besoins industriels en outils numériques pour l'analyse et la conception de structures, des méthodes d'optimisation de forme et de topologie des structures de poutre sont proposées et les logiciels correspondants sont développés en utilisant les codes commerciaux MSC/Patran & Nastran comme plates-formes.

Pour établir un modèle explicite de l'optimisation de section de poutre avec les limitations de contraintes et de déplacements, différentes méthodes sont proposées pour traiter ces limitations. Les limitations locales de contraintes sont traitées avec une approximation d'ordre zéro (au lieu d'ordre un) et transformées en limitations variables de section en utilisant le critère de pleines contraintes ; les limitations globales de déplacements sont transformées en expressions explicites en utilisant la méthode de chargement virtuel unitaire. Pour obtenir une résolution efficace, le modèle original de l'optimisation est transformé en un problème dual et résolu dans son espace dual. Une technique dite « Approximate Scaling Step » est adoptée pour diminuer le calcul et lisser le processus itératif. L'élimination des limitations négatives permet de réduire la taille du système à optimiser.

Basé sur la méthode ICM (Independent Continuous Mapping), les fonctions de filtre en poids, en contraintes et en rigidité des éléments sont introduites pour transformer les variables topologiques discrètes du type 0-1 en celles continues entre 0 et 1, ainsi le modèle d'optimisation topologique avec les variables de conception continues est établi. Trois critères de convergence sont utilisés pour l'arrêt du processus itératif : la structure n'est pas singulière, les limitations sont respectées et le poids de la structure ne change plus. Selon ces trois critères, un seuil approprié peut être obtenu en ajustant le facteur d'escompte peut être obtenu permettant de retrouver les variables topologiques discrètes du type 0-1 à partir de celles continues. Pour traiter les éléments ayant leurs variables topologiques nulles, les méthodes de toute faible rigidité ou de toute petite section sont proposées et comparées entre elles. L'optimisation topologique dans différents cas de chargement est aussi étudié sous les limitations locales de contraintes ou/et les limitations globales de déplacements.

Selon les modèles mentionnés ci-dessus, les logiciels MSC/Patran & Nastran sont exploités à nouveau. En utilisant le logiciel MSC/Nastran & Patran comme solveur et plates-formes, un logiciel pour l'optimisation de section et de topologie des structures de poutre sous les limitations de contraintes et de déplacements a été développé. Plusieurs exemples numériques ont clairement montré l'amélioration de l'efficacité et la performance de nos méthodes par rapport à celle du MSC/Patran & Nastran.

Mots clés : Structures de poutre; optimisation de section; optimisation de topologie; problème dual; méthode ICM, plates-formes MSC/Patran&Nastran

摘要.....	I-II
Abstract.....	III-VI
第 1 章 绪 论.....	1
1.1 结构优化的意义.....	1
1.2 国内外文献综述.....	3
1.2.1 结构尺寸优化.....	3
1.2.2 结构拓扑优化.....	4
1.3 本研究的主要内容.....	6
第 2 章 软件开发的工具和途径.....	9
2.1 软件开发的工具.....	9
2.1.1 开发平台——MSC.Patran 软件.....	9
2.1.2 有限元求解器——MSC.Nastran 软件.....	10
2.2 软件开发的途径.....	10
2.2.1 用户程序的编译与连接.....	10
2.2.2 用户界面的形成.....	11
2.2.3 数据交换.....	14
2.2.4 子函数和子程序的编写.....	16
第 3 章 框架结构截面优化方法及程序实现.....	19
3.1 引言.....	19
3.2 满足强度的框架截面优化设计.....	20
3.2.1 基于满应力准则的设计思想.....	20
3.2.2 强度优化模型及求解.....	20
3.3 同时满足刚度和强度的框架截面优化设计.....	23
3.3.1 优化模型建立.....	24
3.3.2 优化模型的求解.....	28
3.4 框架截面优化的无量纲化处理.....	32
3.4.1 优化模型的建立.....	33
3.4.2 满应力解的无量纲化.....	33
3.4.3 位移约束显式表达式的无量纲化.....	34
3.4.4 无量纲化模型的求解.....	35
3.5 近似射线步技术的应用.....	36
3.6 粗选有效约束技术的应用.....	38
3.7 程序实现.....	40
3.8 程序算例.....	44
3.8.1 悬臂梁的等强度优化.....	44
3.8.2 多工况下受应力约束的单跨度框架的截面优化.....	49
3.8.3 多工况下受应力和位移约束的单跨度框架的截面优化.....	55

3.8.4	多工况下受应力与位移约束的大型空间框架截面优化.....	61
3.8.5	具有变量连接的框架截面优化.....	67
3.9	本章小结.....	74
第 4 章	框架结构拓扑优化方法及程序实现.....	76
4.1	引言.....	76
4.2	基于 ICM 方法的框架拓扑优化.....	77
4.2.1	模型的建立策略.....	77
4.2.2	目标函数的确定.....	78
4.2.3	应力约束的零阶近似处理.....	78
4.2.4	位移约束显式化的 Mohr 积分处理.....	79
4.2.5	优化模型的对偶形式.....	79
4.2.6	多工况的处理策略.....	80
4.2.7	最佳阈值的搜索策略.....	82
4.2.8	删除单元的处理策略.....	82
4.2.9	收敛准则.....	83
4.3	程序实现.....	84
4.4	程序算例.....	86
4.4.1	单工况应力约束下 4 梁空间框架的拓扑优化.....	86
4.4.2	单工况应力和位移约束下 76 梁空间框架拓扑优化.....	89
4.4.3	单工况应力和位移约束下 390 梁空间框架拓扑优化.....	95
4.4.4	多工况应力和位移约束下 390 梁空间框架拓扑优化.....	100
4.5	本章小结.....	109
第 5 章	总结与展望.....	110
5.1	总结.....	110
5.2	展望.....	111
参考文献	112
攻读博士学位期间发表的学术论文	118
致谢	121

第1章 绪论

1.1 结构优化的意义

钱令希院士早在 20 世纪 70 年代指出：结构优化是在认识世界基础上改造世界的一种手段^[1]。结构优化从本质上讲就是综合决策，是人类在认识和改造世界的实践过程中不断发展起来的一种结构设计手段。

结构设计的早期阶段由于不会计算根本就没有分析，同其他传统设计一样是经验或半经验的产品，从某种意义上讲，象工艺品或艺术品一样。原因在于这种结构设计跟自然力进行的优化一样，没有优化理论，只是一种自发的进化，设计的改进靠的是经验和才能，因而不是科学，正如钱令希院士^[1]指出的：“传统设计在某种程度上可以说是一种艺术，而优化设计才是科学”。自从材料力学、结构力学和弹塑性理论相继出现以后，人们才用这些力学理论对设计方案进行分析、校核，若设计方案不满足约束条件，需要通过人工调整设计参数，重新进行分析、校核，直到满足约束条件。后来有限元理论的产生和电子计算机的应用，手算又发展到电算，使分析的适用范围得以扩展，效率得以提高。人们学会力学分析是结构设计的第一次飞跃，然而在这个飞跃中，力学只是作为校验的理论出现于结构设计之中。

结构优化基于结构分析而又高于结构分析，是结构设计发展的第二次飞跃，结构优化理论的发展及其实际应用使得结构设计由结构分析阶段的消极设计变为主动的改善设计，这个飞跃使结构设计由艺术“传统设计”上升为科学“优化设计”。人们可以根据使用 and 运行的要求、工艺和施工的条件，依据规范的限制，依照力学的理论，建立数学模型，借助优化的方法求出最优设计来。获得最优设计方案的过程由一个缓慢的长期进化变成了很短的设计阶段，结构设计也由结构分析阶段的任意性变成了结构优化阶段的最优性。

从上述结构设计发展过程的两次飞跃看，进行结构设计既要把握结构分析的基础性，又要充分重视结构优化的先进性。

结构设计的过程一般是根据结构的功能要求和边界条件等情况，首先确定结构的类型、拓扑，再确定几何形状，最后确定构件的尺寸。与结构设计的过程相对应，结构优化大体上分为三个层次：尺寸优化、形状优化和拓扑优化。拓扑优化与尺寸优化和形状优化相比拥有更大的自由度，能带来尺寸优化和形状优化无法比拟的效益，但它的难度也是最大的，是当前结构优化领域内最具有挑战性的课题。

结构优化是集计算力学、数学规划、计算机科学以及其他工程学科于一体的综合学科，是现代结构设计领域的重要研究方向，为人们长期所追求最优的工程结构设计尤其是新产品的结构设计提供了先进的工具。目前，结构优化设计的应用领域已从航空航天扩展到船舶、桥梁、汽车、机械、水利、建筑等更广泛的工程领域，解决的问题类型也从减轻结构重量扩展到降低应力水平、改进结构性能和提高安全寿命等更多方面。

如果一个新产品从初步的概念设计、外观形状到结构尺寸的设计都是通过一个优化设计软件来完成,只要给出边界条件和性能要求,就能很快得到满足性能要求的最佳产品设计方案,这样不但能为社会节省大量的人力、物力,还可以缩短新产品的开发周期,为社会创造巨大的经济效益。

由于结构优化设计能够给工程界带来经济效益,再加上近年来有限元理论和方法不断的完善和成熟,应用范围的不断扩展,计算机条件的不断提高和普及,人们对结构优化设计的研究和应用的呼声也随之高涨。无论国内还是国外,对结构优化这一现代技术的需求都有增长的趋势,并且随着设计技术的更新和产品竞争的加剧,结构优化设计将会有更大的发展。

在现实生活中存在着形形色色的人造结构,从滑轮、杠杆到吊车,从帐篷、平房到摩天大楼,从轮船、潜艇到航空母舰,从自行车、汽车到飞机、飞船,所有这些结构都是先经过结构设计,再根据设计的蓝图建造出来的。在设计这些结构的过程中,有的只凭借经验设计,有的经过结构分析校核,有的经过结构优化设计,三种途径得到的设计也许都能满足需要,但是只有经过结构优化得到的设计才是最优设计。

随着科学技术的迅猛发展,产品的更新也越来越快,这就对产品的更新设计提出了更高的要求,作为结构设计的最高阶段的结构优化同样面对巨大的挑战。随着不同国家、地区和企业之间的竞争不断加剧,原材料和能源的日益短缺,结构优化的重要性也会日益显示出来。

自从 20 世纪 60 年代结构优化成为一门独立的学科以来,结构优化的理论和算法发展非常迅速,有限元理论不断走向成熟和电子计算机的广泛应用也给结构优化提供了广阔的应用背景,在此基础上结构优化理论不断的转化为商业软件为工程设计服务,目前已有的优化程序系统有 Access^[2-4]、DDDU^[5]、Stars^[6]、Astros^[7]、Catia-elfini^[8]、Genesis^[9]等,一些大的商用有限元分析系统象 MSC.Nastran、MSC. Marc、Ansys 等也已经把敏度分析及优化方法包含进去,形成优化模块,具有一定的优化功能。其中 DDDU 程序系统是多变量、多工况、多约束的结构优化设计,是钱令希院士带领大连理工大学课题组开发的,程序开发的主要力量是结构优化设计的研究人员,由于优化方法和技巧运用较多使得程序功能比较强大,但是由于没有形成商业化软件,用户界面不够友好,致使其强大的优化功能无法施展出来,一般工程设计人员由于优化方面的知识不多,不能快速掌握软件的使用,这样大大的限制了该软件在结构设计中应该发挥的作用。而 MSC.Nastran 等大型商用有限元分析软件的优化模块恰恰相反,由于软件的商业化程度高,用户界面友好,使用帮助文档齐全、详细,使用户能够快速掌握,并用于工程设计,但是为了程序开发的方便主要使用易于实现的通用优化方法,因而相对于优化发展的现状来说效率不高。

北京工业大学工程数值模拟中心在隋允康教授的带领下,跟美国 MSC 公司合作,在 MSC.Patran&Nastran 软件上进行二次开发,现在已经完成的有 5 个独立的软件:

- ① 桁架结构截面优化软件^[10]。
- ② 桁架结构形状优化软件^[11]。
- ③ 膜结构截面优化软件^[12]。
- ④ 板壳结构截面优化软件^[13]。

⑤ 二维连续体形状优化软件^[14]。

上述软件在开发的过程中充分保留了大型商业化软件的用户界面友好、有限元分析精度高等优点,将新的优化理论和优化方法^[15]程序化,形成新的优化模块,具有投入少见效快的特点。

1.2 国内外文献综述

1.2.1 结构尺寸优化

结构尺寸优化是优化设计的最低层次,是在给定结构的类型、拓扑、形状的情况下,以构成结构的构件的尺寸为设计变量,使目标最优,如结构的重量最轻、应力最小、使用寿命最长。作为设计变量的尺寸可能是杆的横截面积、梁的截面惯性矩、板的厚度,也可是是复合材料的分层厚度和材料方向角度,因此在用有限元方法计算结构位移和应力时,不需要网格重新划分,直接利用敏度分析和合适的数学规划方法就能完成尺寸优化。虽然是结构优化中的最低层次,但它却为加深对结构优化问题的认识和对各种类型优化算法的理解提供了宝贵的经验。

传统的尺寸优化方法主要有准则法和数学规划法两大类。早在 1960 年, Schmit 提出把数学规划引进结构设计领域进行系统综合的想法^[16],首次构造了多工况作用下弹性结构优化设计的数学模型,并且提出了应用数学规划求解的方法,从此结构优化设计才较快的发展为一门独立的学科。数学规划法是由于以规划论为基础,其理论严谨、适用面广、收敛性有保证,但数学规划的理论针对的都是理想化的模型,因而这种直接采用数学规划方法而不考虑力学特性的算法也存在着一些缺点,如计算量大、收敛较慢、计算效率低等,特别对多变量的优化问题更为严重。为了解决这个问题,人们提出了优化准则法,准则法是通过力学概念或工程经验来建立相应的最优设计准则,具有物理意义明确、方法相对简便、优化中结构重分析次数少、收敛速度较快等优点。1968 年, Prager 等针对简单连续体问题提出了解析形式的优化准则^[17],后来发展为连续型优化准则(COC—Continuum-type Optimality Criteria)^[18~19],由于结构一般用有限元进行分析,连续型优化准则很难应用于实际。1969 年, Venkayya, Gellatly, Berke 等开始发展离散型优化准则(DOC—Discretized Optimality Criteria)^[20~25],该方法根据虚功原理将位移约束显式化,可以很有效的处理受位移约束的优化问题,但是由于对于应力约束也采用了同样的方法,需要计算所有潜在的有效应力约束的敏度,使得计算量太大,不适合求解大模型问题。

1976 年, Schmit 等提出了结构优化的近似概念^[26~28],主要包括:①通过设计变量连结,将设计变量分组,减少独立设计变量的个数;②在每次进行结构分析之后,将无效约束暂时删除,能明显的提高计算效率;③利用导数信息将有效约束进行 Talyor 展开,形成显式模型。1979 年, Fleury 等首先把对偶理论引入到结构优化问题上来^[29~31],利用可分离问题的对偶规划进行求解,也取得了与 DOC 法相近的计算结果。1980 年, Schmit 和 Fleury 提出了近似概念和对偶方法结合的算法^[32~34],利用虚载荷方法将某些临界应力约束作为有效的应力约束,其它的应力约束转化为上下界约束,提出了混合最优性准则方法。1991 年,

Rozvany 和 Zhou 将 COC 理论的思想扩展到离散结构体系,和有限元结合起来提出一种迭代的 COC 算法^[35],并应用于截面优化,后来基于 COC 理论提出了一种新型的优化准则类算法 DCOC (Discretized Continuum-type Optimality Criteria)^[36~39],该方法根据虚功原理得到位移约束的近似表达式,将应力约束对应的对偶变量(Lagrange 乘子)计算出来,从而大大减小了对偶模型的规模,使计算效率得到大大的提高,但是由于位移约束近似的精度不够,对于有的问题在迭代的过程中可能会出现震荡的现象,为了解决这个问题,用倒变量的线性近似方法处理位移约束改进了 DCOC 法^[40],使优化的迭代过程更趋于平稳。

在国内结构优化设计也取得很大的发展,1973 年,在中国科学院力学规划座谈会上,钱令希院士作了题为“结构力学中最优化理论与方法的近代发展”的学术报告^[41],引起了全国力学界和工程界对结构优化的关注和响应。80 年代以来,钱令希等将准则法和规划法结合起来^[42~44],把应力约束和变位约束分开来处理,引入倒数设计变量,将目标函数二阶展开,约束函数线性展开,利用 Kuhn-Tucker 条件导出了含 Lagrange 乘子的设计变量迭代模式,然后用二次规划方法求解 Lagrange 乘子,使结构重分析的次数有了进一步的缩减。钱令希带领大连理工大学课题组开发出“多单元、多工况、多约束的结构优化设计——DDDU 系统”^[45~49],把力学概念和数学规划方法相结合,成功克服了一些传统的难点,形成了结构优化的序列二次规划算法,并环绕这一方法提出了高精度的约束函数近似方法。1981 年,王光远等提出了结构两相优化方法^[50],这种方法将结构优化设计分为两个阶段进行,第一阶段使准则的力学条件充分满足,第二阶段求解结构的最轻设计,在每一阶段又都使用了数学规划的方法。夏人伟等人研究了以函数的二阶近似为基础的对偶算法^[51],并提出了一种杆系结构几何优化的广义中间变量近似方法^[52]。隋允康等应用分子、分母皆线性的两点有理逼近改进了 Newton 法^[53],克服了 Fleury 将对偶规划引入可分离变量问题中的缺陷;提出了序列有理规划 SRP 方法^[54],将非线性规划问题分别化为等效的 LP 问题和等效的 QP 问题进行求解;在保守近似的展开准则的基础上,提出了基于两点累积信息原/倒变量展开的对偶优化方法^[55];依据 Duffin 缩并公式将空间框架的尺寸优化模型转化为广义几何规划问题(GGP)^[56],基于有限元法概念提出了以梁截面特性(截面积和抗弯模量)为设计变量的解析解^[57]。

除了上述传统的优化方法外,还有一些新兴的优化方法也用于解决尺寸优化问题,主要有基于可靠性(Reliability-Based)的优化方法^[58~59]、基因算法(Genetic Algorithms)^[60]、神经网络法(Neural Networks)^[61]、基于最大熵原理(Maximum Entropy Principle)的算法^[62]等。这些新兴的算法在系统优化和寻求全局最优等方面和具有一定的优势,但是求解效率较低,很难在实际工程中推广应用。

1.2.2 结构拓扑优化

结构拓扑优化是优化设计的最高层次,是在给定的外荷载和边界条件下,改变结构的拓扑以使结构在满足约束的前提下,达到最优目标。拓扑就是构成结构区域的空间安排,对于骨架类结构(包括桁架和框架)来说拓扑就是结构中单元和节点的数量、位置及连接方式,对于连续体结构来说,拓扑就是结构的外边界形状和内部有无孔洞及孔洞分布等特性。

对骨架类结构拓扑优化的研究主要集中在桁架结构,早在1904年Michell就对桁架结构拓扑优化进行了研究^[63],提出了米歇尔准则,解决了应力约束下的桁架重量最轻的优化问题,但是这是一个高层次的优化问题,难度很大,再加上当时结构设计理论和方法的局限,其发展非常缓慢。直到60年代,在对尺寸优化研究日益成熟的基础上,Dorn等提出了“基结构法”^[64],使桁架结构拓扑优化转化为广义尺寸优化问题,缓解了结构拓扑形式描述方面的困难。在70年代,Hemp求解了多种不同荷载形式下米歇尔桁架的具体形式^[65-66],Prager等提出了经典布局理论^[67-69],Rozvany等发展为最优布局理论^[70-71]。80年代以来,人们对桁架结构拓扑优化的研究主要集中在模型的求解,Ringertz, Kirsch, 段宝岩和叶尚辉等在用线性规划求解优化问题方面做了大量工作^[72-77],将线性规划的引入结构优化可以使求解效率大大的提高,但该方法只对于单工况问题是有效的,对多工况和考虑位移约束的优化问题却难以求解。Rozvany和Zhou将COC算法的应用范围从截面优化扩展到拓扑优化和布局优化^[78-79]。程耿东和蒋诤对满足应力约束的桁架结构进行了研究^[80-81],指出造成奇异最优解的根本原因,给出了问题可行域的正确表示,清楚地描述了奇异最优解问题的本质^[82-83]。程耿东和郭旭提出的 ϵ 松弛法改进拓扑优化模型来解决奇异最优解问题^[84-87]。孙焕纯等提出了一种解离散变量桁架、框架结构拓扑优化的启发式算法^[88]。Bechers和Fleury将原-对偶方法应用于桁架拓扑优化^[89]。

连续体结构拓扑优化由于其优化模型描述的困难和数值算法巨大的计算量,因而发展较慢。最早被采用的连续体拓扑优化方法是变厚度法,程耿东、王健等厚度法对平面弹性体结构的拓扑优化进行研究^[90-91],该方法用于平面结构(如膜、板、壳等)比较简单,但推广到三维问题有一定的难度。80年代初,程耿东和Olhoff等在最小柔顺性实心弹性薄板优化设计的研究中做了大量工作^[92-94],发表的有关弹性板的优化设计结果引起了众多学者的研究兴趣,1988年Bendsoe和Kikuchi在此基础上引入了具有空心的单胞微结构,提出了基于均匀化理论的结构拓扑优化算法——均匀化方法^[95],使得连续体结构拓扑优化迅速发展起来,该方法的基本思想是在组成拓扑结构的材料中引入微结构,优化过程中以微结构的几何尺寸作为设计变量,以微结构的消长实现其增删,并产生介于由中间尺寸微结构组成的复合材料,从而实现了结构拓扑优化模型与尺寸优化模型的统一,但由于该方法拥有密度和方位两类变量,增加了敏度计算的复杂性。变密度法是结构拓扑优化中另一较为有效的物理描述方法,它是受均匀化方法的启发而产生的,其基本思想是不引入微结构,而是引入一种假想的相对密度在0~1之间可变的材料。它吸取了均匀化方法中的经验和成果,直接假定设计材料的宏观弹性常量与其密度的非线性关系,现在幂指数形式的变密度法常用来获得单元密度与弹性模量之间的关系,1999年Bendsoe和Sigmund证实了该方法物理意义的存在性^[96]。

除了上述常用的优化方法外,还有一些优化方法也用于拓扑优化问题,如渐进结构优化法^[97]、MMA法^[98]、基于可靠性的优化算法^[99]、基因算法^[100-101]、基于最大熵原理的算法^[102]、模拟退火算法^[103-104]、进化算法^[105]等。

隋允康教授在专著[15]中指出:要推动结构拓扑优化有突出的发展,必须从基本概念上予以突破,将拓扑变量挂靠在低层次的截面上不能显现出拓扑优化的特性,不能使求解效率有较大幅度的提高,还会出现一些病态问题,应当把拓扑

变量从依附于低层次变量中升华出来,使之成为具有一席之地的独立的设计变量层次,考虑到拓扑优化模型难以求解的原因在于拓扑变量的 0-1 离散性,通过过滤函数将离散的 0-1 型拓扑变量映射为 $[0, 1]$ 区间上的连续的拓扑变量,提出了 ICM 方法,实现了骨架类结构和连续体结构拓扑优化模型的统一^[106-108],又用“有无复合体”方法对桁架结构和平面连续体结构进行拓扑优化^[109-110]。骨架结构包括桁架结构和框架结构,当前对骨架结构拓扑优化的研究主要集中在桁架结构上,而刚架结构的拓扑优化很少有人涉及,正如专著[15]指出的这种现象的主要原因是人们忽视了桁架结构和框架结构之间本质的区别,将受力复杂的框架结构直接简化为桁架结构,连续体的最优拓扑结果也往往直接向桁架结构简化,这种简化忽略了单元之间的刚性连接,对单元之间传递弯矩这一特性未能予以重视,并且用 ICM 方法对刚架的拓扑优化做了初步研究^[111-113],本文就是在此基础上做了进一步的改进和发展。

1.3 本研究的主要内容

框架结构因其良好的传力特性,被广为采用在工程实际当中,有的直接由框架结构组成,如图 1-1 和图 1-2 所示的自行车和吊车;有的以框架结构为主要承载结构,附以蒙皮或其他结构以装饰、挡风雨或做其他用途,如图 1-3 和 1-4 所示的汽车和飞机。



图 1-1 由框架直接构成的结构(自行车)

Fig. 1-1 Structure Directly Composed of Frame Structures (Bicycle)



图 1-2 由框架直接构成的结构(吊车)

Fig. 1-2 Structure Directly Composed of Frame Structures (Crane)



图 1-3 框架起主要承载作用的结构（汽车）

Fig. 1-3 Structure with Frame Structures as the Main Support (Bus)



图 1-4 框架起主要承载作用的结构（飞机）

Fig. 1-4 Structure with Frame Structures as the Main Support (Plane)

MSC.Nastran 是大型通用结构有限元分析软件，是美国 MSC 公司的主要产品之一，其中包含一个优化模块，具有一定的优化功能，但是其原理避开了建立近似优化模型的阶段，从本质上，采用了 20 世纪 60 年代 Schmit 首次提出把数学规划引入结构设计的思想。这种做法虽然有利于程序实现，但优化的效率必然停留在结构优化设计早期的规划法阶段，致使求解效率和优化结果都又待提高。为了适应工程界对于结构优化设计的需求，北京工业大学工程数值模拟中心在美国 MSC 公司驻京办事处地大力支持下，主要依据专著[15]中的论述，在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行结构优化软件的二次开发。工作中充分运用了多年从事计算结构力学、结构和多学科优化、实用数学规划及其应用研究中积累的经验，取得了一些阶段性的进展，本课题就是其中的一部分，主要包含两个方面的内容：框架结构的截面优化和拓扑优化。

尽管框架结构分析已不成问题，但对平面和空间框架结构进行优化方法的研究及开发相应的软件却有大量工作可做，而且因其有非常重要的安全与经济意义，相应的工作具有迫切性。正是为了适应工程界对于框架结构优化方法和软件的需求，本文对框架结构的截面和拓扑优化的方法进行了研究，并首次利用 MSC.Patran&Nastran 软件作为平台，开发了相应的软件，主要研究内容包括：

1. 框架结构截面优化的方法

(1) 框架结构截面优化模型的建立

对不同性质的约束采用不同的处理方法：应力约束是局部性约束，为避免一阶近似带来的繁重计算量，将其按零阶近似处理，并借鉴满应力准则将应力约束转化为动态尺寸下限；位移约束作为全局性约束，不能采用零阶近似，根据单位虚载荷法将其显式化。通过上述对应力和位移约束的处理，建立了以结构重量为

目标、满足应力和位移约束的框架结构的近似显式优化模型，并分别用截面惯性矩为设计变量和无量纲的设计变量进行了研究。

(2) 优化模型的求解

上述模型的求解难度会随着设计变量的增多而不断加大，求解效率也会随之降低。为了提高模型的求解效率，依据关系映射反演（RMI）的方法论思想，根据对偶理论求解原问题的对偶模型，通过在对偶空间迭代求解对偶模型得到原模型的解。

(3) 近似射线步技术和删除无效约束技术

近似射线步技术就是根据结构响应和约束的关系计算得到一个射线步系数，然后所有设计变量同时乘以这个系数将设计点从可行域外或可行域内拉到可行域边界附近，能有效降低每次迭代的计算量，使迭代过程更加平稳。删除无效约束技术就是在近似射线步以后，根据一定的准则，将约束分为无效约束和有效约束，删除无效约束，保留有效约束，减小优化模型的规模，提高求解效率。

2. 框架结构拓扑优化的方法

(1) 框架结构的拓扑优化模型的建立

基于隋允康教授提出的 ICM（Independent Continuous Mapping，即独立、连续、映射）方法，对单元重量、单元许用应力和单元刚度分别引入不同的过滤函数，把 0-1 型离散拓扑变量转化为 $[0, 1]$ 区间上的连续拓扑变量，建立了拓扑变量连续的优化模型。

(2) 调整折减系数搜索最佳阈值

为了能使程序快速准确的得到满足约束的最优拓扑结构，根据框架结构的特性引入结构非奇异、结构响应不被违背和结构重量不改变三个准则判断迭代收敛，并根据这三个准则的满足情况，在优化迭代过程中自适应的调整折减系数来搜索最佳阈值。

(3) 删除单元的处理方法

根据阈值可以将连续的拓扑变量回归为 0-1 型拓扑变量，拓扑变量为 0 的单元应该删除，但是如果直接将单元删除将会引起结构奇异、误删单元不能恢复等一系列的问题，而不能得到最优的拓扑结构。因而不能将单元真正删除，而是用非常“弱”的单元（对结构响应作用可以忽略的单元）进行处理。本文根据框架结构的特性提出了两种处理方法：“弱材料”单元法和“小截面”单元法。

(4) 多工况拓扑优化问题的处理方法

结构拓扑优化的本质是对结构最佳传力路径的寻求，多工况的拓扑优化问题涉及到多个最佳传力路径的权衡，处理的难度非常大，因此探索多工况下的优化策略十分重要。本文按局部性约束、全局性约束及两者的结合三种情况进行了处理：第一种情况按“包络法”和“平均法”两种方法进行数值实验比较；第二种情况按数学规划对多工况进行统一计算；第三种情况是对前二种情况的恰当综合。

3. 软件开发

根据上述模型和算法，对 MSC.Patran&Nastran 软件进行软件二次开发，以 MSC.Nastran 软件为有限元求解器，以 MSC.Patran 软件为开发平台，完成了框架结构截面和拓扑优化软件，能够对应力和位移约束下的框架结构进行截面和拓扑优化。算例表明该软件比 MSC.Nastran 的优化模块效率更高、结果更优。

第 2 章 软件开发的工具和途径

2.1 软件开发的工具

MSC.Patran&Nastran 软件的优点不仅在于它本身可以广泛而有效地解决工程实际问题,而且还表现在它是一个方便的软件二次开发平台,能够面对千变万化的实际工程中的问题进行软件二次开发,如专业性非常强的问题、涉及多个不同专业的问题、非常抽象复杂的问题等。为此, MSC.Patran 为用户提供了一个高级、模块化结构的编程语言——PCL 语言 (Patran Command Language), 可用于生成应用程序或特定的用户界面。MSC.Nastran 为用户提供了完全开放而又功能强大的 DMAP (Direct Matrix Abstraction Program) 语言, 能帮助用户修改已经存在的求解模块或直接产生新的求解模块, 允许在 MSC.Nastran 中直接执行外部程序。另外, 用户还可利用 DMAP 编写用户化程序, 操作数据库流程。本文就是以 MSC.Patran 软件为开发平台, 以 MSC.Nastran 软件为有限元求解器进行二次开发的。

2.1.1 开发平台——MSC.Patran 软件

MSC.Patran 软件是集成的并行框架式有限元前后处理及分析仿真系统, 最早由美国宇航局 (NASA) 倡导开发的, 是工业领域著名的并行框架式有限元前后处理及分析系统, 其开放式、多功能的体系结构可将工程设计、工程分析、结果评估、用户化和交互图形界面集于一身, 构成一个完整 CAE 集成环境。其主要特点包括: 直接模型访问、智能化模型处理、自动有限元建模、完全的分析集成、结果可视化处理等。

本文以 MSC.Patran 软件为开发平台, 保留了该软件的全部功能特点, 特别是其强大的前后处理功能, 借助其前处理功能建立有限元模型, 包括建立几何模型、划分有限元网格、创建边界条件及载荷工况、创建材料属性及单元属性等, 借助后处理功能进行数据处理和结果显示, 如单元应力云图显示、节点位移变形图显示、设计变量及目标函数变化曲线显示等。

PCL 语言是一种高级计算机语言, 同 C、FORTRAN 等高级计算机语言一样, 可用于编写、调试、运行应用程序, 还可以生成用户界面、读写数据库, 是 MSC.Patran 软件用户化程序的核心, 是本程序开发的主要工具。

本文主要利用 PCL 语言对 MSC.Patran&Nastran 软件进行二次开发:

(1) 在 MSC.Patran 的界面上增加菜单和窗口, 用来输入建立优化模型需要的参数, 如许用应力、许用位移 (包括约束点、大小及方向)、设计变量 (包括初始值及上下限) 等, 以及优化控制参数, 如满应力收敛精度、结构重量收敛精度等。

(2) 根据优化算法编写优化程序模块, 包括数据交换模块 (包括模型提交

分析和读取结果数据)、满应力设计模块、近似射线步模块、约束粗选模块、敏感度分析模块、优化模型的求解模块、判断收敛模块以及拓扑优化的阈值搜索模块等。

2.1.2 有限元求解器——MSC.Nastran 软件

MSC.Nastran 软件是大型通用结构有限元分析软件,其主要功能模块有基本分析模块(含静力、模态、屈曲、热应力、流固耦合及数据库管理等)、动力学分析模块、热传导模块、非线性分析模块、设计灵敏度分析及优化模块、超单元分析模块、气动弹性分析模块、DMAP 用户开发工具模块及高级对称分析模块。其中,优化模块有一定的优化功能,但是就优化理论发展现状来说,其效率不高,本文程序完全抛开该优化模块,只利用 MSC.Nastran 软件的有限元分析功能对结构进行分析,为本文程序提供数据,如单元最大应力、单元内力、单元应变能、节点平衡力、节点位移等。

2.2 软件开发的途径

本文根据专著[15]中的论述,针对框架结构建立优化模型(截面优化和拓扑优化)并设计算法,利用 PCL 语言直接在 MSC.Patran 的界面上增加用户界面并编写优化程序,用 MSC.Patran 强大的前处理功能建立分析模型,从增加的用户窗口输入数据,并直接通过按钮启动优化程序,程序执行的过程中调用 MSC.Nastran 对分析模型进行有限元分析,程序直接访问结果数据库,提取建立优化模型所需要的数据,求解优化模型得到最优设计,优化结束后还可以利用 MSC.Patran 的后处理功能查看优化结果,这样优化程序和 MSC.Patran&Nastran 完全融为一体。

2.2.1 用户程序的编译与连接

在 MSC.Patran 的安装目录下有一个初始文件,文件名为 init.pcl,在 Patran 启动时,先执行这个文件,其中包含两个命令:

```
!! INPUT p3prolog.pcl NOERROR
```

```
!! INPUT p3epilog.pcl NOERROR
```

执行这两个命令时,程序会将文件 p3prolog.pcl 和 p3epilog.pcl 进行编译。

(1) 在 p3prolog.pcl 文件中可以定义一些全局变量,如

```
GLOBAL REAL alpha
```

```
GLOBAL REAL beta
```

定义了全局实数变量 alpha 和 beta,在程序中可以随时调用或改变该变量的数值。

(2) 在 p3epilog.pcl 文件中包含用户函数编译的命令,如

```
!! INPUT function_name.pcl
```

当 Patran 启动时,程序会自动从 Patran 的路径中找 function_name.pcl 文件并进行编译。只要将 p3prolog.pcl 和 p3epilog.pcl 两个文件以及 p3epilog.pcl 文件包含的

所有的函数放到 Patran 的路径下，Patran 启动时，会将这些文件自动编译。

用户可以在 init.pcl 文件中增加语句

```
file_add_path( 999, "user_path" )
```

来增加一个 Patran 的路径，将用户函数放在该路径下。

用以上方法进行处理，在 Patran 启动时，程序会对所有用户函数进行编译，每次启动都编译一次，势必影响启动速度。还有另一种处理方法，将所有的用户函数编译到一个数据库中，Patran 启动时直接调用。其方法如下：

在 Patran 的命令行输入

```
!! LIBRARY CREATE user_database.plb
```

```
!! COMPILE function_name user_database.plb
```

第 1 行表示在当前路径下创建一个 user_database.plb 数据库，第 2 行表示将函数 function_name () 编译到数据库 user_database.plb 中。

将 user_database.plb 文件放到 Patran 的路径下，然后在 init.pcl 文件中增加语句：

```
!! LIBRARY user_database.plb
```

```
!! LIBRARY KEEPOPEN user_database.plb
```

这样 Patran 启动时，程序不再编译，而是直接加载数据库 user_database.plb，但是如果改变函数，需要重新进行编译。

2.2.2 用户界面的形成

在一个程序的基础上进行二次开发，新程序往往需要更多的参数，旧程序的输入窗口不能满足需要，为此可以生成新的菜单和新的窗口，使用户很方便的通过窗口将参数输入，并直接传递给程序使用。

在 PCL 语言中提供了一系列生成窗口和菜单的函数，如

函数	功能
ui_menu_create ()	创建菜单
ui_form_create ()	创建窗口
ui_button_create ()	创建按钮
ui_databox_create ()	创建数据输入空格

在函数后边的括弧中，需要输入描述这些对象属性的参数，在该函数说明中有详细介绍。

描述这些对象属性的参数在 MSC.Patran 中定义了标准，即与窗口和菜单的位置及大小有关的标准参数，如

标准参数	意义
FORM_WID_SML	简单窗口的宽度
BUTTON_WID_HALF	按钮的宽的一半
BUTTON_HGT	按钮的高度

在帮助文件和 appforms.p 文件中有详细说明，还有比较详细的例子，对其稍做修改就可以用，如果在程序中使用了上述参数，需要在程序的开头增加一个语句

```
# include "appforms.P"
```

按钮上显示的文字也有标准，如

参数	按钮上的文字
APPLY_UD	"-Apply-"
APPLY	"Apply"
OK_UD	"-OK-"
OK	"OK"
CANCEL	"Cancel"
CLOSE	"Close"
DONE	"OK"

在 `uistrings.p` 文件定义了这些参数，如果在程序使用了上述参数，需要在程序的开头增加一个语句

```
# include "uistrings.p"
```

如果在程序中使用了上述两类参数，不但要程序开头增加两个语句，还需要用 C 预编译器将含有该语句*.pcl 文件编译成*.cpp 文件，这样不需要输入窗口和菜单的参数就可以得到符合 MSC.Patran 风格的界面。

本文在 MSC.Patran 的界面上增加的菜单和窗口主要有：

- (1) 主菜单 (Optimize/Optimization)，用来打开主窗口，如图 2-1。

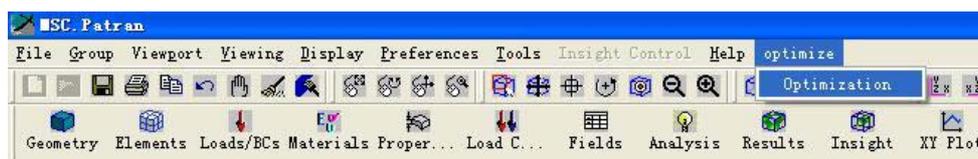


图 2-1 主菜单

Fig. 2-1 Main Menu

(2) 主窗口 (Optimization)，用来选择优化程序模块、打开子窗口和启动优化程序，如图 2-2。优化模块包括桁架结构优化模块 (Truss)、膜结构优化模块 (Membrane)、框架结构优化模块 (Frame) 等。子窗口包括传输参数输入窗口 (Translation Parameter...)、优化参数输入窗口 (Optimization Parameter...)、设计变量选择窗口 (Variable Select...)、工况创建窗口 (Subcase Create...) 和工况选择窗口 (Subcase Select...)。

(3) 传输参数输入窗口 (子窗口)，用来设置输出控制参数，可以选择性的输出优化结果，该窗口未开发，默认输出所有结果。

(4) 优化参数输入窗口 (子窗口)，用来输入许用应力、收敛精度和打开位移约束输入窗口，如图 2-3 左图。收敛精度包括满应力收敛精度和结构重量收敛精度，一般情况下两个精度分别取默认值 0.001 和 0.01，如果优化精度要求高，可以适当的提高精度，如果迭代次数多或者不收敛，可以适当降低精度。位移约束输入窗口，用来输入位移约束的名字、位置 (节点号)、方向和大小，如图 2-3 右图。

(5) 设计变量选择窗口 (子窗口)，用来选择设计变量和改变设计变量的初始值和上下限 (初始值默认为模型的尺寸、上下限分别默认为初始值的 120% 和 80%)。如果以截面惯量为设计变量，每一个变量控制一个属性，其选择窗口如图 2-4 左图，打开该窗口后，模型中所有的属性都将显示在窗口上边的列表框



图 2-2 主窗口

Fig. 2-2 Main Form

(Regions For Solution:)里,选择要定义为设计变量的属性,然后单击按钮“Add”将选择的属性定义为设计变量或者直接单击按钮“Add all”将所有的属性都定义为设计变量。如果采用无量纲设计变量,一个变量控制多个属性,其选择窗口如图 2-4 右图,打开该窗口后,模型中所有的属性都将显示在窗口中间的属性列表框 (Regions For Selections:)里,在输入框 (Variable Name)输入变量名,或者用默认的变量名 (Var_n,其中n为整数,能够自动增加),选择该设计变量控制的属性,然后单击按钮“Create”创建一个无量纲设计变量,选择的属性会从列表框删掉,以免多个变量控制同一属性,如果变量创建错误,可以选中错误的变量然后单击按钮“Delete”删除,该变量控制的属性重新出现在属性列表框中。

(6) 工况创建窗口 (子窗口),传输参数窗口设置的输出参数将应用于所有工况,本窗口可以针对每个工况的输出参数进行设置,不同工况输出的数据可以不同,该窗口未开发,默认输出所有结果。

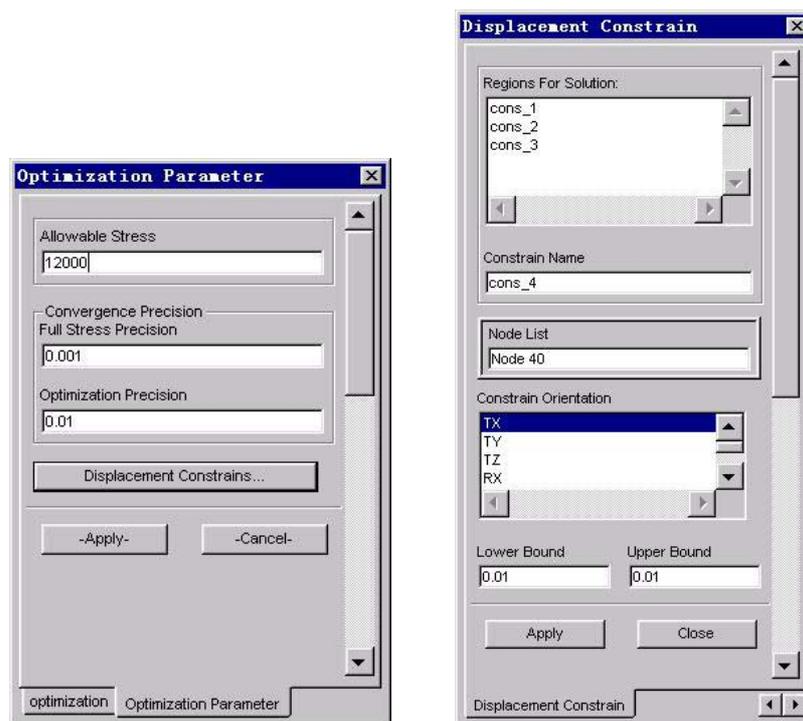


图 2-3 优化参数输入窗口

Fig. 2-3 Form for Input of Optimization Parameter

(7) 工况选择窗口(子窗口), 用来选择要优化的载荷工况。打开该子窗口, 模型中所有的工况将显示在上边列表框里 (Subcases For Solution:), 如图 2-5 左图, 单击要选择的工况, 该工况会从上边的列表框移动到下边的列表框 (Subcases Selected:), 如图 2-5 右图。如果单击按钮 “Apply”, 选择的工况传递到程序中, 如果单击按钮 “Cancel”, 程序将不做任何操作。

2.2.3 数据交换

2.2.2 节对用户界面做了简要介绍, 优化程序将在第 3、4 章做详细介绍。在增加用户界面和优化程序之前, MSC.Patran 软件和 MSC.Nastran 软件之间的关系如图 2-6, 增加用户界面和优化程序之后, 四者之间的关系如图 2-7。

① 优化程序以 MSC.Patran 软件为开发平台开发的, 与其完全融为一体, 可以直接利用其前处理功能建立模型, 用后处理功能处理结果数据。

② 用户界面主要是为优化程序的参数输入而设计的, 在窗口中输入或选择了参数以后, 可以用

`ui_wid_get_vstring ()` 得到窗口输入的字符串

`ui_wid_get ()` 得到窗口输入的参数值

将窗口输入的参数赋值给某个变量, 在优化程序中可以直接调用。

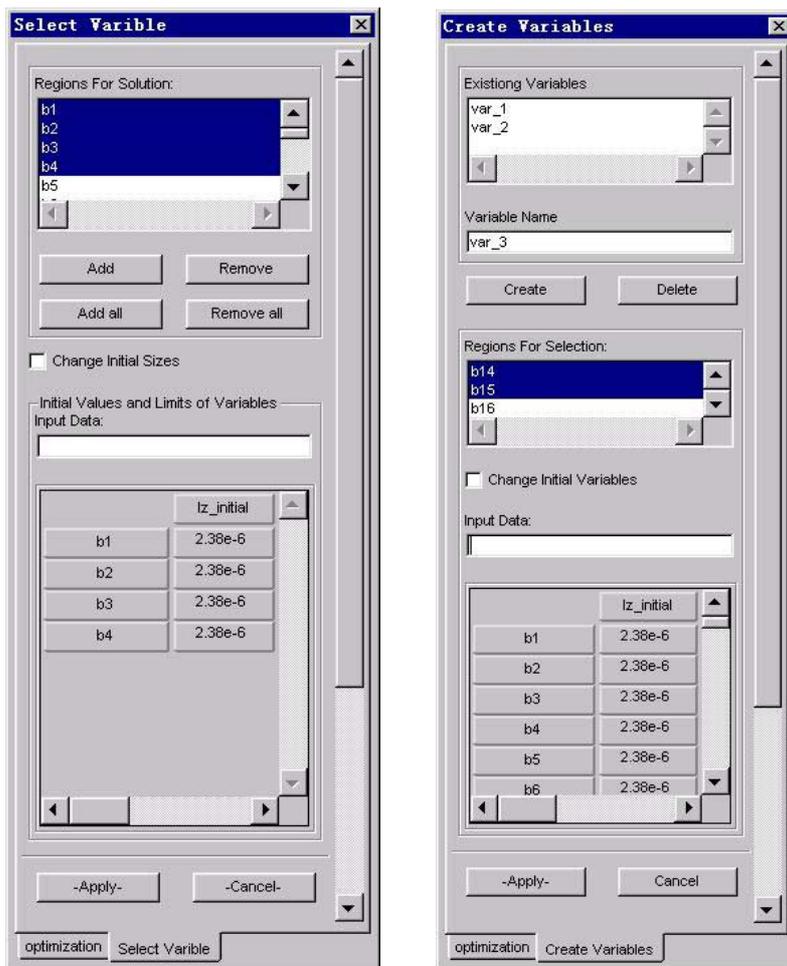


图 2-4 创建设计变量窗口

Fig. 2-4 Form for Creating Design Variables

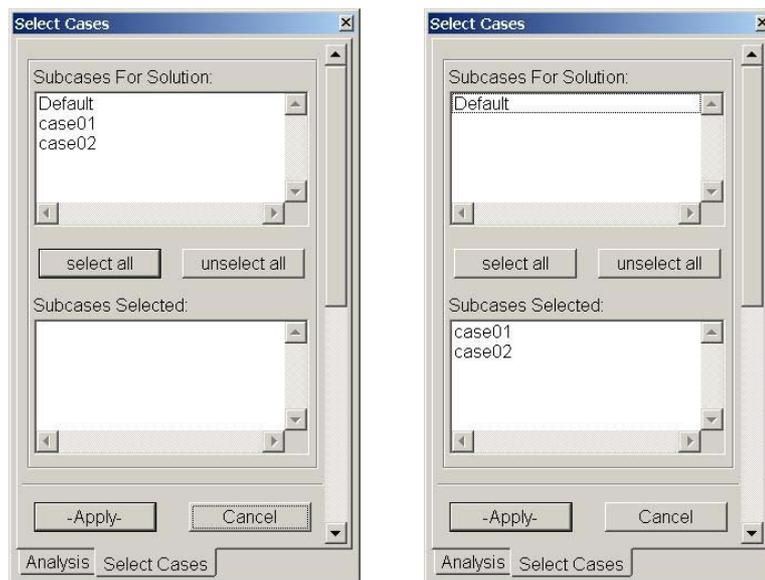


图 2-5 工况选择窗口

Fig. 2-5 Form for Selecting Loading Cases

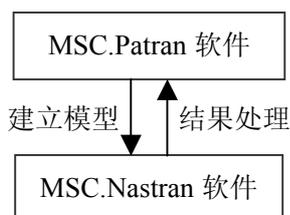


图 2-6 MSC.Patran 软件和 MSC.Nastran 软件之间的关系

Fig. 2-6 Relation of MSC.Patran Software and MSC.Nastran Software

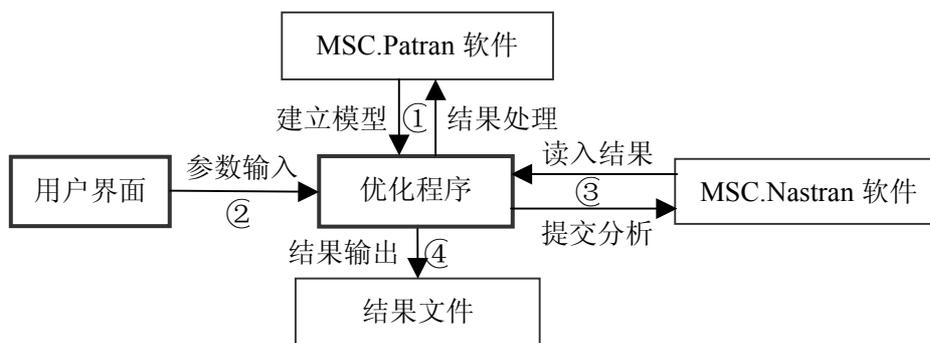


图 2-7 用户界面、优化程序和 MSC.Patran&Nastran 之间的关系

Fig. 2-7 Relation of User Interface, Optimization Program and MSC.Patran&Nastran Software

③ MSC.Nastran 软件作为有限元求解器出现在优化程序中的，优化程序将 MSC.Patran 软件建立的分析模型提交到 Nastran 进行分析，然后返回分析结果供优化程序建立优化模型，优化程序通过求解优化模型得到一组新的设计变量（新设计），用新设计对模型进行修改，然后再提交到 Nastran 进行分析，其主要过程和方法如下：

- 根据模型信息，用 `jobfile.writec ()` 等函数写出一个 *.bdf 文件（Nastran 的输入文件）；

- 用 `analysis_submit_2 ()` 等函数将 *.bdf 文件提交到 Nastran 中进行计算，得出结果；

- 用 `analysis_import ()` 等函数将结果读到 Patran 中或和 Patran 相连接，然后用 `res_utl_extract_nodal_results ()` 等函数提取各工况下的单元应力、节点位移等结果，用 `db_get_prop_value ()`、`blgetprop ()` 等函数得到属性值（如：材料密度、梁的长度、截面积以及惯性矩等）；

- 对这些结果或数据根据一定的准则进行处理（如：用 `mth_max ()` 可提取应力和位移的最大值），然后通过各种优化算法（在第 3、4 章将作详细介绍）得出一组新的设计变量；

- 用 `beam_section_modify ()` 等函数对模型（如梁的截面尺寸）进行修改。

④ 将优化过程中的设计变量、结构重量、最大应力、约束点位移等结果输出到文件中，以备查看。

2.2.4 子函数和子程序的编写

优化理论掌握了，基本程序框架搞清楚了，就可以用一个个小的子程序来实

现这些过程，子程序的基本结构如下：

```
FUNCTION function_name (参数变量)
    定义变量
    程序主题
END FUNCTION
```

编写子程序和子函数是二次开发的重点和核心，在 PCL 语言中集成了大量的函数，对这些函数要有一个整体的把握，可以分类掌握，遇到什么问题就去找那类函数，在帮助文件中的分类非常清楚，对函数功能及变量定义都有非常详细的说明，这里就不再详述。在帮助文件中的函数还是不够全面，有的函数没有进行说明，p3patran.plb 是 MSC.Patran 的函数数据库，可以从这个文件中找自己需要的相关函数，只是没有对该函数的参数变量进行详细说明，可以根据经验测试一下，找出该函数的参数变量的个数及具体意义。

例如，如在帮助文件中，有计算任意形状的梁截面属性（如截面积、截面惯量等）的函数 blgetproparbyChec（），并且做了详细说明，但是该函数需要输入说明该截面形状的参数，在实际工程中大多数用的是标准梁截面，应该只要知道某标准梁截面类型和截面尺寸，就能够计算梁的截面属性，在 p3patran.plb 文件中可以找到函数 blgetprop（），根据函数 blgetproparbyChec（）的参数变量，并通过测试得到函数 blgetprop（）参数变量。该函数有 6 个参数变量 entyp、section_type、section_sizes、size_number、prop、nprop，前 4 个是输入参数，后两个是输出参数，entyp 是整数 1 或 2，1 表示截面类型是“PBAR”，2 表示截面类型是“PBEAM”，section_type 表示截面类型，section_sizes 是实数数组，表示截面尺寸，size_number 表示截面尺寸个数，prop 是实数数组，表示截面属性的数值，nprop 表示截面属性个数。类似的函数还有很多，如

```
db_get_all_beam_section_ids（）
db_get_next_beam_section_id（section_id）
db_get_beam_section_name（section_id, section_name）
db_get_beam_section_id（section_name, section_id）
bl_get_std_beam_section_data（section_id, size_number, var_sign, section_sizes,
var_order）
db_get_beam_section（section_id, section_type, section_name, size_number,
integer）等。
```

因为帮助文件中有类似的函数，不难想象应该还有类似的函数存在，可以根据类似的函数推断函数的参变量，然后进行测试，如果实在没有就需要自己去编写。

下面以函数 blgetprop 为例说明函数的参数变量的测试方法：

① 在 MSC.Patran 的命令行输入不带参变量的函数“blgetprop（）”，MSC.Patran 会给出错误提示：

```
##（PCL） Wrong number of arguments for built-in function
## Extra information: [ 6, 0 ]
## Function BLGETPROP
## Execution aborted
```

第 1 行说明错误原因是参变变量输入的个数不对，第 2 行表示该函数应有 6

个参数变量，现在没有输入参数变量。

这说明 `blgetprop ()` 是 MSC.Patran 的内部函数，如果在命令行输入不存在的函数 “`blgetprops ()`” 将出现如下错误提示：

```
$# (PCL) Function does not exist: BLGETPROPS
$# Execution aborted
```

② 根据帮助文件中与函数 `blgetprop` 类似的函数 `blgetproparbyChec` 的参数变量的说明，`blgetprop` 中应该有参数变量 `entyp`, `prop`, `nprop`，因为是提取标准截面的属性，还可能需要输入截面型号 `section_type`、截面尺寸 `section_sizes` 和截面尺寸的数量 `size_number`，然后任意定义 6 个变量 `a`、`b`、`c`、`d`、`e`、`f` 为整数、实数或字符串，然后在命令行输入 `blgetprop (a, b, c, d, e, f)`，如果定义了 `a` 为字符串，将会有错误提示：

```
$# (PCL) Invalid datatype to built-in function. Arg#: 1
$# Call traceback...
$# Function BLGETPROP
$# Execution aborted
```

说明第一个变量不是字符串，可以改为整数、实数、逻辑变量进行测试，直到变量 `a` 定义为整数，如果变量 `b` 也定义为整数，则出现如下错误提示：

```
$# (PCL) Invalid datatype to built-in function. Arg#: 2
$# Call traceback...
$# Function BLGETPROP
$# Execution aborted
```

说明变量 `a` 肯定是整数，变量 `b` 不是整数，再对变量 `b` 测试。

如果变量是数组，没有定义为数组，如，定义变量 `c` 为实数（非数组），将会有错误提示：

```
$# (PCL) Item must be an array: 3
$# Call traceback...
$# Function BLGETPROP
$# Execution aborted
```

说明第三个变量是一个数组。这样对所有变量都经过测试后，就可以确定这 6 个变量分别是整数、字符串、实数数组、整数、实数数组、整数，然后根据猜测的变量对号入座，得出准确的结果。

编写程序的另一个技巧就是直接截取运行 MSC.Patran 所得的命令流文件 `patran.ses.*` 文件中的命令流，然后根据需要进行修改。要想得到具有某种功能的子程序或者函数，可以对 MSC.Patran 做相应功能的操作，然后对 MSC.Patran 生成的 `patran.ses.*` 文件中相关的命令流进行修改得到函数。如，要编写一个能根据模型信息生成 MSC.Nastran 的输入文件的函数，只需先用 MSC.Patran 建立一个模型，提交分析，然后截取 `patran.ses.*` 中的命令流，再在命令流的前后加上函数头标志（`FUNCTION function_name`）和尾标志（`END FUNCTION`）以及参数变量，就形成了一个可以独立运行的函数。

第3章 框架结构截面优化方法及程序实现

3.1 引言

大多数实用结构主要依靠框架结构来承载，如楼房、汽车、轮船、飞机、太阳能板等。如果框架结构的强度不够，会造成楼塌、车毁、船沉、飞机失事等各种事故；如果框架结构的刚度不够，结构的变形太大，也会造成一些很严重的后果，如楼房、汽车、轮船、飞机等结构的门或门框的刚度不够会导致门不能关闭，太阳能板的刚度不够会影响接受太阳能的效率等。这些结构在设计的时候一般忽略蒙皮等辅助结构的作用，而框架结构的强度和刚度问题是设计必须考虑的两个重要因素，所以结构优化作为结构设计的最高层次在建立优化模型的时候也理所当然的把应力约束和位移约束作为重要的约束考虑进去。

正如专著[15]中指出的：结构优化的最大问题就是优化模型的建立，其次是模型的求解。根据专著[15]的论述，在建立模型时，对不同性质的约束采用不同的处理方法：对于应力约束，如果采用一阶近似，计算量将会非常繁重，一个很好的选择是考虑到应力约束为局部性约束，将其按零阶进行近似处理，借助满足应力准则将其转化为动态尺寸下限，这样使模型建立和求解变得非常容易；对于位移约束，利用单位虚载荷法可以得到结构位移的近似表达式，从而建立显式的优化模型。

经过对应力约束和位移约束的处理，考虑应力约束和位移约束的优化模型就建立起来了，并且该模型是显式的，可以处理为标准二次规划进行求解。但是，对于多变量的大模型问题，会因为变量多、规模大而导致求解效率低，根据模型映射^[15]的思想，依据对偶理论将原模型转化为对偶模型，然后对目标函数进行二次展开，形成标准的二次规划模型，通过迭代求解对偶模型得到原模型的解。由于对偶规划是一个拟无约束的数学规划，而且变量的个数跟原设计变量的个数无关，只跟有效位移约束的个数有关，不仅求解非常容易，而且效率非常高。

用梁单元的截面惯性矩作为设计变量非常直观，并且容易处理，由于设计变量之间是相互独立的，一个设计变量只能控制截面相同的梁单元，这样程序实现起来非常容易，但是该方法只能解决一部分框架截面优化问题，对于一些特殊情况就无法处理，如多个截面不同的梁单元要求按同一比例进行变化，即多个截面不同的梁单元有关联性，不是相互独立的。为了扩大程序的适用范围，不能这样取截面惯性矩为设计变量，需要将设计变量无量纲化，即用截面惯性矩的比值代替截面惯性矩作为设计变量，无量纲化的设计变量不但能用一个变量控制多个截面不同的梁单元，还能扩展到其他性质的结构，如膜单元、壳单元、体单元等，用该方法还可以根据设计要求任意将变量分组，用尽可能少的设计变量描述优化问题，提高求解效率。

本章依据上述方法建立了框架结构截面优化的模型，并将模型进行对偶转化，在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行程序的二次开发，在程序实现的过程中还采用了粗选有效约束技术和近似射线步技术，并通过各种算例对程序进行了

考核，证明了优化算法和程序的有效性。

3.2 满足强度的框架截面优化设计

3.2.1 基于满应力准则的设计思想

满应力准则是一种简易可行的结构优化方法，是结构优化准则法中一个传统的设计方法，也是目前结构优化设计中常用的一种方法。该方法设计思路清晰，力学概念明确，并与其他多种优化思路相关联，容易被工程设计人员所接受。

满应力准则遵循的设计思想是结构的每一构件至少在一种载荷工况下应力达到饱满，这里的应力饱满是指诸载荷工况下最大应力达到许用应力。对于静定结构，由于结构内力跟构件的截面尺寸没有关系，设计改变而内力不变，这样依据满应力准则得到的设计就是满足应力约束条件下最轻的设计。但是对于超静定结构，设计改变会引起结构内力的重新分布，在当前设计点依据满应力准则得到的新设计，而在新的设计点就会由于内力的改变而不再满足应力约束条件。为了解决这个问题，对超静定结构做静定化假设，通过序列静定化假设来实现满应力准则。静定化假定就是先假定内力同截面无关，依据满应力准则得到一组新的设计，重新进行结构分析，重复上述过程，直至收敛为止。

对于不同类型的单元，其满应力解的求法也不同。桁架结构的杆单元只能承受轴向力作用，单元应力跟单元横截面积成简单的反比关系（内力不变的条件），可以很容易的得到满应力解。而框架结构则不同，其梁单元不但可以承受轴向力，还可以承受弯矩、剪力和扭矩，单元内力跟截面惯性矩或横截面积的关系不是简单的反比关系，而是一种非线性关系，因此需要通过求解非线性方程组得到满应力解。

本节依据满应力准则的基本设计思想，根据梁单元的应力和截面尺寸的复杂关系，推导并建立了框架结构精确满应力解的优化模型，针对该优化模型提出了一套切实可行的求解方法。

3.2.2 强度优化模型及求解

从满足结构强度的可行性考虑结构设计经济性，框架结构截面优化的三要素分别如下：

目标函数——结构重量；

设计变量——梁单元的截面惯性矩（本文只考虑截面做相似变换的情况，一个单元只有一个设计变量）；

约束条件——应力约束（梁单元的最大应力不超过许用应力）和尺寸约束（梁单元的截面惯性矩在约束区间范围内）。

优化模型的数学表达如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad I_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i(I_{yi}) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sigma_{il} \leq \bar{\sigma}_i \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad \underline{I}_{yi} \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (3-1)$$

- 其中 I_{yi} —— i 号梁单元的对 y 轴的截面惯性矩, 是设计变量(m^4)
 n —— 设计变量的个数
 w —— 结构总重量 (kg)
 ρ_i —— i 号梁单元的密度 (kg/m^3)
 l_i —— i 号梁单元的长度 (m)
 A_i —— i 号梁单元的横截面积, 是设计变量 I_{yi} 的函数 (m^2)
 σ_{il} —— i 号梁单元在 l 号工况下的应力 (Pa)
 $\bar{\sigma}_i$ —— i 号梁单元的许用应力 (Pa)
 L —— 作用在模型上载荷工况的数目
 \underline{I}_{yi} —— i 号设计变量的下限
 \bar{I}_{yi} —— i 号设计变量的上限

根据满应力准则的基本设计思想, 为了达到满应力的条件, 每个梁单元至少在一种工况下达到许用应力, 即梁单元在各个工况下的最大应力等于许用应力, 其数学表达如下:

$$\max_{l=1, \dots, L} [\max_x \sigma_{il}(x)] = \bar{\sigma}_i \quad (3-2)$$

由于梁单元剪应力较小, 对设计影响不大, 不予考虑。从一般性考虑, 空间框架结构的梁单元的正应力等于弯曲应力和轴应力之和(平面框架是空间框架的特例), 其数学表达式如下:

$$\sigma_{il}(x) = \frac{M_{yil}(x)}{W_{yi}} + \frac{M_{zil}(x)}{W_{zi}} + \frac{N_{il}(x)}{A_i} \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \quad (3-3)$$

- 其中 $M_{yil}(x)$ —— 在 l 号工况下 i 号梁单元内对 y 轴的弯矩(Nm)
 $M_{zil}(x)$ —— 在 l 号工况下 i 号梁单元内对 z 轴的弯矩(Nm)
 $N_{il}(x)$ —— 在 l 号工况下 i 号梁单元内的轴力(N)
 W_{yi} —— i 号梁单元对 y 轴的抗弯模量(m^3)
 W_{zi} —— i 号梁单元对 z 轴的抗弯模量(m^3)
 A_i —— i 号梁单元的横截面积(m^2)

梁单元的应力在杆长方向 (x 方向) 是变化的, 在截面的不同点也是不同的, 但是总可以找到一个最大应力点, 假设在 l 号工况下 i 号梁最大应力在 p 点, 记该点的最大应力为:

$$\max \sigma_{il}(x) = \sigma_{il}^p = \frac{M_{yil}^p}{W_{yi}} + \frac{M_{zil}^p}{W_{zi}} + \frac{N_{il}^p}{A_i} \quad (3-4)$$

其中 M_{yil}^p —— l 号工况下 i 号梁单元最大应力点的对 y 轴的弯矩(Nm)
 M_{zil}^p —— l 号工况下 i 号梁单元最大应力点的对 z 轴的弯矩(Nm)
 N_{il}^p —— l 号工况下 i 号梁单元最大应力点的轴力(N)

将式 (3-4) 代入式 (3-2), 得

$$\max_{l=1, \dots, L} \left(\frac{M_{yil}^p}{W_{yi}} + \frac{M_{zil}^p}{W_{zi}} + \frac{N_{il}^p}{A_i} \right) = \bar{\sigma}_i \quad (3-5)$$

根据静定化假设, 式 (3-5) 中的 M_{yil}^p , M_{zil}^p 和 N_{il}^p 都是常数, 可以从结构分析的结果中得到, 只有 W_{yi} , W_{zi} , A_i ($i=1, \dots, n$) 是未知数, 但可以表示为设计变量的 I_{yi} 的函数, 即

$$\max_{l=1, \dots, L} \left[\frac{M_{yil}^p}{W_{yi}(I_{yi})} + \frac{M_{zil}^p}{W_{zi}(I_{yi})} + \frac{N_{il}^p}{A_i(I_{yi})} \right] = \bar{\sigma}_i \quad (3-6)$$

方程 (3-6) 中包含求最大值的运算, 无法直接求解, 为了求解该方程, 先假定在每种工况下都取等式, 即

$$\frac{M_{yil}^p}{W_{yi}(I_{yil})} + \frac{M_{zil}^p}{W_{zi}(I_{yil})} + \frac{N_{il}^p}{A_i(I_{yil})} = \bar{\sigma}_i \quad (l=1, \dots, L) \quad (3-7)$$

然后解式 (3-7) 所示的 L 个方程, 得 L 个设计变量 I_{yil}^* ($l=1, \dots, L$), 再从中取大, 即

$$I_{yi}^* = \max_{l=1, \dots, L} I_{yil}^* \quad (3-8)$$

由于方程 (3-7) 是非线性的, 为便于求解, 可以构造迭代关系式, 通过迭代求解, 其方法如下:

将式 (3-7) 的两边同乘以 I_{yil} 、除以 $\bar{\sigma}_i$, 并移项, 得

$$I_{yil} = \left(\frac{M_{yil}^p}{W_{yi}(I_{yil})} + \frac{M_{zil}^p}{W_{zi}(I_{yil})} + \frac{N_{il}^p}{A_i(I_{yil})} \right) I_{yil} / \bar{\sigma}_i \quad (3-9)$$

构造迭代关系式:

$$I_{yil}^{(k+1)} = \left(\frac{M_{yil}^p}{W_{yi}(I_{yil}^{(k)})} + \frac{M_{zil}^p}{W_{zi}(I_{yil}^{(k)})} + \frac{N_{il}^p}{A_i(I_{yil}^{(k)})} \right) I_{yil}^{(k)} / \bar{\sigma}_i \quad (3-10)$$

由式 (3-10) 迭代直至收敛, 即满足收敛条件

$$|I_{yil}^{(k+1)} - I_{yil}^{(k)}| / I_{yil}^{(k+1)} < \varepsilon_1 \quad (3-11)$$

其中 ε_1 —— 充分小的正数, 默认值为 0.001
 k —— 满应力迭代次数

以上推导过程是在静定化假设 (结构内力不发生变化) 的前提下进行的。对于静定系统, 因各单元的弯矩和轴力不随梁的截面变化而变化, 只要通过上述满应力迭代就可以得到最优设计; 而对于超静定系统, 内力会随着设计的改变而改

变，依据静定化假设得到的解，并不能真正满足满应力准则，需要在新设计的基础上，再次进行结构分析计算新的结构内力（弯矩和轴力），然后根据新的结构内力进行满应力迭代得到新的设计，这样反复迭代直至结构重量收敛，收敛条件如下：

$$\frac{|w^{(v+1)} - w^{(v)}|}{w^{(v+1)}} < \varepsilon_2 \quad (3-12)$$

其中 $w^{(v+1)}$ —— 第 $v+1$ 步结构分析的结构重量 (kg)
 $w^{(v)}$ —— 第 v 步结构分析的结构重量 (kg)
 ε_2 —— 充分小的正数，默认值为 0.01
 v —— 结构分析迭代次数

3.3 同时满足刚度和强度的框架截面优化设计

从同时满足结构强度和刚度的可行性考虑结构设计的经济性，框架结构截面优化的三要素分别如下：

目标函数——结构重量；

设计变量——梁单元的一个主控参数（如截面惯性矩）；

约束条件——应力约束（梁单元的最大应力不超过许用应力）、位移约束（结构某点的位移不超过约束值）和尺寸约束（梁单元的截面惯性矩在约束区间范围内）。

考虑位移、应力、尺寸三种约束的优化模型的数学表达式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad I_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i(I_{yi}) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad u_{jl} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad \sigma_{il} \leq \bar{\sigma}_i \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad \underline{I}_{yi} \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (3-13)$$

其中 J —— 位移约束的个数
 u_{jl} —— 在 l 号工况下 j 号约束点的位移 (m)
 \bar{u}_j —— j 号约束的大小 (m)

该优化模型中既有应力约束又有位移约束，本文依据专著[15]的论述，在建立模型时，对不同性质的约束做不同的处理：

对于应力约束，通常有两种处理方法：（1）在敏度分析的基础上做一阶近似；（2）直接做零阶近似，即化为动态尺寸下限。由于应力约束属于局部性约束，即单元应力主要受本身截面变量的影响，两种方法的效率相差不大，但是由于第一种方法需要进行敏度计算使得计算量很大，而第二种方法将应力约束做零阶近似，大大节省了应力敏度分析的计算量。因此，前者一般用于理论探讨，而后者常用于实际计算。将应力约束转化为动态尺寸下限就是利用当前应力值把复杂的

应力约束转化为简单的尺寸下限，然后通过迭代过程使动态下限逐渐稳定。3.2节借助满应力准则得到了满足强度的设计，只要保证设计不小于这个设计就能保证结构的强度，为此，直接将满应力设计作为设计变量的一个动态下限来实现结构满足强度。

对于位移约束，由于它不同于应力约束是整体性约束，即节点位移不仅仅受局部单元截面变量的影响，结构的所有承载单元对节点位移都有贡献，所以不能用零阶近似处理。由于结构位移是设计变量的隐函数，为了建立一个能求解的显式优化模型必须将位移的表达式显式化，显式化一般可以通过两种途径：数学途径和力学途径。数学途径是用数学方法将位移在当前设计点对设计变量做一阶或二阶 Taylor 展开，这样可以将位移化为设计变量的显式函数，不过需要计算位移对设计变量的敏感度（即偏导数），而且所有敏感度值只能用差商代替，这就对迭代步长提出了很高的要求，如果迭代步长太小会使迭代次数太多而效率不高甚至引起数值困难，如果迭代步长太大会导致优化精度不高甚至得不到最优解。力学途径是根据结构的力学特性得到的一种方法，利用单位虚载荷法可以得到结构位移的显式表达式（即 Mohr 积分），虽然需要根据位移约束创建单位虚载荷，并分析该载荷作用下的结构响应，但是该方法可以避免数学途径的所需要的敏感度计算。

通过以上方法可以建立显式的优化模型，但其求解还是非常困难，特别是对多变量的大型优化问题。根据关系映射反演（RMI）方法的思想，将难以求解的模型映射为易于求解的模型，然后再反演为原模型的解。对偶理论就是实现这种映射反演的有效途径，根据该理论可以将原模型转化为对偶模型，对偶模型是一个拟无约束的模型（约束条件只有设计变量大于等于 0），其设计变量空间的大小取决于原模型有效约束的多少。由于原模型的有效约束（即有效位移约束）相比原设计变量要少的多，对偶模型的求解就非常容易、非常快速。

本节将满应力设计直接转化为设计变量的动态下限，利用单位虚载荷法将位移约束显式化，建立显式的优化模型，并且根据对偶理论将模型转化为低维拟无约束的对偶模型，通过迭代求解对偶模型得到最优设计。

3.3.1 优化模型建立

3.2 节根据满应力准则得到了满足应力约束的最优设计 I_{yi}^* ($i=1, \dots, n$)，将其转化为动态下限 \tilde{I}_{yi} ($i=1, \dots, n$)，其表达式如下：

$$I_{yi} \geq \tilde{I}_{yi} = I_{yi}^* \quad (3-14)$$

跟尺寸约束 $\underline{I}_{yi} \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi}$ ($i=1, \dots, n$) 合并，得

$$\max(\underline{I}_{yi}, \tilde{I}_{yi}) \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \quad (3-15)$$

将式 (3-15) 代入 (3-13)，得

$$\begin{cases} \text{求} & I_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i (I_{yi}) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & u_{jl} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ & \max(I_{yi}, \underline{I}_{yi}) \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \end{cases} \quad (3-16)$$

式(3-16)所表达的优化模型，由于位移 u_{jl} 是隐式的，无法直接求解，需要将其转化为设计变量的显式函数。

根据求解位移的单位虚载荷法，可以得到 l 号工况下 j 号约束点的位移的显式表达式（即 Mohr 积分）：

$$u_{jl} = \sum_{i=1}^n \int_{jl} \left(\frac{M_{yi} \bar{M}_{yi}}{E_i I_{yi}} + \frac{M_{zi} \bar{M}_{zi}}{E_i I_{zi}} + \frac{M_{xi} \bar{M}_{xi}}{G_i I_{pi}} + \frac{\mu_{yi} Q_{yi} \bar{Q}_{yi}}{G_i A_i} + \frac{\mu_{zi} Q_{zi} \bar{Q}_{zi}}{G_i A_i} + \frac{N_i \bar{N}_i}{E_i A_i} \right) dx \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \quad (3-17)$$

- 其中
- u_{jl} —— 在 l 号工况下 j 号约束点的位移 (m)
 - M_y —— 实载荷工况作用下梁单元内对 y 轴的弯矩 (Nm)
 - M_z —— 实载荷工况作用下梁单元内对 z 轴的弯矩 (Nm)
 - M_x —— 实载荷工况作用下梁单元内对 x 轴的扭矩 (Nm)
 - Q_y —— 实载荷工况作用下梁单元内对 y 轴的剪力 (N)
 - Q_z —— 实载荷工况作用下梁单元内对 z 轴的剪力 (N)
 - N —— 实载荷工况作用下梁单元内的轴力 (N)
 - \bar{M}_y —— 虚载荷工况作用下梁单元内对 y 轴的弯矩 (Nm)
 - \bar{M}_z —— 虚载荷工况作用下梁单元内对 z 轴的弯矩 (Nm)
 - \bar{M}_x —— 虚载荷工况作用下梁单元内对 x 轴的扭矩 (Nm)
 - \bar{Q}_y —— 虚载荷工况作用下梁单元内 y 向的剪力 (N)
 - \bar{Q}_z —— 虚载荷工况作用下梁单元内 z 向的剪力 (N)
 - \bar{N} —— 虚载荷工况作用下梁单元内的轴力 (N)
 - I_y —— 梁单元的横截面对 y 轴的惯性矩 (m^4)
 - I_z —— 梁单元的横截面对 z 轴的惯性矩 (m^4)
 - I_p —— 梁单元的横截面对形心的极惯性矩 (m^4)
 - A —— 梁单元的横截面积 (m^2)
 - μ_y —— 计算平均剪应变的修正系数（跟截面形状有关）

$$\mu_y = \frac{A}{I_y^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

μ_z —— 计算平均剪应变的修正系数（跟截面形状有关）

$$\mu_z = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

在由梁单元组成的框架结构中，位移主要是弯矩和扭矩引起的，轴力和剪力的影响很小， $I_{yi}, I_{zi}, I_{pi} (i=1, \dots, n)$ 为主要影响变量，取 $I_{yi} (i=1, \dots, n)$ 为独立设计变量，则由此可得位移 u_{jl} 对设计变量 I_{yi} 的函数：

$$u_{jl} = \sum_{i=1}^n \frac{b_{ijl}}{I_{yi}} \quad (3-18)$$

其中，

$$b_{ijl} = I_{yi} \int_{jl} \left(\frac{M_{yi} \bar{M}_{yi}}{E_i I_{yi}} + \frac{M_{zi} \bar{M}_{zi}}{E_i I_{zi}} + \frac{M_{xi} \bar{M}_{xi}}{G_i I_{pi}} + \frac{\mu_{yi} Q_{yi} \bar{Q}_{yi}}{G_i A_i} + \frac{\mu_{zi} Q_{zi} \bar{Q}_{zi}}{G_i A_i} + \frac{N_i \bar{N}_i}{E_i A_i} \right) dx \quad (3-19)$$

根据静定化假设， b_{ijl} 在结构分析的每轮迭代中可以被视为常数。

在结构分析的迭代过程中，第 v 次结构分析时， l 号工况下 j 号约束点的位移可以表示为：

$$u_{jl}^{(v)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b_{ijl}^{(v)}}{I_{yi}^{(v)}} \right) \quad (3-20)$$

其中 v —— 结构分析的迭代次数

$b_{ijl}^{(v)}$ 可以根据式 (3-19) 由第 v 步结构分析得到内力计算得到。但式 (3-19) 是一个积分的形式，计算比较麻烦。然而，注意到 $b_{ijl}^{(v)} / I_{yi}^{(v)}$ 是第 v 步结构分析时， l 号工况下 i 号单元对位移的贡献，也就是 i 号单元的内虚功。根据外力功等于内力功的原理，可以通过计算外力功得到 $b_{ijl}^{(v)} / I_{yi}^{(v)}$ ，而避免麻烦的积分运算。

对于空间梁单元，每个节点都有 6 个自由度，将一个梁单元从结构中独立出来，该单元有两个端点（均为节点），受实载荷工况作用下有 12 个外力 $F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}$ ，受单位虚载荷工况作用下有 12 个虚位移 $\bar{u}_{x1}, \bar{u}_{y1}, \bar{u}_{z1}, \bar{\theta}_{x1}, \bar{\theta}_{y1}, \bar{\theta}_{z1}, \bar{u}_{x2}, \bar{u}_{y2}, \bar{u}_{z2}, \bar{\theta}_{x2}, \bar{\theta}_{y2}, \bar{\theta}_{z2}$ 。

记 $\mathbf{F}_i^l = (F_{x1}^l, F_{y1}^l, F_{z1}^l, M_{x1}^l, M_{y1}^l, M_{z1}^l, F_{x2}^l, F_{y2}^l, F_{z2}^l, M_{x2}^l, M_{y2}^l, M_{z2}^l)^T$ 表示 l 号工况作用下 i 号单元的外力向量，可以直接对实载荷工况分析得到。

记 $\mathbf{u}_i^j = (\bar{u}_{x1}, \bar{u}_{y1}, \bar{u}_{z1}, \bar{\theta}_{x1}, \bar{\theta}_{y1}, \bar{\theta}_{z1}, \bar{u}_{x2}, \bar{u}_{y2}, \bar{u}_{z2}, \bar{\theta}_{x2}, \bar{\theta}_{y2}, \bar{\theta}_{z2})^T$ 表示 j 号位移约束对

应的单位虚载荷工况作用下 i 号单元的虚位移向量，可以直接对单位虚载荷工况分析得到。

则 i 号单元的外虚功为

$$W_i = \mathbf{F}_i^{l^T} \mathbf{u}_i^j \quad (3-21)$$

根据外力功等于内力功的原理，得

$$\mathbf{F}_i^{l^{(v)}} \mathbf{u}_i^{j^{(v)}} = b_{ijl}^{(v)} / I_{yi}^{(v)} \quad (3-22)$$

所以

$$b_{ijl}^{(v)} = \mathbf{F}_i^{l^{(v)}} \mathbf{u}_i^{j^{(v)}} I_{yi}^{(v)} \quad (3-23)$$

将式 (3-23) 代入式 (3-18)，得

$$u_{jl} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{F}_i^{l^{(v)}} \mathbf{u}_i^{j^{(v)}} I_{yi}^{(v)}}{I_{yi}} \right) \quad (3-24)$$

代入位移约束的表达式 $u_{jl} \leq \bar{u}_j$ ，得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_i^{l^{(v)}} \mathbf{u}_i^{j^{(v)}} I_{yi}^{(v)}}{I_{yi}} \leq \bar{u}_j \quad (3-25)$$

记 $\psi_{ijl} = \mathbf{F}_i^{l^{(v)}} \mathbf{u}_i^{j^{(v)}} I_{yi}^{(v)}$ ，从迭代的角度讲，第 v 步结构分析得到的数据是已知量。因此，式 (3-25) 中只有 I_{yi} 是变量，经过一系列的推导，位移约束化为了设计变量 I_{yi} 的显式函数。

$$\sum_{i=1}^n \frac{\psi_{ijl}}{I_{yi}} \leq \bar{u}_j \quad (3-26)$$

将显式化的位移约束式 (3-26) 替换式 (3-16) 中隐式的位移约束，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad I_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i(I_{yi}) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{ijl}}{I_{yi}} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \max(I_{yi}^-, \underline{I}_{yi}) \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (3-27)$$

由于梁截面做相似变换，横截面积 A_i 和截面惯性矩 I_{yi} 保持一定的函数关系：

$$A_i = \alpha_{Ai} I_{yi}^{0.5}$$

其中 α_{Ai} —— 跟截面形状有关的常数

$$\alpha_{Ai} = \frac{A_i^{(0)}}{(I_{yi}^{(0)})^{0.5}}$$

则优化模型 (3-27) 可以转化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad I_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i \alpha_{Ai} I_{yi}^{0.5} \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{ijl}}{I_{yi}} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \max(I_{yi}, \underline{I}_{yi}) \leq I_{yi} \leq \bar{I}_{yi} \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (3-28)$$

式 (3-28) 是显式的模型, 但是由于约束和目标函数都是非线性的, 需要按有约束非线性规划求解, 但计算效率不高, 为了采用稳定且有效的算法, 二次规划是一个很好的选择, 可以将目标函数做二阶 Taylor 展开, 约束做一阶 Taylor 展开形成标准的二次规划模型, 但这样做使位移约束的精度损失较大。考虑到式 (3-28) 中位移跟设计变量成简单的反比关系, 只要采用倒变量变换, 可以将位移转化为设计变量的线性函数, 精度损失相对一阶 Taylor 展开较小。

令

$$x_i = \frac{1}{I_{yi}} \quad (3-29)$$

则式 (3-28), 可以转化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad x_i \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i \alpha_{Ai} x_i^{-0.5} \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n (\psi_{ijl} x_i) \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (3-30)$$

其中, $\bar{x}_i = 1/\max(I_{yi}, \underline{I}_{yi})$, $\underline{x}_i = 1/\bar{I}_{yi}$

将目标函数在 I_{yi}^0 (即 $x_i^0 = 1/I_{yi}^0$) 点做二次 Taylor 展开, 去掉常数项, 并不花费响应的敏度计算就可以得到标准的二次规划模型, 其表达式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad x_i \quad (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i \alpha_{Ai} \frac{3}{8} (x_i^0)^{-2.5} (x_i^2 - \frac{10}{3} x_i^0 x_i) \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n (\psi_{ijl} x_i) \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (3-31)$$

3.3.2 优化模型的求解

式 (3-31) 是一个标准的二次规划模型, 可以直接求解, 但是该模型的求解难度会随着设计变量的增多而不断加大, 求解效率也会随之降低。为了有效的解

决多变量的大模型优化问题，根据对偶理论将原问题转化为对偶问题，通过迭代求解对偶问题得到原问题的解。

原问题可以是没有经过近似的优化模型 (3-28)，也可以是经过倒变量变换和二阶近似的优化模型 (3-31)，经过对偶转化得到的对偶模型有所不同：用优化模型 (3-28) 进行转化，转化后目标函数需要做二阶近似才能得到标准的二次规划模型；用优化模型 (3-31) 进行转化，由于在转化前已经做了二阶近似处理，不需要做二阶近似就可以准确转化为标准的二次规划。殊途同归，最终得到的对偶空间的标准二次规划模型在本质上是一样的。由于在对偶空间求解对偶模型时，原变量存在主动变量（在变量取值范围内的变量）和被动变量（不在变量取值范围内的变量，需要强制变量等于上限或下限）的问题，需要通过迭代求解对偶模型使主动变量集不发生变化。经过迭代使主动变量集收敛可以得到优化模型 (3-31) 的精确解，但不是优化模型 (3-28) 的精确解，为了使优化模型的解更接近精确解，在主动变量不发生变化的基础上，让设计变量收敛。下面以优化模型 (3-28) 作为原问题进行对偶转变的推导。

为了方便推导，将式 (3-28) 简写为如下形式：

$$\begin{cases} \text{求} & z_i \ (i=1, \dots, n) \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n h_i z_i^{0.5} \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i} \leq b_t \ (t=1, \dots, T) \\ & \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i \ (i=1, \dots, n) \end{cases} \quad (3-32)$$

其中， $z_i = I_{yi}$ 是设计变量， $h_i = \rho_{il} \alpha_{Ai}$ ， T 是约束的个数（没有粗选约束前 $T = J^*L$ ，粗选约束后 $T \leq J^*L$ ），参数 a_{it}, b_t 分别和 ψ_{ijl}, \bar{u}_j 对应， $\underline{z}_i = \max(I_{\sim yi}, \underline{I}_{yi})$ ， $\bar{z}_i = \bar{I}_{yi}$ 。

根据对偶理论^[15]，式 (3-32) 的对偶模型为：

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda \\ \text{使} & \phi(\lambda) \rightarrow \max \\ \text{s.t.} & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (3-33)$$

$$\text{其中，} \phi(\lambda) = \min_{\underline{z} \leq z \leq \bar{z}} [L(z, \lambda)] = \min_{\underline{z} \leq z \leq \bar{z}} \left[\sum_{i=1}^n h_i z_i^{0.5} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i} - b_t \right) \right] \quad (3-34)$$

根据 Kuhn-Tucher 条件得：

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{h_i}{2(z_i^*)^{0.5}} - \sum_{t=1}^T \frac{a_{it} \lambda_t}{(z_i^*)^2} \begin{cases} \leq 0 & (z_i^* = \bar{z}_i) \\ = 0 & (\underline{z}_i < z_i^* < \bar{z}_i) \\ \geq 0 & (z_i^* = \underline{z}_i) \end{cases} \quad (3-35)$$

$$\text{记} \quad \alpha_i = \left(\sum_{t=1}^T \frac{2a_{it} \lambda_t}{h_i} \right)^{2/3} \quad (3-36)$$

由式 (3-35) 得

$$z_i^* = \begin{cases} \bar{z}_i & (\alpha_i \geq \bar{z}_i) \\ \alpha_i & (z_i < \alpha_i < \bar{z}_i) \\ \underline{z}_i & (\alpha_i \leq \underline{z}_i) \end{cases} \quad (3-37)$$

所以式 (3-34) 可以化简为

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n h_i(z_i^*)^{0.5} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \right) \quad (3-38)$$

将式 (3-38) 代入式 (3-33), 将目标函数最大改为最小 (目标函数加负号), 然后将其二阶展开, 并去掉常数项, 就可以得到对偶问题的标准二次规划模型:

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda_t \quad (t=1, \dots, T) \\ \text{使} & -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} \Big|_{\lambda^0} \lambda_t \lambda_s - \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t} \Big|_{\lambda^0} - \sum_{s=1}^T \lambda_s \frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} \Big|_{\lambda^0} \right) \lambda_t \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \lambda_t \geq 0 \quad (t=1, \dots, T) \end{cases} \quad (3-39)$$

求式 (3-39) 中的一、二阶导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_t} \left[\sum_{i=1}^n h_i(z_i^*)^{0.5} + \sum_{t=1}^T \lambda_t \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2(z_i^*)^{0.5}} \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_t} - \sum_{t=1}^T \lambda_t \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{(z_i^*)^2} \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_t} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2(z_i^*)^{0.5}} \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_t} \sum_{t=1}^T \frac{a_{it} \lambda_t}{(z_i^*)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_t} \left[\frac{h_i}{2(z_i^*)^{0.5}} - \sum_{t=1}^T \frac{a_{it} \lambda_t}{(z_i^*)^2} \right] + \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \end{aligned} \quad (3-40)$$

根据式 (3-35), 式 (3-40) 的第一项为 0, 则

$$\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \quad (3-41)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} = \frac{\partial}{\partial \lambda_s} \frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t} = \frac{\partial}{\partial \lambda_s} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{it}}{z_i^*} - b_t \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{(z_i^*)^2} \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_s} \quad (3-42)$$

根据式 (3-35), 求式 (3-42) 中的 $\frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_s}$:

(1) 当 $\underline{z}_i < z_i^* < \bar{z}_i$ 时, 有

$$\frac{h_i}{2(z_i^*)^{0.5}} - \sum_{t=1}^T \frac{a_{it} \lambda_t}{(z_i^*)^2} = 0 \quad (3-43)$$

即

$$\frac{h_i(z_i^*)^{1.5}}{2} = \sum_{t=1}^T a_{it} \lambda_t \quad (3-44)$$

对式 (3-44) 的两边求对 λ_s 导, 得

$$\frac{3h_i(z_i^*)^{0.5}}{4} \frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_s} = a_{is} \quad (3-45)$$

即

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_s} = \frac{4a_{is}}{3h_i(z_i^*)^{0.5}} \quad (3-46)$$

(2) 当 $z_i^* = \bar{z}_i$ 或 $z_i^* = \underline{z}_i$ 时, 有

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_s} = 0 \quad (3-47)$$

综合上述两种情况, 得

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial \lambda_s} = \begin{cases} 0 & (z_i^* = \bar{z}_i \text{ 或 } z_i^* = \underline{z}_i) \\ \frac{4a_{is}}{3h_i(z_i^*)^{0.5}} & (\underline{z}_i < z_i^* < \bar{z}_i) \end{cases} \quad (3-48)$$

定义 $I_a = \{i \mid \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i \quad (i=1, \dots, n)\}$ 为主动变量集, 将式 (3-48) 代入式 (3-42), 得

$$\frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_t \partial \lambda_s} = -\sum_{i \in I_a} \frac{a_{it}}{(z_i^*)^2} \frac{4a_{is}}{3h_i(z_i^*)^{0.5}} = -\sum_{i \in I_a} \frac{4a_{it}a_{is}}{3h_i(z_i^*)^{2.5}} \quad (3-49)$$

将式 (3-41) 和式 (3-49) 代入 (3-39), 得

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda_t \quad (t=1, \dots, T) \\ \text{使} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T H_{ts} \lambda_t \lambda_s + \sum_{t=1}^T c_t \lambda_t \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \lambda_t \geq 0 \quad (t=1, \dots, T) \end{cases} \quad (3-50)$$

其中

$$H_{ts} = \sum_{i \in I_a} \frac{4a_{it}a_{is}}{3h_i[z_i^*(\lambda^0)]^{2.5}} \quad (t=1, \dots, T; s=1, \dots, T) \quad (3-51)$$

$$c_t = b_t - \sum_{i=1}^n \frac{a_{it}}{z_i^*(\lambda^0)} - \sum_{s=1}^T \lambda_s^0 \sum_{i \in I_a} \frac{4a_{it}a_{is}}{3h_i[z_i^*(\lambda^0)]^{2.5}} \quad (t=1, \dots, T) \quad (3-52)$$

理论上, 式 (3-51) 和 (3-52) 中的对偶变量 λ 的初始值 λ^0 可以任意确定,

但是如果偏离真实值太大会影响对偶规划求解的迭代次数，而且还需要通过式 (3-37) 计算 z_i^* ，因此用原设计变量的初始值 z_i^0 (即 I_{yi}^0) 代替 $z_i^*(\lambda^0)$ 作为初始值，如果用射线步 (3.5 节将详细介绍) 后原设计变量的值 γz_i^0 (即 γI_{yi}^0) 代替 $z_i^*(\lambda^0)$ 作为初始值，会使初始值更加接近真实值，迭代次数更少。

式 (3-50) 是一个拟无约束的标准二次规划，将初始值代入式 (3-51) 和 (3-52) 可以计算二次规划的二次项系数 H_{ts} ($t=1, \dots, T; s=1, \dots, T$) 和一次项系数 c_t ($t=1, \dots, T$)，然后用 Lemke 算法求解二次规划 (3-50) 得 λ_i^* ($i=1, \dots, T$)，然后根据式 (3-37) 计算 z_i^* ($i=1, \dots, n$)，即 I_{yi}^* ($i=1, \dots, n$)，根据判断准则判断主动变量集有没有变化和设计变量是否收敛，判断准则如下：

$$I_a^{(v)} = I_a^{(v+1)} \quad \text{和} \quad \sum_{i=1}^n [(z_i^{(v+1)} - z_i^{(v)}) / z_i^{(v+1)}]^{0.5} / n < \varepsilon_3 \quad (3-53)$$

其中

$I_a^{(v)}$	——	第 v 次循环的主动变量集
$I_a^{(v+1)}$	——	第 $v+1$ 次循环的主动变量集
$z_i^{(v)}$	——	第 v 次循环的设计变量的值
$z_i^{(v+1)}$	——	第 $v+1$ 次循环的设计变量的值
v	——	对偶规划求解的迭代次数
n	——	设计变量数
ε_3	——	设计变量收敛精度 (默认值为 0.001)

如果两个准则有一个不满足或者两个都不满足，则用 λ_i^* ($i=1, \dots, T$) 作为初始值代入式 (3-51) 和 (3-52) 计算 H_{ts} ($t=1, \dots, T; s=1, \dots, T$) 和 c_t ($t=1, \dots, T$)，然后再用 Lemke 算法求解二次规划 (3-50)，重复上述过程直到式 (3-53) 中的两个准则都满足。

3.4 框架截面优化的无量纲化处理

用 3.2 节和 3.3 节的理论和方法可以现实满足刚度和强度的框架截面优化程序，其推导过程是以梁单元的截面惯性矩作为设计变量的，且设计变量之间是相互独立的，这样处理设计变量非常直观、容易理解，但是一个设计变量只能控制截面相同的梁单元，具有一定的局限性，只能解决一部分框架结构截面优化问题，对于一些特殊情况就无法处理，如多个截面不同的梁单元要求按同一比例进行变化，即多个截面不同的梁单元有关联性，不是相互独立的。

为了扩大程序的适用范围，本节在 3.2 节和 3.3 节的基础上将设计变量无量纲化，用截面惯性矩的比值代替截面惯性矩作为设计变量，建立了无量纲化的框架截面优化模型，这样不但能用一个变量控制多个截面不同的梁单元，还能扩展到其他性质的结构，如膜单元、壳单元、体单元等，用该方法设计的程序可以根据设计要求将变量分组，用尽可能少的设计变量描述优化问题，提高求解效率。

3.4.1 优化模型的建立

取无量纲设计变量 $\beta_k (k=1, \dots, K)$ ，由于设计变量连接，属于同一设计变量的单元具有如下关系：

$$\beta_k = I_{yi} / I_{yi}^0 \quad (i \in k; k=1, \dots, K) \quad (3-54)$$

根据截面惯性矩和横截面积之间的关系：

$$I_y \propto A^2 \quad (3-55)$$

得

$$\beta_k^{0.5} = A_i / A_i^0 \quad (i \in k; k=1, \dots, K) \quad (3-56)$$

则结构重量可以表示为无量纲设计变量的函数：

$$w = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i = \sum_{k=1}^K \beta_k^{0.5} \left(\sum_{i \in k} \rho_i l_i A_i^0 \right) \quad (3-57)$$

尺寸约束的上下限也可以无量纲化：

$$\bar{\beta}_k = \min_{i \in k} (\bar{I}_{yi} / I_{yi}^0); \quad \underline{\beta}_k = \max_{i \in k} (\underline{I}_{yi} / I_{yi}^0) \quad (3-58)$$

考虑位移、应力、尺寸三种约束的优化模型式 (3-13) 可以转化为无量纲设计变量的优化模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad \beta_k \quad (k=1, \dots, K) \\ \text{使} \quad w = \sum_{k=1}^K \beta_k^{0.5} \sum_{i \in k} \rho_i l_i A_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad u_{jl} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad \sigma_{il} \leq \bar{\sigma}_i \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad \underline{\beta}_k \leq \beta_k \leq \bar{\beta}_k \quad (k=1, \dots, K) \end{array} \right. \quad (3-59)$$

其中： β_k 是无量纲设计变量， K 是设计变量数， n 是单元数， J 是位移约束数， L 是载荷工况数， $i \in k$ 表示 i 是 k 号设计变量控制的单元号。

3.4.2 满应力解的无量纲化

将满应力解无量纲化就是将设计变量（截面惯性矩）的动态下限转化为无量纲设计变量的动态下限，在 3.2 节根据满应力准则推导出了每个单元的满应力解 $I_{yi}^* (i=1, \dots, n)$ ，见式 (3-8)。如果一个变量只控制一个单元，那么这个解就是设计变量的解，但是无量纲设计变量控制多个单元，每个单元的满应力解都对应着一个无量纲的设计变量：

$$\beta_k = I_{yi}^* / I_{yi}^0 (i \in k) \quad (3-60)$$

为了保证每个单元都满足应力约束，取最大值作为无量纲设计变量，表达式如下：

$$\beta_k^* = \max_{i \in k} (I_{yi}^* / I_{yi}^0) \quad (3-61)$$

如果没有位移约束和尺寸约束， β_k^* 就是无量纲设计变量的解，需要根据 β_k^* 调整单元设计：

$$I_{yi}^{**} = \beta_k^* I_{yi}^0 \geq I_{yi}^* (i \in k) \quad (3-62)$$

如果有位移约束，需要将表达应力约束的动态下限用 β_k^* 表示：

$$\beta_k \geq \beta_k^* \quad (3-63)$$

跟无量纲化的尺寸约束合并，得

$$\max(\beta_k, \underline{\beta}_k) \leq \beta_k \leq \bar{\beta}_k (k=1, \dots, K) \quad (3-64)$$

则式(3-59)转化为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad \beta_k (k=1, \dots, K) \\ \text{使} \quad w = \sum_{k=1}^K \beta_k^{0.5} \sum_{i \in k} \rho_i l_i A_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad u_{jl} \leq \bar{u}_j (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \max(\beta_k, \underline{\beta}_k) \leq \beta_k \leq \bar{\beta}_k (k=1, \dots, K) \end{array} \right. \quad (3-65)$$

3.4.3 位移约束显式表达式的无量纲化

3.3节已经推导出了位移约束的显式表达式，见式(3-26)。根据式(3-54)，得

$$I_{yi} = \beta_k I_{yi}^0 (i \in k; k=1, \dots, K) \quad (3-66)$$

将式(3-66)代入式(3-26)，得

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i \in k} \frac{\psi_{ijl}}{\beta_k I_{yi}^0} \leq \bar{u}_j \quad (3-67)$$

即

$$\sum_{k=1}^K (\sum_{i \in k} \frac{\psi_{ijl}}{I_{yi}^0}) / \beta_k \leq \bar{u}_j \quad (3-68)$$

记

$$\varphi_{kjl} = \sum_{i \in k} (\psi_{ijl} / I_{yi}^0) \quad (3-69)$$

则式 (3-68) 可以写成如下形式:

$$\sum_{k=1}^K \frac{\varphi_{kjl}}{\beta_k} \leq \bar{u}_j \quad (3-70)$$

式 (3-65) 转化为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad \beta_k \quad (k=1, \dots, K) \\ \text{使} \quad w = \sum_{k=1}^K \beta_k^{0.5} \sum_{i \in k} \rho_i l_i A_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^K \frac{\varphi_{kjl}}{\beta_k} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \max(\beta_k, \underline{\beta}_k) \leq \beta_k \leq \bar{\beta}_k \quad (k=1, \dots, K) \end{array} \right. \quad (3-71)$$

3.4.4 无量纲化模型的求解

同 3.3.2 节一样, 模型 (3-71) 可以直接经过倒变量代换 $x_k = 1/\beta_k$ 和目标函数的二次展开转化为标准的二次规划求解, 其形式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad x_k \quad (k=1, \dots, K) \\ \text{使} \quad w = \sum_{k=1}^K \left[\frac{3}{8} (x_k^0)^{-2.5} (x_k^2 - \frac{10}{3} x_k^0 x_k) \right] \sum_{i \in k} \rho_i l_i A_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^K \varphi_{kjl} x_k \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k \quad (k=1, \dots, K) \end{array} \right. \quad (3-72)$$

其中, $x_k = 1/\beta_k$ 是设计变量, $\bar{x}_k = 1/\max(\beta_k, \underline{\beta}_k)$, $\underline{x}_k = 1/\bar{\beta}_k$

同样为了降低求解规模、提高求解效率, 也可以根据对偶理论将其转化为对偶模型进行求解。

式 (3-71) 简记为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad z_k \quad (k=1, \dots, K) \\ \text{使} \quad w = \sum_{k=1}^K h_k z_k^{0.5} \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^K a_{kt} / z_k \leq b_t \quad (t=1, \dots, T) \\ \quad \underline{z}_k \leq z_k \leq \bar{z}_k \quad (k=1, \dots, K) \end{array} \right. \quad (3-73)$$

其中, $z_k = \beta_k$ 是设计变量, $h_k = \sum_{i \in k} \rho_i l_i A_i^0$, T 是约束的个数 (没有粗选约束前 T

$= J^*L$, 粗选约束后 $T \leq J^*L$), 参数 a_{kt}, b_t 分别和 φ_{kjl}, \bar{u}_j 对应, $\underline{z}_k = \max(\beta_k, \underline{\beta}_k)$, $\bar{z}_k = \bar{\beta}_k$ 。

优化模型 (3-73) 和优化模型 (3-32) 的形式完全一样, 只是设计变量数不同, 同样可以通过迭代对偶模型求解, 其过程不再赘述, 优化模型 (3-73) 的对偶模型为:

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda_t \quad (t=1, \dots, T) \\ \text{使} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T H_{ts} \lambda_t \lambda_s + \sum_{t=1}^T c_t \lambda_t \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \lambda_t \geq 0 \quad (t=1, \dots, T) \end{cases} \quad (3-74)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{ts} &= \sum_{k \in I_a} \frac{4a_{it}a_{is}}{3h_k [z_k^*(\lambda^0)]^{2.5}} \quad (t=1, \dots, T; s=1, \dots, T) \\ c_t &= b_t - \sum_{k=1}^K \frac{a_{kt}}{z_k^*(\lambda^0)} - \sum_{s=1}^T \lambda_s^0 \sum_{k \in I_a} \frac{4a_{kt}a_{ks}}{3h_k [z_k^*(\lambda^0)]^{2.5}} \quad (t=1, \dots, T) \end{aligned} \quad (3-75)$$

3.5 近似射线步技术的应用

近似射线步技术是单变量单元组成的结构所具有的射线上内力不变的特性向多变量单元的近似推广。对于轴力杆或膜单元组成的结构, 其刚度矩阵是截面设计变量的线性函数, 因而在设计空间原点引出的射线上内力保持不变, 利用这一特性求出射线步系数 γ , 所有设计变量皆乘以 γ 得到新的设计, 而内力保持不变, 无需结构重分析就可以使设计点从可行域内部拉到边界, 使结构重量下降, 也可以使设计点从可行域外部拉到边界上, 使优化迭代过程更平稳。对于多变量单元, 由于结构刚度矩阵不再是设计变量的严格线性函数, 执行这一过程, 只能使设计点从可行域内部或外部拉到可行域边界附近, 而不能保证在可行域边界上, 然而还是避免了结构重分析而使设计得到修正, 因此称这种对设计的可行性调整为近似射线步技术。

近似射线步是在结构分析之后建立优化模型之前执行的, 只能根据位移、应力和设计变量与其约束值的之间的关系进行调整, 为了推导方便, 把应力、位移和尺寸三种约束写成统一的形式:

$$R_k \leq 1 \quad (k=1, \dots, n+n^*L+J^*L) \quad (3-76)$$

其中

$$R_k = \begin{cases} \frac{u_{jl}}{u_j} & (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \frac{\sigma_{il}}{\sigma_i} & (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \\ \frac{I_{yi}}{I_{yi}} & (i=1, \dots, n) \end{cases} \quad (3-77)$$

如果设计变量在可行域内，则所有的 $R_k < 1$ ；如果设计变量在可行域外，则有部分 $R_k > 1$ ；如果设计变量在可行域边界上，则至少有一个 $R_k = 1$ 。根据上述设计变量的在设计空间的位置跟 R_k 的关系，不难想象出，要使设计变量从可行域内或者可行域外拉到可行域边界上，只要让 R_k 的最大值等于 1 就可以了，用射线步技术可以达到此目的。

假定 R_m 是所有 R_k 中值最大的，记

$$\gamma = \max_k R_k = R_m \quad (3-78)$$

对于轴力杆和膜单元，应力和位移都跟横截面积成反比，只要将所有单元横截面积同时乘以 γ ，则应力和位移就会变成原来的 $1/\gamma$ ，则可以得到

$$\frac{R_k}{\gamma} \leq \frac{R_m}{\gamma} = 1 \quad (3-79)$$

对于框架结构的梁单元，应力、位移跟设计变量的关系比较复杂，可以根据主要影响因素得到一种近似关系。梁单元的主要承受弯矩，忽略轴力的影响，根据式 (3-3) 可以得到应力和设计变量的近似关系如下：

$$\sigma \propto \frac{1}{I_y^{0.75}} \quad (3-80)$$

框架结构的位移主要由弯矩和扭矩引起的，忽略剪力和轴力的影响，根据式 (3-17) 可以得到如下关系式：

$$u \propto \frac{1}{I_y} \quad (3-81)$$

根据式 (3-80) 和式 (3-81)，式 (3-77) 可以修正为：

$$R_k = \begin{cases} \frac{u_{jl}}{u_j} & (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \left(\frac{\sigma_{il}}{\sigma_i}\right)^{4/3} & (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \\ \frac{I_{yi}}{I_{yi}} & (i=1, \dots, n) \end{cases} \quad (3-82)$$

射线步后，设计变量的值为：

$$I_{yi}^* = \gamma I_{yi}^0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3-83)$$

有了射线步调整,满应力设计的初始值和对偶规划求解的初始值就要用射线步后的设计变量的值,由于射线步能使设计更接近最优值,可以使满应力迭代和对偶规划的迭代次数大大减小。

对于满应力设计,设计变量的初始值为:

$$I_{yil}^* = I_{yi}^* = \gamma I_{yi}^0 \quad (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L) \quad (3-84)$$

用 I_{yil}^* 代替 I_{yil}^0 作为式 (3-10) 的初始值,内力不变。

对于对偶规划求解,设计变量的初始值为:

$$I_{yi}^* = \gamma I_{yi}^0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (3-85)$$

用 I_{yi}^* 代替 I_{yi}^0 作为式 (3-50) 的初始值,内力不变。

满应力设计的公式推导和数学模型的建立都是在静定化假设(即结构内力不变)的前提下完成的,但是对于大多数框架结构,在梁截面发生改变后,内力会有不同程度的变化,这种变化会导致设计没有达到最优或者结构应力或位移超过许用值。即使在结构重量收敛以后,也有可能存在一定的误差,根据近似射线步的特性,射线步后的设计比射线步前的设计更接近最优值,因此取射线步后的设计作为最优设计会更准确。

用一个简单的二维设计变量空间的优化过程可以说明近似射线步跟优化设计的关系,如图 3-1 所示,虚线为位移约束,粗实线为应力约束,细实线为射线步,黑点表示设计点, I_y^0 是结构的初始设计,经过 2 步迭代(包括 3 次结构分析)和 3 次射线步得到最优设计 I_y^{2*} 。

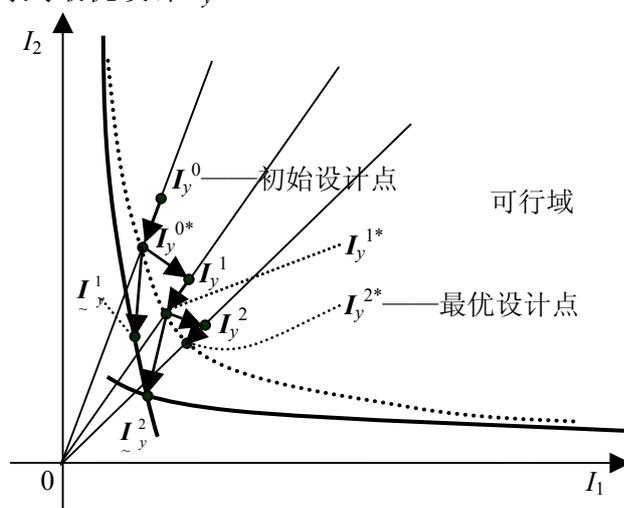


图 3-1 二维设计变量空间中的优化过程

Fig. 3-1 Optimization Process in the Two-dimension Design Variables Space

3.6 粗选有效约束技术的应用

有效约束就是在最优点取等式的约束,相反,在最优点取严格不等式的约束称为无效约束,换句话说,最优设计将落在有效约束上。在优化模型中约束越多,模型的求解难度就越大,优化的效率就越低,如果线性无关的有效约束大于等于

设计变量的个数，设计自由度就不存在了。因此，从模型的求解考虑，需要根据约束的性质，将可能无效的约束去掉，只保留可能有效的约束，而且有效约束的个数不能超过设计变量的个数，这种技术就是粗选有效约束技术。

粗选有效约束除了要满足“有效约束的个数不能超过设计变量的个数”这一个总准则外，还要满足三个细微一点的准则：

(1) 随着迭代的进程粗选标准逐渐严格

经过近似射线步以后，所有的约束的 R_k 值都小于等于 1，将 R_k 值大于删除限 t 的约束保留，作为可能的有效约束参与建模和寻优，称之为准有效约束，而将小于等于删除限 t 的约束作为可能的无效约束予以删除。删除限 t 是 $(0, 1)$ 区间的实数，在迭代开始，由于当前点离最优点比较远， t 取较小的值，如取 0.3，防止把真正的有效约束删掉，随着迭代的进程，当前点向最优点靠近， t 也逐渐向 1 靠近，如取 0.8 或 0.9，使约束粗选的标准严一点，直到最后粗选得到的准有效约束集向真正有效约束集逼近、甚至重合。

(2) 性质不同的约束粗选标准不一样

由于位移、应力和尺寸三种约束的对设计变量变化的灵敏度是不一样的，尺寸约束最敏感，应力约束次之，位移约束反应最迟钝。因此，在每轮迭代中不同约束的粗选标准应该不一样：尺寸约束的删除限 t_z 应该小一点，即标准松一点，应力约束的删除限 t_s 稍大一点，位移约束的删除限 t_d 最大，即标准最严。

(3) 避免线性相关的约束同时进入准有效约束

对于应力约束，在某工况下，同一变量控制的单元的应力约束具有线性相关性，因此只保留应力比最大单元的应力约束；对于位移约束，凡对称的位移约束或同一节点相反方向上的位移约束只能保留一个作为准有效约束。

根据上述粗选有效约束三个准则，有效约束的判断准则的公式表述如下：

$$R^{(v)} \geq \begin{cases} t_0 + 0.1 * v & (R^{(v)} < t_m) \\ t_m & (R^{(v)} \geq t_m) \end{cases} \quad (3-86)$$

其中 $R^{(v)}$ —— 第 v 次结构分析射线步后的响应比

$$R^{(v)} = \begin{cases} \frac{u_{jl}}{\gamma^{(v)} u_j} + \delta & (j = 1, \dots, J; l = 1, \dots, L) \\ \left(\frac{\sigma_{il}}{\gamma^{(v)} \sigma_i} \right)^{4/3} & (i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, L) \\ \frac{I_{yi}}{\gamma^{(v)} I_{yi}} - \delta & (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

t_0 —— 约束的初始删除限（取 0.3）

t_m	——	约束的最大删除限 (取 0.9)
ν	——	结构分析的迭代次数
$\gamma^{(\nu)}$	——	第 ν 次结构分析的射线步系数
δ	——	对不同约束的粗选标准不同的差值 (取 0.1)

对于第三个准则式 (3-86) 不能描述, 可以用其他的方法实现: 对于应力约束, 比较同一设计变量控制的单元的应力比 (单元应力与许用应力的比值), 然后只根据应力比最大的单元进行设计; 对于同一节点相反方向上的位移约束, 由于响应比一正一负, 负的约束用式 (3-86) 就能删除, 而对称的位移约束, 判断起来比较麻烦, 需要用户在设计位移约束的时候, 注意不要加对称的位移约束。

完成粗选有效约束后, 仅对选进的准有效约束建立优化模型与求解, 使计算量大大的降低, 求解效率大大的提高。相对粗选约束来说, 对优化模型的求解实际上就是细选约束的过程。

3.7 程序实现

根据以上算法, 程序可以按图 3-2 所示的流程图进行设计:

分析模型主要依靠 MSC.Patran 软件的前处理功能完成, 包括创建几何模型、划分有限元网格、创建边界条件及载荷工况、创建材料属性及单元属性等。

优化参数输入是指通过用户界面输入建立优化模型的所必需的参数, 如应力约束、位移约束 (包括大小、方向和约束点)、设计变量 (包括初始值及其上下限), 还有一些优化参数一般取默认值, 如满应力设计收敛精度 ε_1 (默认值 0.001)、结构重量的收敛精度 ε_2 (默认值 0.01)、对偶规划求解的收敛精度 ε_3 (默认值 0.001), 对程序熟悉的用户可以根据模型的规模及精度要求做适当修改。

判断位移约束数是否等于 0, 如果等于 0, 只需要进行满应力设计; 否则, 需要创建位移约束对应的单位虚载荷及各工况对应的虚载荷工况, 并对虚载荷工况进行分析, 为建立优化模型提供数据。

在本程序中 MSC.Nastran 软件作为有限元求解器对分析模型进行有限元分析, 如果优化模型中有位移约束, 该分析模型不但包括实载荷工况还包括跟实载荷工况对应的虚载荷工况。

提取结果数据是指将 MSC.Nastran 软件的分析结果有选择性的读入程序, 为建立优化模型提供数据, 如单元应力、单元内力 (包括弯矩和轴力)、节点平衡力、虚载荷工况作用下的节点位移等。

射线步调整就是根据式 (3-82) 和式 (3-78) 计算射线步系数 γ , 然后所有设计变量都乘以 γ , 将设计点从可行域内或可行域外拉到可行域边界附近。

粗选有效约束就是根据式 (3-86) 将约束分成准有效约束和无效约束两部分, 将无效约束从约束中删掉, 只保留准有效约束参与满应力设计和优化模型的建立。

判断有效应力约束数是否等于 0, 如果等于 0, 就不再进行满应力设计; 否则, 只对有效应力约束进行满应力设计。

满应力设计就是根据式 (3-10) 通过迭代得到满应力解, 其程序流程图如图 3-3 所示。

判断有效位移约束数是否等于 0, 如果等于 0, 满应力设计就是最优设计;

否则，将满应力设计转化为动态尺寸下限，参与优化模型的建立。

优化模型 (3-28) 的求解是通过迭代其对偶模型 (3-50) 实现的，其程序流程图如图 3-4。

判断结构重量是否收敛，如果收敛，取射线步后的设计作为最优设计；如果不收敛，则需要对模型进行重新分析。

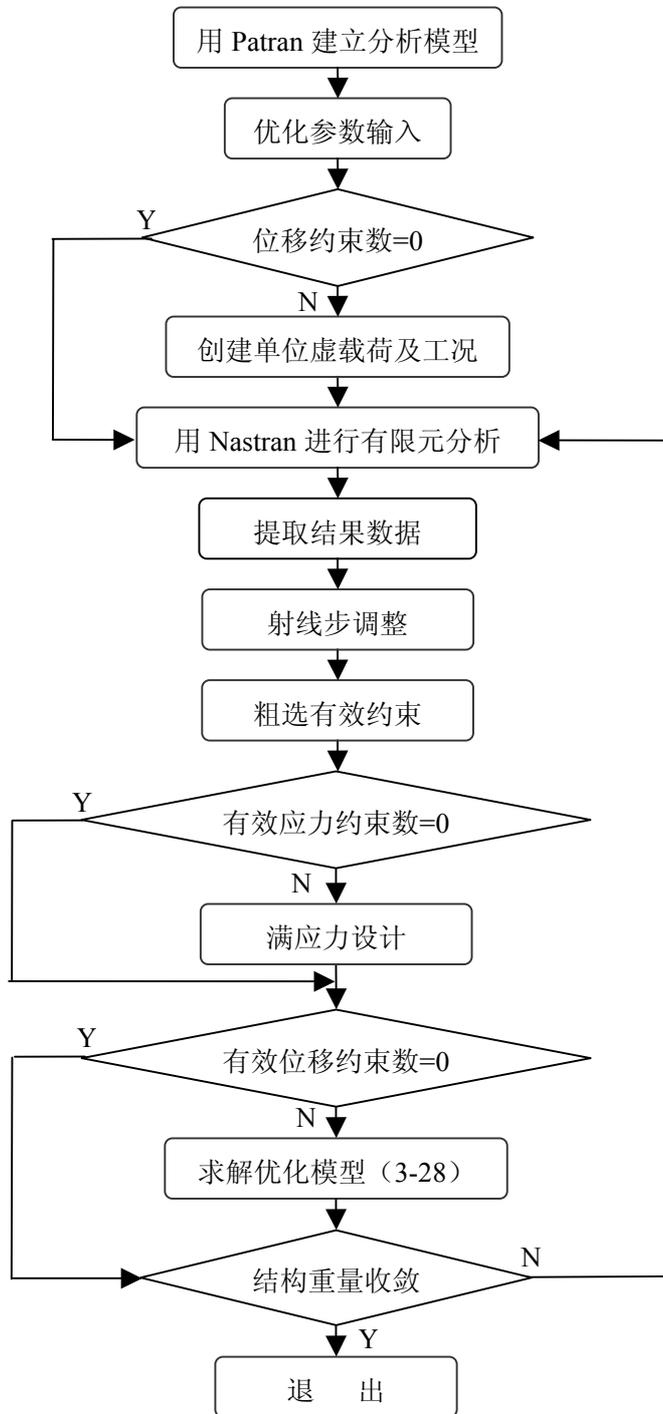


图 3-2 框架结构截面优化的程序流程图

Fig. 3-2 Program Flow Chart of Sectional Optimization of Frame Structures

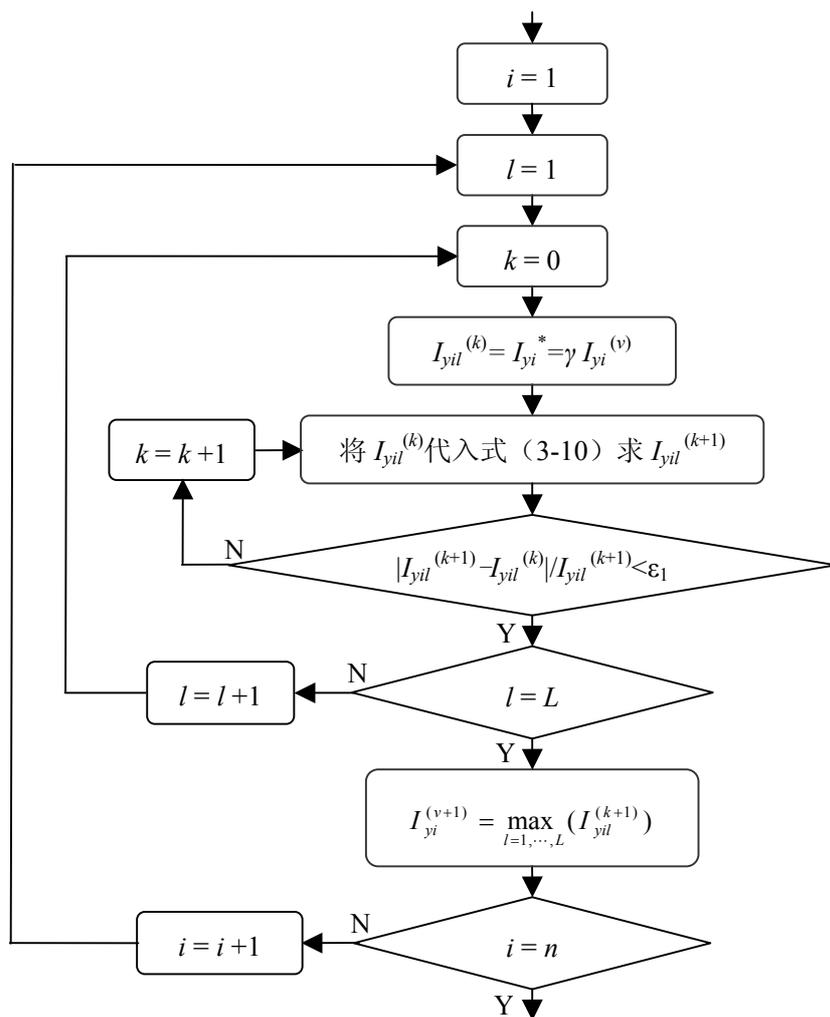


图 3-3 满应力设计的程序流程图

Fig. 3-3 Program Flow Chart of Full Stress Design

图 3-3 中, I_{yi} 是设计变量, γ 是射线步系数, i 是对设计变量循环次数, n 是设计变量数, l 是对载荷工况循环次数, L 是载荷工况数, k 是满应力迭代次数, v 是结构分析迭代次数。

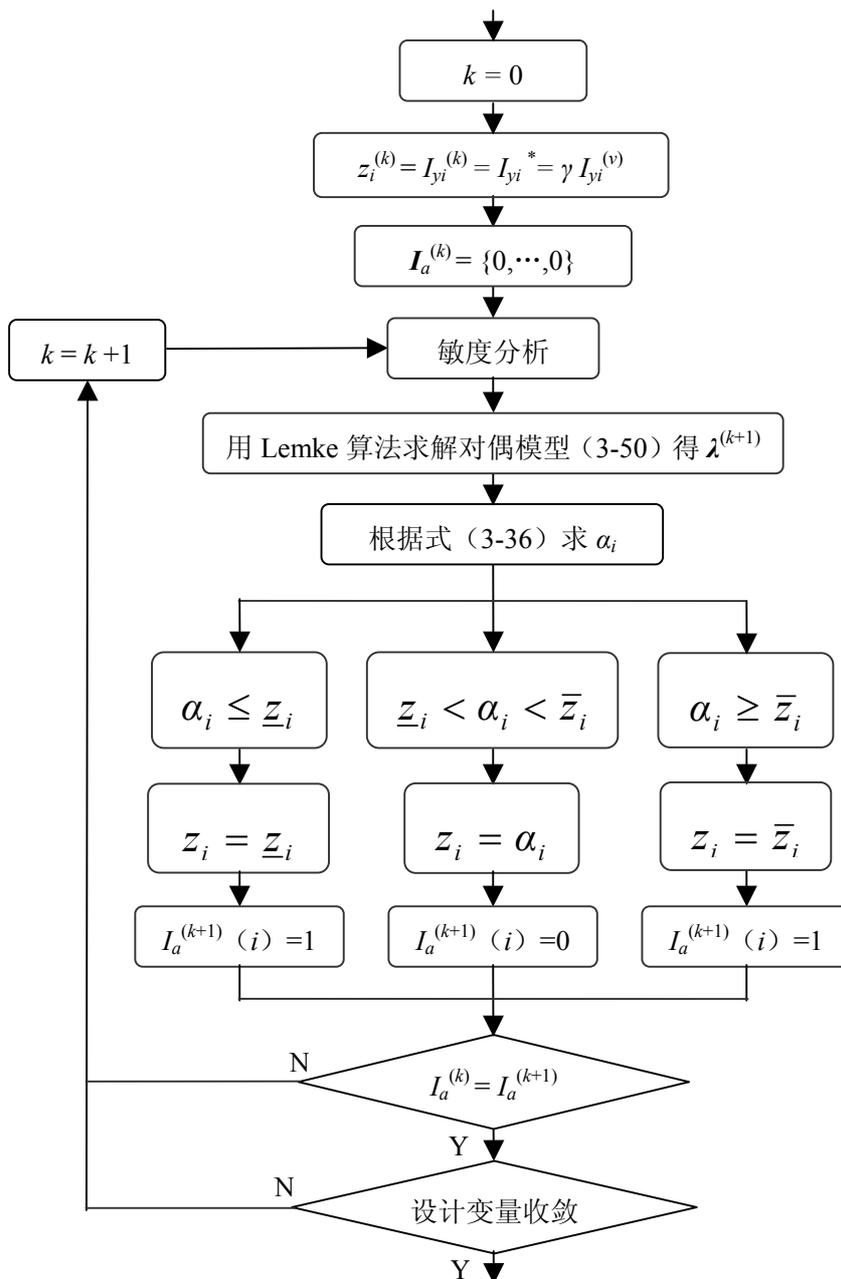


图 3-4 求解优化模型的程序流程图

Fig. 3-4 Program Flow Chart of Solving the Optimization Model

图 3-4 中， z_i （即 I_{yi} ）是设计变量， λ 是对偶设计变量， I_a 是主动变量集，如果 $I_a(i)$ 的值是 0，表示 i 号设计变量为主动变量，如果 $I_a(i)$ 的值是 1，表示 i 号设计变量为被动变量， γ 是射线步系数， k 是对偶规划求解的迭代次数， v 是结构分析的迭代次数，敏感度分析就是根据式（3-51）和（3-52）计算对偶规划目标函数的一阶、二阶导数，设计变量收敛根据式（3-53）判断。

3.8 程序算例

3.8.1 悬臂梁的等强度优化

分析模型：如图 3-5 所示，悬臂梁的长 L 为 1m，分成 10 个单元，一端固支，自由端的受横向载荷 P ，大小为 1kN。材料为 A3 钢：弹性模量 $E=206\text{Gpa}$ ，泊松比 $\nu=0.3$ ，密度 $\rho=7800\text{kg/m}^3$ ，屈服强度 $\sigma_s=235\text{MPa}$ ，许用应力 $\bar{\sigma}=120\text{MPa}$ 。

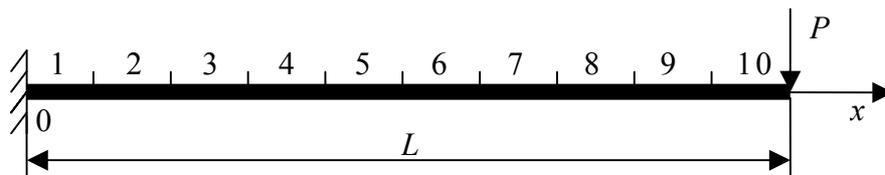


图 3-5 悬臂梁的分析模型

Fig. 3-5 Analysis Model of Cantilever Beam

优化模型：以结构重量最小为目标函数，取每个梁单元的截面尺寸作为独立的设计变量（本研究程序用截面惯性矩作为设计变量和无量纲设计变量，Nastran 程序用截面边长作为设计变量），梁单元截面是正方形，其初始边长为 0.05m，以许用应力作为应力约束，经优化得到一个等强度梁。

下面先用材料力学方法计算得到精确设计，然后分别用本研究程序和 Nastran 程序进行计算，比较三种方法得到的结果并得出结论，为了使结果具有可比性，本研究程序和 Nastran 程序的收敛精度都取相同的值 0.01。

(1) 用材料力学方法计算的结果

梁单元的截面为正方形，设其边长为 a ，则悬臂梁上距固支点的距离为 x 的截面上的最大应力为：

$$\sigma(x) = \frac{M}{W} = \frac{6P(1-x)}{a^3} \quad (3-87)$$

根据满应力准则，得

$$\frac{6P(1-x)}{a^3} = \bar{\sigma} \quad (3-88)$$

则等强度梁的截面边长为：

$$a = \sqrt[3]{\frac{6P(1-x)}{\bar{\sigma}}} \quad (3-89)$$

根据式 (3-89)，令 $x=0, 0.1\text{m}, \dots, 0.9\text{m}$ ，可以得到满足应力约束的等强度梁的 10 个单元的横截边长，该结果为等强度梁的准确设计，本研究程序和 Nastran 程序计算的结果可以与其相比较。

(2) 用本研究程序计算的结果

本研究程序分别用截面惯性矩做设计变量和无量纲设计变量, 经过 2 步迭代得到满足应力约束的等强度梁, 以截面惯性矩做设计变量的计算结果如表 3-1, 截面惯性矩的变化曲线如图 3-6, 用无量纲设计变量的计算结果如表 3-2, 无量纲设计变量的变化曲线如图 3-7, 经换算两种方法得到的结果是一致的, 结构重量的变化曲线如图 3-8, 优化后等强度梁的剖面如图 3-9, 应力云图如图 3-10。

表 3-1 以截面惯性矩做设计变量的计算结果 (本研究程序)

Table 3-1 Results with Sectional Moment of Inertia as Design Variables (Present Program)

迭代次数	0	1	2	射线步*	
截面 惯性矩 I_{yi} (m^4)	1	5.2083E-07	1.5350E-07	1.5350E-07	1.5350E-07
	2	5.2083E-07	1.3338E-07	1.3338E-07	1.3338E-07
	3	5.2083E-07	1.1400E-07	1.1400E-07	1.1400E-07
	4	5.2083E-07	9.5406E-08	9.5406E-08	9.5406E-08
	5	5.2083E-07	7.7681E-08	7.7681E-08	7.7681E-08
	6	5.2083E-07	6.0917E-08	6.0917E-08	6.0917E-08
	7	5.2083E-07	4.5240E-08	4.5240E-08	4.5240E-08
	8	5.2083E-07	3.0828E-08	3.0828E-08	3.0828E-08
	9	5.2083E-07	1.7954E-08	1.7954E-08	1.7954E-08
	10	5.2083E-07	7.1249E-09	7.1249E-09	7.1249E-09
结构重量 (kg)	19.5000	6.8515	6.8515	6.8515	

*注: 取射线步后的设计为最优设计, 本算例中射线步系数为 1, 射线步前后的设计相同。

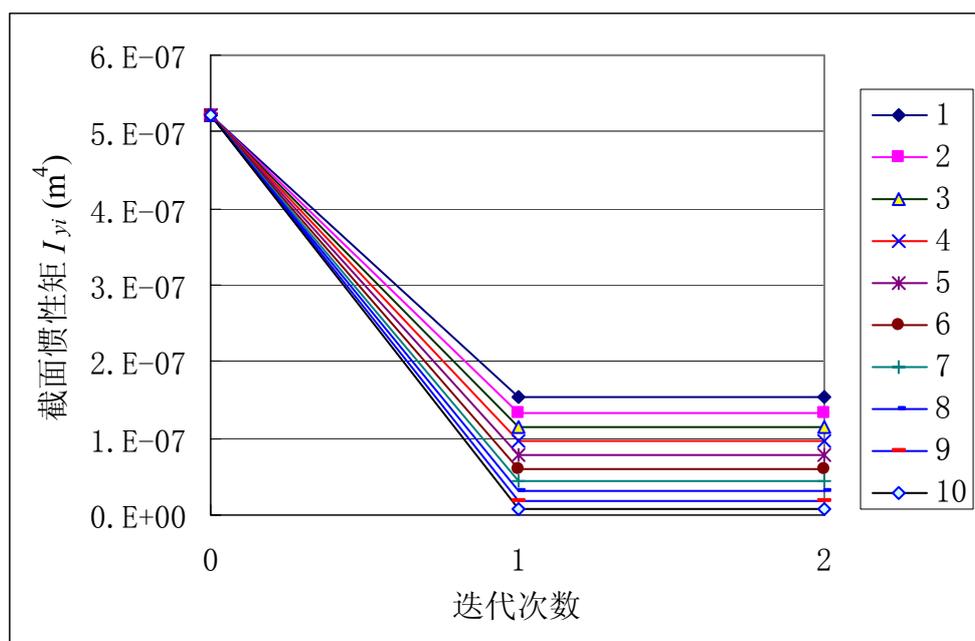


图 3-6 截面惯性矩的变化曲线 (本研究程序)

Fig. 3-6 History Curve of Sectional Moment of Inertia (Present Program)

表 3-2 用无量纲设计变量的计算结果 (本研究程序)

Table 3-2 Results with Dimensionless Design Variables (Present Program)

迭代次数	0	1	2	射线步	
无量纲 设计变量 β_i	1	1	0.294723	0.294723	1.0000
	2	1	0.256097	0.256097	1.0000
	3	1	0.218877	0.218877	1.0000
	4	1	0.183180	0.183180	1.0000
	5	1	0.149147	0.149147	1.0000
	6	1	0.116961	0.116961	1.0000
	7	1	0.086862	0.086862	1.0000
	8	1	0.059189	0.059189	1.0000
	9	1	0.034471	0.034471	1.0000
	10	1	0.013680	0.013680	1.0000
结构重量 (kg)	19.5000	6.8515	6.8515	6.8515	

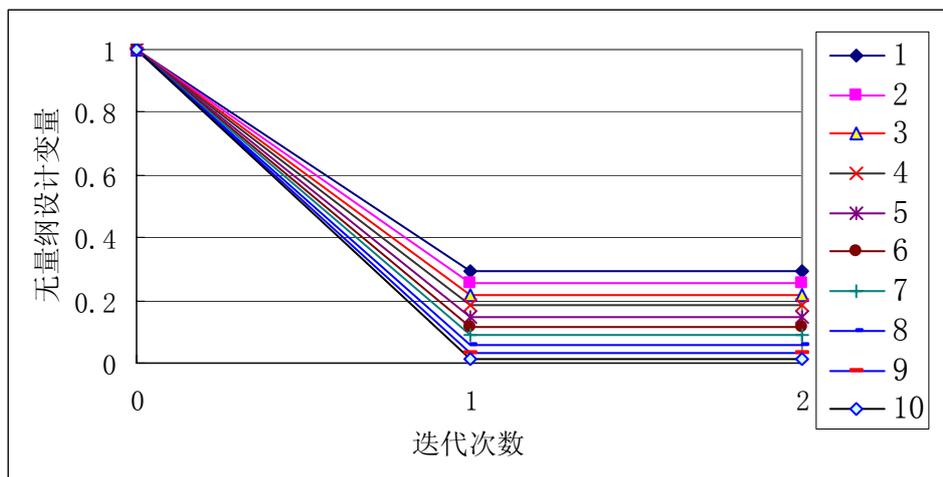


图 3-7 无量纲设计变量的变化曲线 (本研究程序)

Fig. 3-7 History Curve of Dimensionless Design Variables (Present Program)

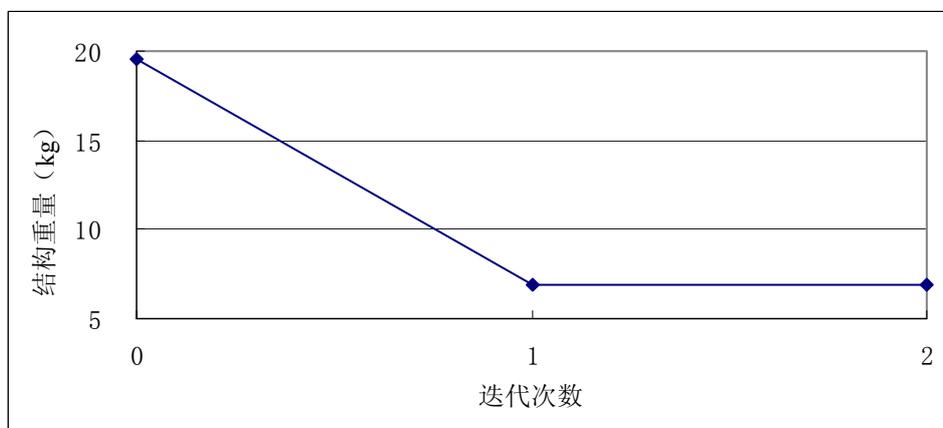


图 3-8 结构重量的变化曲线 (本研究程序)

Fig. 3-8 History Curve of Structural Weight (Present Program)

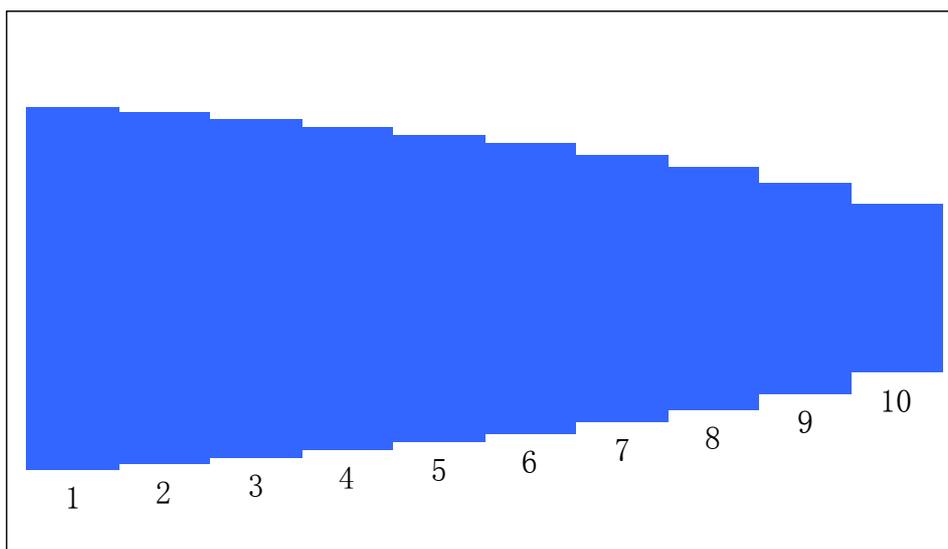


图 3-9 等强度梁的纵剖面图
Fig. 3-9 Cutaway View of Equal Strength Beam



图 3-10 等强度梁的应力云纹图和变形图
Fig. 3-10 Stress Fringe and Deformation Plot of Equal Strength Beam

(3) 用 MSC.Nastran 程序计算的结果

用 MSC.Nastran 的优化模块，以正方形的截面边长作为设计变量，目标函数和约束不变，需要经过 7 步迭代得出结果，截面边长（设计变量）的变化曲线如图 3-11，目标函数的变化曲线如图 3-12。

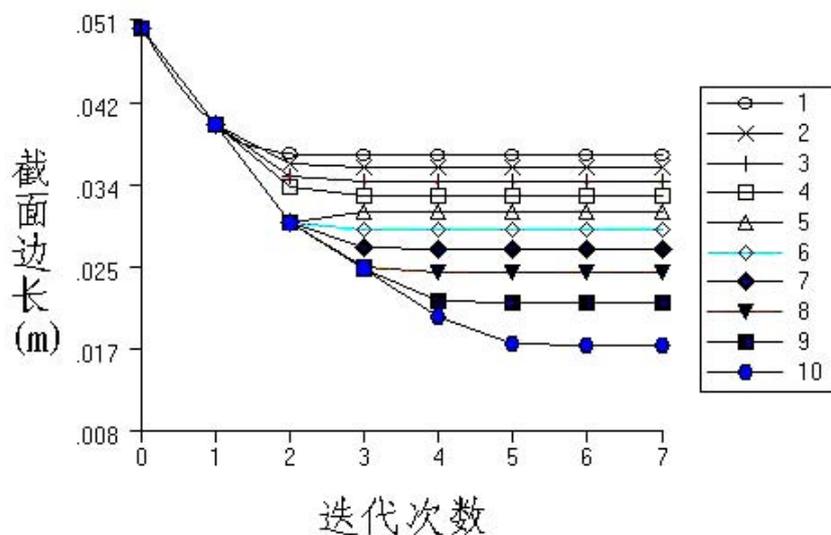


图 3-11 设计变量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-11 History Curve of Design Variables (Nastran Program)

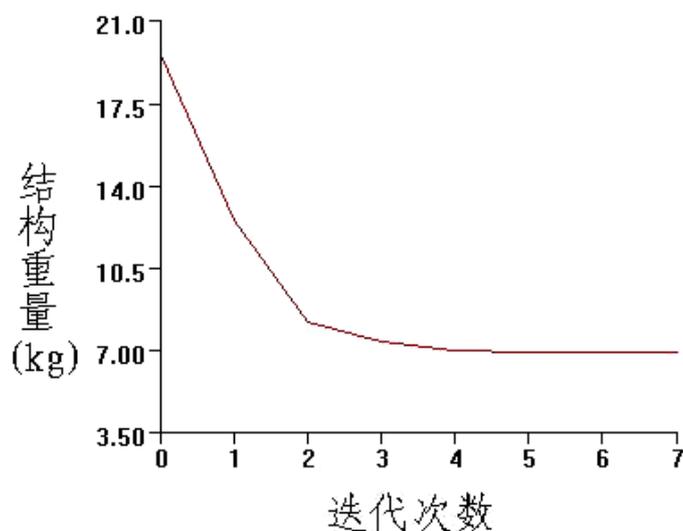


图 3-12 结构重量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-12 History Curve of Structural Weight (Nastran Program)

(4) 结果比较及结论

由于不同程序的设计变量不同，本研究程序用截面惯性矩做设计变量，Nastran 程序用截面边长作为设计变量，为了比较根据截面惯性矩跟截面边长的关系将截面边长换算为截面惯性矩，本研究程序和 Nastran 程序的计算得到的截面惯性矩及结构重量与材料力学方法得到的结果相比较，如表 3-3 所示，其中误差的计算公式如下：

- | | | |
|---------------------------------|----|----------------------------|
| $ I_{yi1} - I_{yi2} / I_{yi1}$ | —— | 本研究程序相对材料力学方法截面惯性矩的误差 |
| $ I_{yi1} - I_{yi3} / I_{yi1}$ | —— | Nastran 程序相对材料力学方法截面惯性矩的误差 |
| $ w_1 - w_2 / w_1$ | —— | 本研究程序相对材料力学方法结构重量的误差 |

$|w_1 - w_3| / w_1$ —— Nastran 程序相对材料力学方法结构重量误差
 其中, I_{yi1} 和 w_1 用材料力学方法得到的精确的截面惯性矩和结构重量, I_{yi2} 和 w_2 为本研究程序得到的截面惯性矩和结构重量, I_{yi3} 和 w_3 为 Nastran 程序得到的截面惯性矩和结构重量。

表 3-3 三种方法计算结果比较

Table 3-3 Comparisons of Results with Three Different Methods

计算方法		材料力学 (精确解)	本研究程序		Nastran 程序	
			最优设计	误差	最优设计	误差
截面 惯性 矩 I_{yi} (m^4)	1	1.535E-07	1.535E-07	1.756E-06	1.535E-07	1.830E-04
	2	1.334E-07	1.334E-07	1.584E-06	1.334E-07	4.574E-04
	3	1.140E-07	1.140E-07	6.921E-07	1.142E-07	1.344E-03
	4	9.541E-08	9.541E-08	3.633E-08	9.550E-08	1.020E-03
	5	7.768E-08	7.768E-08	1.275E-06	7.769E-08	8.689E-05
	6	6.092E-08	6.092E-08	1.107E-06	6.107E-08	2.440E-03
	7	4.524E-08	4.524E-08	3.258E-06	4.525E-08	2.688E-04
	8	3.083E-08	3.083E-08	6.562E-07	3.098E-08	5.018E-03
	9	1.795E-08	1.795E-08	4.811E-06	1.802E-08	3.840E-03
	10	7.125E-09	7.125E-09	4.967E-06	7.185E-09	8.504E-03
结构重量(kg)		6.8515	6.8515	6.379E-07	6.8567	7.494E-04
迭代次数		1	2	——	7	——

通过对结果的比较分析可以得出如下结论:

(1) 用材料力学方法、本研究程序和 Nastran 程序都能将一个等截面悬臂梁优化成一个等强度梁, 并保证每个梁单元的最大应力接近许用应力 120MPa;

(2) 与 Nastran 程序相比, 本研究程序能更快速得到最优设计 (Nastran 程序需要 7 步迭代, 本研究程序只需 2 步迭代);

(3) 用本研究程序得到的结果更准确 (比 Nastran 程序的计算结果更接近精确设计);

(4) 对于一个变量控制一个单元的情况, 用截面惯性矩做设计变量和无量纲设计变量得到的结果一样。

3.8.2 多工况下受应力约束的单跨度框架的截面优化

如图 3-13 所示的单跨度框架, 有三种工况载荷, 标为 (I)、(II)、(III)。材料为 A3 钢: 弹性模量 $E=206Gpa$, 泊松比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=7800kg/m^3$, 屈服强度 $\sigma_s=235MPa$, 许用应力 $\bar{\sigma}=120MPa$ 。梁单元截面是正方形, 其初始边长为 0.02m。

优化模型: 以结构重量最小为目标函数, 将①②③号梁的截面尺寸作为独立的设计变量, 以许用应力作为应力约束。

下面分别用本研究程序和 Nastran 程序进行计算, 比较两种方法得到的结果并得出结论, 为了使结果具有可比性, 本研究程序和 Nastran 程序的收敛精度都取相同的值 0.01。

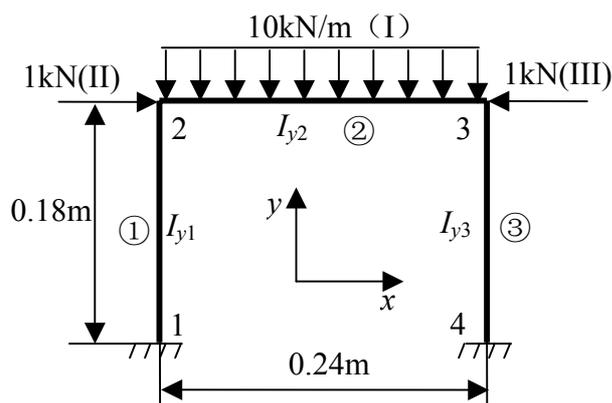


图 3-13 单跨度框架分析模型

Fig. 3-13 Analysis Model of Single Span Frame

(1) 用本研究程序的计算结果

本研究程序分别用截面惯性矩做设计变量和无量纲设计变量, 经过 3 次迭代得到最优设计, 以截面惯性矩做设计变量的计算结果如表 3-4, 截面惯性矩的变化曲线如图 3-14。

表 3-4 以截面惯性矩做设计变量的计算结果 (本研究程序)

Table 3-4 Results with Sectional Moment of Inertia as Design Variables (Present Program)

迭代次数		0	1	2	3	射线步*
截面惯性矩 I_{yi} (m^4)	1	1.3333E-08	3.1594E-09	3.4261E-09	3.4482E-09	3.4524E-09
	2	1.3333E-08	1.9619E-09	2.0631E-09	2.0790E-09	2.0790E-09
	3	1.3333E-08	3.1594E-09	3.4261E-09	3.4482E-09	3.4524E-09
结构重量 (kg)		1.8720	0.83399	0.86391	0.86687	0.86722

*注: 取射线步后的设计为最优设计

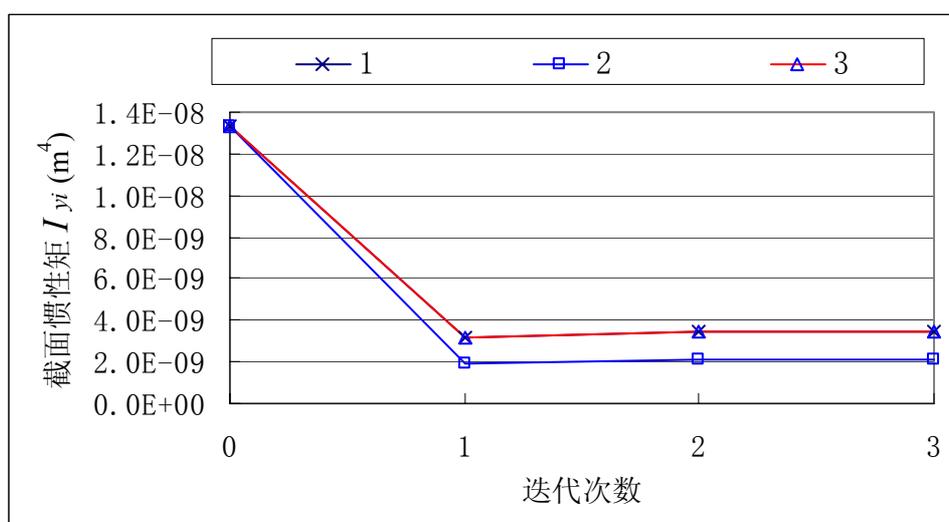


图 3-14 截面惯性矩的变化曲线 (本研究程序)

Fig. 3-14 History Curve of Sectional Moment of Inertia (Present Program)

用无量纲设计变量的计算结果如表 3-5，无量纲设计变量的变化曲线如图 3-15，经换算两种方法得到的结果是一致的，结构重量的变化曲线如图 3-16，三种工况下的应力云图分别如图 3-17、图 3-18 和图 3-19。

表 3-5 用无量纲设计变量的计算结果（本研究程序）

Table 3-5 Results with Dimensionless Design Variables (Present Program)

迭代次数		0	1	2	3	射线步系数
无量纲设计变量	1	1	0.4868	0.5069	0.5085	1.0038321
	2	1	0.3836	0.3934	0.3949	1.0038321
	β_i	1	0.4868	0.5069	0.5085	1.0038321
结构重量 (kg)		1.8720	0.83399	0.86391	0.86687	0.86722

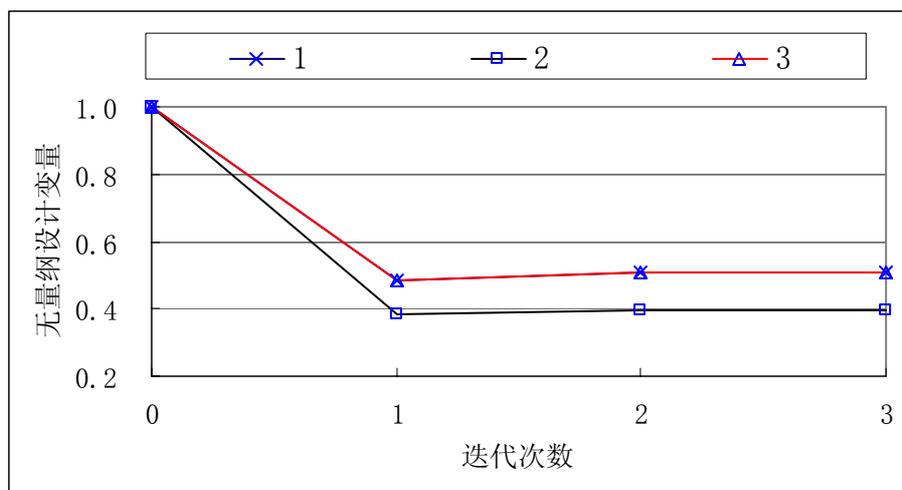


图 3-15 无量纲设计变量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-15 History Curve of Dimensionless Design Variables (Present Program)

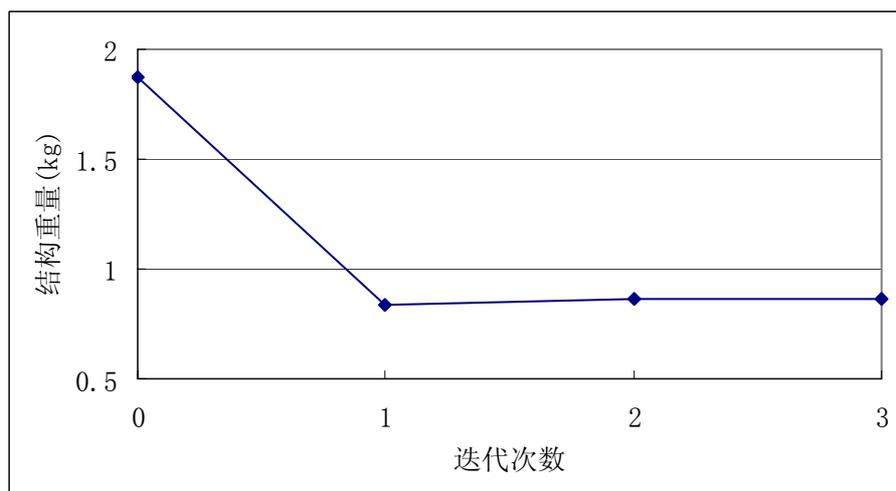


图 3-16 结构重量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-16 History Curve of Structural Weight (Present Program)

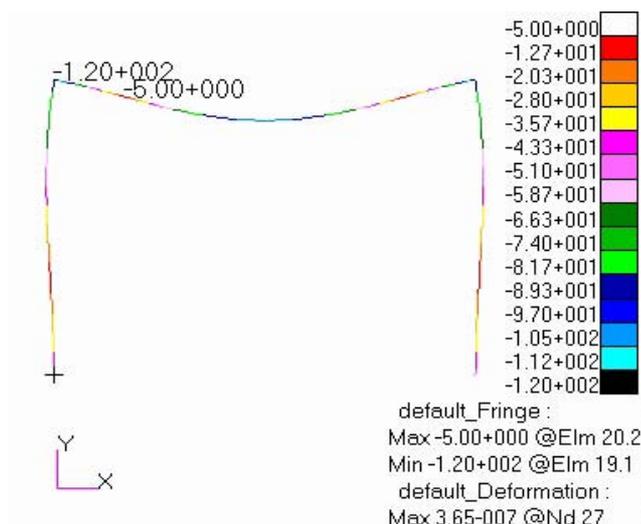


图 3-17 I 号工况的应力云纹图
 Fig. 3-17 Stress Fringe under Case I

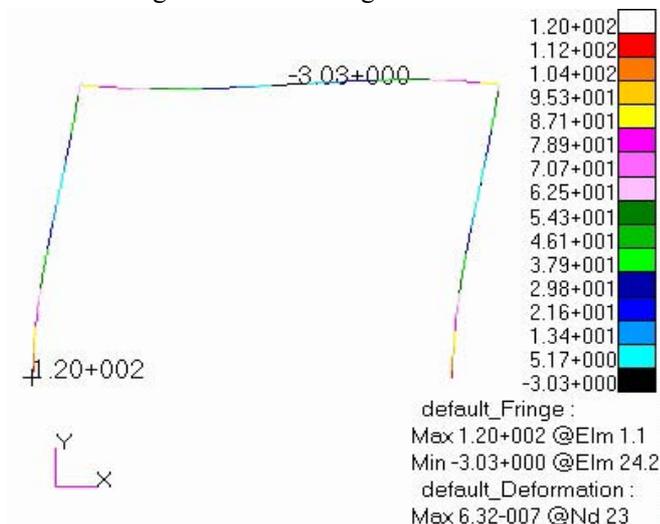


图 3-18 II 号工况的应力云纹图
 Fig. 3-18 Stress Fringe under Case II

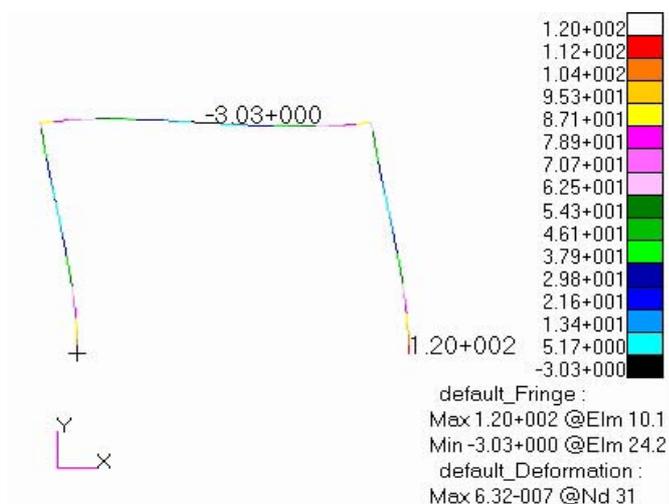


图 3-19 III 号工况的应力云纹图
 Fig. 3-19 Stress Fringe under Case III

(2) 用 MSC.Nastran 程序计算的结果

用 MSC.Nastran 的优化模块，以正方形截面的边长作为设计变量，目标函数和约束不变，需要经过 10 步迭代得出结果，截面边长（设计变量）的变化曲线如图 3-20，目标函数的变化曲线如图 3-21。

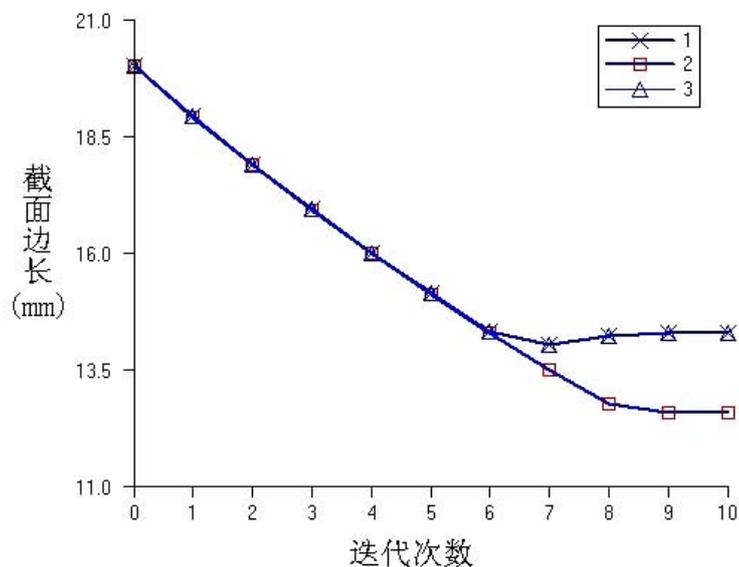


图 3-20 设计变量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-20 History Curve of Design Variables (Nastran Program)

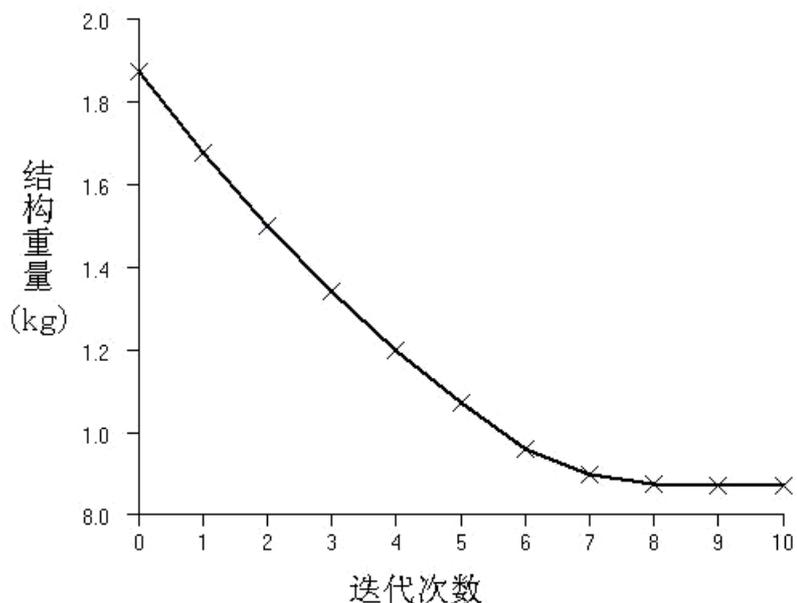


图 3-21 结构重量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-21 History Curve of Structural Weight (Nastran Program)

(3) 结果比较及结论

本研究程序采用了近似射线步技术，在满应力收敛精度相同的条件下（均为

0.001), 有无近似射线步对满应力迭代次数的影响如表 3-6, 对结构最大应力的影响如表 3-7。

Nastran 程序用截面边长作为设计变量, 本文研究程序用截面惯性矩做设计变量, 为了比较两种方法的计算结果, 根据截面惯性矩跟边长的关系将截面边长换算为截面惯性矩。本研究程序和 Nastran 程序的计算结果比较如表 3-8, 各工况最大应力的和约束点位移比较如表 3-9。

表 3-6 近似射线步对满应力设计迭代次数影响

Table 3-6 Effect of Approximate Scaling Step on Iteration Number of Full Stress Design

近似射线步		无			有		
结构分析步数		1	2	3	1	2	3
设计变量 I_{y1}	工况 I	7	6	6	4	3	3
	工况 II	7	4	1	3	1	1
	工况 III	7	4	3	3	1	1
设计变量 I_{y2}	工况 I	7	4	3	3	1	1
	工况 II	7	5	5	4	2	2
	工况 III	7	5	5	4	2	2
设计变量 I_{y3}	工况 I	7	6	6	4	3	3
	工况 II	7	4	3	3	1	1
	工况 III	7	4	1	3	1	1
总计		63	42	33	31	15	15

表 3-7 近似射线步对结构最大应力的影响 (单位: MPa)

Table 3-7 Effect of Approximate Scaling Step on Structural Maximal Stress (MPa)

工况	工况 I	工况 II	工况 III
近似射线步前	-120.68763	120.57843	120.57843
近似射线步后	-119.99955	119.894333	119.894333

表 3-8 本研究程序和 Nastran 程序计算结果比较

Table 3-8 Comparisons of Results with Present Program and Nastran Program

方法	迭代次数	设计变量 (m^4)			结构重量 (kg)
		I_{y1}	I_{y2}	I_{y3}	
本研究程序	3	3.4524E-09	2.0790E-09	3.4524E-09	0.8672
Nastran 程序	10	3.4584E-09	2.0805E-09	3.4584E-09	0.8678

表 3-9 本研究程序和 Nastran 程序的最大应力的比较

Table 3-9 Comparisons of Maximal Stress with Present Program and Nastran Program

方法	结构最大应力 (MPa)		
	工况 I	工况 II	工况 III
本研究程序	-119.99955	119.894333	119.894333
Nastran 程序	-119.95722	119.755173	119.755173

通过对结果的比较分析可以得出如下结论：

- (1) 采用近似射线步技术能有效的降低满应力迭代次数，见表 3-6；
- (2) 采用近似射线步技术能有效提高计算精度，将违背约束的设计拉回到可行域边界内，且更接近可行域边界，见表 3-7；
- (3) 本研究程序和 Nastran 程序都能将多工况作用下的框架结构进行优化得到满足强度的最优设计；
- (4) 与 Nastran 程序相比，本研究程序的效率更高（Nastran 程序需要 10 步迭代，本研究程序只需 3 步迭代）；
- (5) 优化结果更加准确（与 Nastran 程序相比，本研究程序得到最优设计的结构重量更轻，结构应力更接近许用值）。

3.8.3 多工况下受应力和位移约束的单跨度框架的截面优化

3.8.2 节考核了满足应力约束的单跨度框架的截面优化问题，本节在此基础上，增加位移约束考核受应力和位移约束的单跨度框架的截面优化问题。

分析模型（包括结构尺寸、材料、边界条件及载荷工况等）跟 3.8.2 节一样（见图 3-13），在优化模型上增加 6 个位移约束： $-0.5\text{mm} \leq u_{2x} \leq 0.5\text{mm}$ ，即 2 号节点沿 x 方向的位移不超过 0.5mm； $-0.5\text{mm} \leq u_{3x} \leq 0.5\text{mm}$ ，即 3 号节点沿 x 方向的位移不超过 0.5mm； $-0.1\text{mm} \leq u_y \leq 0.1\text{mm}$ ，即 2 号梁中间节点沿 y 方向位移不超过 0.2mm，如图 3-22 所示。

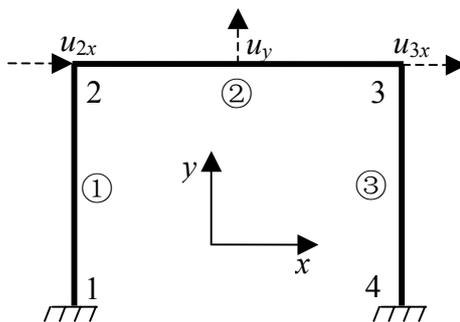


图 3-22 位移约束的约束点及方向

Fig. 3-22 Constraint Point and Direction of the displacement constraints

(1) 用本研究程序计算的结果

本研究程序分别用截面惯性矩做设计变量和无量纲设计变量，经过 6 次迭代得到最优设计，用截面惯性矩做设计变量的计算结果如表 3-10，截面惯性矩的变化曲线图 3-23，无量纲设计变量的计算结果如表 3-11，无量纲设计变量的变化曲线如图 3-24，经换算两种方法得到的结果是一致的，结构重量的变化曲线如图 3-25，三种工况下的变形图分别如图 3-26、3-27 和 3-28 所示。

表 3-10 用截面惯性矩做设计变量的计算结果（本研究程序）

Table 3-10 Results with Sectional Moment of Inertia as Design Variables (Present Program)

迭代次数	0	1	2	3	4	5	6	射线步	
截面惯性矩 I_{yi} (10^{-9}m^4)	1	13.33	7.010	5.258	4.108	3.196	2.658	2.643	2.623
	2	13.33	12.50	14.06	15.68	17.26	17.99	17.71	17.75
	3	13.33	7.010	5.258	4.108	3.196	2.658	2.643	2.623
结构重量(kg)	1.872	1.540	1.474	1.435	1.402	1.371	1.363	1.367	

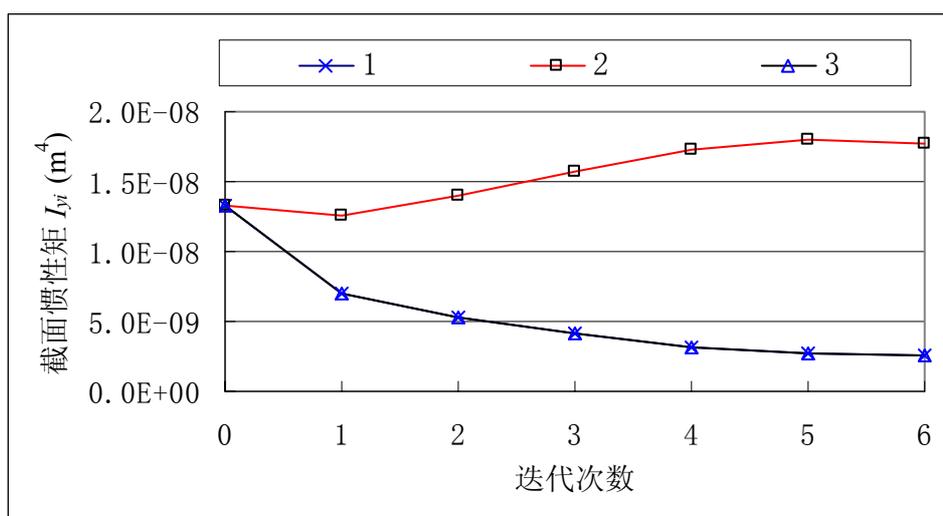


图 3-23 截面惯性矩的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-23 History Curve of Sectional Moment of Inertia (Present Program)

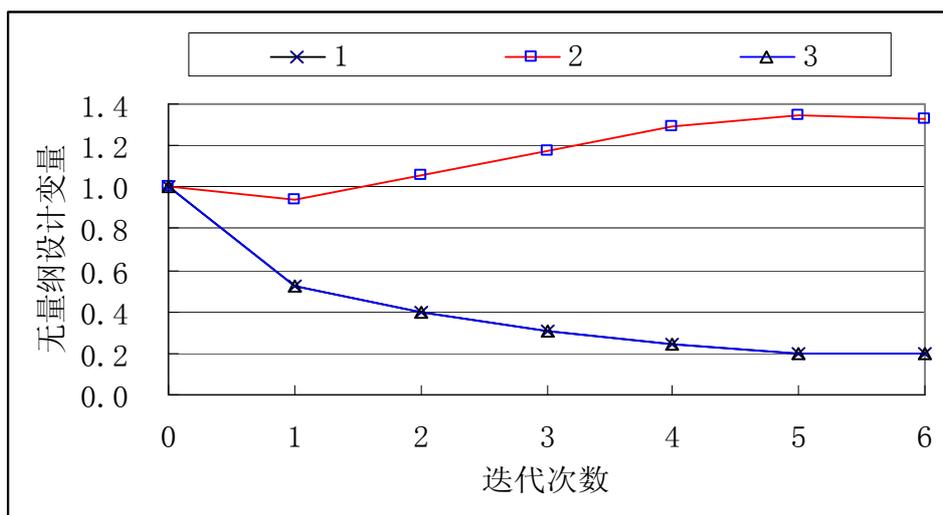


图 3-24 无量纲设计变量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-24 History Curve of Dimensionless Design Variables (Present Program)

表 3-11 用无量纲设计变量的计算结果（本研究程序）

Table 3-11 Results with Dimensionless Design Variables (Present Program)

迭代次数		0	1	2	3	4	5	6	射线步
无量纲 设计变量 β_i	1	1	0.526	0.394	0.308	0.240	0.199	0.198	0.993
	2	1	0.938	1.054	1.176	1.295	1.349	1.328	0.993
	3	1	0.526	0.394	0.308	0.240	0.199	0.198	0.993
结构重量 (kg)		1.872	1.540	1.474	1.435	1.402	1.371	1.363	1.367

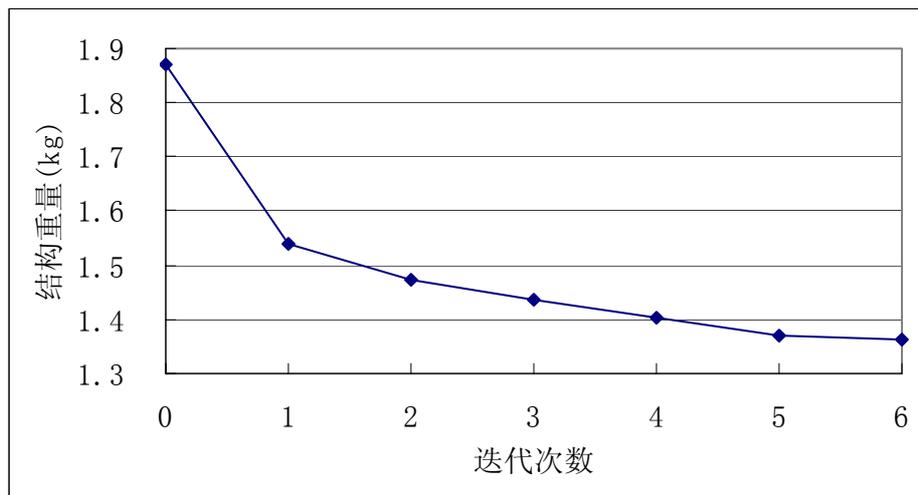


图 3-25 结构重量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-25 History Curve of Structural Weight (Present Program)

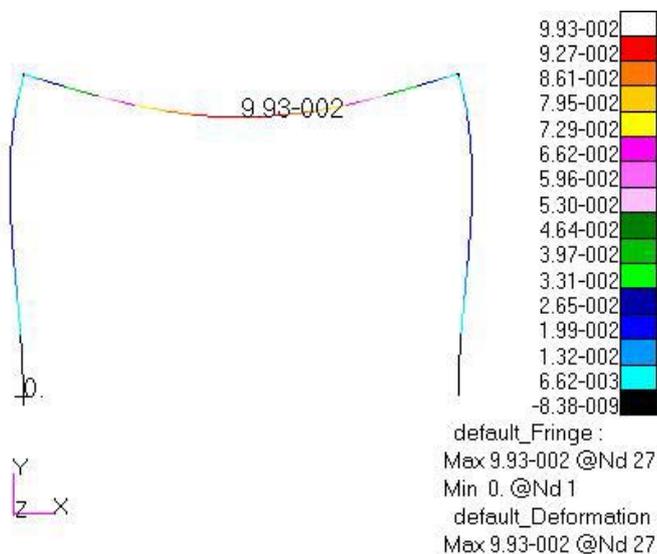


图 3-26 工况 I 的变形图

Fig. 3-26 Deformation Plot of Case I

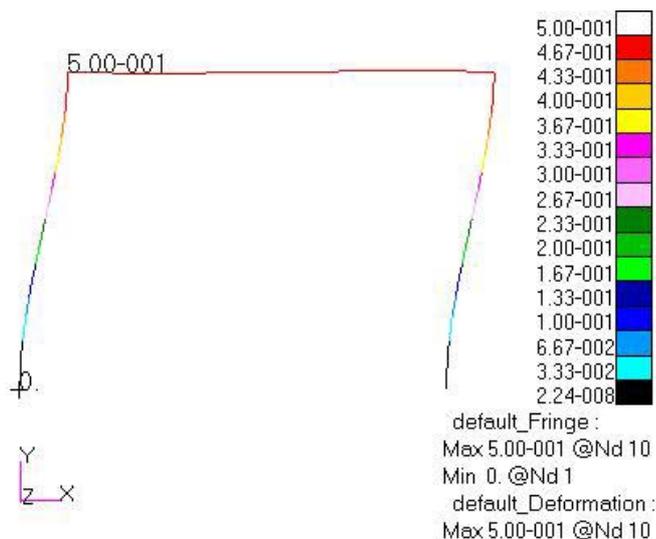


图 3-27 工况 II 的变形图

Fig. 3-27 Deformation Plot of Case II

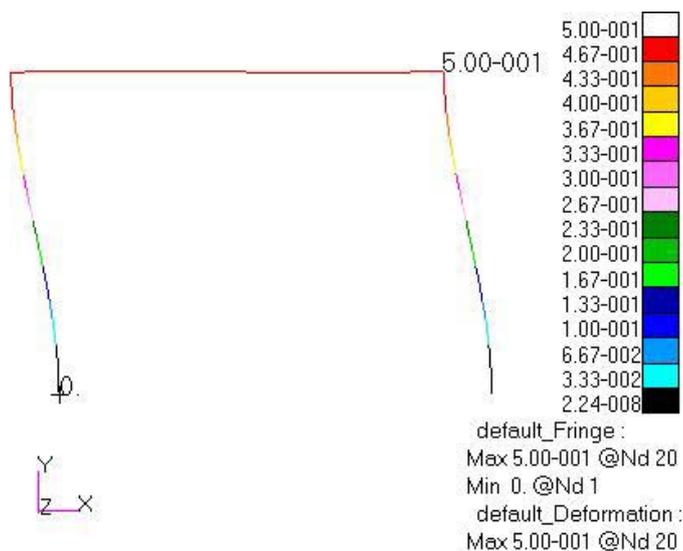


图 3-28 工况 III 的变形图

Fig. 3-28 Deformation Plot of Case III

(2) 用 Nastran 程序计算的结果

用 MSC.Nastran 的优化模块，以正方形截面的边长作为设计变量，目标函数和约束不变，需要经过 63 步迭代得出结果，截面边长（设计变量）的变化过程如图 3-29，目标函数的变化过程如图 3-30。

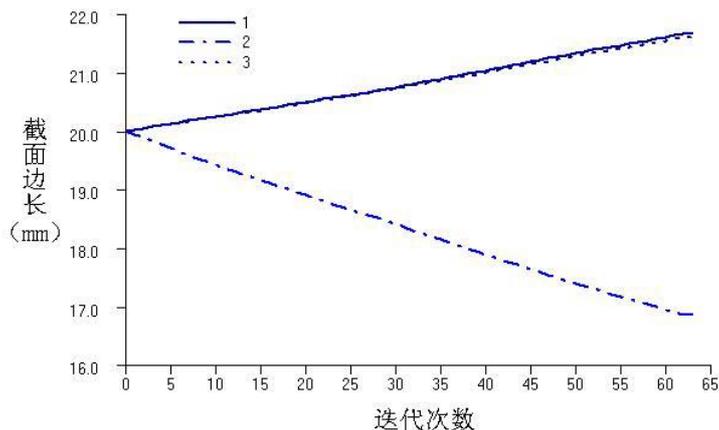


图 3-29 设计变量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-29 History Curve of Design Variables (Nastran Program)

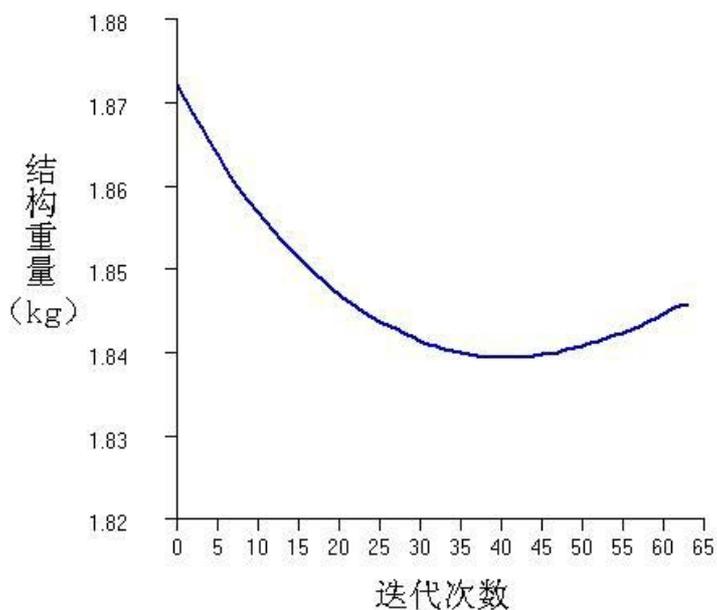


图 3-30 结构重量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-30 History Curve of Structural Weight (Nastran Program)

(3) 结果比较及结论

本研究程序采用了近似射线步技术, 有无近似射线步对满足应力迭代次数和对偶规划求解次数的影响如表 3-12, 有无近似射线步对结构响应(最大应力和约束点位移)的影响如表 3-13。

Nastran 程序用截面边长作为设计变量, 为了与本研究程序进行比较, 根据截面惯性矩跟边长的关系将截面边长换算为梁单元的截面惯性矩。本研究程序和 Nastran 程序的计算结果比较如表 3-14, 各工况最大应力和约束点的位移比较如表 3-15。

表 3-12 近似射线步对满应力设计和对偶规划迭代次数的影响

Table 3-12 Effect of Approximate Scaling Step on Iteration Number of FSD and Dual Program

近似射线步		无						有						
结构分析步数		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
满应力迭代次数	设计	工况 I	7	7	7	7	7	7	4	4	4	4	5	5
	变量 I_{y1}	工况 II	7	6	6	6	5	3	2	3	2	2	1	1
		工况 III	7	6	6	6	5	3	2	3	2	2	1	1
		设计	工况 I	7	7	7	7	7	7	3	3	3	2	2
	变量 I_{y2}	工况 II	7	7	7	7	7	7	3	4	3	3	4	4
		工况 III	7	7	7	7	7	7	3	4	3	3	4	4
		设计	工况 I	7	7	7	7	7	7	4	4	4	4	5
	变量 I_{y3}	工况 II	7	6	6	6	5	3	2	3	2	2	1	1
		工况 III	7	6	6	6	5	3	2	3	2	2	1	1
对偶规划迭代次数		6	7	6	6	7	6	4	3	3	3	2	2	

表 3-13 近似射线步对结构响应的影响

Table 3-13 Effect of Approximate Scaling Step on Structural Maximal Stress

工况	近似射线步	结构响应			
		u_y (m)	u_{3x} (m)	u_{2x} (m)	应力(MPa)
I	无	-9.871E-02	-1.398E-04	1.398E-04	4.050E+01
	有	-9.935E-02	-1.403E-04	1.403E-04	4.069E+01
II	无	-8.736E-05	-4.966E-01	-4.954E-01	1.191E+02
	有	-8.766E-05	-5.000E-01	-4.987E-01	1.197E+02
III	无	-8.736E-05	4.954E-01	4.966E-01	1.191E+02
	有	-8.766E-05	4.987E-01	5.000E-01	1.197E+02

表 3-14 本研究程序和 Nastran 程序的计算结果比较

Table 3-14 Comparisons of Results with Present Program and Nastran Program

方法	迭代次数	设计变量 (m^4)			结构重量 (kg)
		I_{y1}	I_{y2}	I_{y3}	
本研究程序	6	2.643E-09	1.771E-08	2.643E-09	1.367
Nastran 程序	63	1.834E-08	6.732E-09	1.811E-08	1.845

通过对结果的比较分析可以得出如下结论：

- (1) 采用近似射线步技术能有效降低满应力迭代次数，见表 3-12；
- (2) 采用近似射线步技术能有效降低对偶规划求解的迭代次数，见表 3-12；
- (3) 采用近似射线步技术能够减小因结构超静定引起的计算误差，使结构响应更接近许用值，提高计算精度，见表 3-13；
- (4) 本研究程序和 Nastran 程序都能将多工况作用下的框架结构进行优化得到满足结构刚度和强度的最优设计；
- (5) 与 Nastran 程序相比，本研究程序的优化效率更高（Nastran 程序需要 63 步迭代，本研究程序只需 6 步迭代）；

(6) 优化结果更加准确(与 Nastran 程序相比,本研究程序得到最优设计的结构重量更轻,结构应力和位移更接近许用值)。

表 3-15 本研究程序和 Nastran 程序得到最优设计的结构响应比较

Table 3-15 Comparisons of Structural Responses with Present Program and Nastran Program

工况	方法	结构响应(最大值)			
		u_y (m)	u_{3x} (m)	u_{2x} (m)	应力(MPa)
I	本研究程序	-9.935E-02	-1.403E-04	1.403E-04	4.069E+01
	Nastran 程序	-9.988E-02	-5.290E-04	8.820E-04	-5.377E+01
II	本研究程序	-8.766E-05	-5.000E-01	-4.987E-01	1.197E+02
	Nastran 程序	-3.310E-04	-1.425E-01	-1.404E-01	3.757E+01
III	本研究程序	-8.766E-05	4.987E-01	5.000E-01	1.197E+02
	Nastran 程序	-5.510E-04	1.404E-01	1.425E-01	3.758E+01
许用值		0.1	0.5	0.5	120

3.8.4 多工况下受应力与位移约束的大型空间框架截面优化

如图 3-31 所示,由 1800 根长为 1m 的梁单元构成的 $8\text{m} \times 8\text{m} \times 8\text{m}$ 空间框架,所有梁的初始截面都是高 0.2m、宽 0.1m 的矩形。材料参数:弹性模量 $E=206\text{GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,密度 $\rho=7800\text{kg/m}^3$,许用应力 $\bar{\sigma}=200\text{MPa}$ 。该模型底部固支,受 6 个载荷的作用:

- ① 重力载荷(重力加速度沿 z 轴向下,大小为 9.8N/kg);
- ② 沿 z 轴向下的集中力载荷,作用于所有节点,大小为 200kN ;
- ③ 在结构的左侧面作用沿 x 轴正向的分布力;
- ④ 在结构的前侧面作用沿 y 轴正向的分布力;
- ⑤ 在结构的右侧面作用沿 x 轴负向的分布力;
- ⑥ 在结构的后侧面作用沿 y 轴负向的分布力。

其中,③ ④ ⑤ ⑥ 分布力载荷的分布如图 3-32,底部的载荷为 0 ($z=0$),顶部的载荷为 40kN ($z=8$)。

由以上 6 个载荷组合成 7 个载荷工况:

工况 1: 由① ②组成;

工况 2: 由① ② ③组成;

工况 3: 由① ② ④组成;

工况 4: 由① ② ⑤组成;

工况 5: 由① ② ⑥组成;

工况 6: 由① ② ③ ④组成;

工况 7: 由① ② ⑤ ⑥组成。

优化前进行结构分析,结构的最大应力为 137.79MPa ,结构的最大位移: x 方向位移 0.001726m , y 方向位移 0.003877m ,分别出现在结构的角点上(节点号分别为 2017、2033、2144、2160)。

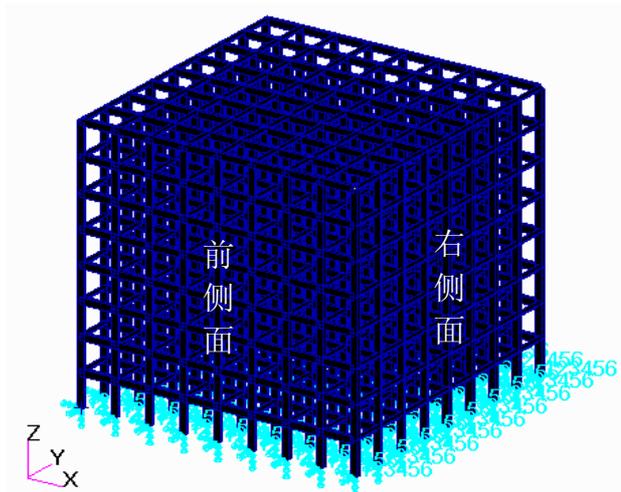


图 3-31 大型空间框架的有限元分析模型
Fig. 3-31 Analysis Model of Large-scale Frame

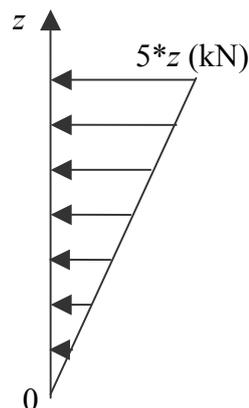


图 3-32 侧面载荷分布图
Fig. 3-32 Distributed Load on Side Face

优化模型：以结构重量为目标函数，1800 个梁单元的截面惯性矩作为独立设计变量（Nastran 程序用截面边长作设计变量），其初始值为 $6.667\text{E}-5\text{m}^4$ （截面尺寸高 0.2m、宽 0.1m），上限约束为 $3.375\text{E}-4\text{m}^4$ （截面尺寸高 0.3m、宽 0.15m），下限约束为 $4.167\text{E}-4\text{m}^4$ （截面尺寸高 0.1m、宽 0.05m）。下面按两种情况（只受应力约束，同时受应力和位移约束），分别用本研究程序和 Nastran 程序进行计算，比较结果并得出结论。

（1）只受应力约束的情况

为了考核基于满应力准则的优化程序的有效性，只取许用应力作为约束。本研究程序用截面惯性矩做设计变量和无量纲的设计变量，Nastran 程序用截面边长做设计变量（截面宽做设计变量，截面高保持为截面宽的 2 倍）。由于设计变量太多，设计变量的变化过程不详细说明，只用曲线说明设计变量的变化趋势和分布情况。

本研究程序经过 3 步迭代得到结果，无量纲设计变量的变化曲线如图 3-33，结构重量的变化曲线如图 3-34。Nastran 程序经过 19 步迭代得到结果，截面宽（设计变量）的变化曲线如图 3-35，结构重量的变化曲线如图 3-36，两种方法计算结果比较如表 3-16。

从表 3-16 可以看出，用本研究程序计算得到的结果，大部分设计变量（占总数的 68.7%）达到尺寸下限，说明该结构还有潜力可挖，将截面惯性矩的下限取为 $1\text{e}-6\text{m}^4$ （无量纲的下限为 0.015）。用本研究程序经过 4 次迭代得到结果，无量纲设计变量的变化曲线如图 3-37，结构重量的变化曲线如图 3-38。最后一步的射线步系数为 1.0710，优化后的结构最大应力为 199.793 MPa，结构重量为 83042.044 kg，达到尺寸下限的设计变量数为 302，占总数的 16.8%。

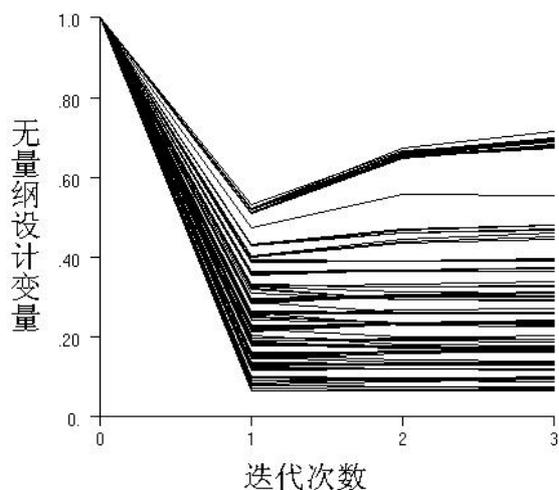


图 3-33 应力约束下无量纲设计变量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-33 History Curve of Dimensionless Design Variables with Stress Constraints (Present Program)

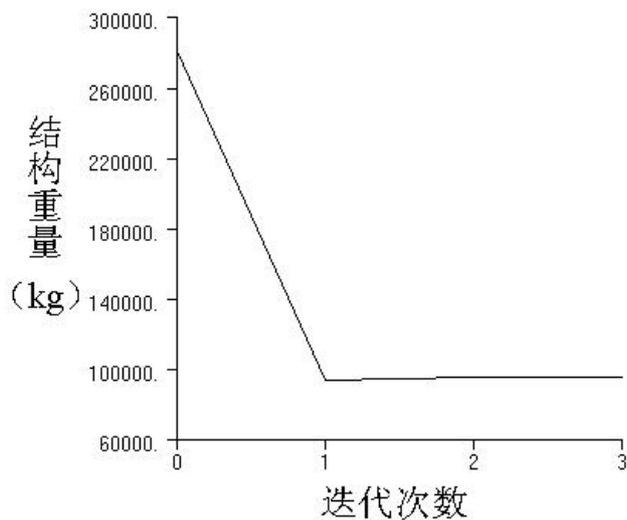


图 3-34 应力约束下结构重量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-34 History Curve of Structural Weight with Stress Constraints (Present Program)

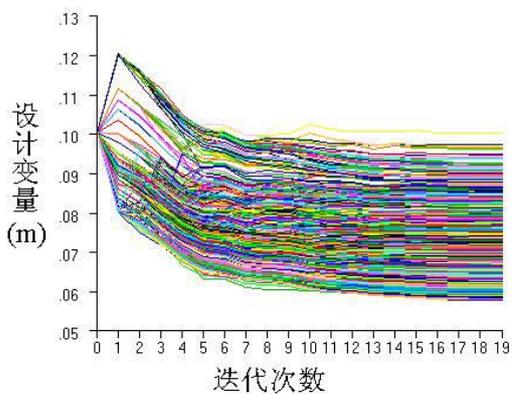


图 3-35 应力约束下设计变量的变化曲线（Nastran 程序）

Fig. 3-35 History Curve of Design Variables with Stress Constraints (Nastran Program)

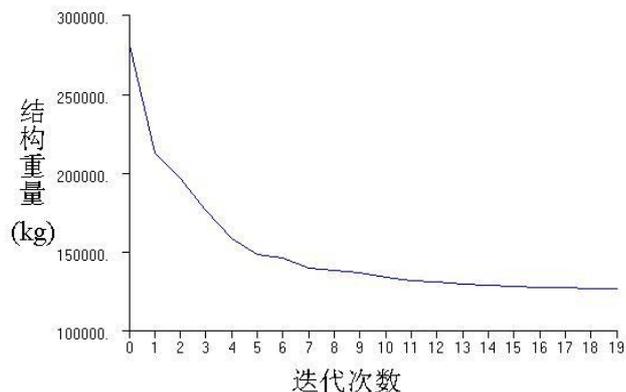


图 3-36 应力约束下结构重量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-36 History Curve of Structural Weight with Stress Constraints (Nastran Program)

表 3-16 只有应力约束下两种方法计算结果比较

Table 3-16 Comparisons of Results with Two Methods with Stress Constraints

方法	本研究程序*	Nastran 程序
迭代次数	3	19
优化后应力最大值(MPa)	200.245	200.363
优化后的结构重量(kg)	98460.203	126593.5
达到变量下限的单元数**	1237	0

注：*本研究程序的结果是射线步后的结果，射线步系数是 1.0394；**本研究程序用截面惯量做设计变量时，下限为 $4.167e-6$ ，用无量纲设计变量时，下限为 0.0625，Nastran 程序用截面宽做设计变量，下限为 0.5，三者是相当的。

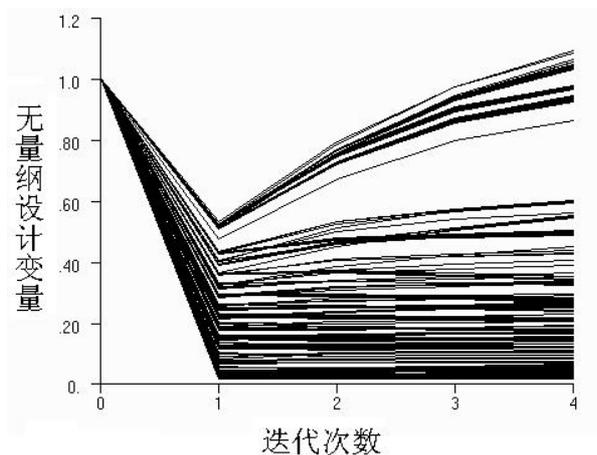


图 3-37 尺寸下限减小后无量纲设计变量的变化曲线 (本研究程序)

Fig. 3-37 History Curve of Dimensionless Design Variables with Smaller Lower Limits of Size Constraints (Present Program)

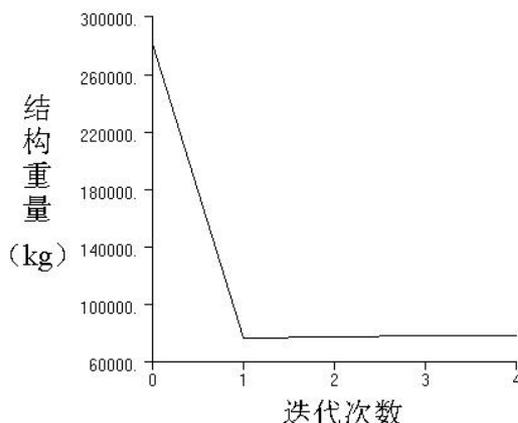


图 3-38 尺寸下限减小后结构重量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-38 History Curve of Structural Weight with Smaller Lower Limits of Size Constraints (Present Program)

(2) 同时受应力和位移约束的情况

为了考核基于对偶规划理论的优化程序的有效性，在上述应力约束的基础上增加位移约束。位移约束为四个角点的 x 、 y 方向的位移（共 8 个位移约束）， x 方向最大位移为 5mm， y 方向最大位移为 10mm。本研究程序用截面惯性矩做设计变量和无量纲的设计变量，Nastran 程序用截面边长做设计变量（截面宽做设计变量，截面高保持为截面宽的 2 倍）。由于设计变量太多，设计变量的变化过程不详细说明，只用曲线说明设计变量的变化趋势和分布情况。

本研究程序经过 8 步迭代得到结果，无量纲设计变量的变化曲线如图 3-39，结构重量的变化曲线如图 3-40。Nastran 程序经过 15 步迭代得到结果，截面宽（设计变量）的变化曲线如图 3-41，结构重量的变化曲线如图 3-42，两种方法计算结果比较如表 3-17。

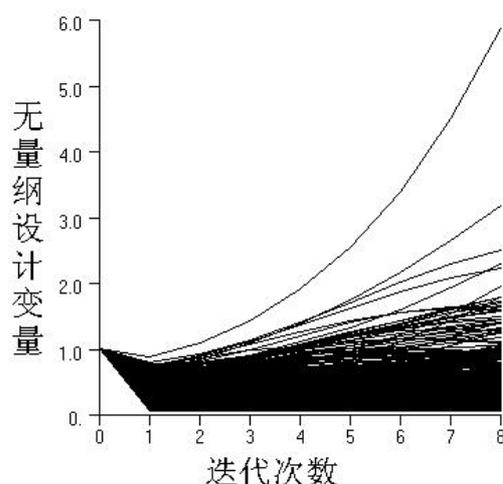


图 3-39 应力和位移约束下无量纲设计变量的变化曲线（本研究程序）

Fig. 3-39 History Curve of Dimensionless Design Variables with Stress and Displacement Constraints (Present Program)

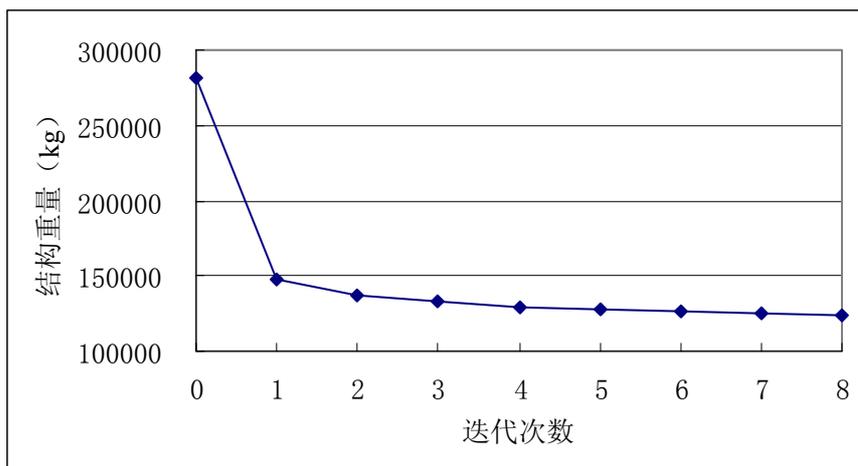


图 3-40 应力和位移约束下结构重量的变化曲线 (本研究程序)

Fig. 3-40 History Curve of Structural Weight with Stress and Displacement Constraints (Present Program)

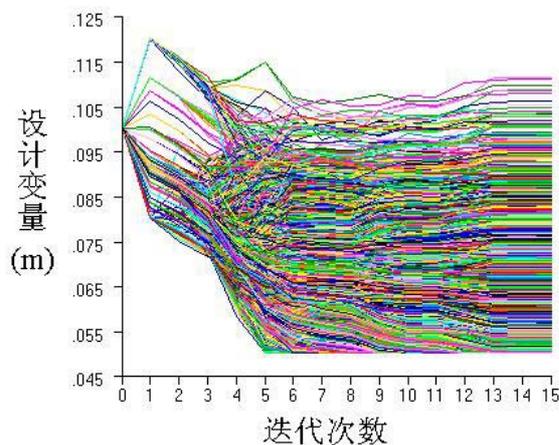


图 3-41 应力和位移约束下设计变量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-41 History Curve of Design Variables with Stress and Displacement Constraints (Nastran Program)

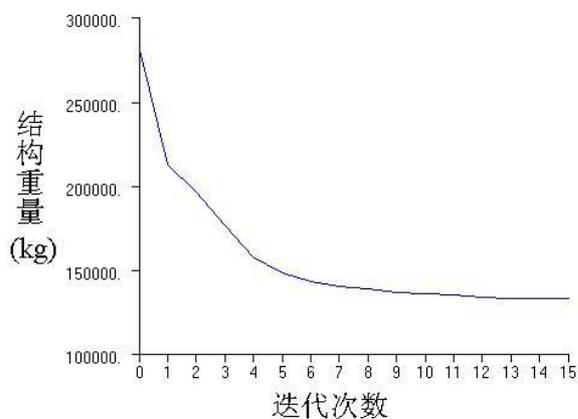


图 3-42 应力和位移约束下结构重量的变化曲线 (Nastran 程序)

Fig. 3-42 History Curve of Structural Weight with Stress and Displacement Constraints (Nastran Program)

表 3-17 应力和位移同时约束下两种方法计算结果比较

Table 3-17 Comparisons of Results with Two Methods with Stress and Displacement Constraints

方法	本研究程序*	Nastran 程序
迭代次数	8	15
优化后应力最大值(MPa)	200.139	200.018
优化后约束 点最大位移 (mm)	2017 号节点	$x=4.752; y=9.463$
	2033 号节点	$x=4.755; y=9.463$
	2144 号节点	$x=4.755; y=9.463$
	2160 号节点	$x=4.752; y=9.463$
优化后的结构重量(kg)	127326.92	132748.6
达到变量下限的单元数	393	33

注：*本研究程序的结果是射线步后的结果，射线步系数是 1.021。

(3) 结论

通过对结果的比较分析可以得出如下结论：

① 本研究程序和 Nastran 程序都能对多变量、多工况、多约束的大规模框架结构进行优化，得到满足结构刚度和强度的最优设计；

② 与 Nastran 程序相比，本研究程序的迭代次数少、收敛速度快、优化效率高；在满足约束的前提下，本文研究程序得到的最优结构的重量更轻，设计更优。

③ 本研究程序借助满应力准则处理应力约束，根据对偶理论将优化模型进行转化，将多变量、多约束的模型转化成对偶空间中的少变量拟无约束模型，可以大大的提高模型的求解速度；满应力准则和对偶理论的完美结合，使满足应力约束和位移约束的多工况、多变量的大模型优化问题的解决更加容易、快速、准确。

3.8.5 有变量连接的框架截面优化

上述算例都是按照一个变量控制一个或多个截面相同的单元来处理的，对于这种情况，用截面惯性矩作为设计变量或用无量纲的设计变量都可以处理，并且两种方法得到的结果一样，对于一个变量控制多个截面不同的单元的情况，用截面惯性矩作为设计变量就不能处理，只能用无量纲的设计变量进行处理，本节算例主要考核这种情况。

(1) 等强度悬臂梁的单变量优化

3.8.1 节中的悬臂梁的初始设计等截面的，经优化得到一个等强度梁。如果已知等强度梁的单元截面是如何分布的，用一个设计变量就可以解决该悬臂梁的优化问题，只要让悬臂梁的初始截面尺寸按照等强度梁的特点分布，并且在优化过程中所有截面保持一定的比例关系就可以了。

本节以 3.8.1 节的优化结果作为初始设计，有限元模型和材料完全相同，自

由端的横向载荷 P 分别改成 0.5kN 和 5kN, 以结构重量为目标函数, 整个结构取一个设计变量, 要求各段梁的截面按比例变化, 受应力和位移约束。下面分别按以下 4 种情况进行计算讨论。

情况 1: 当 $P=0.5\text{kN}$ 时, 各段梁的最大应力均为 60MPa, 在应力约束 (许用应力为 120 MPa) 的条件下, 经两步迭代得到结果, 优化结果如表 3-18。

表 3-18 当 $P=0.5\text{kN}$ 时受应力约束的优化结果

Table 3-18 Results with Stress Constraints and $P=0.5\text{kN}$

迭代次数	0	1	2	射线步
无量纲设计变量	1.0	0.629961	0.629961	1.000000
最大应力 (MPa)	—	60.000	120.000	120.000
结构重量 (kg)	6.85154	4.31620	4.31620	4.31620

情况 2: 当 $P=5\text{kN}$ 时, 各段梁的最大应力均为 600MPa, 在应力约束 (许用应力为 120 MPa) 的条件下, 经两步迭代得到结果, 优化结果如表 3-19。

表 3-19 当 $P=5\text{kN}$ 时受应力约束的优化结果

Table 3-19 Results with Stress Constraints and $P=5\text{kN}$

迭代次数	0	1	2	射线步
无量纲设计变量	1.0	2.924017	2.924017	1.000000
最大应力 (MPa)	—	600.000	120.000	120.000
结构重量 (kg)	6.85154	20.0340	20.0340	20.0340

情况 3: 当 $P=0.5\text{kN}$ 时, 在应力约束 (许用应力为 120 MPa) 和位移约束 (最大挠度为 8mm) 的条件下, 经两步迭代得到结果, 优化结果如表 3-20。

表 3-20 当 $P=0.5\text{kN}$ 时受应力和位移约束的优化结果

Table 3-20 Results with Stress and Displacement Constraints and $P=0.5\text{kN}$

迭代次数	0	1	2	射线步
无量纲设计变量	1.0	1.023414	1.023425	1.000011
最大应力 (MPa)	—	60.000	57.9528	57.9518
最大挠度 (mm)	—	8.37901	8.00018	8.00006
结构重量 (kg)	6.85154	7.01196	7.01204	7.01204

情况 4: 当 $P=5\text{kN}$ 时, 在应力约束 (许用应力为 120 MPa) 和位移约束 (最大挠度为 8mm) 的条件下, 经两步迭代得到结果, 优化结果如表 3-21。

表 3-21 当 $P=5\text{kN}$ 时受应力和位移约束的优化结果

Table 3-21 Results with Stress and Displacement Constraints and $P=5\text{kN}$

迭代次数	0	1	2	射线步
无量纲设计变量	1.0	3.236320	3.240916	1.0014206
最大应力 (MPa)	—	600.000	103.056	102.837
最大挠度 (mm)	—	83.7901	8.02275	8.00006
结构重量 (kg)	6.85154	22.1738	22.2053	22.2053

通过以上算例可以得出如下结论:

本例用一个设计变量控制 10 个截面不同的梁单元，不管是在应力约束还是在位移约束的情况下，用两次迭代就得到了非常理想的结果（见 3.8.1 节的算例），对于本例来说，如果用 10 个独立的设计变量，两次迭代也能得到结果，但是每一步迭代内部的计算量会大大提高，特别是对于有位移约束的情况。

(2) 六层空间框架的无量纲截面优化

六层空间框架的分析模型如图 3-43，框架的两个侧面受线性分布载荷，最底端为 0，最顶端为 6kN，还受自身重力载荷。梁截面为正方形，第一层的单元编号如图 3-44，其截面分布情况如表 3-22，其余五层的分布关系跟第一层一样。载荷工况：工况 I 受重力载荷和沿 x 负向的分布载荷；工况 II 受重力载荷和沿 y 负向的分布载荷。材料：弹性模量 200GPa，泊松比 0.3，密度为 7800kg/m^3 ，许用应力为 160MPa。

优化模型：以结构重量最小为目标函数，受应力约束（许用应力 160MPa）和位移约束（四个角点的 x 向位移不超过 10mm， y 向位移不超过 20mm），尺寸约束不做限制。为了说明使用无量纲设计变量能提高效率，本例的设计变量分两种情况进行计算。

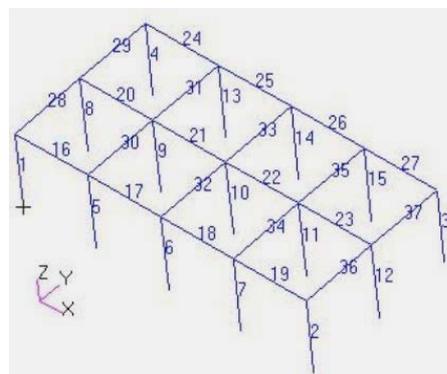
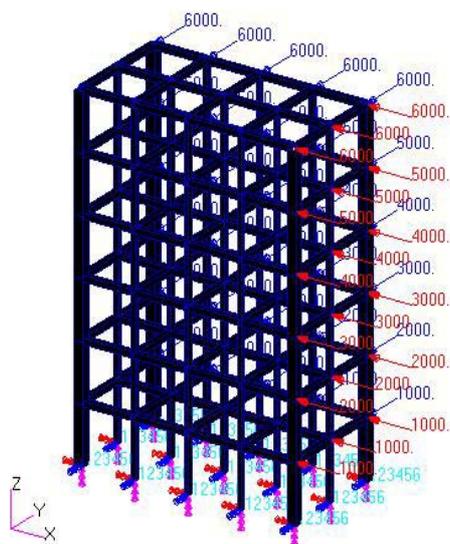


图 3-43 六层空间框架的分析模型

图 3-44 单层框架的单元编号

Fig. 3-43 Analysis Model of Six-Layer Spatial Frame Fig. 3-44 Element Number of First Layer

表 3-22 第一层截面分布情况

Table 3-22 Section Distribution of the First Layer Element

截面型号	单元号	初始值(m)
1	1-4	0.16*0.16
2	5-15	0.08*0.08
3	16-37	0.10*0.10

情况 1: 每一层设为一个设计变量, 各单元的截面保持表 3-22 所示比例关系, 设计变量从下向上依次为 Var1、Var2、Var3、Var4、Var5、Var6。只受应力约束的情况下, 经过 3 步迭代得到结果, 计算结果如表 3-23, 无量纲设计变量的变化曲线如图 3-45, 结构重量的变化曲线如图 3-46。同时受应力和位移约束的情况下, 经过 3 步迭代得到结果, 计算结果如表 3-24, 无量纲设计变量的变化曲线如图 3-47, 结构重量的变化曲线如图 3-48。

表 3-23 6 变量只受应力约束时的优化结果

Table 3-23 Results with Stress Constraints and 6 design variables

迭代次数		0	1	2	3	射线步
无量纲设计变量	Var1	1.0000	0.1371	0.1283	0.1225	1.0376
	Var2	1.0000	0.1829	0.2027	0.2182	1.0376
	Var3	1.0000	0.1796	0.1996	0.2130	1.0376
	Var4	1.0000	0.1455	0.1478	0.1507	1.0376
	Var5	1.0000	0.0990	0.0835	0.0786	1.0376
	Var6	1.0000	0.0697	0.0470	0.0386	1.0376
结构重量 (kg)		18383.000	6684.890	6572.960	6568.740	6820.203

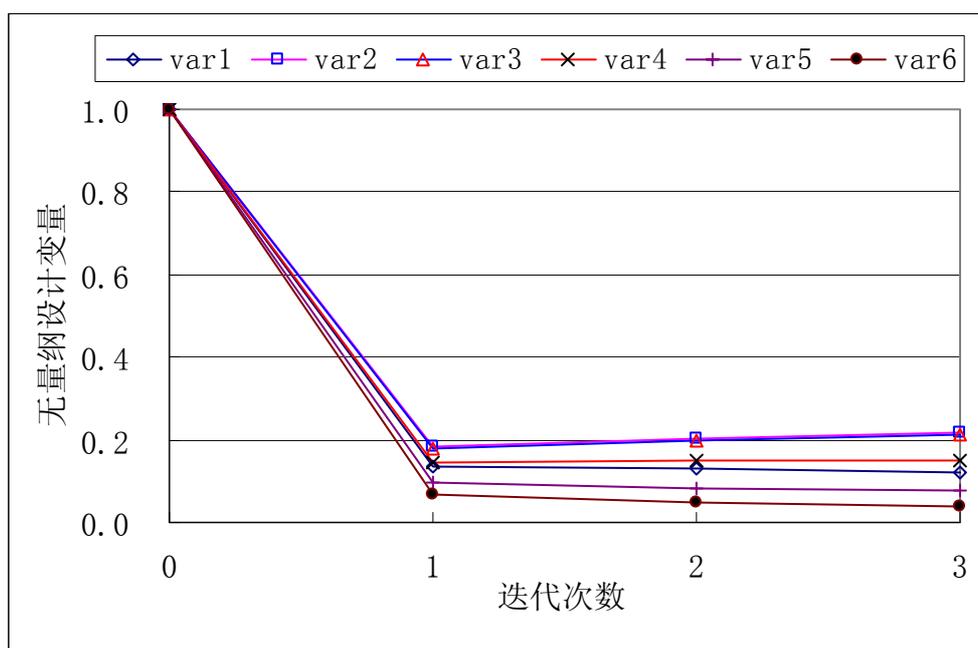


图 3-45 6 变量只受应力约束时设计变量的变化曲线

Fig. 3-45 History Curve of Dimensionless Design Variables with Stress Constraints and 6 design variables

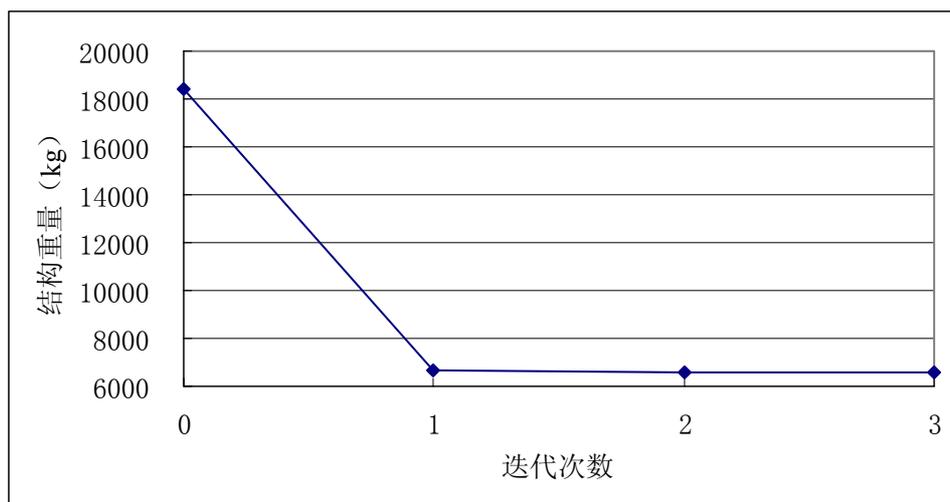


图 3-46 6 变量只受应力约束时结构重量的变化曲线

Fig. 3-46 History Curve of Structural Weight with Stress Constraints and 6 design variables

表 3-24 6 变量受应力和位移约束时的优化结果

Table 3-24 Results with Stress and Displacement Constraints and 6 design variables

迭代次数		0	1	2	3	射线步
无量纲设计变量	Var1	1.0000	0.2946	0.2831	0.2794	1.0766
	Var2	1.0000	0.3042	0.3033	0.3039	1.0766
	Var3	1.0000	0.2993	0.3054	0.3104	1.0766
	Var4	1.0000	0.2648	0.2664	0.2717	1.0766
	Var5	1.0000	0.2118	0.2016	0.2057	1.0766
	Var6	1.0000	0.1463	0.1124	0.1019	1.0766
结构重量 (kg)		18383.00	18383.000	9187.480	8994.960	8980.070

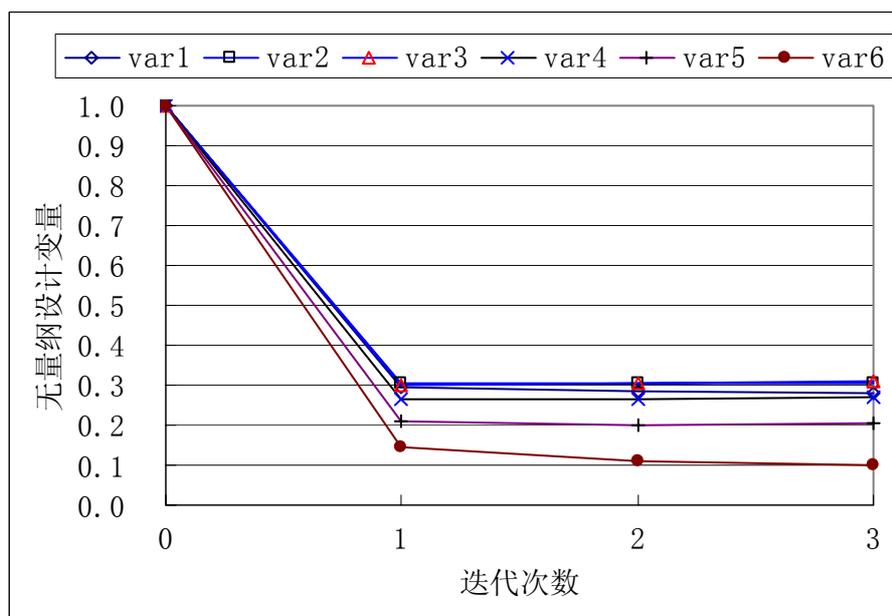


图 3-47 6 变量受应力和位移约束时设计变量的变化曲线

Fig. 3-47 History Curve of Dimensionless Design Variables with Stress and Displacement Constraints and 6 design variables

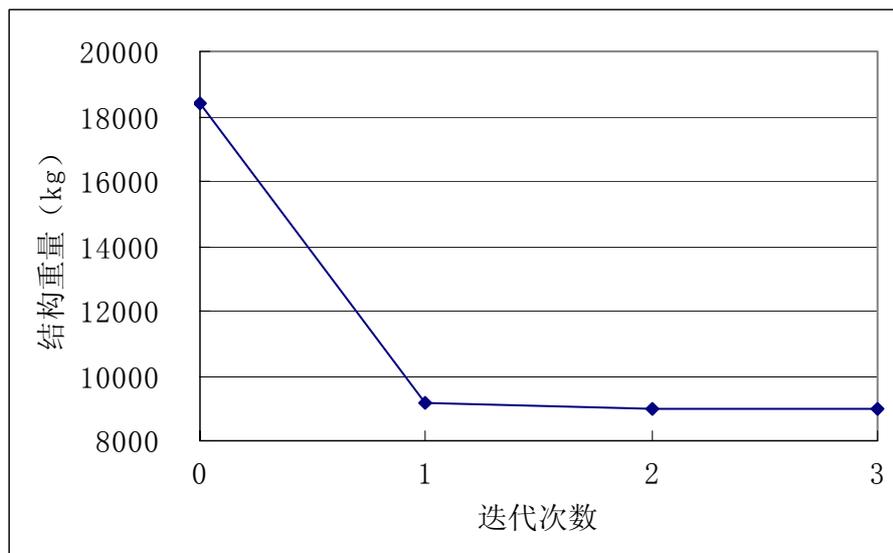


图 3-48 6 变量受应力和位移约束时结构重量的变化曲线

Fig. 3-48 History Curve of Structural Weight with Stress and Displacement Constraints and 6 design variables

情况 2: 每个单元设为一个设计变量, 共 222 个设计变量。只受应力约束的情况下, 经过 5 步迭代得到结果, 无量纲设计变量的变化曲线如图 3-49, 结构重量的变化曲线如图 3-50。受应力和位移约束的情况下, 经过 19 步迭代得到结果, 无量纲设计变量的变化曲线如图 3-51, 结构重量的变化曲线如图 3-52。

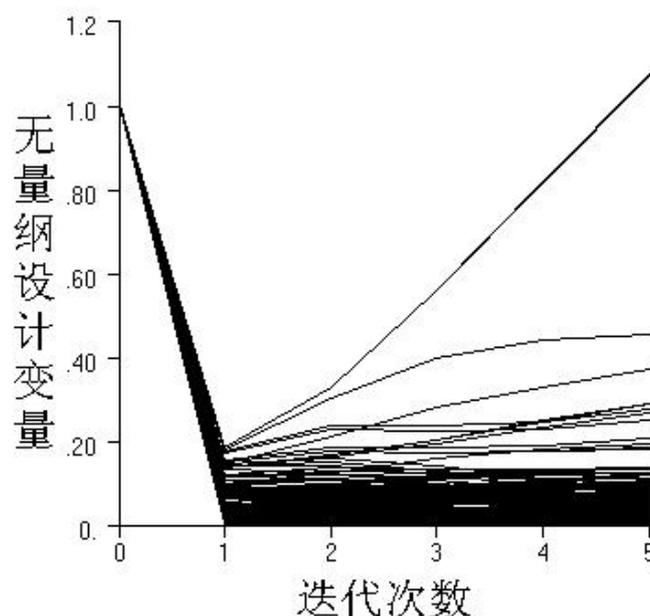


图 3-49 222 变量受应力约束时设计变量的变化曲线

Fig. 3-49 History Curve of Dimensionless Design Variables with Stress Constraints and 222 design variables

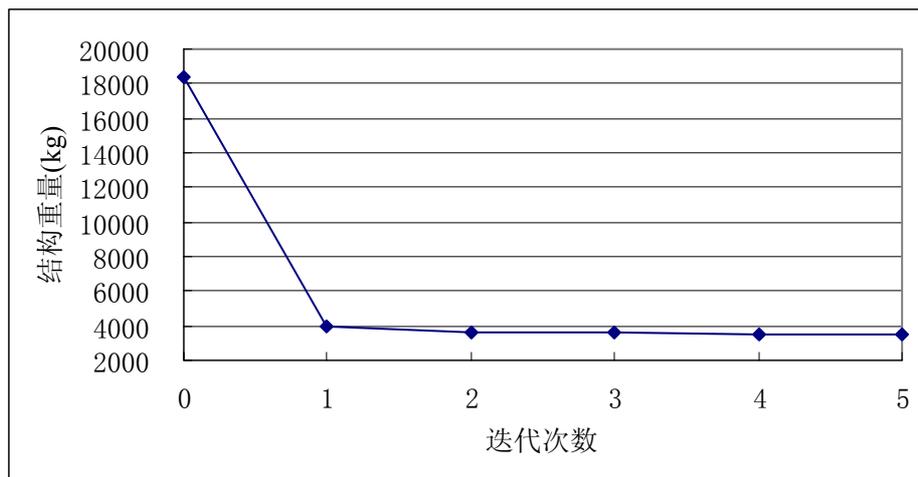


图 3-50 222 变量受应力约束时结构重量的变化曲线

Fig. 3-50 History Curve of Structural Weight with Stress Constraints and 222 design variables

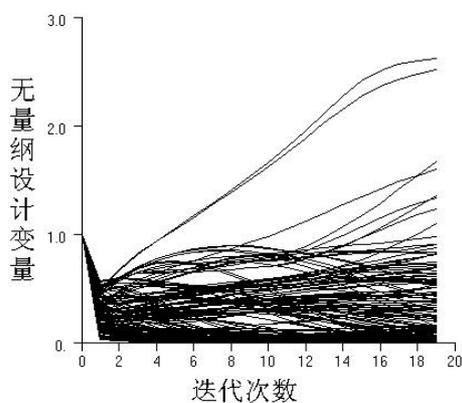


图 3-51 222 变量受应力和位移约束时设计变量的变化曲线

Fig. 3-51 History Curve of Dimensionless Design Variables with Stress and Displacement Constraints and 222 design variables

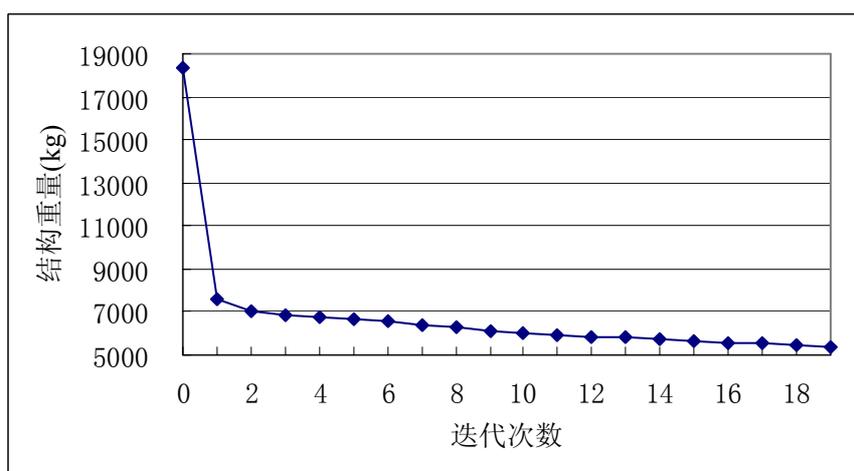


图 3-52 222 变量受应力和位移约束时结构重量的变化曲线

Fig. 3-52 History Curve of Structural Weight with Stress and Displacement Constraints and 222 design variables

应力约束下, 6 变量和 222 变量计算结果的比较如表 3-25, 应力和位移约束下, 6 变量和 222 变量计算结果的比较如表 3-26。

表 3-25 应力约束下, 6 变量和 222 变量计算结果的比较

Table 3-25 Results' Comparisons between 6 and 222 design variables with Stress Constraints

变量情况	6 变量	222 变量
迭代次数	3	5
优化后应力最大值(MPa)	160.029	159.865
优化后的结构重量(kg)	6820.203	4007.136
最后一步的射线步系数	1.0376151	1.1465799

表 3-26 应力和位移约束下, 6 变量和 222 变量计算结果的比较

Table 3-26 Results' Comparisons between 6 and 222 design variables with Stress and Displacement Constraints

变量情况	6 变量	222 变量	
迭代次数	3	19	
优化后应力最大值(MPa)	112.575	159.549	
优化后约束点最大位移 (mm) *	285 号节点	$x=10.000; y=17.685$	$x=6.526; y=12.822$
	281 号节点	$x=9.982; y=17.685$	$x=6.520; y=12.876$
	271 号节点	$x=9.982; y=17.676$	$x=6.542; y=12.871$
	275 号节点	$x=10.000; y=17.676$	$x=6.544; y=12.816$
优化后的结构重量(kg)	8969.392	6744.845	
最后一步的射线步系数	0.99881089	1.2495036	

*注: 285、281、271、275 是结构顶部四个角点 (位移约束点) 的节点号。

通过上述算例结果可以得出如下结论:

- ① 采用无量纲设计变量可以扩大程序的适用范围, 可以用一个变量控制多个截面不同的单元;
- ② 利用无量纲设计变量可以将设计变量进行设计变量连接和分组, 用尽可能少的设计变量描述优化问题;
- ③ 变量分组的优化模型, 求解的迭代次数大大降低, 见表 3-24 和 3-25;
- ④ 由于变量分组设计变量的数目减少, 满应力求解和对偶规划求解的计算量降低, 每步迭代所用的时间也会减少。
- ⑤ 由于不同单元之间具有关联性, 相当于增加了约束条件, 结构重量比分组前大, 见表 3-24 和 3-25。

3.9 本章小结

本章将准则法和规划法相结合, 针对框架结构建立了满足刚度和强度的截面优化模型, 并根据关系映射反演 (RMI) 方法的思想, 利用对偶理论将其转化为低维拟无约束的对偶规划, 在对偶空间进行求解, 然后根据反演关系得到原问题

的解；对于应力约束，按零阶近似进行处理，根据梁单元的应力跟内力的复杂关系推导出梁单元的精确满应力解，并将其转化为动态尺寸下限；对于位移约束，利用单位虚载荷法将其显式化。

本章用截面惯性矩作为设计变量和无量纲设计变量两种方法进行程序设计，在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行程序的二次开发，在程序实现的过程中还采用了粗选有效约束技术和近似射线步技术，并通过各种算例对程序进行了考核，证明了优化算法和程序的有效性。

第 4 章 框架结构拓扑优化方法及程序实现

4.1 引言

拓扑优化是结构优化的最高层次,与尺寸优化和形状优化相比拥有更大的自由度,因此能带来尺寸优化和形状优化无法比拟的效益,但它的难度也是最大的,是当前结构优化领域内最具有挑战性的课题。这种挑战性主要是由拓扑变量的 0-1 特性造成的,这种特性使得拓扑优化模型的建立和求解都非常困难。为了解决拓扑优化问题,研究者把拓扑变量依附在低层次变量上而避开这种特性造成的优化模型不连续性和不可微性,如把桁架结构的拓扑变量依附在杆截面积上,把膜结构的拓扑变量依附在膜厚度上,这样将拓扑优化问题退化为广义的截面优化问题。然而,这样处理问题将拓扑变量“降格”附于低层次变量上,而不能显示出拓扑优化的特性,因而求解效率不能有较大幅度的提高,有时还会出现一些病态问题。为了提高效率,必须从低层次优化当中脱离出来,专著[15]指出:“要推动结构拓扑优化有突破的发展,必须从基本概念上予以突破”,并且根据“关系映射反演”(RMI)原则的思想提出了 ICM (Independent Continuous Mapping, 即独立、连续、映射)方法。

在框架结构拓扑优化方面,应当指出:框架结构有类似于桁架结构的特点,都属于骨架类结构,研究者往往忽视了两者之间的本质区别,连续体拓扑优化的结果未能转化为框架结构而直接简化为桁架结构,只研究桁架结构的拓扑优化,而很少涉及框架结构的拓扑优化,然而研究表明两者之间的本质区别对结构特性的影响不容忽视,因而对框架结构拓扑优化方法的研究具有重要的理论意义和工程应用价值。

本章就是基于 ICM 方法,对单元重量、单元许用应力和单元刚度分别引入不同的过滤函数,把 0-1 型离散拓扑变量转化为 $[0, 1]$ 区间上的连续拓扑变量,建立了拓扑变量连续的优化模型。为了能使程序快速准确的得到满足约束的最优拓扑结构,根据框架结构的特性引入结构非奇异、结构响应不被违背和结构重量不改变三个准则判断迭代收敛,并根据这三个准则的满足情况,在优化迭代过程中自适应的调整折减系数来搜索最佳阈值,然后根据阈值将连续拓扑变量回归为 0-1 型离散拓扑变量,确定单元的删除或恢复,直到最后在结构不奇异、结构响应不违背约束的条件下没有可以删除或恢复的单元,得到一个满足刚度和强度并且结构最轻的框架拓扑结构。根据阈值可以将连续的拓扑变量回归为 0-1 型拓扑变量,拓扑变量为 0 的单元应该删除,但是如果直接将单元删除将会引起结构奇异、误删单元等一系列的问题,而不能得到最优的拓扑结构。因而不能将单元真正删除,而是用非常“弱”的单元(对结构响应作用可以忽略的单元)进行处理。本章根据框架结构的特性提出了两种处理方法:“弱材料”单元法和“小截面”单元法。结构拓扑优化是对结构最佳传力路径的寻求,多工况的拓扑优化问题涉及到多个最佳传力路径的权衡,处理的难度非常大,因此探索多工况下的优化策略十分重要。本章按局部性约束、全局性约束及两者的结合三种情况进行了处理:

第一种情况按“平均法”和“包络法”两种方法进行数值实验比较；第二种情况按数学规划对多工况进行统一计算；第三种情况是对前二种情况的恰当综合。

根据上述模型和算法，对 MSC.Patran&Nastran 软件进行软件二次开发，以 MSC.Nastran 软件为结构分析的求解器，以 MSC.Patran 软件为开发平台，完成了框架结构拓扑优化软件，能够对应力和位移约束下的框架结构进行拓扑优化。在程序实现的过程中还采用了对偶规划求解、近似射线步和删除无效约束技术，并通过各种算例对程序进行了考核，证明了优化算法和程序的有效性。

4.2 基于 ICM 方法的框架拓扑优化

4.2.1 模型的建立策略

对于多工况问题，考虑到拓扑结构的传力特性，先按单工况进行计算，然后再考虑多工况的综合效应。单工况作用下受应力约束和位移约束的拓扑优化模型如下（工况下标省略）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad t_i (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sigma_i \leq \bar{\sigma}_i \quad (i=1, \dots, n) \\ \quad \quad u_j \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J) \\ \quad \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (4-1)$$

其中， t_i 为拓扑变量， n 为拓扑变量数， J 为位移约束数。

引入过滤函数 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ ，单元重量、单元许用应力和单元刚度由过滤函数的识别的关系分别如下：

$$w_i = f_1(t_i) w_i^0 \quad (4-2)$$

$$\bar{\sigma}_i = f_2(t_i) \bar{\sigma}_i^0 \quad (4-3)$$

$$k_i = f_3(t_i) k_i^0 \quad (4-4)$$

其中， $w_i, \bar{\sigma}_i, k_i$ 分别表示拓扑变量为 t_i 的状态对应的单元重量、单元许用应力、单元刚度； $w_i^0, \bar{\sigma}_i^0, k_i^0$ 分别表示单元固有重量、单元固有许用应力、单元固有刚度。

假定

$$f_1(t) = t^\alpha, f_2(t) = t^\beta, f_3(t) = t^\gamma \quad (4-5)$$

其中， α, β, γ 是常数，对于不同类型的结构，可以根据 $w_i, \bar{\sigma}_i, k_i$ 之间的关系来确

定，对于框架结构，如果忽略轴力的影响， $\alpha=1, \beta=3/2, \gamma=2$ 。

4.2.2 目标函数的确定

根据式 (4-2) 拓扑变量为 t_i 的状态对应的结构重量为：

$$w = \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n f_1(t_i) w_i^0 = \sum_{i=1}^n t_i w_i^0 \quad (4-6)$$

其中， $w_i^0 = \sum_{e \in i} w_e^0$ 为 i 号设计变量包含单元的固有重量之和， e 为 i 号设计变量包含单元的单元号。

4.2.3 应力约束的零阶近似处理

优化模型式 (4-1) 既包含应力约束又包含位移约束，其求解难度比较大，固根据满应力准则将应力约束转化为拓扑变量的动态下限，然后建立优化模型通过数学规划求解。

单工况的满应力准则为：

$$\sigma_i^* / \bar{\sigma}_i = 1 \quad (4-7)$$

将式 (4-3) 代入式 (4-7)，得

$$\sigma_i^* / (f_2(t_i^*) \bar{\sigma}_i^0) = 1 \quad (4-8)$$

所以

$$\sigma_i^* / (t_i^{*3/2} \bar{\sigma}_i^0) = 1 \quad (4-9)$$

$$t_i^* = (\sigma_i^* / \bar{\sigma}_i^0)^{2/3} \quad (4-10)$$

t_i^* 是根据满应力准则求得的拓扑变量，如果没有位移约束， t_i^* 就是满足应力约束的拓扑变量，如果存在有效位移约束，则需要将应力约束转化为拓扑变量的动态下限，得

$$t_i \geq \tilde{t}_i = t_i^* \quad (4-11)$$

将式 (4-6) 和式 (4-11) 代入优化模型 (4-1)，得

$$\begin{cases} \text{求} & t_i (i=1, \dots, n) \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n t_i w_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & u_j \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J) \\ & \tilde{t}_i \leq t_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{cases} \quad (4-12)$$

4.2.4 位移约束显式化的 Mohr 积分处理

根据单位虚载荷法，第 j 号约束点的位移为：

$$u_j = \sum_{i=1}^n \sum_{e \in i} \int_e \left(\frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} + \frac{M_x \bar{M}_x}{GI_p} + \frac{\mu_y Q_y \bar{Q}_y}{GA} + \frac{\mu_z Q_z \bar{Q}_z}{GA} + \frac{N \bar{N}}{EA} \right) dx \quad (4-13)$$

由于单元刚度和材料的弹性模量成正比，根据式 (4-4)，式 (4-13) 可以简化为：

$$u_j = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(t_i)} u_{ij}^0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^2} u_{ij}^0 \quad (4-14)$$

其中， $u_{ij}^0 = \sum_{e^0 \in i} \int_{e^0} \left(\frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} + \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} + \frac{M_x \bar{M}_x}{GI_p} + \frac{\mu_y Q_y \bar{Q}_y}{GA} + \frac{\mu_z Q_z \bar{Q}_z}{GA} + \frac{N \bar{N}}{EA} \right) dx$ 为常数，可以根据结构分析得到的数据进行计算，其计算同第 3 章的方法一样， u_j 为拓扑变量为 t_i 时的位移， e^0 为单元刚度 k_i^0 对应的单元号。

将式 (4-14) 代入式 (4-12)，得如下优化模型

$$\begin{cases} \text{求} & t_i (i=1, \dots, n) \\ \text{使} & w = \sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n t_i w_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^2} u_{ij}^0 \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J) \\ & \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{cases} \quad (4-15)$$

4.2.5 优化模型的对偶转化

原问题式 (4-15) 的对偶规划的形式为：

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda \\ \text{使} & \phi(\lambda) \rightarrow \max \\ \text{s.t.} & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (4-16)$$

其中， $\phi(\lambda) = \min_{\underline{t}_i \leq t_i \leq 1} \left[\sum_{i=1}^n t_i^* w_i^0 + \sum_{j=1}^J \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i^*)^2} u_{ij}^0 - \bar{u}_j \right) \right]$

根据 Kuhn-Tucher 条件，得：

$$w_i^0 + \sum_{j=1}^J u_{ij}^0 \lambda_j (-2)/(t_i^*)^3 \begin{cases} \leq 0 & (t_i^* = 1) \\ = 0 & (t_i < t_i^* < 1) \\ \geq 0 & (t_i^* = \tilde{t}_i) \end{cases} \quad (4-17)$$

记 $\alpha_i \equiv (\sum_{j=1}^J 2u_{ij}^0 \lambda_j / w_i^0)^{1/3}$ ，由式 (4-17) 得

$$t_i^* = \begin{cases} 1 & (t_i \geq 1) \\ \alpha_i & (t_i < t_i^* < 1) \\ \tilde{t}_i & (t_i^* \leq \tilde{t}_i) \end{cases} \quad (4-18)$$

所以

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n t_i^* w_i^0 + \sum_{j=1}^J \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i^*)^2} u_{ij}^0 - \bar{u}_j \right) \quad (4-19)$$

将式 (4-19) 代入式 (4-16)，目标函数最大化改为趋向最小化，并在当前设计点做二阶泰勒展开，得

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda_1, \dots, \lambda_J \\ \text{使} & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \Big|_{\lambda^0} \lambda_j \lambda_k - \sum_{j=1}^J \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} \Big|_{\lambda^0} - \sum_{k=1}^J \lambda_k^0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \Big|_{\lambda^0} \right) \lambda_j \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \lambda_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, J) \end{cases} \quad (4-20)$$

求式 (4-19) 的一阶导数和二阶导数，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i^*)^2} u_{ij}^0 - \bar{u}_j, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = -\frac{4}{3} \sum_{i \in I_a} u_{ij}^0 u_{ik}^0 / [(t_i^*)^5 w_i^0] \quad (4-21)$$

其中， $I_a = \{i | t_i \leq t_i^* \leq 1 \quad (i=1, \dots, n)\}$ 为主动变量集。

式 (4-20) 是一个拟无约束二次规划，变量的个数为有效位移约束的个数，求解可得 $\lambda_1, \dots, \lambda_J$ ，根据式 (4-18) 可以得到拓扑变量 $t_i^* (i=1, \dots, n)$ 。由于在对偶空间求解对偶规划的过程中，原设计变量在原设计空间存在着主动和被动的问題，而且转化过程中目标函数取二阶近似，因此需要通过迭代求解对偶规划直到主动变量集不变和拓扑变量收敛来逼近原问题的解。

4.2.6 多工况的处理策略

按上述方法可以计算单工况下的拓扑变量 $t_{il}^* (i=1, \dots, n; l=1, \dots, L)$ ，其中 n 为拓扑变量数， L 为工况数。结构拓扑优化的本质是对结构最佳传力路径的寻求，多工况的拓扑优化问题涉及到多个最佳传力路径的权衡，处理的难度非常大，因

此探索多工况下的优化策略十分重要。本章对局部性约束、全局性约束及两者的结合三种情况的多工况拓扑优化的处理方法进行了分析讨论。

(1) 只有应力约束（局部性约束）的情况，按“平均法”和“包络法”两种方法进行处理。

平均法就是先计算各个工况下满足应力约束的拓扑变量 t_{il}^* ($i=1, \dots, n; l=1, \dots, L$)，然后取各工况拓扑变量的平均值作为协调的数值，于是定义多工况下的拓扑变量为：

$$t_i = \sum_{l=1}^L t_{il}^* / L \quad (4-22)$$

包络法就是取各工况拓扑变量的最大值作为协调的数值，于是定义多工况下的拓扑变量为：

$$t_i = \max_{l=1, \dots, L} (t_{il}^*) \quad (4-23)$$

(2) 只有位移约束（全局性约束）的情况，按数学规划对多工况进行统一计算。

按数学规划对多工况进行统一计算就是将不同工况下的位移约束放在同一个数学模型求解中，其优化模型的数学表达式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad t_i (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad u_{jl} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (4-24)$$

其求解跟单工况模型的求解相同。

(3) 同时存在应力约束和位移约束的情况，把第一种情况与第二种情况进行恰当的综合。

综合情况 1 就是先按“平均法”处理应力约束，然后将其转化为拓扑变量的动态下限，对各工况下的位移约束统一建立优化模型进行求解，其优化模型的数学表达式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad t_i (i=1, \dots, n) \\ \text{使} \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad u_{jl} \leq \bar{u}_j \quad (j=1, \dots, J; l=1, \dots, L) \\ \quad \quad \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right. \quad (4-25)$$

综合情况 2 就是先按“包络法”处理应力约束，然后将应力约束转化为拓扑变量的动态下限，对各工况下的位移约束统一建立优化模型进行求解，其优化模型同上，见式 (4-25)。

本章通过数值算例分别对上述情况进行分析讨论，并得出结论。

4.2.7 最佳阈值的搜索策略

通过对偶规划求得的拓扑变量是 $[0, 1]$ 区间内的连续值，而不是 0 或 1。这就需要通过阈值将连续拓扑变量回归为 0-1 型拓扑变量。阈值由拓扑变量的平均值乘以一个折减系数确定，公式如下：

$$D = \delta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (4-26)$$

为了提高计算效率，将数值接近 1 和 0 的拓扑变量从求和中去掉，公式变为如下形式：

$$D = \delta \frac{1}{n_c} \sum_{i \in C} t_i \quad (4-27)$$

其中， $C = \{i | \varepsilon < t_i < 1 - \varepsilon\}$ 为廊集， n_c 为廊集中元素的个数， δ 为折减系数。

折减系数是在迭代过程中不断变化的值，通过调整折减系数搜索最佳阈值。折减系数的调整存在如下问题：如果折减系数太大，会因删除单元过多使结构奇异或违背约束，折减系数就要减小；如果折减系数太小，删除单元太少，不能达到最优拓扑，需要不断增大，搜索最优拓扑；如果折减系数增大值和减小值一样，容易造成迭代的震荡，一般减小值为增大值的 1/10，增大值可以根据精度要求确定，一般取 0.1 或 0.01，折减系数增量小，精度高，收敛速度慢，折减系数增量小，收敛速度快，精度低；折减系数的初始值可以取非零正实数，不过太大或太小都会影响收敛速度，增加迭代次数，一般取 0.3。因此，折减系数的初始值、增量以及增量的最小值等参数可以通过经验和数值实验确定，作为默认值只能适用于大多数一般优化问题，对于实际工程问题可以根据情况做适当调整。

4.2.8 删除单元的处理策略

根据阈值可以将连续的拓扑变量回归为 0-1 型拓扑变量，拓扑变量为 0 的单元应该删除，但是如果直接将单元删除将会引起结构奇异、误删单元等一系列的问题，而不能得到最优的拓扑结构。因而不能将单元真正删除，而是用非常“弱”的单元（对结构响应作用可以忽略的单元）进行处理。本章根据框架结构的特性提出了两种处理方法：“弱材料”单元法和“小截面”单元法。

(1) 弱材料单元法就是用材料的弹性模量非常小的单元处理拓扑变量为 0 的单元。

$$E_i = \begin{cases} \varepsilon E_i^0 & (t_i = 0) \\ E_i^0 & (t_i = 1) \end{cases} \quad (4-28)$$

(2) 小截面单元法就是用截面惯性矩非常小的单元处理拓扑变量为 0 的单元。

$$I_{yi} = \begin{cases} \varepsilon I_{yi}^0 & (t_i = 0) \\ I_{yi}^0 & (t_i = 1) \end{cases} \quad (4-29)$$

其中, E_i 和 I_{yi} 是分别 i 号单元的截面惯性矩和弹性模量, E_i^0 和 I_{yi}^0 是分别 i 号单元的初始截面惯性矩和初始弹性模量, ε 是很小的正数。

本章用以上两种方法进行程序实现, 并对计算结果进行比较得出结论。

4.2.9 收敛准则

准则 I: 结构发生奇异

根据“删除单元”的应变能对总应变能的比例判断结构是否奇异:

$$U_d / U \geq \varepsilon \quad (4-30)$$

其中, U 为所有单元的应变能总和, U_d 为“删除单元”的变形能总和, ε 一般取 5%。

准则 II: 结构响应违背约束

$$\sigma_{i\max} / \bar{\sigma}_i > 1 \quad \text{或} \quad u_{j\max} / \bar{u}_j > 1 \quad (4-31)$$

其中, $\sigma_{i\max}$, $\bar{\sigma}_i$ 为结构最大应力和许用应力, $u_{j\max}$, \bar{u}_j 为约束点的最大位移和相应约束值。

在结构分析之后, 先判断结构是否奇异, 如果不奇异, 计算结构响应(包括应力和位移)最大值和许用值的比值, 判断结构响应是否违背约束。

准则 III: 结构重量收敛或“保留单元”的集合不变化

$$\left| (w^{(k+1)} - w^{(k)}) / w^{(k+1)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{或} \quad E^{(k)} = E^{(k+1)} \quad (4-32)$$

其中, $E^{(k)}$ 和 $E^{(k+1)}$ 分别为第 k 和 $k+1$ 次循环“保留单元”的集合, $w^{(k)}$ 和 $w^{(k+1)}$ 分别为第 k 和 $k+1$ 次循环的结构重量。该准则不作为优化结束的标准, 而是作为折减系数是否变化(增大或减小)的依据。

根据以上 3 个准则, 调整折减系数: 如果 3 个准则都不满足, 说明结构没有奇异、结构响应没有违背约束、有单元删除, 那么折减系数不变, 用小截面单元或弱材料单元处理拓扑变量为 0 的单元, 进入下一次循环, 结构做重分析; 如果不满足准则 I 和准则 II、只满足准则 III, 说明结构没有奇异、结构响应没有违背约束、没有删除单元, 增加折减系数, 进入下一步循环, 结构不做重分析; 如果满足准则 I 或准则 II, 说明结构发生奇异或结构响应违背约束, 恢复到上一步迭代的状态(包括分析结果、折减系数、拓扑变量), 减小折减系数增量, 进入下一次循环, 结构不做重分析, 直到折减系数增量小于最小值, 退出程序得到最优结果。

4.3 程序实现

根据以上算法，程序可以按如图 4-1 所示的流程图进行设计：

分析模型的建立主要依靠 MSC.Patran 完成，包括创建几何模型、划分有限元网格、创建边界条件及载荷工况、创建材料属性及单元属性等。优化参数输入是指通过用户界面输入建立优化模型的所必须的参数，如许用应力、许用位移（包括大小、方向和约束点）、设计变量（包括初始值和上下限）等，还有一些优化参数一般取默认值，如结构重量的收敛精度 ε （默认值 0.01）、折减因子的初始值 δ_0 （默认值 0.3）、初始增量 Δ_0 （默认值 0.1）、增量的缩减因子 α （默认值 0.1，有效范围 $0 < \alpha < 1$ ）及其最小值 Δ_{\min} （默认值 0.001）等，对程序熟悉的用户可以根据模型修改，但不能超出有效范围。

判断位移约束数是否等于 0，如果等于 0，只需要进行满应力设计；否则，需要创建位移约束对应的单位虚载荷及各工况对应的虚载荷工况，并对虚载荷工况进行分析为建立优化模型提供数据。

在本程序中 MSC.Nastran 作为有限元求解器对分析模型进行有限元分析，如果优化模型中有位移约束，该分析模型不但包括实载荷工况还包括跟位移约束和实载荷工况对应的虚载荷工况。

判断结构是否奇异，根据删除单元的应变能跟总应变能的比例关系判断结构是否奇异，如果奇异需要以上一步的结构分析作为起点，减小折减因子的增量继续搜索。

提取结果数据是指将 Nastran 的分析结果有选择性的读入程序，为建立优化模型提供数据，如单元应力、单元内力（包括弯矩和轴力）、节点平衡力、虚载荷工况作用下的节点位移等。

判断违背约束是指判断结构最大应力和约束点位移是否超过许用值，如果超过许用值需要以上一步的结构分析作为起点，减小折减因子的增量继续搜索。

近似射线步和粗选有效约束跟第 3 章的方法完全一样，这里不再赘述。

判断有效应力约束数是否等于 0，如果等于 0，就不再进行满应力设计；否则，只对有效应力约束涉及的单元进行满应力设计。

满应力设计就是根据式（4-10）通过计算满足应力约束的拓扑变量。

判断有效位移约束数是否等于 0，如果等于 0，满应力设计就是最优设计；否则，将满应力设计转化为动态尺寸下限，参与数学模型的建立。

优化模型（4-15）的求解是通过迭代其对偶模型（4-20）实现的，跟第 3 章的方法完全一样，这里不再赘述。

满应力设计和位移约束的求解是针对单工况进行计算的，对每个工况得到一个结果，根据 4.2.6 节的多工况的处理策略进行计算。

变量回归就是将连续的拓扑变量根据阈值回归为 0-1 型的离散拓扑变量。

判断结构重量是否收敛就是判断是否有单元删除，如果结构重量不变化，增加折减因子继续搜索最佳阈值。

判断折减因子的增量 Δ 是否小于最小值 Δ_{\min} ，如果小于，输出结果，退出程序；否则，对分析模型重新分析。

下面用一个简单的图例说明折减系数的调整过程，如图 4-2 所示，箭头表示迭代的进程，黑点表示结构分析点，黑点下边是结构分析次数，上边是折减系数

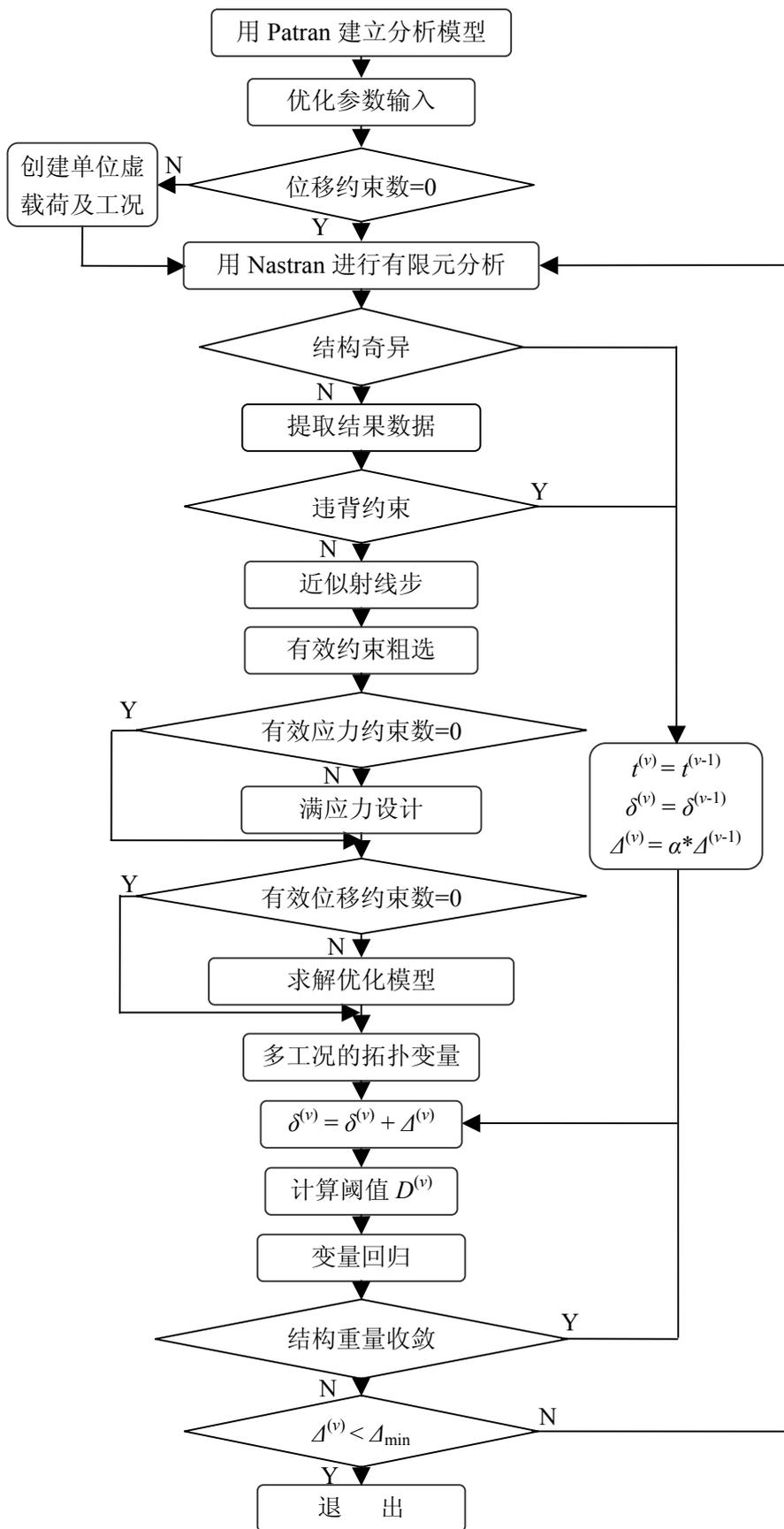


图 4-1 框架拓扑优化流程图

Fig. 4-1 Program Flow Chart of Topological Optimization of Frame Structures

的值。图中折减系数的初始值 δ_0 为 0.3，折减系数的初始增量 Δ_0 为 0.1，增量的缩减因子 α 为 0.2，增量的最小值 Δ_{\min} 为 0.01。

根据第一次结构分析结果计算拓扑变量，根据初始折减系数（0.3）计算阈值，拓扑变量回归，判断结构没有奇异、结构响应没有违背约束、有单元删除，“删除”拓扑变量为 0 的单元，折减系数增加 0.1（ $0.3+0.1=0.4$ ），进行第 2 次结构分析；直到第 4 次结构分析，发现结构奇异或响应违背约束，不进行结构分析，折减系数增量乘以缩减因子 0.2（ $0.1*0.2=0.02$ ），折减系数从 0.5 增加一个折减系数增量（ $0.5+0.02=0.52$ ），根据第 3 次结构分析得到拓扑变量回归，判断没有删除单元，折减系数再增加一个折减系数增量（ $0.52+0.02=0.54$ ），判断有单元删除，“删除”拓扑变量为 0 的单元，进行第 5 次结构分析；第 6 次结构分析时，发现结构奇异或响应违背约束，不进行结构分析，折减系数增量乘以缩减因子 0.2（ $0.02*0.2=0.004$ ），小于最小值（0.01），取第 5 次结构分析时的拓扑结构为满足约束的最优拓扑结构。

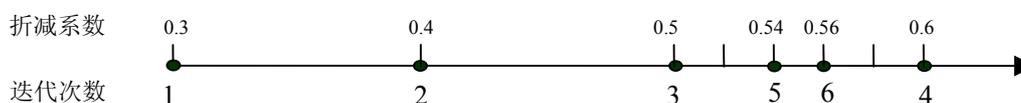


图 4-2 折减系数的调整过程

Fig. 4-2 Process of Adjusting the Discount Factor

4.4 程序算例

4.4.1 单工况应力约束下 4 梁空间框架的拓扑优化

4 梁空间框架结构如图 4-3 左图，1 号梁长 1m，竖直放置，2、3、4 号梁长 1.414m，均布在 1 号梁的四周，梁截面为边长为 10mm 的正方形。材料：弹性模量为 200GPa，泊松比为 0.3，密度为 7800kg/m³，许用应力为 160MPa。很显然，如果不考虑许用应力，在图示载荷作用下（竖直向上的拉力 F ），最优的拓扑结构为图 4-3 右图所示。

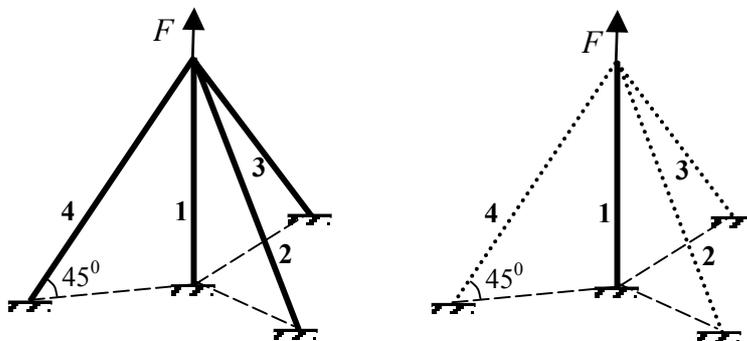


图 4-3 4 梁空间框架拓扑结构

Fig. 4-3 Topological Structures of Spatial Frame with 4 Beams

如果以结构重量收敛为拓扑结构最优的判断准则, 不管拉力 F 多大, 都会得到图 4-3 右图所示的拓扑结构。如果拉力 F 很大, 会使结构应力超过许用应力, 或者为满足许用应力使梁截面积很大。本文增加结构奇异和结构响应违背约束两个判断准则, 就能避免这种情况。

取折减系数的初始值 δ_0 为 0.3, 折减系数的初始增量 Δ_0 为 0.1, 增量的缩减因子 α 为 0.1, 增量的最小值 Δ_{\min} 为 0.001, 按弱材料单元法处理单元。这当拉力 F 为 10kN 时, 迭代过程如表 4-1, 当拉力 F 为 20kN 时, 迭代过程如表 4-2。

从表 4-1 可以看出, 当拉力 $F=10\text{kN}$ 时, 第 1 步迭代“删除”2、3、4 号梁单元, 结构最大应力为 99.9989MPa, 小于许用应力 160 MPa, 第 2 步迭代“删除”1 号梁单元, 第 3 步迭代, 发现所有单元都被删除, 删除单元的应变能占总应变能的 100%, 结构奇异, 不进行结构分析恢复到第 2 步迭代的状态 (包括结构分析结果、拓扑变量、折减系数), 折减系数增量减小为原来的 0.1 倍, 第 4 步迭代同第 3 步一样, 第 5 步时折减系数增量小于最小值 0.001, 最后得到满足约束的最优拓扑结构如图 4-3 右图, 与文献[18]相同。

表 4-1 拉力为 10kN 时拓扑优化的迭代过程 (用弱材料单元法处理单元)

Table 4-1 Iteration Process with $F=10\text{kN}$ (Weak Material Element Method)

迭代次数		0	1	2	3	4	5
结构最大应力 (MPa)		—	48.5269	99.9989	99.9989	99.9989	99.9989
回 归 前	t_1	1	0.30329	0.62499	0.62499	0.62499	0.62499
	$t_2=t_3=t_4$	1	0.15970	0.00002	0.00002	0.00002	0.00002
	结构重量 (kg)	4.08926	0.76504	0.48756	0.48756	0.48756	0.48756
折减系数		0.3	0.9	4.0	4.0	4.0	3.999
折减系数增量		0.1	0.1	0.1	0.01	0.001	0.0001
阈值		—	0.17604	0.62505	0.62505	0.62505	0.62489
回 归 后	t_1	—	1	0	0	0	1
	$t_2=t_3=t_4$	—	0	0	0	0	0
	结构重量 (kg)	—	0.78	0	0	0	0.78

表 4-2 拉力为 20kN 时拓扑优化的迭代过程 (用弱材料单元法处理单元)

Table 4-2 Iteration Process with $F=20\text{kN}$ (Weak Material Element Method)

迭代次数		0	1	2	3	4
结构最大应力 (MPa)		—	97.0538	199.998	199.998	199.998
回 归 前	t_1	1.0	0.606586	0.606586	0.606586	0.606586
	$t_2=t_3=t_4$	1.0	0.314759	0.314759	0.314759	0.314759
	结构重量 (kg)	4.08926	1.51476	1.51476	1.51476	1.51476
折减系数		0.3	0.9	0.82	0.812	0.811
阈值		—	0.348944	0.317927	0.314825	0.314438
折减系数增量		—	0.1	0.01	0.001	0.0001
回 归 后	t_1	—	1	1	1	1
	$t_2=t_3=t_4$	—	0	0	0	1
	结构重量 (kg)	—	0.780	0.780	0.780	4.08926

从表 4-2 可以看出, 当 $F=20\text{kN}$ 时, 第 1 步迭代“删除” 2、3、4 号梁单元, 第 2 步迭代结构最大应力为 199.998 MPa 大于许用应力 160 MPa , 结构响应违背约束, 不进行结构分析恢复到第 1 步迭代的状态, 折减系数增量减小为原来的 0.1 倍, 第 3 步迭代同第 2 步一样, 第 4 步迭代时折减系数增量小于最小值 0.001, 最后得到满足约束的最优拓扑结构为原拓扑结构。

为了说明通过调整折减系数搜索最佳阈值的过程, 本例取最小折减系数为 0.001, 对于简单的优化问题取的较大的值, 对于单元数较多、可能出现错误删除、精度要求较高的问题取较小的值。从表 4-1 和 4-2 可以看出, 如果最小折减系数取 0.1, 拉力为 10kN 时只需 3 步迭代, 拉力为 20kN 时只需 2 步迭代。

以上是根据“弱材料”单元法处理拓扑变量为 0 的单元, 其中 $\varepsilon=10^{-5}$ 。如果用小截面单元法处理拓扑变量为 0 的单元, ε 取相同的值, 在其他参数完全相同的情况下, 分别对上述两种情况进行计算, 得到结果如表 4-3 和表 4-4。

表 4-3 拉力为 10kN 时拓扑优化的迭代过程 (用小截面单元法处理单元)Table 4-3 Iteration Process with $F=10\text{kN}$ (Tiny Section Element Method)

迭代次数		0	1	2	3	4	5
结构最大应力 (MPa)		—	48.5269	99.6658	99.6658	99.6658	99.6658
回	t_1	1	0.30329	0.62291	0.62291	0.62291	0.62291
	$t_2=t_3=t_4$	1	0.15970	0.31208	0.31208	0.31208	0.31208
前	结构重量 (kg)	4.08926	0.76504	1.51861	1.51861	1.51861	1.51861
折减系数		0.3	0.9	1.6	1.6	1.599	1.598
折减系数增量		0.1	0.1	0.1	0.01	0.001	0.0001
阈值		—	0.17604	0.58468	0.62366	0.62327	0.62288
回	t_1	—	1	0	0	0	1
	$t_2=t_3=t_4$	—	0	0	0	0	0
后	结构重量 (kg)	—	0.78	0	0	0	0.78

表 4-4 拉力为 20kN 时拓扑优化的迭代过程 (用小截面单元法处理单元)Table 4-4 Iteration Process with $F=20\text{kN}$ (Tiny Section Element Method)

迭代次数		0	1	2	3	4
结构最大应力 (MPa)		—	97.0538	199.998	199.998	199.998
回	t_1	1.0	0.606586	0.606586	0.606586	0.606586
	$t_2=t_3=t_4$	1.0	0.314759	0.314759	0.314759	0.314759
前	结构重量 (kg)	4.08926	1.51476	1.51476	1.51476	1.51476
折减系数		0.3	0.9	0.82	0.812	0.811
阈值		—	0.348944	0.317927	0.314825	0.314438
折减系数增量		—	0.1	0.01	0.001	0.0001
回	t_1	—	1	1	1	1
	$t_2=t_3=t_4$	—	0	0	0	1
后	结构重量 (kg)	—	0.780	0.780	0.780	4.08926

比较表 4-1 和表 4-3 (由于拉力为 20kN 时有效迭代只有 2 步, 表 4-2 和表

4-4 完全相同), 虽然迭代次数和最优拓扑都一样, 但是迭代过程中的拓扑变量相差很大, 这种现象主要是由处理单元的方式不同造成的, 将”弱材料”单元法和小截面单元法处理单元得到的结果与真正删除拓扑变量为 0 的单元得到的结果相比较可以解释这种现象。用三种不同的方法处理图 4-3 左图所示的拓扑结构得到的响应的比较如表 4-5。

表 4-5 用三种方法处理图 4-3 左图的结构响应的比较

Table 4-5 Comparisons of Structural Response Processing Structure in Left Figure of Fig. 4-3 with Three Different Methods

处理单元方法	弱材料单元法	小截面单元法	真正删除
保留单元最大应力 (MPa)	99.999	99.666	100.000
删除单元最大应力 (MPa)	5.106E-4	49.910	—
结构最大位移 (mm)	0.500	0.498	0.500

结论:

1. 引入结构奇异、结构响应违背约束和结构重量收敛三个判断准则, 在不同的载荷作用下, 得到的满足要求的最优拓扑也不一样, 能够在保证结构不发生奇异和结构响应不违背约束的前提下最大限度的挖掘结构潜力。

2. 从表 4-1 和表 4-3 的比较可以看出, 用弱材料单元法处理单元计算得到的拓扑变量更加接近 0 或 1, 更有利于拓扑变量从连续向离散的转化, 其原因可以从表 4-5 的数据看出, 用弱材料单元法处理单元计算得到的结构响应有如下特点: 保留单元的最大应力更加接近真正删除拓扑变量为 0 的单元的结构的最大应力, 删除单元的最大应力接近 0, 结构最大位移更加接近真正删除拓扑变量为 0 的单元的结构的最大位移。

4.4.2 单工况应力和位移约束下 76 梁空间框架拓扑优化

分析模型是由 76 个截面为 $0.1\text{m}\times 0.1\text{m}$, 长为 1m 的梁单元组成的框架, 框架的四个角点固支, 中间受竖直向下的集中力 F , 如图 4-4 所示。材料: 弹性模量为 200GPa , 泊松比为 0.3 , 密度为 7800kg/m^3 , 许用应力为 120MPa 。

下面取折减系数的初始值 δ_0 为 0.3 , 折减系数的初始增量 Δ_0 为 0.1 , 增量的缩减因子 α 为 0.1 , 增量的最小值 Δ_{\min} 为 0.001 , 按弱材料单元法处理单元, 约束和载荷分如下 4 种情况进行计算。

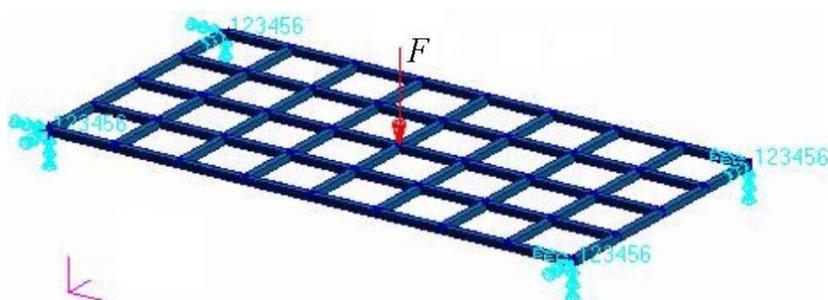


图 4-4 76 梁空间框架分析模型

Fig. 4-4 Analysis Model of Spatial Frame with 76 Beams

情况 1: $F=50\text{kN}$ 时, 只有应力约束 (120MPa) 的情况下;
 情况 2: $F=20\text{kN}$ 时, 只有应力约束 (120MPa) 的情况下;
 情况 3: $F=20\text{kN}$ 时, 有应力约束 (120MPa) 和位移约束 (15mm) 同时作用的情况下, 位移约束点和方向为集中力的作用点和方向;
 情况 4: $F=20\text{kN}$ 时, 有应力约束 (120MPa) 和位移约束 (20mm) 同时作用的情况下, 位移约束点和方向为集中力的作用点和方向。
 计算结果如表 4-6, 最优拓扑结构如图 4-5a、b、c (其中右图为最后一步的拓扑结构, 左图为满足约束的最优拓扑结构)。

表 4-6 76 梁空间框架的优化结果 (用弱材料单元法处理单元)

Table 4-6 Results of Spatial Frame with 76 Beams (Weak Material Element Method)

情况	迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最后一步最大位移(mm)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑最大位移(mm)	优化结束原因
1	10	135.399	—	115.837	—	应力违背约束
2	13	—	—	54.2794	—	结构奇异
3	10	54.1403	15.6817	38.5801	11.4424	位移违背约束
4	13	—	—	54.2794	16.5867	结构奇异

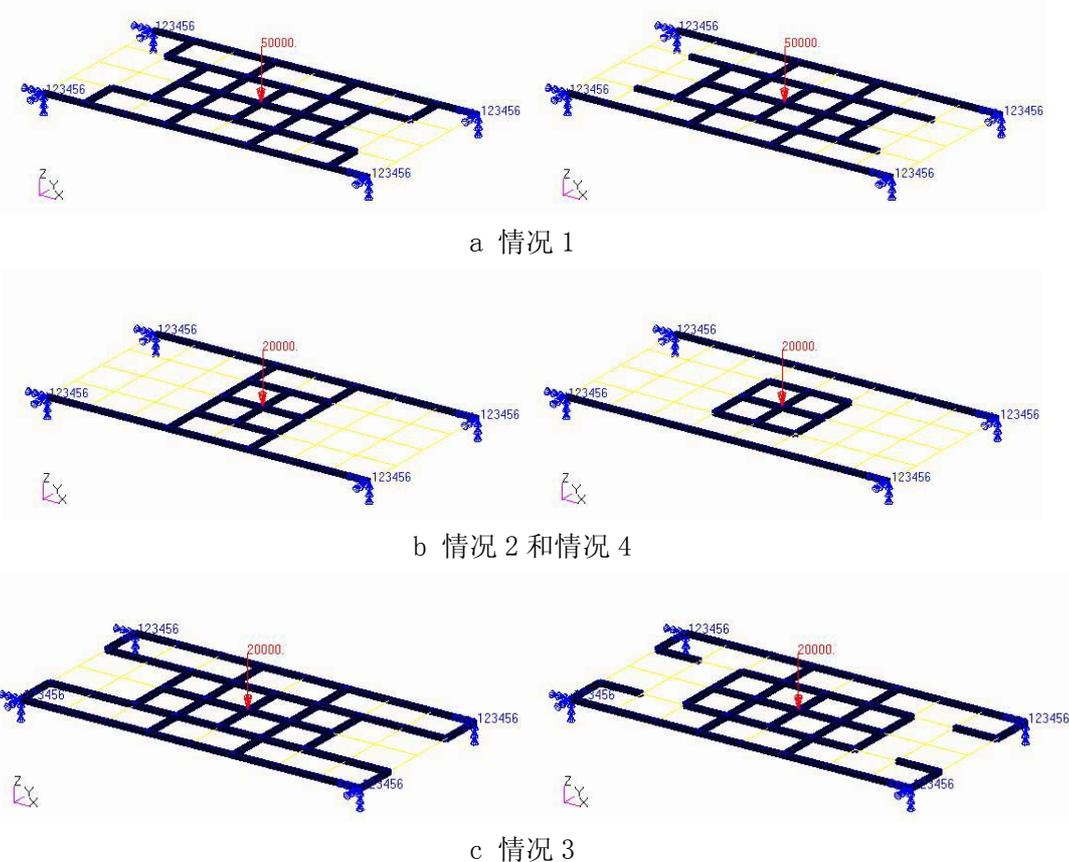


图 4-5 76 梁空间框架的最优拓扑 (用弱材料单元法处理单元)

Fig. 4-5 Optimal Topology of Spatial Frame with 76 Beams (Weak Material Element Method)

表 4-7 76 梁空间框架的优化结果（用小截面单元法处理单元）

Table 4-7 Results of Spatial Frame with 76 Beams (Tiny Section Element Method)

情况	迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最后一步最大位移(mm)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑最大位移(mm)	优化结束原因
1	10	135.398	——	115.837	——	应力违背约束
2	14	——	——	54.2794	——	结构奇异
3	8	54.1394	15.6814	38.8023	11.3699	位移违背约束
4	14	——	——	54.2794	16.5867	结构奇异

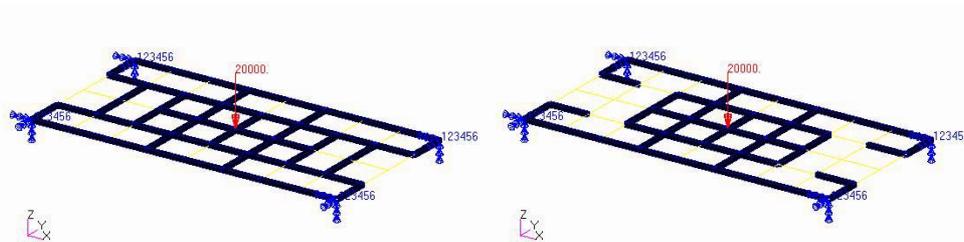


图 4-6 76 梁空间框架情况 3 的最优拓扑（用小截面单元法处理单元）

Fig. 4-6 Optimal Topology of Spatial Frame with 76 Beams (Tiny Section Element Method)

由于模型比较简单，用弱材料单元法和用小截面单元法处理单元得到的结果相差不大，但是迭代过程中的拓扑变量的相差很大，取情况 1（迭代次数相同）和情况 3（迭代次数不同）的拓扑变量进行比较，由于变量比较多，只取四个比较特殊的（能说明问题的）拓扑变量进行比较。情况 1 的保留单元中，值最大的拓扑变量（1 号单元）的比较如图 4-7，值最小的拓扑变量（75 号单元）的比较如图 4-8；“删除”单元中，值最大的拓扑变量（46 号单元）的比较如图 4-9，值最小的拓扑变量（23 号单元）的比较如图 4-10；情况 3 的保留单元中，值最大的拓扑变量（1 号单元）的比较如图 4-11，值最小的拓扑变量（31 号单元）的比较如图 4-12；“删除”单元中，值最大的拓扑变量（45 号单元）的比较如图 4-13，值最小的拓扑变量（23 号单元）的比较如图 4-14。

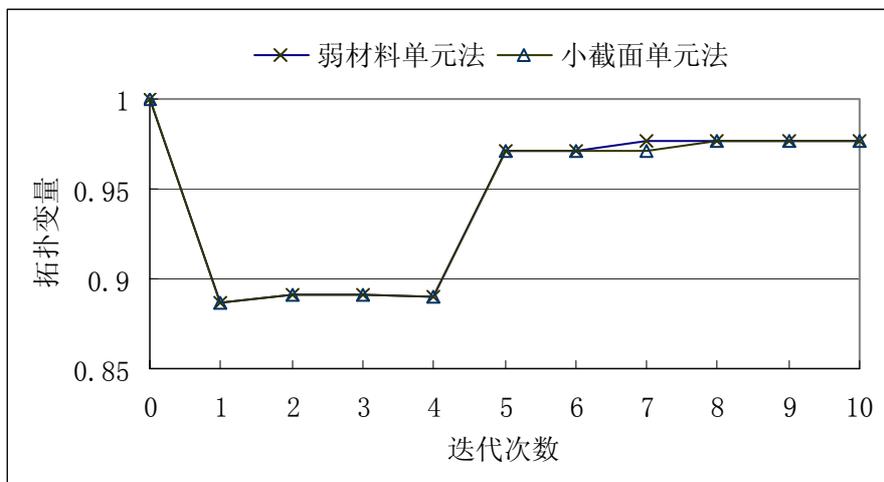


图 4-7 情况 1 保留单元中值最大的拓扑变量的比较

Fig. 4-7 Comparisons of Maximal Topological Variable of Retained Element in Case 1

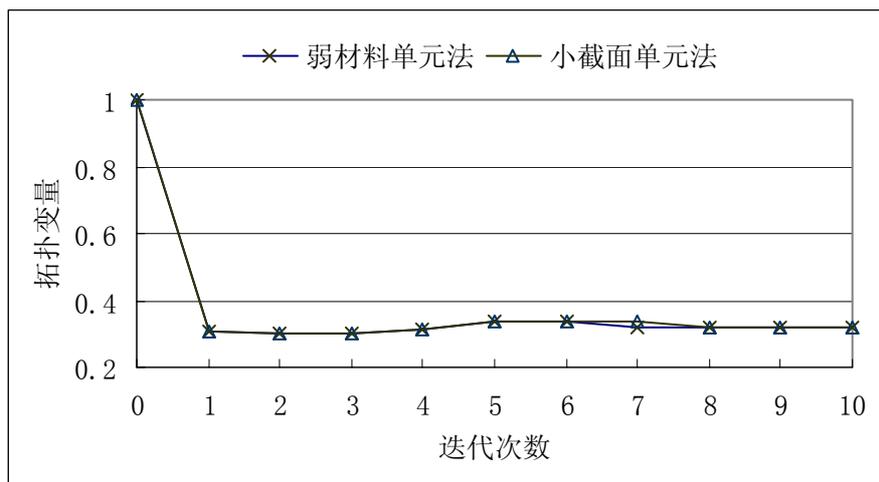


图 4-8 情况 1 保留单元中值最小的拓扑变量的比较

Fig. 4-8 Comparisons of Minimal Topological Variable of Retained Element in Case 1

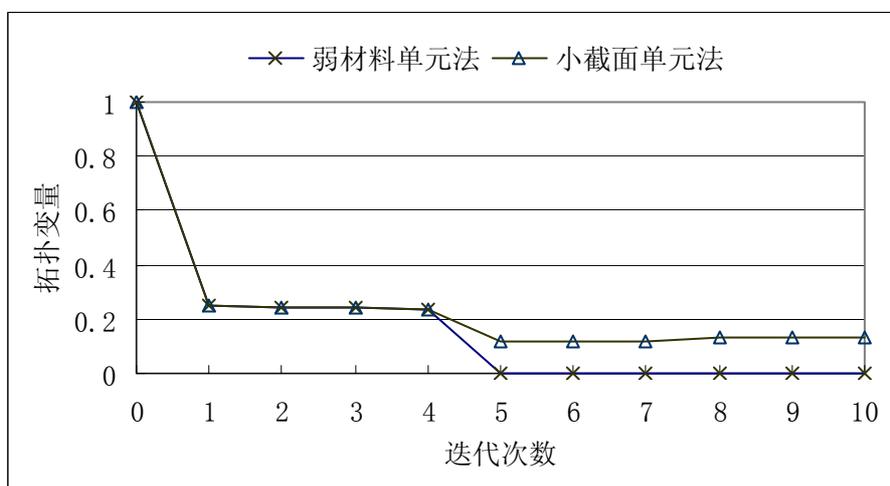


图 4-9 情况 1 “删除”单元中值最大的拓扑变量的比较

Fig. 4-9 Comparisons of Maximal Topological Variable of Deleted Element in Case 1

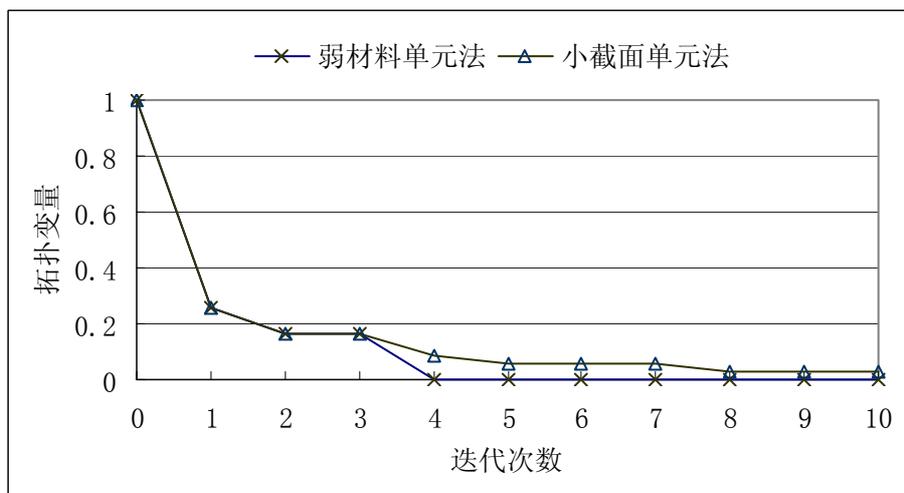


图 4-10 情况 1 “删除”单元中值最小的拓扑变量的比较

Fig. 4-10 Comparisons of Minimal Topological Variable of Deleted Element in Case 1

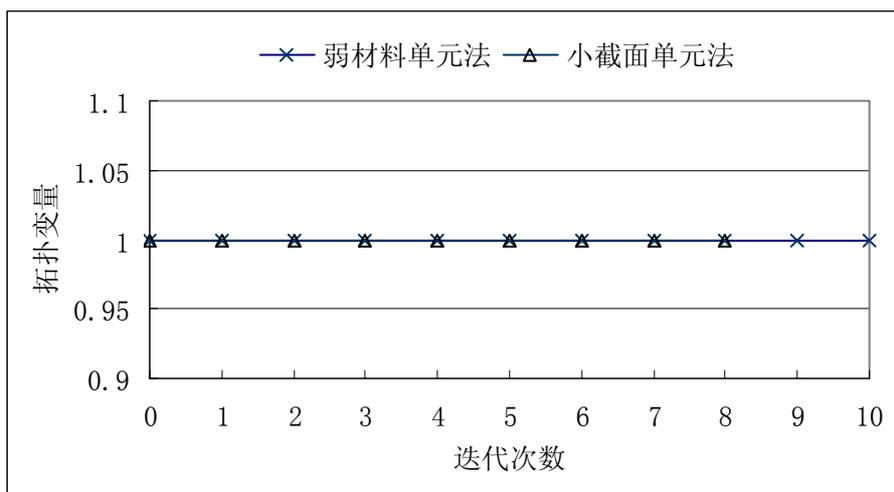


图 4-11 情况 3 保留单元中值最大的拓扑变量的比较

Fig. 4-11 Comparisons of Maximal Topological Variable of Retained Element in Case 3

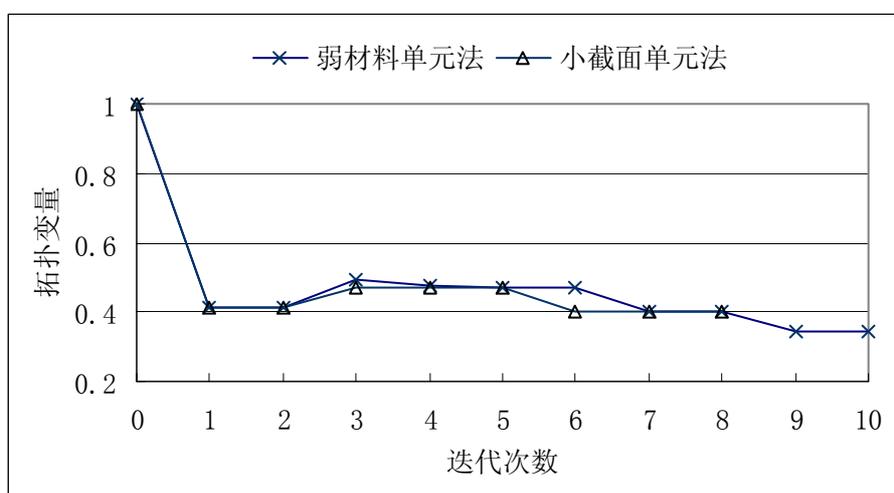


图 4-12 情况 3 保留单元中值最小的拓扑变量的比较

Fig. 4-12 Comparisons of Minimal Topological Variable of Retained Element in Case 3

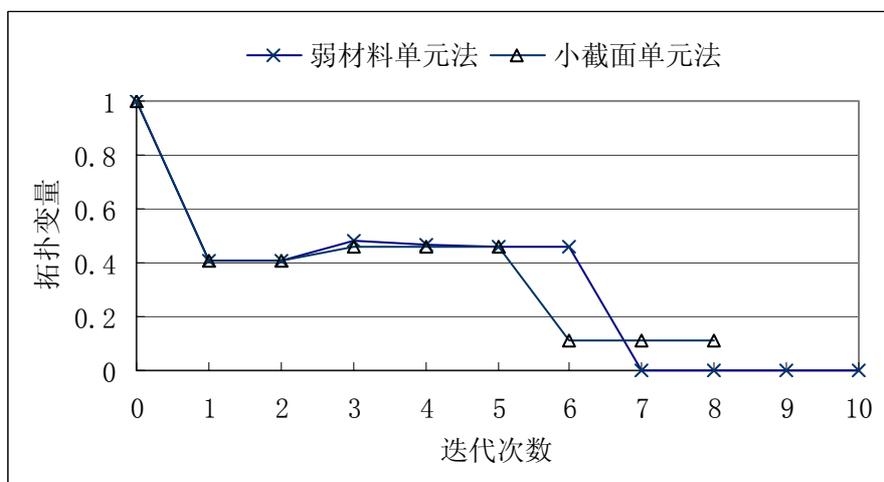


图 4-13 情况 3 “删除”单元中值最大的拓扑变量的比较

Fig. 4-13 Comparisons of Maximal Topological Variable of Deleted Element in Case 3

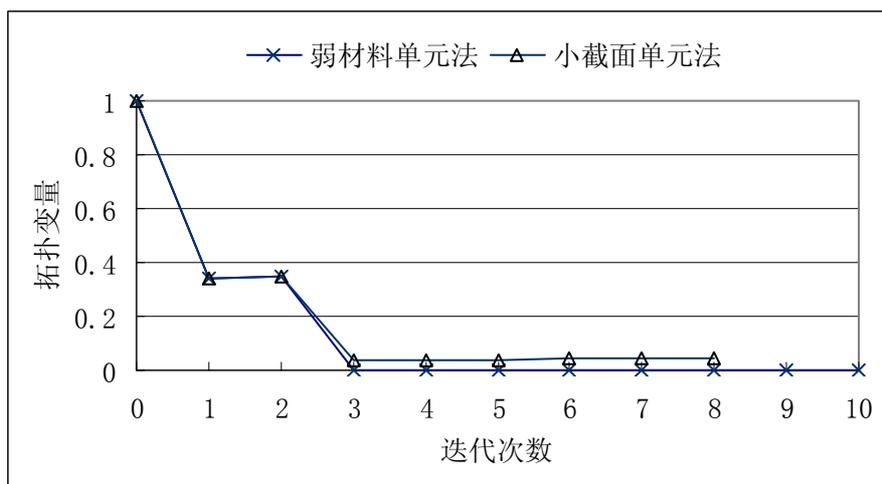


图 4-14 情况 3 “删除”单元中值最小的拓扑变量的比较

Fig. 4-14 Comparisons of Minimal Topological Variable of Deleted Element in Case 3

从以上 8 个图的比较可以看出，保留单元的拓扑变量相差不是很大，而“删除”单元的拓扑变量的差别比较明显，用弱材料单元法处理单元计算得到的拓扑变量更接近于 0。

这种现象主要是由处理单元的方式不同造成的，将弱材料单元法和小截面单元法处理单元得到的结果与真正删除拓扑变量为 0 的单元得到的结果相比较可以解释这种现象。用三种不同的方法处理图 4-5a 左图所示的拓扑结构得到的响应的比较如表 4-8，处理图 4-5b 左图所示的拓扑结构得到的响应的比较如表 4-9。

结论：

1. 引入结构奇异、结构响应违背约束和结构重量收敛三个判断准则，对不同的载荷与约束下，得到的满足要求的最优拓扑也不一样，能够在保证结构不发生奇异和结构响应不违背约束的前提下最大限度的挖掘结构潜力。

2. 从图 4-7 到图 4-10 中拓扑变量变化情况的比较可以看出，用弱材料单元法处理单元计算得到的拓扑变量更加接近 0 或 1，更有利于拓扑变量从连续向离散转化，其原因可以从表 4-8 和表 4-9 中对结构响应的比较看出。用弱材料单元法处理单元计算得到的结构响应有如下特点：保留单元的最大应力更加接近真正删除拓扑变量为 0 的单元的结构的最大应力，删除单元的最大应力接近 0，结构最大位移更加接近真正删除拓扑变量为 0 的单元的结构的最大位移，这样处理单元能够使中间过程的响应更接近真正删除单元的情况，使迭代过程更加平稳。

表 4-8 用三种方法处理图 4-5a 左图的结构响应的比较

Table 4-8 Comparisons of Structural Response Processing Structure in Left Figure of Fig. 4-5a with Three Different Methods

处理单元方法	弱材料单元法	小截面单元法	真正删除
保留单元最大应力 (MPa)	115.836296	115.836296	115.836536
删除单元最大应力 (MPa)	0.00102353	5.900147	—
结构最大位移 (mm)	31.774	31.774	31.774

表 4-9 用三种方法处理图 4-5b 左图的结构响应的比较

Table 4-9 Comparisons of Structural Response Processing Structure in Left Figure of Fig. 4-5b with Three Different Methods

处理单元方法	弱材料单元法	小截面单元法	真正删除
保留单元最大应力 (MPa)	54.278976	54.278976	54.279432
删除单元最大应力 (MPa)	0.00080024	4.540028	—
结构最大位移 (mm)	16.586	16.586	16.587

4.4.3 单工况应力和位移约束下 390 梁空间框架拓扑优化

由 390 个长为 1m 的梁单元构成的 $4\text{m} \times 4\text{m} \times 6\text{m}$ 空间框架, 所有梁单元的截面都是边长为 0.1m 的正方形, 下端固支, 顶端侧面中间受集中力载荷 F_1 , 如图 4-15 所示。材料: 弹性模量为 200GPa, 泊松比为 0.3, 密度为 7800kg/m^3 , 许用应力为 160MPa。

以结构重量最小为目标, 每个梁单元都作为一个独立的拓扑变量, 在工况 1 作用下, 对不同的载荷 F_1 和不同的约束 d_1 (作用点和方向分别是集中力 F_1 作用点和方向), 按 6 种情况分别进行计算, 并且在每种情况中, 对单元的不同处理方式以及折减系数的初始增量 Δ_0 取不同的值进行讨论。其他参数取相同的值, 折减系数的初始值 δ_0 为 0.3, 增量的缩减因子 α 为 0.1, 增量的最小值 Δ_{\min} 为 0.001。

情况 1: $F_1=500\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 15 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-16 左图; 按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 经过 18 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-16 左图, 跟 $\Delta_0=0.1$ 时得到的结果相同; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 9 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-16 右图; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 从 7 步迭代开始震荡, 即上一步删除多少单元, 下一步恢复多少单元, 不能收敛。四种处理方法得到的结果比较如表 4-10。

情况 2: $F_1=100\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 16 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-17 左图; 按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 经过 30 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-17 右图; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 15 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-17 左图, 同按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时的结果相同; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 从 13 步迭

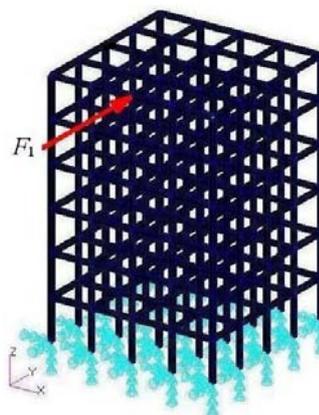


图 4-15 390 梁空间框架分析模型 (单工况)

Fig. 4-15 Analysis Model of Spatial Frame with 390 beams (Single Case)

代开始震荡，不能收敛。四种处理方法得到的结果比较如表 4-11。

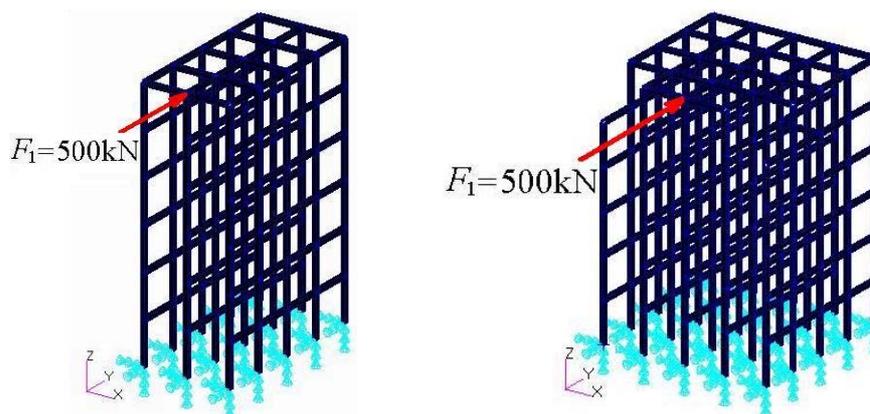


图 4-16 情况 1 的最优拓扑结构

Fig. 4-16 Optimal Topology in Case 1

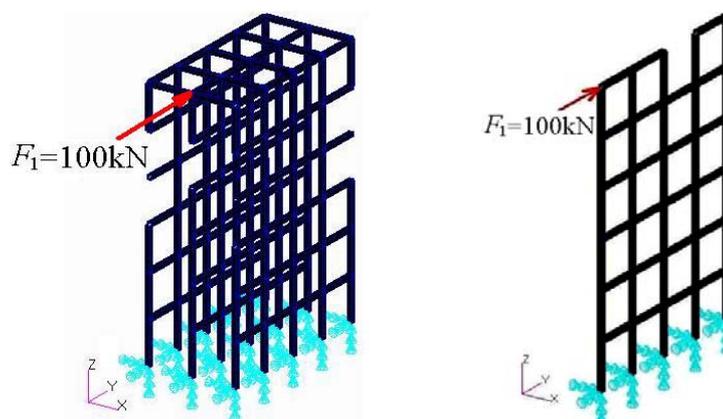


图 4-17 情况 2 的最优拓扑结构

Fig. 4-17 Optimal Topology in Case 2

情况 3: $F_1=50\text{kN}$ ，只受应力约束（160MPa）

按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时，经过 32 步迭代得到结果，最优拓扑结构如图 4-18 左图；按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时，经过 31 步迭代得到结果，最优拓扑结构如图 4-18 中图；按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时，经过 15 步迭代得到结果，最优拓扑结构如图 4-18 右图；按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时，从 13 步迭代开始震荡，不能收敛。四种处理方法得到的结果比较如表 4-12。

情况 4: $F_1=100\text{kN}$ ，受应力约束（160MPa）和位移约束（ $d_1=5\text{mm}$ ）

按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时，经过 18 步迭代得到结果，最优拓扑结构如图 4-19；按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时，经过 38 步迭代得到结果，最优拓扑结构如图 4-19，同 $\Delta_0=0.1$ 时的结果相同；按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时，从 20 步迭代开始震荡，不能收敛；按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时，从 28 步迭代开始震荡，不能收敛。四种处理方法得到的结果比较如表 4-13。

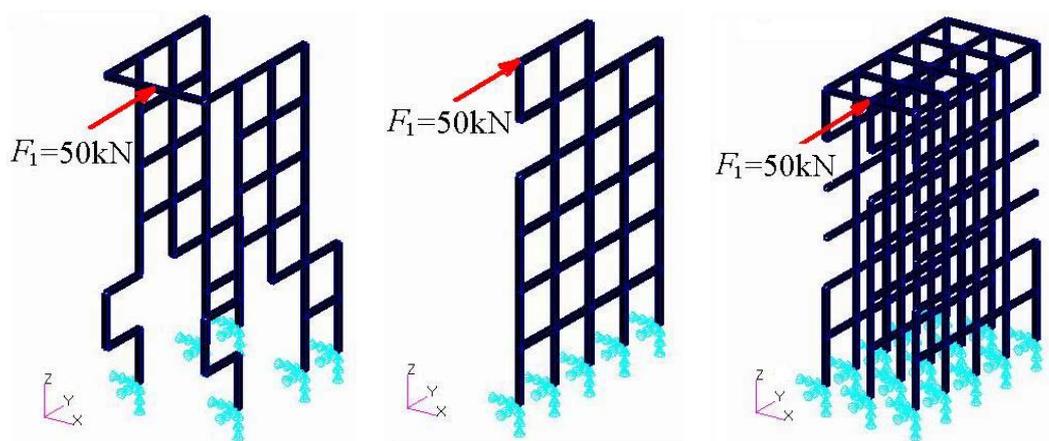


图 4-18 情况 3 的最优拓扑结构

Fig. 4-18 Optimal Topology in Case 3

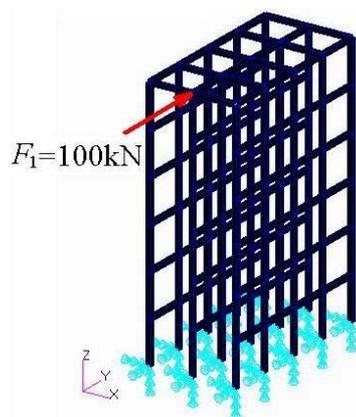


图 4-19 情况 4 的最优拓扑结构

Fig. 4-19 Optimal Topology in Case 4

表 4-10 情况 1 四种处理方法得到的结果比较

Table 4-10 Comparisons of Results with Four Methods in Case 1

单元处理方法	Δ_0	迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因	
弱材料单元法	0.1	15	205.139	151.462	13416	172	应力违背约束	
弱材料单元法	0.01	18	205.139	151.462	13416	172	应力违背约束	
小截面单元法	0.1	9	218.404	150.709	22308	286	应力违背约束	
小截面单元法	0.01	从 7 步迭代开始震荡，不能收敛						

表 4-11 情况 2 四种处理方法得到的结果比较

Table 4-11 Comparisons of Results with Four Methods in Case 2

单元处理方法	Δ_0	迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
弱材料单元法	0.1	16	186.203	46.0975	12714	163	应力违背约束
弱材料单元法	0.01	30	171.748	131.600	4134	53	应力违背约束
小截面单元法	0.1	15	—	46.0975	12714	163	结构奇异
小截面单元法	0.01	从 13 步迭代开始震荡, 不能收敛					

表 4-12 情况 3 时四种处理方法得到的结果比较

Table 4-12 Comparisons of Results with Four Methods in Case 3

单元处理方法	Δ_0	迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
弱材料单元法	0.1	32	—	161.179	5148	66	结构奇异
弱材料单元法	0.01	31	—	85.9372	3822	49	结构奇异
小截面单元法	0.1	15	—	22.802	12402	159	结构奇异
小截面单元法	0.01	从 13 步迭代开始震荡, 不能收敛					

表 4-13 情况 4 四种处理方法得到的结果比较

Table 4-13 Comparisons of Results with Four Methods in Case 4

单元处理方法	Δ_0	迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
式(4-26)	0.1	18	41.0279	5.28755	30.2923	4.90757	13416	172	位移违背约束
式(4-26)	0.01	38	41.0279	5.28755	30.2923	4.90757	13416	172	位移违背约束
式(4-27)	0.1	从 20 步迭代开始震荡, 不能收敛							
式(4-27)	0.01	从 28 步迭代开始震荡, 不能收敛							

情况 5: $F_1=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=10\text{mm}$)

按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 33 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-20a 图; 按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 经过 35 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-20b 图; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 26 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-20c 图; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 经过 35 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-20d 图。四种处理方法得到的结果比较如表 4-14。

情况 6: $F_1=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=20\text{mm}$)

按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时, 经过 23 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-21 左图; 按弱材料单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时, 经过 38 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-21 中图; 按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.1$ 时,

从 19 步迭代开始震荡，不能收敛；按小截面单元法处理单元、 $\Delta_0=0.01$ 时，经过 33 步迭代得到结果，最优拓扑结构如图 4-21 右图。四种处理方法得到的结果比较如表 4-15。

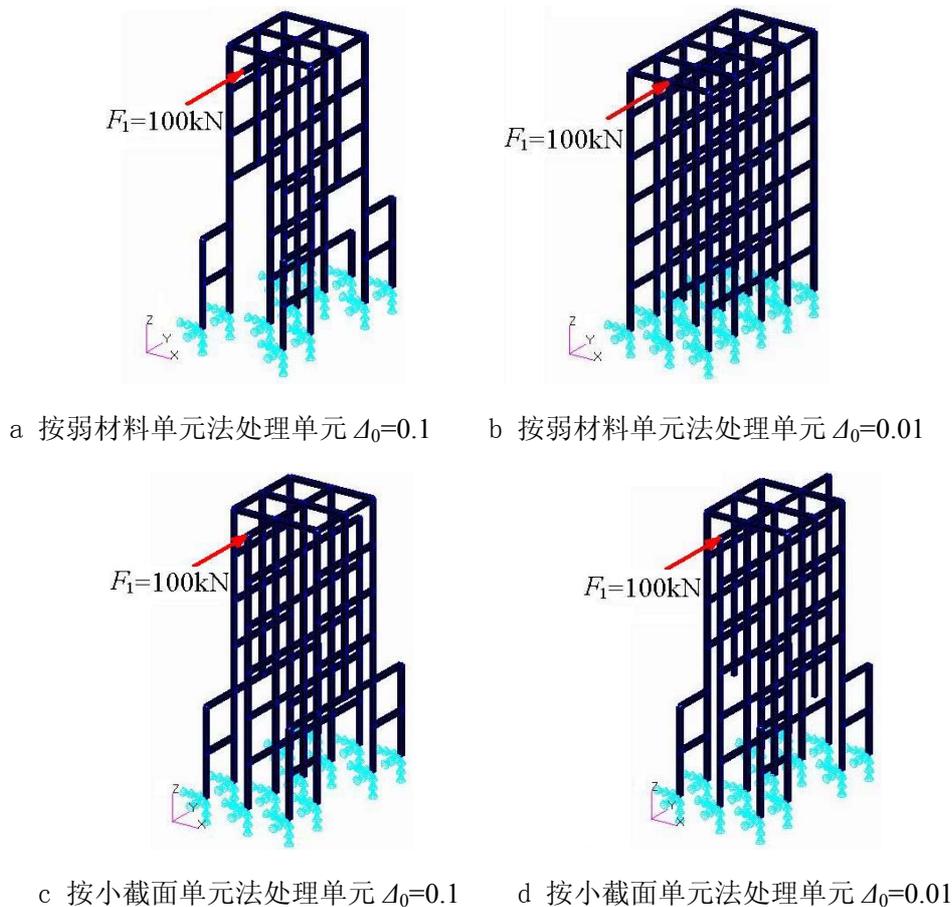


图 4-20 情况 5 的最优拓扑结构

Fig. 4-20 Optimal Topology in Case 5

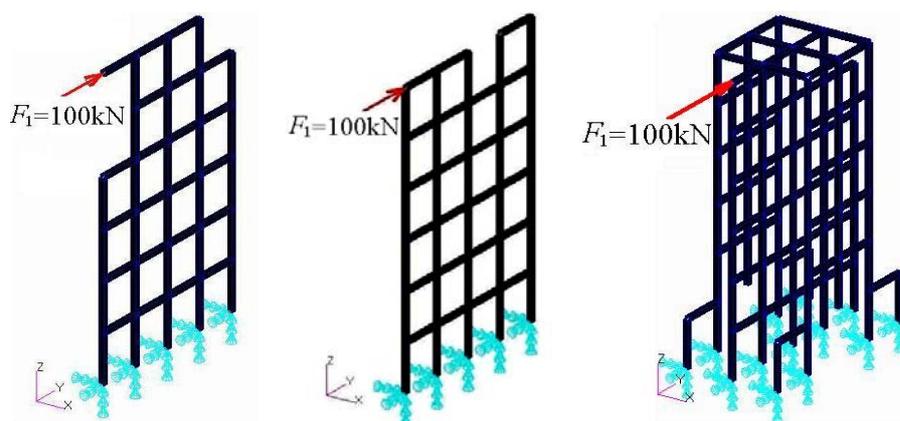


图 4-21 情况 6 的最优拓扑结构

Fig. 4-21 Optimal Topology in Case 6

表 4-14 情况 5 时四种处理方法得到的结果比较

Table 4-14 Comparisons of Results with Four Methods in Case 5

单元处理方法	Δ_0	迭代次数	最后一步	最后一步	最优拓扑	最优拓扑	最优拓扑	保留单元数	退出原因
			最大应力 (MPa)	最大位移 (mm)	最大应力 (MPa)	最大位移 (mm)	结构重量 (kg)		
式(4-26)	0.1	33	96.1804	12.4699	65.2165	9.2179	7878	101	位移违背约束
式(4-26)	0.01	35	87.3162	11.9822	84.6919	9.49826	8892	114	位移违背约束
式(4-27)	0.1	26	184.644	6.68887	44.9815	6.68906	9828	126	应力违背约束
式(4-27)	0.01	35	179.438	6.98470	50.3002	7.10244	9672	124	应力违背约束

表 4-15 情况 6 时四种处理方法得到的结果比较

Table 4-15 Comparisons of Results with Four Methods in Case 6

单元处理方法	Δ_0	迭代次数	最后一步	最后一步	最优拓扑	最优拓扑	最优拓扑	保留单元数	退出原因
			最大应力 (MPa)	最大位移 (mm)	最大应力 (MPa)	最大位移 (mm)	结构重量 (kg)		
式(4-26)	0.1	23	—	—	134.980	15.4982	3822	49	结构奇异
式(4-26)	0.01	38	171.748	14.9747	131.600	14.9769	4134	53	应力违背约束
式(4-27)	0.1	从 19 步迭代开始震荡, 不能收敛							
式(4-27)	0.01	36	198.377	7.20785	49.7237	7.31507	9360	120	应力违背约束

结论:

1. 引入结构奇异、结构响应违背约束和结构重量收敛三个判断准则, 对不同的载荷与约束下, 得到的满足要求的最优拓扑也不一样, 能够在保证结构不发生奇异和结构响应不违背约束的前提下最大限度的挖掘结构潜力。

2. 用不同的方法处理单元对优化结果的影响在该例中表现的尤为突出, 优化模型越复杂、规模越大, 单元的处理方法对优化结果的影响就越大。用小截面单元法处理单元, 在迭代的过程中很容易出现震荡现象, 不能得到结果, 即使迭代不出现震荡, 也会过早的使结构出现奇异或结构响应违背约束, 不能得到最优的拓扑结构。

3. 折减系数的初始增量 Δ_0 取不同的值对迭代过程和优化结果也有跟大的影响, 一般来说, Δ_0 越小优化的迭代次数越多, 优化结果越精确。从本例看, 约束的性质不同, 对 Δ_0 的依赖性也不同, 应力约束作为局部性约束要求 Δ_0 偏小一点, 以防过早的删除单元, 使结构出现奇异现象, 而位移约束作为全局性约束 Δ_0 可以稍大一点, 对结果影响不是很大, 但是能减少迭代次数。因此, 在实际的工程应用中, 需要通过经验总结规律, 用最少的迭代次数得到最优的拓扑结构。

4.4.4 多工况应力和位移约束下 390 梁空间框架拓扑优化

在 4.4.4 节的分析模型的基础上增加一个载荷工况, 如图 4-22 所示。

下面对多工况的拓扑优化问题进行讨论, 在工况 1 和工况 2 共同作用下, 取不同的载荷 (F_1 和 F_2) 和不同的约束 (d_1 和 d_2 , 其作用点和方向分别是集中力

F_1 和 F_2 的作用点和方向), 按 11 种情况分别进行计算, 并且在每种情况中, 对工况的不同处理方式(平均法和包络法及与数学规划结合的方法)进行讨论。其他参数取相同的值, 折减系数的初始值 δ_0 为 0.3, 折减系数的初始增量 Δ_0 取 0.01 (只有应力约束的情况) 或 0.1 (有位移约束的情况), 增量的缩减因子 α 为 0.1, 增量的最小值 Δ_{\min} 为 0.001。

情况 1: $F_1=F_2=500\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按包络法处理多工况时, 经过 12 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-23 左图; 按平均法处理多工况时, 经过 25 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-23 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-16。

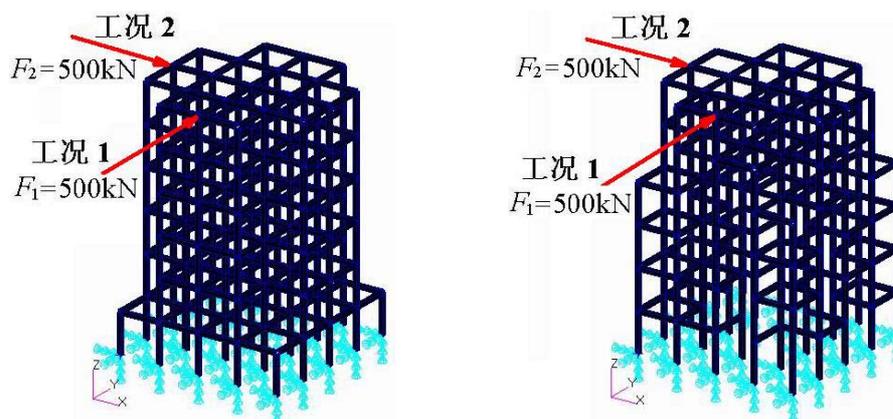


图 4-23 情况 1 的最优拓扑结构

Fig. 4-23 Optimal Topology in Case 1

情况 2: $F_1=F_2=100\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按包络法处理多工况时, 经过 52 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-24 左图; 按平均法处理多工况时, 经过 37 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-24 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-17。

情况 3: $F_1=F_2=50\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按包络法处理多工况时, 经过 52 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-25 左图, 与情况 2 相同; 按平均法处理多工况时, 经过 37 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-25 右图, 与情况 2 相同。两种处理方法得到的结果比较如表 4-18。

情况 4: $F_1=100\text{kN}$, $F_2=500\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按包络法处理多工况时, 经过 43 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-26 左图; 按平均法处理多工况时, 经过 45 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-26 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-19。

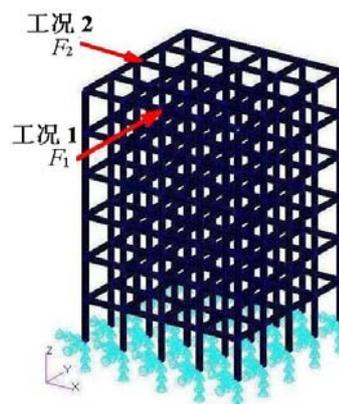


图 4-22 390 梁空间框架分析模型 (多工况)

Fig. 4-22 Analysis Model of Spatial Frame with 390 beams (Multiple Cases)

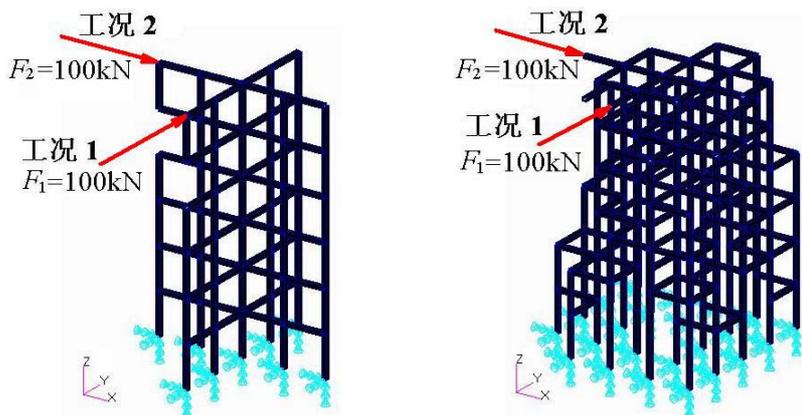


图 4-24 情况 2 的最优拓扑结构

Fig. 4-24 Optimal Topology in Case 2

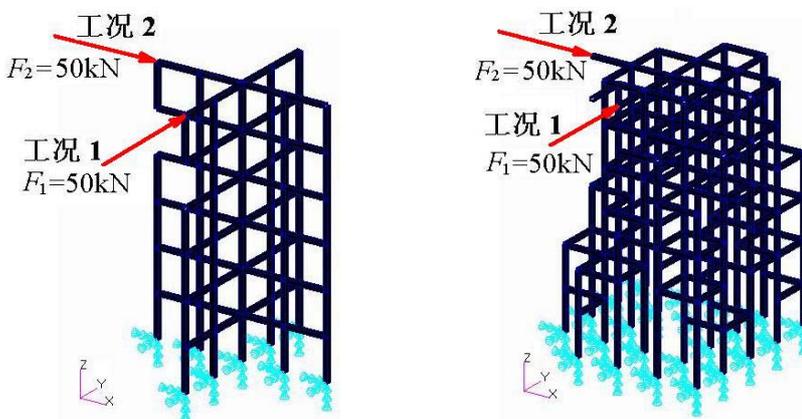


图 4-25 情况 3 的最优拓扑结构

Fig. 4-25 Optimal Topology in Case 3

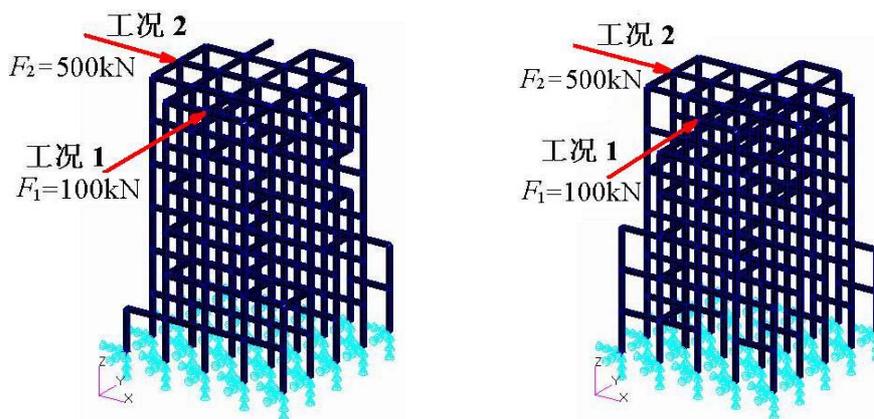


图 4-26 情况 4 的最优拓扑结构

Fig. 4-26 Optimal Topology in Case 4

情况 5: $F_1=50\text{kN}$, $F_2=100\text{kN}$, 只受应力约束 (160MPa)

按包络法处理多工况时, 经过 23 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-27 左图; 按平均法处理多工况时, 经过 68 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-27 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-20。

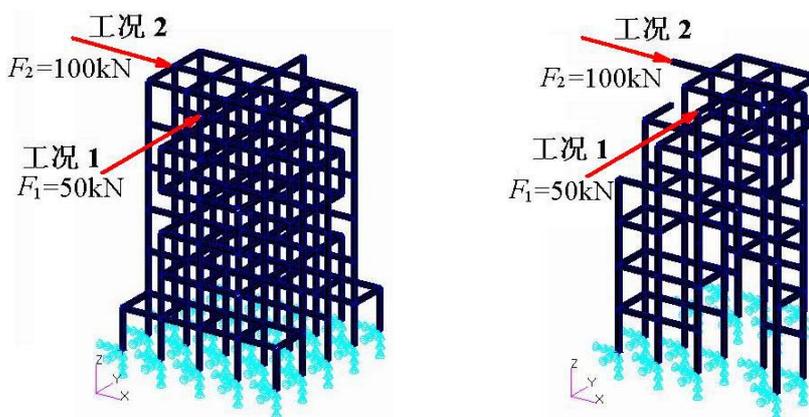


图 4-27 情况 5 的最优拓扑结构

Fig. 4-27 Optimal Topology in Case 5

表 4-16 情况 1 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-16 Comparisons of Results with Two Methods in Case 1

工况处理方法	迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法	12	170.569	154.064	25740	330	应力违背约束
平均法	25	165.981	155.549	23712	304	应力违背约束

注: 两个工况下的最大应力相同

表 4-17 情况 2 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-17 Comparisons of Results with Two Methods in Case 2

工况处理方法	迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法	52	—	104.926	7800	100	结构奇异
平均法	37	—	45.9477	19188	246	结构奇异

注: 两个工况下的最大应力相同

表 4-18 情况 3 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-18 Comparisons of Results with Two Methods in Case 3

工况处理方法	迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法	52	—	52.4631	7800	100	结构奇异
平均法	37	—	22.9739	19188	246	结构奇异

注: 两个工况下的最大应力相同

表 4-19 情况 4 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-19 Comparisons of Results with Two Methods in Case 4

工况处理方法		迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑结构重量(kg)	保留单元数	退出原因
包络法	工况 1	43	168.028	147.238	20436	262	应力违背约束
	工况 2		99.1287	92.2396			
平均法	工况 1	45	173.995	149.529	21528	276	应力违背约束
	工况 2		89.945	87.8474			

表 4-20 情况 5 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-20 Comparisons of Results with Two Methods in Case 5

工况处理方法		迭代次数	最后一步最大应力(MPa)	最优拓扑最大应力(MPa)	最优拓扑结构重量(kg)	保留单元数	退出原因
包络法	工况 1	23	—	32.6177	21528	276	结构奇异
	工况 2		—	28.4949			
平均法	工况 1	68	—	87.4819	12792	164	结构奇异
	工况 2		—	46.9780			

情况 6: $F_1=F_2=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=d_2=10\text{mm}$)

按包络法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 33 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-28 左图; 按平均法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 20 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-28 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-21。

情况 7: $F_1=F_2=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=d_2=20\text{mm}$)

按包络法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 35 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-29 左图; 按平均法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 16 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-29 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-22。

情况 8: $F_1=50\text{kN}$, $F_2=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=5\text{mm}$, $d_2=10\text{mm}$)

按包络法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 33 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-30 左图, 跟情况 6 相同; 按平均法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 15 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-30 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-23。

情况 9: $F_1=50\text{kN}$, $F_2=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=10\text{mm}$, $d_2=20\text{mm}$)

按包络法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 35 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-31 左图, 跟情况 7 相同; 按平均法和数学规划相结合的方法处理多工况时, 经过 16 步迭代得到结果, 最优拓扑结构如图 4-31 右图, 跟情况 7 相同。两种处理方法得到的结果比较如表 4-24。

情况 10: $F_1=50\text{kN}$, $F_2=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束

($d_1=d_2=10\text{mm}$)

按包络法和数学规划相结合的方法处理多工况时,经过 17 步迭代得到结果,最优拓扑结构如图 4-32 左图;按平均法和数学规划相结合的方法处理多工况时,经过 16 步迭代得到结果,最优拓扑结构如图 4-32 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-25。

情况 11: $F_1=50\text{kN}$, $F_2=100\text{kN}$, 受应力约束 (160MPa) 和位移约束 ($d_1=d_2=20\text{mm}$)

按包络法和数学规划相结合的方法处理多工况时,经过 15 步迭代得到结果,最优拓扑结构如图 4-33 左图;按平均法和数学规划相结合的方法处理多工况时,经过 15 步迭代得到结果,最优拓扑结构如图 4-33 右图。两种处理方法得到的结果比较如表 4-26。

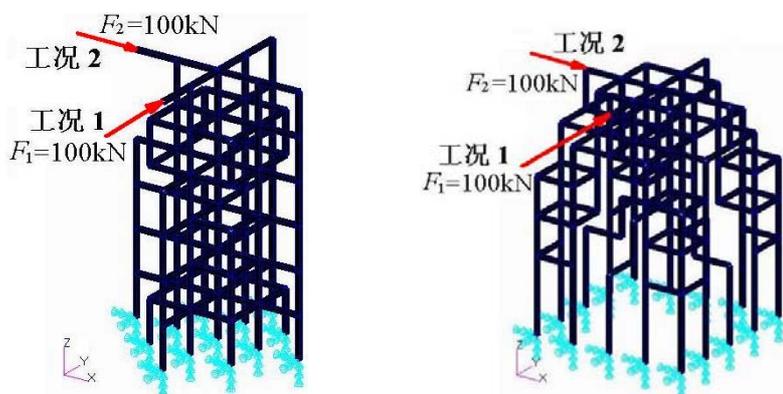


图 4-28 情况 6 的最优拓扑结构

Fig. 4-28 Optimal Topology in Case 6

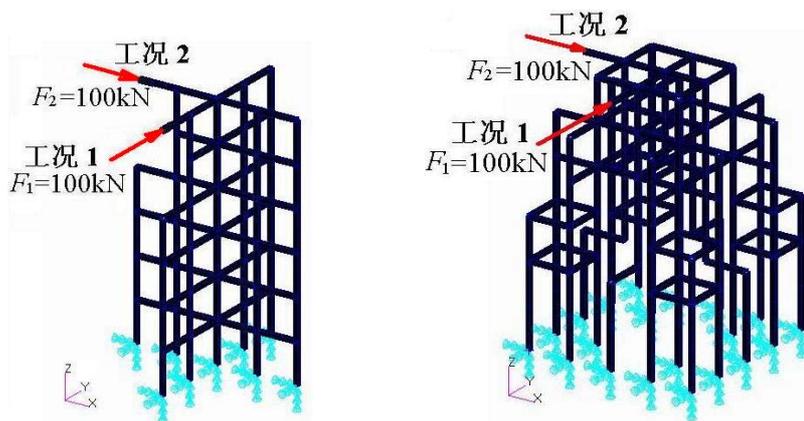


图 4-29 情况 7 的最优拓扑结构

Fig. 4-29 Optimal Topology in Case 7

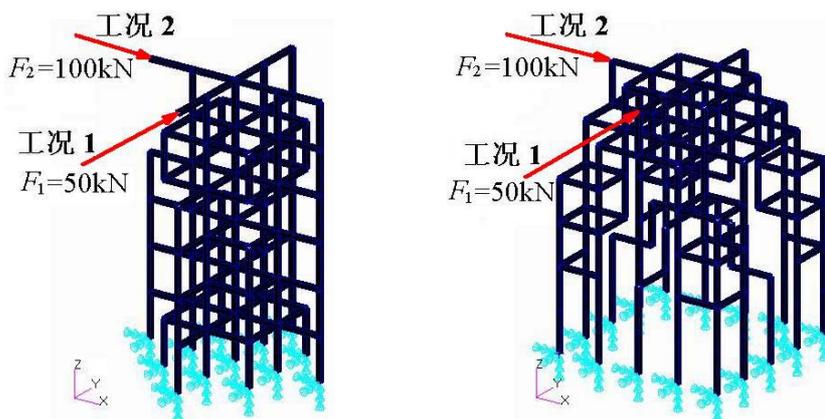


图 4-30 情况 8 的最优拓扑结构

Fig. 4-30 Optimal Topology in Case 8

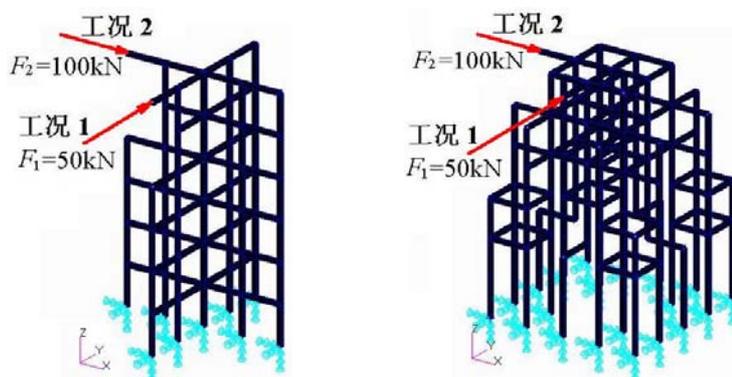


图 4-31 情况 9 的最优拓扑结构

Fig. 4-31 Optimal Topology in Case 9

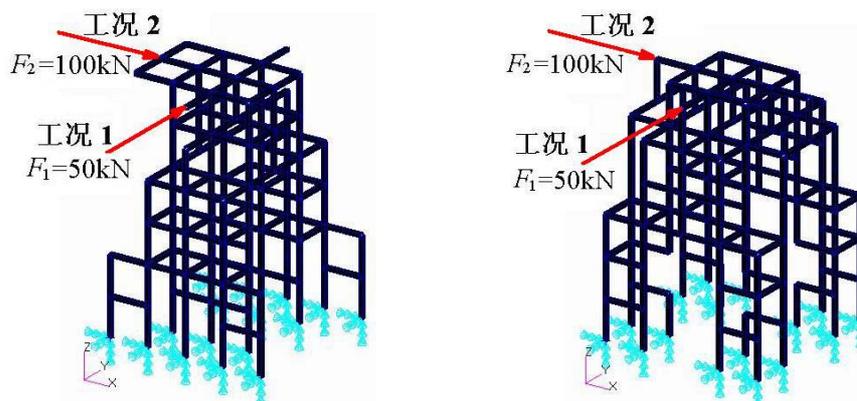


图 4-32 情况 10 的最优拓扑结构

Fig. 4-32 Optimal Topology in Case 10

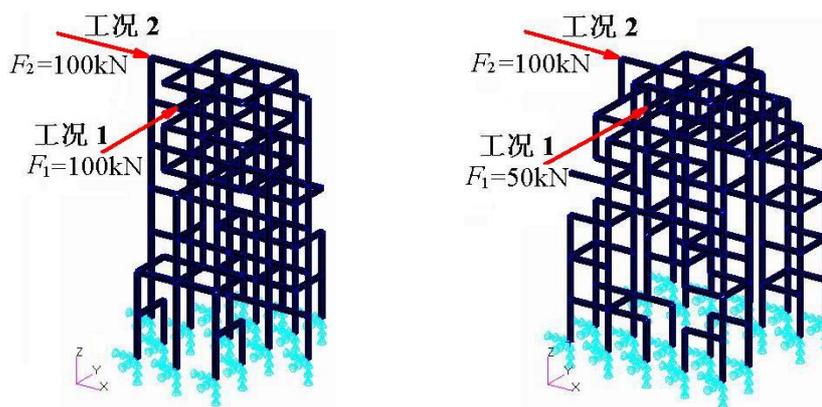


图 4-33 情况 11 的最优拓扑结构

Fig. 4-33 Optimal Topology in Case 11

表 4-21 情况 6 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-21 Comparisons of Results with Two Methods in Case 6

工况处理方法	迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法&MP	33	85.9788	9.75396	85.9897	9.75467	10920	140	没有单元删除*
平均法&MP	20	84.3153	10.6551	67.4448	9.75630	15210	195	位移违背约束

注：两个工况下的最大应力和位移相同

*说明：在迭代的最后结构没有发生奇异，也没有违背约束，但是保留单元的拓扑变量的值都等于 1，不能再删除单元，结构达到最优。

表 4-22 情况 7 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-22 Comparisons of Results with Two Methods in Case 7

工况处理方法	迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法&MP	35	—	—	107.388	14.2865	7488	96	结构奇异
平均法&MP	16	—	—	53.6709	8.61115	14976	192	结构奇异

注：两个工况下的最大应力和位移相同

表 4-23 情况 8 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-23 Comparisons of Results with Two Methods in Case 8

工况处理方法		迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法 &MP	工况 1	33	85.9788	9.75396	85.9897	9.75467	10920	140	没有单元删除*
	工况 2			4.87698	42.9948	4.87733			
平均法 &MP	工况 1	15	86.9308	12.0679	68.3071	9.82643	15210	195	位移违背约束
	工况 2			6.03393	34.1536	4.91322			

表 4-24 情况 9 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-24 Comparisons of Results with Two Methods in Case 9

工况处理方法		迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法 &MP	工况 1	35	—	—	107.388	14.2865	7488	96	结构奇异
	工况 2		—	—	53.6941	7.14327			
平均法 &MP	工况 1	16	—	—	53.6709	8.61115	14976	192	结构奇异
	工况 2		—	—	26.8354	4.30558			

表 4-25 情况 10 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-25 Comparisons of Results with Two Methods in Case 10

工况处理方法		迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法 &MP	工况 1	17	—	—	69.2872	7.89217	12948	166	结构奇异
	工况 2		—	—	36.8507	4.82893			
平均法 &MP	工况 1	16	74.0032	10.5088	49.2455	6.64033	14274	183	位移违背约束
	工况 2		—	7.6982	41.9906	6.96430			

表 4-26 情况 11 两种处理方法得到的结果比较

Table 4-26 Comparisons of Results with Two Methods in Case 11

工况处理方法		迭代次数	最后一步最大应力 (MPa)	最后一步最大位移 (mm)	最优拓扑最大应力 (MPa)	最优拓扑最大位移 (mm)	最优拓扑结构重量 (kg)	保留单元数	退出原因
包络法 &MP	工况 1	15	—	—	62.1283	8.52637	12168	156	结构奇异
	工况 2		—	—	46.9040	5.74090			
平均法 &MP	工况 1	15	—	—	76.4106	7.62025	15756	202	结构奇异
	工况 2		—	—	43.618	5.21105			

结论:

1. 引入结构奇异、结构响应违背约束和结构重量收敛三个判断准则,在不同的载荷作用下,得到的满足要求的最优拓扑也不一样,能够在保证结构不发生奇异和结构响应不违背约束的前提下最大限度的挖掘结构潜力。

2. 对于多工况的拓扑优化问题,用平均法和包络法处理得到的结果相差很大。对于只有应力约束的情况,由于应力属于局部性约束,对载荷条件和约束的依赖性较大,两种方法得到的结果时好时坏,总的来说,用包络法效果会更好一点;对于有位移约束的情况,由于位移属于全局性约束,对载荷条件和约束的依赖性较小,用包络法得到的结果更优。

4.5 本章小结

本章基于 ICM 方法,对单元重量、单元许用应力和单元刚度分别引入不同的过滤函数,把 0-1 型离散拓扑变量转化为 $[0, 1]$ 区间上的连续变量,建立拓扑变量连续的优化模型。将应力约束按零阶近似处理,借助满应力准则将应力约束转化为拓扑变量的动态下限,根据单位虚载荷法将位移约束显式化,实现了以重量为目标函数、考虑应力和位移约束的多工况的拓扑优化模型的显式化。为了提高模型的求解效率,将优化模型转化为对偶规划模型,通过对偶空间中迭代求解对偶模型得到原模型的解。考虑到拓扑优化跟截面优化的不同,拓扑优化的本质是借助“传力路径”确定结构的拓扑构成,本章按局部性约束、全局性约束及两者的结合三种情况进行了处理,并且通过对算例结果的比较得出结论。为了使程序快速准确的得到满足约束的最优拓扑结构,根据结构的特性引入了三个判断准则:结构发生奇异、结构响应违背约束、结构重量收敛。根据这三个准则的满足情况,在优化迭代过程中,自适应的调整折减系数来搜索最佳阈值,将连续的拓扑变量回归为 0-1 型离散拓扑变量。在优化过程中,有可能出现误删单元的情况,为了避免这种情况,本章采用两种不同处理单元的方法,并通过算例结果比较得出结论。

根据上述模型和算法,在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行软件二次开发,以 MSC.Patran 为开发平台,以 MSC.Nastran 为有限元求解器,完成了框架结构拓扑优化软件,能够对应力和位移约束下的多工况的框架结构进行拓扑优化。算例结果表明该拓扑优化算法和程序的有效性,通过对算例结果的比较可以得出如下结论:

1. 结构奇异、结构响应违背约束和结构重量收敛三个判断准则共同作用,能够在保证结构不发生奇异和结构响应不违背约束的前提下最大限度的挖掘结构潜力。

2. 通过自适应调整折减系数来搜索最佳阈值的方法是非常有效的,如果优化精度高、模型比较复杂、设计变量较多,可以减小折减系数增量。一般而言,对于局部性约束(应力约束)折减系数增量宜取较小的值,对于全局性约束(位移约束)宜取较大的值。

3. 用弱材料单元法或小截面单元法处理拓扑变量为 0 的单元,能够将误删的单元恢复,而且弱材料单元法比小截面单元法更有效。

4. 对于多工况的拓扑优化问题,用包络法和平均法处理只有应力约束的情况,用数学规划对位移约束的情况统一处理,用包络法和平均法与数学规划相结合的方法处理应力和位移同时约束的情况,算例结果表明用包络法或包络法与数学规划相结合的方法处理多工况拓扑优化问题效果较好。

第 5 章 总结与展望

5.1 总结

本文主要依据专著[15]中的论述,建立了满足应力约束和位移约束的框架结构截面优化模型和拓扑优化模型,并在 MSC.Patran&Nastran 软件的基础上进行结构优化软件的二次开发,用 PCL 语言实现了框架结构的截面优化和拓扑优化。本文工作的创新之处主要表现在以下几个方面:

(1) 根据约束的不同性质采用了不同的处理方法,建立了以结构重量为目标、满足应力和位移约束的框架结构截面优化的近似显式模型。

(2) 针对受力复杂的框架结构,本文发展的应用了满应力准则,根据梁单元的内力和应力的关系得到框架结构满应力的表达式,通过构造迭代关系得到了框架结构的准确满应力解。

(3) 本文根据单位虚载荷法将位移约束显式化,并根据内力功等于外力功的原理,用单元节点力向量跟节点虚位移向量的成绩代替积分运算,大大的提高了求解效率。

(4) 运用了近似射线步技术,能够使满应力求解和对偶规划求解的迭代次数大大降低,用射线步后的设计作为最优设计,在同样收敛精度的前提下,得到的最优设计更加准确。

(5) 依据关系映射反演(RMI)的方法论思想,根据对偶理论求解原问题的对偶模型,通过在对偶空间迭代求解对偶模型得到原模型的解,大大的提高了计算效率。

(6) 本文将框架结构截面优化模型无量纲化,用一个无量纲设计变量可以控制多个截面不同的梁单元,并且能够保证不同的梁截面在变化的过程中保持同一比例,还可以任意将变量分组,根据工程实际用尽可能少的设计变量描述优化问题,这样可以提高程序的灵活性,扩大应用范围,简化模型提高求解效率,并且可以将程序扩展到对多种类型结构组合的优化。

(7) 基于 ICM 方法,对单元重量、单元许用应力和单元刚度分别引入不同的过滤函数,把 0-1 型离散拓扑变量转化为 $[0, 1]$ 区间上的连续拓扑变量,建立拓扑变量连续的优化模型。

(8) 本文引入结构奇异、结构响应违背约束和结构重量收敛三个判断准则,在保证结构不发生奇异和不违背约束的前提下最大限度的挖掘结构潜力。

(9) 根据三个判断准则,自适应的调整折减系数搜索最佳阈值,根据阈值将连续的拓扑变量回归为 0-1 型拓扑变量,使结构快速而平稳的达到最优。

(10) 讨论了拓扑变量为 0 的单元的处理方式和多工况下拓扑优化问题的处理方法,对拓扑优化的实现具有非常重要的指导意义。

(11) 根据以上理论和算法,首次在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行程序实现,并通过大量算例证明了程序算法的可靠性和高效性。

5.2 展望

结构优化对于结构设计水平的提高和产品更新换代周期的缩短都具有非常重要的意义,其学术意义和应用价值也越来越引起人们的重视。从现有优化软件的总体水平来说,在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行结构优化模块的二次开发是非常有意义的,但也是一个长期而又艰巨的过程。本文只是对框架结构的截面优化和拓扑优化的理论进行了研究,并用 PCL 语言在 MSC.Patran&Nastran 的基础上进行程序实现。要全面完成结构优化模块的二次开发,还需要进行以下几个方面的研究工作:

(1) 对于框架结构的截面优化问题,本文只考虑了梁截面做相似变换的情况,用横截面积(或截面惯性矩)做设计变量,一个截面只能是一个设计变量。为了扩大程序的适用范围,可以用截面尺寸做设计变量,一个截面可以是多个设计变量。

(2) 本文只考虑了框架结构的截面优化和拓扑优化,至于框架结构的形状优化还有待于进一步研究和开发。

(3) 其他类型结构(如桁架结构、膜结构、板壳结构、实体结构等)的优化程序的二次开发。在隋允康教授的带领下,工程数值模拟中心已经完成了一部分工作,如桁架结构截面优化软件、桁架结构形状优化软件、膜结构截面优化软件、板壳结构截面优化软件、二维连续体形状优化软件。还有正在进行的工作,如桁架结构离散断面优化软件、桁架结构动力优化软件、膜结构离散断面优化软件、板壳结构离散断面优化软件、连续体结构拓扑优化软件、结构动力拓扑优化软件。这些已完成的工作以及正在进行的工作,还需要继续完善,其他方面的工作要继续展开。

(4) 在实际工程中,往往不只包含一种单一的结构,而是多种不同类型结构的组合,需要把不同类型结构优化程序综合起来,能够解决不同类型结构组合的优化问题。

(5) 作为一个成熟的软件,用户界面是至关重要的,本文所做的工作还远远不能满足实际的需要,需要做进一步的开发,使用户界面更加友好。

(6) 实际工程包罗万象,用户的知识背景也有很大的区别,这就不能保证优化程序对用户输入能完全接受并得到优化结果,需要在程序当中增加错误分析功能,在输入数据有问题或者不能得到优化结果的时候,给出错误提示以及解决方案。

参考文献

- 1 钱令希. 工程结构优化设计. 水利电力出版社, 北京, 1983
- 2 Schmit L A, Miura H. New Structural Analysis/Synthesis Capability—Access 1. *AIAA Journal*. 1976, 14(5): 661-671
- 3 Schmit L A, Miura H. Advanced Structural Analysis/Synthesis Capability—Access 2. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1978, 12(2): 353-377
- 4 Fleury C, Ramanathan R K, Salama M, Schmit L A. Access Computer Program for the Synthesis of Large Structural Systems. *Proceedings of the Second International Symposium on Optimum Structural Design*. Tucson, AZ, USA, 1984: 541-561
- 5 Qian L X, Zhong W X, Sui Y K, Zhang J T. Efficient Optimum Design of Structures: Program DDDU. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1982, 30(2): 209-224
- 6 Bartholomew P, Morris A J. STARS: A Software Package for Structural Optimization. *Proceedings of the Second International Symposium on Optimum Structural Design*. Tucson, AZ, USA, 1984: 617-632
- 7 Herendeen D L, Hoesly R L, Johnson E H, Venkayya V B. Astros—An Advanced Software Environment for Automated Design. *Collection of Technical Papers—AIAA/ASME/ASCE/AHS 27th Structures, Structural Dynamics and Materials*. San Antonio, TX, USA, 1986: 59-66
- 8 Petiau C. Structural Optimization of Aircraft. *Thin-Walled Structures*. 1991, 11(1-2): 43-64
- 9 Thomas H, Shyy Y, Vanderplaats G, Miura H. Genesis: A Modern Shape and Sizing Structural Design Tool. *Proceedings of the 33rd AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Dallas, TX, USA, 1992: 2796
- 10 乔志宏. 桁架结构截面优化的理论与软件. 北京工业大学硕士论文. 2002
- 11 高峰. 桁架结构形状优化的理论与基于 MSC/Nastran 的软件二次开发. 北京工业大学硕士论文. 2003
- 12 陈继华. 膜结构截面优化的理论及其在 MSC/Nastran 上的软件二次开发. 北京工业大学硕士论文. 2003
- 13 金雪燕. 板壳截面优化的理论与基于 MSC/Nastran 的软件二次开发. 北京工业大学硕士论文. 2003
- 14 李栋. 二维连续体结构形状优化的理论与基于 MSC/Nastran 的软件二次开发. 北京工业大学硕士论文. 2003
- 15 隋允康. 建模•变换•优化——结构综合方法新进展. 大连理工大学出版社, 大连, 1996
- 16 Schmit L A. *Structural Design by Systematic Synthesis*. Proc. 2nd Nat. Conf. Elect. Comput. ASCE. New York (1960): 105-132.
- 17 Prager W, Taylor J E. Problems of Optimal Structural Design. *Journal of Applied Mechanics*. 1968, 35(1): 102-106
- 18 Prager W, Shield R T. A General Theory of Optimal Plastic Design. *Journal of Applied Mechanics*. 1967, 34(1): 184-186

- 19 Rozvany G I N. Structural Design via Optimality Criteria. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989
- 20 Venkayya V B, Khot N S, Reddy V S. Optimization of Structures Based on the Study of Energy Distribution. Proc. Of 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., WPAFB, AFFDLTR-68-150, U.S.A.F (Dec.1969). 111-153
- 21 Berke L. An Efficient Approach to the Minimum Weight Design of Deflection Limited Structures. Rep. Air Force Flight Dynamics Lab. Ohio, USA. AFFDL-TM-70-4, 1970
- 22 Venkayya V B. Design of Optimum Structures. Comp. & Struct. 1971(1):112-123
- 23 Gellatly R A, Berke L, Gibson W. The Use of Optimality Criteria in Automated Structural Design. Paper Presented at the 3rd Conf. On Matrix Methods in Struct. Mech., WPAFB. (Oct.1971)
- 24 Venkayya V B, Khot N S, Berke L. Application of Optimality Criteria Approaches on Automated Design of Large Practical Structures. 2nd Symp. Struct. Optim. (held in Milano, Italy) AGARD CP-123 (1973) 3.1-3.19.
- 25 Berke L , Khot N S. Use of Optimality Criteria for Large Scale Systems. AGARD-LS-70, 1974.
- 26 Schmit L A, Farshi B. Some Approximation Concepts for Structural Synthesis. AIAA Journal. 1974, 12(5): 692-699
- 27 Schmit L A, Miura H. Approximation Concepts for Efficient Structural Synthesis. NASA CR-2552. March 1976
- 28 Schmit L A, Ramanathan R K. Multilevel Approach to Minimum Weight Design Including Buckling Constrains. AIAA Journal. 1978, 16(2): 97-104
- 29 Fleury C. Structural Weight Optimization by Dual Method of Convex Programming. International Journal for Numerical methods in Engineering. 1979, 14: 1761-1783
- 30 Fleury C, Geradin M. Optimality Criteria and Mathematical Programming in Structural Weight Optimization. Computers and Structures. 1978, 8(1): 7-17
- 31 Fleury C. and Sander G. Dual Methods for Optimizing Finite Element Flexural Systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1983, 37(3): 249-275
- 32 Schmit L A, Fleury C. Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods. AIAA, 18 (1980): 1252-1260
- 33 Fleury C, Schmit L A. Primal and Dual Methods in Structural Optimization. ASCE J Struct Div. 1980, 106(5): 1117-1133
- 34 Schmit L A, Chang K J. Optimum Design Sensitivity Based on Approximation Concepts and Dual Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1984, 20(1): 39-75
- 35 Rozvany G I N, Zhou M. COC Algorithm, Part I. Cross-section Optimization or Sizing. Computer Methods in Applied Mechanics. 1991, 89(1-3): 281-308
- 36 Zhou M, Rozvany G I N. DCOC: An Optimality Criteria Method for Large System. Part I: theory. Struct. Opt. 1992, 5: 12-25
- 37 Zhou M, Rozvany G I N. DCOC: An Optimality Criteria Method for Large System. Part II: algorithm. Struct. Opt. 1993, 6: 250-262
- 38 Zhou M. Efficient DCOC Algorithm Based on High-quality Approximations for Problems

- Including Eigenvalue Constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1995, 128(3-4): 383-394
- 39 Zhou M. Optimum Design of Plates and Shells Using the DCOC Method. *Structural Optimization*. 1996, 12 (2-3): 87-92
- 40 Zhou M, Rozvany G I N. Improved Approximation Technique for the DCOC Method of Sizing Optimization. *Computers and Structures*. 1996, 60(5): 763-769
- 41 钱令希. 结构力学中最优化理论与方法的近代发展. *力学情报*. 1973, (4): 3-26
- 42 钱令希, 钟万勰. 结构优化设计的一个方法. *大连工学院学报*. 1979, 18(1): 1-21
- 43 钱令希, 钟万勰, 程耿东等. 工程结构优化的序列二次规划. *固体力学学报*. 1983, (4): 469-480
- 44 钱令希, 钟万勰, 程耿东, 隋允康. 工程结构优化设计的一个新途径—序列二次规划 SQP. *计算结构力学及其应用*. 1984.2, 1(1): 7-19
- 45 钱令希, 钟万勰, 隋允康, 张近东. 多单元、多工况、多约束的结构优化设计——DDDU 程序系统. *大连工学院学报*. 1980, 19(4): 1-17
- 46 隋允康, 钟万勰, 钱令希. 杆-膜-梁组合结构优化的 DDDU-2 程序系统. *大连工学院学报*. 1983, 22(1): 21-36
- 47 隋允康, 王希诚. 梁截面函数的形成及组合结构的优化设计—兼述 DDDU-2 程序系统在某铁路车辆底架的优化设计上的应用. *大连工学院学报*. 1984, 23(2): 113-118
- 48 隋允康, 王希诚. 适合复杂工程实际的结构优化程序 DDDU-2F 版本. *计算结构力学及其应用*. 1985.8, 12(3): 73-81
- 49 钱令希, 隋允康, 王希诚, 凌克明. 壳体结构优化及其 DDDU(W)新版本. *计算结构力学及其应用*. 1992, 9(1): 79-89
- 50 王光远, 周正源, 霍达. 结构优化设计的两相优化法. *力学学报*. 1983, 15(4): 376-387
- 51 夏人伟, 周明. 结构设计的统一优化准则法. *计算结构力学及其应用*. 1985.11, 2(4): 29-40
- 52 许素强, 夏人伟. 杆系结构几何优化中的广义变量近似方法. *计算结构力学及其应用*. 1995.2, 12(1): 17-25
- 53 隋允康, 阳志光. 应用两点有理逼近改进的牛顿法和对偶法. *大连理工大学学报*. 1994.2, 34(2): 1-9
- 54 隋允康, 林龙富. 求解非线性规划的序列有理规划 SRP 方法. *计算结构力学及其应用*. 1994.5, 11(2): 210-212
- 55 隋允康, 刑誉峰, 张桂明. 基于两点累积信息的原/倒变量展开的对偶优化方法. *力学学报*. 1994.11, 26(6): 699-710
- 56 Sui Y K, Wang X C. Second-order Method of Generalized Geometric Programming for Spatial Frame Optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1997, 141: 117-123
- 57 Sui Y K, Wang W J. The Analytical Solution with respect to Characteristics of Elements' Cross-section as Variables of the Plane Frame. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1998.4, 19(4): 381-390
- 58 Rajagopalan H S, Grandhi R V. Reliability Based Structural Analysis and Optimization in X Window Environment. *Computers and Structures*. 1996, 60(1): 1-10
- 59 Luo X D, Grandhi R V. Astros for Reliability-based Multidisciplinary Structural Analysis and Optimization. *Computers and Structures*. 1997, 62(4): 737-745

- 60 Torregosa R F, Kanok-Nukulchai W. Weight Optimization of Steel Frames Using Genetic Algorithm. *Advances in Structural Engineering*. 2002, 5(2): 99-111
- 61 Papadrakakis M, et al. Structural Optimization Using Evolution and Neural Networks. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1998, 156: 309-333
- 62 Li X S, Templeman A B. Entropy-based Optimum Sizing of Truss. *Civil Engineering System*. 1988, 5(3): 158-169
- 63 G. M. Michell. The Limits of Economy of Materials in Frame Structures. *Philosophical Magazine, Series 6*. 1904, 8(47): 589-597
- 64 Dorn W S, Gomory R E, Greenberg H J. Automatic Design of Optimal Structures. *J. de Mechanique*, 1964, 3(1): 25-52
- 65 Hemp W S. Michell Framework for Uniform Load Between Fixed Supports. *Engineering Optimization*. 1974, 1(1): 61-69
- 66 Hemp W S. Michell Framework for a Force in any Definite Direction at the Mid-point Between Two Supports. *Engineering Optimization*. 1976, 2(3): 183-187
- 67 Prager W. Optimal Layout of Cantilever Trussed. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1977, 23(1): 111-117
- 68 Prager W, Rozvany G I N. Optimal Layout of Grillages. *Journal of Structural Mechanics*. 1977, 5(1): 1-18
- 69 Prager W. Optimal Layout of Trusses with Finite Numbers of Joints. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1978, 26(4): 241-250
- 70 Rozvany G I N, Hill R D. Computer Algorithm for Deriving Analytically and Plotting Optimal Structural Layout. *Computers and Structures*. 1978, 10(1-2): 295-300
- 71 Rozvany, G. I. N. Optimal Beam Layouts: Allowance for Cost of Shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979, 19(1): 49-58
- 72 Ringertz U. On Topology Optimization of Trusses. *Eng. Opt.* 1985, 9(3): 209-218
- 73 Kirsch U, Taye S. Optimal Topology of Grillage Structures. *Engineering with Computers (New York)*. 1986, 1(4): 229-243
- 74 Kirsch U. Optimal Topologies of Truss Structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 1989, 72(1): 15-28
- 75 Kirsch U, Topping B H V. Minimum Weight Design of Structural Topologies. *Journal of Structural Engineering*. 1992, 118(7): 1770-1785
- 76 段宝岩, 叶尚辉. 两工况作用下杆系结构拓扑优化设计. *计算结构力学及其应用*. 1991, 8(2): 170-177
- 77 段宝岩, 叶尚辉. 考虑性态约束时多工况桁架结构拓扑优化设计. *力学学报*. 1992, 24(1): 59-69
- 78 Rozvany G I N, Zhou M. COC Algorithm, Part II. Topological, Geometrical and Generalized Shape Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1991, 89(1-3): 309-336
- 79 Rozvany G I N, Zhou M. Applications of the COC Algorithm in Layout Optimization. *Proceedings of the International Conference on Engineering Optimization in Design Process*. Karlsruhe, Ger. 1991, (63): 59-70
- 80 Cheng G D, Jiang Z. Study on Topology Optimization with Stress Constraints. *Eng. Opt.*,

- 1992, 20: 129-148
- 81 Cheng G D, Jiang Z. Numerical Performance of Two Formulations of Truss Topology Optimization. *ACTA MECHANICA SINICA*, 1994, 10(4): 326-335
- 82 Cheng G D. Some Aspects of Truss Topology Optimization. *Struct. Opt.*, 1995, 10:173-179
- 83 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化中的奇异最优解. *大连理工大学学报*. 2000.7, 40(4): 379-383
- 84 Cheng G D, Guo X. A Note on Star Shape Feasible Domain in Structural Topology Optimization. 1995.11, Proceedings of the second China-Japan symposium on optimization of structural and mechanical systems, 21-25
- 85 Cheng G D, Guo X. ϵ -relaxed Approach in Structural Topology Optimization. *Struct. Opt.* 1997, 13(4): 258-266
- 86 Guo X, Cheng G D. A New Approach for the Solution of Singular Optimum in Structural Topology Optimization. *ACTA MECHANICA SINICA*. 1997, 13(2): 171-178
- 87 程耿东, 郭旭. 考虑局部稳定约束的桁架拓扑优化设计. *大连理工大学学报*. 1995.12, 35(6): 770-775
- 88 王跃方, 孙焕纯, 黄丽华. 离散变量结构拓扑优化设计研究. *固体力学学报*. 1998, 19 (1): 59-63
- 89 Bechers M, Fleury C. Primal-dual Approach in Truss Topology Optimization. *Computers and Structures*. 1997, 64(1-4): 77-88
- 90 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化. *大连理工大学学报*. 1995.2, 35(1): 1-9
- 91 王健, 程耿东. 具有应力和厚度约束的平面弹性体结构拓扑优化设计. *机械科学与技术*. 2002.9, 19(4): 741-744
- 92 Cheng K T, Olhoff N. An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates. *Int. J. Solids and Structures*, 1981, 17: 305-323
- 93 Cheng K T, Olhoff N. On Non-smoothness in Optima Design of Solid Elastic Plates. *Int. J. Solids and Structures*, 1981, 17: 59-810
- 94 Cheng K T, Olhoff N. Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates. *Int. J. Solids and Structures*, 1982, 18: 153-170
- 95 Bendsoe M P, Kikuchi N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 1988, 71(1): 197-224
- 96 Bendsoe M P, Sigmund O. Material Interpolations in Topology Optimization. *Archive of Applied Mechacics*. 1999, 69: 635-654
- 97 Li Q, Steven G P, Xie Y M. On Equivalence between Stress Criterion and Stiffness Criterion in Evolutionary Structural Optimization. *Structural Optimization*. 1999, 18: 67-73
- 98 Svanberg K. The Method of Moving Asymptotes-a New Method for Numerical Methods in Engineering. 1987, 24: 359-373
- 99 陈建军, 曹一波, 段宝岩. 基于可靠性的桁架结构拓扑优化设计. *力学学报*. 1998, 30(3): 277-284
- 100 许素强, 夏人伟. 桁架结构拓扑优化与遗传算法. *计算结构力学及其应用*. 1994, 11(4): 436-446
- 101 Grierson D E, Pak W H. Optimal Sizing, Geometrical and Topology Design Using a Genetic

- Algorithm. *Structural Optimization*. 1993, 6(3): 151-159
- 102 Duan B Y, Templeman A B, Chen J J. Entropy-based method for topological optimization of truss structures. *Computers and Structures*. 2000, 75(5): 539-550
- 103 蔡文学, 程耿东. 桁架结构拓扑优化设计的模拟退火算法. *华南理工大学学报(自然科学版)*. 1998, 26(9): 78~84
- 104 May S A, Balling R J. A Filtered Simulated Annealing Strategy for Discrete Optimization of 3D Steel Frameworks. *Structural Optimization*. 1992, 4(2): 142-148
- 105 Zhou M, Rozvany G I N. On the Validity of ESO Type Methods in Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001, 21(1): 80-83
- 106 Sui Y K, Yang D Q. A New Method for Structural Topological Optimization Based on the Concept of Independent Continuous Variables and Smooth Model. *ACTA Mechanica Sinica*, 1998, 18(2): 179-185
- 107 隋允康, 杨德庆, 王备. 多工况应力约束和位移约束下连续体结构拓扑优化. *力学学报*. 2000.3, 32(2): 171-179
- 108 Sui Y K. ICM Method of Topological Optimization for Truss, Frame and Continuum Structure. WCSMO-4, June 4-8 2001, Dalian
- 109 隋允康, 于新, 叶宝瑞. 基于“有无复合体”的应力约束下的桁架和平面膜结构拓扑优化的统一模型. *固体力学学报*. 2001.3, 22 (1): 15-22
- 110 隋允康, 于新. 平面膜结构拓扑优化的有无复合体方法. *力学学报*. 2001, 33(3): 357-364
- 111 Sui Y K, Long L C, Ren X C. Topological Optimization of Frame Structures with Stress and Displacement Constraints under Multi-loading Cases. WCSMO-4, June 4-8 2001, Dalian
- 112 隋允康, 任旭春, 龙连春. 刚架结构拓扑优化. *固体力学学报*. 2001, 专辑(22): 95-100
- 113 隋允康, 任旭春, 龙连春, 叶宝瑞. 基于 ICM 方法的刚架结构拓扑优化. *计算力学学报*. 2003, 20(3): 286-289

攻读博士学位期间发表的学术论文

- 1 隋允康, 刘赵淼, 杜家政等. 几种工程薄壳结构的分析及优化设计. 北京工业大学学报. 2001, 27 (4): 383~389
- 2 杜家政, 隋允康. 用 PCL 对 NASTRAN 进行二次开发的方法和技术. MSC.Software 中国解决方案论坛 2001 论文集. 北京, 2001
- 3 隋允康, 乔志宏, 杜家政. 基于满应力方法的桁架结构截面优化. MSC.Software 中国解决方案论坛 2001 论文集. 北京, 2001
- 4 隋允康, 宇慧平, 杜家政. 在 NASTRAN 软件上开发的膜结构满应力设计版本. MSC.Software 中国解决方案论坛 2001 论文集. 北京, 2001
- 5 隋允康, 杜家政等. 基于满应力方法的梁截面优化. MSC.Software 中国解决方案论坛 2001 论文集. 北京, 2001
- 6 李栋, 杜家政, 隋允康. MSC.Nastran 软件对自行车的结构分析. MSC.Software 中国解决方案论坛 2001 论文集. 北京, 2001
- 7 隋允康, 杜家政等. 对于 MSC.Nastran 软件的使用和结构优化程序的二次开发. CAD/CAM 与制造业信息化. 2002 (5): 49~51
- 8 隋允康, 杜家政等. 基于满应力方法的梁截面优化. 力学与工程应用. 2002, 9: 151~154
- 9 隋允康, 杜家政. 同时满足强度与刚度的平面框架截面层次优化. 北京力学年会第八届学术年会论文摘要集. 北京, 2002
- 10 杜家政, 隋允康. 在 NASTRAN 软件上二次开发的平面框架截面层次优化算例. 北京力学年会第八届学术年会论文摘要集. 北京, 2002
- 11 隋允康, 杜家政. 多种约束下框架优化的对偶-二次规划解法及其在 MSC.Patran 上的程序实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 12 杜家政, 隋允康. 满应力算法中梁单元最大应力的处理. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 13 陈继华, 杜家政, 隋允康等. MSC.Patran 中体单元与壳单元的连接方法的探索. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 14 乔志宏, 杜家政, 隋允康. 多约束下桁架结构截面优化在 MSC.Nastran 上的程序实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 15 彭细荣, 隋允康, 杜家政. 蜂窝板实体模型与等效模型的分析. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 16 乔志宏, 杜家政, 隋允康. 含压杆局部稳定约束的桁架满应力设计在 MSC.Nastran 上的程序实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 17 叶红玲, 隋允康, 刘赵淼, 杜家政. 基于 ICM 方法对 MSC.Nastran 进行桁架拓扑优化的二次开发. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 18 潘锋, 隋允康, 乔志宏, 杜家政. 基于 MSC.Nastran 二次开发的软件对某型

- 号刮泥机工作桥的结构分析和优化设计. MSC.Software 中国解决方案论坛 2002 论文集. 北京, 2002
- 19 杜家政, 隋允康. 强度与刚度约束下大型空间框架截面优化. 北京力学年会第九届学术年会论文摘要集. 北京, 2003
 - 20 隋允康, 陈继华, 龙连春, 杜家政. 多约束下的膜结构截面优化及其在 MSC.Nastran 上的程序实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 21 隋允康, 金雪燕, 龙连春, 杜家政. 应力和位移约束下的板壳结构截面优化及其在 MSC/NASTRAN 上的实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 22 陈继华, 隋允康, 杜家政. 基于满应力的膜结构截面优化及其在 MSC.Nastran 上的程序实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 23 金雪燕, 隋允康, 杜家政. 板壳结构满应力设计在 MSC/NASTRAN 上的实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 24 杜家政, 彭细容, 隋允康等. 岔枕螺栓及塑料套管抗拔实验数值模拟. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 25 杜家政, 彭细容, 隋允康等. 火车轨枕整体疲劳实验数值模拟. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 26 高峰, 隋允康, 杜家政. 桁架结构形状优化在 MSC/NASTRAN 上的实现. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 27 隋允康, 高峰, 龙连春, 杜家政. 基于层次分解方法的桁架结构形状优化. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 28 隋允康, 李栋, 龙连春, 杜家政. 使用二级控制法对二维连续体进行形状优化. MSC.Software 中国解决方案论坛 2003 论文集. 北京, 2003
 - 29 乔志宏, 杜家政, 隋允康. 多约束下的桁架结构截面优化在 NASTRAN 上的程序实现. 工程力学. 2003 年增刊, 20: 295~303
 - 30 乔志宏, 李栋, 杜家政, 隋允康. 桁架结构满应力设计在 NASTRAN 上的实现. 工程力学. 2003 年增刊, 20: 431~439
 - 31 杜家政, 隋允康, 郭英乔. 强度与刚度约束下大型空间框架截面优化. 工程力学. 2003 年增刊, 20: 180~183
 - 32 乔志宏, 杜家政, 隋允康. 含压杆局部稳定约束的桁架满应力设计在 NASTRAN 上的程序实现. 工程力学. 2003 年增刊, 20: 366~375
 - 33 陈继华, 隋允康, 杜家政. 膜结构的截面优化在 MSC/NASTRAN 上的二次开发. 工程力学. 2003 年增刊, 20: 353~356
 - 34 高峰, 隋允康, 杜家政. 桁架结构形状优化两层解法. 工程力学. 2003 年增刊, 20: 218~221
 - 35 杜家政, 隋允康, 郭英乔. 基于 ICM 方法的框架拓扑优化. 北京力学年会第十届学术年会论文摘要集. 北京, 2004
 - 36 Du Jiazheng, Sui Yunkang, Guo Yingqiao. Sectional Optimization Method of Frame Structures and Program Implementation with MSC/Patran, Nastran Software. COMPUTATIONAL MECHANICS WCCM VI in conjunction with APCOM'04, Sept. 5-10, 2004, Beijing, China. 2004. Tsinghua University Press

- & Springer-Verlag. (待发表)
- 37 Sui Yunkang, Du Jiazheng, Guo Yingqiao. Topological Optimization of Frame Structures under Multiple Loading Cases. International Conference on Computational Methods, Dec. 15–17, 2004, Singapore. 2004. (待发表)
- 38 杜家政, 隋允康, 郭英乔. 无量纲的框架结构截面优化. 北京工业大学学报, 2004. (待发表)
- 39 Sui Yunkang, Du Jiazheng, Guo Yingqiao. A Method Based on Dual-Quadratic Programming for Frame Structural Optimization with Large Scale. Applied Mathematics and Mechanics, 2004. 基于对偶二次规划的大型框架结构优化方法. 应用数学与力学, 2004. (待发表)
- 40 杜家政, 隋允康, 郭英乔. 同时满足刚度和强度约束的框架拓扑优化. 计算力学学报. 2004. (已投)
- 41 Sui Yunkang, Du Jiazheng, Guo Yingqiao. Independent Continuous Mapping for Topological Optimization of Frame Structures. 力学学报(英文版), 2004. (已投)
- 42 隋允康, 杜家政等. MSC.Nastran 有限元动力分析与优化设计实用教程. 北京: 科学出版社. 2004.4 (专著)

致 谢

本文是在恩师隋允康教授的悉心指导和热情关怀下完成的。五年来隋老师渊博的知识、严谨的治学态度、一丝不苟的学术风格、勤于思考、勇于创新的思维方式深深地感染了我，在未来的日子里将继续鞭策和激励我前进，并使我受益终生。隋老师不仅以自身渊博的学识指导着我的学习和科研，还通过言传身教告诉了我许许多多做人的道理，使我的学术水平与道德修养得到了同步提高，这将是我人生中最宝贵的财富！隋老师为了我的发展，把我推荐给法国 Reims 大学郭英乔教授，使我成为两校共同培养的博士生，并资助我获得去法国学习的机会，在此表示最诚挚的感谢！

郭老师为了我能够到法国学习做了大量工作，并提供资助。在法国学习期间，郭老师对我学习研究给予了悉心指导，对我给予了热情帮助和无微不至的关怀。郭教授的治学严谨和认真负责的精神永远是我学习的榜样！在此表示最诚挚的感谢！

五年来，师母叶宝瑞副教授在学习和生活中给予了我以及我的爱人无微不至的关心和帮助，使我感受到了母爱般的温暖，在此表示衷心的感谢！

在学习和研究过程中，得到了工程数值模拟中心的杨庆生教授、刘赵淼副教授、秦飞副教授、王亲猛副教授、龙连春副教授以及全体同学的关心和帮助，在法国学习期间，得到了法国 Reims 大学 GMMS 实验室 Karl 教授、李昱明博士、孙志超博士的关心和帮助，在此深表谢意！

本课题得到国家自然科学基金委（10072005）、北京市自然科学基金委（3042002）、北京市教委（KM200410005019）项目资助和美国 MSC 公司支持，在此表示感谢。

感谢美国 MSC 公司北京办事处为本课题提供的软件支持，特别感谢李军毅先生、钱纯女士和孙长任先生对本课题的大力支持！

感谢家人对我的理解、关心与支持，特别是我的爱人庄乾竹女士，使我顺利完成学业！

最后，再次感谢隋老师对我各方面的关心与帮助，更感谢隋老师给我创造的一切学习机会，特别感谢隋老师对我的所有批评，让我认识到自己的不足，超越自己，顺利完成论文！